1 Schwach konstruierbare Garben auf Simplizialkomplexen

Ziel dieses Abschnitts ist die Charakterisierung schwach konstruierbarer Garben auf Simplizialkomplexen und ihrer derivierten Kategorie. Die Darstellung folgt Kashiwara-Schapira.

In diesem Abschnitt bezeichne $(V, \mathcal{K})$ einen lokal-endlichen Simplizialkomplex mit Eckenmenge V. Für einen Simplex $\sigma \in \mathcal{K}$ definieren wir seine geometrische Realisierung $|\sigma| \subset \mathbb{R}^V = \mathrm{Ens}(V, \mathbb{R})$:

$$|\sigma| = \{x \in \mathbb{R}^V | x(p) = 0 \text{ für } p \notin \sigma, x(p) > 0 \text{ für } p \in \sigma, \sum_{p \in V} x(p) = 1\},$$

sowie die geometrische Realisierung $|\mathcal{K}| \subset \mathbb{R}^V$ von $\mathcal{K}$

$$\bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} |\sigma|,$$

jeweils versehen mit der induzierten Topologie von $\mathbb{R}^V$.

Wir erhalten eine Abbildung

$$p : |\mathcal{K}| \to \mathcal{K},$$

genannt Simplexanzeiger oder Indikatorabbildung, der einem Punkt $x \in |\mathcal{K}|$ in der geometrischen Realisierung den eindeutigen Simplex $\sigma \in \mathcal{K}$ mit $x \in |\sigma|$ zuordnet.

Lemma 1. *Der Simplexanzeiger $p : |\mathcal{K}| \to \mathcal{K}$ ist stetig.*

Beweis. Das Urbild einer Basismenge $(\geq \sigma)$ ist

$$p^{-1}((\geq \sigma)) = |\mathcal{K}| \cap \{x \in \mathbb{R}^V | x(p) > 0 \text{ für } p \in \sigma\},$$

der offene Stern um σ, den wir auch als $U(\sigma)$ notieren. □

Definition 2. Eine Garbe $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ heißt schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbar (oder kurz: schwach konstruierbar), falls für alle $\sigma \in \mathcal{K}$, die Einschränkungen $F|_{|\sigma|}$ konstante Garben sind. Wir bezeichnen die volle Unterkategorie der schwach konstruierbaren Garben in $\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ mit $\text{s-Kons}(\mathcal{K})$.

Eine derivierte Garbe $F \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$ heißt schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbar, falls für alle $j \in \mathbb{Z}$ die Kohomologiegarben $H^j(F)$ schwach konstruierbar sind. Wir bezeichnen die volle Unterkategorie der schwach konstruierbaren derivierten Garben in $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$ mit $\mathrm{Der}_{\mathrm{sk}}(|\mathcal{K}|)$.

Wir bemerken zunächst:

Lemma 3. *Die Kategorie* $\text{s-Kons}(\mathcal{K})$ *ist abelsch.*

Beweis. Durch den offensichtlichen Isomorphismus zur Kategorie der abelschen Gruppen (durch den Funktor der globalen Schnitte) ist die Kategorie der konstanten abelschen Garben auf einem topologischen Raum X eine abelsche Kategorie. Nun folgt die Aussage aus der Exaktheit des Pullbacks i_σ^* entlang den Inklusionen $i_\sigma : |\sigma| \hookrightarrow |\mathcal{K}|$. □

Entscheidend ist die folgende Charakterisierung schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbarer derivierter Garben:

Proposition 4. *Für $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ sind äquivalent:*

1. *F ist schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbar*
2. *Die Koeinheit der Adjunktion ist auf F ein Isomorphismus $p^*p_*F \xrightarrow{\sim} F$.*

Beweis. □

Wir bezeichnen den Funktor $p^*p_* : \mathrm{Ab}_{/\mathrm{X}} \to$ s-Kons kurz mit β und bemerken, dass er nach obiger Proposition ein Rechtsadjungierter zur Inklusion ι : s-Kons $\to \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ ist:

Als Komposition zweier linksexakter Funktoren ist β natürlich wieder linksexakt.

