0.1 Schwach konstruierbare Garben auf simplizialen Mengen

In diesem Abschnitt möchten wir die Aussagen aus Kapitel **??** übertragen auf den Fall, dass es sich bei dem Basisraum um die Realisierung einer simplizialen Menge anstelle eines Simplizialkomplexes handelt. Wir gehen vor wie in den ersten beiden Abschnitten.

Sei $X \in \mathrm{s\,Ens}$ eine simpliziale Menge. Wir erinnern an die eindeutige Darstellung eines Simplex x als Degeneration s^*y für y einen nichtdegenerierten Simplex und s monoton und surjektiv aus **??**, notiert $y = N(x)$. Eine monotone Abbildung $f : [n] \to [m]$ induziert dann eine partielle Abbildung $\tilde{f} : \bigsqcup_n NX_n \to \bigsqcup_n NX_n$ auf den nichtdegenerierten Simplizes, gegeben durch $N(x) \mapsto N(f^*x)$ für $x \in X_n$. Es gilt $\tilde{s} = \mathrm{id}$ für surjektive s (wo definiert) und $\widetilde{g \circ f} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$ (wo definiert).

Definition 0.1. Sei $X \in \mathrm{s\,Ens}$ eine simpliziale Menge. Die X zugeordnete Kategorie C_X besitzt als Objekte $\mathrm{Ob}(C_X) := \bigsqcup_n NX_n$ die Menge der nichtdegenerierten Simplizes von X und für jedes $f : [n] \to [m]$ monoton und $\sigma \in NX_n$ einen Morphismus $\sigma \to \tilde{f}(\sigma))$ mit der Komposition $\sigma \to \tilde{f}(\sigma) \to \tilde{g}(\tilde{f}(\sigma)) = \sigma \to \widetilde{g \circ f}(\sigma)$.

Nach **?? ??** lässt sich jedes monotone f als Kompositionen einer surjektiven monotonen Abbildung t mit einer injektiven monotonen Abbildung d schreiben: $f = t \circ d$. Wir können folgern, dass die induzierte Abbildung $\tilde{f}$ den Grad nichtdegenerierter Simplizes senkt: $\tilde{f}(N(x)) = N(f^*x) = N(d^*t^*s^*N(x)) = N((st)'^*d'^*N(x)) = d'^*N(x)$ für $(s \circ t) \circ d = d' \circ (st)'$ die durch die Relationen **?? ??** erhaltene Darstellung mit einer surjektiven monotonen Abbildung $(st)'$ und einer injektiven monotonen Abbildung d'. Das Argument zeigt: es gibt höchstens einen Morphismus $\sigma \to \tilde{f}(\sigma)$

halbgeordnete Menge $P_X \in \mathrm{poset}$.

$$\bigsqcup_n X_n$$

Betrachte nun für eine feste simpliziale Menge $X \in \mathrm{s\,Ens}$ die volle Unterkategorie $(\mathrm{s\,Ens}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}})_X \subset \mathrm{s\,Ens}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}}$ der simplizialen Garben über topologischen Räumen mit Komorphismen mit der simplizialen Menge X als diskreten Basisräumen.

Wir erhalten die folgende Übertragung von **??**:

Proposition 0.2. *Die kovariante Realisierung mittels plumper Simplizes (**??**) liefert eine Äquivalenz von Kategorien*

$$(\mathrm{s\,Ens}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}})_X \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ens}_{/\blacktriangle X}\,.$$

Weiter gibt es eine Äquivalenz

$$(\mathrm{s\,Ens}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}})_X \xrightarrow{\approx} [C_X^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$$

gegeben durch den Funktor $F \mapsto (\sigma \mapsto (F_n)_\sigma$ für $\sigma \in NX_n$.

