

Kapitel 1

Simpliziale Garben

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit simplizialen Objekten in der Kategorie der Garben auf einem topologischen Raum X . Während Simplizialkomplexe ungerichtete Graphen verallgemeinern, verallgemeinern simpliziale Mengen gerichtete Graphen, und werden uns so bei der geometrischen Realisierung von Objekten in Diagrammkategorien von Garben zur Verfügung stehen.

1.1 Simpliziale Mengen

Wir betrachten die Menge Δ der nichtleeren endlichen Ordinalzahlen. Ihre Elemente sind von der Form $\{0, 1, \dots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, welche wir kurz mit $[n]$ bezeichnen werden. Wir verstehen diese Mengen $[n]$ als angeordnete Mengen.

Definition 1.1. Die Simplex-Kategorie Δ ist die Kategorie der endlichen nichtleeren Ordinalzahlen versehen mit monotonen Abbildungen als Morphismen.

Ist C eine Kategorie, so bezeichnen wir eine Prägarbe auf Δ mit Werten in C (d. h. einen Funktor $\Delta^{\text{op}} \rightarrow C$) als simpliziales Objekt in C .

Unseren gewohnten Sprechweisen folgend nennen wir simpliziale Objekte in C auch kurz “simpliziale C ” und sprechen etwa von simplizialen Mengen und simplizialen Garben. Wir notieren die Funktorkategorien simplizialer Objekte in C auch kurz mit $\text{s}C = [\Delta^{\text{op}}, C]$. Opponiert bezeichnen wir einen Funktor $\Delta \rightarrow C$ als kosimpliziales Objekt in C .

Für $X \in \text{s}C$ ein simpliziales Objekt notieren wir kurz $X_n = X([n])$ und für eine monotone Abbildung $f : [m] \rightarrow [n]$ auch $f^* = X(f)$.

Die monotonen Abbildungen $[m] \rightarrow [n]$ werden von zwei besonders einfachen Klassen monotoner Abbildungen erzeugt: von den *Randabbildungen*, den eindeutigen Injektionen $d_i^n : [n-1] \rightarrow [n]$, die $i \in \{0, \dots, n\}$ nicht treffen, und den *Degenerationsabbildungen*, den eindeutigen Surjektionen $s_i^n : [n+1] \rightarrow [n]$, für die $i \in \{0, \dots, n\}$ zweielementiges Urbild hat.

Lemma 1.2 ([?], I.2, ex. 1). (i) Die Rand- und Degenerationsabbildungen erfüllen die Relationen

$$\begin{aligned} d_j^{n+1} d_i^n &= d_i^{n+1} d_{j-1}^n \quad \text{für } i < j, \\ s_j^n s_i^{n+1} &= s_i^n s_{j+1}^{n+1} \quad \text{für } i \leq j, \\ s_j^{n-1} d_i^n &= \begin{cases} d_i^{n-1} s_{j-1}^{n-2} & \text{für } i < j, \\ \text{id}_{[n-1]} & \text{für } i = j \text{ oder } i = j+1, \\ d_{i-1}^{n-1} s_j^{n-2} & \text{für } i > j+1. \end{cases} \end{aligned}$$

(ii) Sei $f : [m] \rightarrow [n]$ monoton. Dann hat f eine eindeutige Darstellung

$$f = d_{i_1}^n \dots d_{i_s}^{n-s+1} s_{j_t}^{m-t} \dots s_{j_1}^{m-1}$$

mit $n \geq i_1 > \dots > i_s \geq 0$, $m > j_1 > \dots > j_t \geq 0$ und $n = m - t + s$.

(iii) Die vom Köcher der endlichen nichtleeren Ordinalzahlen mit den Rand- und Korandabbildungen und den angegebenen Relationen auf den Morphismenmengen erzeugte Pfadkategorie ist isomorph zu Δ .

Beweis. (i) Durch Bildchen Zeichnen oder explizites Nachrechnen: Wir werfen beide Abbildungen simultan auf allen Elementen aus und erhalten zum Beispiel für die erste Aussage:

$$\begin{aligned} &(0, 1, \dots, i-1, i, i+1, \dots, j-2, j-1, j, \dots, n-1) \\ &\xrightarrow{d_i^n} (0, 1, \dots, i-1, i+1, i+2, \dots, j-1, j, j+1, \dots, n) \\ &\xrightarrow{d_j^{n+1}} (0, 1, \dots, i-1, i+1, i+2, \dots, j-1, j+1, j+2, \dots, n+1) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} &(0, 1, \dots, i-1, i, i+1, \dots, j-2, j-1, j, \dots, n-1) \\ &\xrightarrow{d_{j-1}^n} (0, 1, \dots, i-1, i, i+1, \dots, j-2, j, j+1, \dots, n) \\ &\xrightarrow{d_i^{n+1}} (0, 1, \dots, i-1, i+1, i+2, \dots, j-1, j+1, j+2, \dots, n+1). \end{aligned}$$

- (ii) In einer solchen Darstellung gibt $m - t$ die Anzahl der Funktionswerte der Abbildung an, die j_k beschreiben die Partition von $(0, \dots, m)$ in zusammenhängende Abschnitte mit demselben Funktionswert und die i_k bestimmen die Funktionswerte selbst.
- (iii) Jeden Morphismus in der Pfadkategorie, d. h. jedes Tupel komponierbarer Rand- und Degenerationsabbildungen kann mit den Relationen aus dem ersten Teil auf eine Form wie in (ii) gebracht werden. Umgekehrt ist nach (ii) jede monotone Abbildung aber auch als ein solcher Pfad darstellbar. Den Isomorphismus definiert also der Funktor, der auf Objekten durch die Identität und auf Morphismen durch die offensichtliche Zuordnung der Erzeuger der Pfadkategorie auf die jeweiligen Rand- und Degenerationsabbildungen gegeben ist.

□

Die einfachsten Beispiele nichttrivialer simplizialer Mengen sind die Standard- n -Simplizes, die sich als die darstellbaren Funktoren $\Delta^n = \Delta(\cdot, [n])$ beschreiben lassen. Wir erhalten den Funktor

$$\begin{aligned} R : \Delta^{\text{op}} &\rightarrow \mathbf{sEns}, \\ [n] &\mapsto \Delta^n = \Delta(\cdot, [n]), \end{aligned}$$

der auf Morphismen durch Vorschalten gegeben ist, welches wir mit $f \mapsto f^*$ notieren.

