0.1 Schwach konstruierbare Garben auf simplizialen Mengen

In diesem Abschnitt möchten wir die Aussagen aus Kapitel **??** übertragen auf den Fall, dass es sich bei dem Basisraum um die Realisierung einer simplizialen Menge anstelle eines Simplizialkomplexes handelt. Wir gehen vor wie in den ersten beiden Abschnitten.

Für die Darstellung von Garben auf simplizialen Mengen als Diagrammkategorien von Garben definieren wir eine *kategorielle Realisierung* einer simplizialen Menge. Wir benötigen die Begriffe für nichtdegenerierte Simplizes (vgl. **??**, **??**).

Definition 0.1. Die Unterkategorie der endlichen nichtleeren Ordinalzahlen mit injektiven monotonen Abbildungen $\Delta^+ \subset \Delta$ heißt *nichtdegenerierte Simplexkategorie.*

Wir wiederholen die Begriffe für simpliziale Mengen für Prägarben auf Δ^+.

Definition 0.2. Die darstellbare Prägarbe auf Δ^+

$$\Delta^{+n} := \Delta^+(\cdot, [n])$$

heißt *nichtdegenerierter Standard-n-Simplex.*

Diese Zurodnung liefert einen Funktor $r : \Delta^+ \to [\Delta^{+\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$. Wir erhalten unsere für die kategorielle Realisierung gewünschte kosimpliziale Kategorie durch den Funktor der nichtdegenerierten Simplizes des nichtdegenerierten Standard-n-Simplex. Bezeichne dazu $\iota : \Delta^+ \hookrightarrow \Delta$ den Inklusionsfunktor und $\iota^* : [\Delta^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}] \to [\Delta^{+\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$ den Rückzugsfunktor auf Prägarben.

Definition 0.3. Der *Stufenfunktor* ist der Funktor

$$\mathrm{Step} : \Delta^+ \downarrow_r \iota^*\Delta^n \to \Delta^+ \downarrow_r \Delta^{+n},$$

gegeben durch das kommutative Quadrat

$$\begin{array}{ccc} f : \Delta^{+m} \to \iota^*\Delta^n & \longmapsto & \mathrm{Step}\, f : \Delta^{+k} \to \iota^*\Delta^{+n} \\ \big\downarrow \wr & & \big\downarrow \wr \\ f \in \Delta([m],[n]) & \longmapsto & \hat{f} \in \Delta^+([k],[n]), \end{array}$$

in dem die Vertikalen die eindeutigen Zuordnungen aus dem Yoneda-Lemma sind und die untere Horizontale die Abbildung, die eine monotone Abbildung f auf die eindeutige monotone Injektion $\hat{f}$ mit demselben Bild (und anderem Definitionsbereich $[k]$) schickt.

Bemerkung 0.4. Der Name "Stufenfunktor" rührt daher, dass die Werte einer monotonen Funktion die Stufen in ihrem Graphen beschreiben.

Das Vorschalten von monotonen Injektionen vor $f \in \Delta([m], [n])$ (Morphismen in $\Delta^+ \downarrow_r \iota^*\Delta^n$) induziert auf der zugehörigen monotonen Injektion $\hat{f} \in \Delta^+([k], [n])$ ebenfalls Morphismen durch Vorschalten von Injektionen, denn das Einschränken von Funktionen auf Teilmengen verkleinert auch die Bildmengen. Dies zeigt die Funktorialität.

Proposition 0.5. *Die Zuordnung*

$$\begin{tikzcd}
{[n]} \arrow[r, mapsto] \arrow[dd, "f"] & \Delta^+ \downarrow_r \Delta^{+n} \arrow[d, "f\circ"] \\
 & \Delta^+ \downarrow_r \iota^* \Delta^m \arrow[d, "\mathrm{Step}"] \\
{[m]} \arrow[r, mapsto] & \Delta^+ \downarrow_r \Delta^{+m}
\end{tikzcd}$$

ist ein Funktor $R : \Delta \to \mathrm{poset}$*, genannt die* kosimpliziale Standard-Kategorie*.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass für monotone $f : [m] \to [n]$ und $g : [l] \to [m]$ gilt

