0.1 Schwach konstruierbare Garben auf simplizialen Mengen

In diesem Abschnitt möchten wir die Aussagen aus den Kapiteln **??** und **??** übertragen auf den Fall, dass es sich bei dem Basisraum um die Realisierung einer simplizialen Menge anstelle eines Simplizialkomplexes handelt. Simplizialkomplexe sind halbgeordnete Mengen und unsere Technik verwendete die Ordnungstopologie halbgeordneter Mengen. Simplizial konstante Garben auf simplizialen Mengen entsprechen hingegen Diagrammen von Mengen, in denen es auch mehrere Pfeile zwischen zwei zu nichtdegenerierten Simplizes gehörigen Punkten geben kann. Solche kategoriellen Realisierungen simplizialer Mengen werden wir in diesem Abschnitt konstruieren.

Konkret ist für $X \in \mathrm{s\,Ens}$ eine simpliziale Menge eine Kategorie D_X gesucht, für die es eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathrm{Ens}^{sk}_{/|X|} \xrightarrow{\approx} [D_X^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$$

gibt. Dabei steht $\mathrm{Ens}^{sk}_{/|X|}$ für die simplizial konstanten Garben auf $|X|$. Wir diskutieren die in Frage kommenden Kategorien D_X an einem einfachen Beispiel. Betrachte die Standarddarstellung von S^1 als simpliziale Menge X mit einem nichtdegenerierten 1-Simplex und einem nichtdegenerierten 0-Simplex aus **??**. Als kategorielle Realisierung D_X von X können folgende Diagramme in Frage kommen:

1. Das Diagramm $D_X = (\bullet \to \bullet)$. Es handelt sich um das Diagramm der nichtdegenerierten Simplizes von X mit der Angabe, welche Simplizes im Abschluss welcher Simplizes liegen. Dieses Diagramm ist zu grob, um simplizial konstanten Garben auf S^1 zu entsprechen, wie die Realisierung von D_X mit der Ordnungstopologie und dann die erste Garbenkohomologie zeigt. Im Abschnitt 0.1.2 werden wir diese kategorielle Realisierung mit der geometrischen Realisierung durch plumpe Simplizes in Beziehung setzen.
2. Das Diagramm $D_X = \Delta \downarrow_r X$. Es handelt sich um das Diagramm aller Simplizes von X mit der Angabe von Rändern und Degenerationen. Diese Diagramm ist zu fein, um von einer simplizial konstanten Garbe auf S^1 eindeutig bestimmt zu werden, denn diese trägt keine Informationen über die degenerierten Simplizes. Im Abschnitt 0.1.3 werden wir diese kategorielle Realisierung mit den simplizialen Objekten in $\mathrm{Ens}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}}$ mit diskreten Basisräumen in Beziehung setzen.
3. Das Diagramm $D_X = (\bullet \rightrightarrows \bullet)$. Dieses Diagramm würden wir anschaulich erwarten. Es handelt sich um die nichtdegenerierten Simplizes von X mit der Angabe von Rändern, nicht aber von Degenerationen. Im Abschitt 0.1.1 zeigen wir die versprochene Aussage, dass Prägarben auf diesem Diagramm simplizial konstanten Garben auf $|X|$ entsprechen.

0.1.1 Realisierung als gerichtete Kategorie

Wir benötigen die Begriffe für nichtdegenerierte Simplizes (vgl. **??**, **??**).

Definition 0.1. Die Unterkategorie der endlichen nichtleeren Ordinalzahlen mit injektiven monotonen Abbildungen $\Delta^+ \subset \Delta$ heißt *nichtdegenerierte Simplexkategorie.*

Wir wiederholen die Begriffe für simpliziale Mengen für Prägarben auf Δ^+.

Definition 0.2. Die darstellbare Prägarbe auf Δ^+

$$\Delta^{+n} := \Delta^+(\cdot, [n])$$

heißt der *nichtdegenerierte Standard-n-Simplex.*

Diese Zuordnung liefert einen Funktor $r : \Delta^+ \to [\Delta^{+\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$. Wir erhalten unsere für die kategorielle Realisierung gewünschte kosimpliziale Kategorie durch den Funktor der nichtdegenerierten Simplizes des nichtdegenerierten Standard-n-Simplex. Bezeichne dazu $\iota : \Delta^+ \hookrightarrow \Delta$ den Inklusionsfunktor und $\iota^* : [\Delta^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}] \to [\Delta^{+\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$ den Rückzugsfunktor auf Prägarben.

