

Simpliziale Garben und Garben auf Simplizialkomplexen

Fabian Glöckle

8. Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
1 Garben auf Simplicialkomplexen	7
1.1 Simplicialkomplexe von Garben	7
1.2 Schwach konstruierbare Garben auf Simplicialkomplexen	12
1.3 Verallgemeinerte Garben	20
1.3.1 Exkurs: Überlagerungen von Produkträumen	23
1.3.2 Anwendung auf relative schwach konstruierbare Garben	24
2 Simpliciale Mengen	27
2.1 Definition simplicialer Mengen	27
2.2 Der kosimpliciale Raum der Standardsimplizes	30
2.3 Geometrische Realisierung simplicialer Mengen	31
2.4 Sparsame Realisierung durch nichtdegenerierte Simplizes	32
2.5 Iterative Konstruktion durch Pushouts	34
2.6 Exaktheitseigenschaften der geometrischen Realisierung	35
3 Koenden	39
3.1 Geometrische Realisierung als Koende	39
3.2 Der Koendenkalkül	41
3.3 Angereicherte Kategorien	47
4 Simpliciale Garben über topologischen Räumen	49
4.1 Realisierung simplicialer Garben	49
4.2 Die Dualität von Nerv und Realisierung	52
4.3 Die kartesisch abgeschlossene Struktur der Garben auf X	53
4.4 Produkte von Garben über topologischen Räumen	56

4.5	Kartesisch abgeschlossene koreflektive Kategorien topologischer Räume	57
4.6	Kartesischer Abschluss von Garben auf topologischen Räumen .	61
4.7	Vollständigkeitseigenschaften der Garben auf topologischen Räumen	64
5	Schwach konstruierbare Garben auf simplizialen Mengen	67
5.1	Realisierungen als Kategorie	68
5.2	Realisierung als halbgeordnete Menge	72
5.3	Realisierung als gerichtete Kategorie	72
	Literatur	80

Einleitung

Diagrammkategorien von Garben auf topologischen Räumen treten immer dann natürlich auf, wenn nicht nur das Verhalten einer einzelnen Garbe unter einer bestimmten Operation von Interesse ist, sondern auch das “Beziehungsgeflecht” der beteiligten Garben untereinander, etwa bei der Betrachtung kartesischer Quadrate von Garben auf einem topologischen Raum. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, für einfache Diagramme eine geometrische Interpretation von Diagrammkategorien von Garben von Mengen auf einem topologischen Raum herzustellen. Dies wird uns für zwei Klassen von Diagrammen gelingen: halbgeordnete Mengen vom Typ eines Simplicialkomplexes sowie gerichtete Kategorien vom Typ einer simplizialen Menge.

In Kapitel 1 wird eine Interpretation von Diagrammen von Mengen von der Form eines Simplicialkomplexes als Garben auf dem zugehörigen topologischen Simplicialkomplex mit der Ordnungstopologie vorgestellt. Uns interessieren auch die relativen Aussagen, inwiefern Diagramme von Garben auf einem topologischen Raum X von der Form eines Simplicialkomplexes eine Garbe auf dem topologischen Produkt von X mit dem ordnungstopologischen Simplicialkomplex beschreiben. Dies wird in Abschnitt 1.1 explizit vorgeführt. Der folgende Abschnitt liefert eine geometrische Charakterisierung dieser Diagramme als die simplizial konstanten Garben auf der geometrischen Realisierung des Simplicialkomplexes. Im Fall der zugehörigen derivierten Kategorien verbessert sich die Aussage zu einer Äquivalenz zu den derivierten Garben auf der geometrischen Realisierung mit simplizial konstanter Kohomologie. Dies gelingt mittels der Technik homotopieinjektiver Auflösungen auch für die unbeschränkte derivierte Kategorie. Der relative Fall über einem topologischen Raum X wird in Abschnitt 1.3 durch eine allgemeine Technik zur Relativierung solcher Aussagen beantwortet.

Um diese Aussagen für Simplicialkomplexe auf simpliziale Mengen und die zugehörigen Diagramme zu übertragen, werden in Kapitel 2 simpliziale Mengen und ihre geometrische Realisierung eingeführt. Dabei werden die grundlegenden Eigenschaften der geometrischen Realisierung, ihre Formulierung mittels nicht-degenerierter Simplexes und ihre Interpretation als iteratives Verkleben von Zellen, ausführlich dargestellt. Die Exaktheitseigenschaften der Realisierung werden in der Kategorie der kompakt erzeugten Hausdorffräume behandelt.

Die geometrische Realisierung simplizialer Mengen lässt sich als ein Koende darstellen, eine universelle Konstruktion der Kategorientheorie. Koenden werden in Kapitel 3 eingeführt und als eigenständige Objekte untersucht. Die Rechenregeln für Koenden, der Koendenkalkül aus Abschnitt 3.2 wird sich im folgenden Kapitel als wichtiges Hilfsmittel für “*abstract nonsense*”-Beweise erweisen.

In Kapitel 4 wird der Faden der Diagrammkategorien wiederaufgenommen. Gesucht wird zunächst ein Adjungierter zur geometrischen Realisierung simplizialer Garben aus Abschnitt 4.1. Dies gelingt über die allgemeine Dualität zwischen Nerv und Realisierung, wenn die beteiligte Garbenkategorie kartesisch abgeschlossen ist. Für die Kategorie der Garben auf einem topologischen Raum X wird dies in Abschnitt 4.3 gezeigt, für die Kategorie von Garben über variablen Basisräumen wird in Abschnitt 4.6 ein einschränkender Grund formuliert, wieso vermutlich keine solche Struktur zu erwarten ist. Für die korrekte Übertragung

der Aussagen über Diagrammkategorien von Simplicialkomplexen ist die angesprochene Adjunktion allerdings nicht relevant. Vielmehr muss der Begriff des einer simplizialen Menge zugeordneten Diagramms geklärt werden, was in ?? geschieht. Die Verallgemeinerung der Aussagen über Diagrammkategorien kann dann für den Fall gerichteter Kategorien vom Typ einer simplizialen Menge mittels 2-Limites von Kategorien bewiesen werden. Die Arbeit schließt mit Notizen zur Übertragung der Ergebnisse über die derivierten Kategorien sowie zur geometrischen Interpretation beliebiger Diagrammkategorien.

In der Notation folgt die Arbeit im Wesentlichen den Notationen aus [Soe18d]. Insbesondere steht der französischen Tradition folgend \mathbf{Ens} für die Kategorie der Mengen und \mathbf{Ens}_X für die Kategorie der Garben von Mengen auf dem topologischen Raum X . Die Äquivalenz von Kategorien zwischen Garben von Mengen auf einem topologischen Raum X und étalen Räumen $E \rightarrow X$ über X wird in der Notation meistens unterschlagen.

Die Darstellung der Aussagen zu schwach konstruierbaren Garben auf Simplicialkomplexen folgt [KS94] und [Soe18c], die zu simplizialen Mengen [GJ09] und [GM96]. Das Kapitel zu Koenden ist stark an [Lor15] angelehnt. Nicht mit Verweisen auf Literatur markierte Aussagen sind eigenständig erarbeitet. Dies trifft insbesondere auf weite Teile von Abschnitt 1.1, Abschnitt 1.3 und Kapitel 4 zu. Beim Finden von Aussagen und Gegenbeispielen und dem generellen Vertrautwerden mit dem Gebiet bin ich dennoch der Autorschaft der Online-Enzyklopädie *nLab* und des Frage-und-Antwort-Forums *Mathoverflow* zu Dank verpflichtet. Danken möchte ich auch meinem Betreuer Prof. Wolfgang Soergel für die Stellung des interessanten Themas, die inhaltlichen Anregungen und die Freiheiten bei der Bearbeitung sowie meinen Eltern für die persönliche und finanzielle Unterstützung meines Studiums. Ich danke meinem Bruder Jonathan Glöckle für die Formulierung von 4.35 und Prof. Huber-Klawitter für die Beantwortung meiner Frage zu Abschnitt 1.3.

Kapitel 1

Garben auf Simplizialkomplexen

1.1 Simplizialkomplexe von Garben

Bei Simplizialkomplexen handelt es sich um eine kombinatorisch einfache und geometrisch zugängliche Klasse von Diagrammkategorien. Ersteres liegt an der Interpretation von Simplizialkomplexen als halbgeordnete Mengen, letzteres an der Ordnungstopologie, mit der halbgeordnete Mengen versehen werden können. Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, inwiefern Diagramme von Garben auf einem topologischen Raum X von der Form eines Simplizialkomplexes \mathcal{K} als Garben auf dem Produktraum $\mathcal{K} \times X$ interpretiert werden können. Der Abschnitt dient auch als pädagogische Einführung in die im weiteren Verlauf verwendeten Begriffe und Methoden, und soll Modell und Anschauung für die späteren Verallgemeinerungen sein.

Definition 1.1. Ein *Simplizialkomplex* ist eine Menge E , genannt die Ecken des Simplizialkomplexes, samt einem System $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(E)$ von nichtleeren endlichen Teilmengen von E , genannt die Simplexes des Simplizialkomplexes, derart, dass gilt:

- jede einelementige Menge ist ein Simplex (d.h. $\{e\} \in \mathcal{K}$ für alle $e \in E$) und
- ist $L \in \mathcal{K}$ ein Simplex und $K \subset L$ eine nichtleere Teilmenge, so ist $K \in \mathcal{K}$ ein Simplex.

Ein Simplizialkomplex ist somit insbesondere eine halbgeordnete Menge mit der Mengeninklusion als Halbordnung.

Wir erinnern an die Interpretation von halbgeordneten Mengen als Kategorien. Gegeben eine halbgeordnete Menge X definiere die Kategorie C_X bestehend aus Objekten $\text{Ob}(C_X) = X$ mit einem eindeutigen Morphismus $a \rightarrow b$ genau dann, wenn $a \leq b$ bezüglich der Halbordnung. Funktoren der zugehörigen Kategorien $C_X \rightarrow C_Y$ entsprechen dann monotonen Abbildungen $X \rightarrow Y$. Wir erhalten:

Lemma 1.2. *Obige Konstruktion liefert eine volltreue Einbettung*

$$\begin{aligned} \text{poset} &\rightarrow \text{Cat}, \\ X &\mapsto C_X. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet Cat die Kategorie der kleinen Kategorien, d.h. der Kategorien C , für die $\text{Ob}(C)$ eine Menge ist und poset die Kategorie der halbgeordneten Mengen mit monotonen Abbildungen als Morphismen.

Simplizialkomplexe können also als Kategorien aufgefasst werden und definieren somit Diagrammkategorien.

Definition 1.3. Sei C eine Kategorie und \mathcal{K} ein Simplizialkomplex aufgefasst als Kategorie. Wir nennen einen Funktor $\mathcal{K} \rightarrow C$ einen Simplizialkomplex in C der Form \mathcal{K} .

Die Simplizialkomplexe in C bilden als Funktorkategorie eine Kategorie. Wir notieren die Kategorie der Funktoren $F : A \rightarrow B$ mit B^A oder $[A, B]$. Funktorkategorien der Form $[C^{\text{op}}, \text{Ens}]$ heißen auch *Prägarben* auf C .

Ein Simplizialkomplex in der terminalen Kategorie dasselbe wie ein gewöhnlicher Simplizialkomplex. Im Folgenden interessieren wir uns für Simplizialkomplexe von Garben oder Prägarben über einem topologischen Raum X , d. h. für die Fälle $C = \text{Ens}_X$ bzw. $C = \text{pEns}_X$. Den Fall der Prägarben verstehen wir sofort:

Lemma 1.4. *Das Exponentialgesetz von Funktoren liefert eine Äquivalenz von Kategorien*

$$[\mathcal{K}, \text{pEns}_X] \xrightarrow{\sim} [\mathcal{K} \times \text{Off}_X^{\text{op}}, \text{Ens}]$$

zwischen den Simplizialkomplexen von Prägarben auf X und den Prägarben auf $\mathcal{K}^{\text{op}} \times \text{Off}_X$.

Hierbei bezeichnet Off_X die durch Mengeninklusion halbgeordnete Menge der offenen Mengen in X .

Beweis. Das folgt direkt aus $\text{pEns}_X = [\text{Off}_X^{\text{op}}, \text{Ens}]$ und dem Exponentialgesetz für Kategorien:

$$[A, [B, C]] \xrightarrow{\sim} [A \times B, C].$$

□

Wir möchten Simplizialkomplexe von Garben auf X als Garben auf einem geeigneten topologischen Raum darstellen. Dies würde gelingen, wenn $\mathcal{K}^{\text{op}} \times \text{Off}_X$ wieder die Kategorie der offenen Mengen eines topologischen Raums ist. Es ist aber im Allgemeinen bereits in \mathcal{K} die Vereinigungseigenschaft von Topologien verletzt. Stattdessen erlaubt uns die Ordnungstopologie auf \mathcal{K} , das System $\mathcal{K}^{\text{op}} \times \text{Off}_X$ als Basis der Topologie von $\mathcal{K} \times X$ aufzufassen.

Definition 1.5. Sei (X, \leq) eine halbgeordnete Menge. Die Topologie auf X , deren Basis aus Mengen der Form $(\geq \sigma) = \{\tau \in X \mid \tau \geq \sigma\}$ (für $\sigma \in X$) besteht, heißt die *Ordnungstopologie* auf X .

Eine Menge $U \subset X$ ist bezüglich der Ordnungstopologie also genau dann offen, wenn sie nach oben abgeschlossen ist, d. h. wenn gilt

$$U = \bigcup_{x \in U} (\geq x).$$

Wir prüfen, dass es sich um die Basis einer Topologie handeln kann:

Lemma 1.6. *Sei (X, \leq) eine halbgeordnete Menge. Dann lassen sich endliche Schnitte im System der Mengen $(\geq \sigma)$, $\sigma \in X$, als Vereinigungen von Mengen in diesem System schreiben und X wird durch die Mengen des Systems überdeckt.*

Beweis. Es gilt $X = \bigcup_{\sigma} (\geq \sigma)$ und

$$(\geq \sigma) \cap (\geq \tau) = \bigcup_{x \in (\geq \sigma) \cap (\geq \tau)} (\geq x).$$

□

Für $X = \mathcal{K}$ einen Simplicialkomplex vereinfachen sich die Schnitte:

$$(\geq \sigma) \cap (\geq \tau) = (\geq (\sigma \cup \tau)) \text{ oder } (\geq \sigma) \cap (\geq \tau) = \emptyset. \quad (1.1)$$

Lemma 1.7. *Das Versehen mit der Ordnungstopologie definiert einen Funktor*

$$\text{Ord} : \text{poset} \rightarrow \text{Top}.$$

Beweis. Ist $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus halbgeordneter Mengen, so besteht das Urbild von $(\geq \sigma)$, $\sigma \in Y$ aus allen $\tau \in X$ mit $f(\tau) \geq \sigma$. Dies ist eine nach oben abgeschlossene Menge, also offen in $\text{Ord } X$. □

Wir werden den Funktor Ord für Simplicialkomplexe \mathcal{K} in der Notation unterschlagen und sie direkt als topologische Räume auffassen. Bezeichne nun \mathcal{B} die Basis der Produkttopologie von $\mathcal{K} \times X$ bestehend aus Produktmengen der Form $(\geq \sigma) \times U$ mit $\sigma \in \mathcal{K}$, $U \subset X$ als halbgeordnete Menge mit Inklusionen als Morphismen. Der Funktor

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{\text{op}} \times \text{Off}_X &\rightarrow \mathcal{B}, \\ (\sigma, U) &\mapsto (\geq \sigma) \times U \end{aligned}$$

ist dann ein Isomorphismus von Kategorien, denn ein Umkehrfunktor projiziert eine Produktmenge auf die beiden Faktoren und wählt im ersten Faktor das eindeutige minimale Element. Die Inklusion ist in beiden Kategorien dieselbe, da $\sigma \geq \tau$ genau dann gilt, wenn $(\geq \sigma) \subset (\geq \tau)$.

In $\mathcal{K} \times X$ gibt es zu viele offene Mengen für eine Aussage der Art

$$[\mathcal{K}, \text{pEns}_X] \xrightarrow{\cong} \text{pEns}_{\mathcal{K} \times X}.$$

Allerdings können wir bei der Äquivalenz

$$[\mathcal{K}, \text{pEns}_X] \xrightarrow{\cong} [\mathcal{K} \times \text{Off}_X^{\text{op}}, \text{Ens}] \xrightarrow{\cong} [\mathcal{B}^{\text{op}}, \text{Ens}] \quad (1.2)$$

die rechte Seite als eine Garbenkategorie verstehen, wenn Garben schon auf einer Basis der Topologie eindeutig festgelegt sind. Das ist wegen der Verklebungseigenschaft von Garben tatsächlich der Fall.

Definition 1.8. Sei \mathcal{B} eine Basis eines topologischen Raumes X . Wir bezeichnen die volle Unterkategorie der Prägarben auf \mathcal{B} , die die Verklebungseigenschaft von Garben für Überdeckungen in \mathcal{B} erfüllen, als die Kategorie der Garben auf \mathcal{B} und notieren sie mit Ens/\mathcal{B} .

Konkret erfüllen Garben $F \in \text{Ens}/\mathcal{B}$ also die folgende Eigenschaft:

Ist $U = \bigcup_{i \in I} V_i$ eine Vereinigung mit $U, V_i \in \mathcal{B}$ und sind $s_i \in F(V_i)$ Schnitte mit übereinstimmenden Restriktionen $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$ für alle i, j , so gibt es genau einen Schnitt $s \in F(U)$ mit $s|_{V_i} = s_i$.

Oder äquivalent, falls wir für $(V_i)_{i \in I}$ eine gesättigte Überdeckung ist und wir als Systemmorphisamen die Restriktionen wählen:

$$F(U) = \lim_{i \in I} F(V_i).$$

Satz 1.9. Sei X ein topologischer Raum mit Basis \mathcal{B} . Dann gibt es eine Äquivalenz von Kategorien

$$\text{Ens}/X \xrightarrow{\sim} \text{Ens}/\mathcal{B},$$

gegeben durch die Einschränkung auf $\mathcal{B} \subset \text{Off}_X$.

Beweis. Wir konstruieren einen Quasi-Inversen: Sei dazu $F \in \text{Ens}/\mathcal{B}$ und $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine gesättigte Überdeckung von $U \subset X$ durch Basismengen $U_i \in \mathcal{B}$. Wir setzen $\hat{F}(U) = \lim F(U_i)$ und prüfen die Wohldefiniertheit. Sei $U = \bigcup_{j \in J} V_j$ eine weitere solche Überdeckung von U durch Basismengen $V_j \in \mathcal{B}$. Dann gilt nach der Garbeneigenschaft auf Basismengen:

$$\lim_i F(U_i) \xrightarrow{\sim} \lim_i \lim_j F(U_i \cap V_j) \xrightarrow{\sim} \lim_j \lim_i F(U_i \cap V_j) \xrightarrow{\sim} \lim_j F(V_j).$$

Die Zuordnung $F \mapsto \hat{F}$ ist also wohldefiniert. Das Bild \hat{F} ist tatsächlich eine Garbe, denn falls $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine unter endlichen Schnitten stabile Überdeckung durch offene Mengen und $U_i = \bigcup_j V_{ij}$ jeweils eine unter endlichen Schnitten stabile Überdeckung durch Basismengen $V_{ij} \in \mathcal{B}$ ist, so gilt

$$\hat{F}(U) = \lim_{i,j} F(V_{ij}) \xrightarrow{\sim} \lim_i \hat{F}(U_i)$$

zuerst nach der Definition von $\hat{F}(U)$ und dann wieder nach der Transitivität von Limites und der Definition der $\hat{F}(U_i)$.

Die Funktorialität unserer Zuordnung folgt direkt aus der Funktorialität des Limes. Da für eine Basismenge $U \in \mathcal{B}$ mit der offensichtlichen Überdeckung natürlich $\hat{F}(U) = \lim F(U) = F(U)$ gilt, handelt es sich tatsächlich um einen Quasi-Inversen. \square

Damit können wir die Hauptaussage des Abschnitts beweisen.

Satz 1.10. *Sei \mathcal{K} ein Simplicialkomplex, X ein topologischer Raum und \mathcal{B} die Basis der Produkttopologie von $\mathcal{K} \times X$ aus ??.*

Die Äquivalenz $[\mathcal{K}, \text{pEns}_{/X}] \xrightarrow{\sim} [\mathcal{B}^{\text{op}}, \text{Ens}]$ aus Gleichung 1.2 schränkt ein zu einer Äquivalenz voller Unterkategorien

$$[\mathcal{K}, \text{Ens}_{/X}] \xrightarrow{\sim} \text{Ens}_{/\mathcal{B}}$$

Insbesondere liefert die Verknüpfung mit 1.9 eine Äquivalenz von Kategorien

$$[\mathcal{K}, \text{Ens}_{/X}] \xrightarrow{\sim} \text{Ens}_{/\mathcal{K} \times X}.$$

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $[\mathcal{K}, \text{Ens}_{/X}]$ und $\text{Ens}_{/\mathcal{B}}$ durch äquivalente Bedingungen definierte volle Unterkategorien von $[\mathcal{K}, \text{pEns}_{/X}]$ bzw. $[\mathcal{B}^{\text{op}}, \text{Ens}]$ sind.

In $[\mathcal{K}, \text{pEns}_{/X}]$ wird die Unterkategorie der Simplicialkomplexe von Garben dadurch definiert, dass für festes $\sigma \in \mathcal{K}$ die Garbenbedingung für die $U \subset \circ X$ erfüllt sein muss, während in $[\mathcal{B}^{\text{op}}, \text{Ens}]$ die Garbenbedingung für beliebige Basismengen $(\geq \sigma) \times U$ gefordert wird. Tatsächlich sind aber beide äquivalent, da im Fall einer Überdeckung \mathcal{U} einer Basismenge $(\geq \sigma) \times U$ durch Basismengen $(\geq \tau_i) \times U_i$ eine Teilüberdeckung $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ aus Produktmengen mit $\tau_i = \sigma$ gewählt werden kann. Ein verträgliches Tupel aus Schnitten über Mengen aus \mathcal{U} entspricht dann einem verträglichem Tupel aus Schnitten über Mengen aus \mathcal{V} und die Garbenbedingung für Basismengen folgt aus der für festes $\sigma \in \mathcal{K}$. \square

Wir geben zum Abschluss die nicht-relative Version dieser Aussage an, mit einem Beweis, der das einfache Vorgehen des vorangehenden Beweis noch einmal systematischer darstellt. Mit den Techniken aus Abschnitt 1.3 folgt daraus umgekehrt auch die relative Version und man mag bereits erkennen, wie das generelle Vorgehen zur “Relativierung” solcher Aussagen ist.

Definition 1.11. Sei (X, \leq) eine halbgeordnete Menge und $S \subset X$ eine Teilmenge. Ein Element $m \in X$ heißt Infimum von S , falls es eine größte untere Schranke von S ist, d. h. $m \leq x$ für alle $x \in S$ und falls $m' \leq x$ für alle $x \in S$, dann $m' \leq m$.

Infima sind Limites in der halbgeordneten Menge aufgefasst als Kategorie. Das Infimum einer Teilmenge $S \in X$ muss nicht existieren, ist in diesem Fall allerdings eindeutig. Ein Simplicialkomplex besitzt binäre Infima. Die Basis aus $(\geq \sigma)$ -Mengen der Ordnungstopologie einer halbgeordneten Menge mit binären Infima ist schnittstabil, vergleiche Gleichung 1.1.

Satz 1.12. *Sei $\mathcal{K} \in \text{poset}$ mit binären Infima. Dann ist der Funktor*

$$[\mathcal{K}, \text{Ens}] \rightarrow \text{Ens}_{/\mathcal{B}} \xrightarrow{\sim} \text{Ens}_{/\text{Ord } \mathcal{K}}$$

für \mathcal{B} die Basis der Ordnungstopologie eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweis. Da $\sigma \leq \tau$ die umgekehrte Inklusion $(\geq \sigma) \supset (\geq \tau)$ impliziert, gilt $\mathcal{K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}^{\text{op}}$. Die Garbenbedingung für \mathcal{B} ist leer, denn jede Überdeckung von $(\geq \sigma)$ durch Basismengen enthält $(\geq \sigma)$, $(\geq \sigma)$ ist also initial in einer solchen Überdeckung und die Limites über die beiden Systeme stimmen überein. \square

1.2 Schwach konstruierbare Garben auf Simplizialkomplexen

Die Ordnungstopologie auf einem Simplizialkomplex \mathcal{K} erlaubt es, sich Simplizialkomplexe von Garben als Garben auf einem Produktraum mit einem Simplizialkomplex vorzustellen. Nach wie vor ist der verwendete ordnungstopologische Simplizialkomplex allerdings ein eher kombinatorisches Objekt. Für unsere zu weiten Teilen auf Hausdorffräumen beruhende geometrische Vorstellung geben wir daher eine weitere geometrische Charakterisierung von Garben auf einem Simplizialkomplex \mathcal{K} an. Wir werden sehen, dass sie sich als simplizial konstante Garben auf der geometrischen Realisierung von \mathcal{K} auffassen lassen. Für die zugehörigen derivierten Kategorien kann diese Aussage noch verbessert werden: Simplizialkomplexe von Mengen entsprechen dann derivierten Garben, deren Kohomologien simplizial konstant sind. Die Darstellung folgt im Wesentlichen [KS94] und [Soe18c]. Der relative Fall ist Gegenstand des folgenden Abschnitts. Hier beschränken wir uns erst einmal auf Simplizialkomplexe von Mengen.

In diesem Abschnitt bezeichne \mathcal{K} stets einen Simplizialkomplex mit Eckenmenge E . Ist \mathcal{K} ein endlicher Simplizialkomplex (d. h. E endlich), so definieren wir seine geometrische Realisierung als die Vereinigung seiner offenen Simplizes. Setze für einen Simplex $\sigma \in \mathcal{K}$ seine Realisierung $|\sigma| \subset \mathbb{R}^E = \text{Ens}(E, \mathbb{R})$ zu

$$|\sigma| = \left\{ x \in \mathbb{R}^E \mid x(e) = 0 \text{ für } e \notin \sigma, x(e) > 0 \text{ für } e \in \sigma, \sum_{e \in E} x(e) = 1 \right\},$$

sowie die geometrische Realisierung $|\mathcal{K}| \subset \mathbb{R}^E$ von \mathcal{K}

$$\bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} |\sigma|,$$

jeweils versehen mit der induzierten Topologie von \mathbb{R}^E . Ein beliebiger Simplizialkomplex \mathcal{K} kann als Vereinigung $\bigcup_i \mathcal{K}_i$ seiner endlichen Teilsimplizes geschrieben werden und wir definieren die geometrische Realisierung von \mathcal{K} durch

$$|\mathcal{K}| = \bigcup_i |\mathcal{K}_i|$$

mit den induzierten Inklusionen und der Kolimes-Topologie.

Wir erhalten eine Abbildung

$$p : |\mathcal{K}| \rightarrow \mathcal{K},$$

genannt Simplexanzeiger oder Indikatorabbildung, der einem Punkt $x \in |\mathcal{K}|$ in der geometrischen Realisierung den eindeutigen Simplex $\sigma \in \mathcal{K}$ mit $x \in |\sigma|$ zuordnet.

Lemma 1.13. *Der Simplexanzeiger $p : |\mathcal{K}| \rightarrow \mathcal{K}$ ist eine finale Surjektion mit zusammenhängenden Fasern.*

Beweis. Die Abbildung lässt sich als die Identifikation der (zusammenhängenden) offenen Inneren der Standardsimplizes $|\sigma|$ zu einem Punkt σ beschreiben. Dies zeigt die Eigenschaft einer mengentheoretischen Quotientenabbildung.

Für einen endlichen Simplizialkomplex \mathcal{K} ist das Urbild einer Basismenge ($\geq \sigma$) der “offene Stern um σ ”

$$U(\sigma) := p^{-1}(\geq \sigma) = |\mathcal{K}| \cap \{x \in \mathbb{R}^E \mid x(e) > 0 \text{ für } e \in \sigma\}.$$

Dies zeigt (auch im Kolimes) die Stetigkeit. \square

Lemma 1.14 ([Soe18d], 4.3.22). *Sei $p : X \rightarrow Y$ eine finale Surjektion mit zusammenhängenden Fasern. Dann ist die Einheit der Adjunktion $\text{Id} \Rightarrow p_*p^*$ auf allen $G \in \text{Ens}/_Y$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Wir zeigen, dass die Einheit der Adjunktion Bijektionen auf allen Schnitten über $U \subset Y$ induziert. Ohne Einschränkung reicht der Fall der globalen Schnitte $U = Y$, denn die Einschränkung von p auf $p^{-1}(U) \rightarrow U$ erfüllt ebenfalls die Voraussetzungen des Lemmas. Zu zeigen ist also, dass die Einheit der Adjunktion Bijektionen $\Gamma G \xrightarrow{\sim} \Gamma p_*p^*G = \Gamma p^*G$ induziert. Nach der universellen Eigenschaft des Rückzugs stehen im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow s & \searrow t & \\ p^*G & \longrightarrow & G \\ \downarrow \text{id} & \lrcorner & \downarrow \\ X & \xrightarrow{p} & Y \end{array}$$

globale Schnitte $s : X \rightarrow p^*G$ von $p^*G \rightarrow X$ in Bijektion zu Schnitten $t : X \rightarrow G$ von $G \rightarrow Y$ über p . Eine solche Abbildung t faktorisiert nun nach der Surjektivität von p zunächst mengentheoretisch über p . Diese Faktorisierung ist eindeutig, denn t ist konstant auf den Fasern $p^{-1}(y)$ von $y \in Y$ als stetige Abbildung von einem zusammenhängenden Raum in den diskreten Raum G_y . Die Stetigkeit dieser mengentheoretischen Abbildung folgt nun aus der Finalität von p .