Ist $X \in \mathbf{sEns}$ eine simpliziale Menge, so bezeichnen wir $X_n := X([n])$ als die Menge der n -Simplizes von X . Nun sind die n -Simplizes von X gerade die “Bilder des n -ten Standardsimplizes in X ” sind, präziser

$$X_n \xrightarrow{\sim} \mathbf{sEns}(\Delta^n, X). \quad (1.1)$$

In der Tat besagt das Yoneda-Lemma, dass die Transformationen des freien Funktors $\Delta^n = \Delta(\cdot, [n])$ zum Funktor X in natürlicher Bijektion stehen zu $X([n])$.

Das anschließende Lemma zeigt, dass sich eine simpliziale Menge X vollständig durch ihre Simplizes $\Delta^n \rightarrow X$ verstehen lässt. Dazu erklären wir zunächst Slice-Kategorien, Kategorien von Objekten über einem gegebenen Objekt bzw. Spezialfälle von Komma-Kategorien.

Definition 1.3. Sei $r : C \rightarrow D$ ein Funktor und $X \in D$ ein Objekt. Dann bezeichnet $C \downarrow_r X$ die Slice-Kategorie der Objekte von C über X mittels r , deren Objekte Objekte $Y \in C$ samt einem Morphismus $\pi_Y : rY \rightarrow X$ sind und deren Morphismen Morphismen $f : Y \rightarrow Z$ in C sind, für die rf ein Morphismus über X ist, d. h. $\pi_Y = \pi_Z \circ rf$ gilt.

Wir bezeichnen die Slice-Kategorie $\Delta \downarrow_r X$ als die Simplexkategorie von X . Konkret ist darin ein Objekt ein Morphismus $\Delta^n \rightarrow X$ und ein Morphismus ein von $[n] \rightarrow [m]$ induzierter Morphismus simplizialer Mengen $\Delta^n \rightarrow \Delta^m$ über X .

Lemma 1.4. Sei $X \in \mathbf{sEns}$ eine simpliziale Menge. Dann gilt

$$X \xrightarrow{\sim} \text{col}_{\Delta^n \rightarrow X} \Delta^n,$$

mit dem Kolimes über die Simplexkategorie von X .

Beweis. Bezeichne K obigen Kolimes. Das System, über das der Kolimes gebildet wird, sichert uns nach der universellen Eigenschaft des Kolimes einen Morphismus $K \rightarrow X$. Wir müssen also zeigen, dass dieser Bijektionen auf den n -Simplizes induziert. Tatsächlich definiert ein n -Simplex $\Delta^n \rightarrow K$ durch Nachschalten von $K \rightarrow X$ einen n -Simplex in X . Diese Zuordnung ist bijektiv, denn wir erhalten eine Umkehrabbildung, wenn wir $\Delta^n \rightarrow X$ den zugehörigen Morphismus in den Kolimes $\Delta^n \rightarrow K$ zuordnen. \square

Der Beweis benötigte keine konkreten Eigenschaften der simplizialen Mengen. Wir halten mit wörtlich übertragenen Beweis allgemein fest:

Proposition 1.5. *Sei $F : C \rightarrow \text{Ens}$ ein Funktor. Dann ist F ein Kolimes über darstellbare Funktoren $C(X, \cdot)$.*

Beweis. Wir betrachten mittels des Funktors $r : C \rightarrow \text{Ens}^C, X \mapsto C(X, \cdot)$ die Slice-Kategorie $C \downarrow_r F$ der darstellbaren Funktoren über F und dann das System in Ens^C , das daraus durch Vergessen der Transformationen nach F hervorgeht. Wir bezeichnen wieder den Kolimes darüber mit K und erhalten mit der universellen Eigenschaft eine Transformation $K \Rightarrow F$. Diese ist eine Isotransformation, wenn sie auf allen Objekten $X \in C$ Bijektionen $KX \xrightarrow{\sim} FX$ induziert. Nach dem Yoneda-Lemma entsprechen diese den Transformationen $C(X, \cdot) \Rightarrow K$ bzw. $C(X, \cdot) \Rightarrow F$. Diese stehen aber nach der universellen Eigenschaft des Kolimes und der Definition der Kategorie $C \downarrow_r F$ in Bijektion durch Nachschalten von $K \Rightarrow F$. \square

1.2 Der kosimpliziale Raum der Standardsimplizes

Die geometrische Realisierung einer simplizialen Menge soll sich mit geeigneten Identifikationen aus den geometrischen Realisierungen von Standard- n -Simplizes zusammensetzen. Diese definieren wir als die abgeschlossenen geometrischen Standard- n -Simplizes

$$|\Delta^n| = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leq x_i \leq 1, \sum_{i=0}^n x_i = 1 \right\}.$$

Ein Morphismus $f : [m] \rightarrow [n]$ induziert eine stetige Abbildung $|f| : |\Delta^m| \rightarrow |\Delta^n|$ auf den zugehörigen Simplizes. Nach 1.2 reicht es, diese für Rand- und Degenerationsabbildungen anzugeben. Für die Randabbildung $|d_i|$ handelt es sich dabei um die Inklusion der i -ten Kante, d. h. in Koordinaten das Einfügen einer Null an der i -ten Stelle, für die Degenerationen $|s_i|$ um den Kollaps der i -ten Kante, d. h. in Koordinaten die Ersetzung der i -ten und ihrer darauffolgenden Koordinate durch ihre Summe. In Formeln:

$$\begin{aligned} |d_i^n|(x_0, \dots, x_{n-1}) &= (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1}), \\ |s_i^n|(x_0, \dots, x_{n+1}) &= (x_0, \dots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{n+1}). \end{aligned}$$

Wir erhalten einen Funktor $R : \Delta \rightarrow \text{Top}, [n] \mapsto \Delta^n$, genannt der *kosimpliziale Raum der Standardsimplizes*.