Definition 0.3. Der *Stufenfunktor* ist der Funktor

$$N : \Delta^+ \downarrow_r \iota^*\Delta^n \to \Delta^+ \downarrow_r \Delta^{+n},$$

gegeben durch das kommutative Quadrat

$$\begin{tikzcd}
f : \Delta^{+m} \to \iota^*\Delta^n \arrow[r, mapsto] \arrow[d, maps to, "\sim"] & N(f) : \Delta^{+k} \to \iota^*\Delta^{+n} \arrow[d, maps to, "\sim"] \\
f \in \Delta([m],[n]) \arrow[r, mapsto] & N(f) \in \Delta^+([k],[n]),
\end{tikzcd}$$

in dem die Vertikalen die eindeutigen Zuordnungen aus dem Yoneda-Lemma sind und die untere Horizontale die Abbildung, die eine monotone Abbildung f auf die eindeutige monotone Injektion $N(f)$ aus **??** mit demselben Bild (und anderem Definitionsbereich $[k]$) schickt.

Bemerkung 0.4. Der Name "Stufenfunktor" rührt daher, dass die Werte einer monotonen Funktion die Stufen in ihrem Graphen beschreiben.

Das Vorschalten von monotonen Injektionen vor $f \in \Delta([m],[n])$ (Morphismen in $\Delta^+ \downarrow_r \iota^*\Delta^n$) induziert auf der zugehörigen monotonen Injektion $\hat{f} \in \Delta^+([k],[n])$ ebenfalls Morphismen durch Vorschalten von Injektionen, denn das Einschränken von Funktionen auf Teilmengen verkleinert auch die Bildmengen. Dies zeigt die Funktorialität.

Proposition 0.5. *Die Zuordnung*

$$\begin{tikzcd}
{[n]} \arrow[r, mapsto] \arrow[dd, "f"] & \Delta^+ \downarrow_r \Delta^{+n} \arrow[d, "f\circ"] \\
 & \Delta^+ \downarrow_r \iota^*\Delta^m \arrow[d, "N"] \\
{[m]} \arrow[r, mapsto] & \Delta^+ \downarrow_r \Delta^{+m}
\end{tikzcd}$$

ist ein Funktor $R : \Delta \to \mathrm{Cat}$, genannt die kosimpliziale Standard-Kategorie.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass für monotone $f : [m] \to [n]$ und $g : [l] \to [m]$ gilt

$$N((f \circ g)\circ) = N(f\circ)N(g\circ)$$

für $(f\circ)$ den Nachschaltefunktor und N den Stufenfunktor. Das folgt aber daraus, dass beide Funktoren eine monotone Injektion $h : [k] \to [l]$ auf die Injektion auf $\mathrm{im}(f \circ g \circ h)$ schicken. Diese Entsprechnung ist verträglich mit Einschränkungen von h (Vorschalten von monotonen Injektionen), ist also eine Transformation.

Es handelt sich bei den Kategorien $\Delta^+ \downarrow_r \Delta^{+n}$ um "gerichtete Kategorien", bei denen es keine Kreise von Pfeilen außer den Identitäten gibt, denn die nichttrivialen Morphismen sind das Vorschalten von echten Injektionen und senken somit den Grad eines Simplex. □

Proposition 0.6. *Die Kategorie der kleinen Kategorien* Cat *ist kovollständig.*

Beweis. Koprodukte in Cat sind die Koprodukte der zugrundeliegenden Köcher, d. h. die disjunkte Vereinigung über die Objektmengen und aus den Ausgangskategorien übernommene Morphismenmengen.

