1 Diagramme in der Kategorie der Garben

Definition 1.1. *Sei I eine kleine Kategorie. Unter einem Diagramm der Form I in Ab/X bzw. einem I-System in Ab/X verstehen wir einen Funktor $I \to Ab/X$.*

Sind $i \to j$ Objekte mit einem Morphismus in I, so notieren wir für sein Bild in Ab/X häufig $F_i \to F_j$.

Es bezeichne Δ die Kategorie der endlichen nichtleeren Ordinalzahlen mit monotonen Abbildungen als Morphismen. Wir notieren die $(n+1)$-elementige Ordinalzahl der Dimension ihrer zugehörigen geometrischen Realisierung gemäß mit $[n]$.

Wie jede partiell geordnete Menge, kann ein Objekt X von Δ eingebettet werden in die Kategorie der kleinen Kategorien Cat: wähle dazu als Objektmenge X selbst und statte mit einem einzigen Morphismus $x \to y$ aus, wann immer $x \leq y$ in X. Wir notieren diese Kategorie mit $i(X)$.

Eine simpliziale Menge X ist ein Funktor $\Delta^{\mathrm{op}} \to Ens$, d.h. für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Menge X_n, mit Rand- und Degenerationsabbildungen (denn solche Abbildungen erzeugen die monotonen Abbildungen).

Definition 1.2. *Wir bezeichnen mit dem Nerv einer kleinen Kategorie I das Bild von I unter dem Funktor $N : Cat \to [\Delta]^{\mathrm{op}}, Ens]$ von der Kategorie der kleinen Kategorien in die Kategorie der simplizialen Mengen, der gegeben ist durch*

$$N(I)([n]) = [i([n]), I]$$

für alle $I \in Cat$ und $[n] \in \Delta$.

Hierbei steht $[A, B]$ für die Kategorie der Funktoren $A \to B$ mit Transformationen als Morphismen.

Ausgeschrieben bedeutet diese Definition, dass der Nerv von I die simpliziale Menge ist, deren n-Simplizes Diagramme in I der Form $A_0 \to A_1 \to \cdots \to A_n$ sind, mit Degenerationsabbildungen dem Einfügen der Identität an der Stelle A_i und Randabbildungen der Komposition der in A_i ein- und auslaufenden Abbildung (bzw. Weglassen von A_0 oder A_n).

Wir erinnern an die Definition des geometrischen Standard-n-Simplex

$$\Delta^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_i \geq 0 \forall i \in \{0, \ldots, n\}, \sum x_i = 1\}$$

und seine Degenerations- und Seitenabbildungen d_i und s_i. präzisieren

Sind ∂_i und σ_i die Degenerations- bzw. Seitenabbildungen einer simplizialen Menge X, so erhalten wir eine geometrische Realisierung von X mittels

$$|X| = \coprod_n X_n \times \Delta_n / \sim,$$

wobei $\sim$ die Äquivalenzrelation beschreibt, die von $(s, d_i p) \sim (\partial_i s, p)$ und $(s, s_i p) \sim (\sigma_i s, p)$ erzeugt ist.

Ziel dieses Abschnitts ist nun, zu einem I-System von Garben auf einem topologischen Raum X eine Garbe über $X \times |N(I)|$ zu finden, die diese auf eine "möglichst natürliche" Weise repräsentiert.

Wir werden geometrisch vorgehen und die zu den Garben F_i gehörigen étalen Räume konstant auf Teilmengen der geometrischen Realisierung des Nervs von I erweitern, disjunkt vereinigen und mit einer geeigneten Topologie verkleben.

Betrachte dazu die folgende "geordnete Zerlegung des Standard-n-Simplex"

$$\Delta^n = \coprod_{i=0}^{n} M_i,$$

wobei

$$M_i = \{(x_0, \dots, x_n) \in \Delta^n | x_j = 0 \text{für} j < i, x_i \neq 0\}.$$

Bildchen

Ist nun $F_0 \to F_1 \to \dots \to F_n$ ein n-Simplex in $N(I)$, so ziehen wir F_i längs der Projektion $X \times M_i \to X$ zurück und erhalten als étalen Raum das Produkt $\acute{e}t(F_i) \times M_i$. Wir setzen

$$E = \coprod \acute{e}t(F_i) \times M_i,$$

wobei über alle $n \in \mathbb{N}$ und alle n-Simplizes $F_0 \to F_1 \to \dots \to F_n$ in $N(I)_n$ vereinigt wird und Δ^n wie oben zerlegt wird.

passt das auch mit degenerierten?

