1 Schwach konstruierbare Garben auf Simplizialkomplexen, relative Version

In diesem Abschnitt sollen die Beobachtungen der letzten beiden Abschnitte vereint werden. Nach Abschnitt **??** sind Garben auf einem Simplizialkomplex $\mathcal{K}$ nichts anderes als ein Simplizialkomplex von Garben über dem einpunktigen Raum. In Abschnitt **??** haben wir diese Garben auf $\mathcal{K}$ geometrisch charakterisiert als die simplizial konstanten Garben auf der geometrischen Realisierung $|\mathcal{K}|$ von $\mathcal{K}$. Wir erwarten daher auch eine relative Version dieser Aussage über einem beliebigen topologischen Raum X, die die Simplizialkomplexe von Garben auf X alias Garben auf $\mathcal{K} \times X$ geometrisch beschreibt.

Wir geben zunächst eine leichte Verallgemeinerung der Aussage von **??** an.

Wir definieren Garben mit Werten in beliebigen Kategorien C mit der schon in **??** verwandten allgemeinen Abstiegsbedingung.

Definition 1 ([**?**], 2.1.5)**.** Sei C eine vollständige Kategorie und X ein topologischer Raum. Eine C-wertige Prägarbe $F \in [\mathrm{Off_X}^{\mathrm{op}}, C]$ auf X heißt C-wertige Garbe auf X, falls sie die Abstiegsbedingung erfüllt:

> Für alle unter endlichen Schnitten stabilen offenen Überdeckungen
> $U = \bigcup_i U_i$ gilt $F(U) = \lim_i F(U_i)$.

Für C die Kategorien der Mengen oder der abelschen Gruppen ist diese Definition äquivalent zur bekannten Definition über die eindeutige Verklebbarkeit von verträglichen Schnitten.

Wir prüfen, dass wir so insbesondere "garbenwertige Garben" definieren können:

Lemma 2. *Die Kategorien* $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ *und* $\mathrm{Ab}_{/\mathrm{X}}$ *der (abelschen) Garben auf einem topologischen Raum X sind vollständig.*

Beweis. Die Kategorien der Mengen Ens ist vollständig. Somit ist auch die Kategorie der Prägarben auf X $[\mathrm{Off_X}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$ vollständig nach der Beschreibung von Limites in Funktorkategorien als objektweisen Limites. Tatsächlich ist aber in $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ die Limes-Prägarbe eines Systems von Garben bereits eine Garbe nach unserer Fromulierung der Garbenbedingung als Limes und der Kommutativität von Limites. Derselbe Beweis gilt für $\mathrm{Ab}_{/\mathrm{X}}$ unter Verwendung der Vollständigkeit der abelschen Gruppen. $\square$

Bezeichne wieder $\mathcal{B}$ die Kategorie der Basis der Topologie auf einem Produkt topologischer Räume $X \times Y$ mit Inklusionen als Morphismen.

Satz 3. *Seien X und Y topologische Räume. Dann gibt es eine Äquivalenz von Kategorien*

$$(\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}})_{/Y} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ens}_{/\mathcal{B}} \xleftarrow{\approx} \mathrm{Ens}_{/X \times Y}$$

gegeben durch

$$\begin{array}{ll} U \times V \mapsto (F(V))(U) & \textit{für } F \in (\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}})_{/Y} \textit{ und} \\ U \times V \mapsto F(U \times V) & \textit{die Restriktion für } F \in \mathrm{Ens}_{/X \times Y} \end{array}$$

für $U \overset{\circ}{\subset} X$ und $V \overset{\circ}{\subset} Y$.

Beweis. Die zweite Äquivalenz ist **??**. Für die erste Äquivalenz bemerken wir wie in **??**, dass die zugrundeliegenden Prägarbenkategorien übereinstimmen. Nun fordert die Garbenbedingung für $\mathrm{Ens}_{/\mathcal{B}}$ die Verklebungseigenschaft für beliebige Überdeckungen von Basismengen durch Basismengen, während die Garbenbedingungen für $(\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}})_{/Y}$ die Verklebungseigenschaft für "Produkt-Überdeckungen" von Basismengen fordert, d. h. für Überdeckungen der Form $U \times V = \bigcup_{i,j} U_i \times V_j$ für $U = \bigcup_i U_i$ eine Überdeckung von U und $V = \bigcup_j V_j$ eine Überdeckung von V. Wir rechnen dies nach:

$$\begin{aligned}(F(V))(U) &= (\lim_j F(V_j))(U) \\ &= \lim_j F(V_j)(U) \\ &= \lim_j \lim_i F(V_j)(U_i)\end{aligned}$$

wobei im ersten Schritt die Garbenbedingung von $F \in (\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}})_{/Y}$, und im dritten die von $F(V_j) \in \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ verwendet wurde. Im zweiten Schritt benutzen wir, dass für $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ Schnittfunktoren $\Gamma(U, \cdot) = \mathrm{Ens}_X(\mathrm{pt}_U, \cdot)$ darstellbar sind für pt_U die Einschränkung auf U der konstanten einpunktigen Garbe auf X und somit mit Limites vertauschen.

Beide Verklebungsbedingungen sind aber äquivalent, da eine beliebige Überdeckung von $U \times V$ natürlich mit den Projektionen auf X und Y Überdeckungen von U und V induziert und die Verträglichkeitsvoraussetzung für die Garbenbedingung von $\mathrm{Ens}_{/\mathcal{B}}$ bezüglich der Produktüberdeckung genau dann erfüllt ist, wenn sie für die ursprüngliche Überdeckung erfüllt ist. □

Wir bezeichnen als eine relativ zu X schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbare Garbe eine Garbe $F \in \mathrm{Ab}_{|\mathcal{K}| \times X}$, für die die Einschränkungen $F|_{|\sigma| \times X}$ Rückzüge von Garben auf X sind, es also ein $G \in \mathrm{Ab}_{/\mathrm{X}}$ gibt mit

$$F|_{|\sigma| \times X} \xrightarrow{\sim} \pi^* G$$

für $\pi : |\sigma| \times X \to X$ die Projektion.

Wir könnten nun für diesen Begriff dieselben Aussagen wie im vorangegangen Abschnitt mit vollkommen analogen Argumenten erneut beweisen. Ein bisschen Kategorientheorie und unsere obige Charakterisierung ermöglichen uns aber ein einfacheres Vorgehen. Wir bemerken, dass für die Konstruktion unserer Kategorienbifaserung $\mathrm{Ab}_{/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ mitsamt ihren bekannten Eigenschaften und die darauf aufbauende Argumentation im vorangegangenen Abschnitt der Umstand keine Rolle gespielt hat, dass unsere Garben Werte in den abelschen Gruppen annehmen. Dieselben Konstruktionen funktionieren für $\mathcal{A}_{/\,\mathrm{Top}}$ eine Garbenkategorie mit Werten in einer beliebigen vollständigen abelschen Kategorie. Davon überzeugt man sich im Zweifel auch explizit zunächst durch Übertragung auf Garbenkategorien mit Werten in R-Linksmoduln und dann durch den Einbettungssatz von Mitchell auf beliebige abelsche Kategorien.

Wir erhalten:

Theorem 4.