

0.1 Realisierung simplizialer Garben

Die Beschreibung der geometrischen Realisierung als Tensorprodukt von Funktoren eröffnet uns eine Reihe weiterer geometrischer Realisierungen, die diejenige simplizialer Mengen verallgemeinern.

Zunächst stellen wir fest, dass wir in unserer Konstruktion simpliziale Mengen immer als diskrete simpliziale topologische Räume betrachtet haben, und die Diskretheit genauso gut auch fallen lassen können. Wir erhalten die geometrische Realisierung $|X| = X \otimes R$ eines simplizialen topologischen Raums $X : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Top}$.

Beispiel 0.1. *Wir betrachten den simplizialen topologischen Raum $X : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Top}$, den wir aus dem (kombinatorischen) Standard-1-Simplex Δ^1 erhalten, indem wir disjunkte Vereinigungen von Punkten durch disjunkte Vereinigungen von Intervallen $I = [0, 1]$ mit von den Identitäten induzierten Abbildungen ersetzen. Offenbar ist die geometrische Realisierung das Produkt $I \times |\Delta^1|$. Ersetzen wir X_0 wieder durch zwei Punkte $0, 1$ mit beliebigen Degenerationen, so erhalten wir eine zu einer Kreisscheibe verdickte Linie zwischen den beiden Punkten als Realisierung. Ersetzen wir die höheren $X_n, n \geq 2$ ebenfalls wieder durch Punkte mit beliebigen Randabbildungen, so sorgen deren Identifikationen dafür, dass die geometrische Realisierung wieder $|\Delta^1|$ wird.*

Weiter verallgemeinert die Konstruktion auch auf Diagrammkategorien. Ist I eine kleine Kategorie und $X : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Top}^I$ ein simpliziales I -System topologischer Räume, so erhalten wir eine geometrische Realisierung $|X| = X \otimes R$ von X , wenn wir $R : \Delta \rightarrow \text{Top} \rightarrow \text{Top}^I$ mittels des Funktors der konstanten Darstellung auf die Diagrammkategorie fortsetzen. Insbesondere erhalten wir eine geometrische Realisierung für die Kategorie der Paare topologischer Räume mit stetiger Abbildung, d. h. die Diagrammkategorie Top^I für I die von $\{\bullet \rightarrow \bullet\}$ erzeugte Kategorie. Eine Realisierung für Garben über topologischen Räumen erhalten wir so aber nicht: Sind in einem simplizialen Top^I alle Abbildungen étale, bedeutet das noch nicht, dass auch die induzierte Abbildung in der geometrischen Realisierung étale ist. Sind etwa alle Basisräume X_n einpunktig, so ist die Realisierung $|X|$ ebenfalls einpunktig. Étale Räume $F_n \rightarrow X_n$ sind diskret, d. h. die geometrische Realisierung $|F|$ ist die einer simplizialen Menge, also im Allgemeinen ein höherdimensionaler CW-Komplex. Ein solcher ist nicht diskret, also nicht étale über $|X|$. Wir erhalten die korrekte Realisierung für Ens/Top , indem wir den Kolimes in der Garbenkategorie statt in den topologischen Räumen bilden.

Proposition 0.2. *Sei $F \in [\Delta^{\text{op}}, \text{Ens}/\text{Top}]$ eine simpliziale Garbe über topologischen Räumen mit Morphismen und $R : \Delta \rightarrow \text{Ens}/\text{Top}$ eine kosimpliziale Garbe über topologischen Räumen. Dann ist die Realisierung $F \otimes R \in \text{Ens}/\text{Top}$ eine Garbe über der geometrischen Realisierung der Basisräume.*

Beweis. Die Existenz der Realisierung folgt direkt aus der Beschreibung von Koenden als Kolimites ?? und der Kovollständigkeit von Ens/Top nach 0.13. Dort wird auch der Basisraum des Kolimites zum Kolimes der Basisräume bestimmt. \square

Bemerkung 0.3. Eine kanonische Wahl für R ist etwa die konstant einelementige Garbe $|\Delta^n| \rightarrow |\Delta^n|$ oder ihre plumpe Variante $\blacktriangle^n \rightarrow \blacktriangle^n$.

Bemerkung 0.4. Diese geometrische Realisierung simplizialer Garben auf topologischen Räumen spezialisiert zu einer geometrischen Realisierung simplizialer Garben auf X : Ist $F : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}/_X$ eine simpliziale Garbe auf X , so ist ihre geometrische Realisierung aus 0.1 eine Garbe $|F| \in \text{Ens}/_X$, da die geometrische Realisierung des konstanten simplizialen topologischen Raums $X : [n] \mapsto X$ selbst X ist.

Für Garben E_n auf diskreten Räumen D_n handelt es sich um die geometrische Realisierung eines Pfeils simplizialer Mengen. Die relative Version über X hiervon ist die folgende: für Garben E_n auf $X \times D_n$ für diskrete D_n und zu für $f : [m] \rightarrow [n]$ monoton von $D_n \rightarrow D_m$ induzierten Basen $D_n \times X \rightarrow D_m \times X$ der Garbenmorphisamen ist die geometrische Realisierung eine Garbe über $X \times |D|$, für $|D|$ die Realisierung der simplizialen Menge $[n] \mapsto D_n$.

Ziel unserer Überlegungen wird es sein, die Aussagen zu simplizial konstanten Garben auf der geometrischen Realisierung eines Simplizialkomplexes \mathcal{K} als Garben auf dem topologischen Raum \mathcal{K} auf die Situation simplizialer Mengen zu übertragen. Die angesprochenen Realisierungen in 0.1 und 0.4 sind dafür nicht geeignet. Das liegt daran, dass wir, um aus Garben auf der Realisierung wieder ein Diagramm von Garben zu erhalten, generisierende Randabbildungen benötigen. Im Fall einer simplizialen Garbe $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}/_{\text{Top}}$ sind die Randabbildungen im Garbensystem dagegen gegenläufig zu den generisierenden Einbettungen $|d_i| : |\Delta^{n-1}| \hookrightarrow |\Delta^n|$ der Basisräume.

