

1 Schwach konstruierbare Garben auf Simplizialkomplexen

Ziel dieses Abschnitts ist die Charakterisierung schwach konstruierbarer Garben auf Simplizialkomplexen und ihrer derivierten Kategorie. Die Darstellung folgt im Wesentlichen [?] und [?].

In diesem Abschnitt bezeichne (V, \mathcal{K}) einen lokal-endlichen Simplizialkomplex mit Eckenmenge V . Für einen Simplex $\sigma \in \mathcal{K}$ definieren wir seine geometrische Realisierung $|\sigma| \subset \mathbb{R}^V = \text{Ens}(V, \mathbb{R})$:

$$|\sigma| = \{x \in \mathbb{R}^V \mid x(v) = 0 \text{ für } v \notin \sigma, x(v) > 0 \text{ für } v \in \sigma, \sum_{v \in V} x(v) = 1\},$$

sowie die geometrische Realisierung $|\mathcal{K}| \subset \mathbb{R}^V$ von \mathcal{K}

$$\bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} |\sigma|,$$

jeweils versehen mit der induzierten Topologie von \mathbb{R}^V .

Wir erhalten eine Abbildung

$$p : |\mathcal{K}| \rightarrow \mathcal{K},$$

genannt Simplexanzeiger oder Indikatorabbildung, der einem Punkt $x \in |\mathcal{K}|$ in der geometrischen Realisierung den eindeutigen Simplex $\sigma \in \mathcal{K}$ mit $x \in |\sigma|$ zuordnet.

Lemma 1. *Der Simplexanzeiger $p : |\mathcal{K}| \rightarrow \mathcal{K}$ ist stetig.*

Beweis. Das Urbild einer Basismenge ($\geq \sigma$) ist

$$p^{-1}((\geq \sigma)) = |\mathcal{K}| \cap \{x \in \mathbb{R}^V \mid x(v) > 0 \text{ für } v \in \sigma\},$$

der offene Stern um σ , den wir auch als $U(\sigma)$ notieren. □

Definition 2. Eine Garbe $F \in \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ heißt schwach $|\mathcal{K}|$ -konstruierbar (oder kurz: schwach konstruierbar), falls für alle $\sigma \in \mathcal{K}$, die Einschränkungen $F|_{|\sigma|}$ konstante Garben sind. Wir bezeichnen die volle Unterkategorie der schwach konstruierbaren Garben in $\text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ mit $\text{s-Kons}(\mathcal{K})$.

Eine derivierte Garbe $F \in \text{Der}(\text{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$ heißt schwach $|\mathcal{K}|$ -konstruierbar, falls für alle $j \in \mathbb{Z}$ die Kohomologieggarben $H^j(F)$ schwach konstruierbar sind. Wir bezeichnen die volle Unterkategorie der schwach konstruierbaren derivierten Garben in $\text{Der}(\text{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$ mit $\text{Der}_{\text{sk}}(|\mathcal{K}|)$.

Wir bemerken zunächst:

Lemma 3. *Die Kategorie $\text{s-Kons}(\mathcal{K})$ ist abelsch.*

Beweis. Durch den offensichtlichen Isomorphismus zur Kategorie der abelschen Gruppen (durch den Funktor der globalen Schnitte) ist die Kategorie der konstanten abelschen Garben auf einem topologischen Raum X eine abelsche Kategorie. Nun folgt die Aussage aus der Exaktheit des Pullbacks i_σ^* entlang den Inklusionen $i_\sigma : |\sigma| \hookrightarrow |\mathcal{K}|$. \square

Entscheidend ist die folgende Charakterisierung schwach $|\mathcal{K}|$ -konstruierbarer Garben:

Proposition 4 ([?]). *Für $F \in \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ sind äquivalent:*

1. F ist schwach $|\mathcal{K}|$ -konstruierbar
2. Die Koeinheit der Adjunktion ist auf F ein Isomorphismus $p^*p_*F \xrightarrow{\sim} F$.
3. F liegt im wesentlichen Bild des Rückzugs p^* .
4. Die Restriktion $F(U(\sigma)) \rightarrow F_x$ ist für alle $\sigma \in \mathcal{K}$ und alle $x \in |\sigma|$ ein Isomorphismus.

Beweis. Die Äquivalenz (2) \Leftrightarrow (3) ist allgemein kategorientheoretischer Natur. Dabei ist (3) \Rightarrow (2) offensichtlich (nimm p_*F) und (2) \Rightarrow (3) folgt aus den Dreiecksidentitäten.