1.3 Geometrische Realisierung simplizialer Mengen

Wir erklären nun die geometrische Realisierung simplizialer Mengen. Der Unterschied zur geometrischen Realisierung von Simplizialkomplexen ist im Wesentlichen die Möglichkeit, Simplizes wiederzuverwenden und zu degenerieren, was zu

Identifikationen in der geometrischen Realisierung führt. Ein Fall von “Wiederverwendung” ist etwa die Realisierung der S^1 als 1-Simplex, dessen Endpunkte übereinstimmen. Degeneration bedeutet, dass niederdimensionale Simplizes auch die Rolle höherdimensionaler Simplizes übernehmen können. Wir können etwa unser Beispiel modifizieren und die S^n als n -Simplex realisieren, bei dem alle niederdimensionalen Kanten in einem Punkt zusammenfallen.

Die geometrische Realisierung von Standard- n -Simplizes haben wir gerade gesehen. Nun fordern wir, dass sich die Realisierung mit Kolimites vertrage:

$$|\operatorname{col}_i X_i| \xrightarrow{\sim} \operatorname{col}_i |X_i|. \quad (1.2)$$

Wenn dies der Fall sein soll, so müssen wir mit der Darstellung

$$X := \operatorname{col}_{\Delta^n \rightarrow X} \Delta^n$$

aus ?? auf jeden Fall setzen

$$|X| := \operatorname{col}_{\Delta^n \rightarrow X} |\Delta^n|. \quad (1.3)$$

Debei wird der Kolimes wieder über die Simplexkategorie von X gebildet, nun allerdings mit den induzierten stetigen Abbildungen aus ?? als Systemmorphis-men.

Ein Morphismus simplizialer Mengen $X \rightarrow Y$ induziert nun durch Nachschalten von $X \rightarrow Y$ einen Funktor auf den Simplexkategorien $\Delta \downarrow X \rightarrow \Delta \downarrow Y$ und damit auch auf den Kolimites eine stetige Abbildung $|X| \rightarrow |Y|$. Wir erhalten also den Funktor der geometrischen Realisierung $|\cdot| : \mathbf{sEns} \rightarrow \mathbf{Top}$.

Unsere Konstruktion erfüllt tatsächlich:

Proposition 1.6. *Der Funktor der geometrischen Realisierung simplizialer Mengen $|\cdot|$ vertauscht mit beliebigen Kolimites über kleine Indexkategorien.*

Beweis. Zu zeigen ist, dass die Bildung der Simplexkategorie mit Kolimites vertauscht, d. h. für einen Funktor $X : I \rightarrow \mathbf{sEns}$ gilt:

$$\Delta \downarrow_r \operatorname{col}_i X_i \xrightarrow{\sim} \operatorname{col}_i \Delta \downarrow_r X_i.$$

Beide Kategorien bestehen aber aus Objekten der Form $\Delta^n \rightarrow X_i$ für ein $i \in I$, die identifiziert werden, falls sie durch Nachschalten von $X_i \rightarrow X_j$ auseinander hervorgehen. \square

Wie ganz allgemein können wir den Kolimes topologischer Räume auch explizit mittels Koprodukt und Koegalisor ausschreiben. Wir verstehen die Mengen X_n als diskrete topologische Räume und erhalten:

$$|X| \xrightarrow{\sim} (\coprod_n X_n \times |\Delta^n|) / \sim$$

mit der Quotiententopologie, die durch die von

$$(x, |f|(p)) \sim (f^*x, p)$$

für alle monotonen $f : [m] \rightarrow [n]$ erzeugte Äquivalenzrelation gegeben ist.

1.4 Sparsame Realisierung durch nichtdegenerierte Simplexes

Während die Definition simplizialer Mengen und ihrer Realisierung mit Degenerationsabbildungen wie gesehen von einem formalen Standpunkt aus sehr elegant ist, ist für die konkrete Arbeit häufig eine explizitere Form der Realisierung praktischer, die “unnötige Simplexes von vornherein weglässt”.

Definition 1.7 ([?], I.2.9). Sei $X \in \mathbf{sEns}$ eine simpliziale Menge. Ein Simplex $x \in X_n$ heißt degeneriert, falls es einen Simplex $y \in X_m$ und eine surjektive monotone Abbildung $s : [n] \rightarrow [m]$, $n > m$ gibt mit $x = s^*y$.

Andernfalls heißt ein Simplex nichtdegeneriert. Für $X \in \mathbf{sEns}$ bezeichne NX_n die Menge der nichtdegenerierten n -Simplexes von X .

Lemma 1.8 ([?], Prop. 9). Sei $X \in \mathbf{sEns}$ eine simpliziale Menge und $x \in X_n$ ein n -Simplex. Dann gibt es eine eindeutige Darstellung $x = s^*y$ für $y \in NX_m$ einen nichtdegenerierten Simplex von X und $s : [n] \rightarrow [m]$ eine surjektive monotone Abbildung.

Beweis. Ist x nichtdegeneriert, wähle $y = x$ und $s = \text{id}_{[n]}$. Andernfalls gibt es nach Definition ein y eine Surjektion mit der gewünschten Eigenschaft. Diese sind eindeutig nach den Relationen aus 1.2, vergleiche [?], Prop. 9. \square

Wir notieren für eine solche Darstellung $x = s^*y$ auch $y = N_s(x)$.

Wir definieren nun die *sparsame geometrische Realisierung* einer simplizialen Menge X wie folgt:

$$\|X\| := \coprod_n NX_n \times |\Delta^n| / \sim_N,$$

wobei wie gehabt NX_n die diskrete Topologie trägt und die Äquivalenzrelation erzeugt ist von

$$(x, |d_i|(p)) \sim_N (N_s(d_i^*x), |s|(p)),$$

mit der eindeutigen Darstellung Degenerierter aus 1.8. Diese Äquivalenzrelation lässt sich interpretieren als das Umgehen der mittleren Schritte in der Rechnung

$$(x, d_i p) \sim (d_i^*x, p) \sim (s^*y, p) \sim (y, |s|(p))$$

mit $y = N_s(d_i^*x)$.

Satz 1.9. *Die von der Inklusion*

$$\coprod_n NX_n \times |\Delta^n| \hookrightarrow \coprod_n X_n \times |\Delta^n|$$

induzierte Abbildung $\|X\| \xrightarrow{\sim} |X|$ ist ein Homöomorphismus.