Wir erklären eine neue Realisierung, die diesem Anspruch gerecht wird. Sei dazu $R : \Delta \rightarrow \text{Ens}/_{\text{Top}}$ eine kosimplizialer topologischer Raum und $F : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}/_{\text{Top}}, [n] \mapsto F_n \in \text{Ens}/_{X_n}$ eine simpliziale Garbe über topologischen Räumen mit Komorphismen. Für $f : [n] \rightarrow [m]$ monoton gibt es also eine stetige Abbildung $Ff : X_m \rightarrow X_n$ und einen Morphismus von Garben über X_m : $Ff^*F_n \rightarrow F_m$. Wir erhalten einen Funktor K von der Unterteilungskategorie $\text{Sub}(\Delta)$ von Δ in die Garben über topologischen Räumen

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Sub}(\Delta) & & [n]^{\S} & \xleftarrow{\quad} & f^{\S} & \xrightarrow{\quad} & [m]^{\S} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Ens}/_{\text{Top}} & & F_n \times R[n] & \xleftarrow{\quad} & Ff^*F_n \times R[n] & \xrightarrow{\quad} & F_m \times R[m] \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & X_n \times R[n] & \xleftarrow{\quad} & X_m \times R[n] & \xrightarrow{\quad} & X_m \times R[m],
 \end{array} \tag{1}$$

der für $f : [n] \rightarrow [m]$ in Δ auf Morphismen $f^{\S} \rightarrow [n]^{\S}$ vom universellen Morphismus $Ff^*F_n \rightarrow F_n$ über Ff induziert ist und auf Morphismen $f^{\S} \rightarrow [m]^{\S}$ durch die Morphismen $Ff^*F_n \rightarrow F_m$ in $\text{Ens}/_{X_m}$ sowie Rf . Letzterer ist tatsächlich

ein Morphismus in Ens/Top , denn es kommutiert

$$\begin{array}{ccccc} Ff^*F_n \times R[n] & \longrightarrow & F_m \times R[n] & \longrightarrow & F_m \times R[m] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X_m \times R[n] & \longrightarrow & X_m \times R[n] & \longrightarrow & X_m \times R[m]. \end{array}$$

Wir erhalten die folgende *kovariante Realisierung*:

Proposition 0.5. *Sei $F \in [\Delta^{\text{op}}, \text{Ens}/\text{Top}]$ eine simpliziale Garbe über topologischen Räumen mit Komorphismen und $R : \Delta \rightarrow \text{Top}$ ein kosimplizialer topologischer Raum. Dann ist der Kolimes $|F|$ über den oben definierten zugehörigen Funktor $K : \text{Sub}(\Delta) \rightarrow \text{Ens}/\text{Top}$ eine Garbe über der geometrischen Realisierung $X \otimes R$ der Basisräume.*

Bemerkung 0.6. Diese geometrische Realisierung simplizialer Garben auf topologischen Räumen mit Komorphismen spezialisiert zu einer geometrischen Realisierung simplizialer Garben auf X : Ist $F : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}/X$ eine simpliziale Garbe auf topologischen Räumen mit Komorphismen und konstantem Basisraum X alias eine kosimpliziale Garbe $F^{\text{op}} : \Delta \rightarrow \text{Ens}/X$, so vereinfacht das Diagramm 1 zu

$$\begin{array}{ccccc} \text{Sub}(\Delta) & & [n]^{\S} & \longleftarrow f^{\S} & \longrightarrow [m]^{\S} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Ens}/\text{Top} & & F_n \times R[n] & \xlongequal{\quad} Ff^*F_n \times R[n] \longrightarrow F_m \times R[m] \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & X \times R[n] & \xlongequal{\quad} X \times R[n] \longrightarrow X \times R[m], \end{array}$$

und ihre geometrische Realisierung aus 0.5 ist eine Garbe $|F| \in \text{Ens}/X$, der Kolimes über den Funktor $\Delta \rightarrow \text{Ens}/\text{Top}$, der $f : [n] \rightarrow [m]$ monoton auf den Morphismus

$$\begin{array}{ccc} F_n \times R[n] & \xrightarrow{F^{\text{op}}f \times |f|} & F_m \times R[m] \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \times R[n] & \longrightarrow & X \times R[m] \end{array}$$

schickt.

Sind alle X_n diskret, so bestimmt für $\sigma \in X_n$ der Halm $(F_m)_{\sigma}$ die konstante Garbe $(F_m)_{\sigma} \times R[n] \rightarrow \sigma \times R[n]$ und wir erhalten für monotonen $f : [n] \rightarrow [m]$ Abbildungen $(F_n)_{f(\sigma)} \rightarrow (F_m)_{\sigma}$, die diese konstanten Garben verkleben. Insbesondere sind für Randabbildungen d_i die Verklebungen Generisierungen, die angeben, wie ein Element des Halms am Rand eines Simplex einen Schnitt über eine Umgebung dieses Punkts (auch im Inneren des Simplex) definiert. Wir werden diese Beobachtungen in ?? präzisieren und die zunächst seltsam anmutende Konstruktion als etwas natürlicher wahrnehmen.