$$\mathrm{Step}((f \circ g)\circ) = \mathrm{Step}(f\circ)\,\mathrm{Step}(g\circ)$$

für $(f\circ)$ den Nachschaltefunktor und Step den Stufenfunktor. Das folgt aber daraus, dass beide Funktoren eine monotone Injektion $h : [k] \to [l]$ auf die Injektion auf $\mathrm{im}(f \circ g \circ h)$ schicken. Diese Entsprechnung ist verträglich mit Einschränkungen von h (Vorschalten von monotonen Injektionen), ist also eine Transformation.

Es handelt sich bei den Kategorien $\Delta^+ \downarrow_r \Delta^{+n}$ tatsächlich um halbgeordnete Mengen, denn die nichttrivialen Morphismen sind das Vorschalten von echten Injektionen und senken somit den Grad eines Simplex. □

Proposition 0.6. *Die Kategorie der kleinen Kategorien* Cat *ist kovollständig. Ein Kolimes über halbgeordnete Mengen* poset $\subset$ Cat *ist dabei selbst eine halbgeordnete Menge.*

Beweis. Die Köcherbasiskategorie ist die Kategorie $Q : E \underset{t}{\overset{s}{\leftleftarrows}} V$ (mit Identitäten). Die Kategorie der Köcher ist die Kategorie der Prägarben auf Q: $\mathit{Quiv} := [Q^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$. Es folgt sofort die Vollständigkeit und Kovollständigkeit von Quiv. Kleine Kategorien sind bestimmte Köcher mit Zusatzstruktur, nämlich Tupel (Q, K, I) bestehend aus einem Köcher $Q = (C, \Lambda, s, t)$, einer Kompositionsregel $K : \Lambda \times_C \Lambda \to \Lambda$ (Faserprodukt über $\Lambda \xrightarrow{s} C \xleftarrow{t} \Lambda$) und Identitäten $I : C \to \Lambda$, sodass für alle Elemente, für die die Ausdrücke definiert sind, gilt

$$\begin{aligned}
s(K(f,g)) &= s(g),\\
t(K(f,g)) &= t(f),\\
s(I(c)) &= c,\\
t(I(c)) &= c,\\
K(f, I(s(f))) &= f,\\
K(I(t(f)), f) &= f,\\
K(K(f,g),h) &= K(f, K(g,h)).
\end{aligned}$$

(Das sind die Axiome eines internen Kategorienobjekts in Ens.) Funktoren zwischen kleinen Kategorien sind Köchermorphismen, für die die offensichtlichen Diagramme für I und K kommutieren.

Es gibt einen Linksadjungierten zur Einbettung Cat $\to$ *Quiv*, das Bilden der freien Pfadkategorie über dem Köcher. Es ist aber Cat $\subset$ *Quiv* i. A. keine volle Unterkategorie, weshalb wir Kolimites nicht durch Anwendung des Reflektors auf den Kolimes in *Quiv* konstruieren können. $\square$

Definition 0.7. Die *kategorielle Realisierung* einer simplizialen Menge $X \in \mathrm{s\,Ens}$ ist definiert als das Tensorprodukt von Funktoren $X \times R \in \mathrm{Cat}$ für R die kosimpliziale Standard-Kategorie.

Betrachte nun für eine feste simpliziale Menge $X \in \mathrm{s\,Ens}$ die volle Unterkategorie $(\mathrm{s\,Ens}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}})_X \subset \mathrm{s\,Ens}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}}$ der simplizialen Garben über topologischen Räumen mit Komorphismen mit der simplizialen Menge X als diskreten Basisräumen.

Wir erhalten die folgende Übertragung von **??**:

Proposition 0.8. *Die kovariante Realisierung mittels plumper Simplizes (**??**) liefert eine Äquivalenz von Kategorien*

$$(\mathrm{s\,Ens}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}})_X \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ens}_{/\blacktriangle X}\,.$$

Weiter gibt es eine Äquivalenz

$$(\mathrm{s\,Ens}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}})_X \xrightarrow{\approx} [C_X^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$$

gegeben durch den Funktor $F \mapsto (\sigma \mapsto (F_n)_\sigma$ für $\sigma \in NX_n$.