Beweis. Die Abbildung existiert und ist stetig nach der universellen Eigenschaft topologischer Quotienten, denn die Äquivalenzrelation \sim umfasst \sim_N . Sie ist bijektiv, denn für die dazukommenden Punkte in degenerierten Simplexes s^*x

1.5. ITERATIVE KONSTRUKTION DER GEOMETRISCHEN REALISIERUNG 7

gilt ohnehin $(s^*x, p) \sim (x, |s|(p))$. Weiter ist sie offen: Ist $U \subset \|X\|$ eine offene Teilmenge, so berechnen wir ihr Bild in $|X|$ durch das Bild ihres Urbilds V in $\coprod_n NX_n \times |\Delta^n|$ unter

$$\coprod_n NX_n \times |\Delta^n| \hookrightarrow \coprod_n X_n \times |\Delta^n| \xrightarrow{q} |X|.$$

Bezeichne \bar{V} den Abschluss von $V \subset \coprod_n X_n \times |\Delta^n|$ unter \sim -Äquivalenz. Es gilt $\bar{V} = q^{-1}(q(V))$ und wir müssen nach Definition der Quotiententopologie zeigen, dass \bar{V} offen ist. Bezeichne für x einen nichtdegenerierten Simplex von X den Schnitt von V mit dem zu x gehörigen geometrischen Simplex $|\Delta^n|$ mit V_x . Bei Übergang von V zu \bar{V} kommen dann alle Punkte (s^*x, p) mit $(x, |s|(p)) \in U_x$ hinzu. Das Urbild der offenen Menge U_x unter dem stetigen s -Kollaps $|s|$ ist dann natürlich wieder offen. \square

1.5 Iterative Konstruktion der geometrischen Realisierung

Wir geben eine weitere Interpretation der geometrischen Realisierung als iteratives Ankleben geometrischer Simplizes an ihre Ränder an und werden so insbesondere sehen, dass die geometrische Realisierung einen Hausdorffraum liefert ([?], III.1).

Bezeichne dazu $\|X^{\leq k}\| = \coprod_{n=0}^k NX_n \times |\Delta^n| / \sim_N$ die geometrische Realisierung durch nichtdegenerierte Simplizes der Dimension $\leq k$. Wir erhalten Einbettungen $\|X^{\leq k}\| \hookrightarrow \|X\|$ sowie $\|X\| = \bigcup_k \|X^{\leq k}\|$, denn die Äquivalenzrelation von ganz $\|X\|$ fügt keine neuen Identifikationen auf den Teilmengen $\|X^{\leq k}\| \subset \|X\|$ hinzu.

Wir können die $\|X^{\leq k}\|$ iterativ konstruieren. Betrachte dazu die stetigen Abbildungen π_k , die uns den “ k -dimensionalen Teil” von $\|X\|$ liefern:

$$\pi_k : NX_k \times |\Delta^k| \hookrightarrow \coprod_{n=0}^k NX_n \times |\Delta^n| \twoheadrightarrow \|X^{\leq k}\|.$$

Proposition 1.10 ([?], III.1, [?], I.2.3). *Sei $X \in \mathbf{sEns}$ eine simpliziale Menge. Dann ist*

$$\begin{array}{ccc} NX_k \times \partial|\Delta^k| & \hookrightarrow & NX_k \times |\Delta^n| \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \pi_k \\ \|X^{\leq k-1}\| & \hookrightarrow & \|X^{\leq k}\| \end{array}$$

ein Pushout topologischer Räume. Dabei ist die Abbildung links auf der i -ten Kante $|d_i| : |\Delta^{k-1}| \hookrightarrow \partial|\Delta^k|$ gegeben durch

$$\begin{aligned} NX_k \times |\Delta^{k-1}| &\rightarrow \|X^{\leq k-1}\| \\ (x, p) &\mapsto [(N_s(d_i^*x), |s|(p))]. \end{aligned}$$

Beweis. Die Definition der Abbildung links ist sinnvoll, da sie auf den niederdimensionalen Überschneidungskanten von $|d_i||\Delta^k|$ und $|d_j||\Delta^k|$ übereinstimmt.

Sowohl der Pushout des Diagramms als auch $\|X^{\leq k}\|$ sind Quotienten von $\coprod_{n=0}^k NX_n \times |\Delta^n|$ nach gewissen Äquivalenzrelationen. Bezeichne die Einschränkung von \sim_N auf $\coprod_{n=0}^k NX_n \times |\Delta^n|$ mit \sim_N^k . Die erzeugenden Relationen für \sim_N^k sind:

$$(x, |d_i|(p)) \sim (N_s(d_i^*x), |s|(p)) \quad \text{für } x \in NX_n, n \leq k.$$

Das sind für $x \in NX_n$ und $n \leq k-1$ genau die erzeugenden Relationen von \sim_N^{k-1} und für $n = k$ genau die Relationen aus der Definition des Pushouts. \square

Korollar 1.11. *Die geometrische Realisierung $|X|$ einer simplizialen Menge $X \in \mathbf{sEns}$ ist ein CW-Komplex und insbesondere ein Hausdorffraum.*

Beweis. Die vorangegangene Proposition zeigt, dass es sich um einen CW-Komplex handelt. Die Pushouts sind dabei das Ankleben von k -Zellen $D^k \cong |\Delta^k|$. Konkret zur Hausdorff-Eigenschaft: Seien $p, q \in \|X\|$, $p \neq q$. Dann gibt es ein k mit $p, q \in \|X^{\leq k}\| \setminus \|X^{\leq k-1}\|$. Somit liegt ohne Einschränkung p im Inneren eines k -Simplexes und kann ohne Probleme durch disjunkte offene Umgebungen $U_k, V_k \subset \|X^{\leq k}\|$ von Randpunkten dieses Simplexes und Punkten in anderen Simplizes getrennt werden. Wir erhalten daraus disjunkte offene Umgebungen U und V in ganz $|X|$, indem wir sie “baryzentrisch ergänzen”: Sei dazu zu jedem geometrischen Standardsimplex $|\Delta^n|$ ein ausgezeichnete Punkt z_n in seinem offenen Inneren fest gewählt (etwa das Baryzentrum). Wir setzen für $n \geq k$ induktiv

$$U_{n+1} = \{ [(y, r)] \in \|X^{\leq n+1}\| \mid \begin{array}{l} y \in NX_{n+1}, \exists t \in (0, 1], w \in |\Delta^n| : \\ (d_i^*y, w) \in U_n, r = tw + (1-t)z_y \end{array} \},$$

den konvexen Abschluss zu z_y von U_n in den an U_n angrenzenden Simplizes y und dann $U = \bigcup_{n \geq k} U_n$ sowie V entsprechend. Diese Teilmengen sind nach Induktion disjunkt, offen und enthalten p bzw. q . \square

1.6 Kompakt erzeugte Hausdorffräume

Die geometrischen Realisierungen simplizialer Mengen liegen tatsächlich sogar in einer in ihren kategoriellen Eigenschaften bequemen (engl. *convenient*) Kategorie topologischer Räume, den kompakt erzeugten Hausdorffräumen.