Die umgekehrte Zuordnung schaltet einem globalen Schnitt von $G \rightarrow Y$ über id_Y einen Schnitt über p durch Vorschalten von p zu. \square

Bemerkung 1.15. Die Voraussetzung zusammenhängender Fasern kann fallen gelassen werden, wenn stattdessen in p^*G nur diejenigen Garbenschnitte als Schnitte zugelassen werden, welche gewisse zu den Daten von p^*G gehörige Verträglichkeiten erfüllen müssen, die die Abbildung $p^{-1}(y) \rightarrow G_y$ wieder konstant machen. Dies werden wir in 5.18 benötigen und dort auch präzisieren.

Korollar 1.16. *Für $p : |\mathcal{K}| \rightarrow \mathcal{K}$ und eine Garbe $F \in \text{Ens}/_{\mathcal{K}}$ ist die Einheit der Adjunktion ein Isomorphismus*

$$F \xrightarrow{\sim} p_*p^*F.$$

Anders ausgedrückt können wegen

$$\text{Ens}/_{\mathcal{K}}(F, G) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}/_{\mathcal{K}}(F, p_*p^*G) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}/_{|\mathcal{K}|}(p^*F, p^*G)$$

die Garben auf \mathcal{K} als äquivalent zu einer vollen Unterkategorie der Garben auf $|\mathcal{K}|$ aufgefasst werden. Wie können diese Garben im wesentlichen Bild des Rückzugs p^* charakterisiert werden?

Definition 1.17. Eine Garbe $F \in \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ heißt *schwach \mathcal{K} -konstruierbar* (oder kurz: schwach konstruierbar), falls für alle $\sigma \in \mathcal{K}$, die Einschränkungen $F|_{|\sigma|}$ konstante Garben sind. Wir bezeichnen die volle Unterkategorie der schwach konstruierbaren Garben in $\text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ mit $\text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}^{\text{sk}}$.

Eine derivierte Garbe $F \in \text{Der}(\text{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$ heißt *schwach \mathcal{K} -konstruierbar*, falls für alle $j \in \mathbb{Z}$ die Kohomologiegarben $H^j(F)$ schwach konstruierbar sind. Wir bezeichnen die volle Unterkategorie der schwach konstruierbaren derivierten Garben in $\text{Der}(\text{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$ mit $\text{Der}^{\text{sk}}(\text{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$.

Wir bemerken zunächst:

Lemma 1.18 ([KS94], 8.1.3). *Die Kategorie $\text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}^{\text{sk}}$ ist abelsch.*

Beweis. Zunächst ist die Kategorie der konstanten abelschen Garben auf einem topologischen Raum X eine abelsche Kategorie. Die Aussage folgt dann aus der Exaktheit und Additivität des Pullbacks i_σ^* entlang den Inklusionen $i_\sigma : |\sigma| \hookrightarrow |\mathcal{K}|$. \square

Das wesentliche Bild des Rückzugs p^* kann nun als die Kategorie der schwach \mathcal{K} -konstruierbaren Garben auf $|\mathcal{K}|$ charakterisiert werden. Dies ist der wesentliche topologische Schritt in unserer Argumentation.

Proposition 1.19 ([Soe18c], 8.4.6.3). *Für $F \in \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ sind äquivalent:*

- (1) *F ist schwach \mathcal{K} -konstruierbar*
- (2) *Die Koeinheit der Adjunktion ist auf F ein Isomorphismus $p^*p_*F \xrightarrow{\sim} F$.*
- (3) *F liegt im wesentlichen Bild des Rückzugs p^* .*
- (4) *Die Restriktion $F(U(\sigma)) \rightarrow F_x$ ist für alle $\sigma \in \mathcal{K}$ und alle $x \in |\sigma|$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Die Äquivalenz (2) \Leftrightarrow (3) ist allgemein kategorientheoretischer Natur. Dabei ist (2) \Rightarrow (3) offensichtlich (nimm p_*F) und (3) \Rightarrow (2) folgt aus den Dreiecksidentitäten und 1.16.

Die Äquivalenz (2) \Leftrightarrow (4) folgt aus der Bestimmung der Halme von p^*p_*F . Zunächst bemerken wir, dass in \mathcal{K} die Menge $(\geq \sigma)$ die kleinste offene Umgebung von σ ist, und wir also $p_*F((\geq \sigma)) \xrightarrow{\sim} (p_*F)_\sigma$ erhalten. Somit gilt für $x \in |\sigma|$:

$$(p^*p_*F)_x \xrightarrow{\sim} (p_*F)_\sigma \xrightarrow{\sim} p_*F((\geq \sigma)) \xrightarrow{\sim} F(U(\sigma)). \quad (1.3)$$

Dabei wurde die Beschreibung der Halme des Rückzugs (mit $p(x) = \sigma$), obige Darstellung der Halme auf \mathcal{K} und die Definition des Vorschubs (mit $p^{-1}((\geq \sigma)) = U(\sigma)$) verwendet.

Die Implikation (4) \Rightarrow (1) folgt direkt aus dem nachgestellten Lemma, angewandt auf die Einschränkung von F auf $U(\sigma)$, und der Tatsache, dass beliebige Einschränkungen konstanter Garben wieder konstant sind.

Für die umgekehrte Richtung reicht es, die Aussage für die Einschränkung von F auf $U(\sigma)$ zu zeigen. Wir betrachten für $x \in |\sigma|$ die Zusammenziehung

$$\begin{aligned} h : (0, 1] \times U(\sigma) &\rightarrow U(\sigma), \\ (t, y) &\mapsto h(t, y) = ty + (1 - t)x, \end{aligned}$$

formal zunächst auf endlichen Teilkomplexen und dann die induzierte Abbildung auf dem Kolimes $|\mathcal{K}|$.

Die Mengen $h(\{t\} \times U(\sigma))$ bilden für $t \in (0, 1]$ eine Umgebungsbasis von x , wir müssen also nur noch den Kolimes der Schnitte über diese Mengen bestimmen. Bezeichne $\pi : (0, 1] \times U(\sigma) \rightarrow U(\sigma)$ die Projektion auf den zweiten Faktor. Nach der simplizialen Konstanz von F und wegen

$$h(t, y) \in |\tau| \Leftrightarrow y \in |\tau|$$

ist der Rückzug h^*F konstant auf den Fasern von π und lässt sich somit nach dem zweiten nachgestellten Lemma schreiben als $\pi^*\pi_*h^*F \xrightarrow{\sim} h^*F$. Bezeichne $\iota_t : U(\sigma) \hookrightarrow (0, 1] \times U(\sigma)$ die Inklusion in der ersten Komponente. Dann erhalten wir wie gewünscht mit der Funktorialität des Rückzugs und $\pi \circ \iota_t = \text{id}_{U(\sigma)}$

$$\begin{aligned} F_x &\xrightarrow{\sim} \text{colf}_{t \in (0, 1]} F(h(\{t\} \times U(\sigma))) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{colf}_{t \in (0, 1]} \Gamma \iota_t^* h^* F \\ &\xrightarrow{\sim} \text{colf}_{t \in (0, 1]} \Gamma \iota_t^* \pi^* \pi_* h^* F \\ &\xrightarrow{\sim} \text{colf}_{t \in (0, 1]} \Gamma \iota_1^* \pi^* \pi_* h^* F \\ &\xrightarrow{\sim} \Gamma \iota_1^* h^* F \\ &\xrightarrow{\sim} F(U(\sigma)). \end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.20. Aus Gleichung 1.3 und (4) folgt insbesondere auch $(p^*p_*F)(U(\sigma)) \xrightarrow{\sim} F(U(\sigma))$ für alle $F \in \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ und alle $\sigma \in \mathcal{K}$.

Wir tragen die benötigten Lemmata nach.

Lemma 1.21 ([Soe18d], 2.1.41 (Var.)). *Sei X ein topologischer Raum, $F \in \text{Ens}_{/X}$ eine Garbe auf X , für die die Restriktion $\Gamma F \xrightarrow{\sim} F_x$ für alle $x \in X$ bijektiv ist. Dann ist F eine konstante Garbe auf X mit Halm ΓF .*

Beweis. Bezeichne $c : X \rightarrow \text{top}$ die konstante Abbildung. Die Koeinheit der Adjunktion $c^*c_*F \rightarrow F$ induziert auf den Halmen gerade die vorausgesetzten Bijektionen, ist also ein Garben-Isomorphismus. □

Lemma 1.22 ([Soe18d], 6.4.17). *Sei X ein topologischer Raum, $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall, $F \in \text{Ens}_{/X \times I}$ eine Garbe und $\pi : X \times I \rightarrow X$ die Projektion auf den ersten Faktor. Ist F konstant auf den Fasern von π , so ist die Koeinheit der Adjunktion auf F ein Isomorphismus $\pi^*\pi_*F \xrightarrow{\sim} F$.*

Beweis. Die Aussage ist äquivalent zum folgenden Fortsetzungsresultat:

Für alle $U \subset X$ und $t \in I$ ist die Restriktion ein Isomorphismus

$$\Gamma(U \times I, F) \xrightarrow{\sim} \Gamma(U \times \{t\}, F).$$

Denn ist die Koeinheit der Adjunktion ein Isomorphismus $\pi^* \pi_* F \xrightarrow{\sim} F$, so bestimmen wir die Schnitte über $U \times \{t\}$ wie folgt: Sei $\iota : U \times \{t\} \hookrightarrow X \times I$ die Inklusion. Wir bemerken, dass $\pi \circ \iota$ die Inklusion von U nach X ist und erhalten:

$$\Gamma(U \times \{t\}, F) = \Gamma \iota^* F \xrightarrow{\sim} \Gamma \iota^* \pi^* \pi_* F = \Gamma(U, \pi_* F) = \Gamma(U \times I, F).$$

Andersherum folgt der Isomorphismus der Koeinheit der Adjunktion aber auch aus dem Fortsetzungsresultat, denn wir können sofort den Isomorphismus auf den Halmen über $(x, t) \in X \times I$ zeigen:

$$\begin{aligned} (\pi^* \pi_* F)_{(x,t)} &\xrightarrow{\sim} (\pi_* F)_x \\ &= \text{colf}_{U \ni x} \Gamma(U \times I, F) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{colf}_{U \ni x} \Gamma(U \times \{t\}, F) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{colf}_{V \ni (x,t)} F(V) \\ &= F_{(x,t)}. \end{aligned}$$

Dabei erhalten wir die Surjektivität von $F(V) \rightarrow \Gamma(U \times \{t\}, F)$ aus der Bijektivität der Verknüpfung

$$\Gamma(U \times I, F) \rightarrow F(V) \rightarrow \Gamma(U \times \{t\}, F)$$

und die Injektivität aus der Eigenschaft, dass bereits die faserweise stetige Fortsetzung eindeutig ist nach der Konstanz der Einschränkungen von F auf die Fasern von π .

Nun können wir die Aussage zeigen. Zunächst folgt sie für I kompakt sofort aus eigentlichem Basiswechsel über dem kartesischen Diagramm mit eigentlichen und separierten Vertikalen

$$\begin{array}{ccc} (x, t) & \hookrightarrow & X \times I \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \pi \\ x & \hookrightarrow & X. \end{array}$$

Ist nun $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall, so können wir es als aufsteigende Vereinigung von Kompakta $I = \bigcup_j I_j$ schreiben und erhalten durch das Verkleben von Schnitten ebenfalls

$$\Gamma(U \times I, F) \xrightarrow{\sim} \text{colf}_j \Gamma(U \times I_j, F) \xrightarrow{\sim} \Gamma(U \times \{t\}, F).$$

□

Wir bezeichnen den Funktor $p^* p_* : \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|} \rightarrow \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}^{\text{sk}}$ kurz mit β . Es handelt sich in der später eingeführten Terminologie um einen Korefektor (vgl. 4.18).

Proposition 1.23. *Der Funktor $\beta : \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|} \rightarrow \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}^{\text{sk}}$ ist ein Rechtsadjungierter zur Inklusion $\iota : \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}^{\text{sk}} \rightarrow \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$.*

Beweis. Für $S \in \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}^{\text{sk}}$ und $F \in \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ gilt:

$$\begin{aligned}
& \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}^{\text{sk}}(S, \beta F) \\
& \xrightarrow{\sim} \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}^{\text{sk}}(\beta S, \beta F) \\
& \xrightarrow{\sim} \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}(p_* S, p_* p^* p_* F) \\
& \xrightarrow{\sim} \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}(p_* S, p_* F) \\
& \xrightarrow{\sim} \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}(\beta S, F) \\
& \xrightarrow{\sim} \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}(S, F).
\end{aligned}$$

Dabei wurden die Adjunktion (p^*, p_*) und im dritten Schritt 1.16 benutzt. \square

Als Komposition zweier linksexakter Funktoren ist β wieder linksexakt. Der allgemeinen Terminologie folgend bezeichnen wir eine Garbe $F \in \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ als β -azyklisch, falls ihre höheren Derivierten von β verschwinden, also falls

$$R^k \beta F = 0 \quad \text{für alle } k > 0.$$

Die folgende Charakterisierung β -azyklischer Garben ist für die Formulierung der Hauptaussage des Abschnitts ohne Rückgriff auf homotopieinjektive Auflösungen relevant (1.29). In 1.27 wird sie nicht benötigt werden.

Proposition 1.24 ([KS94], 8.1.8). *Sei $F \in \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$. Dann gilt:*

$$(i) \quad \Gamma(U(\sigma), R^k \beta F) \xrightarrow{\sim} H^k(U(\sigma); F) \quad \text{für alle } \sigma \in \mathcal{K}, k \geq 0.$$

(ii) F ist β -azyklisch genau dann, wenn

$$H^k(U(\sigma); F) = 0 \quad \text{für alle } \sigma \in \mathcal{K}, k > 0.$$

Insbesondere sind schwach \mathcal{K} -konstruierbare Garben und welche Garben β -azyklisch.

Bemerkung 1.25. Man beachte, dass Aussage (i) ein Zusatz zur allgemeinen Charakterisierung höherer direkter Bilder als Garbifizierungen der Prägarben der Kohomologien der Urbilder ([Soe18d], 6.6.2) ist für den Fall, dass die Schnitt-funktoren $\Gamma(p^{-1}(U), \cdot)$ exakt sind.

Beweis. (ii) folgt direkt aus (i) mit $R^k \beta F \in \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}^{\text{sk}}$ (nach 1.18) und unserer Aussage über die Halme 1.19 (4).

Mit der Exaktheit von Halmfunktoren $F \mapsto F_x$ und 1.19 (4) sind die Funktoren $\Gamma(U(\sigma), \cdot)$ auf schwach \mathcal{K} -konstruierbaren Garben exakt und vertauschen folglich bei einem Komplex mit der Bildung der Kohomologie. Wir erhalten für $F \hookrightarrow I^\bullet$ eine injektive Auflösung somit

$$\begin{aligned}
\Gamma(U(\sigma), R^k \beta F) &= \Gamma(U(\sigma), H^k(\beta I^\bullet)) \\
&\xrightarrow{\sim} H^k(\Gamma(U(\sigma), \beta I^\bullet)) \\
&\xrightarrow{\sim} H^k(\Gamma(U(\sigma), I^\bullet)) \\
&= H^k(U(\sigma); F),
\end{aligned}$$

wobei wir im dritten Schritt 1.20 verwendet haben. \square

Damit können wir uns nun den derivierten Kategorien zuwenden.

Satz 1.26. *Sei $F \in \text{Ket}(\text{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$ ein Kettenkomplex aus β -azyklischen Garben mit schwach \mathcal{K} -konstruierbaren Kohomologiegarnen $H^q(F)$. Dann ist $\beta F \rightarrow F$ ein Quasi-Isomorphismus.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $\beta F \rightarrow F$ Isomorphismen $H^q(\beta F) \xrightarrow{\sim} H^q(F)$ auf den Kohomologien induziert. Da aber alle beteiligten Garben β -azyklisch sind und die β -azyklischen Garben eine abelsche Unterkategorie bilden, auf der β exakt ist, vertauscht β mit dem Bilden der Kohomologie und es folgt

$$H^q(\beta F) \xrightarrow{\sim} \beta(H^q F) \xrightarrow{\sim} H^q F$$

wegen der schwachen Konstruierbarkeit der Kohomologiegarnen $H^q F$. \square

Damit ist der entscheidende Schritt für unser Ziel gezeigt. Wir erhalten:

Theorem 1.27. *Sei \mathcal{K} ein Simplizialkomplex. Dann definieren der Rechtsderivierte von β und die Inklusion auf den derivierten Kategorien eine Äquivalenz*

$$\text{Der}(\text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}^{\text{sk}}) \xrightleftharpoons[R\beta]{\iota} \text{Der}^{\text{sk}}(\text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}).$$

Beweis. Beide Funktoren sind auf den gesamten derivierten Kategorien definiert, ι als exakter Funktor und $R\beta$ nach dem Satz über die Existenz homotopieinjektiver Auflösungen ([Soe18b], 3.6.10 und 3.4.2). Die Adjunktion (ι, β) bleibt eine Adjunktion nach Übergang zu den derivierten Kategorien ([Soe18b], 3.2.25):

$$\text{Der}(\text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}^{\text{sk}}) \xrightleftharpoons[R\beta]{\iota} \text{Der}(\text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}).$$

Tatsächlich hat ι Bild in $\text{Der}^{\text{sk}}(\text{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$ und wir erhalten die Adjunktion aus der Formulierung des Theorems. Sei nun $F \in \text{Ket}(\text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}^{\text{sk}})$ und $F \xrightarrow{\sim} I$ eine homotopieinjektive Auflösung von F durch injektive Garben. Diese ist entfaltet für β . Mit dem vorangegangenen Satz 1.26 und der β -Azyklizität injektiver Garben erhalten wir für $F \in \text{Der}^{\text{sk}}(\text{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$:

$$R\beta F \xrightarrow{\sim} \beta I \xrightarrow{\sim} I \xrightarrow{\sim} F.$$

Diese Aussage beinhaltet die Isotransformationen $\text{Id} \xrightarrow{\sim} R\beta \circ \iota$ und $\iota \circ R\beta \xrightarrow{\sim} \text{Id}$. \square

Bemerkung 1.28. Kashiwara und Schapira beschränken sich auf die Äquivalenz der beschränkten derivierten Kategorien, allerdings mit der gleichen Argumentation. In [KS94] 1.7.12 wird eine allgemeine Aussage für solche Situationen gezeigt, die hier aber nicht benötigt wird.

Bemerkung 1.29. Ist \mathcal{K} lokal-endlich und von beschränkter Dimension, so erhalten wir dasselbe Ergebnis mit deutlich weniger Technik, nämlich ohne Rückgriff auf homotopieinjektive Auflösungen. In der Tat können wir nach dem Satz über das unbeschränkte Derivieren homologisch endlicher Funktoren ([Soe18d], 3.7.4) mit beliebigen Auflösungen aus β -azyklischen Objekten arbeiten und dann mit 1.24 (ii) eine beliebige welche Auflösung wählen.

Wir müssen also zeigen, dass β homologisch rechtsendlich ist und sich jede Garbe $F \in \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ in eine β -azyklische einbetten lässt. Letzteres folgt wieder aus 1.24 (ii), ersteres zeigen wir im folgenden Lemma.

Lemma 1.30. *Ist \mathcal{K} ein lokal-endlicher Simplicialkomplex beschränkter Dimension, so ist $\beta : \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|} \rightarrow \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ ein homologisch rechtsendlicher Funktor.*

Beweis. Sei $F \in \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$. Dann ist $R^k\beta F$ schwach \mathcal{K} -konstruierbar und wir bestimmen für $x \in |\sigma|$ die Halme mittels

$$(R^k\beta F)_x \xrightarrow{\sim} (R^k\beta F)(U(\sigma)) \xrightarrow{\sim} H^k(U(\sigma); F)$$

unter Verwendung von 1.19 (4) und 1.24 (i). Das führt die Aussage auf die beschränkte homologische Dimension von n -Mannigfaltigkeiten im folgenden Lemma zurück, denn für \mathcal{K} lokal-endlich von beschränkter Dimension ist $U(\sigma)$ eine offene Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums \mathbb{R}^n . \square

Proposition 1.31. *Für $U \subset \mathbb{R}^n$ und $F \in \text{Ab}_{/U}$ gilt $H^q(U; F) = 0$ für alle $q > n$.*

Beweis. Die Aussage folgt wie die bekannte Aussage für die kompakte Kohomologie $H^q_!(U; F)$ aus der Existenz von n -Schritt Auflösungen durch kompaktweiche Garben ([KS94], 3.2.2). Wir müssen zeigen, dass diese auch Γ -azyklisch sind. Mit dem Azyklizitätskriterium [Soe18d], 4.1.6, und der Aussage für $\Gamma_!$ bleibt nur noch zu zeigen, dass eine kurze exakte Sequenz von Garben $F' \hookrightarrow F \twoheadrightarrow F''$ mit kompaktweichem F' exakt bleibt nach Anwenden von Γ . Dies folgt allerdings sofort aus der σ -Kompaktheit von $U \subset \mathbb{R}^n$ und der Aussage für $\Gamma_!$ aufgrund der Exaktheit filtrierender Kolimites und der Darstellung $\Gamma = \text{colim}_i \Gamma(K_i, \cdot)$ für $U = \bigcup_i K_i$ eine kompakte Ausschöpfung von U . \square

Bemerkung 1.32. Man beachte, dass der Beweis ab 1.23 ausschließlich auf homologischer Algebra beruht, die konkreten topologischen Eigenschaften der Situation fließen im Wesentlichen in 1.19 ein. Dies wird sich in Abschnitt 5.3 als nützlich erweisen, um die Aussage für simpliziale Mengen zu formulieren.

Wir halten den allgemeinen Teil des Arguments fest:

Satz 1.33. *Seien C und D abelsche Kategorien mit einem Paar adjungierter Funktoren (p^*, p_*)*

$$C \underset{p_*}{\overset{p^*}{\rightleftarrows}} D,$$

*für das die Einheit der Adjunktion $\text{Id} \xrightarrow{\sim} p_*p^*$ auf allen Objekten ein Isomorphismus ist. Bezeichne Objekte $d \in D$, auf denen die Koeinheit $p^*p_* \Rightarrow \text{Id}$ ein Isomorphismus ist, als schwach konstruierbar. Dann ist die volle Unterkategorie der schwach konstruierbaren Objekte D^{sk} von D koreflektiv mit dem Koreflektor $\beta = p^*p_*$. Gibt es in $\text{Der}(D)$ für beliebige unbeschränkte Kettenkomplexe Entfaltungen durch β -azyklische Objekte, so gibt es eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\text{Der}(D^{\text{sk}}) \underset{R\beta}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \text{Der}^{\text{sk}}(D),$$

wobei $\text{Der}^{\text{sk}}(D)$ die volle Unterkategorie der derivierten Kategorie von D mit schwach konstruierbarer Kohomologie bezeichnet.

1.3 Verallgemeinerte Garben

In diesem Abschnitt werden die Beobachtungen der letzten beiden Abschnitte vereint. Nach Abschnitt ?? sind Garben auf einem Simplizialkomplex \mathcal{K} nichts anderes als ein Simplizialkomplex von Garben über dem einpunktigen Raum, und ein Simplizialkomplex von Garben über einem topologischen Raum X entspricht einer Garbe auf dem Produkt $\mathcal{K} \times X$. In Abschnitt ?? haben wir Simplizialkomplexe \mathcal{K} von Mengen geometrisch charakterisiert als die simplizial konstanten Garben auf der geometrischen Realisierung $|\mathcal{K}|$ von \mathcal{K} . Wir erwarten daher auch eine relative Version dieser Aussage über einem beliebigen topologischen Raum X , die die Simplizialkomplexe von Garben auf X alias Garben auf $\mathcal{K} \times X$ geometrisch beschreibt. Wir werden sehen, dass es ein allgemeines Verfahren zur Relativierung solcher Aussagen gibt.

Unser Zugang benötigt den Begriff von Garben auf einem topologischen Raum X mit Werten in einer beliebigen Kategorien \mathcal{C} . Die Garbenbedingung ist dabei die schon in ?? verwendete.

Definition 1.34 ([Soe18d], 2.1.5). Sei \mathcal{C} eine Kategorie und X ein topologischer Raum. Eine \mathcal{C} -wertige Prägarbe $F \in [\text{Off}_X^{\text{op}}, \mathcal{C}]$ auf X heißt *\mathcal{C} -wertige Garbe auf X* , falls sie die Garbenbedingung erfüllt:

Für alle gesättigten offenen Überdeckungen $U = \bigcup_i U_i$ einer offenen Menge gilt $F(U) = \lim_i F(U_i)$.

Wir notieren die Kategorie der \mathcal{C} -wertigen Prägarben auf X mit $\text{p}C_{/X}$ und die der \mathcal{C} -wertigen Garben auf X mit $C_{/X}$.

Für \mathcal{C} die Kategorien der Mengen oder der abelschen Gruppen ist obige Definition äquivalent zur bekannten Definition über die eindeutige Verklebbarkeit von verträglichen Schnitten.

Auch das Konzept der Garbifizierung können wir auf \mathcal{C} -wertige Prägarben verallgemeinern.

Definition 1.35. Eine Kategorie \mathcal{C} heißt *vollständig*, wenn in ihr alle Limites über kleine Kategorien existieren.

Dual dazu bedeutet Kovollständigkeit, dass alle Kolimites über kleine Kategorien existieren.

Satz 1.36. Sei \mathcal{C} eine vollständige und kovollständige Kategorie. Dann hat der Vergissfunktork $C_{/X} \rightarrow \text{p}C_{/X}$ einen Linksadjungierten, genannt (verallgemeinerte) Garbifizierung.

Beweis. Sei $F \in \text{p}C_{/X}$. Wir behaupten, dass die Prägarbe

$$F^+(U) := \text{colf}_{\mathcal{U}/U} \lim_{V \in \mathcal{U}} F(V)$$

mit den induzierten Restriktionen eine Garbe ist und die Adjunktionseigenschaft erfüllt. Dabei steht \mathcal{U}/U für das filtrierende System aller gesättigten Überdeckungen \mathcal{U} von U . Die Konstruktion ist funktoriell.

Für die Garbeneigenschaft konstruieren wir für eine gesättigte offene Überdeckung $U = \bigcup U_i$ inverse Morphismen

$$\text{colf}_{\mathcal{U}/U} \lim_{V \in \mathcal{U}} F(V) \rightleftarrows \lim_i \text{colf}_{\mathcal{U}_i/U_i} \lim_{V \in \mathcal{U}_i} F(V).$$

Diese erhalten wir einerseits aus den natürlichen Projektionen des Limes und Inklusionen des Kolimes und andererseits aus der Konstruktion verträglicher Familien von Abbildungen, deren Verträglichkeit sich jeweils sofort aus der Eindeutigkeit der Restriktionen ergibt. Dabei werden einer Überdeckung in \mathcal{U}/U die Überdeckungen in \mathcal{U}_i/U_i zugeordnet, die sich durch Schneiden mit U_i ergeben, und umgekehrt Familien von Überdeckungen der U_i die ihrer Vereinigung zugeordnete gesättigte Überdeckung von U . Dass beide Morphismen invers zueinander sind, ergibt sich erneut aus der Eindeutigkeit der Restriktionen.

Auch für die Adjunktionseigenschaft gehen wir wie bei mengenwertigen Garben vor und erhalten zunächst den natürlichen Prägarbenmorphismus $F \rightarrow F^+$, der zur einelementigen Überdeckung von U gehört. Wir möchten nun zeigen, dass jeder Prägarbenmorphismus $F \rightarrow G$ in eine Garbe G eindeutig über unseren natürlichen Morphismus $F \rightarrow F^+$ faktorisiert. Die Morphismen unseres Prägarbenmorphismus $F(V) \rightarrow G(V)$ induzieren nun nach der Restriktionsverträglichkeit Morphismen auf den Limites, und somit auch im Kolimes Morphismen in

$$C(F^+(U), G(U) = C(\text{colf}_{\mathcal{U}/U} \lim_{V \in \mathcal{U}} F(V), \lim_{V \in \mathcal{U}} G(V)) \xrightarrow{\sim} \text{colf}_{\mathcal{U}/U} C(\lim_{V \in \mathcal{U}} F(V), \lim_{V \in \mathcal{U}} G(V)),$$

für alle $U \in \mathcal{C}X$, die ebenfalls mit den Restriktionen kompatibel sind.

Dass $F \rightarrow G$ nun mittels dieses Morphismus $F^+ \rightarrow G$ über $F \rightarrow F^+$ faktorisiert, folgt nun aber direkt, da der Morphismus für einelementige Überdeckungen der aus dem Prägarbenmorphismus ist.

Zur Eindeutigkeit dieser Faktorisierung halten wir fest, dass der Morphismus $F^+ \rightarrow G$ auf einelementigen Überdeckungen schon aufgrund der Faktorisierungseigenschaft und dann auf größeren Überdeckung durch die Garbeneigenschaften von F^+ und G eindeutig festgelegt ist. \square

Wir prüfen, dass wir so insbesondere eine Garbifizierung zu “garbenwertigen Garben” erhalten.

Lemma 1.37. *Die Kategorien Ens/X und Ab/X der (abelschen) Garben auf einem topologischen Raum X sind vollständig und kovollständig.*

Beweis. Die Kategorien der Mengen Ens ist vollständig und kovollständig. Somit ist auch die Kategorie $[\text{Off}_X^{\text{op}}, \text{Ens}]$ der Prägarben auf X vollständig und kovollständig nach der Beschreibung von Limites in Funktorkategorien als objektweise Limites. Als Rechtsadjungierter der Garbifizierung vertauscht nun der Inklusionsfunktork $\iota : \text{Ens}/X \rightarrow \text{pEns}/X$ mit Limites, d. h. die Limites in Ens/X sind die Limites der zugehörigen Prägarben. Der Kolimes eines Systems $F_i \in \text{Ens}/X$ ist die Garbifizierung des Prägarben-Kolimes $\text{col}_i \iota F_i$, denn für eine

eine Garbe $G \in \text{Ens}/X$ gilt:

$$\begin{aligned} \text{Ens}/X((\text{col}_i \iota F_i)^+, G) &\xrightarrow{\sim} \text{pEns}/X(\text{col}_i \iota F_i, \iota G) \\ &\xrightarrow{\sim} \lim_i \text{pEns}/X(\iota F_i, \iota G) \\ &\xrightarrow{\sim} \lim_i \text{Ens}/X(F_i, G). \end{aligned}$$

Derselbe Beweis gilt für Ab/X unter Verwendung der Vollständigkeit und Kovollständigkeit der abelschen Gruppen. \square

Der Beweis hat nur benutzt, dass pEns/X vollständig und kovollständig ist und Ens/X eine volle Unterkategorie mit Linksadjungiertem zur Inklusion.