Für die relative Version betrachten wir Basisräume $X_n = X \times D_n$ mit diskreten D_n und von $D_m \rightarrow D_n$ induzierten Abbildungen. Zu $\sigma \in D_n$ gehört dann

eine Garbe $F_\sigma := F_n|_{\sigma \times X} \in \text{Ens}/X$ und wir erhalten für monotonen $f : [n] \rightarrow [m]$ Garbenmorphisimen $F_{f(\sigma)} \rightarrow F_\sigma$, die diese Garben verkleben. Wieder sind diese generisierend, erlauben also die Ausweitung eines U -Schnitts von einem Randpunkt auf einen U -Schnitt im Inneren.

0.1.1 Die Dualität von Nerv und Realisierung

Wir suchen Rechtsadjungierte für unsere geometrischen Realisierungen. Für die Realisierung simplizialer Mengen gelingt uns das einfach.

Satz 0.7. *Der Funktor der singulären Ketten $S : \text{Top} \rightarrow \text{sEns}$, $SY = \text{Top}(R \cdot, Y) : [n] \mapsto \text{Top}(|\Delta^n|, Y)$ ist rechtsadjungiert zur geometrischen Realisierung $|\cdot| : \text{sEns} \rightarrow \text{Top}$.*

Beweis. Die Rand- und Degenerationsabbildungen von SY sind für $f : [n] \rightarrow [m]$ gegeben durch Vorschalten von $|f| : |\Delta^n| \rightarrow |\Delta^m|$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \text{Top}(|X|, Y) &= \text{Top}(\text{col}_{\Delta^{\downarrow} X} |\Delta^n|, Y) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{col}_{\Delta^{\downarrow} X} \text{Top}(|\Delta^n|, Y) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{col}_{\Delta^{\downarrow} X} \text{sEns}(\Delta^n, \text{Top}(R \cdot, Y)) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{sEns}(\text{col}_{\Delta^{\downarrow} X} \Delta^n, \text{Top}(R \cdot, Y)) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{sEns}(X, SY) \end{aligned}$$

mit der Definition der geometrischen Realisierung im ersten Schritt (Gl. ??), der Verträglichkeit von $\text{Hom} : C^{\text{op}} \times C \rightarrow \text{Ens}$ mit Limites im zweiten und vierten Schritt, unserer Bestimmung der n -Simplizes als Morphismenmenge (Gl. ??) im dritten Schritt und unserer Beschreibung einer simplizialen Menge als Kolimes über ihre Simplexkategorie (??) im letzten Schritt. \square

Während dieses Argument wieder ein sehr anschauliches ist, möchten wir wie in ?? erklärt, unser Argument mit den Begriffen und Techniken von Koenden führen, um es automatisch verallgemeinern zu können. Wir geben hier noch einmal die direkte Übersetzung obigen Beweises in die Sprache der Koenden an, und dann sofort die Verallgemeinerung.

Beweis. ([?], 3.2) Wir berechnen mit den Regeln des Koenden-Kalküls:

$$\begin{aligned} \text{Top}(|X|, Y) &= \text{Top} \left(\int^{[n]} X[n] \times R[n], Y \right) \\ &\xrightarrow[\text{??}]{\sim} \int_{[n]} \text{Top}(X[n] \times R[n], Y) \\ &\xrightarrow[\text{??}]{\sim} \int_{[n]} \text{Ens}(X[n], \text{Top}(R[n], Y)) \\ &\xrightarrow[\text{??}]{\sim} [\Delta^{\text{op}}, \text{Ens}](X, \text{Top}(R \cdot, Y)) \\ &= \text{sEns}(X, SY). \end{aligned}$$

\square

Theorem 0.8 (Allgemeine Nerv-Realisierungs-Dualität, [?], 3.2). *Seien C eine V -Kategorie mit Koeexponentialen und ein Funktor $R : S \rightarrow C$ gegeben. Dann gibt es eine Adjunktion $(|\cdot|, N)$*

$$C \underset{N}{\overset{|\cdot|}{\rightleftarrows}} [S^{\text{op}}, V]$$

mit

$$\begin{aligned} |\cdot| : X &\mapsto \int^s X(s) \odot R(s) \quad \text{und} \\ N : Y &\mapsto C(R\cdot, Y). \end{aligned}$$

Beweis. In wörtlicher Verallgemeinerung des Vorangegangenen:

$$\begin{aligned} C(|X|, Y) &= C\left(\int^s X(s) \odot R(s), Y\right) \\ &\underset{??}{\overset{\sim}{\rightarrow}} \int_s C(X(s) \odot R(s), Y) \\ &\underset{??}{\overset{\sim}{\rightarrow}} \int_s V(X(s), C(R(s), Y)) \\ &\underset{??}{\overset{\sim}{\rightarrow}} [S^{\text{op}}, V](X, C(R\cdot, Y)) \\ &= [S^{\text{op}}, V](X, NY). \end{aligned}$$

□

0.1.2 Die kartesisch abgeschlossene Struktur der Garben auf X

Für unsere allgemeine Dualität von Nerv und Realisierung 0.8 benötigen wir also eine bessere V -angereicherte Struktur auf C . Wenn wir uns auf $\text{Ens}/_X$ beschränken, erhalten wir sogar die Struktur einer kartesisch abgeschlossenen Kategorie (engl. *cartesian closed category*), d. h. einer Kategorie mit endlichen Produkten, für deren kartesische monoidale Struktur es ein internes Hom gibt.

