0.1 Schwach konstruierbare Garben auf simplizialen Mengen

In diesem Abschnitt möchten wir die Aussagen aus Kapitel **??** übertragen auf den Fall, dass es sich bei dem Basisraum um die Realisierung einer simplizialen Menge anstelle eines Simplizialkomplexes handelt. Wir gehen vor wie in den ersten beiden Abschnitten.

Für die Darstellung von Garben auf simplizialen Mengen als Diagrammkategorien von Garben definieren wir eine *kategorielle Realisierung* einer simplizialen Menge. Wir benötigen die Begriffe für nichtdegenerierte Simplizes (vgl. **??**, **??**).

Definition 0.1. Die Unterkategorie der endlichen nichtleeren Ordinalzahlen mit injektiven monotonen Abbildungen $\Delta^+ \subset \Delta$ heißt *nichtdegenerierte Simplexkategorie.*

Wir wiederholen die Begriffe für simpliziale Mengen für Prägarben auf Δ^+.

Definition 0.2. Die darstellbare Prägarbe auf Δ^+

$$\Delta^{+n} := \Delta^+(\cdot, [n])$$

heißt *nichtdegenerierter Standard-n-Simplex.*

Diese Zurodnung liefert einen Funktor $r : \Delta^+ \to [\Delta^{+\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$. Wir erhalten unsere für die kategorielle Realisierung gewünschte kosimpliziale Kategorie durch den Funktor der nichtdegenerierten Simplizes des nichtdegenerierten Standard-n-Simplex. Bezeichne dazu $\iota : \Delta^+ \hookrightarrow \Delta$ den Inklusionsfunktor und $\iota^* : [\Delta^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}] \to [\Delta^{+\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$ den Rückzugsfunktor auf Prägarben.

Definition 0.3. Der *Stufenfunktor* ist der Funktor

$$\mathrm{Step} : \Delta^+ \downarrow_r \iota^*\Delta^n \to \Delta^+ \downarrow_r \Delta^{+n},$$

gegeben durch das kommutative Quadrat

$$\begin{tikzcd}
f : \Delta^{+m} \to \iota^*\Delta^n \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\sim"] & \mathrm{Step}\, f : \Delta^{+k} \to \iota^*\Delta^{+n} \arrow[d, "\sim"] \\
f \in \Delta([m],[n]) \arrow[r, mapsto] & \hat{f} \in \Delta^+([k],[n]),
\end{tikzcd}$$

in dem die Vertikalen die eindeutigen Zuordnungen aus dem Yoneda-Lemma sind und die untere Horizontale die Abbildung, die eine monotone Abbildung f auf die eindeutige monotone Injektion $\hat{f}$ mit demselben Bild (und anderem Definitionsbereich $[k]$) schickt.

Bemerkung 0.4. Der Name "Stufenfunktor" rührt daher, dass die Werte einer monotonen Funktion die Stufen in ihrem Graphen beschreiben.

Das Vorschalten von monotonen Injektionen vor $f \in \Delta([m],[n])$ (Morphismen in $\Delta^+ \downarrow_r \iota^*\Delta^n$) induziert auf der zugehörigen monotonen Injektion $\hat{f} \in \Delta^+([k],[n])$ ebenfalls Morphismen durch Vorschalten von Injektionen, denn das Einschränken von Funktionen auf Teilmengen verkleinert auch die Bildmengen. Dies zeigt die Funktorialität.

Proposition 0.5. *Die Zuordnung*

$$\begin{tikzcd}
{[n]} \arrow[r, mapsto] \arrow[dd, "f"] & \Delta^+ \downarrow_r \Delta^{+n} \arrow[d, "f\circ"] \\
 & \Delta^+ \downarrow_r \iota^* \Delta^m \arrow[d, "\mathrm{Step}"] \\
{[m]} \arrow[r, mapsto] & \Delta^+ \downarrow_r \Delta^{+m}
\end{tikzcd}$$

ist ein Funktor $R : \Delta \to \mathrm{poset}$*, genannt die* kosimpliziale Standard-Kategorie*.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass für monotone $f : [m] \to [n]$ und $g : [l] \to [m]$ gilt

$$\mathrm{Step}((f \circ g)\circ) = \mathrm{Step}(f\circ)\,\mathrm{Step}(g\circ)$$

für $(f\circ)$ den Nachschaltefunktor und Step den Stufenfunktor. Das folgt aber daraus, dass beide Funktoren eine monotone Injektion $h : [k] \to [l]$ auf die Injektion auf $\mathrm{im}(f \circ g \circ h)$ schicken. Diese Entsprechnung ist verträglich mit Einschränkungen von h (Vorschalten von monotonen Injektionen), ist also eine Transformation.