Definition 1.38. Eine volle Unterkategorie einer Kategorie, für die die Inklusion einen Linksadjungierten besitzt, heißt *reflektive* Unterkategorie. In diesem Fall heißt der Linksadjungierte *Reflektor*.

Wir halten fest:

Proposition 1.39. Sei $C \subset D$ eine reflektive Unterkategorie. Ist D vollständig, so ist auch C vollständig mit denselben Limites. Ist D kovollständig, so ist auch C kovollständig mit den Reflektionen der Kolimites in D als Kolimites.

Bei “garbenwertige Garben” handelt es sich nun um Garben auf dem Produktraum. Bezeichne dazu wieder \mathcal{B} die Kategorie der Basis der Produkttopologie auf $X \times Y$ durch Produktmengen mit Inklusionen als Morphismen.

Satz 1.40. Seien X und Y topologische Räume. Dann gibt es eine Äquivalenz von Kategorien

$$(\text{Ens}/X)_{/Y} \xrightarrow{\sim} \text{Ens}/\mathcal{B} \xleftarrow{\sim} \text{Ens}/_{X \times Y}$$

gegeben durch

$$\begin{aligned} U \times V &\mapsto (F(V))(U) && \text{für } F \in (\text{Ens}/X)_{/Y} \text{ und} \\ U \times V &\mapsto F(U \times V) && \text{die Restriktion für } F \in \text{Ens}/_{X \times Y} \end{aligned}$$

für $U \in \mathcal{O}X$ und $V \in \mathcal{O}Y$.

Bemerkung 1.41. Dies verallgemeinert wegen 1.12 die Aussage für $Y = \mathcal{K}$ aus 1.10.

Beweis. Die zweite Äquivalenz ist die Aussage von 1.9. Für die erste Äquivalenz bemerken wir wie im Beweis von 1.10, dass die zugrundeliegenden Prägarbenkategorien übereinstimmen. Nun fordert die Garbenbedingung für Ens/\mathcal{B} die Verklebungseigenschaft für beliebige Überdeckungen von Basismengen durch Basismengen, während die Garbenbedingungen für $(\text{Ens}/X)_{/Y}$ die Verklebungseigenschaft für “Produkt-Überdeckungen” von Basismengen fordert, d. h. für Überdeckungen der Form $U \times V = \bigcup_{i,j} U_i \times V_j$ für $U = \bigcup_i U_i$ eine Überdeckung von U und $V = \bigcup_j V_j$ eine Überdeckung von V . Wir rechnen dies nach:

$$\begin{aligned} (F(V))(U) &= (\lim_j F(V_j))(U) \\ &= \lim_j F(V_j)(U) \\ &= \lim_j \lim_i F(V_j)(U_i). \end{aligned}$$

Dabei wurde im ersten Schritt die Garbenbedingung von $F \in (\text{Ens}/X)_Y$ und im dritten die von $F(V_j) \in \text{Ens}/X$ verwendet. Der zweite Schritt ist die Beschreibung von Limites in Funktorkategorien als objektweise Limites.

Die beiden Verklebungsbedingungen sind äquivalent: Eine beliebige Überdeckung von $U \times V$ induziert mit den Projektionen auf X und Y Überdeckungen von U und V und die Verträglichkeitsvoraussetzung für die Garbenbedingung von Ens/B bezüglich der Produktüberdeckung ist genau dann erfüllt, wenn sie für die ursprüngliche Überdeckung erfüllt ist. \square

Bemerkung 1.42. Für abelsche Garben erhalten wir die analoge Aussage $(\text{Ab}/X)_Y \xrightarrow{\approx} \text{Ab}/_{X \times Y}$.

1.3.1 Exkurs: Überlagerungen von Produkträumen

Nachdem der vorangegangene Satz die étalen Räume über einem Produktraum $X \times Y$ beschreibt, möchten wir die Überlagerungen eines solchen Produktraums beschreiben. Wir können die Frage in unserer Terminologie von Garben formulieren.

Proposition 1.43. *Die Äquivalenz von Kategorien*

$$\text{Ens}/X \xrightarrow{\approx} \text{étTop}_X$$

induziert eine Äquivalenz der vollen Unterkategorien

$$\text{Ens}/X^{\text{lk}} \xrightarrow{\approx} \text{Üb}_X,$$

wobei Ens/X^{lk} die lokal konstanten Garben auf X bezeichnet.

Beweis. Die Äquivalenz induziert zunächst die Äquivalenz der vollen Unterkategorien der konstanten Garben und der trivialen Überlagerungen und dann bei lokaler Forderung der jeweiligen Eigenschaften die behauptete Aussage. \square

Wir erinnern an die überlagerungstheoretische Definition einfachen Zusammenhangs in der Sprache von Garben.

Definition 1.44. Ein topologischer Raum Y heißt *einfach zusammenhängend*, wenn jede lokal konstante Garbe auf Y konstant ist.

Einfach zusammenhängende Räume sind somit insbesondere zusammenhängend, da wir sonst auf den Zusammenhangskomponenten triviale Überlagerungen wählen können, deren Fasern verschiedene Kardinalitäten haben.

Satz 1.45. *Seien X ein topologischer Raum und Y ein einfach zusammenhängender topologischer Raum. Bezeichne $\pi : X \times Y \rightarrow X$ die Projektion. Dann induzieren die Funktoren*

$$\text{Ens}/X^{\text{lk}} \xrightleftharpoons[\pi_*]{\pi^*} \text{Ens}/_{X \times Y}^{\text{lk}}$$

eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweis. Der Isomorphismus $F \xrightarrow{\sim} \pi_* \pi^* F$ für $F \in \text{Ens}/X^{\text{lk}}$ ist gerade die Aussage zu finalem Rückzug mit zusammenhängender Faser 1.14, da Y zusammenhängend ist als einfach zusammenhängender Raum.

Der Isomorphismus $\pi^* \pi_* F \xrightarrow{\sim} F$ für $F \in \text{Ens}/X \times Y^{\text{lk}}$ folgt aus der Aussage zu faserkonstanten Garben 1.22, falls wir zeigen können, dass F konstant ist auf den Fasern von π . Tatsächlich ist aber $F|_{\pi^{-1}(x)}$ eine lokal konstante Garbe auf Y und mithin konstant wegen des einfachen Zusammenhangs von Y . \square

1.3.2 Anwendung auf relative schwach konstruierbare Garben

Wir formulieren nun die relative Form schwacher Konstruierbarkeit und erklären, wie man mit dem Begriff “garbenwertiger Garben” die relative Form von 1.27 erhält.

Definition 1.46. Sei X ein topologischer Raum und \mathcal{K} ein Simplicialkomplex. Eine Garbe $F \in \text{Ab}_{|\mathcal{K}| \times X}$ heißt *relativ zu X schwach \mathcal{K} -konstruierbar*, falls es für jedes $\sigma \in \mathcal{K}$ eine Garbe $G_\sigma \in \text{Ab}/X$ gibt mit

$$F|_{|\sigma| \times X} \xrightarrow{\sim} \pi^* G_\sigma$$

für $\pi : |\sigma| \times X \rightarrow X$ die Projektion.

Wir könnten nun für diesen Begriff dieselben Aussagen wie im vorangegangenen Abschnitt mit vollkommen analogen Argumenten erneut beweisen. Unsere obige Charakterisierung von Garben auf Produkträumen ermöglicht uns aber ein einfacheres Vorgehen. Wir bemerken, dass für die benötigten Konstruktionen (Rückzug, Vorschub, derivierte Funktoren), ihre Eigenschaften (Adjunktionen, Exaktheit) und die darauf aufbauende Argumentation im vorangegangenen Abschnitt der Umstand keine Rolle gespielt hat, dass unsere Garben Werte in den abelschen Gruppen annehmen. Dieselben Konstruktionen funktionieren für \mathcal{A}/Top eine Garbenkategorie mit Werten in einer beliebigen vollständigen abelschen Kategorie \mathcal{A} . Davon überzeugt man sich im Zweifel auch explizit zunächst durch Übertragung der Aussagen auf Garbenkategorien mit Werten in R -Linksmoduln und dann durch den Einbettungssatz von Mitchell auf beliebige abelsche Kategorien.

Um den relativen Fall abzuschließen, werden wir diese Argumentation auf den Fall $\mathcal{A} = \text{Ab}/X$ anwenden. Die benötigten homotopieinjektiven Auflösungen im Beweis erhalten wir dann durch die Äquivalenz $(\text{Ab}/X)_{/Y} \xrightarrow{\sim} \text{Ab}/X \times Y$. Wir erhalten:

Theorem 1.47. *Sei \mathcal{K} ein Simplicialkomplex. Dann gibt es eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\text{Der}(\text{Ab}_{/|\mathcal{K}| \times X}^{\text{sk}}) \xrightleftharpoons[R\beta]{\iota} \text{Der}^{\text{sk}}(|\mathcal{K}| \times X),$$

wobei ι die Inklusion und $\beta = (p \times \text{id}_X)^*(p \times \text{id}_X)_* : \text{Ab}_{/|\mathcal{K}| \times X}^{\text{sk}} \rightarrow \text{Ab}_{/|\mathcal{K}| \times X}^{\text{sk}}$ ist.

Bemerkung 1.48. Der tieferstehende Grund für 1.40 und die sich daraus ergebende Möglichkeit, alle über $X = \text{pt}$ gezeigten Aussagen auch zu relativieren, ergibt sich daraus, dass es sich bei Ens und $\text{Ens}/_X$ um *elementare Topoi* handelt, d. h. um Kategorien, die die wichtigsten Eigenschaften der Kategorie der Mengen verallgemeinern. Für die Übertragung von Aussagen von Ens auf einen Topos E verwendet man die *Mitchell-Bénabou-Sprache* ([MLM94], VI.5) von E . Die *Kripke-Joyal-Semantik* ([MLM94], VI.6) weist Formeln der Mitchell-Bénabou-Sprache wieder logische Aussagen zu. Mit dieser Übertragungstechnik bleiben Aussagen aus Ens in E gültig, wenn sie mittels ausschließlich *konstruktiver* Argumente beweisbar sind. Konkreter sind als Schlussregeln die Regeln des intuitionistischen Prädikatenkalküls erlaubt, die sich von den Schlussregeln der klassischen Logik unterscheiden: nicht erlaubt sind Widerspruchsargumente (kein Satz vom ausgeschlossenen Dritten), das Gesetz der doppelten Negation und die Verwendung des Auswahlaxioms ([MLM94], VI.5, letzter Absatz).

Kapitel 2

Simpliziale Mengen

Simpliziale Mengen sind eine Verallgemeinerung von Simplicialkomplexen, die näher an verwandten kategorientheoretischen Konzepten stehen. Sie erlauben das mehrfache Verwenden von Simplizes in der geometrischen Realisierung und statteten Kanten und höhere Simplizes mit einer Orientierung aus. Während Simplicialkomplexe einfache ungerichtete Graphen auf höhere Dimensionen verallgemeinern, verallgemeinern simpliziale Mengen gerichtete Multigraphen. Die geometrische Realisierung simplizialer Mengen ermöglicht einen kombinatorischen Zugang zur Topologie und kann als Ausgangspunkt der Homotopietheorie gewählt werden (vgl. [GJ09]). In diesem Kapitel werden wir simpliziale Mengen, ihre geometrische Realisierung und deren elementare Eigenschaften einführen.

2.1 Definition simplizialer Mengen

Wir betrachten die Menge Δ der nichtleeren endlichen Ordinalzahlen. Ihre Elemente sind von der Form $\{0, 1, \dots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, welche wir kurz mit $[n]$ bezeichnen werden. Wir verstehen diese Mengen $[n]$ als angeordnete Mengen.

Definition 2.1. Die *Simplex-Kategorie* Δ ist die Kategorie der endlichen nichtleeren Ordinalzahlen versehen mit monotonen Abbildungen als Morphismen.

Ist C eine Kategorie, so heißt eine Prägarbe auf Δ mit Werten in C (d. h. ein Funktor $\Delta^{\text{op}} \rightarrow C$) ein *simpliziales Objekt* in C .

Wir notieren die Funktorkategorien simplizialer Objekte in C durch $sC = [\Delta^{\text{op}}, C]$. Opponiert heißt ein Funktor $\Delta \rightarrow C$ ein *kosimpliziales Objekt* in C .

Für $X \in sC$ ein simpliziales Objekt notieren wir kurz $X_n := X([n])$ und für eine monotone Abbildung $f : [m] \rightarrow [n]$ auch $f^* = X(f)$.

Die monotonen Abbildungen $[m] \rightarrow [n]$ werden von zwei besonders einfachen Klassen monotoner Abbildungen erzeugt: von den *Randabbildungen*, den eindeutigen Injektionen $d_i^n : [n-1] \rightarrow [n]$, die $i \in \{0, \dots, n\}$ nicht treffen, und den *Degenerationsabbildungen*, den eindeutigen Surjektionen $s_i^n : [n+1] \rightarrow [n]$, für die nur $i \in \{0, \dots, n\}$ nicht genau ein Urbild hat.

Lemma 2.2 ([GM96], I.2, ex. 1). (i) Die Rand- und Degenerationsabbildungen erfüllen die Relationen

$$\begin{aligned} d_j^{n+1} d_i^n &= d_i^{n+1} d_{j-1}^n && \text{für } i < j, \\ s_j^n s_i^{n+1} &= s_i^n s_{j+1}^{n+1} && \text{für } i \leq j, \\ s_j^{n-1} d_i^n &= \begin{cases} d_i^{n-1} s_{j-1}^{n-2} & \text{für } i < j, \\ \text{id}_{[n-1]} & \text{für } i = j \text{ oder } i = j + 1, \\ d_{i-1}^{n-1} s_j^{n-2} & \text{für } i > j + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

(ii) Sei $f : [m] \rightarrow [n]$ monoton. Dann hat f eine eindeutige Darstellung

$$f = d_{i_1}^n \dots d_{i_s}^{n-s+1} s_{j_t}^{m-t} \dots s_{j_1}^{m-1}$$

mit $n \geq i_1 > \dots > i_s \geq 0$, $m > j_1 > \dots > j_t \geq 0$ und $n = m - t + s$.

(iii) Die vom Köcher der endlichen nichtleeren Ordinalzahlen mit den Rand- und Korandabbildungen und den angegebenen Relationen auf den Morphismenmengen erzeugte Pfadkategorie ist isomorph zu Δ .

Beweis. (i) Durch Bildchen Zeichnen oder explizites Nachrechnen: Wir werfen beide Abbildungen simultan auf allen Elementen aus und erhalten zum Beispiel für die erste Aussage:

$$\begin{aligned} &(0, 1, \dots, i-1, i, i+1, \dots, j-2, j-1, j, \dots, n-1) \\ \xrightarrow{d_i^n} &(0, 1, \dots, i-1, i+1, i+2, \dots, j-1, j, j+1, \dots, n) \\ \xrightarrow{d_j^{n+1}} &(0, 1, \dots, i-1, i+1, i+2, \dots, j-1, j+1, j+2, \dots, n+1) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} &(0, 1, \dots, i-1, i, i+1, \dots, j-2, j-1, j, \dots, n-1) \\ \xrightarrow{d_{j-1}^n} &(0, 1, \dots, i-1, i, i+1, \dots, j-2, j, j+1, \dots, n) \\ \xrightarrow{d_i^{n+1}} &(0, 1, \dots, i-1, i+1, i+2, \dots, j-1, j+1, j+2, \dots, n+1). \end{aligned}$$

- (ii) In einer solchen Darstellung gibt $m - t$ die Anzahl der Funktionswerte der Abbildung an, die j_k beschreiben die Partition von $(0, \dots, m)$ in zusammenhängende Abschnitte mit demselben Funktionswert und die i_k bestimmen die Funktionswerte selbst.
- (iii) Jeder Morphismus in der Pfadkategorie, d. h. jedes Tupel komponierbarer Rand- und Degenerationsabbildungen kann mit den Relationen aus dem ersten Teil auf eine Form wie in (ii) gebracht werden. Umgekehrt ist nach (ii) jede monotone Abbildung aber auch als ein solcher Pfad darstellbar.

□

Die Yoneda-Einbettung liefert die einfachsten Beispiele nichttrivialer simplizialer Mengen:

Definition 2.3. Die darstellbare simpliziale Menge $\Delta^n := \Delta(\cdot, [n])$ heißt *Standard- n -Simplex*.

Wir notieren die Yoneda-Einbettung auch durch $r : \Delta \rightarrow \mathbf{sEns}$.

Ist $X \in \mathbf{sEns}$ eine simpliziale Menge, so bezeichnen wir $X_n = X([n])$ als die Menge der n -Simplizes von X . Nach dem Yoneda-Lemma sind die n -Simplizes von X gegeben durch

$$X_n \xrightarrow{\sim} \mathbf{sEns}(\Delta^n, X). \quad (2.1)$$

Eine simpliziale Menge X lässt sich vollständig durch das System ihrer Simplizes $\Delta^n \rightarrow X$ verstehen. Dazu erklären wir Slice-Kategorien, einen Spezialfall von Komma-Kategorien.

Definition 2.4. Sei $r : C \rightarrow D$ ein Funktor und $X \in D$ ein Objekt. Dann bezeichnet $C \downarrow_r X$ die *Slice-Kategorie* der Objekte von C über X mittels r , deren Objekte Morphismen $\pi_c : r c \rightarrow X$ für $c \in C$ sind mit Morphismen den von $f : c \rightarrow d$ induzierten Morphismen $r f$ mit $\pi_c = \pi_d \circ r f$.

Es handelt sich also um die Kategorie C , die mittels r über dem Objekt X von D aufgefasst wird.

Wir bezeichnen die Slice-Kategorie $\Delta \downarrow_r X$ mit der Yoneda-Einbettung als die *Simplexkategorie* von X . Konkret ist darin ein Objekt ein Morphismus $\Delta^n \rightarrow X$ und ein Morphismus ein Morphismus simplizialer Mengen $\Delta^n \rightarrow \Delta^m$ über X .

Lemma 2.5 ([GJ09], I.2.1). *Sei $X \in \mathbf{sEns}$ eine simpliziale Menge. Dann gilt*

$$X \xrightarrow{\sim} \operatorname{col}_{\Delta^n \rightarrow X} \Delta^n,$$

mit dem Kolimes über die Simplexkategorie von X .

Beweis. Bezeichne K obigen Kolimes. Das System, über das der Kolimes gebildet wird, sichert uns nach der universellen Eigenschaft des Kolimes einen Morphismus $K \rightarrow X$. Wir müssen zeigen, dass dieser Bijektionen auf den n -Simplizes induziert. Tatsächlich definiert ein n -Simplex $\Delta^n \rightarrow K$ durch Nachschalten von $K \rightarrow X$ einen n -Simplex in X . Umgekehrt hat jeder n -Simplex $\Delta^n \rightarrow X$ eine natürliche Abbildung in den Kolimes. Diese Zuordnungen sind zueinander invers. \square

Es handelt sich um ein reines “*abstract nonsense*”-Argument, dessen allgemeine Form wir ebenfalls festhalten. Der Beweis überträgt sich wörtlich, wieder mit der Slice-Kategorie über die Yoneda-Einbettung.

Proposition 2.6 ([GJ09], I.2.1). *Sei C eine kleine Kategorie und $F : C \rightarrow \mathbf{Ens}$ ein Funktor. Dann ist F ein Kolimes über darstellbare Funktoren $C(X, \cdot)$.*

Bemerkung 2.7. Dies folgt später auch sofort aus der Dichteformel für Koenden 3.15, der Beschreibung von Koenden als Kolimites 3.7 und der Beschreibung von Produkten von Mengen als Koproducte 3.22.

Das Motto zur Arbeit mit simplizialen Mengen ist daher, Aussagen, die für die Standardsimplizes gelten, durch “Kostetigkeit” (Vertauschen mit Kolimites) auf simpliziale Mengen zu übertragen.

2.2 Der kosimpliziale Raum der Standardsimplizes

Die geometrische Realisierung einer simplizialen Menge soll sich mit geeigneten Identifikationen aus den geometrischen Realisierungen von Standard- n -Simplizes zusammensetzen. Diese definieren wir als die abgeschlossenen geometrischen Standard- n -Simplizes

$$|\Delta^n| = \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leq x_i \leq 1, \sum_{i=0}^n x_i = 1 \right\}.$$

Es wird sich später herausstellen, dass es sich hierbei tatsächlich um die geometrische Realisierung der kombinatorischen Standard- n -Simplizes Δ^n handelt, dies rechtfertigt die Notation.

Ein Morphismus $f : [m] \rightarrow [n]$ induziert eine stetige Abbildung $|f| : |\Delta^m| \rightarrow |\Delta^n|$ auf den zugehörigen Simplizes. Nach 2.2 reicht es, diese für Rand- und Degenerationsabbildungen

$$\begin{aligned} |d_i^n| : |\Delta^{n-1}| &\rightarrow |\Delta^n| && \text{für } 0 \leq i \leq n, \\ |s_i^n| : |\Delta^{n+1}| &\rightarrow |\Delta^n| && \text{für } 0 \leq i \leq n \end{aligned}$$

anzugeben. Für die Randabbildungen $|d_i^n|$ handelt es sich dabei um die Inklusion der i -ten Kante, d. h. in Koordinaten das Einfügen einer Null an der i -ten Stelle, für die Degenerationen $|s_i^n|$ um den Kollaps der i -ten direkten Kante, d. h. in Koordinaten die Ersetzung der i -ten und ihrer darauffolgenden Koordinate durch ihre Summe. In Formeln:

$$|d_i^n|(x_0, \dots, x_{n-1}) = (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1}), \quad (2.2)$$

$$|s_i^n|(x_0, \dots, x_{n+1}) = (x_0, \dots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{n+1}). \quad (2.3)$$

Wir erhalten einen Funktor

$$\begin{aligned} |\Delta| : \Delta &\rightarrow \text{Top}, \\ [n] &\mapsto |\Delta^n|, \end{aligned}$$

genannt der *kosimpliziale Raum der Standardsimplizes*.

Bemerkung 2.8 ([Moe95], III.1.1). Eine alternative Darstellung der geometrischen Standard- n -Simplizes ist für $I = [0, 1]$ das Einheitsintervall mit Endpunkten 0 und 1 und der Anordnung \leq :

$$|\Delta^n| = \{(x_1, \dots, x_n) \in I^n \mid x_1 \leq \dots \leq x_n\}$$

mit den Inklusionen von Rändern $|d_i^n| : |\Delta^{n-1}| \rightarrow |\Delta^n|$, $0 \leq i \leq n$:

$$|d_i^n|(x_1, \dots, x_{n-1}) = \begin{cases} (0, x_1, \dots, x_{n-1}) & i = 0, \\ (x_1, \dots, x_{n-1}, 1) & i = n, \\ (x_1, \dots, x_i, x_i, \dots, x_{n-1}) & \text{sonst} \end{cases}$$

und Kollapsen von Kanten $|s_i^n| : |\Delta^{n+1}| \rightarrow |\Delta^n|$, $0 \leq i \leq n$, durch Vergessen der $(i+1)$ -ten Koordinate

$$|s_i^n|(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_i, x_{i+2}, \dots, x_{n+1}).$$

Man beachte, dass die Konstruktion nur einen angeordneten topologischen Raum mit Minimum 0 und Maximum 1 benötigt, und sich auf solche “verallgemeinerten Intervalle” überträgt. Der Sierpinski-Raum aus einem offenen dichten Punkt 1 und einem abgeschlossenen Punkt 0 ist etwa ein solches verallgemeinertes Intervall.

Bemerkung 2.9. Wie im Fall der Simplizialkomplexe möchten wir neben der anschaulich-geometrischen Realisierung durch lokal reelle Räume auch noch eine kombinatorischere Realisierung analog zur Ordnungstopologie auf dem Simplizialkomplex finden. Nahe liegt es, die Standard- n -Simplizialkomplexe mit ihrer Ordnungstopologie zu verwenden. Wir konstruieren sie als Quotienten der reellen Standardsimplizes, werden aber später sehen, dass sie uns bei der kombinatorischen Beschreibung von Garben auf simplizialen Mengen nicht weiterhelfen.

Bezeichne $\blacktriangle^n = \text{Ord } \Delta^n$ den Standard- n -Simplizialkomplex mit der Ordnungstopologie. Der Simplexanzeiger $p : |\Delta^n| \rightarrow \blacktriangle^n$ ist dann ein Morphismus kosimplizialer Räume vom kosimplizialen Raum der Standardsimplizes in den *kosimplizialen Raum der ordnungstopologischen Standardsimplizes*.

2.3 Geometrische Realisierung simplizialer Mengen

Wir erklären nun die geometrische Realisierung simplizialer Mengen. Der Unterschied zur geometrischen Realisierung von Simplizialkomplexen ist im Wesentlichen die Möglichkeit, Simplizes wiederzuverwenden und zu degenerieren, was zu Identifikationen in der geometrischen Realisierung führt. Ein Fall von “Wiederverwendung” ist etwa die Realisierung der S^1 als 1-Simplex, dessen Endpunkte übereinstimmen. Degeneration bedeutet, dass niederdimensionale Simplizes auch die Rolle höherdimensionaler Simplizes übernehmen können. Wir können etwa unser Beispiel modifizieren und die S^n als n -Simplex realisieren, bei dem alle niederdimensionalen Kanten in einem Punkt zusammenfallen.

Die geometrische Realisierung von Standard- n -Simplizes haben wir gerade gesehen. Nun fordern wir, dass sich die Realisierung mit Kolimites vertrage:

$$|\text{col}_i X_i| \xrightarrow{\sim} \text{col}_i |X_i|. \quad (2.4)$$

Wenn dies der Fall sein soll, müssen wir die geometrische Realisierung wegen der Darstellung

$$X = \text{col}_{\Delta^n \rightarrow X} \Delta^n$$

aus 2.5 wie folgt definieren:

$$|X| := \text{col}_{\Delta^n \rightarrow X} |\Delta^n|. \quad (2.5)$$

Debei wird der Kolimes wieder über die Simplexkategorie von X gebildet, nun mit den induzierten stetigen Abbildungen aus Gleichung 2.2 als Systemmorphisme.

Ein Morphismus simplizialer Mengen $X \rightarrow Y$ induziert nun durch Nachschalten von $X \rightarrow Y$ einen Funktor auf den Simplexkategorien $\Delta \downarrow X \rightarrow \Delta \downarrow Y$ und

damit auch auf den Kolimites eine stetige Abbildung $|X| \rightarrow |Y|$. Wir erhalten also den Funktor der geometrischen Realisierung $|\cdot| : \mathbf{sEns} \rightarrow \mathbf{Top}$.

Unsere Konstruktion erfüllt tatsächlich:

Proposition 2.10. *Der Funktor der geometrischen Realisierung simplizialer Mengen $|\cdot|$ vertauscht mit beliebigen Kolimites über kleine Indexkategorien.*

Beweis. Zu zeigen ist, dass die Bildung der Simplexkategorie mit Kolimites vertauscht, d. h. für einen Funktor $X : I \rightarrow \mathbf{sEns}$ gilt:

$$\Delta \downarrow_r \operatorname{col}_i X_i \xrightarrow{\sim} \operatorname{col}_i \Delta \downarrow_r X_i.$$

In der Funktorkategorie \mathbf{sEns} erhalten wir Bijektionen zwischen den Mengen von n -Simplizes

$$(\operatorname{col}_i X_i)_n \xrightarrow{\sim} \operatorname{col}_i (X_i)_n.$$

Diese sind mit den Morphismen in Δ verträglich. \square

Wir können den Kolimes topologischer Räume mittels Koprodukt und Koegalisateur ausschreiben. Dazu verstehen wir die Mengen X_n als diskrete topologische Räume und erhalten:

$$|X| \xrightarrow{\sim} \left(\bigsqcup_n X_n \times |\Delta^n| \right) / \sim$$

mit der Quotiententopologie nach der Äquivalenzrelation, die für alle monotonen $f : [m] \rightarrow [n]$ von

$$(x, |f|(p)) \sim (f^*x, p)$$

erzeugt ist.

2.4 Sparsame Realisierung durch nichtdegenerierte Simplizes

Während die Definition simplizialer Mengen und ihrer Realisierung mit Degenerationsabbildungen wie gesehen von einem formalen Standpunkt aus einfach ist, ist für die konkrete Arbeit häufig eine explizitere Form der Realisierung praktischer, die “unnötige Simplizes von vornherein weglässt”.

Definition 2.11 ([GM96], I.2.9). Sei $X \in \mathbf{sEns}$ eine simpliziale Menge. Ein Simplex $x \in X_n$ heißt *degeneriert*, falls es einen Simplex $y \in X_m$ und eine surjektive monotone Abbildung $s : [n] \rightarrow [m], n > m$ gibt mit $x = s^*y$.

Andernfalls heißt ein Simplex nichtdegeneriert. Für $X \in \mathbf{sEns}$ bezeichne $NX_n \subset X_n$ die Menge der nichtdegenerierten n -Simplizes von X .

