0.1 Simpliziale Garben

Die Beschreibung der geometrischen Realsierung als Tensorprodukt von Funktoren eröffnet uns eine Reihe weiterer geometrischer Realisierungen, die diejenige simplizialer Mengen verallgemeinern.

Zunächst stellen wir fest, dass wir in unserer Konstruktion simpliziale Mengen immer als diskrete simpliziale topologische Räume betrachtet haben, und die Diskretheit genauso gut auch fallen lassen können. Wir erhalten die geometrische Realisierung $|X| = X \otimes R$ eines simplizialen topologischen Raums $X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Top}$.

Beispiel 0.1. *Wir betrachten den simplizialen topologischen Raum $X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Top}$, den wir aus dem (kombinatorischen) Standard-1-Simplex Δ^1 erhalten, indem wir disjunkte Vereinigungen von Punkten durch disjunkte Vereinigungen von Intervallen $I = [0, 1]$ mit von den Identitäten induzierten Abbildungen ersetzen. Offenbar ist die geometrische Realiserung das Produnkt $I \times |\Delta^1|$. Ersetzen wir X_0 wieder durch zwei Punkte $0, 1$ mit beliebigen Degenerationen, so erhalten wir eine zu einer Kreisscheibe verdickte Linie zwischen den beiden Punkten als Realisierung. Ersetzen wir die höheren $X_n, n \geq 2$ ebenfalls wieder durch Punkte mit beliebigen Randabbildungen, so sorgen deren Identifikationen dafür, dass die geometrische Realisierung wieder $|\Delta^1|$ wird.*

Weiter verallgemeinert die Konstruktion auch auf Diagrammkategorien. Ist I eine kleine Kategorie und $X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Top}^I$ ein simpliziales I-System topologischer Räume, so erhalten wir eine geometrische Realisierung $|X| = X \otimes R$ von X, wenn wir $R : \Delta \to \mathrm{Top} \to \mathrm{Top}^I$ mittels des Funktors der konstanten Darstellung auf die Diagrammkategorie fortsetzen. Insbesondere erhalten wir eine geometrische Realisierung für die Kategorie der Paare topologischer Räume mit stetiger Abbildung, d. h. die Diagrammkategorie Top^I für I die von $\{\bullet \to \bullet\}$ erzeugte Kategorie. Uns interessiert der Fall von Garben:

Satz 0.2. *Sei $I = \{\bullet \to \bullet\}$, $X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Top}^I$ ein simpliziales Paar topologischer Räume mit stetiger Abbildung, für die $X_n : E_n \to Y_n$ étale ist für alle $[n]$. Dann ist auch die geometrische Realisierung $|X| : |E| \to |Y|$ étale.*

Beweis. Die Realisierung ist die Abbildung $|E| = \coprod_n E_n \times |\Delta^n| / \sim \to |Y| = \coprod_n Y_n \times |\Delta^n| / \sim$, die von den $X_n : E_n \to Y_n$ induziert wird. Sind die $X_n : E_n \to Y_n$ étale, so ist die Abbildung auf den Koprodukten étale und es reicht zu bemerken, dass die Wirkung von $f : [n] \to [m]$ auf den Koprodukten verträglich ist nach Definition eines Funktors nach Top^I. $\square$

In die Sprache der Garben zurückübersetzt bedeutet das, dass wir eine geometrische Realisierung erklärt haben für simpliziale Garben über topologischen Räumen $X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$:

$$E_n \in \mathrm{Ens}_{/Y_n} \qquad \rightsquigarrow \qquad |E| \in \mathrm{Ens}_{/|Y|}\,.$$

Man beachte, dass Morphismen étaler Top^I den "Morphismen" in $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$ entsprechen, während sonst häufig mit Komorphismen gearbeitet wird.

Bemerkung 0.3. Diese geometrische Realisierung simplizialer Garben auf topologischen Räumen spezialisiert zu einer geometrischen Realisierung simplizialer Garben auf X: Ist $F : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ eine simpliziale Garbe auf X, so ist ihre geometrische Realisierung aus 0.2 eine Garbe $|F| \in \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$, da die geometrische Realisierung des konstanten simplizialen topologischen Raums $X : [n] \mapsto X$ selbst X ist.