Beweis. Eine Garbe F_n über einem diskreten Raum X_n ist diskret und somit durch ihre Halme festgelegt. Wir können sie somit als einen Funktor der diskreten Kategorie X_n in die Kategorie der Mengen $F_n : X_n \to \mathrm{Ens}$ auffassen. Ein Komorphismus über $Ff^* : X_m \to X_n$ sind dann Abbildungen zwischen den Halmen $(F_n)_{Ff(\sigma)} \to (F_m)_\sigma$ für $\sigma \in X_m$. $\square$

Lemma 0.9. *Sei $X \in \mathrm{s\,Ens}$ eine simpliziale Menge. Dann gibt es einen Homöomorphismus $\blacktriangle X \xrightarrow{\sim} C_X$, wobei C_X die Ordnungstopologie trägt. Insbesondere hat jeder Punkt in der plumpen Realisierung $\sigma \in \blacktriangle X$ eine kleinste offene Umgebung $(\geq \sigma)$.*

Beweis. Jeder Punkt $\sigma \in \blacktriangle X$ ist der generische Punkt eines nichtdegenerierten n-Simplex. Dies liefert eine Bijektion $\blacktriangle X \to C_X$. $\square$

Nach der Bemerkung **??** reicht es, die topologischen Teile des Beweises aus **??** zu übertragen. Wir formulieren ganz allgemein:

Definition 0.10. Eine Konstruierbarkeitssituation ist eine stetige Abbildung $p : |\mathcal{K}| \to \mathcal{K}$ topologischer Räume, sodass gilt: Jeder Punkt $\sigma \in \mathcal{K}$ besitzt eine kleinste offene Umgebung $(\geq \sigma)$. Wir notieren $U(\sigma) = p^{-1}((\geq \sigma))$. Eine Garbe $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ heißt schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbar, falls die Koeinheit der Adjunktion auf F einen Isomorphismus $p^*p_*F \xrightarrow{\sim} F$ ist.

In unserer Konstruierbarkeitssituation nennen wir $\mathcal{K}$ die *kombinatorische* und $|\mathcal{K}|$ die *geometrische Realisierung*. Wir übertragen den Begriff derivierter schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbarer Garben (mit schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbaren Kohomologiegarben) und die Notationen s-Kons$(\mathcal{K})$ und $\mathrm{Der}_{\mathrm{sk}}(|\mathcal{K}|)$.

Wir können mit identischem Beweis den allgemeinen Teil von **??** übertragen:

Proposition 0.11. *Für $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ sind äquivalent:*

(1) F ist schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbar

(2) F liegt im wesentlichen Bild des Rückzugs p^*.

(3) Die Restriktion $F(U(\sigma)) \to F_x$ ist für alle $\sigma \in \mathcal{K}$ und alle $x \in |\sigma|$ ein Isomorphismus.

In guten Konstruierbarkeitssituationen lässt sich auch eine geometrische Formulierung schwacher $|\mathcal{K}|$-Konstruierbarkeit angeben:

Definition 0.12. In einer Konstruierbarkeitssituation $p : |\mathcal{K}| \to \mathcal{K}$ heißt eine Garbe $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ geometrisch schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbar, falls die Einschränkungen $F|_{|\sigma|}$ konstant sind für alle Urbilder $|\sigma| = p^{-1}(\sigma)$ von Punkten $\sigma \in \mathcal{K}$.

Proposition 0.13. *Ist in einer Konstruierbarkeitssituation $p : |\mathcal{K}| \to \mathcal{K}$ ... so ist für eine Garbe $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ äquivalent:*

1. *F ist $|\mathcal{K}|$-konstruierbar.*
2. *F ist geometrisch schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbar.*

Das ist der fehlende Teil von **??**.

Beweis. Die Richtung **??** $\Rightarrow$ **??** folgt wieder aus **?? ??** und **??** wegen $|\sigma| \subset U(\sigma)$.

Für die umgekehrte Richtung □