1 Schwach konstruierbare Garben auf Simplizialkomplexen

Ziel dieses Abschnitts ist die Charakterisierung schwach konstruierbarer Garben auf Simplizialkomplexen und ihrer derivierten Kategorie. Die Darstellung folgt im Wesentlichen [**?**] und [**?**].

In diesem Abschnitt bezeichne $(V, \mathcal{K})$ einen lokal-endlichen Simplizialkomplex mit Eckenmenge V. Für einen Simplex $\sigma \in \mathcal{K}$ definieren wir seine geometrische Realisierung $|\sigma| \subset \mathbb{R}^V = \mathrm{Ens}(V, \mathbb{R})$:

$$|\sigma| = \{x \in \mathbb{R}^V | x(v) = 0 \text{ für } v \notin \sigma, x(v) > 0 \text{ für } v \in \sigma, \sum_{v \in V} x(v) = 1\},$$

sowie die geometrische Realisierung $|\mathcal{K}| \subset \mathbb{R}^V$ von $\mathcal{K}$

$$\bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} |\sigma|,$$

jeweils versehen mit der induzierten Topologie von $\mathbb{R}^V$.

Wir erhalten eine Abbildung

$$p : |\mathcal{K}| \to \mathcal{K},$$

genannt Simplexanzeiger oder Indikatorabbildung, der einem Punkt $x \in |\mathcal{K}|$ in der geometrischen Realisierung den eindeutigen Simplex $\sigma \in \mathcal{K}$ mit $x \in |\sigma|$ zuordnet.

Lemma 1. *Der Simplexanzeiger $p : |\mathcal{K}| \to \mathcal{K}$ ist stetig.*

Beweis. Das Urbild einer Basismenge $(\geq \sigma)$ ist

$$p^{-1}((\geq \sigma)) = |\mathcal{K}| \cap \{x \in \mathbb{R}^V | x(v) > 0 \text{ für } v \in \sigma\},$$

der offene Stern um σ, den wir auch als $U(\sigma)$ notieren. □

Definition 2. Eine Garbe $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ heißt schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbar (oder kurz: schwach konstruierbar), falls für alle $\sigma \in \mathcal{K}$, die Einschränkungen $F|_{|\sigma|}$ konstante Garben sind. Wir bezeichnen die volle Unterkategorie der schwach konstruierbaren Garben in $\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ mit $\text{s-Kons}(\mathcal{K})$.

Eine derivierte Garbe $F \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$ heißt schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbar, falls für alle $j \in \mathbb{Z}$ die Kohomologiegarben $H^j(F)$ schwach konstruierbar sind. Wir bezeichnen die volle Unterkategorie der schwach konstruierbaren derivierten Garben in $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$ mit $\mathrm{Der}_{\mathrm{sk}}(|\mathcal{K}|)$.

Wir bemerken zunächst:

Lemma 3. *Die Kategorie* $\text{s-Kons}(\mathcal{K})$ *ist abelsch.*

Beweis. Durch den offensichtlichen Isomorphismus zur Kategorie der abelschen Gruppen (durch den Funktor der globalen Schnitte) ist die Kategorie der konstanten abelschen Garben auf einem topologischen Raum X eine abelsche Kategorie. Nun folgt die Aussage aus der Exaktheit des Pullbacks i_σ^* entlang den Inklusionen $i_\sigma : |\sigma| \hookrightarrow |\mathcal{K}|$. □

Entscheidend ist die folgende Charakterisierung schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbarer Garben:

Proposition 4 ([?]). *Für $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ sind äquivalent:*

1. *F ist schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbar*
2. *Die Koeinheit der Adjunktion ist auf F ein Isomorphismus $p^* p_* F \xrightarrow{\sim} F$.*
3. *F liegt im wesentlichen Bild des Rückzugs p^*.*
4. *Die Restriktion $F(U(\sigma)) \to F_x$ ist für alle $\sigma \in \mathcal{K}$ und alle $x \in |\sigma|$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Die Äquivalenz (2) $\Leftrightarrow$ (3) ist allgemein kategorientheoretischer Natur. Dabei ist (3) $\Rightarrow$ (2) offensichtlich (nimm $p_* F$) und (2) $\Rightarrow$ (3) folgt aus den Dreiecksidentitäten.