Lemma 2.12. *Sei $X \in \mathbf{sEns}$ eine simpliziale Menge und $x \in X_n$ ein n -Simplex. Dann gibt es eine eindeutige Darstellung $x = s^*y$ für $y \in NX_m$ einen nichtdegenerierten Simplex von X und $s : [n] \rightarrow [m]$ eine surjektive monotone Abbildung.*

2.4. SPARSAME REALISIERUNG DURCH NICHTDEGENERIERTE SIMPLIZES 33

Beweis. Ist x nichtdegeneriert, wähle $y = x$ und $s = \text{id}_{[n]}$. Andernfalls gibt es nach Definition ein y und eine Surjektion mit der gewünschten Eigenschaft. Diese sind eindeutig nach den Relationen aus 2.2. \square

Wir notieren für eine solche Darstellung $x = s^*y$ auch $y = N(x)$ oder zur Angabe von s auch $y = N_s(x)$.

Wir definieren nun die *sparsame geometrische Realisierung* einer simplizialen Menge X wie folgt:

$$\|X\| := \left(\bigsqcup_n NX_n \times |\Delta^n| \right) / \sim_N,$$

wobei NX_n die diskrete Topologie trägt und die Äquivalenzrelation erzeugt ist von

$$(x, |d_i|(p)) \sim_N (N_s(d_i^*x), |s|(p)),$$

mit der eindeutigen Darstellung Degenerierter aus 2.12. Diese Äquivalenzrelation lässt sich interpretieren als das Umgehen der mittleren Schritte in der Rechnung

$$(x, d_i p) \sim (d_i^*x, p) \sim (s^*y, p) \sim (y, |s|(p))$$

mit $y = N_s(d_i^*x)$.

Satz 2.13. *Die von der Inklusion*

$$\bigsqcup_n NX_n \times |\Delta^n| \hookrightarrow \bigsqcup_n X_n \times |\Delta^n|$$

induzierte Abbildung $\|X\| \xrightarrow{\sim} |X|$ ist ein Homöomorphismus.

Beweis. Die Abbildung existiert und ist stetig nach der universellen Eigenschaft topologischer Quotienten, denn die Äquivalenzrelation \sim umfasst \sim_N . Sie ist bijektiv, denn für die dazukommenden Punkte in degenerierten Simplex s^*x gilt ohnehin $(s^*x, p) \sim (x, |s|(p))$. Weiter ist sie offen: Ist $U \subset \|X\|$ eine offene Teilmenge, so berechnen wir ihr Bild in $|X|$ durch das Bild ihres Urbilds V in $\bigsqcup_n NX_n \times |\Delta^n|$ unter

$$\bigsqcup_n NX_n \times |\Delta^n| \hookrightarrow \bigsqcup_n X_n \times |\Delta^n| \xrightarrow{q} |X|.$$

Bezeichne \bar{V} den Abschluss von $V \subset \bigsqcup_n X_n \times |\Delta^n|$ unter \sim -Äquivalenz. Es gilt $\bar{V} = q^{-1}(q(V))$ und wir müssen nach Definition der Quotiententopologie zeigen, dass \bar{V} offen ist. Bezeichne für $x \in NX_n$ einen nichtdegenerierten Simplex von X den Schnitt von V mit dem zu x gehörigen geometrischen Simplex $|\Delta^n|$ mit V_x . Bei Übergang von V zu \bar{V} kommen dann alle Punkte (s^*x, p) mit $(x, |s|(p)) \in U_x$ hinzu. Das Urbild der offenen Menge U_x unter dem stetigen s -Kollaps $|s|$ ist dann offen. \square

Bemerkung 2.14. Mit diesem Satz kann man sich geometrische Realisierungen gut veranschaulichen, etwa die versprochenen Darstellungen von n -Sphären als Verklebung eines nichtdegenerierten n -Simplex mit einem nichtdegenerierten 0-Simplex.

Beispiel 2.15. Die geometrische Realisierung mittels ordnungstopologischer Simplizes dieser Standard-Darstellung der S^n als simpliziale Menge liefert den Sierpinski-Raum bestehend aus einem offenen dichten und einem abgeschlossenen Punkt. Dies zeigt, dass die ordnungstopologische Realisierung für unsere Zwecke zu grob ist und sich in Kapitel 5 nicht für die Übertragung der Aussagen über schwach konstruierbare Garben auf Simplizialkomplexen eignen wird.

2.5 Iterative Konstruktion durch Pushouts

Die geometrische Realisierung kann als iteratives Ankleben von Standardsimplizes an ihre Ränder verstanden werden. Wir zeigen, dass die geometrische Realisierung einer simplizialen Menge ein CW-Komplex und insbesondere ein Hausdorffraum ist ([Moe95], III.1).

Bezeichne dazu

$$\|X^{\leq k}\| = \left(\bigsqcup_{n=0}^k NX_n \times |\Delta^n| \right) / \sim_N$$

die geometrische Realisierung durch nichtdegenerierte Simplizes der Dimension kleiner oder gleich k . Wir erhalten Einbettungen $\|X^{\leq k}\| \hookrightarrow \|X^{\leq k+1}\|$ und im Kolimes

$$\|X\| = \bigcup_k \|X^{\leq k}\|,$$

denn die Äquivalenzrelation von ganz $\|X\|$ führt zu keinen neuen Identifikationen auf den Teilmengen $\|X^{\leq k}\| \subset \|X\|$.

Wir können die $\|X^{\leq k}\|$ iterativ konstruieren. Betrachte dazu die stetigen Abbildungen π_k , die den k -dimensionalen Teil von $\|X\|$ liefern:

$$\pi_k : NX_k \times |\Delta^k| \hookrightarrow \bigsqcup_{n=0}^k NX_n \times |\Delta^n| \twoheadrightarrow \|X^{\leq k}\|.$$

Proposition 2.16 ([Moe95], III.1, [GJ09], I.2.3). *Sei $X \in \mathbf{sEns}$ eine simpliziale Menge. Dann ist*

$$\begin{array}{ccc} NX_k \times \partial|\Delta^k| & \hookrightarrow & NX_k \times |\Delta^n| \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \pi_k \\ \|X^{\leq k-1}\| & \hookrightarrow & \|X^{\leq k}\| \end{array}$$

ein Pushout topologischer Räume. Dabei ist die Abbildung links auf der i -ten Kante $|d_i| : |\Delta^{k-1}| \hookrightarrow \partial|\Delta^k|$ gegeben durch

$$\begin{aligned} NX_k \times |\Delta^{k-1}| &\rightarrow \|X^{\leq k-1}\| \\ (x, p) &\mapsto [(N_s(d_i^*x), |s|(p))]. \end{aligned}$$

Beweis. Die Definition der Abbildung links ist sinnvoll, da sie auf den niederdimensionalen Überschneidungskanten von $|d_i||\Delta^k|$ und $|d_j||\Delta^k|$ übereinstimmt.

Sowohl der Pushout des Diagramms als auch $\|X^{\leq k}\|$ sind Quotienten von $\bigsqcup_{n=0}^k NX_n \times |\Delta^n|$ nach gewissen Äquivalenzrelationen. Bezeichne die Einschränkung von \sim_N auf $\bigsqcup_{n=0}^k NX_n \times |\Delta^n|$ mit \sim_N^k . Die erzeugenden Relationen für \sim_N^k sind:

$$(x, |d_i|(p)) \sim (N_s(d_i^*x), |s|(p)) \quad \text{für } x \in NX_n, n \leq k.$$

Das sind für $x \in NX_n$ im Fall $n \leq k-1$ genau die erzeugenden Relationen von \sim_N^{k-1} und für $n = k$ genau die Relationen aus der Definition des Pushouts. \square

Korollar 2.17. *Die geometrische Realisierung $|X|$ einer simplizialen Menge $X \in \mathbf{sEns}$ ist ein CW-Komplex und insbesondere ein Hausdorffraum.*

Beweis. Die vorangegangene Proposition zeigt, dass es sich um einen CW-Komplex handelt. Die Pushouts sind dabei das Ankleben von k -Zellen $D^k \cong |\Delta^k|$. Konkret zur Hausdorff-Eigenschaft von CW-Komplexen: Es reicht zu zeigen, dass für jedes k der Teilraum $\|X^{\leq k}\|$ Hausdorffsch ist. Sind darin zwei verschiedene Punkte p und q gegeben, so liegt ohne Einschränkung p im Inneren einer k -Zelle $|\Delta^k|$, denn andernfalls folgt die Hausdorff-Eigenschaft induktiv aus der für $\|X^{\leq k-1}\|$. Liegt q in derselben Zelle, so können sie dort durch offene Mengen getrennt werden. Andernfalls hat p im Inneren seiner k -Zelle eine abgeschlossene Umgebung, die eine offene Umgebung von p enthält und deren Komplement eine zugehörige offene Umgebung für q ist. \square

Bemerkung 2.18. Nach dem Korollar kann die geometrische Realisierung einer simplizialen Menge disjunkt in ihre Zellen, die Bilder der offenen Inneren ihrer nichtdegenerierten Simplizes, zerlegt werden. Wir bezeichnen die zu einem nichtdegenerierten Simplex σ gehörige Zelle der geometrischen Realisierung mit $|\sigma|$.

2.6 Exaktheitseigenschaften der geometrischen Realisierung

Die geometrische Realisierungen simplizialer Mengen liegt in einer in ihren kategoriellen Eigenschaften bequemen (engl. *convenient*) Kategorie topologischer Räume, den kompakt erzeugten Hausdorffräumen. Dies ermöglicht es uns, neben dem Vertauschen der geometrischen Realisierung mit Kolimites (2.10) auch das Vertauschen mit endlichen Limites zu zeigen.

Definition 2.19 ([Ste67]). Ein topologischer Raum X heißt *kompakt erzeugt*, falls gilt: eine Teilmenge $A \subset X$ ist abgeschlossen, falls $A \cap K$ in K abgeschlossen ist für jedes Kompaktum $K \subset X$.

Bemerkung 2.20. Äquivalent dazu ist: eine Teilmenge $U \subset X$ ist offen, falls $U \cap K$ in K offen ist für jedes Kompaktum $K \subset X$.

Wir notieren die volle Unterkategorie der kompakt erzeugten topologischen Räume in den topologischen Räumen mit CG und der kompakt erzeugten Hausdorffräume mit CGHaus. Die kompakt erzeugten topologischen Räume umfassen eine sehr große Klasse an relevanten topologischen Räumen, etwa CW-Komplexe

(nach dem nachfolgenden Lemma 2.21) oder erstabzählbare Räume ([Ste67], 2.2).

Für uns relevant sind die folgenden Kriterien:

Lemma 2.21. (i) *Ist X ein lokal kompakter topologischer Raum, so ist X kompakt erzeugt.*

(ii) *Ist $p : X \rightarrow Y$ eine Quotientenabbildung und X kompakt erzeugt, so ist auch Y kompakt erzeugt.*

(iii) *Ist X ein CW-Komplex, so ist X kompakt erzeugt.*

Dabei heißt ein topologischer Raum *lokal kompakt* (im schwachen Sinne), falls jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt. Beachte den Unterschied zu 4.20 und Bemerkung 4.21.

Beweis. (i) Sei $U \subset X$ mit $U \cap K$ offen für alle $K \subset X$ kompakt. Mit der Lokalkompaktheit von X wählen wir zu jedem $x \in X$ eine kompakte Umgebung K_x und darin eine offene Umgebung U_x . Es ist $U \cap K_x$ in K_x offen und somit $U \cap U_x$ in X offen und wir erhalten, dass $U = \bigcup_{x \in X} U \cap U_x$ offen ist als Vereinigung offener Mengen.

(ii) Sei $A \subset Y$ mit $A \cap K$ abgeschlossen für alle $K \subset Y$ kompakt. Mit der Finaltopologie auf Y gilt, dass $A \subset Y$ genau dann abgeschlossen ist, wenn $p^{-1}(A) \subset X$ abgeschlossen ist. Sei nun $\tilde{K} \subset X$ kompakt. Es ist $p^{-1}(A) \cap \tilde{K}$ abgeschlossen, denn $p(p^{-1}(A) \cap \tilde{K}) = p(\tilde{K}) \cap A$ ist abgeschlossen nach Voraussetzung ($p(\tilde{K}) \subset Y$ ist kompakt als stetiges Bild eines Kompaktums). Da X kompakt erzeugt ist, folgt nun, dass $p^{-1}(A)$ abgeschlossen ist und somit auch $A \subset Y$.

(iii) Die n -Bälle D^n und $(n-1)$ -Sphären S^{n-1} sind kompakt erzeugt nach (i). Disjunkte Vereinigungen kompakt erzeugter Räume sind kompakt erzeugt. Quotienten kompakt erzeugter Räume sind kompakt erzeugt nach (ii). Da kompakte Teilmengen von CW-Komplexen nur endlich viele offene Zellen treffen, ist auch die Vereinigung über alle n -Skelette kompakt erzeugt. □

Mit diesen Kriterien folgt sofort unser Ziel.

Korollar 2.22. *Die geometrische Realisierung $|X|$ einer simplizialen Menge $X \in \mathbf{sEns}$ ist ein kompakt erzeugter Hausdorffraum.*

Beweis. Es handelt sich um einen Hausdorffraum nach 2.17. Nach 2.21 (i) ist $\bigsqcup_n X_n \times |\Delta^n|$ kompakt erzeugt und mit 2.21 (ii) auch $|X|$. Das folgt alternativ aus 2.17 und dem Kriterium für CW-Komplexe 2.21 (iii). □

Der entscheidende Grund, in der Kategorie CGHaus statt in Top zu arbeiten, ist die Existenz eines internen Hom.

Theorem 2.23 ([GZ67], III, 2.1.2). *Die Kategorie CGHaus der kompakt erzeugten Hausdorffräume ist kartesisch abgeschlossen.*

Ohne Beweis. □

Während wir die Adjunktion $(\times Y, Y \Rightarrow)$ selbst nicht benötigen, ist die entscheidende Folge die Rechtsexaktheit von Produkten in CGHaus.

Satz 2.24 ([GZ67], III, 3). *Die geometrische Realisierung $|\cdot| : \mathbf{sEns} \rightarrow \mathbf{CGHaus}$ vertauscht mit endlichen Limites.*

Bemerkung 2.25. Entscheidend ist, dass das Produkt in Top zweier kompakt erzeugter Hausdorffräume im Allgemeinen nicht wieder kompakt erzeugt ist. Das korrekte Produkt in CGHaus heißt auch *Kelley-Produkt* und wird $X \times_{Ke} Y$ notiert. Man erhält es durch Anwenden des Rechtsadjungierten der Inklusion $\mathbf{CG} \rightarrow \mathbf{Top}$ auf das Produkt in Top. Dieser Rechtsadjungierte $k : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{CG}$ verfeinert die Topologie eines Raumes X um alle Mengen $U \subset X$, deren Schnitte mit allen Kompakta $K \subset X$ in K offen sind, also genau um die für kompakte Erzeugtheit benötigten. Der Satz besagt also:

$$|X \times Y| \xrightarrow{\sim} k(|X| \times |Y|).$$

Beweisskizze. ([GZ67], III, 3) Ganz allgemein lassen sich endliche Limites als Egalisatoren endlicher Produkte darstellen. Für die Egalisatoren verweisen auf [GZ67], III, 3.3. Für das Vertauschen mit endlichen Produkten zeigt man, dass die Aussage für Standardsimplizes gilt, es also einen Homöomorphismus $|\Delta^n \times \Delta^m| \xrightarrow{\sim} |\Delta^n| \times |\Delta^m|$ gibt, siehe [GZ67], III, 3.4. Dann folgt die Aussage sofort aus dem Vertauschen des Produkts in CGHaus mit Kolimites als linksadjungierter Funktor des internen Hom in CGHaus (2.23):

$$\begin{aligned} |X \times Y| &\xrightarrow{\sim} |\mathrm{col}_{\Delta \downarrow X} \Delta^n \times \mathrm{col}_{\Delta \downarrow Y} \Delta^m| \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{col}_{\Delta \downarrow X} \mathrm{col}_{\Delta \downarrow Y} |\Delta^n \times \Delta^m| \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{col}_{\Delta \downarrow X} \mathrm{col}_{\Delta \downarrow Y} (|\Delta^n| \times_{Ke} |\Delta^m|) \\ &\xrightarrow{\sim} |\mathrm{col}_{\Delta \downarrow X} \Delta^n| \times_{Ke} |\mathrm{col}_{\Delta \downarrow Y} \Delta^m| \\ &\xrightarrow{\sim} |X| \times_{Ke} |Y|. \end{aligned}$$

□

Beispiel 2.26 ([Eng77], 3.3.29). *Ein Produkt in Top zweier kompakt erzeugter Hausdorff-Räume ist im Allgemeinen nicht wieder kompakt erzeugt. Ein Beispiel ist das Produkt $X \times Y$ mit $X = \mathbb{R} \setminus \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ mit der Teilraumtopologie und Y einem unendlichen Bouquet von Kreisen mit der Quotiententopologie von $\mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{N} = Y$.*

Kapitel 3

Koenden

3.1 Geometrische Realisierung als Koende

Die Sprache der Enden und Koenden ermöglicht uns eine allgemeinere Sicht auf die geometrische Realisierung und wird sich später als nützlich erweisen, um andere Formen der geometrischen Realisierung einzuführen. Wir führen Koenden und ihre Eigenschaften ein, Enden sind dazu formal dual. Die Darstellung folgt [Lor15].

Definition 3.1 ([Lor15], 1.1 f.). Sei $F : C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ ein Funktor. Ein Objekt $K \in D$ mit Morphismen $\iota_c : F(c, c) \rightarrow K$ für alle $c \in C$ heißt *Kokeil* für F , falls für alle Morphismen $f : c \rightarrow d$ in C das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} F(d, c) & \xrightarrow{F(f, \text{id})} & F(c, c) \\ \downarrow F(\text{id}, f) & & \downarrow \iota_c \\ F(d, d) & \xrightarrow{\iota_d} & K \end{array}$$

Die Kokeile für F bilden eine Kategorie (Morphismen verträglich mit den ι_c). Ein initiales Objekt in der Kategorie der Kokeile für F , d. h. ein universeller Kokeil, heißt das *Koende* von F .

Wie andere universelle Objekte müssen Koenden in einer beliebigen Kategorie D nicht existieren, sind in diesem Fall aber eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus.

Formal dual dazu ist ein *Keil* für einen Funktor $F : C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ ein Kokeil für den Funktor $F^{\text{op}} \circ \tau$ mit dem opponierten Funktor $F^{\text{op}} : C \times C^{\text{op}} \rightarrow D^{\text{op}}$ und der Vertauschung $\tau : C^{\text{op}} \times C \xrightarrow{\sim} C \times C^{\text{op}}$, und ein *Ende* ein universeller Keil für F .

Enden und Koenden werden als Integrale notiert, eine Konvention, die sich

später aus analogen Umformungseigenschaften erklärt (vgl. 3.12, 3.15):

$$\begin{aligned} \int^C F &= \int^{c \in C} F(c, c) \quad \text{für das Koende von } F : C^{\text{op}} \times C \rightarrow D, \\ \int_C F &= \int_{c \in C} F(c, c) \quad \text{für das Ende von } F : C^{\text{op}} \times C \rightarrow D. \end{aligned}$$

Koenden lassen sich als Koegalisateur von Koprodukten darstellen:

Lemma 3.2 ([Lor15], 1.14). *Sei $F : C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ ein Funktor. Dann ist das folgende Diagramm ein Koegalisateur:*

$$\bigsqcup_{f:c \rightarrow d} F(d, c) \xrightarrow[F(\text{id}, f)]{F(f, \text{id})} \bigsqcup_{c \in C} F(c, c) \rightarrow \int^C F.$$

Beweis. Der Morphismus in das Koende ist von den $\iota_c : F(c, c) \rightarrow K$ induziert, die Morphismen des Koegalisors durch die angegebenen Morphismen auf den Komponenten $F(d, c) \xrightarrow{F(f, \text{id})} F(c, c)$ und $F(d, c) \xrightarrow{F(\text{id}, f)} F(d, d)$. Die universellen Eigenschaften, die den Koegalisateur und das Koende definieren, sind dann identisch. \square

Sind $F : C^{\text{op}} \rightarrow D$ und $G : C \rightarrow D$ Funktoren und ist (D, \otimes) eine monoidale Kategorie (Schmelzkategorie mit universellen Verschmelzungen), so definieren sie einen Funktor

$$\begin{aligned} C^{\text{op}} \times C &\rightarrow D \times D \rightarrow D, \\ (a, b) &\mapsto (Fa, Gb) \mapsto Fa \otimes Gb. \end{aligned}$$

Das Koende über diesen Funktor heißt das *Tensorprodukt* $F \otimes G$ von F und G . Wir erinnern an die Darstellung der geometrischen Realisierung mit Koegalisateur und Koprodukt:

$$|X| \xrightarrow{\sim} \left(\bigsqcup_n X_n \times |\Delta^n| \right) / \sim$$

mit dem Quotienten nach der von

$$(x, |f|(p)) \sim (f^*x, p)$$

für monotonen $f : [m] \rightarrow [n]$ erzeugten Äquivalenzrelation. Das ist gerade der Koegalisateur

$$\bigsqcup_{f:[n] \rightarrow [m]} X_n \times |\Delta^m| \xrightarrow[\text{id} \times |f|]{f^* \times \text{id}} \bigsqcup_{[n]} X_n \times |\Delta^n| \rightarrow |X|$$

aus 3.2 und mithin, falls Top mit der kartesischen Schmelzstruktur durch Produkte versehen ist, das Tensorprodukt der Funktoren

$$\begin{aligned} X : C^{\text{op}} &\rightarrow \text{Ens} \rightarrow \text{Top} \quad \text{und} \\ |\Delta| : C &\rightarrow \text{Top}, \quad [n] \mapsto |\Delta^n|, \end{aligned}$$

wobei die Mengen X_n als diskrete topologische Räume aufgefasst werden ([Moe95], III.1):

$$|X| = X \otimes |\Delta|.$$

Bemerkung 3.3. Rückblickend halten wir fest, dass während unsere durch die “Kostetigkeitseigenschaft” für die Simplexkategorie $\Delta \downarrow_r X$ (Gl. 2.4, 2.5) definierte geometrische Realisierung in dieser Situation elegant ist, sie auf einer konkreten Eigenschaft der Situation simplizialer *Mengen* beruht, die wir bei allgemeineren simplizialen Objekten nicht mehr gegeben haben. Konkret werden wir im nächsten Abschnitt einen gewissen Begriff einer Wirkung einer Kategorie auf einer anderen Kategorie erklären (Koexponentiale, siehe 3.21). Die Besonderheit simplizialer Mengen beruht nun darauf, dass sich die Wirkung von Ens auf Top $(X_n, |\Delta^n|) \mapsto \bigsqcup_{X_n} |\Delta^n|$ als von der Wirkung von Ens auf $s\text{Ens}$, $(X_n, \Delta^n) \mapsto \bigsqcup_{X_n} \Delta^n \cong \left\{ \Delta^n \xrightarrow{x} X \mid x \in X_n \right\}$ induziert darstellen lässt, was uns zum Begriff der Simplexkategorie von X geführt hat. Bei Wirkungen wie von Top auf Top durch das kartesische Produkt wird es nicht mehr möglich sein, die $\Delta^n \rightarrow X$ aus der Simplexkategorie als topologischen Raum aufzufassen. Unsere Beschreibung der geometrischen Realisierung als Koende ist also die für allgemeinere Kontexte richtige Beschreibung.

Bemerkung 3.4. Da eine Transformation $R \Rightarrow \bar{R}$ einen Morphismus der Koenden $R \otimes X \rightarrow \bar{R} \otimes X$ induziert, erhalten wir aus unserem Morphismus kosimplizialer Räume $|\Delta| \rightarrow \blacktriangle$ stetige Abbildungen zwischen den geometrischen Realisierungen $|X| \rightarrow \blacktriangle|X|$.

3.2 Der Koendenkalkül

Die Sprache der Enden und Koenden besitzt eine Reihe an Verträglichkeits- und Umformungseigenschaften, die sie zu einem mächtigen Werkzeug für eine Vielzahl formaler Rechnungen in Anwendungen der Kategorientheorie machen (für Beispiele siehe [Lor15]). Im folgenden werden einige Umformungsregeln dieses Kalküls¹ zusammengestellt.

Lemma 3.5 (Funktorialität, [Lor15], 1.9). *Sind $F \xRightarrow{\eta} G \xRightarrow{\tau} H$ Transformationen von Funktoren $F, G, H : C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$, deren Koenden existieren, so sind die auf den Koenden induzierten Morphismen*

$$\int (\tau \circ \eta), \int \tau \circ \int \eta : \int^c F(c, c) \rightarrow \int^c H(c, c)$$

verträglich: $\int (\tau \circ \eta) = \int \tau \circ \int \eta$.

Beweis. Dies folgt sofort aus der Eindeutigkeit dieses Morphismus in der universellen Definition von Koenden. \square

Mit der Beschreibung von Koenden als Koegalatoren von Koproducten 3.2 ist klar, dass Koenden Kolimites über eine geeignete Kategorie sind. Wir machen diese Aussage präzise:

¹Bei der Übersetzung aus dem Englischen geht leider die Analogie zu den Regeln der Differentiations- und Integrationstheorie verloren.

Definition 3.6. Sei C eine Kategorie. Die *Unterteilungskategorie* (engl. *subdivision category*) $\text{Sub}(C)$ von C besteht aus Objekten c^\S und f^\S für alle Objekte $c \in C$ und Morphismen $f : c \rightarrow d$ in C . Die Morphismen von $\text{Sub}(C)$ sind die Identitäten sowie für $f : c \rightarrow d$ in C die Pfeile

$$c^\S \leftarrow f^\S \rightarrow d^\S.$$

Proposition 3.7 ([ML98], IX.5.1, [Lor15], 1.13). *Es gibt einen Funktor $[C^{\text{op}} \times C, D] \rightarrow [\text{Sub}(C), D]$, $F \mapsto \widehat{F}$, der eine Äquivalenz von Kategorien zwischen der Kategorie der Kokeile für F und der Kategorie der Kokegel für \widehat{F} induziert. Insbesondere gilt*

$$\int^{c \in C} F(c, c) \xrightarrow{\sim} \text{col } \widehat{F}.$$

Beweis. Wir erhalten \widehat{F} durch die folgenden Zuordnungen für $f : c \rightarrow d$ einen Morphismus in C und c, d Objekte in C :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Sub}(C) & & c^\S & \xleftarrow{\quad} & f^\S & \xrightarrow{\quad} & d^\S \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ D & & F(c, c) & \xleftarrow[\widehat{F}(f, \text{id})]{} & F(d, c) & \xrightarrow{F(\text{id}, f)} & F(d, d). \end{array}$$

Diese Zuordnung $F \mapsto \widehat{F}$ ist funktoriell: Transformationen $F \Rightarrow G$ induzieren Transformationen $\widehat{F} \Rightarrow \widehat{G}$. Kokeile für F und Kokegel für \widehat{F} bestehen nun beide aus einem Objekt K mit Morphismen $\iota_c : F(c, c) \rightarrow K$ für $c \in C$ und $\iota_f : F(d, c) \rightarrow K$ für $f : c \rightarrow d$, sodass die drei Morphismen $F(d, c) \rightarrow K$ übereinstimmen:

$$\iota_f = \iota_c \circ F(f, \text{id}) = \iota_d \circ F(\text{id}, f).$$

Ein Morphismus von Kokeilen für F und von Kokegeln für \widehat{F} ist jeweils ein mit den angegebenen Inklusionen ι_c, ι_f verträglicher Morphismus der Objekte $K \rightarrow K'$. Koenden für F und Kolimites für \widehat{F} sind die initialen Objekte der Kategorien von Kokeilen für F bzw. Kokegeln für \widehat{F} . \square

Bemerkung 3.8 ([Lor15], 1.12). Eine andere Beschreibung verwendet statt der Unterteilungskategorie $\text{Sub}(C)$ die verdrehte Pfeilkategorie (engl. *twisted arrow category*) $\text{TW}(C)$ von C , deren Objekte Morphismen $f : c \rightarrow c'$ in C und Morphismen zwischen $f : c \rightarrow c'$ und $g : d \rightarrow d'$ kommutative Quadrate

$$\begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{h} & d \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ c' & \xleftarrow{k} & d'. \end{array}$$

Wir erhalten eine Äquivalenz der Kategorien von Kokegeln über Funktoren $F : \text{TW}(C) \rightarrow D$ bzw. über Funktoren $G : \text{Sub}(C) \rightarrow D$: beide bestehen aus Morphismen $\text{id}_c \rightarrow K$ bzw. $c^\S \rightarrow K$, die mit $f \rightarrow \text{id}_c, f \rightarrow \text{id}_{c'}$ bzw. $f^\S \rightarrow c^\S, f^\S \rightarrow c'^\S$ kompatibel sein sollen. Die weiteren Kompatibilitäten für einen Kokegel über $F : \text{TW}(C) \rightarrow D$, die von $f \rightarrow g$ gefordert werden, sind bereits automatisch erfüllt, denn mit den Bezeichnungen wie im Diagramm gilt

etwa, dass die Kompatibilität $(f \rightarrow g \rightarrow \text{id}_d \rightarrow K) = (f \rightarrow \text{id}_{c'} \rightarrow K)$ diejenige zu $k \circ g : d \rightarrow c'$ ist.

Insgesamt fordert der Morphismus $f \rightarrow g$ in $\text{TW}(C)$ Kompatibilitäten für die Inklusionen von $\text{id}_c, \text{id}_d, \text{id}_{d'}$ und $\text{id}_{c'}$ nach K . Diese entsprechen jeweils Kompatibilitäten zu den Kompositionen $g \circ h, k \circ g$ und $k \circ g \circ h$ im obigen Diagramm.

Der Funktor $[C^{\text{op}} \times C, D] \rightarrow [\text{TW}(C), D]$ ordnet dann einem Funktor F den Funktor

$$\begin{aligned} (f : c \rightarrow d) &\mapsto F(d, c), \\ (f \rightarrow g) &\mapsto F(h, k) \end{aligned}$$

mit Vorschalten von h und Nachschalten von k für einen Morphismus $f \rightarrow g$ wie im obigen Diagramm zu.