Die Koegalisatoren in Cat sind schwieriger, vergleiche [**?**]. Wir geben die Konstruktion kurz an. Betrachte kleine Kategorien mit Funktoren $A \rightrightarrows^F_G B$. Die dem Koegalisator $B \to C$ zugrundeliegende mengentheoretische Abbildung ist der Koegalisator der den Funktoren F und G zugrundeliegenden mengentheoretischen Abbildungen. Durch diese Identifikationen in C werden Morphismen neu komponierbar, deren Kompositionen den durch die Identifikationen verschmolzenen Morphismenmengen hinzugefügt werden. Weiter müssen wie im folgenden Diagramm Morphismen Ff und Gf identifiziert werden, was auf die Kompositionen fortgesetzt wird.

$$\begin{array}{ccccc} a & & Fa & \sim & Ga \\ \downarrow f & \longmapsto & \downarrow Ff & \sim & \downarrow Gf \\ b & & Fb & \sim & Gb \end{array}$$

Die Identifikationen $Fa \sim Ga$ für $a \in A$ und $Ff \sim Gf$ für $f \in A(a, b)$ sind notwendig für einen Koegalisator $B \to C$, damit $A \rightrightarrows^F_G B \to C$ übereinstimmen. Die weiteren Schritte machen "minimalinvasiv" B mit diesen Identifikationen wieder zu einer Kategorie. □

Bemerkung 0.7. Der Ansatz, Limites und Kolimites in *Cat* mittels **??** über die Einbettung Cat $\subset$ Quiv in die Kategorie der Köcher zu konstruieren, funktioniert *nicht*. Jene ist als Prägarbenkategorie tatsächlich vollständig und kovollständig und die Inklusion hat mit der freien Pfadkategorie über einem Köcher tatsächlich einen Linksadjungierten; allerdings handelt es sich nicht um eine volle (dann also reflektive) Unterkategorie, weshalb die Limites und Kolimites von denen in Quiv bzw. ihren freien Pfadkategorien abweichen.

Definition 0.8. Die *kategorielle Realisierung* einer simplizialen Menge $X \in$ s Ens ist definiert als das Tensorprodukt von Funktoren $X \otimes R \in$ Cat für R die kosimpliziale Standard-Kategorie und die natürliche Ens-tensorierte Struktur auf Cat (**??**).

Beispiel 0.9. *Betrachte die Standarddarstellung von S^1 als simpliziale Menge X mit einem nichtdegenerierten 1-Simplex und einem nichtdegenerierten 0-Simplex aus* **??**. *Wie angekündigt ist die kategorielle Realisierung von X das Diagramm*

$$\bullet \rightrightarrows \bullet$$

mit zwei Objekten und zwei parallelen Pfeilen dazwischen, sowie nicht eingezeichneten Identitäten.

Als zweite Zutat für unseren Satz, der simplizial konstante Garben auf $|X|$ mit Prägarben auf der kategoriellen Realisierung $X \otimes R$ in Beziehung setzen soll, benötigen wir eine Charakterisierung von Garben auf Kolimites topologischer Räume. Unser Weg führt über die halbgeordneten den topologischen Räumen zugeordneten *Locales* ihrer offener Mengen.

Definition 0.10. Eine halbgeordnete Menge X heißt *Rahmen* (engl. *frame*, falls sie endliche Infima $U \wedge V$ und beliebige Suprema $\bigvee_i U_i$ besitzt und das Distributivgesetz

$$\bigvee_i (U \wedge V_i) = U \wedge (\bigvee_i V_i)$$

erfüllt. Ein Rahmen-Morphismus ist ein Morphismus halbgeordneter Mengen, der Suprema und endliche Infima erhält.

Wir notieren die Kategorie der Rahmen mit Frm und ihre opponierte Kategorie der *Locales* mit $\mathrm{Loc} := \mathrm{Frm}^{\mathrm{op}}$.

Es gibt einen offensichtlichen Funktor $\mathrm{Off} : \mathrm{Top} \to \mathrm{Loc}$, der einem topologischen Raum X die halbgeordnete Menge seiner offenen Mengen $\mathrm{Off}_{\mathrm{X}}$ mit ihren mengentheoretischen Inklusionen zuordnet. Ist $f : X \to Y$ stetig, so definiert das Urbild $f^{-1} : \mathrm{Off}_Y \to \mathrm{Off}_X$ einen Morphismus von Rahmen in die Gegenrichtung bzw. einen gleichsinnigen Morphismus von Locales $\mathrm{Off}_X \to \mathrm{Off}_Y$.