Proposition 0.9. *Die Kategorie $\text{Ens}/_X$ ist kartesisch abgeschlossen mit Produkt*

$$(F \times G)(U) = F(U) \times G(U)$$

und internem Hom

$$(F \Rightarrow G)(U) = \text{Ens}/_U(F|_U, G|_U)$$

jeweils mit den von den Restriktionen von F und G induzierten Restriktionen. Der étale Raum des Produkts ist gegeben durch das Faserprodukt über X :

$$\overline{F \times G} \xrightarrow{\sim} \overline{F} \times_X \overline{G}.$$

Beweis. Das Produkt erfüllt offenbar die universelle Eigenschaft in $\text{pEns}/_X$ und ist eine Garbe, da Produkte mit dem Limes der Garbeneigenschaft vertauschen

(Spezialfall von ??). Das interne Hom besteht aus stetigen Abbildungen über U und erfüllt somit die Garbenbedingung, die ja sogar nach der Verklebbarkeit stetiger Abbildungen modelliert war. Für die Adjunktion müssen wir zeigen

$$\text{Ens}_X(F \times G, H) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}_X(F, G \Rightarrow H).$$

Links stehen restriktionsverträgliche Systeme $F(U) \times G(U) \rightarrow H(U)$ alias $F(U) \rightarrow \text{Ens}(G(U), H(U))$, rechts restriktionsverträgliche Systeme $F(U) \rightarrow \text{Ens}_U(G|_U, H|_U)$. Wir erhalten eine Abbildung von rechts nach links durch den globalen Teil $G(U) \rightarrow H(U)$ des Garbenmorphismus $G|_U \rightarrow H|_U$ und das Exponentialgesetz in Ens und von links nach rechts durch Ergänzen des globalen Teils $G(U) \rightarrow H(U)$ durch verträgliche $G(V) \rightarrow H(V)$ als die Bilder unter $F(U) \rightarrow F(V) \rightarrow \text{Ens}(G(V), H(V))$. Diese Abbildungen sind zueinander invers.

Für den étalen Raum des Produkts erhalten wir nach der universellen Eigenschaft des Faserprodukts eine stetige Abbildung über X

$$\overline{F \times G} \rightarrow \overline{F} \times_X \overline{G}.$$

Diese induziert auf den Halmen die Bijektionen

$$(F \times G)_x \xrightarrow{\sim} F_x \times G_x$$

aus dem Vertauschen endlicher Limites mit filtrierenden Kolimites. \square

Diese Struktur einer kartesisch abgeschlossenen Kategorie macht Ens_X insbesondere zu einer über sich selbst tensorierten Kategorie im Sinne von ??. Wir erhalten einen Nerv-Funktor für die geometrische Realisierung simplizialer Garben auf X aus 0.8.

Da es sich wieder um eine sehr allgemeine Aussage handelt, geben wir sie in ihrer vollen Form an.

Proposition 0.10. *Ist C eine kleine Kategorie, so ist die Prägarbenkategorie $\text{Ens}^{C^{\text{op}}}$ kartesisch abgeschlossen.*

Beweis. Nach der objektweisen Berechnung von Limites in Funktorkategorien ist das Prägarbenprodukt gegeben durch $(F \times G)(c) = F(c) \times G(c)$ für $F, G \in \text{Ens}^{C^{\text{op}}}$ und $c \in C$. Wir behaupten, dass das interne Hom in der Prägarbenkategorie die Prägarbe

$$(F \Rightarrow G)(c) := \text{Ens}^{C^{\text{op}}}(F \times C(\cdot, c), G),$$

ist, die auf Morphismen $f : c \rightarrow d$ durch Vorschalten von Transformationen $\text{id}_F \times (\circ f)$ gegeben ist, mit $(\circ f) : C(\cdot, c) \rightarrow C(\cdot, d)$ dem Nachschalten von f . Mit ?? sind Morphismen in $\text{Ens}^{C^{\text{op}}}$ darstellbar als Ende

$$\text{Ens}^{C^{\text{op}}}(F, G) = \int_c \text{Ens}(F(c), G(c))$$

und wir berechnen mit den Regeln des (Ko-) Endenkalküls für $F, G, H \in \text{Ens}^{C^{\text{op}}}$:

$$\begin{aligned}
\text{Ens}^{C^{\text{op}}}(F, G \Rightarrow H) &\xrightarrow[\text{Def.}]{\sim} \text{Ens}^{C^{\text{op}}}(F, \text{Ens}^{C^{\text{op}}}(F \times C(\cdot, \bullet), G)) \\
&\xrightarrow[\text{??}]{\sim} \int_c \text{Ens}(F(c), \int_d \text{Ens}(G(d) \times C(d, c), H(d))) \\
&\xrightarrow[\text{??}]{\sim} \int_c \int_d \text{Ens}(F(c), \text{Ens}(G(d) \times C(d, c), H(d))) \\
&\xrightarrow[\text{??}]{\sim} \int_d \int_c \text{Ens}(F(c), \text{Ens}(G(d) \times C(d, c), H(d))) \\
&\xrightarrow[\text{Adj.}]{\sim} \int_d \int_c \text{Ens}(F(c) \times G(d) \times C(d, c), H(d)) \\
&\xrightarrow[\text{??}]{\sim} \int_d \text{Ens}(\int_c F(c) \times G(d) \times C(d, c), H(d)) \\
&\xrightarrow[\text{??}]{\sim} \int_d \text{Ens}(F(d) \times G(d), H(d)) \\
&\xrightarrow[\text{??}]{\sim} \text{Ens}^{C^{\text{op}}}(F \times G, H).
\end{aligned}$$