Der allgemeinen Terminologie folgend bezeichnen wir eine Garbe $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ β-azyklisch, falls sie keine höheren direkten Bilder hat, also falls

$$R^k\beta F = 0 \text{ für alle } k > 0.$$

Später benötigen wir die folgende Charakterisierung β-azyklischer Garben:

Proposition 5. *Eine Garbe $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ ist β-azyklisch genau dann, wenn $H^k(U(\sigma); F) = 0$ für alle $\sigma \in \mathcal{K}, k > 0$. Insbesondere gilt:*

1. *Schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbare Garben sind β-azyklisch.*
2. *Welke Garben sind β-azyklisch.*

Beweis. Nach der Charakterisierung höherer direkter Bilder ist $R^q\beta F = p^*R^qp_*F$ für $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ isomorph zur Garbifizierung der Prägarbe

$$(\geq \sigma) \mapsto H^q(p^{-1}((\geq \sigma)); F) = H^q(p^{-1}(U(\sigma)); F).$$

... □

Proposition 6. *Sei $F \in \mathrm{Ket}^+(\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$ ein gegen die Richtung der Pfeile beschränkter Kettenkomplex aus β-azyklischen Garben mit schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbaren Kohomologiegarben $H^q(F)$. Dann ist $\beta F \to F$ ein Quasi-Isomorphismus.*

Beweis. Wir schneiden aus dem Kettenkomplex (F^n, d^n) kurze exakte Sequenzen aus:

$$\begin{array}{lllll}
H^0 = \ker d^0 \hookrightarrow F^0 \twoheadrightarrow \operatorname{im} d^0 & & & & \\
& \operatorname{im} d^0 \hookrightarrow \ker d^1 \twoheadrightarrow H^1 & & & \\
& & \ker d^1 \hookrightarrow F^1 \twoheadrightarrow \operatorname{im} d^1 & & \\
& \vdots & & &
\end{array}$$

Sind in einer kurzen exakten Sequenz zwei der drei Objekte azyklisch, so nach dem Fünferlemma auch das dritte. Da nach Voraussetzung und 5 F^q und H^q β-azyklisch sind, sind alle oben betrachteten Objekte β-azyklisch und die kurzen exakten Sequenzen bleiben exakt nach Anwendung von β. Es folgt $H^q(\beta F) \xrightarrow{\sim} \beta(H^q F)$ und weiter $\beta(H^q F) \xrightarrow{\sim} H^q F$ nach der schwachen Konstruierbarkeit von $H^q F$. □

Damit ist der entscheidende Schritt für unser Ziel gezeigt. Wir erhalten:

Theorem 7. *Sei $\mathcal{K}$ ein lokal-endlicher Simplizialkomplex.*

Die oben definierten Funktoren ι, β induzieren auf den derivierten Kategorien eine Äquivalenz

$$\mathrm{Der}^+(\text{s-Kons}(\mathcal{K})) \underset{R\beta}{\overset{\iota}{\rightleftarrows}} \mathrm{Der}^+_{\mathrm{sk}}(|\mathcal{K}|).$$

Beweis. Die Kategorien $\mathrm{Der}^+(\text{s-Kons}(\mathcal{K}))$ und $\mathrm{Der}^+_{\mathrm{sk}}(|\mathcal{K}|)$ haben genug Injektive. Mit der Grothendieck-Spektralsequenz für derivierte Kategorien ([**?**], 3.4.18) erhalten wir somit

$$R\beta \circ R\iota \xrightarrow{\sim} R(\beta \circ \iota) \xrightarrow{\sim} R\,\mathrm{Id} = \mathrm{Id},$$

da welke Garben β-azyklisch sind, sowie

$$\iota \circ R\beta \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}$$

nach der vorangegangenen Proposition. □

Bemerkung 8. Kashiwara und Schapira beschränken sich auf die Äquivalenz der beschränkten derivierten Kategorien, allerdings mit der gleichen Argumentation. In [**?**] 1.7.12 wird eine allgemeine Aussage für solche Situationen gezeigt, die hier aber m.E. nicht benötigt wird.