

# 1 Schwach konstruierbare Garben auf Simplizialkomplexen

Ziel dieses Abschnitts ist es, eine geometrischere Charakterisierung von Garben auf einem Simplizialkomplex  $\mathcal{K}$  zu geben. Wir werden sehen, dass sie sich als simplizial konstante Garben auf der geometrischen Realisierung von  $\mathcal{K}$  auffassen lassen. Anschließend wollen wir die Ergebnisse auch auf die derivierte Kategorie der Garben auf  $\mathcal{K}$  übertragen. Die Darstellung folgt im Wesentlichen [?] und [?].

In diesem Abschnitt bezeichne  $(V, \mathcal{K})$  stets einen lokal-endlichen Simplizialkomplex mit Eckenmenge  $V$ . Für einen Simplex  $\sigma \in \mathcal{K}$  definieren wir seine geometrische Realisierung  $|\sigma| \subset \mathbb{R}^V = \text{Ens}(V, \mathbb{R})$ :

$$|\sigma| = \{x \in \mathbb{R}^V \mid x(v) = 0 \text{ für } v \notin \sigma, x(v) > 0 \text{ für } v \in \sigma, \sum_{v \in V} x(v) = 1\},$$

sowie die geometrische Realisierung  $|\mathcal{K}| \subset \mathbb{R}^V$  von  $\mathcal{K}$

$$\bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} |\sigma|,$$

jeweils versehen mit der induzierten Topologie von  $\mathbb{R}^V$ .

Wir erhalten eine Abbildung

$$p : |\mathcal{K}| \rightarrow \mathcal{K},$$

genannt Simplexanzeiger oder Indikatorabbildung, der einem Punkt  $x \in |\mathcal{K}|$  in der geometrischen Realisierung den eindeutigen Simplex  $\sigma \in \mathcal{K}$  mit  $x \in |\sigma|$  zuordnet.

**Lemma 1.** *Der Simplexanzeiger  $p : |\mathcal{K}| \rightarrow \mathcal{K}$  ist stetig.*

*Beweis.* Das Urbild einer Basismenge ( $\geq \sigma$ ) ist

$$p^{-1}((\geq \sigma)) = |\mathcal{K}| \cap \{x \in \mathbb{R}^V \mid x(v) > 0 \text{ für } v \in \sigma\},$$

der offene Stern um  $\sigma$ , den wir auch als  $U(\sigma)$  notieren. □

**Definition 2.** Eine Garbe  $F \in \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$  heißt schwach  $|\mathcal{K}|$ -konstruierbar (oder kurz: schwach konstruierbar), falls für alle  $\sigma \in \mathcal{K}$ , die Einschränkungen  $F|_{|\sigma|}$  konstante Garben sind. Wir bezeichnen die volle Unterkategorie der schwach konstruierbaren Garben in  $\text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$  mit  $\text{s-Kons}(\mathcal{K})$ .

Eine derivierte Garbe  $F \in \text{Der}(\text{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$  heißt schwach  $|\mathcal{K}|$ -konstruierbar, falls für alle  $j \in \mathbb{Z}$  die Kohomologiegarben  $H^j(F)$  schwach konstruierbar sind. Wir bezeichnen die volle Unterkategorie der schwach konstruierbaren derivierten Garben in  $\text{Der}(\text{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$  mit  $\text{Der}_{\text{sk}}(|\mathcal{K}|)$ .

Wir bemerken zunächst:

**Lemma 3** ([?, 8.1.3]). *Die Kategorie  $\text{s-Kons}(\mathcal{K})$  ist abelsch.*

*Beweis.* Durch den offensichtlichen Isomorphismus zur Kategorie der abelschen Gruppen (durch den Funktor der globalen Schnitte) ist die Kategorie der konstanten abelschen Garben auf einem topologischen Raum  $X$  eine abelsche Kategorie. Nun folgt die Aussage aus der Exaktheit und Additivität des Pullbacks  $i_\sigma^*$  entlang den Inklusionen  $i_\sigma : |\sigma| \hookrightarrow |\mathcal{K}|$ .  $\square$

Entscheidend ist die folgende Charakterisierung schwach  $|\mathcal{K}|$ -konstruierbarer Garben:

**Proposition 4** ([?], 8.4.6.3). *Für  $F \in \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$  sind äquivalent:*

- (1)  $F$  ist schwach  $|\mathcal{K}|$ -konstruierbar
- (2) Die Koeinheit der Adjunktion ist auf  $F$  ein Isomorphismus  $p^*p_*F \xrightarrow{\sim} F$ .
- (3)  $F$  liegt im wesentlichen Bild des Rückzugs  $p^*$ .
- (4) Die Restriktion  $F(U(\sigma)) \rightarrow F_x$  ist für alle  $\sigma \in \mathcal{K}$  und alle  $x \in |\sigma|$  ein Isomorphismus.

