1 Schwach konstruierbare Garben auf Simplizialkomplexen

In diesem Abschnitt bezeichne $\mathcal{K}$ einen lokal-endlichen Simplizialkomplex und $|\mathcal{K}|$ seine geometrische Realisierung. Wir erhalten eine stetige Abbildung

$$p : |\mathcal{K}| \to \mathcal{K},$$

genannt Simplexanzeiger oder Indikatorabbildung, der einem Punkt $x \in |\mathcal{K}|$ in der geometrischen Realisierung den eindeutigen Simplex $\sigma \in \mathcal{K}$ mit $x \in |\sigma|$ zuordnet.

Definition 1. *Eine Garbe $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ heißt schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbar (oder kurz: schwach konstruierbar), falls für alle $\sigma \in \mathcal{K}$, die Einschränkungen $F|_{|\sigma|}$ konstante Garben sind. Wir bezeichnen die volle Unterkategorie der schwach konstruierbaren Garben in $\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ mit $\text{s-Kons}(\mathcal{K})$.*

Eine derivierte Garbe $F \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$ heißt schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbar, falls für alle $j \in \mathbb{Z}$ die Kohomologiegarben $H^j(F)$ schwach konstruierbar sind. Wir bezeichnen die volle Unterkategorie der schwach konstruierbaren derivierten Garben in $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$ mit $\mathrm{Der}_{\mathrm{sk}}(|\mathcal{K}|)$.

Proposition 2. *Für $F \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$ sind äquivalent:*

1. *F ist schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbar*
2. *Die Koeinheit der Adjunktion ist auf F ein Isomorphismus $p^*p_*F \xrightarrow{\sim} F$.*

Beweis. □

Lemma 3. *Die Kategorie $\text{s-Kons}(\mathcal{K})$ ist abelsch.*

Beweis. Durch den offensichtlichen Isomorphismus zur Kategorie der abelschen Gruppen (durch den Funktor der globalen Schnitte) ist die Kategorie der konstanten abelschen Garben auf einem topologischen Raum X eine abelsche Kategorie. Nun folgt die Aussage aus der Exaktheit des Pullbacks i_σ^* entlang den Inklusionen $i_\sigma : |\sigma| \hookrightarrow |\mathcal{K}|$. □

Proposition 4. *Sei $F \in \mathrm{Ket}^+(\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$ aus S-azyklischen mit schwach konstruierbaren Kohomologiegarben. Dann ist die Koeinheit ein Quasiisomorphismus. (???)*