Die Äquivalenz (2) \Leftrightarrow (4) folgt aus der Bestimmung der Halme von p^*p_*F . Zunächst bemerken wir, dass in \mathcal{K} die Menge $(\geq \sigma)$ die kleinste offene Umgebung von σ ist, und wir also $p_*F((\geq \sigma)) \xrightarrow{\sim} (p_*F)_\sigma$ erhalten. Somit gilt für $x \in |\sigma|$:

$$(p^*p_*F)_x \xrightarrow{\sim} (p_*F)_\sigma \xrightarrow{\sim} p_*F((\geq \sigma)) \xrightarrow{\sim} F(U(\sigma)).$$

Dabei wurde die Beschreibung der Halme des Rückzugs (mit $p(x) = \sigma$), obige Darstellung der Halme auf \mathcal{K} und die Definition des Vorschubs (mit $p^{-1}((\geq \sigma)) = U(\sigma)$) verwendet.

Die Implikation (4) \Rightarrow (1) folgt direkt aus dem nachgestellten Lemma, angewandt auf die Einschränkung von F auf $U(\sigma)$, und der Tatsache, dass beliebige Einschränkungen konstanter Garben wieder konstant sind.

Für die umgekehrte Richtung reicht es, die Aussage für die Einschränkung von F auf $U(\sigma)$ zu zeigen. Wir betrachten für $x \in |\sigma|$ die Zusammenziehung

$$\begin{aligned} h : (0, 1] \times U(\sigma) &\rightarrow U(\sigma), \\ (t, y) &\mapsto h(t, y) = ty + (1 - t)x. \end{aligned}$$

Die Mengen $h(\{t\} \times U(\sigma))$ bilden für $t \in (0, 1]$ eine Umgebungsbasis von x , wir müssen also nur noch den Kolimes der Schnitte über diese Mengen bestimmen. Bezeichne $\pi : (0, 1] \times U(\sigma) \rightarrow U(\sigma)$ die Projektion auf den zweiten Faktor. Nach der simplizialen Konstanz von F und wegen $h(t, y) \in |\tau| \Leftrightarrow y \in |\tau|$ ist der Rückzug h^*F konstant auf den Fasern von π und lässt sich somit nach dem zweiten nachgestellten Lemma schreiben als $h^*F \xrightarrow{\sim} \pi^*\pi_*h^*F$. Damit erhalten wir wie gewünscht

$$\begin{aligned}
F_x &\xrightarrow{\sim} \operatorname{colf}_{t \in (0,1]} F(h(\{t\} \times U(\sigma))) \\
&\xrightarrow{\sim} \operatorname{colf}_{t \in (0,1]} \Gamma \iota_t^* h^* F \\
&\xrightarrow{\sim} \operatorname{colf}_{t \in (0,1]} \Gamma \iota_t^* \pi^* \pi_* h^* F \\
&\xrightarrow{\sim} \Gamma \operatorname{id}^* \pi_* h^* F \\
&\xrightarrow{\sim} \Gamma h^* F \\
&\xrightarrow{\sim} \Gamma F = F(U(\sigma)),
\end{aligned}$$

im letzten Schritt nach der Surjektivität von h .

□

Wir tragen die benötigten Lemmata nach.

Lemma 5 ([?], 2.1.41). *Sei X ein topologischer Raum, $F \in \operatorname{Ens}/X$ eine Garbe auf X , für die die Restriktion $\Gamma F \xrightarrow{\sim} F_x$ für alle $x \in X$ bijektiv ist. Dann ist F eine konstante Garbe auf X mit Halm ΓF .*

Beweis. Bezeichne $c : X \rightarrow \operatorname{top}$ die konstante Abbildung. Die Koeinheit der Adjunktion $c^* c_* F \rightarrow F$ induziert auf den Halmen gerade die vorausgesetzten Bijektionen, ist also ein Garben-Isomorphismus. □

Lemma 6. *Sei X ein topologischer Raum, $F \in \operatorname{Ens}/X$ eine Garbe auf X und $\pi : X \rightarrow Y$ stetig mit zusammenhängenden Fasern. Ist F konstant auf den Fasern von π , so ist die Koeinheit der Adjunktion auf F ein Isomorphismus $\pi^* \pi_* F \xrightarrow{\sim} F$.*

Beweis. Es reicht, den Isomorphismus auf den Halmen zu zeigen. Die benötigte Aussage

$$\operatorname{colf}_{U \ni \pi(x)} F(\pi^{-1}(U)) \xrightarrow{\sim} \operatorname{colf}_{V \ni x} F(V)$$

folgt dabei aus dem Fortsetzungsresultat, das die Konstanz von F auf den Fasern von π impliziert:

$$F(\pi^{-1}(\pi(U))) \xrightarrow{\sim} F(U) \quad \text{für alle } U \subset X.$$

