Kapitel 1

Simplizialkomplexe von Garben

Definition 1.1. Ein Simplizialkomplex ist eine Menge E, genannt die Ecken des Simplizialkomplexes, samt einem System $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(E)$ von nichtleeren endlichen Teilmengen von E, genannt die Simplizes des Simplizialkomplexes, derart, dass gilt:

- Jede einelementige Menge ist ein Simplex (d.h. $\{e\} \in \mathcal{K}$ für alle $e \in E$) und
- ist $L \in \mathcal{K}$ ein Simplex, $K \subset L$ nichtleere Teilmenge, so $K \in \mathcal{K}$.

Ein Simplizialkomplex ist somit insbesondere eine halbgeordnete Menge mit der Mengeninklusion als Halbordnung.

Wir erinnern an die Interpretation von halbgeordneten Mengen als Kategorien. Gegeben eine halbgeordnete Menge X definiere die Kategorie C_X bestehend aus Objekten $\mathrm{Ob}(C_X) = X$ mit einem eindeutigen Morphismus $a \to b$ genau dann, wenn $a \leq b$ bezüglich der Halbordnung. Wir erhalten:

Lemma 1.2. *Obige Konstruktion liefert eine volltreue Einbettung*

$$\begin{aligned} \mathrm{poset} &\to \mathrm{Cat}, \\ X &\mapsto C_X. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet Cat die Kategorie der kleinen Kategorien, d.h. der Kategorien C, für die $\mathrm{Ob}(C)$ eine Menge ist und poset die Kategorie der halbgeordneten Mengen mit monotonen Abbildungen als Morphismen.

Beweis. Offenbar ist C_X tatsächlich eine kleine Kategorie. Funktoren $C_X \to C_Y$ sind Abbildungen f auf Objekten, mit der Eigenschaft, dass es einen Morphismus $f(a) \leftarrow f(b)$ in C_Y gibt, wann immer $a \leftarrow b$ in C_X. Das ist aber gerade die Eigenschaft einer monotonen Abbildung. $\square$

Nun können wir Simplizialkomplexe von Garben definieren.

Definition 1.3. Sei C eine Kategorie, $\mathcal{K}$ ein Simplizialkomplex aufgefasst als Kategorie. Wir nennen einen Funktor $\mathcal{K} \to C$ einen Simplizialkomplex in C der Form $\mathcal{K}$.

Die Simplizialkomplexe in C bilden wie jede Funktorenkategorie eine Kategorie (Beweis einfach, vgl. ??). Wir notieren die Kategorie der Funktoren $F : A \to B$ häufig mit B^A oder auch $[A, B]$.

Allgemeiner nennen wir Funktorkategorien der Form $[C^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$ auch Prägarben auf C.

Insbesondere ist ein Simplizialkomplex in der terminalen Kategorie dasselbe wie ein gewöhnlicher Simplizialkomplex. Im Folgenden interessieren wir uns besonders für die Fälle von Garben- und Prägarbenkategorien $C = \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ bzw. $C = \mathrm{pEns}_{/\mathrm{X}}$ für X einen topologischen Raum.

Lemma 1.4. *Wir haben einen Isomorphismus von Kategorien*

$$[\mathcal{K}, \mathrm{pEns}_{/\mathrm{X}}] \xrightarrow{\sim} [\mathcal{K} \times \mathrm{Off_X}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$$

zwischen den Simplizialkomplexen von Prägarben auf X und den Prägarben auf $\mathcal{K}^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Off_X}$.

Hierbei bezeichnet $\mathrm{Off_X}$ die durch Mengeninklusion halbgeordnete Menge der offenen Mengen in X.