Für Garben E_n auf diskreten Räumen D_n handelt es sich um die geometrische Realisierung eines Pfeils simplizialer Mengen. Die relative Version über X hiervon ist die folgende: für Garben E_n auf $X \times D_n$ für diskrete D_n und zu für $f : [m] \to [n]$ monoton von $D_n \to D_m$ induzierten Basen $D_n \times X \to D_m \times X$ der Garbenmorphismen ist die geometrische Realisierung eine Garbe über $X \times |D|$, für $|D|$ die Realisierung der simplizialen Menge $[n] \mapsto D_n$.

0.1.1 Diskussion verschiedener Verfahren zur Realisierung

Ziel unserer Überlegungen wird es sein, die Aussagen zu simplizial konstanten Garben auf der geometrischen Realisierung eines Simplizialkomplexes $\mathcal{K}$ als Garben auf dem topologischen Raum $\mathcal{K}$ auf die Situation simplizialer Mengen zu übertragen. Die angesprochenen Realisierungen in 0.2 und 0.3 sind dafür nicht geeignet. Das liegt daran, dass wir, um aus Garben auf der Realisierung wieder ein Diagramm von Garben zu erhalten, generisierende Randabbildungen benötigen. Im Fall einer simplizialen Garbe $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$ sind die Randabbildungen im Garbensystem dagegen gegenläufig zu den generisierenden Einbettungen $|d_i| : |\Delta^{n-1}| \hookrightarrow |\Delta^n|$ der Basisräume.

Wir erklären eine neue Realisierung, die diesem Anspruch gerecht wird. Sei dazu $R : \Delta \to \mathrm{Top}$ ein kosimplizialer Raum und $F : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}}, [n] \mapsto F_n \in Ens_{/X_n}$ eine simpliziale Garbe über topologischen Räumen mit Komorphismen. Für $f : [n] \to [m]$ monoton gibt es also eine stetige Abbildung $Ff : X_m \to X_n$ und einen Morphismus von Garben über X_m: $Ff^*F_n \to F_m$. Wir erhalten einen Funktor K von der Unterteilungskategorie $\mathrm{Sub}(\Delta)$ von Δ in die topologischen Räume

$$\begin{aligned} K : \mathrm{Sub}(\Delta) &\to \mathrm{Top}, \\ [n]^{\S} &\mapsto F_n \times R[n], \\ (f : [n] \to [m])^{\S} &\mapsto Ff^*F_n \times R[n], \end{aligned}$$

der auf Morphismen $f^{\S} \to [n]^{\S}$ vom universellen Morphismus $Ff^*F_n \to F_n$ über Ff induziert ist und auf Morphismen $f^{\S} \to [m]^{\S}$ durch den Morphismus $Ff^*F_n \to F_m$ in $\mathrm{Ens}_{/X_m}$ sowie Rf gegeben ist.

Proposition 0.4. *In dieser Situation ist das Kolimes über den oben definierten Funktor K ein étaler Raum über der geometrischen Realisierung der Basis $|X|$.*

Beweis. Offenbar ist $\coprod_n F_n \times R[n] \to \coprod_n X_n \times R[n]$ étale.

□

0.1.2 Die Dualität von Nerv und Realisierung

Wir suchen Rechtsadjungierte für unsere geometrischen Realisierungen. Für die Realisierung simplizialer Mengen gelingt uns das einfach.

Satz 0.5. *Der Funktor der singulären Ketten $S : \mathrm{Top} \to \mathrm{s\,Ens}$, $SY = \mathrm{Top}(R\,\cdot, Y) : [n] \mapsto \mathrm{Top}(|\Delta^n|, Y)$ ist rechtsadjungiert zur geometrischen Realisierung $|\cdot| : \mathrm{s\,Ens} \to \mathrm{Top}$.*