Bezeichne nun weiter Bas die Kategorie der halbgeordneten Mengen, die endliche Infima besitzen und deren (sofern existente) Suprema das Distributivitätsgesetz erfüllen. Morphismen in Bas sind opponierte Morphismen halbgeordneter Mengen, die Suprema und endliche Infima erhalten. Die Kategorie Bas verallgemeinert somit die Eigenschaften von Basen topologischer Räume. Wir erhalten einen offensichtlichen Reflektor $T : \mathrm{Bas} \to \mathrm{Loc}$, der eine halbgeordnete Menge um ihre Suprema ergänzt, also im Fall einer Basis eines topologischen Raums die erzeugte Topologie bildet.

Proposition 0.11. *Bis auf Anwenden der Einheit der Adjunktion (T, ι) ist der Funktor* $\mathrm{Off} : \mathrm{Top} \to \mathrm{Loc} \to \mathrm{Bas}$ *kostetig, d. h. es gilt in* Bas*:*

$$\mathrm{Off}(\mathrm{col}_i X_i) \xrightarrow{\sim} T\,\iota\,\mathrm{col}_i \mathrm{Off}(X_i).$$

Beweis. Die Topologie einer disjunkten Vereinigung $\bigsqcup_i X_i$ hat tatsächlich die Basis $\bigsqcup_i \mathrm{Off}_{X_i}$.

Für einen Koegalisator

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{q} K$$

in Top gilt: $U \subset K$ ist offen genau dann, wenn $q^{-1}(U) \subset Y$ offen ist. Wir können Off_K folglich mit den $U \in \mathrm{Off}_Y$ identifizieren, für die $q^{-1}(q(U)) = U$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn U stabil ist unter Hinzunahme äquivalenter Punkte $f(x) \sim g(x)$, d. h. wenn $f^{-1}(U) = g^{-1}(U)$. Es folgt, dass

$$\mathrm{Off}_K \xrightarrow{q^{-1}} \mathrm{Off}_Y \underset{g^{-1}}{\overset{f^{-1}}{\rightrightarrows}} \mathrm{Off}_X$$

sogar ohne Rückgriff auf die Einheit der Adjunktion ein Egalisator von Rahmen ist, also ein Koegalisator von Locales. □

Korollar 0.12. *Es gibt eine natürliche Äquivalenz von Kategorien*

$$\mathrm{Ens}_{/\operatorname{col}_i X_i} \xrightarrow{\approx} \lim_i \mathrm{Ens}_{/X_i}\,.$$

Beweis. □

Theorem 0.13.

0.1.2 Realisierung als halbgeordnete Menge

Der kombinatorische topologische Raum $\blacktriangle X$ einer simplizialen Menge eignet sich *nicht* für die Übertragung der Aussagen zu schwach konstruierbaren Garben auf Simplizialkomplexen auf die Situation simplizialer Mengen, denn diese geometrische Realisierung sieht nicht mehrfache Verklebungsabbildungen. Dies möchten wir präzise machen. Wir definieren dazu eine Realisierung $X \otimes P$ von X durch halbgeordnete Mengen. Die kosimpliziale halbgeordnete Menge $P : \Delta \to \mathrm{poset}$ erhalten wir dabei aus $R : \Delta \to \mathrm{Cat}$ durch Anwenden eines Reflektors $\mathrm{Cat} \to \mathrm{poset}$.

Proposition 0.14. *Die Kategorie* poset *der halbgeordneten Mengen ist kovollständig.*

Beweis. Die halbgeordneten Mengen sind eine volle Unterkategorie $\mathrm{poset} \subset \mathrm{Cat}$. Wir können daher **??** verwenden, mit dem Reflektor $\mathrm{Cat} \to \mathrm{poset}$, der im folgenden Lemma konstruiert wird. □

Definition 0.15. Eine Kategorie heißt *dünn*, falls jede Morphismenmenge höchstens einelementig ist. Eine Kategorie heißt *Skelettkategorie*, falls in ihr jeder Isomorphismus eine Identität ist.