Definition 3.9. Sei $F : C \rightarrow D$ ein Funktor. F heißt *stetig*, falls er mit Limites über kleine Kategorien vertauscht. F heißt *kostetig*, falls er mit Kolimites über kleine Kategorien vertauscht.

Korollar 3.10 (Kostetigkeit von Koenden, [Lor15], 1.16). *Ist $F : D \rightarrow E$ ein kostetiger Funktor und $T : C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ ein Funktor, dann ist der natürliche Morphismus*

$$F \int^c T(c, c) \xrightarrow{\sim} \int^c F \circ T(c, c),$$

ein Isomorphismus, wann immer eines der beiden Koenden existiert.

Beweis. Dies folgt wegen $\widehat{F \circ T} = F \circ \widehat{T}$ aus der Beschreibung von Koenden als Kolimites 3.7. \square

Bemerkung 3.11. Das wichtigste Beispiel für diesen Fall ist der Hom-Funktor. Nach Definition von Limes und Kolimes sind $D(d, \cdot) : D \rightarrow \text{Ens}$ und $D(\cdot, d) : D^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ stetig. Wir erhalten für $F : C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ die Formeln:

$$\begin{aligned} D\left(d, \int_c F(c, c)\right) &\xrightarrow{\sim} \int_c D(d, F(c, c)) \\ D\left(\int_c F(c, c), d\right) &\xrightarrow{\sim} \int_c D(F(c, c), d). \end{aligned}$$

Lemma 3.12 (Fubini, [Lor15], 1.9, [ML98], IX.8). *Sei $F : C^{\text{op}} \times C \times D^{\text{op}} \times D \rightarrow E$ ein Funktor, für den die Koenden $\int^c F(c, c, d, d')$ für alle $d, d' \in D$ existieren.*

Dann ist

$$\int^{c \in C} F(c, c, \cdot, -) : D^{\text{op}} \times D \rightarrow E$$

ein Funktor und es gilt

$$\int^{d \in D} \int^{c \in C} F(c, c, d, d) \xrightarrow{\sim} \int^{(c, d) \in C \times D} F(c, c, d, d),$$

falls eines der beiden Koenden existiert, wobei rechts F als Funktor $F : (C \times D)^{\text{op}} \times (C \times D)$ aufgefasst wird.

Bemerkung 3.13. Formal fließt in die Aussage der *Parameter-Satz* ein, der besagt, dass Koenden mit der Adjunktion $[C^{\text{op}} \times C \times D, E] \xrightarrow{\sim} [C^{\text{op}} \times C, [D, E]]$ verträglich sind, also Koenden in Funktorkategorien objektweise berechnet werden können ([ML98], IX.7). Dies folgt sofort aus der Darstellung von Koenden als Kolimites 3.7.

Beweis. Sei $K : D^{\text{op}} \times D \rightarrow E$ ein Kokeil für $F : C^{\text{op}} \times C \rightarrow [D^{\text{op}} \times D, E]$ in der Funktorkategorie $D^{\text{op}} \times D \rightarrow E$ und $L(K)$ ein Kokeil für K . Auch solche iterierten Kokeile $L(K)$ bestehen aus Morphismen $F(c, c, d, d) \rightarrow L(K)$ für alle Objekte c von C und d von D als Komposition von $F(c, c, \cdot, -) \Rightarrow K$ ausgewertet auf $(d, d) \in D^{\text{op}} \times D$ mit $K(d, d) \rightarrow L(K)$. Sie erfüllen die Kommutativitätseigenschaft von Kokeil-Quadraten für alle Morphismen der Form (f, id_d) in $C \times D$ (die Transformation aus der Kokeil-Eigenschaft von K ausgewertet in $(d, d) \in D^{\text{op}} \times D$) sowie (id_c, g) in $C \times D$ (durch Vorschalten der zur Transformation $F(c, c, \cdot, -) \Rightarrow K$ gehörigen Morphismen vor das Kokeil-Quadrat von $L(K)$).

Nach denselben Argumenten definiert ein Kokeil M für $F : (C \times D)^{\text{op}} \times (C \times D)$ einen iterierten Kokeil: Mit der Unterteilungskategorie können wir einen iterierten Kokeil “sparsam” angeben, indem wir die inneren Kokeile nicht für alle $(d, d') \in D^{\text{op}} \times D$, sondern nur für Diagonalelemente $(d, d) \in D^{\text{op}} \times D$ sowie Morphismenobjekte $(d', d) \in D^{\text{op}} \times D$ für einen Morphismus $f : d \rightarrow d'$ angeben. Der iterierte Kokeil ist dadurch nach 3.7 vollständig festgelegt. Nun ist M zunächst wegen der Kommutativität von

$$\begin{array}{ccc} F(c', c, d, d) & \longrightarrow & F(c, c, d, d) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(c', c', d, d) & \longrightarrow & M \end{array}$$

ein (d, d) -Kokeil und dann durch Setzen der Inklusionen $F(c, c, d', d) \rightarrow M$ als Komposition

$$(F(c, c, d', d) \rightarrow F(c, c, d', d') \rightarrow M) = (F(c, c, d', d) \rightarrow F(c, c, d, d) \rightarrow M)$$

wegen der Kommutativität von

$$\begin{array}{ccccc} F(c', c, d', d) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & F(c, c, d', d) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ & & F(c, c, d, d) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ F(c', c', d', d) & \longrightarrow & F(c', c', d', d') & \longrightarrow & M \end{array}$$

auch ein (d', d) -Morphismenkokeil. Klarerweise ist dann auch M ein iterierter Kokeil über sich selbst als (d, d) - und (d', d) -Kokeil.

Morphismen von Kokeilen entsprechen nun Morphismen iterierter Kokeile und damit entsprechen sich auch Koenden alias die initialen Objekte der beiden Kategorien. \square

Ein konzeptionellerer Beweis benutzt die Darstellung von Koenden als Kolimites aus 3.7.

Alternativer Beweis. Der Isomorphismus von Kategorien $\mathrm{TW}(C \times D) \xrightarrow{\sim} \mathrm{TW}(C) \times \mathrm{TW}(D)$ ist verträglich mit dem Funktor $F \rightarrow \hat{F}$ aus 3.7. Es kommutiert

$$\begin{array}{ccc} [(C \times D)^{\mathrm{op}} \times (C \times D), E] & \xrightarrow{F \mapsto \hat{F}} & [\mathrm{TW}(C \times D), E] \\ \downarrow \approx & & \downarrow \approx \\ [C^{\mathrm{op}} \times C, [D^{\mathrm{op}} \times D, E]] & \longrightarrow & [\mathrm{TW}(C), [\mathrm{TW}(D), E]], \end{array}$$

wobei der untere Funktor gegeben ist durch

$$[C^{\mathrm{op}} \times C, [D^{\mathrm{op}} \times D, E]] \rightarrow [\mathrm{TW}(C), [D^{\mathrm{op}} \times D, E]] \rightarrow [\mathrm{TW}(C), [\mathrm{TW}(D), E]].$$

Die Darstellung iterierter Koenden als Produkt-Koenden folgt dann direkt aus der Darstellung iterierter Kolimites als Produkt-Kolimites:

$$\mathrm{col}_{I \times J} F \xrightarrow{\sim} \mathrm{col}_J \mathrm{col}_I \tilde{F},$$

falls $F \mapsto \tilde{F}$ unter dem Exponentialgesetz $[I \times J, C] \xrightarrow{\sim} [I, [J, C]]$. \square

Koenden und Enden treten in kategorientheoretischen Rechnungen häufig natürlich auf. Das liegt an der folgenden Beschreibung von Transformationsmengen als Enden.

Lemma 3.14 (Transformationen als Ende, [Lor15], 1.18). *Seien $F, G : C \rightarrow D$ zwei Funktoren. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$[C, D](F, G) \xrightarrow{\sim} \int_c D(Fc, Gc).$$

Beweis. Transformationen $F \Rightarrow G$ sind genau diejenigen Tupel aus $\prod_c D(Fc, Gc)$, für die für jedes $f : c \rightarrow d$ in C die Bilder rechts unten im Diagramm übereinstimmen:

$$\begin{array}{ccc} & D(Fc, Gc) & \\ & \downarrow Gf \circ & \\ D(Fd, Gd) & \xrightarrow{\circ Ff} & D(Fc, Gd) \end{array}$$

Damit ist $[C, D](F, G)$ der Egalisator aus der Dualisierung von 3.2 und folglich das angegebene Ende. \square

Neben dem Fubini-Satz für Enden gibt es eine weitere bemerkenswerte Analogie zu Integralen. Aus der Integrationstheorie ist die Formel

$$\int_X f d\delta_x = f(x)$$

für δ_x das Diracmaß zum Punkt $x \in X$ bekannt. Im Koendenkalkül kommt der Yoneda-Einbettung die Rolle des Diracmaßes zu:

Proposition 3.15 (Dichteformel, [Lor15], 2.1). *Seien $F : C \rightarrow \text{Ens}$ und $G : C^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ Funktoren. Dann gibt es eine Isotransformation von Funktoren $C \rightarrow \text{Ens}$*

$$F \xrightarrow{\sim} \int^c F(c) \times C(c, \cdot)$$

sowie von Funktoren $C^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$

$$G \xrightarrow{\sim} \int_c G(c) \times C(\cdot, c).$$

Bemerkung 3.16. Die Aussage trägt in [Lor15], 2.1, den sehr treffenden Namen *Ninja Yoneda-Lemma*.

Beweis. Dies folgt aus dem Yoneda-Lemma und unseren schon bekannten Rechenregeln. Wir zeigen die erste Aussage. Seien dazu $F, G : C \rightarrow \text{Ens}$ Funktoren, dann gilt:

$$\begin{aligned} & [C, \text{Ens}] \left(\int^c F(c) \times C(c, \cdot), G \right) \\ & \xrightarrow[3.14]{\sim} \int_d \text{Ens} \left(\int^c F(c) \times C(c, d), Gd \right) \\ & \xrightarrow[3.10]{\sim} \int_d \int_c \text{Ens}(F(c) \times C(c, d), Gd) \\ & \xrightarrow[3.12]{\sim} \int_c \int_d \text{Ens}(F(c) \times C(c, d), Gd) \\ & \xrightarrow[\text{int. Hom}]{\sim} \int_c \int_d \text{Ens}(C(c, d), Fc \Rightarrow Gd) \\ & \xrightarrow[3.14]{\sim} \int_c [C, \text{Ens}](\text{Ens}(C(c, \cdot), Fc \Rightarrow G\cdot)) \\ & \xrightarrow[\text{Yon.}]{\sim} \int_c (Fc \Rightarrow Gc) \\ & \xrightarrow{\sim} \int_c \text{Ens}(Fc, Gc) \\ & \xrightarrow[3.14]{\sim} [C, \text{Ens}](F, G), \end{aligned}$$

was mit dem Yoneda-Lemma für Funktorkategorien die Aussage zeigt. \square

Bemerkung 3.17. Wie weit die Analogie zwischen Integralen und (Ko-) Enden reicht, ist mir nicht bekannt. Sie ist vermutlich neben den analogen Eigenschaften (Fubini, Dichteformel) durch die Konstruktion von Koenden als direkte Summen von Produkten zweier Objekte (analog zu Riemann- bzw. Lebesguesummen in der Maßtheorie) inspiriert². Die Frage ist, inwiefern maßtheoretische Aussagen eine Übersetzung in die Sprache der (Ko-) Enden haben. Das folgende bei der Suche nach einer solchen Aussage entstandene Beispiel beleuchtet dies zwar nicht näher, ist aber eine schöne Anwendung der Dichteformel.

²Vergleiche hierzu die Diskussion in <https://mathoverflow.net/questions/239326/why-do-we-denote-coends-with-integral-notation-beyond-fubinis-theorem>.

Beispiel 3.18. Nach der Verträglichkeit des Integrals mit Verwandtschaft ([Soe18a], 1.5.19) ist die Integralpaarung $(f, \mu) \mapsto \int f \mu$ auf einem Koende definiert. Bezeichne dazu \mathcal{M} die Kategorie der Messräume (Mengen mit σ -Algebra) und M_X die Menge der Maße auf einem Messraum X . Das Integral ist dann eine Paarung $M_X \times \mathcal{M}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ (der Maßraum \mathbb{R} links wie üblich versehen mit der Borelalgebra), für die die beiden Wirkungen einer messbaren Abbildung $\Phi : X \rightarrow Y$ durch Vorschalten bzw. Bildmaß übereinstimmen:

$$\int (f \circ \Phi) \mu = \int f \Phi_*(\mu).$$

Somit ist der Integraloperator definiert auf dem Koende

$$\int^{X \in \mathcal{M}} M_X \times \mathcal{M}(X, \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} M_{\mathbb{R}}$$

nach der Dichteformel. Dies ist die Aussage, dass es wegen

$$\int f \mu = \int (\text{id}_{\mathbb{R}} \circ f) \mu = \int \text{id}_{\mathbb{R}} f_*(\mu)$$

reicht, die Identitätsfunktion auf \mathbb{R} bezüglich allen Maßen auf \mathbb{R} integrieren zu können.

3.3 Angereicherte Kategorien

In der ursprünglichen Definition einer Kategorie tragen die Morphismen $C(x, y)$ die Struktur einer Menge. Der Wunsch, Begriffe wie “die Summe zweier Morphismen” oder “der Nullmorphismus” aus der Kategorie der R -Moduln auch kategorientheoretisch zu erfassen, führte zum Begriff der additiven Kategorien, bei denen Morphismenmengen abelsche Gruppen sind und Funktoren Gruppenhomomorphismen auf den Morphismengruppen induzieren. Dieser Gedankengang lässt sich auch auf Situationen übertragen, in denen die Morphismenmengen eine andere natürliche Struktur tragen (etwa die eines topologischen Raums) oder gar am besten als Objekte einer nicht notwendigerweise über den Mengen liegenden Kategorie V aufzufassen sind. Solche Kategorien bezeichnet man als über V *angereicherte* (engl. *enriched*) Kategorien. Wir imitieren die herkömmliche Definition von Kategorien:

Definition 3.19 (Angereicherte Kategorie). Sei (V, \otimes) eine monoidale Kategorie (Schmelzkategorie mit universellen Verschmelzungen). Eine über V *angereicherte Kategorie* C (V -Kategorie) besteht aus:

1. einer Klasse von Objekten $\text{Ob}(C)$
2. für jedes Paar von Objekten (x, y) einem Objekt $C(x, y) \in V$
3. einer Komposition $C(x, y) \otimes C(y, z) \rightarrow C(x, z)$
4. für jedes Objekt $x \in \text{Ob}(C)$ einem Morphismus $\text{id}_x : I \rightarrow C(x, x)$ in V für I die universelle 0-Verschmelzung,

sodass die Komposition assoziativ ist (bezüglich des eindeutigen Isomorphismus $C(w, x) \otimes (C(x, y) \otimes C(y, z)) \xrightarrow{\sim} (C(w, x) \otimes C(x, y)) \otimes C(y, z)$) und verträglich mit den Identitäten (bezüglich der eindeutigen Isomorphismen $C(x, y) \otimes I \xrightarrow{\sim} C(x, y)$ und $I \otimes C(x, y) \xrightarrow{\sim} C(x, y)$).

Ein Funktor zwischen V -Kategorien $F : C \rightarrow D$ ist eine Zuordnung auf Objekten $F : c \mapsto Fc$ zusammen mit Morphismen $C(x, y) \rightarrow D(Fx, Fy)$ in V .

Beispiel 3.20. Eine Kategorie ist eine über \mathbf{Ens} angereicherte Kategorie bezüglich der kartesischen monoidalen Struktur auf \mathbf{Ens} . Eine Kategorie mit additiver Struktur ist eine über \mathbf{Ab} angereicherte Kategorie bezüglich des Tensorprodukts auf \mathbf{Ab} . Jede monoidale Kategorie mit zum Produkt \otimes adjungiertem internen $\mathbf{Hom} V$ ist eine V -Kategorie über sich selbst. Solche Kategorien heißen monoidale abgeschlossene Kategorien.

In einer monoidalen abgeschlossenen Kategorie V haben wir die Adjunktion

$$V(a \otimes b, c) \xrightarrow{\sim} V(a, V(b, c))$$

mit $V(b, c) = (b \Rightarrow c)$ dem internen \mathbf{Hom} -Objekt. Das Objekt $a \otimes b$ ist dann ein darstellendes Objekt für den Funktor $c \mapsto V(a, V(b, c))$ und heißt manchmal auch Koexponential (engl. *copower*) von a und b . Wir verallgemeinern diese Situationen auf Koexponentiale in angereicherten Kategorien:

Definition 3.21. Sei C eine V -Kategorie. Ist $v \odot b \in C$ ein darstellendes Objekt für den Funktor $c \mapsto V(v, C(b, c))$ mit $v \in V, b \in C$, gilt also

$$C(v \odot b, c) \xrightarrow{\sim} V(v, C(b, c))$$

natürlich in b, c und v , so heißt $v \odot b$ das Koexponential von v und b .

In diesem Fall heißt die Kategorie C auch *tensoriert über V* .

Beispiel 3.22. Jede Kategorie mit beliebigen Koprodukten hat Koexponentiale über \mathbf{Ens} . Mit

$$V \odot B = \bigsqcup_V B$$

gilt

$$C(V \odot B, C) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Ens}(V, C(B, C)).$$

Wir können nun auch die geometrische Realisierung in der Sprache angereicherter Kategorien formulieren. Ist C eine V -Kategorie mit Koexponentialen und sind Funktoren

$$\begin{aligned} R : \Delta &\rightarrow C & \text{und} \\ X : \Delta^{\mathrm{op}} &\rightarrow V \end{aligned}$$

gegeben, so erklären wir die geometrische Realisierung von X als das Koende über den Funktor

$$\begin{aligned} \Delta^{\mathrm{op}} \times \Delta &\rightarrow C, \\ ([n], [m]) &\mapsto X[n] \odot R[m]. \end{aligned}$$

Der Fall simplizialer Mengen ist $C = \mathbf{Top}$ und $V = \mathbf{Ens}$ mit dem kanonischem Koexponential.

Kapitel 4

Simpliziale Garben über topologischen Räumen

4.1 Realisierung simplizialer Garben

Die Beschreibung der geometrischen Realisierung als Tensorprodukt von Funktoren eröffnet uns eine Reihe weiterer geometrischer Realisierungen, die diejenige simplizialer Mengen verallgemeinern.

Zunächst stellen wir fest, dass wir in unserer Konstruktion simpliziale Mengen immer als diskrete simpliziale topologische Räume betrachtet haben, und die Diskretheit genauso gut auch fallen lassen können. Wir erhalten die geometrische Realisierung $|X| = X \otimes R$ eines simplizialen topologischen Raums $X : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Top}$.

Beispiel 4.1. Wir betrachten den simplizialen topologischen Raum $X : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Top}$, den wir aus dem (kombinatorischen) Standard-1-Simplex Δ^1 erhalten, indem wir disjunkte Vereinigungen von Punkten durch disjunkte Vereinigungen von Intervallen $I = [0, 1]$ mit von den Identitäten induzierten Abbildungen ersetzen. Offenbar ist die geometrische Realisierung das Produkt $I \times |\Delta^1|$. Ersetzen wir X_0 wieder durch zwei Punkte $0, 1$ mit beliebigen Degenerationen, so erhalten wir eine zu einer Kreisscheibe verdickte Linie zwischen den beiden Punkten als Realisierung. Ersetzen wir die höheren $X_n, n \geq 2$ ebenfalls wieder durch Punkte mit beliebigen Randabbildungen, so sorgen deren Identifikationen dafür, dass die geometrische Realisierung wieder $|\Delta^1|$ wird.

Interessanter ist vielleicht der simpliziale topologische Raum, der in Grad 0 aus den Simplizes $S^1 \sqcup \text{pt}$ und in Grad 1 aus den nichtdegenerierten Simplizes D^2 besteht, und dessen Randabbildungen $S^1 \times 0$ mit pt und $S^1 \times 1$ mit $S^1 \subset D^2$ durch “Wickeln mit doppelter Geschwindigkeit” (komplex $x \mapsto x^2$) identifizieren. Dazu kommen degenerierte Simplizes, sodass die Degenerationsabbildungen keine weiteren Identifikationen verursachen. Wir erhalten so den zweidimensionalen reell-projektiven Raum.

Weiter verallgemeinert die Konstruktion auch auf Diagrammkategorien. Ist I eine kleine Kategorie und $X : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Top}^I$ ein simpliziales I -System topologi-

scher Räume, so erhalten wir eine geometrische Realisierung $|X| = X \otimes R$ von X , wenn wir $R : \Delta \rightarrow \text{Top} \rightarrow \text{Top}^I$ mittels des Funktors der konstanten Darstellung auf die Diagrammkategorie fortsetzen. Insbesondere erhalten wir eine geometrische Realisierung für die Kategorie der Paare topologischer Räume mit stetiger Abbildung, d. h. die Diagrammkategorie $\text{Top}^{[1]}$ für $[1]$ die Kategorie des Ordinals $[1] \in \Delta$, die Pfeilkategorie $\{\bullet \rightarrow \bullet\}$. Eine Realisierung für Garben über topologischen Räumen erhalten wir so aber nicht: Sind in einem simplizialen $\text{Top}^{[1]}$ alle Abbildungen étale, bedeutet das noch nicht, dass auch die induzierte Abbildung in der geometrischen Realisierung étale ist. Sind etwa alle Basisräume X_n einpunktig, so ist die Realisierung $|X|$ ebenfalls einpunktig. Étale Räume $F_n \rightarrow X_n$ sind diskret, d. h. die geometrische Realisierung $|F|$ ist die einer simplizialen Menge, also im Allgemeinen ein höherdimensionaler CW-Komplex. Ein solcher ist nicht diskret, also nicht étale über $|X|$. Wir erhalten die korrekte Realisierung für $\text{Ens}/_{\text{Top}}$, indem wir den Kolimes in der Garbenkategorie statt in den topologischen Räumen bilden.

Proposition 4.2. *Sei $F \in [\Delta^{\text{op}}, \text{Ens}/_{\text{Top}}]$ eine simpliziale Garbe über topologischen Räumen mit Morphismen und $R : \Delta \rightarrow \text{Ens}/_{\text{Top}}$ eine kosimpliziale Garbe über topologischen Räumen. Dann ist die Realisierung $F \otimes R \in \text{Ens}/_{\text{Top}}$ eine Garbe über der geometrischen Realisierung der Basisräume.*

Beweis. Die Existenz der Realisierung folgt direkt aus der Beschreibung von Koenden als Kolimites 3.7 und der Kovollständigkeit von $\text{Ens}/_{\text{Top}}$ nach ?? . Dort wird auch der Basisraum des Kolimites zum Kolimes der Basisräume bestimmt. \square

Bemerkung 4.3. Diese geometrische Realisierung simplizialer Garben auf topologischen Räumen spezialisiert zu einer geometrischen Realisierung simplizialer Garben auf X : Ist $F : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}/_X$ eine simpliziale Garbe auf X , so ist ihre geometrische Realisierung aus 4.1 eine Garbe $|F| \in \text{Ens}/_X$, da die geometrische Realisierung des konstanten simplizialen topologischen Raums $X : [n] \mapsto X$ selbst X ist.

Ziel unserer Überlegungen wird es sein, die Aussagen zu simplizial konstanten Garben auf der geometrischen Realisierung eines Simplizialkomplexes \mathcal{K} als Garben auf dem topologischen Raum \mathcal{K} auf die Situation simplizialer Mengen zu übertragen. Die angesprochenen Realisierungen in 4.1 und 4.3 sind dafür nicht geeignet. Das liegt daran, dass wir, um aus Garben auf der Realisierung wieder ein Diagramm von Garben zu erhalten, generisierende Randabbildungen benötigen. Im Fall einer simplizialen Garbe $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}/_{\text{Top}}$ sind die Randabbildungen im Garbensystem dagegen gegenläufig zu den generisierenden Einbettungen $|d_i| : |\Delta^{n-1}| \hookrightarrow |\Delta^n|$ der Basisräume.

Wir erklären eine neue Realisierung, die diesem Anspruch gerecht wird. Sei dazu $R : \Delta \rightarrow \text{Top}$ eine kosimplizialer topologischer Raum und $F : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}/_{\text{Top}}$, $[n] \mapsto F_n \in \text{Ens}/_{X_n}$ eine simpliziale Garbe über topologischen Räumen mit Komorphismen. Für $f : [n] \rightarrow [m]$ monoton gibt es also eine stetige Abbildung $Ff : X_m \rightarrow X_n$ und einen Morphismus von Garben über X_m : $Ff^*F_n \rightarrow F_m$. Wir erhalten einen Funktor K von der Unterteilungskategorie $\text{Sub}(\Delta)$ von

Δ in die Kategorie der Garben über topologischen Räumen

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Sub}(\Delta) & & [n]^{\S} \longleftarrow & f^{\S} \longrightarrow & [m]^{\S} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & F_n \times R[n] \longleftarrow & Ff^*F_n \times R[n] \longrightarrow & F_m \times R[m] \\
 \text{Ens}/_{\text{Top}} & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & X_n \times R[n] \longleftarrow & X_m \times R[n] \longrightarrow & X_m \times R[m],
 \end{array} \tag{4.1}$$

der für $f : [n] \rightarrow [m]$ in Δ auf Morphismen $f^{\S} \rightarrow [n]^{\S}$ vom Rückzug $Ff^*F_n \rightarrow F_n$ über Ff induziert ist und auf Morphismen $f^{\S} \rightarrow [m]^{\S}$ durch die Morphismen $Ff^*F_n \rightarrow F_m$ in $\text{Ens}/_{X_m}$ sowie Rf . Letzterer ist tatsächlich ein Morphismus in $\text{Ens}/_{\text{Top}}$, denn es kommutiert

$$\begin{array}{ccccc}
 Ff^*F_n \times R[n] & \longrightarrow & F_m \times R[n] & \longrightarrow & F_m \times R[m] \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 X_m \times R[n] & \longrightarrow & X_m \times R[n] & \longrightarrow & X_m \times R[m].
 \end{array}$$

Wir erhalten die folgende *kovariante Realisierung*:

Proposition 4.4. *Sei $F \in [\Delta^{\text{op}}, \text{Ens}/_{\text{Top}}]$ eine simpliziale Garbe über topologischen Räumen mit Komorphismen und $R : \Delta \rightarrow \text{Top}$ ein kosimplizialer topologischer Raum. Dann ist der Kolimes $|F|$ über den oben definierten zugehörigen Funktor $K : \text{Sub}(\Delta) \rightarrow \text{Ens}/_{\text{Top}}$ eine Garbe über der geometrischen Realisierung $X \otimes R$ der Basisräume.*

Bemerkung 4.5. Diese geometrische Realisierung simplizialer Garben auf topologischen Räumen mit Komorphismen spezialisiert zu einer geometrischen Realisierung simplizialer Garben auf X : Ist $F : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}/_X$ eine simpliziale Garbe auf topologischen Räumen mit Komorphismen und konstantem Basisraum X alias eine kosimpliziale Garbe $F^{\text{op}} : \Delta \rightarrow \text{Ens}/_X$, so vereinfacht Diagramm 4.1 zu

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Sub}(\Delta) & & [n]^{\S} \longleftarrow & f^{\S} \longrightarrow & [m]^{\S} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & F_n \times R[n] \longleftarrow & Ff^*F_n \times R[n] \longrightarrow & F_m \times R[m] \\
 \text{Ens}/_{\text{Top}} & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & X \times R[n] \longleftarrow & X \times R[n] \longrightarrow & X \times R[m],
 \end{array}$$

und ihre geometrische Realisierung aus 4.4 ist eine Garbe $|F| \in \text{Ens}/_X$, der Kolimes über den Funktor $\Delta \rightarrow \text{Ens}/_{\text{Top}}$, der $f : [n] \rightarrow [m]$ monoton auf den

Morphismus

$$\begin{array}{ccc} F_n \times R[n] & \xrightarrow{F^{\text{op}} f \times |f|} & F_m \times R[m] \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \times R[n] & \longrightarrow & X \times R[m] \end{array}$$

schickt.

Sind alle X_n diskret, so bestimmt für $\sigma \in X_m$ der Halm $(F_m)_\sigma$ die konstante Garbe $(F_m)_\sigma \times R[m] \rightarrow \{\sigma\} \times R[m]$ und wir erhalten für monotonen $f : [n] \rightarrow [m]$ Abbildungen $(F_n)_{f(\sigma)} \rightarrow (F_m)_\sigma$, die diese konstanten Garben verkleben. Insbesondere sind für Randabbildungen d_i die Verklebungen Generisierungen, die angeben, wie ein Element des Halms am Rand eines Simplex einen Schnitt über eine Umgebung dieses Punkts (auch im Inneren des Simplex) definiert. Wir werden diese Beobachtungen in 5.1 präzisieren.

Für die relative Version betrachten wir Basisräume $X_n = X \times D_n$ mit diskreten D_n und von $D_m \rightarrow D_n$ induzierten Abbildungen. Zu $\sigma \in D_n$ gehört dann eine Garbe $F_\sigma := F_n|_{\sigma \times X} \in \text{Ens}/X$ und wir erhalten für monotonen $f : [n] \rightarrow [m]$ Garbenmorphisamen $F_{f(\sigma)} \rightarrow F_\sigma$, die diese Garben verkleben. Wieder sind diese generisierend, erlauben also die Ausweitung eines U -Schnitts von einem Randpunkt auf einen U -Schnitt im Inneren.