Beweis. Die Rand- und Degenerationsabbildungen von SY sind für $f : [n] \to [m]$ gegeben durch Vorschalten von $|f| : |\Delta^n| \to |\Delta^m|$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\mathrm{Top}(|X|, Y) &= \mathrm{Top}(\mathrm{col}_{\Delta\downarrow_r X} |\Delta^n|, Y) \\
&\xrightarrow{\sim} \mathrm{col}_{\Delta\downarrow_r X} \mathrm{Top}(|\Delta^n|, Y) \\
&\xrightarrow{\sim} \mathrm{col}_{\Delta\downarrow_r X} \mathrm{s\,Ens}(\Delta^n, \mathrm{Top}(R\,\cdot, Y)) \\
&\xrightarrow{\sim} \mathrm{s\,Ens}(\xrightarrow{\sim} \mathrm{col}_{\Delta\downarrow_r X} \Delta^n, \mathrm{Top}(R\,\cdot, Y)) \\
&\xrightarrow{\sim} \mathrm{s\,Ens}(X, SY)
\end{aligned}$$

mit der Definition der geometrischen Realisierung im ersten Schritt (Gl. **??**), der Verträglichkeit von $\mathrm{Hom} : C^{\mathrm{op}} \times C \to \mathrm{Ens}$ mit Limites im zweiten und vierten Schritt, unserer Bestimmung der n-Simplizes als Morphismenmenge (Gl. **??**) im dritten Schritt und unserer Beschreibung einer simplizialen Menge als Kolimes über ihre Simplexkategorie (**??**) im letzten Schritt. □

Während dieses Argument wieder ein sehr anschauliches ist, möchten wie wie in **??** erklärt, unser Argument mit den Begriffen und Techniken von Koenden führen, um es automatisch verallgemeinern zu können. Wir geben hier noch einmal die direkte Übersetzung obigen Beweises in die Sprache der Koenden an, und dann sofort die Verallgemeinerung.

Beweis. ([**?**], 3.2) Wir berechnen mit den Regeln des Koenden-Kalküls:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Top}(|X|, Y) &= \mathrm{Top}\left(\int^{[n]} X[n] \times R[n], Y\right) \\
&\xrightarrow[\text{??}]{\sim} \int_{[n]} \mathrm{Top}\big(X[n] \times R[n], Y\big) \\
&\xrightarrow[\text{??}]{\sim} \int_{[n]} \mathrm{Ens}\big(X[n], \mathrm{Top}(R[n], Y)\big) \\
&\xrightarrow[\text{??}]{\sim} [\Delta^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]\big(X, \mathrm{Top}(R\,\cdot, Y)\big) \\
&= \mathrm{s\,Ens}(X, SY).
\end{aligned}$$

□

Theorem 0.6 (Allgemeine Nerv-Realisierungs-Dualität, [**?**], 3.2)**.** *Seien C eine V-Kategorie mit Koexponentialen und ein Funktor $R : S \to C$ gegeben. Dann gibt es eine Adjunktion $(|\cdot|, N)$*

$$C \underset{N}{\overset{|\cdot|}{\rightleftarrows}} [S^{\mathrm{op}}, V]$$

mit

$$\begin{aligned} |\cdot| :& X \mapsto \int^s X(s) \odot R(s) \qquad \textit{und} \\ N :& Y \mapsto C(R\,\cdot, Y). \end{aligned}$$

Beweis. In wörtlicher Verallgemeinerung des Vorangegangenen:

$$\begin{aligned} C(|X|, Y) &= C\left(\int^s X(s) \odot R(s), Y\right) \\ &\xrightarrow[\mathbf{??}]{\sim} \int_s C\big(X(s) \odot R(s), Y\big) \\ &\xrightarrow[\mathbf{??}]{\sim} \int_s V\big(X(s), C(R(s), Y)\big) \\ &\xrightarrow[\mathbf{??}]{\sim} [S^{\mathrm{op}}, V]\big(X, C(R\,\cdot, Y)\big) \\ &= [S^{\mathrm{op}}, V](X, NY). \end{aligned}$$

□

0.1.3 Die kartesisch abgeschlossene Struktur der Garben auf X

Für unsere allgemeine Dualität von Nerv und Realisierung 0.6 benötigen wir also eine bessere V-angereichterte Struktur auf C. Wenn wir uns auf $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ beschränken, erhalten wir sogar die Struktur einer kartesisch abgeschlossenen Kategorie (engl. *cartesian closed category*), d. h. einer Kategorie mit endlichen Produkten, für deren kartesische monoidale Struktur es ein internes Hom gibt.