Definition 1.12 ([?]). Ein topologischer Raum X heißt kompakt erzeugt, falls gilt: eine Teilmenge $A \subset X$ ist abgeschlossen, falls $A \cap K$ in K abgeschlossen ist für jedes Kompaktum $K \subset X$.

Bemerkung 1.13. Äquivalent dazu ist: eine Teilmenge $U \subset X$ ist offen, falls $U \cap K$ in K offen ist für jedes Kompaktum $K \subset X$.

Wir notieren volle Unterkategorie der kompakt erzeugten topologischen Räume in den topologischen Räumen mit CG und der kompakt erzeugten Hausdorffräume mit CGHaus. Die kompakt erzeugten topologischen Räume umfassen eine sehr

große Klasse an relevanten topologischen Räumen, etwa CW-Komplexe (nach dem nachfolgenden Lemma 1.14) oder erstabzählbare Räume ([?], 2.2).

Für uns relevant sind die folgenden Kriterien:

Lemma 1.14. (i) *Ist X ein lokal kompakter topologischer Raum, so ist X kompakt erzeugt.*

(ii) *Ist $p : X \rightarrow Y$ eine Quotientenabbildung (d. h. Y trägt die Finaltopologie bezüglich p) und X kompakt erzeugt, so ist auch Y kompakt erzeugt.*

(iii) *Ist X ein CW-Komplex, so ist X kompakt erzeugt.*

Beweis. (i) Sei $U \subset X$ mit $U \cap K$ offen für alle $K \subset X$ kompakt. Mit der Lokalkompaktheit von X wählen wir zu jedem $x \in X$ eine kompakte Umgebung K_x und erhalten, dass $U = \bigcup_{x \in X} U \cap K_x$ offen ist als Vereinigung offener Mengen.

(ii) Sei $A \subset Y$ mit $A \cap K$ abgeschlossen für alle $K \subset Y$ kompakt. Mit der Finaltopologie auf Y gilt, dass $A \subset Y$ genau dann abgeschlossen ist, wenn $p^{-1}(A) \subset X$ abgeschlossen ist. Sei nun $\tilde{K} \subset X$ kompakt. Es ist $p^{-1}(A) \cap \tilde{K}$ abgeschlossen, denn $p(p^{-1}(A) \cap \tilde{K}) = p(\tilde{K}) \cap A$ ist abgeschlossen nach Voraussetzung ($p(\tilde{K}) \subset Y$ ist kompakt als stetiges Bild eines Kompaktums). Da X kompakt erzeugt ist, folgt nun, dass $p^{-1}(A)$ abgeschlossen ist und somit auch $A \subset Y$.

(iii) Die n -Bälle D^n und $n - 1$ -Sphären S^{n-1} sind kompakt erzeugt nach ???. Disjunkte Vereinigungen kompakt erzeugter Räume sind kompakt erzeugt. Quotienten kompakt erzeugter Räume sind kompakt erzeugt nach ???. Da kompakte Teilmengen von CW-Komplexen nur endlich viele offene Zellen treffen, ist auch die Vereinigung über alle n -Skelette kompakt erzeugt.

□

Daraus folgt sofort unser Ziel.

Korollar 1.15. *Die geometrische Realisierung $|X|$ einer simplizialen Menge $X \in \mathbf{sEns}$ ist ein kompakt erzeugter Hausdorffraum.*

Beweis. Es handelt sich um einen Hausdorffraum nach 1.11. Nach 1.14 (i) ist $\prod_n X_n \times |\Delta^n|$ kompakt erzeugt und mit 1.14 (ii) auch $|X|$. Das folgt auch aus 1.11 und 1.14 ???. □

Bemerkung 1.16. Die geometrische Realisierung $|\cdot| : \mathbf{sEns} \rightarrow \mathbf{CGHaus}$ vertauscht mit endlichen Limites. Ganz allgemein lassen sich endliche Limites als Egalisatoren endlicher Produkte darstellen. Der Egalisator in \mathbf{Top} zweier stetiger Abbildungen zwischen kompakt erzeugten Hausdorffräumen ist dabei als abgeschlossener Unterraum eines kompakt erzeugten Hausdorffraums selbst wieder in \mathbf{CGHaus} und erfüllt die universelle Eigenschaft in dieser Unterkategorie. Das Vertauschen der Realisierung mit Egalisatoren folgt direkt aus der Definition. Für das Vertauschen mit endlichen Produkten verweisen wir auf [?]. Entscheidend ist, dass das Produkt in \mathbf{Top} zweier kompakt erzeugter Hausdorffräume im Allgemeinen nicht wieder kompakt erzeugt ist. Das korrekte Produkt in \mathbf{CGHaus}

heißt auch *Kelley-Produkt* und ist gegeben durch Anwenden des Linksadjungierten der Inklusion $\mathbf{CG} \rightarrow \mathbf{Top}$ auf das Produkt in \mathbf{Top} . Dieser Linksadjungierte $k : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{CG}$ verfeinert die Topologie eines Raumes X um alle Mengen $U \subset X$, deren Schnitte mit allen Kompakta $K \subset X$ in K offen sind, also genau um die für kompakte Erzeugtheit benötigten. Es gilt also:

$$|X \times Y| \xrightarrow{\sim} k(|X| \times |Y|).$$

Beispiel 1.17.