*Beweis.* Die Äquivalenz (2)  $\Leftrightarrow$  (3) ist allgemein kategorientheoretischer Natur. Dabei ist (2)  $\Rightarrow$  (3) offensichtlich (nimm  $p_*F$ ) und (3)  $\Rightarrow$  (2) folgt aus den Dreiecksidentitäten.

Die Äquivalenz (2)  $\Leftrightarrow$  (4) folgt aus der Bestimmung der Halme von  $p^*p_*F$ . Zunächst bemerken wir, dass in  $\mathcal{K}$  die Menge  $(\geq \sigma)$  die kleinste offene Umgebung von  $\sigma$  ist, und wir also  $p_*F((\geq \sigma)) \xrightarrow{\sim} (p_*F)_\sigma$  erhalten. Somit gilt für  $x \in |\sigma|$ :

$$(p^*p_*F)_x \xrightarrow{\sim} (p_*F)_\sigma \xrightarrow{\sim} p_*F((\geq \sigma)) \xrightarrow{\sim} F(U(\sigma)). \quad (1)$$

Dabei wurde die Beschreibung der Halme des Rückzugs (mit  $p(x) = \sigma$ ), obige Darstellung der Halme auf  $\mathcal{K}$  und die Definition des Vorschubs (mit  $p^{-1}((\geq \sigma)) = U(\sigma)$ ) verwendet.

Die Implikation (4)  $\Rightarrow$  (1) folgt direkt aus dem nachgestellten Lemma, angewandt auf die Einschränkung von  $F$  auf  $U(\sigma)$ , und der Tatsache, dass beliebige Einschränkungen konstanter Garben wieder konstant sind.

Für die umgekehrte Richtung reicht es, die Aussage für die Einschränkung von  $F$  auf  $U(\sigma)$  zu zeigen. Wir betrachten für  $x \in |\sigma|$  die Zusammenziehung

$$\begin{aligned} h : (0, 1] \times U(\sigma) &\rightarrow U(\sigma), \\ (t, y) &\mapsto h(t, y) = ty + (1 - t)x. \end{aligned}$$

Die Mengen  $h(\{t\} \times U(\sigma))$  bilden für  $t \in (0, 1]$  eine Umgebungsbasis von  $x$ , wir müssen also nur noch den Kolimes der Schnitte über diese Mengen bestimmen. Bezeichne  $\pi : (0, 1] \times U(\sigma) \rightarrow U(\sigma)$  die Projektion auf den zweiten Faktor. Nach der simplizialen Konstanz von  $F$  und wegen  $h(t, y) \in |\tau| \Leftrightarrow y \in |\tau|$  ist der Rückzug  $h^*F$  konstant auf den Fasern von  $\pi$  und lässt sich somit nach dem zweiten nachgestellten Lemma schreiben als  $\pi^*\pi_*h^*F \xrightarrow{\sim} h^*F$ . Bezeichne

$\iota_t : U(\sigma) \hookrightarrow (0, 1] \times U(\sigma)$  die Inklusion. Dann erhalten wir wie gewünscht mit der Funktorialität des Rückzugs,  $\pi \circ \iota_t = \text{id}_{U(\sigma)}$  sowie  $\Gamma\pi_* = \Gamma$

$$\begin{aligned} F_x &\xrightarrow{\sim} \text{colf}_{t \in (0, 1]} F(h(\{t\} \times U(\sigma))) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{colf}_{t \in (0, 1]} \Gamma \iota_t^* h^* F \\ &\xrightarrow{\sim} \text{colf}_{t \in (0, 1]} \Gamma \iota_t^* \pi^* \pi_* h^* F \\ &\xrightarrow{\sim} \Gamma \text{id}^* \pi_* h^* F \\ &\xrightarrow{\sim} \Gamma h^* F \\ &\xrightarrow{\sim} \Gamma F = F(U(\sigma)), \end{aligned}$$

im letzten Schritt nach der Surjektivität von  $h$ .  $\square$

*Bemerkung 5.* Aus Gleichung 1 und (4) folgt insbesondere auch  $(p^* p_* F)(U(\sigma)) \xrightarrow{\sim} F(U(\sigma))$  für alle  $F \in \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$  und alle  $\sigma \in \mathcal{K}$ .