Bemerkung 4.6. Eine weitere Idee zur geometrischen Realisierung simplizialer Garben ist die folgende: Ist F eine Prägarbe auf I mit Werten in C und $G : C \rightarrow D$ ein Funktor, so ist $GF : I^{\text{op}} \rightarrow D$ eine Prägarbe mit Werten in D . Nach dem Exponentialgesetz von Funktoren ist eine simpliziale Prägarbe über X dasselbe wie eine Prägarbe mit Werten in den simplizialen Mengen und wir können die geometrische Realisierung $|\cdot| : \text{sEns} \rightarrow \text{CGHaus}$ nachschalten. Dies liefert eine Prägarbe topologischer Räume auf X . Allerdings schränkt diese Konstruktion nicht auf die vollen Unterkategorien der Garben ein: die Garbenbedingung ist als Limes über ein im Allgemeinen unendliches System formuliert, die geometrische Realisierung vertauscht aber im Allgemeinen nicht mit beliebigen Limites (vgl. 2.24).

4.2 Die Dualität von Nerv und Realisierung

Wir suchen Rechtsadjungierte für die geometrischen Realisierungen. Für die Realisierung simplizialer Mengen gelingt das einfach.

Satz 4.7. *Der Funktor der singulären Ketten $S : \text{Top} \rightarrow \text{sEns}$ mit*

$$SY = \text{Top}(R\cdot, Y) : [n] \mapsto \text{Top}(|\Delta^n|, Y)$$

ist rechtsadjungiert zur geometrischen Realisierung $|\cdot| : \text{sEns} \rightarrow \text{Top}$.

Beweis. Die Rand- und Degenerationsabbildungen von SY sind für $f : [n] \rightarrow$

$[m]$ gegeben durch Vorschalten von $|f| : |\Delta^n| \rightarrow |\Delta^m|$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\text{Top}(|X|, Y) &= \text{Top}(\text{col}_{\Delta \downarrow r X} |\Delta^n|, Y) \\
&\xrightarrow{\sim} \text{col}_{\Delta \downarrow r X} \text{Top}(|\Delta^n|, Y) \\
&\xrightarrow{\sim} \text{col}_{\Delta \downarrow r X} \text{sEns}(\Delta^n, \text{Top}(R \cdot, Y)) \\
&\xrightarrow{\sim} \text{sEns}(\text{col}_{\Delta \downarrow r X} \Delta^n, \text{Top}(R \cdot, Y)) \\
&\xrightarrow{\sim} \text{sEns}(X, SY)
\end{aligned}$$

mit der Definition der geometrischen Realisierung im ersten Schritt (Gl. 2.5), der Verträglichkeit von $\text{Hom} : C^{\text{op}} \times C \rightarrow \text{Ens}$ mit Limites im zweiten und vierten Schritt, unserer Bestimmung der n -Simplizes als Morphismenmenge (Gl. 2.1) im dritten Schritt und unserer Beschreibung einer simplizialen Menge als Kolimes über ihre Simplexkategorie (2.5) im letzten Schritt. \square

Das Argument verallgemeinert durch Ersetzen der Simplexkategorie durch Koenen über Koexponentiale.

Theorem 4.8 (Allgemeine Nerv-Realisierungs-Dualität, [Lor15], 3.2). *Seien C eine V -Kategorie mit Koexponentialen \odot und ein Funktor $R : S \rightarrow C$ gegeben. Dann gibt es eine Adjunktion $(|\cdot|, N)$*

$$C \xrightleftharpoons[N]{|\cdot|} [S^{\text{op}}, V]$$

mit

$$\begin{aligned}
|\cdot| : X &\mapsto \int^{s \in S} X(s) \odot R(s) \quad \text{und} \\
N : Y &\mapsto C(R \cdot, Y).
\end{aligned}$$

Beweis. In wörtlicher Verallgemeinerung des Vorangegangenen:

$$\begin{aligned}
C(|X|, Y) &= C\left(\int^s X(s) \odot R(s), Y\right) \\
&\xrightarrow[3.10]{\sim} \int_s C(X(s) \odot R(s), Y) \\
&\xrightarrow[3.21]{\sim} \int_s V(X(s), C(R(s), Y)) \\
&\xrightarrow[3.14]{\sim} [S^{\text{op}}, V](X, C(R \cdot, Y)) \\
&= [S^{\text{op}}, V](X, NY).
\end{aligned}$$

\square

4.3 Die kartesisch abgeschlossene Struktur der Garben auf X

Für die allgemeine Dualität von Nerv und Realisierung 4.8 benötigen wir also eine V -angereicherte Struktur auf C . Wenn wir uns auf Ens_X beschränken, erhalten wir sogar die Struktur einer kartesisch abgeschlossenen Kategorie.

Definition 4.9. Eine Kategorie C mit endlichen Produkten heißt *kartesisch abgeschlossen*, falls es ein internes Hom für die kartesische Schmelzstruktur durch Produkte gibt.

Das bedeutet konkret, dass es eine Adjunktion $(\times Y, Y \Rightarrow)$ gibt, also eine in allen Variablen natürliche Bijektion

$$C(X \times Y, Z) \xrightarrow{\sim} C(X, Y \Rightarrow Z).$$

Proposition 4.10. Die Kategorie $\text{Ens}/_X$ ist kartesisch abgeschlossen mit Produkt

$$(F \times G)(U) = F(U) \times G(U)$$

und internem Hom

$$(F \Rightarrow G)(U) = \text{Ens}/_U(F|_U, G|_U)$$

jeweils mit den von den Restriktionen von F und G induzierten Restriktionen. Der étale Raum des Produkts ist das Faserprodukt über X

$$\overline{F \times G} \xrightarrow{\sim} \overline{F} \times_X \overline{G}.$$

Beweis. Das Produkt erfüllt die universelle Eigenschaft in $\text{pEns}/_X$ und ist eine Garbe, da Produkte mit dem Limes der Garbeneigenschaft vertauschen (Spezialfall von 1.37). Das interne Hom besteht aus stetigen Abbildungen über U und erfüllt somit die Garbenbedingung, die ja sogar nach der Verklebbarkeit stetiger Abbildungen modelliert war. Für die Adjunktion müssen wir zeigen

$$\text{Ens}/_X(F \times G, H) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}/_X(F, G \Rightarrow H).$$

Links stehen restriktionsverträgliche Systeme

$$F(U) \times G(U) \rightarrow H(U) \quad \text{bzw.} \quad F(U) \rightarrow \text{Ens}(G(U), H(U)),$$

rechts restriktionsverträgliche Systeme $F(U) \rightarrow \text{Ens}/_U(G|_U, H|_U)$. Wir erhalten eine Abbildung von rechts nach links durch den globalen Teil $G(U) \rightarrow H(U)$ des Garbenmorphismus $G|_U \rightarrow H|_U$ und das Exponentialgesetz in Ens und von links nach rechts durch Ergänzen des globalen Teils $G(U) \rightarrow H(U)$ durch verträgliche $G(V) \rightarrow H(V)$ als die Bilder unter $F(U) \rightarrow F(V) \rightarrow \text{Ens}(G(V), H(V))$. Diese Abbildungen sind zueinander invers.

Für den étalen Raum des Produkts erhalten wir nach der universellen Eigenschaft des Faserprodukts eine stetige Abbildung über X

$$\overline{F \times G} \rightarrow \overline{F} \times_X \overline{G}.$$

Diese induziert auf den Halmen die Bijektionen

$$(F \times G)_x \xrightarrow{\sim} F_x \times G_x$$

aus dem Vertauschen endlicher Limites mit filtrierenden Kolimites. \square

4.3. DIE KARTESISCH ABGESCHLOSSENE STRUKTUR DER GARBEN AUF X 55

Diese Struktur einer kartesisch abgeschlossenen Kategorie macht $\text{Ens}/_X$ insbesondere zu einer über sich selbst tensorierten Kategorie im Sinne von 3.21. Wir erhalten einen Nerv-Funktor für die geometrische Realisierung simplizialer Garben auf X aus 4.8.

Den obigen konkreten Beweis für das interne Hom der Prägarbenkategorie $\text{pEns}/_X = [\text{Off}_X^{\text{op}}, \text{Ens}]$ können wir mit einer Rechnung im Koendekalkül auf beliebige Prägarbenkategorien ausweiten.

Proposition 4.11. *Ist C eine kleine Kategorie, so ist die Prägarbenkategorie $\text{Ens}^{C^{\text{op}}}$ kartesisch abgeschlossen.*

Beweis. Nach der objektweisen Berechnung von Limites in Funktorkategorien ist das Prägarbenprodukt gegeben durch $(F \times G)(c) = F(c) \times G(c)$ für $F, G \in \text{Ens}^{C^{\text{op}}}$ und $c \in C$. Testen mit darstellbaren Prägarben motiviert die Definition

$$(F \Rightarrow G)(c) := \text{Ens}^{C^{\text{op}}}(F \times C(\cdot, c), G),$$

mit vom Nachschalten von $f : c \rightarrow d$ induzierten Restriktionen. Mit 3.14 sind Morphismen in $\text{Ens}^{C^{\text{op}}}$ darstellbar als Ende

$$\text{Ens}^{C^{\text{op}}}(F, G) = \int_c \text{Ens}(F(c), G(c))$$

und wir berechnen mit den Regeln des (Ko-) Endekalküls für $F, G, H \in \text{Ens}^{C^{\text{op}}}$:

$$\begin{aligned} \text{Ens}^{C^{\text{op}}}(F, G \Rightarrow H) &\xrightarrow[\text{Def.}]{\sim} \text{Ens}^{C^{\text{op}}}(F, \text{Ens}^{C^{\text{op}}}(F \times C(\cdot, -), G)) \\ &\xrightarrow[3.14]{\sim} \int_c \text{Ens}(F(c), \int_d \text{Ens}(G(d) \times C(d, c), H(d))) \\ &\xrightarrow[3.10]{\sim} \int_c \int_d \text{Ens}(F(c), \text{Ens}(G(d) \times C(d, c), H(d))) \\ &\xrightarrow[3.12]{\sim} \int_d \int_c \text{Ens}(F(c), \text{Ens}(G(d) \times C(d, c), H(d))) \\ &\xrightarrow[\text{Adj.}]{\sim} \int_d \int_c \text{Ens}(F(c) \times G(d) \times C(d, c), H(d)) \\ &\xrightarrow[3.10]{\sim} \int_d \text{Ens}\left(\int_c F(c) \times G(d) \times C(d, c), H(d)\right) \\ &\xrightarrow[3.15]{\sim} \int_d \text{Ens}(F(d) \times G(d), H(d)) \\ &\xrightarrow[3.14]{\sim} \text{Ens}^{C^{\text{op}}}(F \times G, H). \end{aligned}$$

□

Die obere Aussage über Prägarben auf topologischen Räumen ergibt sich daraus durch die Beobachtung, dass $F|_U = F \times \text{Off}_X(\cdot, U)$ ist, denn Off_X ist halbeordnet durch Inklusionen. Wir erhalten auch die kartesisch abgeschlossene Struktur simplizialer Mengen, der Prägarbenkategorie auf Δ . Explizit ist für $X, Y \in \text{sEns}$:

$$(X \times Y)_n = X_n \times Y_n$$

und

$$(X \Rightarrow Y)_n = \text{sEns}(X \times \Delta^n, Y).$$

Auch die Rolle von Ens kann verallgemeinert werden. Wir erhalten:

Proposition 4.12. *Sei E eine kartesisch abgeschlossene Kategorie und C eine kleine Kategorie. Dann ist die Kategorie der Prägarben $E^{C^{\text{op}}}$ angereichert über E und kartesisch abgeschlossen.*

Beweis. Sind $F, G \in E^{C^{\text{op}}}$ Prägarben, so erhalten wir die angereicherte Struktur durch Übertragung der obigen Formulierung als Ens -Ende:

$$E^{C^{\text{op}}}(F, G) := \int_c E(F(c), G(c)) \in E,$$

für $E(\cdot, \cdot)$ das interne Hom in E . Damit funktioniert der Beweis oben auch für diesen Fall. \square

4.4 Produkte von Garben über topologischen Räumen

Wir betrachten die Kategorienfaserungen $\text{Ens}/_{\text{Top}} \rightarrow \text{Top}$ mit Morphismen den stetigen Abbildungen zwischen den étalen Räumen über der stetigen Abbildung in der Basis sowie $\text{Ens} // \text{Top} \rightarrow \text{Top}$ mit Opkomorphismen als Morphismen, d. h. für $F \in \text{Ens}/_X$ und $G \in \text{Ens}/_Y$:

$$\text{Ens} // \text{Top}(F, G) = \bigsqcup_{f: X \rightarrow Y} \text{Ens}/_X(f^*G, F).$$

Wir möchten einen Nerv-Funktor nicht nur für die Realisierung simplizialer Garben über X finden, sondern auch für simpliziale Garben über variablen topologischen Räumen, also für simpliziale Objekte in $\text{Ens}/_{\text{Top}}$ und $\text{Ens} // \text{Top}$. Dafür benötigen wir wieder eine monoidal abgeschlossene Struktur auf diesen Kategorien.

Die Kategorie $\text{Ens}/_{\text{Top}}$ besitzt endliche Produkte, die algebraisch gegeben sind durch Rückzug und Produkt und topologisch durch Bilden der Produkträume. Konkret:

Proposition 4.13. *Seien $F_{1,2} \in \text{Ens}/_{X_{1,2}}$ Garben über topologischen Räumen X_1 und X_2 . Dann ist die Garbe*

$$F_1 \times F_2 := \text{pr}_1^* F_1 \times \text{pr}_2^* F_2 \in \text{Ens}/_{X_1 \times X_2}$$

mit $\text{pr}_{1,2} : X_1 \times X_2 \rightarrow X_{1,2}$ den Projektionen das Produkt von F_1 und F_2 in $\text{Ens}/_{\text{Top}}$. Ihr étaler Raum ist:

$$\overline{F_1 \times F_2} = \overline{F_1} \times \overline{F_2} \rightarrow X_1 \times X_2$$

mit der von $\overline{F_{1,2}} \rightarrow X_{1,2}$ induzierten Produktabbildung.

Beweis. Für ein Testobjekt $G \in \text{Ens}/_Y$ prüft man leicht die Bijektion von Faserprodukten

$$\begin{aligned} & \text{Top}(\overline{G}, \overline{F_1} \times \overline{F_2}) \times_{\text{Top}(\overline{G}, X_1 \times X_2)} \text{Top}(Y, X_1 \times X_2) \\ \xrightarrow{\sim} & \text{Top}(\overline{G}, \overline{F_1}) \times_{\text{Top}(\overline{G}, X_1)} \text{Top}(Y, X_1) \\ & \times \text{Top}(\overline{G}, \overline{F_2}) \times_{\text{Top}(\overline{G}, X_2)} \text{Top}(Y, X_2), \end{aligned}$$

was die Aussage über den étalen Raum des Produkts zeigt. Die Abbildung $\overline{F_1} \times \overline{F_2} \rightarrow X_1 \times X_2$ ist étale und konkret ein Homöomorphismus auf der Produktmenge der Umgebungen, auf denen $\overline{F_{1,2}} \rightarrow X_{1,2}$ Homöomorphismen sind.

Für die algebraische Beschreibung prüft man unter Verwendung der Offenheit der Projektionen, dass die Prägarbenrückzüge Garben sind, und erhält mit 4.10 für die Schnitte über Basismengen $U_1 \times U_2$:

$$(F_1 \times F_2)(U_1 \times U_2) \xrightarrow{\sim} F_1(U_1) \times F_2(U_2).$$

Wir erhalten also einen Garbenmorphismus über $X_1 \times X_2$ von der algebraischen zur topologischen Beschreibung, indem einem Paar $(s, t) \in F_1(U_1) \times F_2(U_2)$ der Schnitt $s \times t : U_1 \times U_2 \rightarrow \overline{F_1} \times \overline{F_2}$ zugeordnet wird. Dieser Morphismus induziert auf den Halmen die Bijektion $(F_1)_x \times (F_2)_y \xrightarrow{\sim} (F_1 \times F_2)_{x,y}$ aus dem Vertauschen von endlichen Produkten mit filtrierenden Kolimites. \square

Bemerkung 4.14. Auf ähnliche Weise kann man auch für $\text{Ens}/_{\text{Top}}$ endliche Produkte konstruieren: es handelt sich (wegen der opponierten Fasern) um das Koprodukt der mit den Projektionen auf den Produktraum zurückgezogenen Garben.

Weiter ist $\text{Ens}/_{\text{Top}}$ auch unter Pullbacks abgeschlossen.

Satz 4.15. *Die Kategorie der Garben auf topologischen Räumen mit Morphismen $\text{Ens}/_{\text{Top}}$ besitzt endliche Limites.*

Beweis. Es reicht mit 4.13 die Existenz von Egalisatoren zu zeigen. Seien dazu $(F \rightarrow X) \rightrightarrows (G \rightarrow Y)$ zwei Morphismen. Wir zeigen, dass der Egalisator $E \rightarrow W$ aus $\text{Top}^{[1]}$ eine Garbe ist. Sei f die (übereinstimmende) Verknüpfung $W \rightarrow X \rightrightarrows Y$. Dann ist E auch ein Egalisator von Garben über $W \subset X$: $E \rightarrow F|_W \rightrightarrows f^*G$ und somit eine Garbe. \square

Bemerkung 4.16. Die verbleibenden Fragen zur Vollständigkeit und Kovollständigkeit von $\text{Ens}/_{\text{Top}}$ werden in 4.36 und 4.39 negativ beantwortet.

4.5 Kartesisch abgeschlossene koreflektive Kategorien topologischer Räume

Wir könnten erwarten, dass wie das Produkt auch das interne Hom von $\text{Ens}/_X$ in die Situation variabler Basisräume übertragen werden kann. Dies gelingt aber im Allgemeinen nicht, denn in diesem Fall erhielten wir durch Einschränken auf

die Basis ein zum kartesischen Produkt adjungiertes internes Hom in der Kategorie der topologischen Räume (4.28), welches bekanntermaßen nicht existiert ([Bor94], Prop. 7.1.2). Wir müssen uns also wieder auf eine bequeme Kategorie topologischer Räume mit internem Hom einschränken.

Die häufige Wahl \mathbf{CGHaus} ist für uns ungeeignet, denn der étale Raum einer Garbe über einem kompakt erzeugten Hausdorffraum ist im Allgemeinen kein Hausdorffraum mehr (betrachte etwa die Garbe der stetigen Funktionen nach \mathbb{R}). Abhilfe schafft die Konstruktion gewisser koreflektiver Hüllen aus [Vog71], die die den kompakt erzeugten Räumen zugrundeliegenden Gedanken verallgemeinert. Wir geben hier nur die Ergebnisse an.

Äquivalent zur (der *point-set*-Topologie entspringenden) Definition kompakt erzeugter Räume ist die folgende Charakterisierung:

Lemma 4.17 (2.19, Variante). *Ein topologischer Raum X ist kompakt erzeugt genau dann, wenn er die Finaltopologie bezüglich des Systems aller Abbildungen $K \rightarrow X$ von kompakten Räumen K nach X trägt.*

Beweis. Die Bedingung aus der ursprünglichen Definition ist dieselbe für das System der Inklusionen kompakter Mengen $K \subset X$. Da jede stetige Abbildung $K \rightarrow X$ mit K kompakt über die Inklusion ihres kompakten Bilds faktorisiert, ist letzteres System in ersterem konfinal und die Finaltopologien stimmen überein. \square

Der in 2.24 angesprochene zur Inklusion Rechtsadjungierte $k : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{CG}$ lässt sich nun auch beschreiben als das Versehen der X zugrundeliegenden Menge mit der genannten Finaltopologie. Der Raum kX ist dann sogar ein Kolimes über das System der $K \rightarrow X$, K kompakt, mitsamt den Morphismen über X ([Vog71], 1.1).

Nun verallgemeinern wir ([Vog71], 1): Sei \mathcal{I} eine nichtleere volle Unterkategorie von \mathbf{Top} (für \mathbf{CG} die kompakten Räume). Betrachte die Kategorie $\mathcal{I} \downarrow X$ und $kX := \operatorname{col}_{\mathcal{I} \downarrow X} X$. Bezeichne die volle Unterkategorie der topologischen Räume X mit $kX \cong X$ mit \mathcal{K} . Dann ist $k : \mathbf{Top} \rightarrow \mathcal{K}$ ein Funktor und rechtsadjungiert zur Inklusion $\mathcal{K} \rightarrow \mathbf{Top}$. Es gilt $\mathcal{I} \subset \mathcal{K}$.

Bemerkung 4.18. Dual zu 1.38 heißt eine volle Unterkategorie mit zur Inklusion Rechtsadjungiertem *koreflektiv*, der Rechtsadjungierte heißt *Koreflektor*. Die Konstruktion, die zur vollen Unterkategorie $\mathcal{I} \subset \mathbf{Top}$ eine koreflektive Unterkategorie $\mathcal{K} \subset \mathbf{Top}$ liefert, welche \mathcal{I} umfasst, heißt auch Übergang zur *koreflektiven Hülle*. Es handelt sich tatsächlich um eine idempotente Operation ([Vog71], Prop. 1.5), der Ergänzung von \mathcal{I} um alle Kolimites von Objekten in \mathcal{I} ([HS79]).

Die koreflektive Hülle besitzt die folgenden Stabilitätseigenschaften:

Proposition 4.19. *Die koreflektive Hülle \mathcal{K} ist vollständig und kovollständig. Die Kolimites stimmen mit den Kolimites aus \mathbf{Top} überein, die Limites entstehen durch Anwendung des Koreflektors k auf den Limes in \mathbf{Top} .*

Insbesondere ist \mathcal{K} also stabil unter disjunkten Summen und Quotientenbildung.

Beweis. Das ist die duale Aussage zu 1.39. Die Vollständigkeit und Kovollständigkeit von Top durch Versehen der mengentheoretischen Limites bzw. Kolimites mit der Initial- bzw. Finaltopologie ist bekannt. \square

Im allgemeinen kann man keine Aussage darüber treffen, ob mit der Relativtopologie versehene Unterräume von Objekten in \mathcal{K} wieder zu \mathcal{K} gehören. Wir benötigen die folgende Eigenschaft:

1. Ist $U \subset X$ ein offener Unterraum eines Objekts $X \in \mathcal{I}$ versehen mit der Relativtopologie, so gilt $U \in \mathcal{K}$.

In diesem Fall gilt bereits für Objekte $X \in \mathcal{K}$, dass offene Unterräume $U \subset X$ wieder Objekte von \mathcal{K} sind. Dieselbe Aussage gilt, wenn man “offen” zweimal durch “abgeschlossen” ersetzt ([Vog71], Prop. 2.4).

Wir nehmen nun an, dass \mathcal{I} die folgenden Axiome erfüllt ([Vog71], Axiom 2):

2. \mathcal{I} ist abgeschlossen unter endlichen kartesischen Produkten (Produkten in Top).
3. Sind $X, Y \in \mathcal{I}$, so ist die Auswertungsabbildung

$$\begin{aligned} \text{ev}_{X,Y} : \text{Top}_{co}(X, Y) \times X &\rightarrow Y, \\ (f, x) &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

stetig. Dabei ist $\text{Top}_{co}(X, Y)$ die Morphismenmenge $\text{Top}(X, Y)$ versehen mit der kompakt-offen Topologie.

Dann besitzt \mathcal{K} die Struktur einer kartesisch abgeschlossenen Kategorie mit Produkten

$$X \otimes Y := k(X \times Y)$$

den “k-ifizierungen” der Produkte in Top und internem Hom

$$X \Rightarrow Y := k(\text{Top}_{co}(X, Y))$$

([Vog71], 3).

Definition 4.20. Ein topologischer Raum heißt *lokalkompakt* (im starken Sinne), wenn jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen besitzt.

Bemerkung 4.21. Dies ist eine stärkere Bedingung als *lokal kompakt* (im schwachen Sinne) wie in 2.21 zu sein. Jene stimmt überein mit unserer Konvention für “lokal Eigenschaft” und wird daher getrennt geschrieben. Für Hausdorffräume stimmen beide Begriffe überein.

Proposition 4.22 ([Vog71], 5). *Die folgenden vollen Unterkategorien der Kategorie der topologischen Räume erfüllen die Axiome 1 - 3.*

- (i) die Kategorie der kompakten Hausdorffräume \mathcal{I}_K ,
- (ii) die Kategorie der lokalkompakten topologischen Räume \mathcal{I}_L .

Für das Axiom 1 weisen wir das nach. Da es sich um eine lokale Eigenschaft handelt, gilt die Aussage im Fall der lokalkompakten Räume sofort. Für die kompakten Hausdorffräume bemerkt man, dass nach dem folgenden Lemma eine offene Teilmenge eines kompakten Hausdorffraums lokalkompakt ist und lokalkompakte Hausdorffräume mit den kompakt erzeugten Hausdorffräumen allgemein (vgl. 2.21 (i)) in der koreflektiven Hülle der kompakten Hausdorffräume enthalten sind: in der Tat ist für diese das System der Inklusionen kompakter Teilmengen konfinal im System der von kompakten Hausdorffräumen ausgehenden stetigen Abbildungen, da das Bild von Kompakta unter stetigen Abbildungen kompakt ist. Die Bedingung, kompakt erzeugt zu sein, bedeutet aber gerade, die Finaltopologie bezüglich dieser Inklusionen zu tragen.

Lemma 4.23. *Sei K ein kompakter Hausdorffraum und $U \subsetneq K$ eine offene Teilmenge. Dann ist U mit der induzierten Topologie lokalkompakt.*

Beweis. Sei $V \subsetneq U$ eine offene Umgebung eines Punktes $x \in U$. Der Rand ∂V ist als abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Hausdorffraums kompakt und kann somit durch endlich viele offene Mengen überdeckt werden, die disjunkt zu einer offenen Umgebung W_0 von x sind. Bezeichne die Vereinigung dieser Mengen mit W . Wegen $W \supset \partial V$ ist $V \setminus W = \bar{V} \setminus W$ abgeschlossen und somit eine kompakte Umgebung von x , die die offene Umgebung W_0 von x enthält. \square

Auch Axiom 2 sieht man direkt: ein Produkt von Hausdorffräumen ist bekanntermaßen wieder Hausdorffsch und ein Produkt kompakter Räume wieder kompakt. Mit dieser Aussage finden wir auch bei einem Produkt lokalkompakter Räume Umgebungsbasen aus Kompakta durch die Umgebungsbasen aus Produktmengen.

Für das Axiom 3 verweisen wir auf die Literatur, siehe etwa [Soe18e], 1.12.12.

Korollar 4.24. *Die koreflektiven Hüllen von \mathcal{I}_K und \mathcal{I}_L sind kartesisch abgeschlossen und enthalten mit jedem Objekt X auch alle offenen Unterräume $Y \subsetneq X$.*

Damit können wir die für uns entscheidende Eigenschaft zeigen:

Proposition 4.25. *Ist $X \in \mathcal{K}$ für \mathcal{K} die koreflektive Hülle von \mathcal{I}_K bzw. \mathcal{I}_L und $F \rightarrow X$ eine étale Abbildung, so ist auch $F \in \mathcal{K}$.*

Beweis. Wir können den étalen Raum $F \rightarrow X$ als Kolimes mittels der Schnitte $F(U)$ über offene Mengen $U \subsetneq X$ darstellen:

$$F \xrightarrow{\sim} \left(\bigsqcup_{U \in X} F(U) \times U \right) / \sim.$$

Dabei läuft das Koproduct über alle offenen Teilmengen von X und ist die Äquivalenzrelation die Identifikation gleicher Keime, d. h.

$$(s, p) \sim (t, q) \Leftrightarrow p = q \text{ und } s_p = t_p.$$

Die étale Abbildung $F \rightarrow X$ ist dann von der Projektion auf die zweiten Faktoren induziert und wohldefiniert. Man erkennt leicht den Isomorphismus als

die Koeinheit der Adjunktion $(\text{ét}, S)$ aus [Soe18d], 2.1.24, eingeschränkt auf die Kategorie der étalen Räume über X .

Nach den Stabilitätseigenschaften von \mathcal{K} sind die offenen Teilmengen $U \subset X$ Objekte von \mathcal{K} und dann auch der Kolimes F bestehend aus Koprodukt und Koegalisor. Man beachte, dass es sich bei $F(U) \times U$ mit der diskreten Topologie auf $F(U)$ formal um das Koprodukt $\bigsqcup_{F(U)} U$ handelt. \square

Bemerkung 4.26. Der Beweis wiederholt bei genauerer Betrachtung die Aussage, dass jede Prägarbe auf X ein Kolimes über darstellbare Prägarben $\text{Off}_X(\cdot, U)$ ist (2.6).

4.6 Kartesischer Abschluss von Garben auf topologischen Räumen

Wir können uns nun der Frage nach einer kartesisch abgeschlossenen Struktur auf Ens/Top zuwenden. Ganz allgemein gilt:

Proposition 4.27. *Ist $C \subset D$ eine koreflektive Unterkategorie einer kartesisch abgeschlossenen Kategorie C und stimmen die Produkte in C und D überein, dann ist D kartesisch abgeschlossen.*

Beweis. In diesem Fall ist die Korefektion $(X \Rightarrow Y)^+$ des internen Hom in D ein internes Hom in C . \square

Damit können wir folgern:

Proposition 4.28. *Die Kategorie der Garben über topologischen Räumen mit Morphismen Ens/Top ist nicht kartesisch abgeschlossen.*

Beweis. Betrachte die volle Unterkategorie $\text{Top} \subset \text{Ens}/\text{Top}$ gegeben durch die Einbettung $X \mapsto (\emptyset \rightarrow X)$. Diese ist koreflektiv mit dem Korefektor $(G \rightarrow Y) \mapsto (\emptyset \rightarrow Y)$. In der Tat gilt:

$$\text{Ens}/\text{Top}((\emptyset \rightarrow X), (G \rightarrow Y)) \xrightarrow{\sim} \text{Top}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}/\text{Top}((\emptyset \rightarrow X), (\emptyset \rightarrow Y)).$$

Die Produkte in Ens/Top und $\text{Top} \subset \text{Ens}/\text{Top}$ stimmen nach 4.13 überein. Somit müsste laut 4.27 Top kartesisch abgeschlossen sein, ein Widerspruch zu der bekannten Aussage, dass dies für Top nicht möglich ist ([Bor94], Prop. 7.1.2). \square

Da das einzige Problem die fehlende kartesisch abgeschlossene Struktur in der Basis war, schränken wir auf eine bequemere Kategorie \mathcal{K} ein. In diesem Abschnitt werden wir einen einschränkenden Grund für die Existenz eines internen Homs in der Kategorie $\text{Ens}_{\mathcal{K}}$ formulieren, für \mathcal{K} im gesamten Abschnitt eine kartesisch abgeschlossene, koreflektive Kategorie topologischer Räume, die stabil ist unter dem Bilden offener Unterräume. Diese Bedingungen sind nicht sehr restriktiv. Die Korefektivität ist nach [HS79], Thm. 37.3, äquivalent dazu, dass \mathcal{K} unter Kolimites in Top abgeschlossen ist. Die Stabilität unter offenen

Teilräumen ermöglicht uns, sinnvoll über Garben über \mathcal{K} -Räumen zu sprechen (vgl. 4.25).

