1 Simplizialkomplexe von Garben

Definition 1. *Ein Simplizialkomplex ist eine Menge E, genannt die Ecken des Simplizialkomplexes, samt einem System $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(E)$ von nichtleeren endlichen Teilmengen von E, genannt die Simplizes des Simplizialkomplexes, derart, dass gilt:*

- *Jede einelementige Menge ist ein Simplex (d.h. $\{e\} \in \mathcal{K}$ für alle $e \in E$) und*
- *ist $L \in \mathcal{K}$ ein Simplex, $K \subset L$ nichtleere Teilmenge, so $K \in \mathcal{K}$.*

Ein Simplizialkomplex ist somit insbesondere eine halbgeordnete Menge mit der Mengeninklusion als Halbordnung.

Wir erinnern an die Interpretation von halbgeordneten Mengen als Kategorien. Gegeben eine halbgeordnete Menge X definiere die Kategorie C_X bestehend aus Objekten $Ob(C_X) = X$ mit einem eindeutigen Morphismus $a \leftarrow b$ genau dann, wenn $a \leq b$ bezüglich der Halbordnung. Wir erhalten:

Lemma 2. *Obige Konstruktion liefert eine volltreue Einbettung*

$$\begin{aligned} \text{poset} &\to \text{Cat}, \\ X &\mapsto C_X. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet Cat die Kategorie der kleinen Kategorien, d.h. der Kategorien C, für die $Ob(C)$ eine Menge ist und poset die Kategorie der halbgeordneten Mengen mit monotonen Abbildungen als Morphismen.

Beweis. Offenbar ist C_X tatsächlich eine kleine Kategorie. Funktoren $C_X \to C_Y$ sind Abbildungen f auf Objekten, mit der Eigenschaft, dass es einen Morphismus $f(a) \leftarrow f(b)$ in C_Y gibt, wann immer $a \leftarrow b$ in C_X. Das ist aber gerade die Eigenschaft einer monotonen Abbildung. □

Nun können wir Simplizialkomplexe von Garben definieren.

Definition 3. *Sei C eine Kategorie, $\mathcal{K}$ ein Simplizialkomplex aufgefasst als Kategorie. Wir nennen einen Funktor $\mathcal{K}^{\text{op}} \to C$ einen Simplizialkomplex in C der Form $\mathcal{K}$.*

Die Simplizialkomplexe in C bilden wie jede Funktorenkategorie eine Kategorie (Beweis einfach, vgl. ??). Wir notieren die Kategorie der Funktoren $F : A \to B$ häufig mit B^A oder auch $[A, B]$.

Allgemeiner nennen wir Funktorkategorien der Form $[C^{\text{op}}, \text{Ens}]$ auch Prägarben auf C.

Insbesondere ist ein Simplizialkomplex in der terminalen Kategorie dasselbe wie ein gewöhnlicher Simplizialkomplex. Im Folgenden interessieren wir uns besonders für die Fälle von Garben- und Prägarbenkategorien $C = \text{Ens}_{/\text{X}}$ bzw. $C = \text{pEns}_{/\text{X}}$ für X einen topologischen Raum.

Lemma 4. *Wir haben einen Isomorphismus von Kategorien*

$$[\mathcal{K}^{\mathrm{op}}, \mathrm{pEns}_{/\mathrm{X}}] \xrightarrow{\sim} [(\mathcal{K} \times \mathrm{Off}_{\mathrm{X}})^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$$

zwischen den Simplizialkomplexen von Prägarben auf X und den Prägarben auf $\mathcal{K} \times \mathrm{Off}_{\mathrm{X}}$.

Hierbei bezeichnet $\mathrm{Off}_{\mathrm{X}}$ die durch Mengeninklusion halbgeordnete Menge der offenen Mengen in X.

Beweis. Das folgt direkt aus $\mathrm{pEns}_{/\mathrm{X}} = [{\mathrm{Off}_{\mathrm{X}}}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$ und dem Exponentialgesetz für Kategorien:

$$[A, [B, C]] \xrightarrow{\sim} [A \times B, C].$$

□

Unser Ziel wäre es nun, $\mathcal{K} \times \mathrm{Off}_{\mathrm{X}}$ wieder als Kategorie von offenen Mengen eines topologischen Raums zu realisieren, der funktoriell von $\mathcal{K}$ und X abhängt. Das ist aber natürlich im Allgemeinen nicht möglich. (Beweis??) Allerdings können wir $\mathcal{K} \times \mathrm{Off}_{\mathrm{X}}$ recht leicht zur Basis einer Topologie von $\mathcal{K} \times X$ machen.

Definition 5. *Sei $(X, \leq)$ eine halbgeordnete Menge. Wir bezeichnen die von den Mengen der Form $(\geq \sigma) = \{\tau \in X | \tau \geq \sigma\}$ (für $\sigma \in X$) erzeugte Topologie als die Ordnungstopologie auf X.*

Für $X = \mathcal{K}$ einen Simplizialkomplex gilt sogar:

Lemma 6. *Das System der $(\geq \sigma)$ ist eine Basis der Ordnungstopologie.*

Beweis. $\mathcal{K}$ wird überdeckt durch Mengen aus dem System, da $\sigma \in (\geq \sigma)$. Das System ist schnittstabil, da für einen Simplizialkomplex gilt:

$$(\geq \sigma) \cap (\geq \tau) = (\geq (\sigma \cup \tau)) \text{ oder } (\geq \sigma) \cap (\geq \tau) = \emptyset.$$

□

Im folgenden verstehen wir einen Simplizialkomplex $\mathcal{K}$ stets mit der Ordnungstopologie versehen als topologischen Raum.

Bezeichne nun $\mathcal{B}$ die Basis der Produkttopologie von $\mathcal{K} \times X$ bestehend aus Produktmengen der Form $(\geq \sigma) \times U$ mit $\sigma \in \mathcal{K}, U \overset{\circ}{\subset} X$. Präziser ist der Funktor

$$\begin{aligned} \mathcal{K} \times \mathrm{Off}_{\mathrm{X}} &\to \mathcal{B}, \\ (\sigma, U) &\mapsto (\geq \sigma) \times U \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von Kategorien, da auch der Begriff einer Inklusion in beiden Kategorien derselbe ist.

Es gibt zu viele offene Mengen in $\mathcal{K} \times X$ für eine Aussage der Art

$$[\mathcal{K}^{\mathrm{op}}, \mathrm{pEns}_{/\mathrm{X}}] \xrightarrow{\sim} \mathrm{pEns}_{/\mathcal{K} \times X}.$$

Allerdings können wir beim Isomorphismus

$$[\mathcal{K}^{\mathrm{op}}, \mathrm{pEns}_{/\mathrm{X}}] \xrightarrow{\sim} [(\mathcal{K} \times \mathrm{Off}_{\mathrm{X}})^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}] \xrightarrow{\sim} [\mathcal{B}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$$

die rechte Seite als eine Garbenkategorie verstehen, wenn in dieser Objekte schon auf einer Basis der Topologie eindeutig festgelegt sind. Das ist natürlich nicht der Fall für $\mathrm{pEns}_{/\mathrm{X}}$, wohl aber durch die Verklebungseigenschaft von Garben für $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$.

Satz 7. *Der Funktor*

$$[\mathcal{K}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}] \xrightarrow{\sim} [\mathcal{B}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}] \to \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$$

ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweis. Wir müssen nur noch zeigen, dass der hintere Funktor eine Äquivalenz von Kategorien ist.

□