Beweis. Das folgt direkt aus $\mathrm{pEns}_{/\mathrm{X}} = [\mathrm{Off_X}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$ und dem Exponentialgesetz für Kategorien:

$$[A, [B, C]] \xrightarrow{\sim} [A \times B, C].$$

□

Unser Ziel wäre es nun, $\mathcal{K} \times \mathrm{Off_X}$ wieder als Kategorie von offenen Mengen eines topologischen Raums zu realisieren, der funktoriell von $\mathcal{K}$ und X abhängt. Das ist aber natürlich im Allgemeinen nicht möglich, da bereits in $\mathcal{K}$ die Vereinigungseigenschaft von Topologien in der Regel verletzt ist. Allerdings können wir $\mathcal{K} \times \mathrm{Off_X}$ recht leicht zur Basis einer Topologie von $\mathcal{K} \times X$ machen.

Definition 1.5. Sei $(X, \leq)$ eine halbgeordnete Menge. Wir bezeichnen die Topologie mit Basis den Mengen der Form $(\geq \sigma) = \{\tau \in X | \tau \geq \sigma\}$ (für $\sigma \in X$) als die Ordnungstopologie auf X.

Wir prüfen, dass es sich um die Basis einer Topologie handeln kann:

Lemma 1.6. *Sei $(X, \leq)$ eine halbgeordnete Menge. Dann lassen sich endliche Schnitte im System der Mengen $(\geq \sigma)$, $\sigma \in X$ als Vereinigungen von Mengen in diesem System schreiben und X wird durch die Mengen des Systems überdeckt.*

Beweis. Offenbar gilt $X = \cup_\sigma (\geq \sigma)$ und

$$(\geq \sigma) \cap (\geq \tau) = \bigcup_{x \in (\geq \sigma) \cap (\geq \tau)} (\geq x).$$

□

Eine Menge $U \subset X$ ist bezüglich der Ordnungstopologie also genau dann offen, wenn sie nach oben abgeschlossen ist, d. h. wenn gilt

$$U = \bigcup_{x \in U} (\geq x).$$

Für $X = \mathcal{K}$ einen Simplizialkomplex vereinfachen sich die Schnitte:

$$(\geq \sigma) \cap (\geq \tau) = (\geq (\sigma \cup \tau)) \text{ oder } (\geq \sigma) \cap (\geq \tau) = \emptyset. \tag{1.1}$$

Lemma 1.7. *Das Versehen mit der Ordnungstopologie definiert einen Funktor* $\mathrm{Ord} : \mathrm{poset} \to \mathrm{Top}$.

Beweis. Ist $f : X \to Y$ ein Morphismus halbgeordneter Mengen, so besteht das Urbild von $(\geq \sigma)$, $\sigma \in Y$ aus allen $\tau \in X$ mit $f(\tau) \geq \sigma$. Dies ist eine nach oben abgeschlossene Menge, also offen in $\mathrm{Ord}\, X$. □

Wir werden den Funktor Ord für Simplizialkomplexe $\mathcal{K}$ in der Notation unterschlagen und sie direkt als topologische Räume auffassen.

Bezeichne nun $\mathcal{B}$ die Basis der Produkttopologie von $\mathcal{K} \times X$ bestehend aus Produktmengen der Form $(\geq \sigma) \times U$ mit $\sigma \in \mathcal{K}, U \circledcirc X$. Präziser ist der Funktor

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Off}_{\mathrm{X}} &\to \mathcal{B}, \\ (\sigma, U) &\mapsto (\geq \sigma) \times U \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von Kategorien, denn ein Umkehrfunktor wird durch die Projektionen einer Produktmenge auf ihre Faktoren und Wahl des eindeutigen minimalen Elements im ersten Faktor gegeben. Die Inklusion ist in beiden Kategorien dieselbe, da $\sigma \geq \tau$ genau dann, wenn $(\geq \sigma) \subset (\geq \tau)$ gilt.

