1 Schwach konstruierbare Garben auf Simplizialkomplexen

Ziel dieses Abschnitts ist die Charakterisierung schwach konstruierbarer Garben auf Simplizialkomplexen und ihrer derivierten Kategorie. Die Darstellung folgt Kashiwara-Schapira.

In diesem Abschnitt bezeichne $\mathcal{K}$ einen lokal-endlichen Simplizialkomplex und $|\mathcal{K}|$ seine geometrische Realisierung. Wir erhalten eine stetige Abbildung

$$p : |\mathcal{K}| \to \mathcal{K},$$

genannt Simplexanzeiger oder Indikatorabbildung, der einem Punkt $x \in |\mathcal{K}|$ in der geometrischen Realisierung den eindeutigen Simplex $\sigma \in \mathcal{K}$ mit $x \in |\sigma|$ zuordnet.

Definition 1. *Eine Garbe $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ heißt schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbar (oder kurz: schwach konstruierbar), falls für alle $\sigma \in \mathcal{K}$, die Einschränkungen $F|_{|\sigma|}$ konstante Garben sind. Wir bezeichnen die volle Unterkategorie der schwach konstruierbaren Garben in $\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ mit $\text{s-Kons}(\mathcal{K})$.*

Eine derivierte Garbe $F \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$ heißt schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbar, falls für alle $j \in \mathbb{Z}$ die Kohomologiegarben $H^j(F)$ schwach konstruierbar sind. Wir bezeichnen die volle Unterkategorie der schwach konstruierbaren derivierten Garben in $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$ mit $\mathrm{Der}_{\mathrm{sk}}(|\mathcal{K}|)$.

Wir bemerken zunächst:

Lemma 2. *Die Kategorie $\text{s-Kons}(\mathcal{K})$ ist abelsch.*

Beweis. Durch den offensichtlichen Isomorphismus zur Kategorie der abelschen Gruppen (durch den Funktor der globalen Schnitte) ist die Kategorie der konstanten abelschen Garben auf einem topologischen Raum X eine abelsche Kategorie. Nun folgt die Aussage aus der Exaktheit des Pullbacks i_σ^* entlang den Inklusionen $i_\sigma : |\sigma| \hookrightarrow |\mathcal{K}|$. □

Entscheidend ist die folgende Charakterisierung schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbarer derivierter Garben:

Proposition 3. *Für $F \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$ sind äquivalent:*

1. *F ist schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbar*
2. *Die Koeinheit der Adjunktion ist auf F ein Isomorphismus $p^*p_*F \xrightarrow{\sim} F$.*

Beweis. □

Wir bezeichnen den Funktor $p^*p_* : \mathrm{Ab}_{/\mathrm{X}} \to \text{s-Kons}$ kurz mit β und bemerken, dass er nach obiger Proposition ein Rechtsadjungierter zur Inklusion $\iota : \text{s-Kons} \to \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ ist:

Als Komposition zweier linksexakter Funktoren ist β natürlich wieder linksexakt.

Proposition 4. *Sei $F \in \mathrm{Ket}^{+}(\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$ ein gegen die Richtung der Pfeile beschränkter Kettenkomplex aus β-azyklischen Garben mit ebenfalls schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbaren Kohomologiegarben $H^q(F)$. Dann ist $\beta F \to F$ ein Quasi-Isomorphismus.*

Beweis. Wir schneiden aus dem Kettenkomplex (F^n, d^n) kurze exakte Sequenzen aus:

$$
\begin{aligned}
H^0 = \ker d^0 \hookrightarrow F^0 \twoheadrightarrow \operatorname{im} d^0 & \\
\operatorname{im} d^0 \hookrightarrow \ker d^1 \twoheadrightarrow H^1 & \\
\ker d^1 \hookrightarrow F^1 \twoheadrightarrow \operatorname{im} d^1 & \\
\vdots &
\end{aligned}
$$

Sind in einer kurzen exakten Sequenz zwei der drei Objekte azyklisch, so nach dem Fünferlemma auch das dritte. Da nach Voraussetzung F^q und H^q β-azyklisch sind, sind alle oben betrachteten Objekte β-azyklisch und die kurzen exakten Sequenzen bleiben exakt nach Anwendung von β. Es folgt $H^q(\beta F) \xrightarrow{\sim} \beta(H^q F)$ und weiter $\beta(H^q F) \xrightarrow{\sim} H^q F$ nach der schwachen Konstruierbarkeit von $H^q F$. □

Damit ist der entscheidende Schritt für unser Ziel gezeigt. Wir erhalten:

Theorem 5. *$\mathcal{K}$ lokal endlicher Simplizialkomplex beschränkter Dimension ??*

Die oben definierten Funktoren ι, β induzieren auf den derivierten Kategorien eine Äquivalenz

$$\mathrm{Der}^b(\text{s-Kons}(\mathcal{K})) \underset{R\beta}{\overset{\iota}{\rightleftarrows}} \mathrm{Der}_{\mathrm{sk}}(|\mathcal{K}|).$$

Beweis. □