Lemma 0.16. *Die vollen Unterkategorien* $\mathrm{thinCat}, \mathrm{skelCat} \subset \mathrm{Cat}$ *der dünnen bzw. Skelettkategorien sind reflektiv. Der Reflektor* $\mathrm{Cat} \to \mathrm{skelCat}$ *macht aus dünnen Kategorien dünne Kategorien und liefert durch Komposition mit dem Reflektor* $\mathrm{Cat} \to \mathrm{thinCat}$ *einen Reflektor* $\mathrm{pos} : \mathrm{Cat} \to \mathrm{poset}$.

Beweis. Der Linksadjungierte zu $\mathrm{thinCat} \hookrightarrow \mathrm{Cat}$ ist gegeben durch die Identifikation aller nichtleeren Morphismenmengen zu einelementigen Morphismenmengen. Der Linksadjungierte zu $\mathrm{skelCat} \hookrightarrow \mathrm{Cat}$ ist die zu einer kleinen Kategorie mit dem Auswahlaxiom konstruierte Unterkategorie, die Isomorphieklassen von Objekten durch ein Objekt aus diesen ersetzt. Klar ist, dass Funktoren $F : C \to D$ in eine dünne Kategorie D Abbildungen auf Objekten sind mit der Zusatzeigenschaft, dass es einen Morphismus $Ff : Fx \to Fy$ in D geben muss, wann immer es einen Morphismus $f : x \to y$ in C gibt. Das ist unerheblich davon, wie viele Morphismen $x \to y$ es in C gibt und zeigt die erste Adjunktion. Ein Funktor in eine Skelettkategorie schickt isomorphe Objekte auf dasselbe Objekt, wird also schon durch das Bild eines Objekts jeder Isomorphieklasse eindeutig festgelegt. Dies zeigt die zweite Adjunktion.

Der Reflektor Cat $\to$ skelCat liefert eine Unterkategorie und erhält deshalb Dünnheit. Halbgeordnete Mengen sind nach Definition dünne Skelettkategorien. $\square$

Bezeichne nun $P = \operatorname{pos} R : \Delta \to \mathrm{poset}$ die kosimpliziale halbgeordnete Menge zu unseren Standardkategorien. Die halbgeordneten Mengen $P[n] = \operatorname{pos} \Delta^+ \downarrow_r \Delta^{+n}$ sind dann die opponierten Standard-n-Simplizialkomplexe.

Proposition 0.17. *Sei $X \in \mathrm{s\,Ens}$ eine simpliziale Menge. Dann gibt es einen Homöomorphismus $\blacktriangle X \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ord}((X \otimes P)^{\mathrm{op}})$.*

Beweis. Der Funktor Ord : poset $\to$ Top ist nach dem nachgestellten Lemma kostetig. Daher reicht es mit **??** (und der Kostetigkeit des Opponierens), einen Isomorphismus kosimplizialer topologischer Räume $\blacktriangle \to \mathrm{Ord}\, P^{\mathrm{op}}$ zu finden. Beide bestehen aus einem Punkt pro nichtdegeneriertem Simplex (**??**) von Δ^n und haben als offene Mengen nach oben abgeschlossene Mengen. Randabbildungen d_i sind Inklusionen in die Ränder, Degenerationen Kollapse von Kanten. Dies begründen wir sorgfältiger: Unsere Definition von $Ps_i : P[n] \to P[n-1]$ schickt einen nichtdegenerierten Simplex $f : [m] \to [n]$ monoton und injektiv auf $N(s_i \circ f)$, den nichtdegenerierten Simplex, der zum Kollaps von i und $i+1$ in f gehört. $\square$

Lemma 0.18. *Der Funktor* Ord : poset $\to$ Top*, der eine halbgeordneten Menge mit der Ordnungstopologie versieht, ist kostetig.*

Beweis. Klar ist, dass Ord mit Koprodukten vertauscht. Sei nun $A \rightrightarrows^F_G B \to C$ ein Koegalisator in den halbgeordneten Mengen. Dann ist nach 0.6 und 0.15 die zugrundeliegende mengentheoretische Abbildung von $q : B \to C$ der mengentheoretische Koegalisator: nur der Reflektor Cat $\to$ skelCat könnte die zugrundeliegende Menge ändern, wird aber bereits auf eine Skelettkategorie angewandt, denn ein Kategorienkolimes über halbgeordnete Mengen enthält keine Morphismen in entgegengesetzte Richtungen. Wir müssen noch zeigen, dass $\mathrm{Ord}(q) : \mathrm{Ord}\, B \to \mathrm{Ord}\, C$ final ist. Ist $U \subset C$ eine Menge mit offenem Urbild $q^{-1}(C)$, so ist ein Morphismus $x \to y$ in C mit $x \in U$ ein Pfad $x = v_0 \to v_1 \sim w_1 \to w_2 \sim v_2 \to \cdots \to y$ bestehend aus Morphismen in B, die sich nach den Identifaktionen durch q verknüpfen lassen. Induktiv liegen nun nach der Abgeschlossenheit nach oben von $q^{-1}(U)$ alle v_i, w_i in $q^{-1}(U)$ und somit auch y. Es folgt die Offenheit von U. $\square$