□

Die obere Aussage über Prägarben auf topologischen Räumen ergibt sich daraus durch die Beobachtung, dass $F|_U = F \times \text{Off}_X(\cdot, U)$ ist, denn Off_X ist halbgeordnet durch Inklusionen. Wir erhalten auch die kartesisch abgeschlossene Struktur simplizialer Mengen, der Prägarbenkategorie auf Δ . Explizit ist für $X, Y \in \text{sEns}$:

$$(X \times Y)_n = X_n \times Y_n$$

und

$$(X \Rightarrow Y)_n = \text{sEns}(X \times \Delta^n, Y).$$

0.1.3 Kategorien von Garben über topologischen Räumen

Wir betrachten die Kategorienfaserungen $\text{Ens}/_{\text{Top}} \rightarrow \text{Top}$ mit Morphismen den stetigen Abbildungen zwischen den étalen Räumen über der stetigen Abbildung in der Basis sowie $\text{Ens} // \text{Top} \rightarrow \text{Top}$ mit Opkomorphismen als Morphismen, d. h. für $F \in \text{Ens}/_X$ und $G \in \text{Ens}/_Y$:

$$\text{Ens} // \text{Top}(F, G) = \bigsqcup_{f: X \rightarrow Y} \text{Ens}/_X(f^*G, F).$$

Wir möchten einen Nerv-Funktor nicht nur für die Realisierung simplizialer Garben über X finden, sondern auch für simpliziale Garben über variablen topologischen Räumen, also für simpliziale Objekte in $\text{Ens}/_{\text{Top}}$ und $\text{Ens} // \text{Top}$. Dafür benötigen wir wieder eine monoidal abgeschlossene Struktur auf diesen Kategorien.

Die Kategorie $\text{Ens}/_{\text{Top}}$ besitzt endliche Produkte, die algebraisch gegeben sind durch Rückzug und Produkt und topologisch durch Bilden der Produkträume. Konkret:

Proposition 0.11. *Seien $F_{1,2} \in \text{Ens}_{/X_{1,2}}$ Garben über topologischen Räumen X_1 und X_2 . Dann erfüllt die Garbe*

$$F_1 \times F_2 := \text{pr}_1^* F_1 \times \text{pr}_2^* F_2 \in \text{Ens}_{/X_1 \times X_2}$$

mit $\text{pr}_{1,2} : X_1 \times X_2 \rightarrow X_{1,2}$ den Projektionen die universelle Eigenschaft des Produkts von F_1 und F_2 in $\text{Ens}_{/\text{Top}}$. Für ihren étalen Raum gilt:

$$\overline{F_1 \times F_2} = \overline{F_1} \times \overline{F_2}$$

und $\overline{F_1} \times \overline{F_2} \rightarrow X_1 \times X_2$ ist durch das Produkt der $\overline{F_{1,2}} \rightarrow X_{1,2}$ gegeben.

Beweis. Die Beschreibung von $\text{Ens}_{/\text{Top}}$ als Paare topologischer Räume mit étaler Abbildung zeigt die Aussage über den étalen Raum des Produkts. Die induzierte Abbildung $\overline{F_1} \times \overline{F_2} \rightarrow X_1 \times X_2$ ist ein Homöomorphismus auf der Produktmenge der Umgebungen, auf denen $\overline{F_{1,2}} \rightarrow X_{1,2}$ Homöomorphismen sind.

Für die algebraische Beschreibung erhalten wir mit der Offenheit der Projektionen $\text{pr}_{1,2}$ und 0.9 für die Schnitte über Basismengen $U_1 \times U_2$:

$$\begin{aligned} (F_1 \times F_2)(U_1 \times U_2) &\xrightarrow{\sim} (\text{pr}_1^* F_1)(U_1 \times U_2) \times (\text{pr}_2^* F_2)(U_1 \times U_2) \\ &\xrightarrow{\sim} F_1(U_1) \times F_2(U_2). \end{aligned}$$

Wir erhalten also einen Garbenmorphismus über $X_1 \times X_2$ von der algebraischen zur topologischen Beschreibung, indem einem Paar $(s, t) \in F_1(U_1) \times F_2 \times U_2$ der Schnitt $s \times t : U_1 \times U_2 \rightarrow \overline{F_1} \times \overline{F_2}$ zugeordnet wird. Dieser Morphismus induziert auf den Halmen die Bijektion $(F_1 \times F_2)_{x,y} \xrightarrow{\sim} (F_1)_x \times (F_2)_y$ aus dem Vertauschen von endlichen Produkten mit filtrierenden Kolimites. \square

Bemerkung 0.12. Auf ähnliche Weise kann man auch für $\text{Ens}_{//\text{Top}}$ endliche Produkte konstruieren: es handelt sich (wegen der opponierten Fasern) um das Koproduct der mit den Projektionen auf den Produktraum zurückgezogenen Garben.

Auch dieses Verfahren können wir für beliebige Limites und Kolimites durchführen und so ?? übertragen:

Satz 0.13. *Die Kategorie der Garben auf topologischen Räumen mit Morphismen $\text{Ens}_{/\text{Top}}$ ist vollständig und kovollständig.*

Beweis. Die Kategorie der topologischen Räume Top ist vollständig und kovollständig mit der Initial- bzw. Finaltopologie für die Limes- bzw. Kolimesmengen. Sei $F_i \in \text{Ens}_{/X_i}$ für eine kleine Kategorie I ein System von Garben auf topologischen Räumen. Wir erhalten für $\text{pr}_i : \lim_i X_i \rightarrow X_i$ die Projektionen den Limes durch

$$\lim_i F_i := \lim_i \text{pr}_i^* F_i \in \text{Ens}_{/\lim_i X_i}.$$

Für eine Garbe $G \in \text{Ens}_{/Y}$ und einen Kegel $G \rightarrow F_i$ faktorisieren zunächst die Morphismen in der Basis $f_i : Y \rightarrow X_i$ eindeutig über pr_i : $f_i = \text{pr}_i \circ g_i$. Wir erhalten mit der universellen Eigenschaft des Rückzugs und der Adjunktion (f^*, f_*) :

$$\text{Ens}_{/\text{Top}}(G, F_i) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}_{/\lim_i X_i}(g_{i*} G, \text{pr}_i^* F_i)$$

einen Kegel in $\text{Ens}/\lim_i X_i$, für den der angegebene Limes nach ?? das universelle Problem löst.