Es handelt sich bei den Kategorien $\Delta^+ \downarrow_r \Delta^{+n}$ tatsächlich um halbgeordnete Mengen, denn die nichttrivialen Morphismen sind das Vorschalten von echten Injektionen und senken somit den Grad eines Simplex. □

Proposition 0.6. *Die Kategorien der kleinen Kategorien* Cat *und der halbgeordneten Mengen* poset *sind kovollständig.*

Beweis. Koprodukte in Cat sind die Koprodukte der zugrundeliegenden Köcher, d. h. die disjunkte Vereinigung über die Objektmengen und aus den Ausgangskategorien übernommene Morphismenmengen.

Die Koegalisatoren in Cat sind schwieriger, vergleiche [**?**]. Wir geben die Konstruktion kurz an. Betrachte kleine Kategorien mit Funktoren $A \rightrightarrows^F_G B$. Die dem Koegalisator $B \to C$ zugrundeliegende mengentheoretische Abbildung ist der Koegalisator der den Funktoren F und G zugrundeliegenden mengentheoretischen Abbildungen. Durch diese Identifikationen in C werden Morphismen neu komponierbar, deren Kompositionen den durch die Identifikationen verschmolzenen Morphismenmengen hinzugefügt werden. Weiter müssen wie im folgenden Diagramm Morphismen Ff und Gf identifiziert werden, was auf die Kompositionen fortgesetzt wird.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "f"] & & Fa \arrow[d, "Ff"] & \sim & Ga \arrow[d, "Gf"] \\
b & \longmapsto & Fb & \sim & Gb
\end{tikzcd}$$

Die Identifikationen $Fa \sim Ga$ für $a \in A$ und $Ff \sim Gf$ für $f \in A(a, b)$ sind notwendig für einen Koegalisator $B \to C$, damit $A \rightrightarrows^F_G B \to C$ übereinstimmen. Die weiteren Schritte machen “minimalinvasiv” B mit diesen Identifikationen wieder zu einer Kategorie.

Für die volle Unterkategorie poset $\subset$ Cat können wir **??** verwenden, mit dem Reflektor Cat $\to$ poset, der im folgenden Lemma konstruiert wird. $\square$

Definition 0.7. Eine Kategorie heißt *dünn*, falls jede Morphismenmenge höchstens einelementig ist. Eine Kategorie heißt *Skelettkategorie*, falls in ihr jeder Isomorphismus eine Identität ist.

Lemma 0.8. *Die vollen Unterkategorien* thinCat, skelCat $\subset$ Cat *der dünnen bzw. Skelettkategorien sind reflektiv. Der Reflektor* Cat $\to$ skelCat *macht aus dünnen Kategorien dünne Kategorien und liefert durch Komposition mit dem Reflektor* Cat $\to$ thinCat *einen Reflektor* Cat $\to$ poset.

Beweis. Der Linksadjungierte zu thinCat $\hookrightarrow$ Cat ist gegeben durch die Identifikation aller nichtleeren Morphismenmengen zu einelementigen Morphismenmengen. Der Linksadjungierte zu skelCat $\hookrightarrow$ Cat ist die zu einer kleinen Kategorie mit dem Auswahlaxiom konstruierte Unterkategorie, die Isomorphieklassen von Objekten durch ein Objekt aus diesen ersetzt. Klar ist, dass Funktoren $F : C \to D$ in eine dünne Kategorie D Abbildungen auf Objekten sind mit der Zusatzeigenschaft, dass es einen Morphismus $Ff : Fx \to Fy$ in D geben muss, wann immer es einen Morphismus $f : x \to y$ in C gibt. Das ist unerheblich davon, wie viele Morphismen $x \to y$ es in C gibt und zeigt die erste Adjunktion. Ein Funktor in eine Skelettkategorie schickt isomorphe Objekte auf dasselbe Objekt, wird also schon durch das Bild eines Objekts jeder Isomorphieklasse eindeutig festgelegt. Dies zeigt die zweite Adjunktion.