Nun gibt es zu viele offene Mengen in $\mathcal{K} \times X$ für eine Aussage der Art

$$[\mathcal{K}, \mathrm{pEns}_{/\mathrm{X}}] \xrightarrow{\sim} \mathrm{pEns}_{/\mathcal{K} \times X}.$$

Allerdings können wir beim Isomorphismus

$$[\mathcal{K}, \mathrm{pEns}_{/\mathrm{X}}] \xrightarrow{\sim} [\mathcal{K} \times {\mathrm{Off}_{\mathrm{X}}}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}] \xrightarrow{\sim} [\mathcal{B}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$$

die rechte Seite als eine Garbenkategorie verstehen, wenn in dieser Objekte schon auf einer Basis der Topologie eindeutig festgelegt sind. Das ist natürlich nicht der Fall für Prägarben, wohl aber durch die Verklebungseigenschaft für Garben.

Definition 1.8. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis eines topologischen Raumes X. Wir bezeichnen die volle Unterkategorie der Prägarben auf $\mathcal{B}$, die die Verklebungseigenschaft von Garben für Überdeckungen in $\mathcal{B}$ erfüllen, als die Kategorie der Garben auf $\mathcal{B}$ und notieren sie mit $\mathrm{Ens}_{/\mathcal{B}}$.

Konkret erfüllen Garben $F \in \mathrm{Ens}_{/\mathcal{B}}$ also die folgende Eigenschaft:

> Ist $U = \bigcup_{i \in I} V_i$ eine Vereinigung mit $U, V_i \in \mathcal{B}$ und sind $s_i \in F(V_i)$ Schnitte mit übereinstimmenden Restriktionen $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$ für alle i, j, so gibt es genau einen Schnitt $s \in F(U)$ mit $s|_{V_i} = s_i$.

Oder äquivalent, falls wir für $(V_i)_{i\in I}$ eine unter endlichen Schnitten stabile Überdeckung ist und wir als Systemmorphismen die Restriktionen wählen:

$$F(U) = \lim_{i\in I} F(V_i).$$

Satz 1.9. *Sei X ein topologischer Raum mit Basis $\mathcal{B}$. Dann gibt es eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ens}_{/\mathcal{B}}$$

gegeben durch die Einschränkung auf $\mathcal{B} \subset \mathrm{Off}_{\mathrm{X}}$.

Beweis. Wir konstruieren einen Quasi-Inversen: Sei dazu $F \in \mathrm{Ens}_{/\mathcal{B}}$ und $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ eine unter endlichen Schnitten stabile Überdeckung von $U \subset\!\!\circ X$ durch Basismengen $U_i \in \mathcal{B}$. Wir setzen $\hat{F}(U) = \lim F(U_i)$ und prüfen die Wohldefiniertheit. Sei $U = \bigcup_{j\in J} V_j$ eine weitere solche Überdeckung von U durch Basismengen $V_j \in \mathcal{B}$. Nun gilt nach der Garbeneigenschaft auf den Basismengen:

$$\lim_i F(U_i) \xrightarrow{\sim} \lim_i \lim_j F(U_i \cap V_j) \xrightarrow{\sim} \lim_j \lim_i F(U_i \cap V_j) \xrightarrow{\sim} \lim_j F(V_j).$$

Unsere Zurdnung $F \mapsto \hat{F}$ ist also wohldefiniert. Das Bild $\hat{F}$ ist tatsächlich eine Garbe, denn falls $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ eine unter endlichen Schnitten stabile Überdeckung durch offene Mengen und $U_i = \bigcup_j V_{ij}$ jeweils eine unter endlichen Schnitten stabile Überdeckung durch Basismengen $V_{ij} \in \mathcal{B}$ ist, so gilt

$$\hat{F}(U) = \lim_{i,j} F(V_{ij}) \xrightarrow{\sim} \lim_i \hat{F}(U_i)$$

zuerst nach der Definition von $\hat{F}(U)$ und dann wieder nach der Transitivität von Limites und der Definition der $\hat{F}(U_i)$.