Für den Kolimes finden wir ebenfalls eine eindeutige Faktorisierung über den Kolimes $\text{in}_i : X_i \rightarrow \text{col}_i X_i$ in der Basis und erhalten den Kolimes in Ens/Top als

$$\text{col}_i F_i := \text{col}_i \text{in}_{i*} F_i \in \text{Ens}/\text{col}_i X_i.$$

Man beachte, dass hierbei der Prägarbenkolimes garbifiziert wird. \square

Wir könnten erwarten, dass wie das Produkt auch das interne Hom von $\text{Ens}X$ in unsere relative Situation übertragen werden kann. Dies gelingt tatsächlich aber im Allgemeinen nicht, denn in diesem Fall erhielten wir durch Nachschalten des Faserfunktors $\text{Ens}/\text{Top} \rightarrow \text{Top}$ bzw. $\text{Ens}/\text{Top} \rightarrow \text{Top}$ ein zum kartesischen Produkt adjungiertes internes Hom in der Kategorie der topologischen Räume, was bekanntermaßen in dieser Allgemeinheit nicht möglich ist ([?]). Wir müssen uns also wieder auf eine bequeme Kategorie topologischer Räume mit internem Hom einschränken.

Die häufige Wahl CGHaus ist für uns ungeeignet, denn der étale Raum einer Garbe über einem kompakt erzeugten Hausdorffraum ist im Allgemeinen kein Hausdorffraum mehr (betrachte etwa die Garbe der stetigen Funktionen nach \mathbb{R}). Abhilfe schafft uns eine Konstruktion aus [?], die die den kompakt erzeugten Räumen zugrundeliegenden Gedanken verallgemeinert. Wir geben hier nur die Ergebnisse an.

Äquivalent zu unserer (der *point-set*-Topologie entspringenden) Definition kompakt erzeugter Räume ist die folgende Charakterisierung:

Lemma 0.14 (??, Variante). *Ein topologischer Raum X ist kompakt erzeugt genau dann, wenn gilt: Eine Teilmenge $U \subset X$ ist offen genau dann, wenn ihr Urbild unter allen stetigen Abbildungen $K \rightarrow X$, K kompakt, offen ist.*

Beweis. Unsere Bedingung besagt, dass X die Finaltopologie bezüglich des Systems der $K \rightarrow X$, K kompakt tragen soll. Die Bedingung aus der ursprünglichen Definition ist dieselbe für das System der Inklusionen kompakter Mengen $K \subset X$. Da jede stetige Abbildung $K \rightarrow X$, K kompakt, über die Inklusion ihres kompakten Bilds faktorisiert, ist letzteres System in ersterem konfinal und die Finaltopologien stimmen überein. \square

Der in ?? angesprochene zur Inklusion Rechtsadjungierte $k : \text{Top} \rightarrow \text{CG}$ lässt sich nun auch beschreiben als das Versehen der X zugrundeliegenden Menge mit der genannten Finaltopologie. Der Raum kX ist dann sogar ein Kolimes über das System der $K \rightarrow X$, K kompakt, mitsamt den Morphismen über X ([?], 1.1).

Nun verallgemeinern wir ([?], 1): Sei \mathcal{I} eine nichtleere volle Unterkategorie von Top (für CG die kompakten Räume). Betrachte die Kategorie $\mathcal{I} \downarrow X$ und $kX := \text{col}_{\text{mathcal{I}} \downarrow X} X$. Bezeichne die volle Unterkategorie der topologischen Räume X mit $kX \cong X$ mit \mathcal{K} . Dann ist $k : \text{Top} \rightarrow \mathcal{K}$ ein Funktor und rechtsadjungiert zur Inklusion $\mathcal{K} \rightarrow \text{Top}$. Es gilt $\mathcal{I} \subset \mathcal{K}$.

Bemerkung 0.15. Dual zu ?? heißt eine volle Unterkategorie mit zur Inklusion Rechtsadjungiertem *koreflektiv*, der Rechtsadjungierte heißt *Koreflektor*. Die Konstruktion, die zur vollen Unterkategorie $\mathcal{I} \subset \text{Top}$ eine koreflektive Unterkategorie $\mathcal{K} \subset \text{Top}$ liefert, welche \mathcal{I} umfasst, heißt auch Übergang zur *koreflektiven Hülle*. Es handelt sich tatsächlich um eine idempotente Operation ([?], Prop. 1.5).

Die koreflektive Hülle besitzt die folgenden Stabilitätseigenschaften:

Proposition 0.16. *Die koreflektive Hülle \mathcal{K} ist vollständig und kovollständig. Die Kolimites stimmen mit den Kolimites aus Top überein, die Limites entstehen durch Anwendung des Koreflektors k auf den Limes in Top .*

Insbesondere ist \mathcal{K} also stabil unter disjunkten Summen und Quotientenbildung.

Beweis. Das ist die duale Aussage zu ??. Die Vollständigkeit und Kovollständigkeit von Top durch Versehen der mengentheoretischen Limites bzw. Kolimites mit der Initial- bzw. Finaltopologie ist bekannt. \square

Im allgemeinen kann man keine Aussage darüber treffen, ob mit der Relativtopologie versehene Unterräume von Objekten in \mathcal{K} wieder zu \mathcal{K} gehören. Wir benötigen die folgende Eigenschaft:

1. Ist $U \subset X$ ein offener Unterraum eines Objekts $X \in \mathcal{I}$ versehen mit der Relativtopologie, so gilt $U \in \mathcal{K}$.