Wir tragen die benötigten Lemmata nach.

**Lemma 6** ([?], 2.1.41). *Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $F \in \text{Ens}/_X$  eine Garbe auf  $X$ , für die die Restriktion  $\Gamma F \xrightarrow{\sim} F_x$  für alle  $x \in X$  bijektiv ist. Dann ist  $F$  eine konstante Garbe auf  $X$  mit Halm  $\Gamma F$ .*

*Beweis.* Bezeichne  $c : X \rightarrow \text{top}$  die konstante Abbildung. Die Koeinheit der Adjunktion  $c^* c_* F \rightarrow F$  induziert auf den Halmen gerade die vorausgesetzten Bijektionen, ist also ein Garben-Isomorphismus.  $\square$

**Lemma 7** ([?], 6.4.17). *Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $I \subset \mathbb{R}$  ein nichtleeres Intervall,  $F \in \text{Ens}/_{X \times I}$  eine Garbe und  $\pi : X \times I \rightarrow X$  die Projektion auf den ersten Faktor. Ist  $F$  konstant auf den Fasern von  $\pi$ , so ist die Koeinheit der Adjunktion auf  $F$  ein Isomorphismus  $\pi^* \pi_* F \xrightarrow{\sim} F$ .*

*Beweis.* Die Aussage ist äquivalent zum folgenden Fortsetzungsresultat:

Für alle  $U \subset X$  und  $t \in I$  ist die Restriktion ein Isomorphismus

$$\Gamma(U \times I, F) \xrightarrow{\sim} \Gamma(U \times \{t\}, F).$$

Denn ist die Koeinheit der Adjunktion ein Isomorphismus  $\pi^* \pi_* F \xrightarrow{\sim} F$ , so bestimmen wir die Schnitte über  $U \times \{t\}$  wie folgt: Sei  $\iota : U \times \{t\} \hookrightarrow X \times I$  die Inklusion. Wir bemerken, dass  $\pi \circ \iota$  die Inklusion von  $U$  nach  $X$  ist und erhalten:

$$\Gamma(U \times \{t\}, F) = \Gamma \iota^* F \xrightarrow{\sim} \Gamma \iota^* \pi^* \pi_* F = \Gamma(U, \pi_* F) = \Gamma(U \times I, F).$$

Andersherum folgt der Isomorphismus der Koeinheit der Adjunktion aber auch aus dem Fortsetzungsresultat, denn wir können sofort den Isomorphismus auf den Halmen über  $(x, t) \in X \times I$  zeigen:

$$\begin{aligned} (\pi^* \pi_* F)_{(x, t)} &\xrightarrow{\sim} (\pi_* F)_x \\ &= \text{colf}_{U \ni x} \Gamma(U \times I, F) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{colf}_{U \ni x} \Gamma(U \times \{t\}, F) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{colf}_{V \ni (x, t)} F(V) \\ &= F_{(x, t)}. \end{aligned}$$

Dabei erhalten wir die Surjektivität von  $F(V) \rightarrow \Gamma(U \times \{t\}, F)$  aus der Bijektivität der Verknüpfung

$$\Gamma(U \times I, F) \rightarrow F(V) \rightarrow \Gamma(U \times \{t\}, F)$$

und die Injektivität aus der Eigenschaft, dass bereits die faserweise stetige Fortsetzung eindeutig ist nach der Konstanz der Einschränkungen von  $F$  auf die Fasern von  $\pi$ .

Nun können wir die Aussage zeigen. Zunächst folgt sie für  $I$  kompakt sofort aus eigentlichem Basiswechsel über dem kartesischen Diagramm mit eigentlichen und separierten Vertikalen

$$\begin{array}{ccc} (x, t) & \hookrightarrow & X \times I \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \pi \\ x & \hookrightarrow & X. \end{array}$$

Ist nun  $I \subset \mathbb{R}$  ein beliebiges Intervall, so können wir es als aufsteigende Vereinigung von Kompakta  $I = \bigcup_j I_j$  schreiben und erhalten für die Schnitte ebenfalls

$$\begin{aligned} \Gamma(U \times I, F) &= \text{Top}(U \times I, \overline{F}) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{colf}_j \text{Top}(U \times I_j, \overline{F}) = \text{colf}_j \Gamma(U \times I_j, F) \xrightarrow{\sim} \Gamma(U \times \{t\}, F). \end{aligned}$$