Mit **??** und 0.16 erhalten wir sofort die folgende kombinatorische Charakterisierung von Garben auf der plumpen Realisierung:

Proposition 0.19. *Sei* $X \in \mathrm{s\,Ens}$ *eine simpliziale Menge. Dann gibt es eine Äquivalenz von Kategorien* $\mathrm{Ens}_{/\blacktriangle X} \xrightarrow{\approx} [(X \otimes P)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$.

Bemerkung 0.20. Betrachte für eine feste simpliziale Menge $X \in \mathrm{s\,Ens}$ die volle Unterkategorie $(\mathrm{s\,Ens}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}})_X \subset \mathrm{s\,Ens}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}}$ der simplizialen Garben über topologischen Räumen mit Komorphismen, für die die Basisräume diskret und als simplizialer topologischer Raum isomorph zur simplizialen Menge X sind. Man könnte eine Aussage wie die folgende erwarten:

> Die kovariante Realisierung mittels plumper Simplizes (**??**) liefert eine Äquivalenz von Kategorien
>
> $$(\mathrm{s\,Ens}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}})_X \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ens}_{/\blacktriangle X}\,.$$

Dies verhindern aber die degenerierten Simplizes $s^*(\sigma)$ für $s : [n] \to [m]$ monoton und surjektiv. Für diese enthält eine simpliziale Garbe F auf der linken Seite beliebig wählbare Mengen, die Halme $(F_n)_{s^*(\sigma)}$, welche aus der geometrischen Realisierung nicht wiedergewonnen werden können, da sie mit ihren Bildern unter $Fs : (F_n)_{s^*(\sigma)} \to (F_m)_\sigma$ identifiziert werden.

Stattdessen setzen wir $(\mathrm{s\,Ens}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}})_X^{nd} \subset (\mathrm{s\,Ens}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}})_X$ die volle Unterkategorie der oben definierten simplizialen Garben F über X, für die zudem die Degenerationen $Fs : (F_n)_{s^*(\sigma)} \to (F_m)_\sigma$ Bijektionen sind. Für diese erhalten wir den gewünschten quasiinversen Funktor, indem wir mit 0.18 einer Garbe $F \in [(X \otimes R)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$ auf folgende Weise eine simpliziale Garbe $\hat{F} \in (\mathrm{s\,Ens}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}})_X^{nd}$ zuordnen: Schreibe für $\sigma \in X_n$ kurz $F(\sigma)$ für die Menge, die F dem maximalen Element in $\{\sigma\} \times R[n]^{\mathrm{op}}$ via $X_n \times R[n]^{\mathrm{op}} \to (X \otimes R)^{\mathrm{op}}$ zuordnet. Die Garben $\hat{F}_n \in \mathrm{Ens}_{/X_n}$ sind diskret und bestehen dann aus der Menge $F(N(\sigma))$ über σ. Für eine monotone Abbildung $f : [n] \to [m]$ erhalten wir die Abbildungen $(\hat{F}_n)_{f^*(\sigma)} \to (\hat{F}_m)_\sigma$ für die Komorphismen von $\hat{F}$ über f^* aus $F(N(f(\sigma))) \to F(N(\sigma))$. Insbesondere sind die Degenerationen $(\hat{F}_n)_{s^*(\sigma)} \to (\hat{F}_{n-1})_\sigma$ dann einfach Identitäten und unsere Abbildungen erfüllen die simplizialen Relationen.