Der Reflektor Cat $\to$ skelCat liefert eine Unterkategorie und erhält deshalb Dünnheit. Halbgeordnete Mengen sind nach Definition dünne Skelettkategorien. $\square$

Bemerkung 0.9. Der Ansatz, Limites und Kolimites in *Cat* mittels **??** über die Einbettung Cat $\subset$ Quiv in die Kategorie der Köcher zu konstruieren, funktioniert *nicht*. Jene ist als Prägarbenkategorie tatsächlich vollständig und kovollständig und die Inklusion hat mit der freien Pfadkategorie über einem Köcher tatsächlich einen Linksadjungierten; allerdings handelt es sich nicht um eine volle (dann also reflektive) Unterkategorie, weshalb die Limites und Kolimites von denen in Quiv bzw. ihren freien Pfadkategorien abweichen.

Definition 0.10. Die *kategorielle Realisierung* einer simplizialen Menge $X \in$ s Ens ist definiert als das Tensorprodukt von Funktoren $X \otimes R \in$ poset für R die kosimpliziale Standard-Kategorie und die natürliche Ens-tensorierte Struktur auf poset (**??**).

Proposition 0.11. *Sei* $X \in$ s Ens *eine simpliziale Menge. Dann gibt es einen Homöomorphismus* $\blacktriangle X \xrightarrow{\sim} X \otimes R$*, wobei* $X \otimes R$ *die Ordnungstopologie trägt. Insbesondere hat jeder Punkt in der plumpen Realisierung* $\sigma \in \blacktriangle X$ *eine kleinste offene Umgebung* $(\geq \sigma)$.

Beweis. Der Funktor Ord : poset $\to$ Top ist nach dem nachgestellten Lemma kostetig. Daher reicht es mit **??**, einen Isomorphismus kosimplizialer topologischer Räume $\blacktriangle \to \mathrm{Ord}\, R$ zu finden. Beide bestehen aus einem Punkt pro nichtdegeneriertem Simplex (**??**) von Δ^n und haben als offene Mengen nach oben abgeschlossene Mengen. Randabbildungen d_i sind Inklusionen in die Ränder, Degenerationen Kollapse von Kanten. Dies begründen wir sorgfältiger: Unsere Definition von $Rs_i : R[n] \to R[n-1]$ schickt einen nichtdegenerierten Simplex $f : [m] \to [n]$ monoton und injektiv auf $N(s_i \circ f)$, den nichtdegenerierten Simplex, der zum Kollaps von i und $i+1$ in f gehört. $\square$

Lemma 0.12. *Der Funktor* $\mathrm{Ord} : \mathrm{poset} \to \mathrm{Top}$*, der eine halbgeordneten Menge mit der Ordnungstopologie versieht, ist kostetig.*

Beweis. Klar ist, dass Ord mit Koprodukten vertauscht. Sei nun $A \rightrightarrows^F_G B \to C$ ein Koegalisator in den halbgeordneten Mengen. Dann ist nach 0.6 und 0.8 die zugrundeliegende mengentheoretische Abbildung von $q : B \to C$ der mengentheoretische Koegalisator: nur der Reflektor $\mathrm{Cat} \to \mathrm{skelCat}$ könnte die zugrundeliegende Menge ändern, wird aber bereits auf eine Skelettkategorie angewandt, denn ein Kategorienkolimes über halbgeordnete Mengen enthält keine Morphismen in entgegengesetzte Richtungen. Wir müssen noch zeigen, dass $\mathrm{Ord}(q) : \mathrm{Ord}\, B \to \mathrm{Ord}\, C$ final ist. Ist $U \subset C$ eine Menge mit offenem Urbild $q^{-1}(C)$, so ist ein Morphismus $x \to y$ in C mit $x \in U$ ein Pfad $x = v_0 \to v_1 \sim w_1 \to w_2 \sim v_2 \to \cdots \to y$ bestehend aus Morphismen in B, die sich nach den Identifaktionen durch q verknüpfen lassen. Induktiv liegen nun nach der Abgeschlossenheit nach oben von $q^{-1}(U)$ alle v_i, w_i in $q^{-1}(U)$ und somit auch y. Es folgt die Offenheit von U. $\square$

Mit **??** erhalten wir sofort:

Proposition 0.13. *Sei* $X \in \mathrm{s\,Ens}$ *eine simpliziale Menge. Dann gibt es eine Äquivalenz von Kategorien* $\mathrm{Ens}_{/\blacktriangle X} \xrightarrow{\approx} [(X \otimes R)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$.