Die Äquivalenz (2) $\Leftrightarrow$ (4) folgt aus der Bestimmung der Halme von $p^* p_* F$. Zunächst bemerken wir, dass in $\mathcal{K}$ die Menge $(\geq \sigma)$ die kleinste offene Umgebung von σ ist, und wir also $p_* F((\geq \sigma)) \xrightarrow{\sim} (p_* F)_\sigma$ erhalten. Somit gilt für $x \in |\sigma|$:

$$(p^* p_* F)_x \xrightarrow{\sim} (p_* F)_\sigma \xrightarrow{\sim} p_* F((\geq \sigma)) \xrightarrow{\sim} F(U(\sigma)).$$

Dabei wurde die Beschreibung der Halme des Rückzugs (mit $p(x) = \sigma$), obige Darstellung der Halme auf $\mathcal{K}$ und die Definition des Vorschubs (mit $p^{-1}((\geq \sigma)) = U(\sigma)$) verwendet.

Die Implikation (4) $\Rightarrow$ (1) folgt direkt aus dem nachgestellten Lemma, angewandt auf die Einschränkung von F auf $U(\sigma)$, und der Tatsache, dass beliebige Einschränkungen konstanter Garben wieder konstant sind.

Für die umgekehrte Richtung reicht es, die Aussage für die Einschränkung von F auf $U(\sigma)$ zu zeigen. Wir betrachten für $x \in |\sigma|$ die Zusammenziehung

$$\begin{aligned} h : (0,1] \times U(\sigma) &\to U(\sigma), \\ (t, y) &\mapsto h(t, y) = ty + (1-t)x. \end{aligned}$$

Die Mengen $h(\{t\} \times U(\sigma))$ bilden für $t \in (0,1]$ eine Umgebungsbasis von x, wir müssen also nur noch den Kolimes der Schnitte über diese Mengen bestimmen. Bezeichne $\pi : (0,1] \times U(\sigma) \to U(\sigma)$ die Projektion auf den zweiten Faktor. Nach der simplizialen Konstanz von F und wegen $h(t,y) \in |\tau| \Leftrightarrow y \in |\tau|$ ist der Rückzug $h^* F$ konstant auf den Fasern von π und lässt sich somit nach dem zweiten nachgestellten Lemma schreiben als $\pi^* \pi_* h^* F \xrightarrow{\sim} h^* F$. Bezeichne $\iota_t : U(\sigma) \hookrightarrow (0,1] \times U(\sigma)$ die Inklusion. Dann erhalten wir wie gewünscht mit der Funktorialität des Rückzugs, $\pi \circ \iota_t = \mathrm{id}_{U(\sigma)}$ sowie $\Gamma \pi_* = \Gamma$

$$
\begin{aligned}
F_x &\xrightarrow{\sim} \operatorname{colf}_{t\in(0,1]} F(h(\{t\}\times U(\sigma)))\\
&\xrightarrow{\sim} \operatorname{colf}_{t\in(0,1]} \Gamma\iota_t^* h^* F\\
&\xrightarrow{\sim} \operatorname{colf}_{t\in(0,1]} \Gamma\iota_t^* \pi^*\pi_* h^* F\\
&\xrightarrow{\sim} \Gamma \operatorname{id}^* \pi_* h^* F\\
&\xrightarrow{\sim} \Gamma h^* F\\
&\xrightarrow{\sim} \Gamma F = F(U(\sigma)),
\end{aligned}
$$

im letzten Schritt nach der Surjektivität von h.

□

Wir tragen die benötigten Lemmata nach.