Beweis. Eine Garbe F_n über einem diskreten Raum X_n ist diskret und somit durch ihre Halme festgelegt. Wir können sie somit als einen Funktor der diskreten Kategorie X_n in die Kategorie der Mengen $F_n : X_n \to \mathrm{Ens}$ auffassen. Ein Komorphismus über $Ff^* : X_m \to X_n$ sind dann Abbildungen zwischen den Halmen $(F_n)_{Ff(\sigma)} \to (F_m)_\sigma$ für $\sigma \in X_m$. □

Lemma 0.3. *Sei $X \in \mathrm{s\,Ens}$ eine simpliziale Menge. Dann gibt es einen Homöomorphismus $\blacktriangle X \xrightarrow{\sim} P_X$, wobei P_X die Ordnungstopologie trägt. Insbesondere hat jeder Punkt in der plumpen Realisierung $\sigma \in \blacktriangle X$ eine kleinste offene Umgebung $(\geq \sigma)$.*

Beweis. Ein Punkt $\sigma \in \blacktriangle X$ ist der generische Punkt eines nichtdegenerierten n-Simplizes. Wir identifizieren die nichtdegenerierten Simplizes mit ihren generischen Punkten. Die Menge $(\geq \sigma) := \{\tau \in | \}$ □

Nach der Bemerkung **??** reicht es, die topologischen Teile des Beweises aus **??** zu übertragen. Wir formulieren ganz allgemein:

Definition 0.4. Eine Konstruierbarkeitssituation ist eine stetige Abbildung $p : |\mathcal{K}| \to \mathcal{K}$ topologischer Räume, sodass gilt: Jeder Punkt $\sigma \in \mathcal{K}$ besitzt eine kleinste offene Umgebung $(\geq \sigma)$. Wir notieren $U(\sigma) = p^{-1}((\geq \sigma))$. Eine Garbe $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ heißt schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbar, falls die Koeinheit der Adjunktion auf F einen Isomorphismus $p^*p_*F \xrightarrow{\sim} F$ ist.

In unserer Konstruierbarkeitssituation nennen wir $\mathcal{K}$ die *kombinatorische* und $|\mathcal{K}|$ die *geometrische Realisierung*. Wir übertragen den Begriff derivierter schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbarer Garben (mit schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbaren Kohomologiegarben) und die Notationen s-Kons($\mathcal{K}$) und $\mathrm{Der}_{\mathrm{sk}}(|\mathcal{K}|)$.

Wir können mit identischem Beweis den allgemeinen Teil von **??** übertragen:

Proposition 0.5. *Für $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ sind äquivalent:*

(1) F ist schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbar

(2) F liegt im wesentlichen Bild des Rückzugs p^*.

(3) Die Restriktion $F(U(\sigma)) \to F_x$ ist für alle $\sigma \in \mathcal{K}$ und alle $x \in |\sigma|$ ein Isomorphismus.

In guten Konstruierbarkeitssituationen lässt sich auch eine geometrische Formulierung schwacher $|\mathcal{K}|$-Konstruierbarkeit angeben:

Definition 0.6. In einer Konstruierbarkeitssituation $p : |\mathcal{K}| \to \mathcal{K}$ heißt eine Garbe $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ geometrisch schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbar, falls die Einschränkungen $F|_{|\sigma|}$ konstant sind für alle Urbilder $|\sigma| = p^{-1}(\sigma)$ von Punkten $\sigma \in \mathcal{K}$.

Proposition 0.7. *Ist in einer Konstruierbarkeitssituation $p : |\mathcal{K}| \to \mathcal{K}$ ... so ist für eine Garbe $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ äquivalent:*

1. *F ist $|\mathcal{K}|$-konstruierbar.*

2. *F ist geometrisch schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbar.*

Das ist der fehlende Teil von **??**.

Beweis. Die Richtung $1 \Rightarrow 2$ folgt wieder aus 0.5 (3) und **??** wegen $|\sigma| \subset U(\sigma)$.
Für die umgekehrte Richtung $\square$