Betrachte nun für eine feste simpliziale Menge $X \in \mathrm{s\,Ens}$ die volle Unterkategorie $(\mathrm{s\,Ens}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}})_X \subset \mathrm{s\,Ens}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}}$ der simplizialen Garben über topologischen Räumen mit Komorphismen mit der simplizialen Menge X als diskreten Basisräumen.

Wir erhalten die folgende Übertragung von **??**:

Proposition 0.14. *Die kovariante Realisierung mittels plumper Simplizes (**??**) liefert eine Äquivalenz von Kategorien*

$$(\mathrm{s\,Ens}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}})_X \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ens}_{/\blacktriangle X}\,.$$

Weiter gibt es eine Äquivalenz

$$(\mathrm{s\,Ens}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}})_X \xrightarrow{\approx} [(X \otimes R)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$$

gegeben durch den Funktor, der $F \in (\mathrm{s\,Ens}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}})_X$ *auf den Funktor* $(\sigma \mapsto (F_n)_\sigma$ *schickt für* $\sigma \in NX_n$.

Beweis. Eine Garbe F_n über einem diskreten Raum X_n ist diskret und somit durch ihre Halme festgelegt. Wir können sie somit als einen Funktor der diskreten Kategorie X_n in die Kategorie der Mengen $F_n : X_n \to \mathrm{Ens}$ auffassen. Ein Komorphismus über $Ff^* : X_m \to X_n$ sind dann Abbildungen zwischen den Halmen $(F_n)_{Ff(\sigma)} \to (F_m)_\sigma$ für $\sigma \in X_m$. $\square$

Nach der Bemerkung **??** reicht es, die topologischen Teile des Beweises aus **??** zu übertragen. Wir formulieren ganz allgemein:

Definition 0.15. Eine Konstruierbarkeitssituation ist eine stetige Abbildung $p : |\mathcal{K}| \to \mathcal{K}$ topologischer Räume, sodass gilt: Jeder Punkt $\sigma \in \mathcal{K}$ besitzt eine kleinste offene Umgebung $(\geq \sigma)$. Wir notieren $U(\sigma) = p^{-1}((\geq \sigma))$. Eine Garbe $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ heißt schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbar, falls die Koeinheit der Adjunktion auf F einen Isomorphismus $p^*p_*F \xrightarrow{\sim} F$ ist.

In unserer Konstruierbarkeitssituation nennen wir $\mathcal{K}$ die *kombinatorische* und $|\mathcal{K}|$ die *geometrische Realisierung*. Wir übertragen den Begriff derivierter schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbarer Garben (mit schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbaren Kohomologiegarben) und die Notationen s-Kons$(\mathcal{K})$ und $\mathrm{Der}_{\mathrm{sk}}(|\mathcal{K}|)$.

Wir können mit identischem Beweis den allgemeinen Teil von **??** übertragen:

Proposition 0.16. *Für $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ sind äquivalent:*

(1) F ist schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbar

(2) F liegt im wesentlichen Bild des Rückzugs p^*.

(3) Die Restriktion $F(U(\sigma)) \to F_x$ ist für alle $\sigma \in \mathcal{K}$ und alle $x \in |\sigma|$ ein Isomorphismus.

In guten Konstruierbarkeitssituationen lässt sich auch eine geometrische Formulierung schwacher $|\mathcal{K}|$-Konstruierbarkeit angeben:

Definition 0.17. In einer Konstruierbarkeitssituation $p : |\mathcal{K}| \to \mathcal{K}$ heißt eine Garbe $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ geometrisch schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbar, falls die Einschränkungen $F|_{|\sigma|}$ konstant sind für alle Urbilder $|\sigma| = p^{-1}(\sigma)$ von Punkten $\sigma \in \mathcal{K}$.

Proposition 0.18. *Ist in einer Konstruierbarkeitssituation $p : |\mathcal{K}| \to \mathcal{K}$ ... so ist für eine Garbe $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ äquivalent:*

1. *F ist $|\mathcal{K}|$-konstruierbar.*
2. *F ist geometrisch schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbar.*

Das ist der fehlende Teil von **??**.

Beweis. Die Richtung $1 \Rightarrow 2$ folgt wieder aus 0.16 (3) und **??** wegen $|\sigma| \subset U(\sigma)$.

Für die umgekehrte Richtung $\square$