0.1.3 Realisierung als Simplexkategorie

0.1.4 Allgemeine schwache Konstruierbarkeit

Wir kommen nun zur Übertragung der Ergebnisse aus **??** auf die Situation simplizialer Mengen. Dies ermöglicht etwa die Aussage auch für Triangulierungen wie in Beispiel **??**.

Nach der Bemerkung **??** reicht es, die topologischen Teile des Beweises zu übertragen. Wir sammeln die benötigten Axiome:

Definition 0.21. Eine *Konstruierbarkeitssituation* ist eine stetige Abbildung $p : |\mathcal{K}| \to \mathcal{K}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. p ist final, surjektiv und hat zusammenhängende Fasern.
2. Jeder Punkt $\sigma \in \mathcal{K}$ besitzt eine kleinste offene Umgebung $(\geq \sigma)$.

Wir notieren $U(\sigma) = p^{-1}((\geq \sigma))$. In einer Konstruierbarkeitssituation nennen wir $\mathcal{K}$ die *kombinatorische* und $|\mathcal{K}|$ die *geometrische Realisierung.*

Der "richtige" äquivalente Begriff von schwacher Konstruierbarkeit aus **??** wird zur allgemeinen Definition:

Definition 0.22. Eine Garbe $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ heißt schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbar, falls die Koeinheit der Adjunktion auf F ein Isomorphismus $p^* p_* F \xrightarrow{\sim} F$ ist.

Auch übertragen wir den Begriff derivierter schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbarer Garben (mit schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbaren Kohomologiegarben) und die Notationen s-Kons$(\mathcal{K})$ und $\mathrm{Der}_{\mathrm{sk}}(|\mathcal{K}|)$.

Mit identischem Beweis überträgt sich der allgemeine Teil von **??** übertragen:

Proposition 0.23. *In einer Konstruierbarkeitssituation $p : |\mathcal{K}| \to \mathcal{K}$ sind für $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ sind äquivalent:*

(1) F ist schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbar

(2) F liegt im wesentlichen Bild des Rückzugs p^*.

(3) Die Restriktion $F(U(\sigma)) \to F_x$ ist für alle $\sigma \in \mathcal{K}$ und alle $x \in |\sigma|$ ein Isomorphismus.

Und es folgt sofort, in Anbetracht von **??**:

Theorem 0.24. *Sei $p : |\mathcal{K}| \to \mathcal{K}$ eine Konstruierbarkeitssituation und $X \in$* Top. *Dann gibt es eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\mathrm{Der}(\text{s-Kons}(\mathcal{K} \times X)) \underset{R\beta}{\overset{\iota}{\rightleftarrows}} \mathrm{Der}_{\mathrm{sk}}(|\mathcal{K}| \times X),$$

wobei ι die Inklusion und $\beta = (p \times \mathrm{id}_X)^* (p \times \mathrm{id}_X)_* : \mathrm{Ab}_{|\mathcal{K}| \times X} \to \text{s-Kons}(\mathcal{K} \times X)$ ist.

Es reicht also für den Fall simplizialer Mengen, die Axiome einer Konstruierbarkeitssituation zu zeigen.

Proposition 0.25. *Sei $X \in \mathrm{s\,Ens}$ eine simpliziale Menge. Dann ist $p : |X| \to \blacktriangle X$ eine Konstruierbarkeitssituation.*

Beweis. Die Abbildung $p : |X| \to \blacktriangle X$ ist ein Kolimes über die Quotientenabbildungen $|\Delta^n| \to \blacktriangle^n$ mit zusammenhängenden Fasern und das Axiom 0.20 1 folgt aus dem nachgestellten Lemma. Das Axiom 0.20 2 zur Existenz kleinster offener Umgebungen wurde in 0.18 gezeigt. $\square$

Lemma 0.26. *Sei $X_i \to Y_i$ ein Morphismus von Diagrammen von topologischen Räumen $[I, \mathrm{Top}]$ mit finalen, surjektiven Abbildungen $X_i \to Y_i$ mit zusammenhängenden Fasern. Dann ist die induzierte Abbildung $\mathrm{col}_i X_i \to \mathrm{col}_i Y_i$ final, surjektiv und hat zusammenhängende Fasern.*