1.7 Geometrische Realisierung als Koende

Die Sprache der Enden und Koenden ermöglicht uns eine allgemeinere Sicht auf die geometrische Realisierung und wird sich später als nützlich erweisen, um andere Formen der geometrischen Realisierung einzuführen. Wir führen Koenden und ihre Eigenschaften ein, Enden sind dazu formal dual. Die Darstellung folgt [?].

Definition 1.18 ([?], 1.1 f.). Sei $F : C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ ein Funktor. Ein Objekt $K \in D$ mit Morphismen $\iota_c : F(c, c) \rightarrow K$ für alle $c \in C$ heißt Kokeil für F , falls für alle Morphismen $f : c \rightarrow d$ in C das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} F(d, c) & \xrightarrow{F(f, \text{id})} & F(c, c) \\ \downarrow F(\text{id}, f) & & \downarrow \iota_c \\ F(d, d) & \xrightarrow{\iota_d} & K \end{array}$$

Die Kokeile für F bilden eine Kategorie (Morphismen verträglich mit den ι_c). Ein initiales Objekt in der Kategorie der Kokeile für F (ein universeller Kokeil) heißt das Koende von F .

Ein Kokeil für einen Funktor $F : C^{\text{op}} \times C \rightarrow D^{\text{op}}$ heißt entsprechend Keil für den assoziierten Funktor $F^{\text{op}} : C \times C^{\text{op}} \rightarrow D$ und ein universeller Keil das Ende des Funktors F^{op} . Wir notieren häufig das Koende von F als Integral:

$$\int^{c \in C} F(c, c).$$

Wir können Koenden als Koegalisateur von Koproducten darstellen:

Lemma 1.19 ([?], 1.14). Sei $F : C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ ein Funktor und K sein Koende. Dann ist das folgende Diagramm ein Koegalisateur:

$$\coprod_{f: c \rightarrow d} F(d, c) \xrightarrow[\substack{F(f, \text{id}) \\ F(\text{id}, f)}]{F(f, \text{id})} \coprod_{c \in C} F(c, c) \rightarrow K.$$

Beweis. Der Morphismus in das Koende ist von den $\iota_c : F(c, c) \rightarrow K$ induziert, die Morphismen des Egalisators durch die angegebenen Morphismen auf den Komponenten $F(d, c) \xrightarrow{F(f, \text{id})} F(c, c)$ und $F(d, c) \xrightarrow{F(\text{id}, f)} F(d, d)$. Die universellen Eigenschaften, die den Koegalisateur und das Koende definieren, sind dann identisch. \square

Sind $F : C^{\text{op}} \rightarrow D$ und $G : C \rightarrow D$ Funktoren und ist D eine monoidale Kategorie (Schmelzkategorie mit universellen Verschmelzungen), so definieren sie einen Funktor

$$\begin{aligned} C^{\text{op}} \times C &\rightarrow D \times D \rightarrow D, \\ (a, b) &\mapsto (Fa, Gb) \mapsto Fa \otimes Gb. \end{aligned}$$

Das Koende über diesen Funktor heißt das *Tensorprodukt* $F \otimes G$ von F und G .

Wir erinnern an die Darstellung der geometrischen Realisierung mit Koegalisa-
tor und Koprodukt:

$$|X| \xrightarrow{\sim} \left(\coprod_n X_n \times |\Delta^n| \right) / \sim$$

mit dem Quotienten nach der Äquivalenzrelation

$$(x, |f|(p)) \sim (f^*x, p)$$

für alle monotonen $f : [m] \rightarrow [n]$. Das ist gerade der Koegalisa-
tor

$$\coprod_{f:[n] \rightarrow [m]} X_n \times |\Delta^m| \xrightarrow[\text{id} \times |f|]{f^* \times \text{id}} \coprod_{[n]} X_n \times |\Delta^n| \rightarrow |X|$$

aus 1.17 und mithin, falls Top mit ihrer kartesischen Schmelzstruktur durch
Produkte versehen ist, das Tensorprodukt der Funktoren

$$\begin{aligned} X : \Delta^{\text{op}} &\rightarrow \text{Ens} \rightarrow \text{Top} & \text{und} \\ R : \Delta &\rightarrow \text{Top}, & [n] \mapsto |\Delta^n|, \end{aligned}$$

wobei die Mengen X_n als diskrete topologische Räume aufgefasst werden ([?],
III.1):

$$|X| = X \otimes R.$$

Bemerkung 1.20. Rückblickend halten wir fest, dass während unsere durch die
“Kostetigkeitseigenschaft” für die Simplexkategorie $\Delta \downarrow_r X$ (Gl. 1.3, 1.2) de-
finierte geometrische Realisierung in dieser Situation elegant ist, sie auf einer
konkreten Eigenschaft der Situation simplizialer *Mengen* beruht, die wir bei all-
gemeineren simplizialen Objekten nicht mehr gegeben haben. Konkret werden
wir im nächsten Abschnitt einen gewissen Begriff einer Wirkung einer Katego-
rie auf einer anderen Kategorie erklären (Koexponentiale, siehe ??). Die Be-
sonderheit simplizialer Mengen beruht nun darauf, dass sich die Wirkung von
 Ens auf Top $(X_n, |\Delta^n|) \mapsto \coprod_{X_n} |\Delta^n|$ als von der Wirkung von Ens auf $s\text{Ens}$,
 $(X_n, \Delta^n) \mapsto \coprod_{X_n} \Delta^n \cong \left\{ \Delta^n \xrightarrow{x} X \mid x \in X_n \right\}$ induziert darstellen lässt, was uns
zum Begriff der Simplexkategorie von X geführt hat. Bei Wirkungen wie von
 Top auf Top durch das kartesische Produkt wird es nicht mehr möglich sein,
die $\Delta^n \rightarrow X$ aus der Simplexkategorie als topologischen Raum aufzufassen. Un-
sere Beschreibung der geometrischen Realisierung als Koende ist also die für
allgemeinere Kontexte richtige Beschreibung.

1.8 Der (Ko-) Enden-Kalkül

Die Sprache der (Ko-) Enden besitzt eine Reihe an Verträglichkeits- und Umformungseigenschaften, die sie zu einem mächtigen Werkzeug für eine Vielzahl formaler Rechnungen in Anwendungen der Kategorientheorie machen (für Beispiele siehe [?]). Im folgenden werden einige Umformungsregeln dieses Kalküls¹ zusammengestellt.