□

Wir bezeichnen den Funktor $p^* p_* : \operatorname{Ab}/X \rightarrow \operatorname{s-Kons}$ kurz mit β und bemerken, dass er nach obiger Proposition ein Rechtsadjungierter zur Inklusion $\iota : \operatorname{s-Kons} \rightarrow \operatorname{Ab}/|K|$ ist:

Als Komposition zweier linksexakter Funktoren ist β natürlich wieder linksexakt. Der allgemeinen Terminologie folgend bezeichnen wir eine Garbe $F \in \operatorname{Ab}/|K|$ β -azyklisch, falls ihre höheren Derivierten von β verschwinden, also falls

$$R^k \beta F = 0 \quad \text{für alle } k > 0.$$

Später benötigen wir die folgende Charakterisierung β -azyklischer Garben:

Proposition 7. *Eine Garbe $F \in \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ ist β -azyklisch genau dann, wenn $H^k(U(\sigma); F) = 0$ für alle $\sigma \in \mathcal{K}, k > 0$.*

Insbesondere gilt:

1. *Schwach $|\mathcal{K}|$ -konstruierbare Garben sind β -azyklisch.*
2. *Welche Garben sind β -azyklisch.*

Beweis. Nach der Charakterisierung höherer direkter Bilder ist $R^q \beta F = p^* R^q p_* F$ für $F \in \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ isomorph zur Garbifizierung der Prägarbe

$$(\geq \sigma) \mapsto H^q(p^{-1}(\geq \sigma); F) = H^q(p^{-1}(U(\sigma)); F).$$

...

□

Proposition 8. *Sei $F \in \text{Ket}^+(\text{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$ ein gegen die Richtung der Pfeile beschränkter Kettenkomplex aus β -azyklischen Garben mit schwach $|\mathcal{K}|$ -konstruierbaren Kohomologiegarden $H^q(F)$. Dann ist $\beta F \rightarrow F$ ein Quasi-Isomorphismus.*

Beweis. Wir schneiden aus dem Kettenkomplex (F^n, d^n) kurze exakte Sequenzen aus:

$$\begin{array}{ccccccc} H^0 = \ker d^0 & \hookrightarrow & F^0 & \twoheadrightarrow & \text{im } d^0 & & \\ & & & & \text{im } d^0 & \hookrightarrow & \ker d^1 \twoheadrightarrow H^1 \\ & & & & & & \ker d^1 \hookrightarrow F^1 \twoheadrightarrow \text{im } d^1 \\ & & & & & & \vdots \end{array}$$

Sind in einer kurzen exakten Sequenz zwei der drei Objekte azyklisch, so nach dem Fünferlemma auch das dritte. Da nach Voraussetzung und 7 F^q und H^q β -azyklisch sind, sind alle oben betrachteten Objekte β -azyklisch und die kurzen exakten Sequenzen bleiben exakt nach Anwendung von β . Es folgt $H^q(\beta F) \xrightarrow{\sim} \beta(H^q F)$ und weiter $\beta(H^q F) \xrightarrow{\sim} H^q F$ nach der schwachen Konstruierbarkeit von $H^q F$. □

Damit ist der entscheidende Schritt für unser Ziel gezeigt. Wir erhalten:

Theorem 9. *Sei \mathcal{K} ein lokal-endlicher Simplicialkomplex.*

Die oben definierten Funktoren ι, β induzieren auf den derivierten Kategorien eine Äquivalenz

$$\text{Der}^+(\text{s-Kons}(\mathcal{K})) \xrightleftharpoons[R\beta]{\iota} \text{Der}_{\text{sk}}^+(|\mathcal{K}|).$$

Beweis. Die Kategorien $\mathrm{Der}^+(\mathrm{s}\text{-}\mathrm{Kons}(\mathcal{K}))$ und $\mathrm{Der}_{\mathrm{sk}}^+(|\mathcal{K}|)$ haben genug Injektive. Mit der Grothendieck-Spektralsequenz für derivierte Kategorien ([?], 3.4.18) und der Exaktheit von ι erhalten wir somit

$$R\beta \circ R\iota \xrightarrow{\sim} R(\beta \circ \iota) \xrightarrow{\sim} R\mathrm{Id} = \mathrm{Id}$$

auf $\mathrm{Der}^+(\mathrm{s}\text{-}\mathrm{Kons}(\mathcal{K}))$, da welche Garben β -azyklisch sind, sowie

$$\iota \circ R\beta \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}$$

auf $\mathrm{Der}_{\mathrm{sk}}^+(|\mathcal{K}|)$ nach der vorangegangenen Proposition. □

Bemerkung 10. Kashiwara und Schapira beschränken sich auf die Äquivalenz der beschränkten derivierten Kategorien, allerdings mit der gleichen Argumentation. In [?] 1.7.12 wird eine allgemeine Aussage für solche Situationen gezeigt, die hier aber m.E. nicht benötigt wird.