1 Schwach konstruierbare Garben auf Simplizialkomplexen, relative Version

In diesem Abschnitt sollen die Beobachtungen der letzten beiden Abschnitte vereint werden. Nach Abschnitt **??** sind Garben auf einem Simplizialkomplex $\mathcal{K}$ nichts anderes als ein Simplizialkomplex von Garben über dem einpunktigen Raum. In Abschnitt **??** haben wir diese Garben auf $\mathcal{K}$ geometrisch charakterisiert als die simplizial konstanten Garben auf der geometrischen Realisierung $|\mathcal{K}|$ von $\mathcal{K}$. Wir erwarten daher auch eine relative Version dieser Aussage über einem beliebigen topologischen Raum X, die die Simplizialkomplexe von Garben auf X alias Garben auf $\mathcal{K} \times X$ geometrisch beschreibt.

Wir geben zunächst eine leichte Verallgemeinerung der Aussage von **??** an.

Wir definieren Garben mit Werten in beliebigen Kategorien C mit der schon in **??** verwandten allgemeinen Abstiegsbedingung.

Definition 1 ([**?**], 2.1.5)**.** Sei C eine vollständige Kategorie und X ein topologischer Raum. Eine C-wertige Prägarbe $F \in [\mathrm{Off_X}^{\mathrm{op}}, C]$ auf X heißt C-wertige Garbe auf X, falls sie die Abstiegsbedingung erfüllt:

> Für alle unter endlichen Schnitten stabilen offenen Überdeckungen $U = \bigcup_i U_i$ gilt $F(U) = \lim_i F(U_i)$.

Für C die Kategorien der Mengen oder der abelschen Gruppen ist diese Definition äquivalent zur bekannten Definition über die eindeutige Verklebbarkeit von verträglichen Schnitten.

Bezeichne wieder $\mathcal{B}$ die Kategorie der Basis der Topologie auf einem Produkt topologischer Räume $X \times Y$ mit Inklusionen als Morphismen.

Satz 2. *Seien X und Y topologische Räume. Dann gibt es eine Äquivalenz von Kategorien*

$$(\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}})_{/Y} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ens}_{/\mathcal{B}} \xleftarrow{\approx} \mathrm{Ens}_{/X \times Y}$$

gegeben durch

$$\begin{aligned} U \times V &\mapsto (F(V))(U) \quad \textit{für } F \in (\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}})_{/Y} \textit{ und} \\ U \times V &\mapsto F(U \times V) \quad \textit{die Restriktion für } F \in \mathrm{Ens}_{/X \times Y}\,. \end{aligned}$$

Beweis. Die zweite Äquivalenz ist **??**. Für die erste Äquivalenz bemerken wir wie in **??**, dass die zugrundeliegenden Prägarbenkategorien übereinstimmen. Nun fordert die Garbenbedingung für $\mathrm{Ens}_{/\mathcal{B}}$ die Verklebungseigenschaft für beliebige Überdeckungen von Basismengen durch Basismengen, während die Garbenbedingungen für $(\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}})_{/Y}$ die Verklebungseigenschaft für "Produkt-Überdeckungen" von Basismengen fordert, d. h. für Überdeckungen der Form $U \times V = \bigcup_{i,j} U_i \times V_j$ für $U = \bigcup_i U_i$ eine Überdeckung von U und $V = \bigcup_j V_j$ eine Überdeckung von V.

Beide Bedingungen sind aber äquivalent, da eine beliebige Überdeckung von $U \times V$ natürlich mit den Projektionen auf X und Y Überdeckungen von U und

V induziert und die Verträglichkeitsvoraussetzung für die Garbenbedingung von $\mathrm{Ens}_{/\mathcal{B}}$ bezüglich der Produktüberdeckung genau dann erfüllt ist, wenn sie für die ursprüngliche Überdeckung erfüllt ist. $\square$

Wir bezeichnen als eine relativ zu X schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbare Garbe eine Garbe $F \in \mathrm{Ab}_{|\mathcal{K}| \times X}$, für die die Einschränkungen $F|_{|\sigma| \times X}$ Rückzüge von Garben auf X sind, es also ein $G \in \mathrm{Ab}_{/\mathrm{X}}$ gibt mit

$$F|_{|\sigma| \times X} \xrightarrow{\sim} \pi^* G$$

für $\pi : |\sigma| \times X \to X$ die Projektion.

Wir könnten nun für diese Definition dieselben Aussagen wie im vorangegangen Abschnitt mit denselben Argumenten erneut beweisen. Unsere obige Charakterisierung ermöglicht uns aber ein einfacheres Vorgehen. Wir bemerken, dass im vorangegangenen Abschnitt lediglich die Struktur von $AbKreal$ als

??? ab. Kat mit Bifaserung ???

verwendet wurde und können so ...