Lemma 1.21 (Funktorialität, [?]). *Sind $F \xrightarrow{\eta} G \xrightarrow{\tau} H$ Transformationen von Funktoren $F, G, H : C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$, deren Koenden existieren, so sind die auf den Koenden induzierten Morphismen*

$$\int (\tau \circ \eta), \int \tau \circ \int \eta : \int^c F(c, c) \rightarrow \int^c H(c, c)$$

durch die Transformationen auf den Koenden gegeben und damit verträglich: $\int (\tau \circ \eta), \int \tau \circ \int \eta$.

Beweis. Dies folgt sofort aus der Eindeutigkeit dieses Morphismus in der universellen Definition von Koenden. \square

Lemma 1.22 (Fubini, [?], 1.9, [?], IX, 8). *Sei $F : C^{\text{op}} \times C \times D^{\text{op}} \times D \rightarrow E$ ein Funktor. Dann ist*

$$\int^{c \in C} F(c, c, \cdot, \cdot) : D^{\text{op}} \times D \rightarrow E$$

ein Funktor und es gilt

$$\int^{d \in D} \int^{c \in C} F(c, c, d, d) \xrightarrow{\sim} \int^{(c, d) \in C \times D} F(c, c, d, d),$$

wobei rechts F als Funktor $F : (C \times D)^{\text{op}} \times (C \times D)$ aufgefasst wird.

Beweis. Sei $K : D^{\text{op}} \times D \rightarrow E$ ein Kokeil für $F : C^{\text{op}} \times C \rightarrow [D^{\text{op}} \times D, E]$ in der Funktorkategorie $D^{\text{op}} \times D \rightarrow E$ und $L(K)$ ein Kokeil für K . Auch solche iterierten Kokeile $L(K)$ bestehen aus Morphismen $F(c, c, d, d) \rightarrow L(K)$ für alle c, d als Komposition von $F(c, c, \cdot, \cdot) \Rightarrow K$ ausgewertet auf $(d, d) \in D^{\text{op}} \times D$ mit $K(d, d) \rightarrow L(K)$. Sie erfüllen die Kommutativitätseigenschaft von Kokeil-Quadraten für alle Morphismen der Form (f, id_d) in $C \times D$ (die Transformation aus der Kokeil-Eigenschaft von K ausgewertet in $(d, d) \in D^{\text{op}} \times D$ sowie (id_c, g) in $C \times D$ (durch Vorschalten der zur Transformation $F(c, c, \cdot, \cdot) \Rightarrow K$ gehörigen Morphismen vor das Kokeil-Quadrat von $L(K)$)).

Nach denselben Argumenten definiert ein Kokeil M für $F : (C \times D)^{\text{op}} \times (C \times D)$ einen iterierten Kokeil: Wir können einen iterierten Kokeil “sparsam” angeben, indem wir die inneren Kokeile nicht für alle $(d, d') \in D^{\text{op}} \times D$, sondern nur für Diagonalelemente $(d, d) \in D^{\text{op}} \times D$ sowie “Morphismenobjekte” $(d', d) \in D^{\text{op}} \times D$ für einen Morphismus $f : d \rightarrow d'$ angeben. Der iterierte Kokeil ist dadurch vollständig festgelegt, da ja nur diese Kokeile in den Daten eines

¹Bei der Übersetzung aus dem Englischen geht leider die Analogie zu den Regeln der Differentiations- und Integrationstheorie verloren.

iterierten Kokeils eine Rolle spielen. Nun ist M zunächst wegen der Kommutativität von

$$\begin{array}{ccc} F(c', c, d, d) & \longrightarrow & F(c, c, d, d) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(c', c', d, d) & \longrightarrow & M \end{array}$$

ein (d, d) -Kokeil und dann durch Setzen der Inklusionen $F(c, c, d', d) \rightarrow M$ als Komposition $F(c, c, d', d) \rightarrow F(c, c, d', d') \rightarrow M = F(c, c, d', d) \rightarrow F(c, c, d, d) \rightarrow M$ wegen der Kommutativität von

$$\begin{array}{ccccc} F(c', c, d', d) & \longrightarrow & & \longrightarrow & F(c, c, d', d) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ & & & & F(c, c, d, d) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ F(c', c', d', d) & \longrightarrow & F(c', c', d', d') & \longrightarrow & M \end{array}$$

auch ein (d', d) -Morphismenkokeil. Klarerweise ist dann auch M ein iterierter Kokeil über sich selbst als (d, d) - und (d', d) -Kokeil.

Morphismen von Kokeilen entsprechen nun Morphismen iterierter Kokeile und damit entsprechen sich auch Koenden alias die initialen Objekte der beiden Kategorien. \square

Bemerkung 1.23. Unser Argument verbessert die Aussage von [?], IX.8, geringfügig, da wie angedeutet nicht alle (d', d) -Koenden existieren müssen.

Ein weniger ad hoc formuliertes Argument würde Kokeile wie in als Kolimites über die zugehörige *twisted arrow category* ([?], 1.12 f.) bzw. *subdivision category* ([?], IX.5) beschreiben und die Aussage damit auf die für iterierte Kolimites und die jeweiligen Pfeilkategorien zurückführen.

Definition 1.24. Sei $F : C \rightarrow D$ ein Funktor. F heißt *stetig*, falls er mit allen Limites vertauscht. F heißt *kostetig*, falls er mit allen Kolimites vertauscht.

Lemma 1.25 (Koenden und kostetige Funktoren, [?], 1.16). *Ist $F : D \rightarrow E$ ein kostetiger Funktor und $T : C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ ein Funktor, dann ist der natürliche Morphismus*

$$F \int^c T(c, c) \xrightarrow{\sim} \int^c F \circ T(c, c),$$

ein Isomorphismus, wann immer eines der beiden Koenden existiert.