Zur Konstruktion der Topologie auf E zunächst eine Definition.

Definition 1.3. *Ist F_i ein I-System von Garben auf einem topologischen Raum X, so heiße I-Schnitt über eine offene Menge $U \subset X$ ein Tupel $(s_i)_{i \in J \subset I}$ von Schnitten $s_i \in F_i(U)$ derart, dass $s_i \mapsto s_j$ unter $F_i(U) \to F_j(U)$, wann immer $i \to j$ in einer vollen Unterkategorie J von I.*

J *volle* Unterkategorie?

Ist s ein I-Schnitt, so erhalten wir wie bei der Konstruktion des étalen Raums zu einer einzelnen Garbe eine Abbildung $\overline{s} : X \times |N(I)| \to E, (x, p) \mapsto (s_i)_x$ falls $p \in M_i$ und die zu M_i gehörige Garbe in der obigen Konstruktion von E F_i ist.

Damit können wir die folgende Topologie auf E definieren.

Definition 1.4. *Wir bezeichnen die oben konstruierte Menge E mit der Finaltopologie bezüglich allen $\overline{s}$ für einen I-Schnitt s den étalen Raum des I-Systems von Garben F_i.*

Beachte dabei, dass insbesondere alle in $\acute{e}t(F_i) \times M_i$ offenen Mengen wieder offen sind.

stimmt vmtl. nicht, wenn J voll

Ist allgemein $i \to j, j \to k, i \to k$ ein nicht notwendigerweise kommutatives Dreieck in I, so haben wir zwei Verklebungen $F_i \to F_k$ und $F_i \to F_j \to F_k$. Das Entscheidende an der Konstruktion über den Nerv ist nun, dass gerade nur solche Dreiecke in I 2-Simplizes sind, bei denen beide übereinstimmen, d.h. die Komposition der ersten Abbildungen gerade die letzte ist bzw. das Dreieck kommutiert. So können die étalen Räume auch geometrisch verkleben.

besser erklären

Dass es sich bei diesem topologischen Raum tatsächlich um den étalen Raum einer Garbe auf $X \times |N(I)|$ handelt, zeigt der folgende Satz.

Satz 1.5. *Die Abbildung $E \to X \times |N(I)|, (s_x, p) \mapsto (x, p)$ ist étale.*

Beweis. Folgt. Idee: um die offene Umgebung für den lokalen Homöomorphismus zu konstruieren, müssen wir im Wesentlichen diesen Halm in E zu einem I-Schnitt fortsetzen. Das ist aber nicht schwer, denn dazu müssen wir nur den Schnitt $s_i \in F_i(U)$, der unseren Halm darstellt, mit den Nerv-Simplex-Abbildungen $F_i \to F_{i+1} \to \dots$ abbilden. □

...

Inwiefern diese Konstruktion die gewünschten Eigenschaften einer geometrsichen Realisierung von Diagrammen von Garben hat, soll im Rest dieses Abschnitts untersucht werden. Es stellen sich folgende Fragen:

1. Ist diese Abbildung $[I, Ab/X] \to Ab/(X \times |N(I)|)$ funktoriell?
2. Wie lässt sich das wesentliche Bild charakterisieren?
3. Kann ein Umkehrfunktor konstruiert werden, d.h. gibt es eine Äquivalenz von Kategorien von $[I, Ab/X]$ zu einer Unterkategorie von $Ab/(X \times |N(I)|)$?
4. Wie verhält sich diese Äquivalenz bei Übergang zur derivierten Kategorie der Abelschen Garben auf X?

Meine Antworten bisher:

1. Ja.
2. Etwas kompliziert, da die geordnete Zerlegung der Simplizes dann auch "geordnet simplizial konstante Garben" ergibt; weiter fordert die Art der Verklebung automatisch bestimmte Fortsetzungseigenschaften von Schnitten.
3. Ja, die komplizierten Bedingungen machen diesen dafür einfach.
4. ???