In diesem Fall gilt bereits für Objekte $X \in \mathcal{K}$, dass offene Unterräume $U \subset X$ wieder Objekte von \mathcal{K} sind. Dieselbe Aussage gilt, wenn man “offen” zweimal durch “abgeschlossen” ersetzt ([?], Prop. 2.4).

Wir nehmen nun an, dass \mathcal{I} die folgenden Axiome erfüllt ([?], Axiom 2):

2. \mathcal{I} ist abgeschlossen unter endlichen kartesischen Produkten (Produkten in Top).
3. Sind $X, Y \in \mathcal{I}$, so ist die Auswertungsabbildung

$$\text{ev}_{X,Y} : \text{Top}_{co}(X, Y) \times X \rightarrow Y, (f, x) \mapsto f(x)$$

stetig. Dabei ist $\text{Top}_{co}(X, Y)$ die Morphismenmenge $\text{Top}(X, Y)$ versehen mit der kompakt-offen Topologie.

Dann besitzt \mathcal{K} die Struktur einer kartesisch abgeschlossenen Kategorie mit Produkten

$$X \otimes Y := k(X \times Y)$$

den “k-ifizierungen” der Produkte in Top und internem Hom

$$X \Rightarrow Y := k(\text{Top}_{co}(X, Y))$$

([?], 3).

Definition 0.17. Ein topologischer Raum heißt *lokalkompakt* (im starken Sinne), wenn jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen besitzt.

Bemerkung 0.18. Dies ist eine stärkere Bedingung als *lokal kompakt* (im schwachen Sinne) wie in ?? zu sein. Jene stimmt überein mit unserer Konvention für “lokal Eigenschaft” und wird daher getrennt geschrieben. Für Hausdorffräume stimmen beide Begriffe überein.

Proposition 0.19 ([?], 5). *Die folgenden vollen Unterkategorien der Kategorie der topologischen Räume erfüllen die Axiome 1 - 3.*

- (i) *die Kategorie der kompakten Hausdorffräume \mathcal{I}_K ,*
- (ii) *die Kategorie der lokalkompakten topologischen Räume \mathcal{I}_L .*

Für das Axiom 1 weisen wir das nach. Da es sich um eine lokale Eigenschaft handelt, gilt die Aussage im Fall der lokalkompakten Räume sofort. Für die kompakten Hausdorffräume bemerkt man, dass eine offene Teilmenge eines kompakten Hausdorffraums lokalkompakt ist und lokalkompakte Hausdorffräume in der koreflektiven Hülle der kompakten Hausdorffräume enthalten sind:

Korollar 0.20. *Die koreflektiven Hüllen von \mathcal{I}_K und \mathcal{I}_L sind kartesisch abgeschlossen und enthalten mit jedem Objekt X auch alle offenen und alle abgeschlossenen Unterräume $Y \subset X$.*

Damit können wir die für uns entscheidende Eigenschaft zeigen:

Proposition 0.21. *Ist $X \in \mathcal{K}$ für \mathcal{K} die koreflektive Hülle von \mathcal{I}_K bzw. \mathcal{I}_L und $F \rightarrow X$ eine étale Abbildung, so gilt auch $F \in \mathcal{K}$.*

Beweis. Wir können den étalen Raum $F \rightarrow X$ als Kolimes mittels der Schnitte $F(U)$ über offene Mengen $U \subset X$ darstellen:

$$F \xrightarrow{\sim} \bigsqcup_{U \subset X} F(U) \times U / \sim.$$

Dabei läuft das Koprodukt über alle offenen Teilmengen von X und ist die Äquivalenzrelation die Identifikation gleicher Keime, d. h.

$$(s, p) \sim (t, q) \Leftrightarrow p = q \text{ und } s_p = t_p.$$

Die étale Abbildung $F \rightarrow X$ ist dann von der Projektion auf die zweiten Faktoren induziert und wohldefiniert. Man erkennt leicht den Isomorphismus als die Koeinheit der Adjunktion $(\text{ét}, S)$ aus [?], 2.1.24, eingeschränkt auf die Kategorie der étalen Räume über X .

Nach den Stabilitätseigenschaften von \mathcal{K} sind die offenen Teilmengen $U \subset X$ Objekte von \mathcal{K} und dann auch der Kolimes F bestehend aus Koprodukt und Koegalisateur. Man beachte, dass es sich bei $F(U) \times U$ mit der diskreten Topologie auf $F(U)$ formal um das Koprodukt $\bigsqcup_{F(U)} U$ handelt. \square

Wir können uns nun der Frage nach einer kartesisch abgeschlossenen Struktur auf Ens/Top zuwenden.

Proposition 0.22. *Die Kategorie der Garben über topologischen Räumen mit Morphismen $\text{Ens}/_{\text{Top}}$ ist nicht kartesisch abgeschlossen.*

Beweis. Wir erinnern daran, dass ein Morphismus in $\text{Ens}/_{\text{Top}}$ ein kommutatives Quadrat

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & G \\ \downarrow p & & \downarrow q \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

ist. In diesem Beweis notieren wir Objekte in $\text{Ens}/_{\text{Top}}$ mitsamt ihrer Basis als $F \rightarrow X$. Angenommen, es gibt ein internes Hom zum Produkt aus ?? in $\text{Ens}/_{\text{Top}}$. Wir wollen zeigen, dass dieses dann auch ein internes Hom in Top liefert, ein Widerspruch zu der bekannten Aussage, dass Top nicht kartesisch abgeschlossen ist ([?], Prop. 7.1.2).