□

Wir bezeichnen den Funktor  $p^*p_* : \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|} \rightarrow \text{s-Kons}(\mathcal{K})$  kurz mit  $\beta$  und bemerken, dass er nach obiger Proposition ein Rechtsadjungierter zur Inklusion  $\iota : \text{s-Kons}(\mathcal{K}) \rightarrow \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$  ist. Für  $S \in \text{s-Kons}(\mathcal{K})$  und  $F \in \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$  gilt:

$$\begin{aligned} &\text{s-Kons}(\mathcal{K})(W, \beta F) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{s-Kons}(\mathcal{K})(\beta W, \beta F) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}(p_* W, p_* p^* p_* F) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}(p_* W, p_* F) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}(\beta W, F) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}(W, F). \end{aligned}$$

Dabei wurde die bekannte Adjunktion  $(p^*, p_*)$  sowie im dritten Schritt “finaler Rückzug mit zusammenhängenden Fasern” ([?], 4.3.22) benutzt.

Als Komposition zweier linksexakter Funktoren ist  $\beta$  natürlich wieder links-exakt. Der allgemeinen Terminologie folgend bezeichnen wir eine Garbe  $F \in \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$   $\beta$ -azyklisch, falls ihre höheren Derivierten von  $\beta$  verschwinden, also falls

$$R^k \beta F = 0 \text{ für alle } k > 0.$$

Später benötigen wir die folgende Charakterisierung  $\beta$ -azyklischer Garben:

**Proposition 8** ([?], 8.1.8). *Sei  $F \in \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ . Dann gilt:*

- (i)  $\Gamma(U(\sigma), R^k \beta F) \xrightarrow{\sim} H^k(U(\sigma); F)$  für alle  $\sigma \in \mathcal{K}, k \geq 0$ .
- (ii)  $F$  ist  $\beta$ -azyklisch genau dann, wenn  $H^k(U(\sigma); F) = 0$  für alle  $\sigma \in \mathcal{K}, k > 0$ .

Insbesondere sind schwach  $|\mathcal{K}|$ -konstruierbare Garben und welke Garben  $\beta$ -azyklisch.

*Bemerkung 9.* Man beachte, dass Aussage (ii) eine allgemeine Verbesserung unserer allgemeinen Charakterisierung höherer direkter Bilder als Garbifizierungen der Prägarben der Kohomologien der Fasern ist für den Fall, dass die Schnittfunktoren  $\Gamma(\pi^{-1}(U), \cdot)$  exakt sind.

*Beweis.* (ii) folgt direkt aus (i) mit  $R^k \beta F \in \text{s-Kons}(\mathcal{K})$  (vgl. 3) und unserer Aussage über die Halme 4 (4).

Mit der Exaktheit von Halmfunktoren  $F \mapsto F_x$  und 4 (4) sind die Funktoren  $\Gamma(U(\sigma), \cdot)$  auf schwach  $|\mathcal{K}|$ -konstruierbaren Garben exakt und vertauschen folglich bei einem Komplex mit der Bildung der Kohomologie. Wir erhalten für  $F \hookrightarrow I^\bullet$  eine injektive Auflösung somit

$$\Gamma(U(\sigma), R^k \beta F) = \Gamma(U(\sigma), H^k(\beta I^\bullet)) \xrightarrow{\sim} H^k(\Gamma(U(\sigma), \beta I^\bullet)) \xrightarrow{\sim} H^k(\Gamma(U(\sigma), I^\bullet)) = H^k(U(\sigma), F),$$

wobei wir im dritten Schritt 5 verwendet haben.  $\square$

Damit können wir uns nun den derivierten Kategorien zuwenden.