Zunächst betrachten wir den Fall von Paaren von \mathcal{K} -Räumen mit stetiger, aber nicht notwendigerweise étaler, Abbildung.

Lemma 4.29. *Sei $\mathcal{K} \subset \text{Top}$ eine koreflektive, kartesisch abgeschlossene Kategorie topologischer Räume. Dann ist $\mathcal{K}^{[1]}$ kartesisch abgeschlossen.*

Beweis. Es handelt sich um eine Prägarbenkategorie auf $[1]^{\text{op}}$ mit Werten in einer kartesisch abgeschlossenen Kategorie. Die Aussage folgt somit aus 4.12. Expliziter ist das interne Hom von $F \rightarrow X$ mit $G \rightarrow Y$ das Paar

$$\mathcal{K}(F, G) \times_{\mathcal{K}(F, Y)} \mathcal{K}(X, Y) \rightarrow \mathcal{K}(X, Y),$$

das die Menge der kommutativen Quadrate mit einer Topologie ausstattet, mit der Projektion auf den zweiten Faktor als Abbildung. Die Adjunktion

$$\mathcal{K}^{[1]}((F \rightarrow X) \times (G \rightarrow Y), (H \rightarrow Z)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}^{[1]}((F \rightarrow X), (G \rightarrow Y) \Rightarrow (H \rightarrow Z))$$

für $(F \rightarrow X), (G \rightarrow Y), (H \rightarrow Z) \in \mathcal{K}^{[1]}$ ist dann die Bijektion von Faserprodukten

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}(F \times G, H) \times_{\mathcal{K}(F \times G, Z)} \mathcal{K}(X \times Y, Z) \\ \xrightarrow{\sim} & \mathcal{K}(F, \mathcal{K}(G, H) \times_{\mathcal{K}(G, Z)} \mathcal{K}(Y, Z)) \times_{\mathcal{K}(F, \mathcal{K}(Y, Z))} \mathcal{K}(X, \mathcal{K}(Y, Z)). \end{aligned}$$

□

Im allgemeinen ist das interne Hom in $\mathcal{K}^{[1]}$ für $(F \rightarrow X)$ und $(G \rightarrow Y)$ mit étalen Abbildungen nicht wieder étale. Wir können versuchen, es zu “étalisieren”:

Lemma 4.30 ([Soe18d], 2.1.40). *Für X einen topologischen Raum ist die volle Unterkategorie $\text{étTop}_X \hookrightarrow \text{Top}_X$ koreflektiv. Der zur Inklusion Rechtsadjungierte heißt Étalisierung.*

Beweis. ([Soe18d], 2.1.40) Wir erhalten die Étalisierung als die Verknüpfung $\text{ét} \circ S$ für S den Funktor der Schnittgarbe und ét den Funktor des étalen Raums einer Garbe. Es handelt sich um die Verknüpfung von Adjunktionen

$$(\text{ét}, S) \circ (S, \text{ét}) = (\text{ét} \circ S, \text{ét} \circ S) : \text{Top}_X \rightleftarrows \text{Ens}_X \rightleftarrows \text{étTop}_X,$$

wobei letztere Adjunktion die bekannte Äquivalenz von Kategorien ist. □

Ist $\mathcal{K} \subset \text{Top}$ nun eine Kategorie topologischer Räume, die mit jedem Raum X auch jeden étalen Raum über X enthält (etwa wie in 4.25), so können wir die Kategorie der étalen Räume über \mathcal{K} als volle Unterkategorie von $\mathcal{K}^{[1]}$ auffassen:

$$\text{ét}\mathcal{K}^{[1]} := \text{Ens}_{/\mathcal{K}} \subset \mathcal{K}^{[1]}.$$

Gäbe es nun einen Koreflektor $^+ : \mathcal{K}^{[1]} \rightarrow \text{ét}\mathcal{K}^{[1]}$, so hätten wir für $F, G, H \in \text{ét}\mathcal{K}^{[1]}$ mit 4.27

$$\text{ét}\mathcal{K}^{[1]}(F \times G, H) \xrightarrow{\sim} \text{ét}\mathcal{K}^{[1]}(F, (G \Rightarrow H)^+),$$

mit dem internen Hom $(G \Rightarrow H)$ aus 4.29. Die Produkte in $\mathcal{K}^{[1]}$ und $\text{ét}\mathcal{K}^{[1]}$ stimmen dabei nach dem folgenden Lemma überein. Umgekehrt ist, falls ein internes Hom $(G \Rightarrow H)^+$ in $\text{ét}\mathcal{K}^{[1]}$ existiert, die Zuordnung $(G \Rightarrow H) \mapsto (G \Rightarrow H)^+$ ein partiell definierter Korefektor. Unsere Aufgabe ist es nun, zu zeigen, dass eine solche relative Form der Étalisierung nicht möglich ist.

Lemma 4.31. *Ist $k : \text{Top} \rightarrow \mathcal{K}$ ein Korefektor und $p : F \rightarrow X$ étale in Top, so ist $kp : kF \rightarrow kX$ étale.*

Beweis. Dass p étale ist, bedeutet, dass es für jedes $x \in F$ ein kommutatives Quadrat

$$\begin{array}{ccc} U & \hookrightarrow & F \\ \downarrow \sim & & \downarrow p \\ p(U) & \hookrightarrow & X \end{array}$$

gibt mit $U \subset F$ und $p(U) \subset X$. Anwendung von k ergibt das entsprechende Diagramm, in welchem $kU \subset kF$ und $k(p(U)) \subset kX$ offene Teilmengen sind, da \mathcal{K} mit jedem Raum auch seine offenen Unterräume enthält. Da k ein Funktor ist, kommutiert das Quadrat und $kU \xrightarrow{\sim} k(p(U)) = (kp)(kU)$ ist ein Homöomorphismus. \square

Das Übereinstimmen der Produkte in $\mathcal{K}^{[1]}$ und $\text{ét}\mathcal{K}^{[1]}$ ergibt sich nun daraus, dass für $(F \rightarrow X), (G \rightarrow Y) \in \text{ét}\mathcal{K}^{[1]}$ zunächst das Produkt $(F \times G \rightarrow X \times Y)$ in Top étale ist, und dann nach dem Lemma auch das Produkt $k(F \times G) \rightarrow k(X \times Y)$ in $\mathcal{K}^{[1]}$ étale und somit in $\text{ét}\mathcal{K}^{[1]}$ ist.

Satz 4.32. *Sei $\mathcal{K} \subset \text{Top}$ eine volle Unterkategorie. Dann ist der partiell definierte Korefektor $^+ : \mathcal{K}^{[1]} \rightarrow \text{ét}\mathcal{K}^{[1]}$ nur auf $\text{ét}\mathcal{K}^{[1]}$ definiert.*

Beweis. Dies liegt daran, dass die Testobjekte, mit denen wir Objekte in $\mathcal{K}^{[1]}$ eindeutig festlegen können, bereits étale sind. Betrachte dazu die Einbettungen $\iota, \tau : \mathcal{K} \rightarrow \text{ét}\mathcal{K}^{[1]}$ durch über dem betreffenden Raum initiale bzw. terminale Garben:

$$\begin{aligned} \iota X &:= (\emptyset \rightarrow X), \\ \tau X &:= (X \xrightarrow{\text{id}} X). \end{aligned}$$

Gelte also

$$\mathcal{K}^{[1]}((F \rightarrow X), (G \rightarrow Y)) \xrightarrow{\sim} \text{ét}\mathcal{K}^{[1]}((F \rightarrow X), (G \rightarrow Y)^+) \quad (4.2)$$

für alle étalen $F \rightarrow X$. Ein Objekt $(H \rightarrow Z) \in \mathcal{K}^{[1]}$ ist nach dem Yoneda-Lemma (bis auf eindeutigen Isomorphismus) eindeutig festgelegt durch die Funktoren $\mathcal{K}^{[1]}(\iota, (H \rightarrow Z)) = \mathcal{K}(\cdot, Z)$ und $\mathcal{K}^{[1]}(\tau, (H \rightarrow Z)) = \mathcal{K}(\cdot, H) : \mathcal{K} \rightarrow \text{Ens}$ und ihre aus $\iota \Rightarrow \tau$ entstehende Transformation. In der Tat bestimmen die beiden Funktoren nach dem Yoneda-Lemma bereits die beteiligten Räume H und Z eindeutig und der Morphismus $H \rightarrow Z$ entspricht der Transformation. Nun sind $\iota X, \tau X \in \text{ét}\mathcal{K}^{[1]}$ für alle $X \in \mathcal{K}$, was den Beweis abschließt: dann müssen nämlich im Fall von Gl. 4.2 $(G \rightarrow Y)$ und $(G \rightarrow Y)^+$ isomorph sein und die Korefektion ist genau dann definiert, wenn $(G \rightarrow Y)$ sowieso schon étale ist. \square

Korollar 4.33. *Es gibt ein internes Hom für $F \rightarrow X$ und $G \rightarrow Y$ in $\text{ét}\mathcal{K}^{[1]}$ genau dann, wenn die Projektion auf den zweiten Faktor*

$$\mathcal{K}(F, G) \times_{\mathcal{K}(F, Y)} \mathcal{K}(X, Y) \rightarrow \mathcal{K}(X, Y)$$

étale ist.

Beweis. Dies folgt aus 4.29 und 4.32. □

Bemerkung 4.34. Wenn $\mathcal{K}(F, G)$ die kompakt-offen Topologie trägt, erhielten wir folgendes Gegenbeispiel zum kartesischen Abschluss von $\text{ét}\mathcal{K}^{[1]}$: Für $X = Y = \text{pt}$ sind étale Räume $F \rightarrow X$ und $G \rightarrow Y$ diskret. Das interne Hom von $F \Rightarrow G$ lautet $\mathcal{K}(F, G) \rightarrow \mathcal{K}(X, Y) = \text{pt}$ und muss folglich selbst diskret sein. Dies ist im Fall, dass F unendlich ist, ein Widerspruch zum folgenden Lemma. Im Fall der koreflektiven Hüllen von $\mathcal{K} = \mathcal{I}_K$ oder $\mathcal{K} = \mathcal{I}_L$ aus dem vorangegangenen Abschnitt gilt allerdings $\mathcal{K}(F, G) = k(\text{Top}_{co}(F, G))$. Die Frage ist, ob der Koreflektor die Topologien so sehr verfeinern kann, dass $\mathcal{K}(F, G)$ auch bei unendlichem F diskret wird.

Lemma 4.35. *Ist G diskret, so ist die kompakt-offen Topologie auf $\text{Top}(F, G)$, $F \in \text{Top}$ genau dann diskret, wenn X endlich viele Zusammenhangskomponenten hat.*

Beweis. Die kompakt-offen Topologie ist genau dann diskret, wenn jede stetige Abbildung $f : F \rightarrow G$ durch endlich viele Aussagen der Form $f(K) \subset U$ für $K \subset F$ kompakt und $U \subset G$ eindeutig festgelegt ist. Ein Kompaktum $K \subset F$ trifft nur endlich viele Zusammenhangskomponenten von F . Daher kann f so nicht eindeutig festgelegt werden, wenn F unendlich viele Zusammenhangskomponenten hat. Umgekehrt ist f als stetige Funktion in einen diskreten Raum konstant auf Zusammenhangskomponenten und kann durch die Angabe des Funktionswerts (Punkte in G sind offen) eines Punktes in jeder Zusammenhangskomponente eindeutig festgelegt werden. □

4.7 Vollständigkeitseigenschaften der Garben auf topologischen Räumen

Mit denselben Techniken können wir auch zeigen, dass die Kategorie $\text{Ens}/_{\text{Top}}$ der Garben auf topologischen Räumen über die endlichen Limites aus 4.15 und die trivialen Koprodukte hinaus weder vollständig noch kovollständig ist.

Proposition 4.36. *Die Kategorie $\text{Ens}/_{\text{Top}}$ der Garben über topologischen Räumen besitzt nicht alle unendlichen Produkte.*

Beweis. Dies sieht man schon am Beispiel eines unendlichen Produkts von Inklusionen $\iota : U \hookrightarrow X$ einer echten offenen Teilmenge $U \subsetneq X$. Die Abbildung

$$\prod_{\mathbb{N}} \iota : \prod_{\mathbb{N}} U \rightarrow \prod_{\mathbb{N}} X$$

ist nicht étale, denn es gibt keine Schnitte von $\prod_{\mathbb{N}} \iota$ über offene Teilmengen $V \subset \prod_{\mathbb{N}} X$, weil eine offene Menge in der Basis der Produkttopologie von $\prod_{\mathbb{N}} X$ in fast allen Faktoren X die Projektion X hat. Die Abbildung ist also nicht étale, was aber wegen des Fehlens eines Korefektors (4.32) für die Existenz von unendlichen Produkten nötig wäre. \square

Korollar 4.37. *Die volle Unterkategorie $\text{Ens}/_{\text{Top}} \subset \text{Top}^{[1]}$ ist nicht reflektiv.*

Beweis. Gäbe es einen zur Inklusion Linksadjungierten, so wäre die Inklusion linksexakt, würde also Limites erhalten. \square

Wir können sogar angeben, wann es den Reflektor gibt. Bezeichne dazu einen Punkt in einem Raum $F \in \text{Top}_X$ als *étale*, wenn er die lokale Homöomorphismus-Eigenschaft eines étalen Raums über X erfüllt.

Proposition 4.38. *Der partiell definierte Reflektor $\text{Top}^{[1]} \rightarrow \text{Ens}/_{\text{Top}}$ ist auf $F \in \text{Top}_X$ genau dann definiert, wenn jeder nichtétale Punkt $\sigma \in F$ eine kleinste offene Umgebung $U(\sigma)$ besitzt.*

Beweis. Besitzt jeder nichtétale Punkt in F eine kleinste offene Umgebung, so ergänzt der Reflektor in F einen nichtétalen Punkt σ lokal zu einer Kopie von $U(\sigma)$. Ein Morphismus von F in eine Garbe $G \in \text{Ens}/_Y$ schickt σ auf einen Keim $f(\sigma)$ eines Schnitts in $G(V)$ für eine offene Umgebung V des Basispunkts von $f(\sigma)$, deren Urbild $f^{-1}(V) \supset U(\sigma)$ die kleinste offene Umgebung von σ enthält. Da Übereinstimmungsmengen von Schnitten offen sind, enthält deren Urbild mit σ auch $U(\sigma)$ und es lässt sich somit ein Morphismus $F \rightarrow G$ eindeutig über den Reflektor $F \rightarrow F^+$ faktorisieren.

Sei umgekehrt der Reflektor $^+$ definiert auf einem Objekt $F \rightarrow X$. Durch Testen mit Zielobjekten τY , $Y \in \text{Top}$, ist nach dem Yoneda-Lemma die Basis von $(F \rightarrow X)^+$ wieder (bis auf eindeutigen Homöomorphismus) X und die Einheit der Adjunktion $\kappa : F \rightarrow F^+$ liegt über der Identität auf X . Wegen der eindeutigen Faktorisierung über κ müssen sich nicht nur die gesamten Mengen von kommutativen Quadraten von $F \rightarrow X$ bzw. $(F \rightarrow X)^+$ in eine Garbe entsprechen, sondern sogar die Morphismen über jeder Abbildung f in der Basis. Sei $\sigma \in F$ nun ein nichtétaler Punkt, $U \subset X$ eine étale Umgebung von $\kappa(\sigma)$ und $V \subsetneq U$ eine echt kleinere offene Umgebung von $\kappa(\sigma)$. Wir wählen als Testraum die Garbe G über dem Sierpinski-Raum mit zweielementigem Halm über dem offenen Punkt und genau einem globalen Schnitt und als Abbildung in der Basis die Abbildung, für die das Urbild des offenen Punktes V ist. Nun gibt es Morphismen $F \rightarrow G$, die σ auf den nichtfortsetzbaren Schnitt über dem offenen Punkt schicken, aber keine Morphismen $F^+ \rightarrow G$, die $\kappa(\sigma)$ auf den nichtfortsetzbaren Schnitt über dem offenen Punkt schicken, ein Widerspruch zur eindeutigen Faktorisierung über κ . \square

Korollar 4.39. *Ein Kolimes in $\text{Ens}/_{\text{Top}}$ existiert genau dann, wenn alle nicht-étalen Punkte des Kolimes in $\text{Top}^{[1]}$ eine kleinste offene Umgebung haben.*

Beispiel 4.40. *Betrachte den Basisraum $X = [0, 1] \sqcup \text{pt}$ und die über $[0, 1]$ konstant einelementige und über pt zweielementige Garbe $F \in \text{Ens}/_X$. Durch Identifikation (d. h. einen Koegalisor mit der konstant einelementigen Garbe über*

dem Punkt) des Punkts in F_0 mit einem der Punkte aus F_{pt} und der zugehörigen Identifikation $0 \sim \text{pt}$ entsteht ein topologischer Raum über dem Quotienten $[0, 1]$ der Basis mit einem globalen Schnitt und einem weiteren, nichtétalen Punkt über 0.

Kapitel 5

Schwach konstruierbare Garben auf simplizialen Mengen

In diesem Kapitel möchten wir die Aussagen aus Abschnitt 1.1 und Abschnitt 1.2 übertragen auf den Fall, dass es sich bei dem Basisraum um die Realisierung einer simplizialen Menge anstelle eines Simplizialkomplexes handelt. Simplizialkomplexe sind halbgeordnete Mengen und unsere Technik verwendete die Ordnungstopologie halbgeordneter Mengen. Simplizial konstante Garben auf simplizialen Mengen entsprechen hingegen Diagrammen von Mengen, in denen es auch mehrere Pfeile zwischen zwei zu nichtdegenerierten Simplizes gehörigen Punkten geben kann. Solche kategoriellen Realisierungen simplizialer Mengen werden wir in diesem Abschnitt konstruieren.

Konkret ist für $X \in \mathbf{sEns}$ eine simpliziale Menge eine Kategorie D_X gesucht, für die es eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathbf{Ens}_{/|X|}^{\mathrm{sk}} \xrightarrow{\sim} [D_X^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ens}]$$

gibt. Dabei steht $\mathbf{Ens}_{/|X|}^{\mathrm{sk}}$ für die *simplizial konstanten Garben* auf $|X|$, d. h. Garben, deren Einschränkungen auf die Zellen der geometrischen Realisierung aus 2.18 konstant sind. Wir diskutieren die in Frage kommenden Kategorien D_X an einem einfachen Beispiel. Betrachte die Standarddarstellung von S^1 als simpliziale Menge X mit einem nichtdegenerierten 1-Simplex und einem nichtdegenerierten 0-Simplex aus 2.14. Als kategorielle Realisierung D_X von X können folgende Diagramme in Frage kommen:

1. Das Diagramm $D_X = (\bullet \rightarrow \bullet)$. Es handelt sich um das Diagramm der nichtdegenerierten Simplizes von X mit der Angabe, welche Simplizes im Abschluss welcher Simplizes liegen. Dieses Diagramm ist zu grob, um simplizial konstanten Garben auf S^1 zu entsprechen, wie die Realisierung von D_X mit der Ordnungstopologie und dann die erste Garbenkohomologie zeigt. In Abschnitt 5.2 werden wir diese kategorielle Realisierung mit der

geometrischen Realisierung durch ordnungstopologische Simplex in Beziehung setzen.

2. Das Diagramm $D_X = \Delta \downarrow_r X$. Es handelt sich um das Diagramm aller Simplex von X mit der Angabe von Rändern und Degenerationen. Dieses Diagramm ist zu fein, um von einer simplizial konstanten Garbe auf S^1 eindeutig bestimmt zu werden, denn diese trägt keine Informationen über die degenerierten Simplex. Gleich im Anschluss werden wir diese kategorielle Realisierung mit den simplizialen Objekten in $\text{Ens}_{//\text{Top}}$ mit diskreten Basisräumen X in Beziehung setzen.
3. Das Diagramm $D_X = (\bullet \rightrightarrows \bullet)$. Dieses Diagramm würden wir anschaulich erwarten. Es handelt sich um die nichtdegenerierten Simplex von X mit der Angabe von Rändern, nicht aber von Degenerationen. Im Abschnitt 5.3 zeigen wir die versprochene Aussage, dass Prägarben auf diesem Diagramm simplizial konstanten Garben auf $|X|$ entsprechen.

Während wir für die anderen beiden kategoriellen Realisierungen mehr ausholen müssen, zeigen wir die Interpretation der Prägarben auf der Simplexkategorie von X direkt.

Betrachte für eine feste simpliziale Menge $X \in \text{sEns}$ die volle Unterkategorie $(\text{sEns}_{//\text{Top}})_X \subset \text{sEns}_{//\text{Top}}$ der simplizialen Garben über topologischen Räumen mit Komorphismen, für die die Basisräume diskret und als simplizialer topologischer Raum isomorph zur simplizialen Menge X sind. Für eine Garbe $F \in (\text{sEns}_{//\text{Top}})_X$ und $\sigma \in X_n$ einen n -Simplex schreiben wir $F(\sigma)$ für die Menge $(F_n)_\sigma$, den Halm bei σ . Für $f : [n] \rightarrow [m]$ monoton bestehen die Komorphismen $Ff^*F_n \rightarrow F_m$ aus Abbildungen $F(f(\sigma)) \rightarrow F(\sigma)$ für $\sigma \in X_m$. Da die Simplexkategorie $\Delta \downarrow_r X$ von X gerade aus allen Simplex $\sigma \in \bigsqcup_n X_n$ besteht mit Morphismen $\sigma \rightarrow f(\sigma)$ für alle $f : [n] \rightarrow [m]$ und $\sigma \in X_m$, haben wir gezeigt:

Proposition 5.1. *Die obige Zuordnung liefert für $X \in \text{sEns}$ eine simpliziale Menge eine Äquivalenz von Kategorien*

$$[\Delta \downarrow_r X^{\text{op}}, \text{Ens}] \xrightarrow{\sim} (\text{sEns}_{//\text{Top}})_X.$$

5.1 Realisierungen als Kategorie

In diesem Abschnitt geben wir die kategoriellen Realisierungen einer simplizialen Menge als gerichtete Kategorie bzw. als halbgeordnete Menge an.

Wir benötigen die Begriffe für nichtdegenerierte Simplex (vgl. 2.1, 2.3).

Definition 5.2. Die Unterkategorie der endlichen nichtleeren Ordinalzahlen mit injektiven monotonen Abbildungen $\Delta^+ \subset \Delta$ heißt *nichtdegenerierte Simplexkategorie*.

Wir wiederholen die Begriffe für simpliziale Mengen für Prägarben auf Δ^+ .

Definition 5.3. Die darstellbare Prägarbe auf Δ^+

$$\Delta^{+n} := \Delta^+(\cdot, [n])$$

heißt der *nichtdegenerierte Standard- n -Simplex*.

Diese Zuordnung liefert einen Funktor $r : \Delta^+ \rightarrow [\Delta^{+\text{op}}, \text{Ens}]$. Wir erhalten unsere für die kategorielle Realisierung gewünschte kosimpliziale Kategorie durch den Funktor der nichtdegenerierten Simplizes des nichtdegenerierten Standard- n -Simplex. Bezeichne dazu $\iota : \Delta^+ \hookrightarrow \Delta$ den Inklusionsfunktor und $\iota^* : [\Delta^{\text{op}}, \text{Ens}] \rightarrow [\Delta^{+\text{op}}, \text{Ens}]$ den Rückzugsfunktor auf Prägarben.

Definition 5.4. Der *Stufenfunktor* ist der Funktor

$$N : \Delta^+ \downarrow_r \iota^* \Delta^n \rightarrow \Delta^+ \downarrow_r \Delta^{+n},$$

gegeben durch das kommutative Quadrat

$$\begin{array}{ccc} f : \Delta^{+m} \rightarrow \iota^* \Delta^n & \longmapsto & N(f) : \Delta^{+k} \rightarrow \iota^* \Delta^{+n} \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ f \in \Delta([m], [n]) & \longmapsto & N(f) \in \Delta^+([k], [n]), \end{array}$$

in dem die Vertikalen die eindeutigen Zuordnungen aus dem Yoneda-Lemma sind und die untere Horizontale die Abbildung, die eine monotone Abbildung f auf die eindeutige monotone Injektion $N(f)$ aus 2.12 mit demselben Bild (und anderem Definitionsbereich $[k]$) schickt.

Bemerkung 5.5. Der Name “Stufenfunktor” rührt daher, dass die Werte einer monotonen Funktion die Stufen in ihrem Graphen beschreiben.

Das Vorschalten von monotonen Injektionen vor $f \in \Delta([m], [n])$ (Morphismen in $\Delta^+ \downarrow_r \iota^* \Delta^n$) induziert auf der zugehörigen monotonen Injektion $\hat{f} \in \Delta^+([k], [n])$ ebenfalls Morphismen durch Vorschalten von Injektionen, denn das Einschränken von Funktionen auf Teilmengen verkleinert auch die Bildmengen. Dies zeigt die Funktorialität.

Proposition 5.6. *Die Zuordnung*

$$\begin{array}{ccc} [n] & \longmapsto & \Delta^+ \downarrow_r \Delta^{+n} \\ \downarrow f & & \downarrow f \circ \\ & & \Delta^+ \downarrow_r \iota^* \Delta^m \\ & & \downarrow N \\ [m] & \longmapsto & \Delta^+ \downarrow_r \Delta^{+m} \end{array}$$

ist ein Funktor $R : \Delta \rightarrow \text{Cat}$, genannt die kosimpliziale Standard-Kategorie.

Bemerkung 5.7. Es handelt sich um die opponierten Standard- n -Simplizialkomplexe aufgefasst als Kategorien. Die Konstruktion über die nichtdegenerierten Simplizes des Standard-Simplex liefert die benötigten Rand- und Degenerationsabbildungen auf natürliche Weise mit.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass für monotone $f : [m] \rightarrow [n]$ und $g : [l] \rightarrow [m]$ gilt

$$N((f \circ g) \circ) = N(f \circ) N(g \circ)$$

für $(f \circ)$ den Nachschaltfunktor und N den Stufenfunktor. Das folgt aber daraus, dass beide Funktoren eine monotone Injektion $h : [k] \rightarrow [l]$ auf die Injektion auf $\text{im}(f \circ g \circ h)$ schicken. Diese Entsprechung ist verträglich mit Einschränkungen von h (Vorschalten von monotonen Injektionen), ist also eine Transformation.

Es handelt sich bei den Kategorien $\Delta^+ \downarrow_r \Delta^{+n}$ um “gerichtete Kategorien”, bei denen es keine Kreise von Pfeilen außer den Identitäten gibt, denn die nicht-trivialen Morphismen sind das Vorschalten von echten Injektionen und senken somit den Grad eines Simplex. \square

Proposition 5.8. *Die Kategorie der kleinen Kategorien Cat ist kovollständig.*

Beweis. Koprodukte in Cat sind die Koprodukte der zugrundeliegenden Köcher, d. h. die disjunkte Vereinigung über die Objektmengen und aus den Ausgangskategorien übernommene Morphismenmengen.

Die Koegalisaoren in Cat sind schwieriger, vergleiche [BBP99]. Wir geben die Konstruktion kurz an. Betrachte kleine Kategorien mit Funktoren $A \rightrightarrows_G^F B$. Die dem Koegalisor $B \rightarrow C$ zugrundeliegende mengentheoretische Abbildung ist der Koegalisor der den Funktoren F und G zugrundeliegenden mengentheoretischen Abbildungen. Durch diese Identifikationen in C werden Morphismen neu komponierbar, deren Kompositionen den durch die Identifikationen verschmolzenen Morphismenmengen hinzugefügt werden. Weiter müssen wie im folgenden Diagramm Morphismen Ff und Gf identifiziert werden, was auf die Kompositionen fortgesetzt wird.

$$\begin{array}{ccccc} a & & Fa & \sim & Ga \\ \downarrow f & \mapsto & \downarrow Ff & \sim & \downarrow Gf \\ b & & Fb & \sim & Gb \end{array}$$

Die Identifikationen $Fa \sim Ga$ für $a \in A$ und $Ff \sim Gf$ für $f \in A(a, b)$ sind notwendig für einen Koegalisor $B \rightarrow C$, damit $A \rightrightarrows_G^F B \rightarrow C$ übereinstimmen. Die weiteren Schritte machen “minimalinvasiv” B mit diesen Identifikationen wieder zu einer Kategorie. \square

Bemerkung 5.9. Der Ansatz, Limites und Kolimites in Cat mittels 1.39 über die Einbettung $\text{Cat} \subset \text{Quiv}$ in die Kategorie der Köcher zu konstruieren, funktioniert *nicht*. Jene ist als Prägarbenkategorie tatsächlich vollständig und kovollständig und die Inklusion hat mit der freien Pfadkategorie über einem Köcher tatsächlich einen Linksadjungierten; allerdings handelt es sich nicht um eine volle (dann also reflektive) Unterkategorie, weshalb die Limites und Kolimites von denen in Quiv bzw. ihren freien Pfadkategorien abweichen.