Lemma 5 ([**?**], 2.1.41)**.** *Sei X ein topologischer Raum, $F \in \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ eine Garbe auf X, für die die Restriktion $\Gamma F \xrightarrow{\sim} F_x$ für alle $x \in X$ bijektiv ist. Dann ist F eine konstante Garbe auf X mit Halm ΓF.*

Beweis. Bezeichne $c : X \to \mathrm{top}$ die konstante Abbildung. Die Koeinheit der Adjunktion $c^*c_*F \to F$ induziert auf den Halmen gerade die vorausgesetzten Bijektionen, ist also ein Garben-Isomorphismus. □

Lemma 6 ([**?**], 6.4.17)**.** *Sei X ein topologischer Raum, $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall, $F \in \mathrm{Ens}_{/X\times I}$ eine Garbe und $\pi : X \times I \to X$ die Projektion auf den ersten Faktor. Ist F konstant auf den Fasern von π, so ist die Koeinheit der Adjunktion auf F ein Isomorphismus $\pi^*\pi_*F \xrightarrow{\sim} F$.*

Beweis. Die Aussage ist äquivalent zum folgenden Fortsetzungsresultat:

> Für alle $U \subset\!\!\!\!\circ\; X$ und $t \in I$ ist die Restriktion ein Isomorphismus
> $$\Gamma(U \times I, F) \xrightarrow{\sim} \Gamma(U \times \{t\}, F).$$

Denn ist die Koeinheit der Adjunktion ein Isomorphismus $\pi^*\pi_*F \xrightarrow{\sim} F$, so bestimmen wir die Schnitte über $U \times \{t\}$ wie folgt: Sei $\iota : U \times \{t\} \hookrightarrow X \times I$ die Inklusion. Wir bemerken, dass $\pi \circ \iota$ die Inklusion von U nach X ist und erhalten:

$$\Gamma(U \times \{t\}, F) = \Gamma\iota^*F \xrightarrow{\sim} \Gamma\iota^*\pi^*\pi_*F = \Gamma(U, \pi_*F) = \Gamma(U \times I, F).$$

Andersherum folgt der Isomorphismus der Koeinheit der Adjunktion aber auch aus dem Fortsetzungsresultat, denn wir können sofort den Isomorphismus auf den Halmen über $(x, t) \in X \times I$ zeigen:

$$
\begin{aligned}
(\pi^*\pi_*F)_{(x,t)} &\xrightarrow{\sim} (\pi_*F)_x\\
&= \operatorname{colf}_{U\ni x} \Gamma(U \times I, F)\\
&\xrightarrow{\sim} \operatorname{colf}_{U\ni x} \Gamma(U \times \{t\}, F)\\
&\xrightarrow{\sim} \operatorname{colf}_{V\ni(x,t)} F(V)\\
&= F_{(x,t)}.
\end{aligned}
$$

Dabei erhalten wir die Surjektivität von $F(V) \to \Gamma(U \times \{t\}, F)$ aus der Bijektivität der Verknüpfung

$$\Gamma(U \times I, F) \to F(V) \to \Gamma(U \times \{t\}, F)$$

und die Injektivität aus der Eigenschaft, dass bereits die faserweise stetige Fortsetzung eindeutig ist nach der Konstantheit der Einschränkungen von F auf die Fasern von π.

Nun können wir die Aussage zeigen. Zunächst folgt sie für I kompakt sofort aus eigentlichem Basiswechsel über dem kartesischen Diagramm mit eigentlichen und separierten Vertikalen

$$\begin{tikzcd}
(x,t) \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & X \times I \arrow[d, "\pi"] \\
x \arrow[r, hook] & X.
\end{tikzcd}$$

Ist nun $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall, so können wir es als aufsteigende Vereinigung von Kompakta $I = \bigcup_j I_j$ schreiben und erhalten für die Schnitte ebenfalls

$$\begin{aligned}\Gamma(U \times I, F) &= \mathrm{Top}(U \times I, \overline{F}) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{colf}_j\, \mathrm{Top}(U \times I_j, \overline{F}) = \mathrm{colf}_j\, \Gamma(U \times I_j, F) \xrightarrow{\sim} \Gamma(U \times \{t\}, F).\end{aligned}$$

□

Wir bezeichnen den Funktor $p^* p_* : \mathrm{Ab}_{/\mathrm{X}} \to$ s-Kons kurz mit β und bemerken, dass er nach obiger Proposition ein Rechtsadjungierter zur Inklusion ι : s-Kons $\to \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ ist:

Als Komposition zweier linksexakter Funktoren ist β natürlich wieder linksexakt. Der allgemeinen Terminologie folgend bezeichnen wir eine Garbe $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ β-azyklisch, falls ihre höheren Derivierten von β verschwinden, also falls

$$R^k \beta F = 0 \text{ für alle } k > 0.$$

Später benötigen wir die folgende Charakterisierung β-azyklischer Garben:

Proposition 7. *Eine Garbe $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ ist β-azyklisch genau dann, wenn $H^k(U(\sigma); F) = 0$ für alle $\sigma \in \mathcal{K}, k > 0$.*

Insbesondere gilt:

1. *Schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbare Garben sind β-azyklisch.*
2. *Welke Garben sind β-azyklisch.*

Beweis. Nach der Charakterisierung höherer direkter Bilder ist $R^q \beta F = p^* R^q p_* F$ für $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ isomorph zur Garbifizierung der Prägarbe

$$(\geq \sigma) \mapsto H^q(p^{-1}((\geq \sigma)); F) = H^q(p^{-1}(U(\sigma)); F).$$

... □

Proposition 8. *Sei $F \in \mathrm{Ket}^+(\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$ ein gegen die Richtung der Pfeile beschränkter Kettenkomplex aus β-azyklischen Garben mit schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbaren Kohomologiegarben $H^q(F)$. Dann ist $\beta F \to F$ ein Quasi-Isomorphismus.*

Beweis. Wir schneiden aus dem Kettenkomplex (F^n, d^n) kurze exakte Sequenzen aus:

$$
\begin{array}{lllllll}
H^0 = \ker d^0 \hookrightarrow F^0 \twoheadrightarrow \operatorname{im} d^0 & & & & \\
& \operatorname{im} d^0 \hookrightarrow \ker d^1 \twoheadrightarrow H^1 & & \\
& & \ker d^1 \hookrightarrow F^1 \twoheadrightarrow \operatorname{im} d^1 \\
& \vdots & &
\end{array}
$$

Sind in einer kurzen exakten Sequenz zwei der drei Objekte azyklisch, so nach dem Fünferlemma auch das dritte. Da nach Voraussetzung und 7 F^q und H^q β-azyklisch sind, sind alle oben betrachteten Objekte β-azyklisch und die kurzen exakten Sequenzen bleiben exakt nach Anwendung von β. Es folgt $H^q(\beta F) \xrightarrow{\sim} \beta(H^q F)$ und weiter $\beta(H^q F) \xrightarrow{\sim} H^q F$ nach der schwachen Konstruierbarkeit von $H^q F$. □

Damit ist der entscheidende Schritt für unser Ziel gezeigt. Wir erhalten:

Theorem 9. *Sei $\mathcal{K}$ ein lokal-endlicher Simplizialkomplex.*

Die oben definierten Funktoren ι, β induzieren auf den derivierten Kategorien eine Äquivalenz

$$\mathrm{Der}^+(\text{s-Kons}(\mathcal{K})) \underset{R\beta}{\overset{\iota}{\rightleftarrows}} \mathrm{Der}^+_{\mathrm{sk}}(|\mathcal{K}|).$$

Beweis. Die Kategorien $\mathrm{Der}^+(\text{s-Kons}(\mathcal{K}))$ und $\mathrm{Der}^+_{\mathrm{sk}}(|\mathcal{K}|)$ haben genug Injektive. Mit der Grothendieck-Spektralsequenz für derivierte Kategorien ([**?**], 3.4.18) und der Exaktheit von ι erhalten wir somit

$$R\beta \circ R\iota \xrightarrow{\sim} R(\beta \circ \iota) \xrightarrow{\sim} R\,\mathrm{Id} = \mathrm{Id}$$

auf $\mathrm{Der}^+(\text{s-Kons}(\mathcal{K}))$, da welke Garben β-azyklisch sind, sowie

$$\iota \circ R\beta \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}$$

auf $\mathrm{Der}^+_{\mathrm{sk}}(|\mathcal{K}|)$ nach der vorangegangenen Proposition. □

Bemerkung 10. Kashiwara und Schapira beschränken sich auf die Äquivalenz der beschränkten derivierten Kategorien, allerdings mit der gleichen Argumentation. In [**?**] 1.7.12 wird eine allgemeine Aussage für solche Situationen gezeigt, die hier aber m.E. nicht benötigt wird.