Einleitung

Diagrammkategorien von Garben auf topologischen Räumen treten immer dann natürlich auf, wenn nicht nur das Verhalten einer einzelnen Garbe unter einer bestimmten Operation von Interesse ist, sondern auch das "Beziehungsgeflecht" der beteiligten Garben untereinander, etwa bei der Betrachtung kartesischer Quadrate von Garben auf einem topologischen Raum. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, für einfache Diagramme eine geometrische Interpretation von Diagrammkategorien von Garben von Mengen auf einem topologischen Raum herzustellen. Dies wird uns für zwei Klassen von Diagrammen gelingen: halbgeordnete Mengen vom Typ eines Simplizialkomplexes sowie gerichtete Kategorien vom Typ einer simplizialen Menge.

In **??** wird eine Interpretation von Diagrammen von Mengen von der Form eines Simplizialkomplexes als Garben auf dem zugehörigen topologischen Simplizialkomplex mit der Ordnungstopologie vorgestellt. Uns interessieren auch die relativen Aussagen, inwiefern Diagramme von Garben auf einem topologischen Raum X von der Form eines Simplizialkomplexes eine Garbe auf dem topologischen Produkt von X mit dem ordungstopologischen Simplizialkomplex beschreiben. Dies wird in **??** explizit vorgeführt. Der folgende Abschnitt liefert eine geometrischere Charakterisierung dieser Diagramme als die simplizial konstanten Garben auf der geometrischen Realisierung des Simplizialkomplexes und die zugehörige Aussage für die derivierten Kategorien, zunächst im nicht relativen Fall. Diesen beantwortet **??**, indem eine allgemeine Technik zur Relativierung solcher Aussagen vorgestellt wird.

Um diese Aussagen auf ihre Varianten für simpliziale Mengen und die zugehörigen Diagramme zu übertragen, werden in **??** simpliziale Mengen und ihre geometrische Realisierung eingeführt. Dabei werden die grundlegenden Eigenschaften der geometrischen Realisierung, ihre Formulierung mittels nichtdegenerierter Simplizes und ihre Interpretation als iteratives Verkleben von Zellen, ausführlich dargestellt. Für die Formulierung der Exaktheitseigenschaften der Realisierung wird zudem gezeigt, dass es sich um kompakt erzeugte Hausdorffräume handelt.

Die geometrische Realisierung simplizialer Mengen lässt sich darstellen als Koende, eine universelle Konstruktion der Kategorientheorie. Diese werden in **??** eingeführt und als eigenständige Objekte untersucht. Die Rechenregeln für Koenden, der Koendenkalkül aus **??** wird sich im folgenden Kapitel als wichtiges Hilfsmittel für "abstract nonsense"-Beweise erweisen.

In **??** wird der Faden der Diagrammkategorien wiederaufgenommen. Gesucht wird zunächst ein Adjungierter zur geometrischen Realisierung simplizialer Garben aus **??**. Dies gelingt über die allgemeine Dualität zwischen Nerv und Realisierung, wenn die beteiligte Garbenkategorie kartesisch abgeschlossen ist. Für die Kategorie der Garben auf einem topologischen Raum X wird dies in **??** gezeigt, für die Kategorie von Garben über variablen Basisräumen wird in **??** ein einschränkender Grund formuliert, wieso dies vermutlich nicht gilt. Für die korrekte Übertragung der Aussagen über Diagrammkategorien von Simplizialkomplexen ist die angesprochene Adjunktion allerdings nicht relevant. Vielmehr muss der Begriff des einer simplizialen Menge zugeordneten Diagramms geklärt werden, dies geschieht in ??. Die Verallgemeinerung der Aussagen über Diagrammkategorien kann dann für den Fall gerichteter Kategorien vom Typ einer simplizialen Menge mittels 2-Limites von Kategorien bewiesen werden.

In der Notation folgt die Arbeit im Wesentlichen den Notationen aus [?]. So steht der französischen Tradition folgend Ens für die Kategorie der Mengen und $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ für die Kategorie der Garben von Mengen auf dem topologischen Raum X.

Die Darstellung der Aussagen zu schwach konstruierbaren Garben auf Simplizialkomplexen folgt [?] und [?], die zu simplizialen Mengen [?] und [?]. Das Kapitel zu Koenden ist stark an [?] angelehnt. Nicht mit Verweisen auf Literatur markierte Aussagen sind eigenständig erarbeitet. Dies trifft insbesondere auf weite Teile ??, ?? und ?? zu. Beim Finden von Aussagen und Gegenbeispielen und dem generellen Vertrautwerden mit dem Gebiet bin ich dennoch der Autorschaft der Online-Enzyklopädie *Nlab* und des Frage-und-Antwort-Forums *Mathoverflow* zu Dank verpflichtet. Danken möchte ich auch meinem Betreuer Prof. Wolfgang Soergel für die Stellung des interessanten Themas und die Freiheiten bei der Bearbeitung und meinen Eltern für die persönliche und finanzielle Unterstützung meines Studiums. Ich danke meinem Bruder Jonathan Glöckle für die Formulierung von ?? und Prof. Huber-Klawitter für die Beantwortung meiner Frage zu ??.