Beweis. Das folgt direkt aus unserer Beschreibung von Koenden als Kolimites in 1.17. \square

Bemerkung 1.26. Das wichtigste Beispiel für diesen Fall ist der Hom-Funktor. Praktisch nach Definition von Limes und Kolimes sind $D(d, \cdot) : D \rightarrow \text{Ens}$ und $D(\cdot, d) : D^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ stetig. Wir erhalten für $F : C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$:

$$\begin{aligned} D(d, \int_c F(c, c)) &\xrightarrow{\sim} \int_c D(d, F(c, c)) \\ D(\int_c F(c, c), d) &\xrightarrow{\sim} \int_c D(F(c, c), d). \end{aligned}$$

Lemma 1.27 (Transformationen als Ende, [?], 1.18). *Seien $F, G : C \rightarrow D$ zwei Funktoren. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$[C, D](F, G) \xrightarrow{\sim} \int_c D(Fc, Gc).$$

Beweis. Transformationen $F \Rightarrow G$ sind genau diejenigen Tupel aus $\prod_c D(Fc, Gc)$, für die für jedes $f : c \rightarrow d$ in C die Bilder rechts unten im Diagramm übereinstimmen:

$$\begin{array}{ccc} & D(Fc, Gc) & \\ & \downarrow Gf \circ & \\ D(Fd, Gd) & \xrightarrow{\circ Ff} & D(Fc, Gd) \end{array} \quad .$$

Damit ist $[C, D](F, G)$ der Egalisator aus der Dualisierung von 1.17 und folglich das angegebene Ende. \square

1.8.1 Angereicherte Kategorien

In der ursprünglichen Definition einer Kategorie tragen die Morphismen $C(x, y)$ die Struktur einer Menge. Der Wunsch, Begriffe wie “die Summe zweier Morphismen” oder “der Nullmorphismus” aus der Kategorie der R -Moduln auch kategorientheoretisch zu erfassen, brachte uns zum Begriff der additiven Kategorien, bei denen Morphismenmengen abelsche Gruppen sind und Funktoren Gruppenhomomorphismen auf den Morphismengruppen induzieren. Diese Konstruktion möchten wir auch für Kategorien zur Verfügung stehen haben, bei denen die Morphismenmengen eine andere Struktur tragen (etwa die eines topologischen Raums) oder gar keine Mengen sind, sondern Objekte einer anderen Kategorie V . Solche Kategorien bezeichnet man als über V angereicherte (engl. *enriched*) Kategorien. Wir imitieren die herkömmliche Definition von Kategorien:

Definition 1.28 (Angereicherte Kategorie). Sei V eine monoidale Kategorie (Schmelzkategorie mit universellen Verschmelzungen). Eine über V angereicherte Kategorie C (V -Kategorie) besteht aus:

1. einer Klasse von Objekten $\text{Ob}(C)$
2. für jedes Paar von Objekten (x, y) ein Objekt $C(x, y) \in V$
3. einer Komposition $C(x, y) \otimes C(y, z) \rightarrow C(x, z)$
4. für jedes Objekt $x \in \text{Ob}(C)$ einem Morphismus in V $\text{id}_x : I \rightarrow C(x, x)$ für I die universelle 0-Verschmelzung,

sodass die Komposition assoziativ ist (bezüglich des eindeutigen Morphismus $C(w, x) \otimes (C(x, y) \otimes C(y, z)) \xrightarrow{\sim} (C(w, x) \otimes C(x, y)) \otimes C(y, z)$) und verträglich mit den Identitäten (bezüglich der eindeutigen Morphismen $C(x, y) \otimes I \xrightarrow{\sim} C(x, y)$ und $I \otimes C(x, y) \xrightarrow{\sim} C(x, y)$).

Ein Funktor zwischen V -Kategorien $F : C \rightarrow D$ ist eine Zuordnung auf Objekten $F : c \mapsto Fc$ zusammen mit Morphismen $C(x, y) \rightarrow D(Fx, Fy)$ in V .

Beispiel 1.29. *Eine Kategorie ist eine über \mathbf{Ens} angereicherte Kategorie bezüglich der kartesischen monoidalen Struktur auf \mathbf{Ens} . Eine Kategorie mit additiver Struktur ist eine über \mathbf{Ab} angereicherte Kategorie bezüglich des Tensorprodukts auf \mathbf{Ab} . Jede monoidale Kategorie mit adjungiertem internem \mathbf{Hom} (monoidale geschlossene Kategorie) V ist eine V -Kategorie über sich selbst.*

In einer monoidalen geschlossenen Kategorie V haben wir die Adjunktion

$$V(a \otimes b, c) \xrightarrow{\sim} V(a, V(b, c))$$

mit $V(b, c) = (b \Rightarrow c)$ dem internen \mathbf{Hom} -Objekt. Das Objekt $a \otimes b$ ist dann ein darstellendes Objekt für den Funktor $c \mapsto V(a, V(b, c))$ und heißt manchmal auch Koexponential (engl. *copower*) von a und b . Wir verallgemeinern diese Situationen auf Koexponentiale in angereicherten Kategorien:

Definition 1.30. Sei C eine V -Kategorie. Ist $x \in C$ ein darstellendes Objekt für den Funktor $c \mapsto V(v, C(b, c))$ mit $v \in V, b \in C$, gilt also

$$C(x, c) \xrightarrow{\sim} V(v, C(b, c))$$

natürlich in $c \in C$, so heißt $x = v \odot b$ das Koexponential von v und b .

In diesem Fall nennt man die Kategorie C auch *tensoriert über V* .

Beispiel 1.31. *Jede Kategorie mit beliebigen Koprodukten hat Koexponentiale über \mathbf{Ens} . Mit $V \odot B = \coprod_V B$ gilt:*

$$C(V \odot B, C) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Ens}(V, C(B, C)).$$

Wir können nun auch die geometrische Realisierung in der Sprache angereicherter Kategorien formulieren. Ist C eine V -Kategorie mit Koexponentialen und sind Funktoren

$$\begin{array}{ccc} R : \Delta & \rightarrow C & \text{und} \\ X : \Delta^{\mathrm{op}} & \rightarrow V & \end{array}$$

gegeben, so erklären wir die geometrische Realisierung von X als das Koende über den Funktor

$$\begin{aligned} \Delta^{\mathrm{op}} \times S &\rightarrow C, \\ [n], [m] &\mapsto X[n] \odot R[m]. \end{aligned}$$

Der Fall simplizialer Mengen ist $C = \mathbf{Top}$ und $V = \mathbf{Ens}$ mit dem kanonischem Koexponential.