Betrachte dazu die volltreuen Einbettungen $\text{Top} \rightarrow \text{Ens}/_{\text{Top}}$ durch faserweise initiale Garben $\iota : X \mapsto (\emptyset \rightarrow X)$ (konstant leer) und durch faserweise terminale Garben $\tau : X \mapsto (X \xrightarrow{\text{id}} X)$ (konstant einelementig). Wir haben natürliche Bijektionen

$$\begin{aligned} \text{Ens}/_{\text{Top}}(\iota X, U \rightarrow L) &\xrightarrow{\sim} C(X, L) \quad \text{und} \\ \text{Ens}/_{\text{Top}}(\tau X, U \rightarrow L) &\xrightarrow{\sim} C(X, U). \end{aligned}$$

durch Betrachten des unteren bzw. oberen Pfeils des kommutativen Quadrats.

Wir erhalten für $(U \rightarrow L) = (\tau Y \Rightarrow \tau Z)$ das interne Hom, dass wegen

$$\begin{aligned} C(X, U) &\xrightarrow{\sim} \text{Ens}/_C(\tau X, U \rightarrow L) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Ens}/_C(\tau X \times \tau Y, \tau Z) \\ &\xrightarrow{\sim} C(X \times Y, Z) \end{aligned}$$

U ein internes Hom in Top für Y und Z ist.

□

Da das einzige Problem die fehlende kartesisch abgeschlossene Struktur in der Basis war, schränken wir uns auf eine bequemere Kategorie ein.

Es stellt sich heraus, dass für kartesisch abgeschlossene Kategorien, die mit jedem Raum X auch alle étalen Räume über X enthält

Satz 0.23. *Sei \mathcal{K} eine koreflektive Unterkategorie der topologischen Räume, die die Axiome ?? - 3 erfüllt. Dann ist die Kategorie der Garben über Räumen in \mathcal{K} mit Morphismen $\text{Ens}/_{\mathcal{K}} \subset \text{Ens}/_{\text{Top}}$ kartesisch abgeschlossen.*

Beweis.

□

Unsere Hoffnung, eine kartesisch abgeschlossene Struktur auf $\text{Ens}/_{\text{Top}}$ zu finden, wird sich nicht erfüllen. Wir können aber erklären, wieso.

Satz 0.24. *Es gibt keine kartesisch abgeschlossene Struktur auf $\text{Ens}/_C \subset \text{Ens}/_{\text{Top}}$ für $C \subset \text{Top}$ eine nichtleere volle Unterkategorie der topologischen Räume.*

Beweis. Ein Morphismus

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & G \\ \downarrow p & & \downarrow q \\ X & \longrightarrow & Y, \end{array}$$

ist nach der Kommutativität des Quadrats ein Element des Faserprodukts von Mengen

$$\text{Ens}/_C(F \rightarrow X, G \rightarrow Y) = \text{Top}(F, G) \times_{\text{Top}(F, Y)} C(X, Y),$$

wobei die Abbildungen nach $\text{Top}(F, Y)$ durch Nachschalten von q bzw. Vorschalten von p gegeben sind.

Wir bestimmen nun mit einem bekannten Trick die den internen Hom-Objekten zugrundeliegenden Mengen. Bezeichne $v : \text{Top} \rightarrow \text{Ens}$ den Vergissfunktork. Wir können den Funktor

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ens}/_C & \rightarrow & \text{Top} & \rightarrow & \text{Ens}, \\ (U \rightarrow L) & \mapsto & U & \mapsto & vU \end{array}$$

darstellen durch $\text{Ens}/_C(\tau \text{ pt}, \cdot)$ und den Funktor

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ens}/_C & \rightarrow & C & \rightarrow & \text{Ens}, \\ (U \rightarrow L) & \mapsto & L & \mapsto & vL \end{array}$$

durch $\text{Ens}/_C(\iota \text{ pt}, \cdot)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \text{Ens}/_C(\tau \text{ pt}, (F \rightarrow X) \Rightarrow (G \rightarrow Y)) &\xrightarrow{\sim} \text{Ens}/_C(\tau \text{ pt} \times (F \rightarrow X), G \rightarrow Y) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Ens}/_C(F \rightarrow X, G \rightarrow Y) \quad \text{und} \\ \text{Ens}/_C(\iota \text{ pt}, (F \rightarrow X) \Rightarrow (G \rightarrow Y)) &\xrightarrow{\sim} \text{Ens}/_C(\iota \text{ pt} \times (F \rightarrow X), G \rightarrow Y) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Ens}/_C(\iota X, G \rightarrow Y) \\ &\xrightarrow{\sim} C(X, Y), \end{aligned}$$

da $\tau \text{ pt}$ das terminale Objekt von $\text{Ens}/_C$ ist sowie nach Gleichung ??.

Die Abbildung im internen Hom-Objekt bestimmen wir mit den Funktorialitäten: Das Vorschalten von $\iota X \rightarrow (F \rightarrow X)$ induziert einen Morphismus $((F \rightarrow X) \Rightarrow (G \rightarrow Y)) \rightarrow (\iota X \Rightarrow (G \rightarrow Y))$ bzw.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Top}(F, G) \times_{\text{Top}(F, Y)} C(X, Y) & \longrightarrow & \text{Top}(\emptyset, G) \times_{\text{Top}(\emptyset, Y)} C(X, Y) & \xrightarrow{\sim} & C(X, Y) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ C(X, Y) & \xrightarrow{\text{id}} & C(X, Y) & \xrightarrow{\text{id}} & C(X, Y). \end{array}$$

Dabei kommt die Identität in der Basis aus dem Yoneda-Lemma für

$$\text{Ens}/_C(\iota \text{ pt}, (F \rightarrow X) \Rightarrow (G \rightarrow Y)) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}/_C(\iota \text{ pt}, \iota X \Rightarrow (G \rightarrow Y)).$$

Die Abbildung im Hom-Objekt ist also (wie nicht anders zu erwarten) die Projektion auf den zweiten Faktor. Soll diese étale sein, so muss

□