**Proposition 10.** *Sei  $F \in \text{Ket}^+(\text{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$  ein gegen die Richtung der Pfeile beschränkter Kettenkomplex aus  $\beta$ -azyklischen Garben mit schwach  $|\mathcal{K}|$ -konstruierbaren Kohomologiegarnen  $H^q(F)$ . Dann ist  $\beta F \rightarrow F$  ein Quasi-Isomorphismus.*

*Beweis.* Wir schneiden aus dem Kettenkomplex  $(F^n, d^n)$  kurze exakte Sequenzen aus:

$$\begin{array}{ccccccc} H^0 = \ker d^0 & \hookrightarrow & F^0 & \twoheadrightarrow & \text{im } d^0 & & \\ & & & & \text{im } d^0 & \hookrightarrow & \ker d^1 \twoheadrightarrow H^1 \\ & & & & & & \ker d^1 \hookrightarrow F^1 \twoheadrightarrow \text{im } d^1 \\ & & & & & & \vdots \end{array}$$

Sind in einer kurzen exakten Sequenz zwei der drei Objekte azyklisch, so nach dem Fünferlemma auch das dritte. Da nach Voraussetzung und 8  $F^q$  und  $H^q$   $\beta$ -azyklisch sind, sind alle oben betrachteten Objekte  $\beta$ -azyklisch und die kurzen exakten Sequenzen bleiben exakt nach Anwendung von  $\beta$ . Es folgt  $H^q(\beta F) \xrightarrow{\sim} \beta(H^q F)$  und weiter  $\beta(H^q F) \xrightarrow{\sim} H^q F$  nach der schwachen Konstruierbarkeit von  $H^q F$ .  $\square$

Wir haben soeben die anschauliche Variante für in eine Richtung beschränkte Komplexe bewiesen und versuchen uns nun an der unbeschränkten Aussage.

**Satz 11.** *Sei  $F \in \text{Ket}(\text{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$  ein Kettenkomplex aus  $\beta$ -azyklischen Garben mit schwach  $|\mathcal{K}|$ -konstruierbaren Kohomologiegarben  $H^q(F)$ . Dann ist  $\beta F \rightarrow F$  ein Quasi-Isomorphismus.*

*Beweis.* Für unseren Quasi-Isomorphismus  $H^q(\beta F) \xrightarrow{\sim} H^q(F)$  reicht es nach dem Halmkriterium und 4 (4), dass auf den Schnitten über  $U(\sigma)$  Isomorphismen  $H^q(\beta F)(U(\sigma)) \xrightarrow{\sim} H^q(F)(U(\sigma))$  induziert werden für alle  $\sigma \in \mathcal{K}$ . Nun ist aber nach 8 (ii) der Funktor  $\Gamma(U(\sigma), \cdot)$  exakt auf der vollen Unterkategorie der  $\beta$ -azyklischen Garben auf  $|\mathcal{K}|$  und vertauscht somit mit dem Bilden der Kohomologie. Wir sind also fertig, falls  $H^q(\Gamma(U(\sigma), \beta F)) \xrightarrow{\sim} H^q(\Gamma(U(\sigma), F))$ , das ist aber gerade 5.  $\square$

Damit ist der entscheidende Schritt für unser Ziel gezeigt. Wir erhalten:

*Bemerkung 12.* Kashiwara und Schapira beschränken sich auf die Äquivalenz der beschränkten derivierten Kategorien, allerdings mit der gleichen Argumentation. In [?] 1.7.12 wird eine allgemeine Aussage für solche Situationen gezeigt, die hier aber m.E. nicht benötigt wird.

**Theorem 13.** *Sei  $\mathcal{K}$  ein (lokal endlicher?) Simplicialkomplex. Die oben definierten Funktoren  $\iota, \beta$  induzieren auf den derivierten Kategorien eine Äquivalenz*

$$\text{Der}(\text{s-Kons}(\mathcal{K})) \xrightleftharpoons[R\beta]{\iota} \text{Der}_{\text{sk}}(|\mathcal{K}|).$$

*Beweis.* Mit [?], 3.6.10, finden wir für  $F \in \text{Ket}(\text{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$  eine homotopieinjektive Auflösung  $F \xrightarrow{\sim} I$  durch injektive Garben. Ist  $F \in \text{s-Kons}(\mathcal{K})$ , so können wir  $R\beta \circ \iota$  auf  $F$  mit  $I$  berechnen und erhalten

$$R\beta \iota F \xrightarrow{\sim} \beta I \xrightarrow{\sim} I \xrightarrow{\sim} F$$

nach ???.

Umgekehrt berechnen wir für  $F \in \text{Ket}(\text{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$  schwach  $|\mathcal{K}|$ -konstruierbar

$$\iota R\beta F \xrightarrow{\sim} \beta I \xrightarrow{\sim} I \xrightarrow{\sim} F$$

nach 11 und der  $\beta$ -Azyklizität injektiver Garben 8 (ii).  $\square$