Definition 5.10. Die *kategorielle Realisierung* einer simplizialen Menge $X \in \text{sEns}$ ist definiert als das Tensorprodukt von Funktoren $X \otimes R \in \text{Cat}$ für R die kosimpliziale Standard-Kategorie und die natürliche Ens -tensorierte Struktur auf Cat (3.22).

Beispiel 5.11. Betrachte die Standarddarstellung von S^1 als simpliziale Menge X mit einem nichtdegenerierten 1-Simplex und einem nichtdegenerierten 0-Simplex aus 2.14. Wie angekündigt ist die kategorielle Realisierung von X das Diagramm

$$\bullet \rightrightarrows \bullet$$

mit zwei Objekten und zwei parallelen Pfeilen dazwischen, sowie nicht eingezeichneten Identitäten.

Hieraus lässt sich in einem zweiten Schritt die andere diskutierte kategorielle Realisierung als halbgeordnete Menge konstruieren. Wir erhalten die kosimpliziale halbgeordnete Menge $P : \Delta \rightarrow \text{poset}$ aus $R : \Delta \rightarrow \text{Cat}$ durch Anwenden eines Reflektors $\text{Cat} \rightarrow \text{poset}$.

Proposition 5.12. Die Kategorie poset der halbgeordneten Mengen ist vollständig.

Beweis. Die halbgeordneten Mengen sind eine volle Unterkategorie $\text{poset} \subset \text{Cat}$. Wir können daher 1.39 verwenden, mit dem Reflektor $\text{Cat} \rightarrow \text{poset}$, der im folgenden Lemma konstruiert wird. \square

Definition 5.13. Eine Kategorie heißt *dünn*, falls jede Morphismenmenge höchstens einelementig ist. Eine Kategorie heißt *Skelettkategorie*, falls in ihr jeder Isomorphismus eine Identität ist.

Lemma 5.14. Die vollen Unterkategorien $\text{thinCat}, \text{skelCat} \subset \text{Cat}$ der dünnen bzw. Skelettkategorien sind reflektiv. Der Reflektor $\text{Cat} \rightarrow \text{skelCat}$ macht aus dünnen Kategorien dünne Kategorien und liefert durch Komposition mit dem Reflektor $\text{Cat} \rightarrow \text{thinCat}$ einen Reflektor $\text{pos} : \text{Cat} \rightarrow \text{poset}$.

Beweis. Der Linksadjungierte zu $\text{thinCat} \hookrightarrow \text{Cat}$ ist gegeben durch die Identifikation aller nichtleeren Morphismenmengen zu einelementigen Morphismenmengen. Der Linksadjungierte zu $\text{skelCat} \hookrightarrow \text{Cat}$ ist die zu einer kleinen Kategorie mit dem Auswahlaxiom konstruierte Unterkategorie, die Isomorphieklassen von Objekten durch ein Objekt aus diesen ersetzt. Klar ist, dass Funktoren $F : C \rightarrow D$ in eine dünne Kategorie D Abbildungen auf Objekten sind mit der Zusatzeigenschaft, dass es einen Morphismus $Ff : Fx \rightarrow Fy$ in D geben muss, wann immer es einen Morphismus $f : x \rightarrow y$ in C gibt. Das ist unerheblich davon, wie viele Morphismen $x \rightarrow y$ es in C gibt und zeigt die erste Adjunktion. Ein Funktor in eine Skelettkategorie schickt isomorphe Objekte auf dasselbe Objekt, wird also schon durch das Bild eines Objekts jeder Isomorphieklasse eindeutig festgelegt. Dies zeigt die zweite Adjunktion.

Der Reflektor $\text{Cat} \rightarrow \text{skelCat}$ ordnet einer Kategorie eine Unterkategorie zu und erhält deshalb Düntheit. Halbgeordnete Mengen sind nach Definition dünne Skelettkategorien. \square

Bezeichne nun $P = \text{pos} R : \Delta \rightarrow \text{poset}$ die kosimpliziale halbgeordnete Menge zur kosimplizialen gerichteten Kategorie R . Die halbgeordneten Mengen

$$P[n] = \text{pos} \Delta^+ \downarrow_r \Delta^{+n}$$

sind dann die opponierten Standard- n -Simplizialkomplexe.

5.2 Realisierung als halbgeordnete Menge

Der kombinatorische topologische Raum $\blacktriangle X$ einer simplizialen Menge eignet sich *nicht* für die Übertragung der Aussagen zu schwach konstruierbaren Garben auf Simplizialkomplexen auf die Situation simplizialer Mengen, denn diese geometrische Realisierung sieht nicht mehrfache Verklebungsabbildungen. Dies möchten wir präzise machen.

Proposition 5.15. *Sei $X \in \mathbf{sEns}$ eine simpliziale Menge. Dann gibt es einen Homöomorphismus $\blacktriangle X \xrightarrow{\sim} \text{Ord}((X \otimes P)^{\text{op}})$.*

Beweis. Der Funktor $\text{Ord} : \text{poset} \rightarrow \text{Top}$ ist nach dem nachgestellten Lemma kostetig. Daher reicht es mit 3.10 (und der Kostetigkeit des Opponierens), einen Isomorphismus kosimplizialer topologischer Räume $\blacktriangle \rightarrow \text{Ord } P^{\text{op}}$ zu finden. Beide bestehen aus einem Punkt pro nichtdegeneriertem Simplex (2.18) von Δ^n und haben als offene Mengen nach oben abgeschlossene Mengen. Randabbildungen d_i sind Inklusionen in die Ränder, Degenerationen Kollapse von Kanten: nach Definition schickt $Ps_i : P[n] \rightarrow P[n-1]$ einen nichtdegenerierten Simplex $f : [m] \rightarrow [n]$ monoton und injektiv auf $N(s_i \circ f)$, den nichtdegenerierten Simplex, der zum Kollaps von i und $i+1$ in f gehört. \square

Lemma 5.16. *Der Funktor $\text{Ord} : \text{poset} \rightarrow \text{Top}$, der eine halbgeordneten Menge mit der Ordnungstopologie versieht, ist kostetig.*

Beweis. Klar ist, dass Ord mit Koprodukten vertauscht. Sei nun $A \rightrightarrows_G^F B \rightarrow C$ ein Koegalisor in den halbgeordneten Mengen. Dann ist nach 5.8 und 5.14 die zugrundeliegende mengentheoretische Abbildung von $q : B \rightarrow C$ der mengentheoretische Koegalisor: nur der Reflektor $\text{Cat} \rightarrow \text{skelCat}$ könnte die zugrundeliegende Menge ändern, wird aber bereits auf eine Skelettkategorie angewandt, denn ein Kategorienkolimes über halbgeordnete Mengen enthält keine Morphismen in entgegengesetzte Richtungen. Wir müssen noch zeigen, dass $\text{Ord}(q) : \text{Ord } B \rightarrow \text{Ord } C$ final ist. Ist $U \subset C$ eine Menge mit offenem Urbild $q^{-1}(C)$, so ist ein Morphismus $x \rightarrow y$ in C mit $x \in U$ ein Pfad $x = v_0 \rightarrow v_1 \sim w_1 \rightarrow w_2 \sim v_2 \rightarrow \dots \rightarrow y$ bestehend aus Morphismen in B , die sich nach den Identifikationen durch q verknüpfen lassen. Induktiv liegen nun nach der Abgeschlossenheit nach oben von $q^{-1}(U)$ alle v_i, w_i in $q^{-1}(U)$ und somit auch y . Es folgt die Offenheit von U . \square

Mit 1.12 und 5.15 erhalten wir sofort die folgende kombinatorische Charakterisierung von Garben auf der ordnungstopologischen Realisierung:

Proposition 5.17. *Sei $X \in \mathbf{sEns}$ eine simpliziale Menge. Dann gibt es eine Äquivalenz von Kategorien $\text{Ens}/_{\blacktriangle X} \xrightarrow{\sim} [(X \otimes P)^{\text{op}}, \text{Ens}]$.*

5.3 Realisierung als gerichtete Kategorie

Stattdessen lässt sich die Äquivalenz von simplizial konstanten Garben auf einer simplizialen Menge X zu Diagrammen von Mengen für die kategorielle Realisierung $X \otimes R$ durch gerichtete Kategorien formulieren.

Als zweite Zutat für diese Aussage benötigen wir eine Beschreibung von Garben auf Kolimites. Die Argumentation ist recht einfach, sofern die richtigen Begriffe von Limites und Kolimites von großen Kategorien zur Verfügung stehen. Problematisch dabei ist, dass wir selten tatsächliche Gleichheit von Funktoren und Isomorphismen von Kategorien haben (und benötigen), sondern Isotransformationen von Funktoren und Äquivalenzen von Kategorien. Ein Limes-Begriff für Kategorien muss insofern die *2-kategoriale Struktur* der “Kategorie” der Kategorien berücksichtigen. Wir erhalten die richtigen Formulierungen wie in [nLa18] erklärt anhand des Übersetzungsschemas:

1-Kategorie	\leftrightarrow	2-Kategorie
Gleichheit von Morphismen	\leftrightarrow	2-Isomorphismus von Morphismen (Isotransformation)
kommutieren	\leftrightarrow	kommutieren bis auf 2-Isomorphismus
Isomorphismus	\leftrightarrow	Quasi-Isomorphismus (Äquivalenz von Kategorien)

Ein 2-Limes über ein über I indiziertes System von Kategorien C_i ist also etwa eine Kategorie C , für die es für jede Testkategorie T eine Äquivalenz von Kategorien gibt zwischen der Funktorkategorie $[T, C]$ und der Kategorie bestehend aus (großen) Tupeln von Funktoren $F_i \in [T, C_i]$ für alle $i \in I$, für die es Isotransformationen $Cf \circ F_i \xrightarrow{\sim} F_j$ für alle $f : i \rightarrow j$ in I gibt. Mit dieser Definition folgt automatisch die Exaktheit des Kategorien-Homs:

$$\begin{aligned} [C, \lim_i D_i] &\xrightarrow{\sim} \lim_i [C, D_i], \\ [\operatorname{col}_i C_i, D] &\xrightarrow{\sim} \lim_i [C_i, D]. \end{aligned}$$

2-Limites von Kategorien sind dann eindeutig bis auf Isomorphismus im 2-Kategorie-Sinne, d. h. bis auf Äquivalenz von Kategorien.

Nun können wir die Beschreibung von Garben auf Kolimites formulieren.

Satz 5.18. *Sei $X = \operatorname{col}_i X_i$ ein Kolimes topologischer Räume. Dann ist der Limes von Funktoren*

$$\kappa = \lim_i \operatorname{in}_i^* : \operatorname{Ens}_X \rightarrow \lim_i \operatorname{in}_i^* \operatorname{Ens}_X$$

eine Äquivalenz von Kategorien. Dabei ist $\operatorname{in}_i^ \operatorname{Ens}_X$ das wesentliche Bild des Rückzugs entlang den Abbildungen des Kolimes $\operatorname{in}_i : X_i \rightarrow X$ und die Systemmorphismen sind das Nachschalten von $f^* : \operatorname{Ens}_{X_j} \rightarrow \operatorname{Ens}_{X_i}$ für $f : i \rightarrow j$ in I .*

Beweis. Ist $X = \bigsqcup_i X_i$ ein Koproduct (d. h. I diskret), so sind die in_i^* Restriktionen, das Bild $\operatorname{in}_i^* \operatorname{Ens}_X \subset \operatorname{Ens}_{X_i}$ ist dicht und die Äquivalenz ist die bekannte Aussage $\operatorname{Ens}_X \xrightarrow{\sim} \prod_i \operatorname{Ens}_{X_i}$.

Im Fall eines Koegalisors $Z \xrightarrow[f]{g} Y \xrightarrow{q} X$ besteht eine Garbe G in der Limeskategorie aus einer Garbe G auf Y , einem Isomorphismus $G \xrightarrow{\sim} q^*F$ für F eine Garbe auf X und einem Isomorphismus $\tau : f^*G \xrightarrow{\sim} g^*G$ von Garben auf Z . Wir behaupten, dass ein Quasiinverser zu κ durch eine Abwandlung q_* des direkten Bilds gegeben ist mit

$$(q_*G)(U) := \{s \in G(q^{-1}(U)) \mid \tau_x(s_{f(x)}) = s_{g(x)} \text{ für alle } x \in (q \circ f)^{-1}(U)\}$$

und der Abbildung τ_x definiert durch das kommutative Quadrat

$$\begin{array}{ccc} (f^*G)_x & \xrightarrow{\tau} & (g^*G)_x \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ G_{f(x)} & \xrightarrow{\tau_x} & G_{g(x)}. \end{array}$$

Der Isomorphismus $q_* \kappa F \xrightarrow{\sim} F$ folgt nun mit der Finalität und Surjektivität von q ähnlich wie im Beweis der Aussage zum finalen Rückzug mit zusammenhängenden Fasern (1.14). Dort benötigten wir für $x \in X$ die Aussage, dass die Verknüpfung $U \rightarrow \kappa F \rightarrow F$ eines Schnitts über U mit der Abbildung des Rückzugs $\kappa F \rightarrow F$ über X (mengentheoretisch) faktorisiert, also konstant ist in der Einschränkung auf die Faser $q^{-1}(x) \rightarrow F_x$. Ist nun $f(x) \sim g(x)$ eine Identifikation in der Faser, so stellt unsere Konstruktion sicher, dass ein q_* -Schnitt der Limesgarbe κF gerade die von $F_{q(f(x))} = F_{q(g(x))}$ herrührenden Identifikationen berücksichtigen muss und wieder über X faktorisiert.

Der umgekehrte Isomorphismus $\kappa q_* G \xrightarrow{\sim} G$ folgt aus diesem, da die Limeskategorie gerade das wesentliche Bild von κ ist. \square

Bemerkung 5.19. Entscheidend in diesem Beweis ist, dass die Isomorphismen τ zu den Daten von Limesgarben dazugehören. Im Fall von $X = S^1$ ist dies die Verklebung, die bestimmt, wie aus einer Garbe auf dem Einheitsintervall eine Garbe auf der Kreislinie gemacht wird.

Diese Äquivalenz schränkt ein zu einer Äquivalenz der vollen Unterkategorien simplizial konstanter Garben.

Proposition 5.20. *Für eine simpliziale Menge $X \in \mathbf{sEns}$ gilt:*

$$\mathbf{Ens}_{/|X|}^{\text{sk}} \xrightarrow{\sim} \lim_{\Delta \downarrow X} \mathbf{Ens}_{/|\Delta^n|}^{\text{sk}}.$$

Beweis. Bei den simplizial konstanten Garben auf den Simplizes $\Delta^n \rightarrow X$ handelt es sich um die wesentlichen Bilder des Rückzugs entlang der Einbettungen $|\Delta^n| \rightarrow |X|$. Das folgt daraus, dass unter diesen Abbildungen das Urbild einer Zelle eine Vereinigung von Zellen ist. \square

Theorem 5.21. *Sei $X \in \mathbf{sEns}$ eine simpliziale Menge. Dann gibt es eine Äquivalenz von Kategorien zwischen Prägarben auf der kategoriellen Realisierung von X und simplizial konstanten Garben auf $|X|$:*

$$[(X \otimes R)^{\text{op}}, \mathbf{Ens}] \xrightarrow{\sim} \mathbf{Ens}_{/|X|}^{\text{sk}}.$$

Beweis. Wir nutzen, dass nach 5.20 beide Seiten mit dem Kolimes $|X| = \text{col}_{\Delta \downarrow X} |\Delta^n|$ vertauschen:

$$\begin{aligned}
[(X \otimes R)^{\text{op}}, \text{Ens}] &\xrightarrow{\approx} [\text{col}_{\Delta \downarrow X} (\Delta^n \otimes R)^{\text{op}}, \text{Ens}] \\
&\xrightarrow{\approx} \lim_{\Delta \downarrow X} [(\Delta^n \otimes R)^{\text{op}}, \text{Ens}] \\
&\xrightarrow{\approx} \lim_{\Delta \downarrow X} [(\Delta^n \otimes P)^{\text{op}}, \text{Ens}] \\
&\xrightarrow{\approx} \lim_{\Delta \downarrow X} \text{Ens} / \text{Ord}(\Delta^n) \\
&\xrightarrow{\approx} \lim_{\Delta \downarrow X} \text{Ens}^{\text{sk}} / |\Delta^n| \\
&\xrightarrow{\approx} \text{Ens}^{\text{sk}} / |X|.
\end{aligned}$$

Dabei verwendet der zweite Schritt die Stetigkeit des Kategorien-Homs, der dritte den Umstand, dass es in Δ^n keine Mehrfachkanten gibt, der vierte 5.17 und der fünfte 1.19.

Beachte, dass der auftretende Kolimes zunächst ein (starker) Kolimes in der 1-Kategorie der kleinen Kategorien ist und mit dem (schwachen) 2-Kolimes für den zweiten Schritt übereinstimmt, weil es sich bei den beteiligten Kategorien um Skelettkategorien handelt. \square

Bemerkung 5.22. Folgt man den Äquivalenzen aus dem Satz, so entsprechen offene Mengen in $|X|$ nach oben abgeschlossenen vollen Untersystemen $U \subset X \otimes R$ und Schnitte über offene Mengen Elementen des Limes $\lim_{\sigma \in U} F(\sigma)$ für F eine Prägarbe auf der kategoriellen Realisierung von X . Schnitte und Vereinigungen offener Mengen entsprechen den Schnitten und Vereinigungen der zugehörigen nach oben abgeschlossenen Untersysteme und die Garbenbedingung ist in dieser Formulierung der Umstand, dass (auf Schnitten) kompatible Tupel kompatibler Tupel wieder kompatible Tupel auf der Vereinigung bilden.

Bemerkung 5.23. Ein erster Ansatz für die Beschreibung von Garben auf Kolimites führt über ihre Beschreibung als gewisse volle Unterkategorie der Funktorkategorie $[\text{Off}_X^{\text{op}}, \text{Ens}]$. Eine halbgeordnete Menge mit beliebigen Suprema (Vereinigungen), endlichen Infima (Schnitten) und einem Distributivgesetz heißt auch *Locale*. Diese bilden mit Locale-Morphismen, opponierten Morphismen halbgeordneter Mengen, die Suprema und endliche Infima erhalten, eine Kategorie *Loc*. Man könnte versuchen, den Funktor $\text{Off} : \text{Top} \rightarrow \text{Loc}$ in Beziehung zu Kolimites zu setzen. Überraschend ist dabei, dass für Koprodukte die zugehörige Locale erzeugt ist vom Koprodukt der Locales, für Koegalisateur die zugehörige Locale jedoch der *Egalisator* der zugehörigen Locales ist.

Es schließt sich an diese Beschreibung simplizial konstanter Garben auf simplizialen Mengen eine Reihe an Fragen an, die hier nurmehr angerissen werden können.

1. Gibt es einen Rechtsadjungierten p_* zur Verknüpfung

$$p^* : [(X \otimes R)^{\text{op}}, \text{Ens}] \xrightarrow{\approx} \text{Ens}^{\text{sk}} / |X| \hookrightarrow \text{Ens} / |X|$$

der Äquivalenz mit der Einbettung?

2. Kann mit p_* in Analogie zu 1.27

$$\mathrm{Der}([(X \otimes R)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab}]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}^{\mathrm{sk}}(\mathrm{Ab}_{/|X|})$$

formuliert werden für $\mathrm{Der}^{\mathrm{sk}}(\mathrm{Ab}_{/|X|})$ die derivierten abelschen Garben auf $|X|$ mit simplizial konstanten Kohomologiegarnen?

3. Wie lassen sich die gerichteten Kategorien charakterisieren, die als kategorielle Realisierung simplizialer Mengen auftreten? Beispielsweise ist $(\bullet \rightarrow \bullet)$ keine solche gerichtete Kategorie.
4. Lassen sich die Ergebnisse mittels des Nerven einer Kategorie auf beliebige Diagrammkategorien verallgemeinern?

Wir können die Antworten nur kurz skizzieren:

1. Betrachte die stetigen Abbildungen

$$q : \bigsqcup_n NX_n \times |\Delta^n| \rightarrow |X| \quad \text{und} \\ r : \bigsqcup_n NX_n \times |\Delta^n| \rightarrow \bigsqcup_n NX_n \times \blacktriangle^n.$$

Für $F \in \mathrm{Ens}_{/|X|}$ konstruieren wir p_*F aus r_*q^*F . Ein nichtdegenerierter Simplex σ von X entspricht den Punkten

$$r(q^{-1}(|\sigma|)) \subset \bigsqcup_n NX_n \times \blacktriangle^n.$$

Nun setzen wir

$$p_*(\sigma) := \bigcap_{\tau \in r(q^{-1}(|\sigma|))} (r_*q^*F)_\tau,$$

wobei der Schnitt wegen $r(q^{-1}(|\sigma|)) = r(q^{-1}(x))$ für $x \in |\sigma|$ mittels der Koeinheit der Adjunktion (r^*, r_*) in F_x gebildet werden kann, denn es gilt

$$(r_*q^*F)_{r(y)} \xrightarrow{\sim} (r^*r_*q^*F)_y \rightarrow (q^*F)_y \xrightarrow{\sim} F_{q(y)} = F_x$$

für $r(y) \in r(q^{-1}(x))$. Die Generisierungsabbildungen $p_*F(\sigma) \rightarrow p_*F(\tau)$ sind dann die Einschränkungen der Abbildungen in r_*q^*F aus 1.10.

Anschaulich ordnet der Funktor p_* etwa einer Garbe F auf S^1 wie in 5.11 die Prägarbe auf $(\bullet \rightrightarrows \bullet)$ zu, die dem zur Kreislinie gehörigen Punkt die Schnitte von F über die Kreislinie zuordnet und dem Verklebungspunkt diejenigen Elemente des Halms von F am Verklebungspunkt, die sich jeweils in beide Richtungen einseitig zu einem Schnitt über die Kreislinie fortsetzen lassen, dabei aber nicht übereinstimmen müssen. Wir sagen in einem solchen Fall, dass ein Schnitt entlang eines Morphismus in $X \otimes R$ *einseitig generisiert*.

Anders gesprochen ist die Reihenfolge in 5.17 die falsche: erst müssen die Generisierungsabbildungen bestimmt werden und erst danach darf verklebt werden.

Die Adjunktion folgt im Wesentlichen daraus, dass ein Morphismus $F \rightarrow G$ von Garben über $|X|$ mit simplizial konstantem F durch die Bilder der Schnitte $F(|\sigma|)$ für nichtdegeneriertes σ eindeutig bestimmt ist. Diese müssen, wenn ihr Urbild entlang $\tau \rightarrow \sigma$ einseitig generisiert, ebenfalls entlang $\tau \rightarrow \sigma$ einseitig generisieren, was zeigt, dass $F \rightarrow G$ bereits durch den simplizial konstanten Teil p_*G von G eindeutig festgelegt ist. Die Einheit der Adjunktion $\text{Id} \xrightarrow{\sim} p_*p^*$ ist nach Konstruktion auf allen Objekten ein Isomorphismus.

2. Die Aussage gilt und folgt aus dem vorangegangenen Punkt und der Aussage zu allgemeiner schwacher Konstruierbarkeit 1.33.
3. Einem Objekt σ einer gerichteten Kategorie kann eine Kardinalzahl zugeordnet werden, die angibt, wie viele nichttriviale Morphismen von σ auslaufen. Sind es $n + 1$ Stück, nennen wir n die Dimension von σ . (Gibt es keine, nennen wir σ nulldimensional.) Eine gerichtete Kategorie C tritt genau dann als kategorielle Realisierung einer simplizialen Menge auf, wenn alle Objekte endliche Dimension haben und die Dimensionen der Objekte eine Halbordnung auf C definieren, die mit der Halbordnung durch Identifikation paralleler Morphismen in C übereinstimmt.

Alle gerichteten Kategorien lassen sich jedoch als Kolimes von zu simplizialen Mengen gehörigen gerichteten Kategorien auffassen. Anders ausgedrückt sind die gerichteten Kategorien die koreflektive Hülle in Cat der zu simplizialen Mengen gehörigen gerichteten Kategorien und die Aussage von 5.21 überträgt sich durch Kostetigkeit. Dies ist ein zur Konstruktion koreflektiver kartesisch abgeschlossener Kategorien aus Unterkategorien sich gut verhaltender topologischer Räume analoges Vorgehen. Die geometrische Realisierung einer gerichteten Kategorie $C = \text{col}_i (C_i \otimes R)$ ist dabei der Kolimes $|C| = \text{col}_i |X_i|$ für C_i zu simplizialen Mengen X_i gehörige gerichtete Kategorien. Beispielsweise gehört der Sierpinski-Raum zum Quotienten von S^1 nach der Identifikation der Bilder zweier gegenläufiger Wege $|\Delta^1| \rightarrow S^1$.

4. Ist I eine kleine Kategorie, so ist der Nerv-Funktor gegeben durch

$$\begin{aligned} N : \text{Cat} &\rightarrow \text{sEns}, \\ I &\mapsto ([n] \mapsto [[n], I]), \end{aligned}$$

wobei ein endliches nichtleeres Ordinal $[n]$ mittels 1.2 als Kategorie aufgefasst wird. Eine Prägarbe $F \in [I^{\text{op}}, C]$ für C eine Kategorie definiert trivial eine C -wertige Prägarbe auf $N(I) \otimes R$ durch

$$\begin{array}{ccc} (F_0 \xrightarrow{f_1} F_1 \rightarrow \cdots \rightarrow F_n) & \longmapsto & F_0 \\ \downarrow d_0 & & \downarrow f_1 \\ (F_1 \rightarrow \cdots \rightarrow F_n) & \longmapsto & F_1 \end{array}$$

für die 0-te Randabbildung, sowie Identitäten

$$\begin{array}{ccc}
 (F_0 \rightarrow F_1 \rightarrow \cdots \rightarrow F_n) & \longmapsto & F_0 \\
 \downarrow d_i & & \downarrow \text{id}_{F_0} \\
 (F_0 \rightarrow \cdots \rightarrow F_{i-1} \xrightarrow{f_{i+1} \circ f_i} F_{i+1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_n) & \longmapsto & F_0
 \end{array}$$

für die höheren Randabbildungen $i > 0$. Dies liefert einen Funktor

$$[I^{\text{op}}, \text{Ens}] \rightarrow [(N(I) \otimes R)^{\text{op}}, \text{Ens}] \xrightarrow{\cong} \text{Ens}_{/|N(I)|}^{\text{sk}},$$

unter welchem die Prägarben auf I den *geordnet simplizial konstanten* Garben auf $|N(I)|$ entsprechen: den simplizial konstanten Garben auf $|N(I)|$, für die höchstens die erste einseitige Generisierungsabbildung von der Identität abweicht. Auf einem Standard- n -Simplex bedeutet das etwa, dass die Garbe jeweils auf den Mengen

$$D^i = \{(x_0, \dots, x_n) \in |\Delta^n| \mid x_j = 0 \text{ für } j < i, x_i > 0\} \quad (0 \leq i \leq n)$$

konstant ist.

Literaturverzeichnis

- [BBP99] Marek A. Bednarczyk, Andrzej M. Borzyszkowski, and Wiesław Pawłowski. Generalized congruences—epimorphisms in cat. *Theory Appl. Categ.*, 5:No. 11, 266–280, 1999.
- [Bor94] Francis Borceux. *Handbook of categorical algebra. 2*, volume 51 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. Categories and structures.
- [Eng77] Ryszard Engelking. *General topology*. PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1977. Translated from the Polish by the author, Monografie Matematyczne, Tom 60. [Mathematical Monographs, Vol. 60].
- [GJ09] Paul G. Goerss and John F. Jardine. *Simplicial homotopy theory*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. Reprint of the 1999 edition [MR1711612].
- [GM96] Sergei I. Gelfand and Yuri I. Manin. *Methods of homological algebra*. Springer-Verlag, Berlin, 1996. Translated from the 1988 Russian original.
- [GZ67] P. Gabriel and M. Zisman. *Calculus of fractions and homotopy theory*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 35. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1967.
- [HS79] Horst Herrlich and George E. Strecker. *Category theory*, volume 1 of *Sigma Series in Pure Mathematics*. Heldermann Verlag, Berlin, second edition, 1979. An introduction.
- [KS94] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Sheaves on manifolds*, volume 292 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1994. With a chapter in French by Christian Houzel, Corrected reprint of the 1990 original.
- [Lor15] F. Loregian. This is the (co)end, my only (co)friend. *ArXiv e-prints*, January 2015.
- [ML98] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.

- [MLM94] Saunders Mac Lane and Ieke Moerdijk. *Sheaves in geometry and logic*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 1994. A first introduction to topos theory, Corrected reprint of the 1992 edition.
- [Moe95] I. Moerdijk. *Classifying spaces and classifying topoi*, volume 1616 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [nLa18] nLab authors. 2-limit. <http://ncatlab.org/nlab/show/2-limit>, October 2018. Revision 51.
- [Soe18a] Wolfgang Soergel. Analysis 3. Skriptum, October 2018.
- [Soe18b] Wolfgang Soergel. Derivierte Kategorien und Funktoren. Skriptum, July 2018.
- [Soe18c] Wolfgang Soergel. Garben auf Simplicialkomplexen. Unveröffentlichte Aufzeichnungen, February 2018.
- [Soe18d] Wolfgang Soergel. Garbenkohomologie. Skriptum, July 2018.
- [Soe18e] Wolfgang Soergel. Topologie und kompakte Gruppen. Skriptum, October 2018.
- [Ste67] N. E. Steenrod. A convenient category of topological spaces. *Michigan Math. J.*, 14:133–152, 1967.
- [Vog71] Rainer M. Vogt. Convenient categories of topological spaces for homotopy theory. *Arch. Math. (Basel)*, 22:545–555, 1971.

Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, noch nicht zu anderen Prüfungszwecken vorgelegt und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Wörtlich und inhaltlich entnommene Stellen sind als solche gekennzeichnet.

Freiburg, den 8. Oktober 2018

(Fabian Glöckle)