Die Funktorialität unserer Zuordnung folgt direkt aus der Funktorialität des Limes. Da für eine Basismenge $U \in \mathcal{B}$ mit der offensichtlichen Überdeckung natürlich $\hat{F}(U) = \lim F(U) = F(U)$ gilt, handelt es sich tatsächlich um einen Quasi-Inversen. □

Satz 1.10. *Der Funktor*

$$[\mathcal{K}, \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}] \to \mathrm{Ens}_{/\mathcal{B}} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ens}_{/\mathcal{K}\times X}$$

ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweis. Wir haben schon den Isomorphismus auf den Prägarbenkategorien

$$[\mathcal{K}, \mathrm{pEns}_{/\mathrm{X}}] \xrightarrow{\sim} [\mathcal{B}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$$

und müssen nur noch zeigen, dass $[\mathcal{K}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}]$ und $\mathrm{Ens}_{/\mathcal{B}}$ durch äquivalente Bedingungen definierte volle Unterkategorien sind.

In $[\mathcal{K}^{\mathrm{op}}, \mathrm{pEns}_{/\mathrm{X}}]$ wird die Untekategorie der Simplizialkomplexe von Garben dadurch definiert, dass für festes $\sigma \in \mathcal{K}$ die Garbenbedingung für die $U \subset\!\!\circ X$ erfüllt sein muss, während in $[\mathcal{B}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$ die Garbenbedingung für beliebige Basismengen $(\geq \sigma) \times U$ gefordert wird. Tatsächlich sind aber beide äquivalent, da im Fall einer Überdeckung $\mathcal{U}$ einer Basismenge $(\geq \sigma) \times U$ durch Basismengen $(\geq \tau_i) \times U_i$ eine Teilüberdeckung $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ aus Produktmengen mit $\tau_i = \sigma$ gewählt werden kann. Ein verträgliches Tupel aus Schnitten über Mengen aus $\mathcal{U}$ entspricht dann einem verträglichem Tupel aus Schnitten über Mengen aus $\mathcal{V}$ und die Garbenbedingung für Basismengen folgt aus der für festes $\sigma \in \mathcal{K}$. □

Wir geben die nicht-relative Version dieser Aussage an, mit einem Beweis, der die entscheidenden Schritte im vorangehenden Beweis noch einmal systematischer darstellt. Mit den Techniken aus Kapitel **??** folgt daraus umgekehrt auch die relative Version.

Definition 1.11. Sei $(X, \leq)$ eine halbgeordnete Menge und $S \subset X$ eine Teilmenge. Ein Element $I \in X$ heißt Infimum von S, falls es eine größte untere Schranke von S ist, d. h. $I \leq x$ für alle $x \in S$ und falls $J \leq x$ für alle $x \in S$, dann $J \leq I$.

Infima sind Limites in der halbgeordneten Menge aufgefasst als Kategorie. Das Infimum einer Teilmenge $S \in X$ muss nicht existieren, ist in diesem Fall allerdings eindeutig. Ein Simplizialkomplex besitzt binäre Infima. Die Basis aus $(\geq \sigma)$-Mengen der Ordnungstopologie einer halbgeordneten Menge mit binären Infima ist schnittstabil, vergleiche Gleichung 1.1.

Satz 1.12. *Sei $\mathcal{K} \in \mathrm{poset}$ mit binären Infima. Dann ist der Funktor*

$$[\mathcal{K}, \mathrm{Ens}] \to \mathrm{Ens}_{/\mathcal{B}} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ens}_{/\operatorname{Ord}\mathcal{K}}$$

für $\mathcal{B}$ die Basis der Ordnungstopologie eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweis. Da $\sigma \leq \tau$ die umgekehrte Inklusion $\Rightarrow (\geq \sigma) \supset (\geq \tau)$ imppliziert, gilt $\mathcal{K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}^{\mathrm{op}}$. Die Garbenbedingung für $\mathcal{B}$ ist leer, denn jede Überdeckung von $(\geq \sigma)$ durch Basismengen enthält $(\geq \sigma)$, $(\geq \sigma)$ ist also initial in einer solchen Überdeckung und die Limites über die beiden Systeme stimmen überein. □