Beweis. Die Surjektivität ist offensichtlich (nimm ein Urbild unter einem geeigneten $Y_i \to \operatorname{col}_i Y_i$, dann unter $X_i \twoheadrightarrow Y_i$ und dann dessen Inklusion nach $\operatorname{col}_i X_i$). Ist die Komposition $\operatorname{col}_i X_i \to \operatorname{col}_i Y_i \to Z$ stetig, so sind alle

$$X_i \to \operatorname{col}_i X_i \to \operatorname{col}_i Y_i \to Z = X_i \to Y_i \to \operatorname{col}_i Y_i \to Z$$

stetig, und die Stetigkeit von g folgt daraus, dass die Kompositionen finaler Familien final ist und $\operatorname{col}_i Y_i$ folglich die Finaltopologie bezüglich aller $X_i \to \operatorname{col}_i Y_i$ trägt.

Zum Zusammenhang der Fasern: Die beiden Kolimites sind Quotienten der disjunkten Vereinigung über das System nach einer von den Systemmorphismen herrührenden Äquivalenzrelation. Ist $y_i \sim Yf(y_i)$ mit $y_i \in F_i$ und $Yf : Y_i \to Y_j$ einem Systemmorphismus eine erzeugende Relation, so sind auch die Urbilder der Zusammenhangskomponenten von y_i und $Yf(y_i)$ in $\operatorname{col}_i X_i$ nicht disjunkt: ist etwa x_i ein Urbild von y_i, so ist $Xf(x_i)$ ein Urbild von $Yf(y_i)$ und die Zusammenhangskomponenten treffen sich im Kolimes $\operatorname{col}_i X_i$ im Punkt $x_i \sim Xf(x_i)$. □

Bei der Übertragung von **??** ist die interessanteste äquivalente Formulierung schwacher $|\mathcal{K}|$-Konstruierbarkeit bislang unter den Tisch gefallen.

Definition 0.27. In einer Konstruierbarkeitssituation $p : |\mathcal{K}| \to \mathcal{K}$ heißt eine Garbe $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ *geometrisch schwach* $|\mathcal{K}|$*-konstruierbar*, falls die Einschränkungen $F|_{|\sigma|}$ konstant sind für alle Urbilder $|\sigma| = p^{-1}(\sigma)$ von Punkten $\sigma \in \mathcal{K}$.

Wir erhalten im Allgemeinen nur noch eine Implikation:

Proposition 0.28. *Ist $p : |\mathcal{K}| \to \mathcal{K}$ eine Konstruierbarkeitssituation, so impliziert für eine Garbe $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ schwache $|\mathcal{K}|$-Konstruierbarkeit geometrisch schwache $|\mathcal{K}|$-Konstruierbarkeit.*

Das ist der fehlende Teil von **??**.

Beweis. Dies folgt wieder aus 0.22 (3) und **??** wegen $|\sigma| \subset U(\sigma)$. □

Beispiel 0.29. *Die umgekehrte Richtung gilt im Allgemeinen nicht: Sei etwa $|X| = S^1$ mit der Triangulierung als simpliziale Menge aus* **??** *und $F \in \mathrm{Ab}_{/|X|}$ die nichtkonstante lokal konstante Garbe auf S^1 mit Halm $\mathbb{Z}$. Für σ den 0-Simplex ist dann $U(\sigma) = S^1$ und es ist $\mathbb{Z} \cong F_\sigma \ncong F(U(\sigma)) = \Gamma F = 0$.*

Bemerkung 0.30. Für die umgekehrte Richtung würden wir für $x \in U(\sigma)$ eine stetige Zusammenziehung

$$h : (0, 1] \times U(\sigma) \to U(\sigma)$$

benötigen, für die gilt:

1. Die Mengen $h(t \times U(\sigma))$ bilden für $t \in (0, 1]$ eine Umgebungsbasis von x.
2. Es gilt $h(t, y) \in |\tau| \Leftrightarrow y \in |\tau|$.

3. h ist surjektiv.

(Dies sind die Eigenschaften aus dem Beweis von **??**.) Die Existenz solcher Zusammenziehungen als Axiom zu setzen, bedeutet im Wesentlichen, nur Triangulierungen zu erlauben, bei denen die $U(\sigma)$-Mengen "sich nicht selbst wieder treffen" und damit im Wesentlichen wieder mit Simplizialkomplexen zu arbeiten.