Proposition 0.7. *Die Kategorie* $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ *ist kartesisch abgeschlossen mit Produkt*

$$(F \times G)(U) = F(U) \times G(U)$$

und internem Hom

$$(F \Rightarrow G)(U) = \mathrm{Ens}_{/U}(F|_U, G|_U)$$

jeweils mit den von den Restriktionen von F *und* G *induzierten Restriktionen.*

Beweis. Das Produkt erfüllt offenbar die universelle Eigenschaft in $\mathrm{pEns}_{/\mathrm{X}}$ und ist eine Garbe, da Produkte mit dem Limes der Garbeneigenschaft vertauschen. Das interne Hom besteht aus stetigen Abbildungen über U und erfüllt somit die Garbenbedingung, die ja sogar nach der Verklebbarkeit stetiger Abbildungen modelliert war. Für die Adjunktion müssen wir zeigen

$$\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}(F \times G, H) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}(F, G \Rightarrow H).$$

Links stehen restriktionsverträgliche Systeme $F(U) \times G(U) \to H(U)$ alias $F(U) \to \mathrm{Ens}(G(U), H(U))$, rechts restriktionsverträgliche Systeme $F(U) \to \mathrm{Ens}_{/U}(G|_U, H|_U)$. Wir erhalten eine Abbildung von rechts nach links durch den globalen Teil

$G(U) \to H(U)$ des Garbenmorphismus $G|_U \to H|_U$ und das Exponentialgesetz in Ens und von links nach rechts durch Ergänzen des globalen Teils $G(U) \to H(U)$ durch verträgliche $G(V) \to H(V)$ als die Bilder unter $F(U) \to F(V) \to \mathrm{Ens}(G(V), H(V))$. Diese Abbildungen sind zueinander invers. □

Weiter besitzt $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ natürlich auch Koprodukte, nämlich die Garbifizierungen der U-weise definierten Koprodukte in $\mathrm{pEns}_{/\mathrm{X}}$.

Diese Strukrur einer kartesisch abgeschlossenen Kategorie macht $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ insbesondere zu einer über sich selbst tensorierten Kategorie im Sinne von **??**. Wir erhalten einen Nerv-Funktor für die geometrische Realisierung simplizialer Garben auf X aus 0.6.

0.1.4 Kategorien von Garben über topologischen Räumen

Wir betrachten die Kategorienfaserungen $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ mit Morphismen den stetigen Abbildungen zwischen den étalen Räumen über der stetigen Abbildung in der Basis sowie $\mathrm{Ens} /\!\!/ \mathrm{Top} \to \mathrm{Top}$ mit Opkomorphismen als Morphismen, d. h. für $F \in \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ und $G \in \mathrm{Ens}_{/Y}$:

$$\mathrm{Ens}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}}(F, G) = \coprod_{f:X\to Y} \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}(f^*G, F).$$

Wir möchten einen Nerv-Funktor nicht nur für die Realisierung simplizialer Garben über X finden, sondern auch für simpliziale Garben über variablen topologischen Räumen, also für simpliziale Objekte in $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$ und $\mathrm{Ens}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}}$. Dafür benötigen wir wieder eine monoidal abgeschlossene Struktur auf diesen Kategorien.

Die Kategorie $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$ besitzt endliche Produkte, die algebraisch gegeben sind durch Rückzug und Produkt und topologisch durch Bilden der Produkträume. Konkret:

Proposition 0.8. *Seien $F_{1,2} \in \mathrm{Ens}_{/X_{1,2}}$ Garben über topologischen Räumen X_1 und X_2. Dann erfüllt die Garbe*

$$F_1 \times F_2 := \mathrm{pr}_1^* F_1 \times \mathrm{pr}_2^* F_2 \in \mathrm{Ens}_{/X_1 \times X_2}$$

mit $\mathrm{pr}_{1,2} : X_1 \times X_2 \to X_{1,2}$ den Projektionen die universelle Eigenschaft des Produkts von F_1 und F_2 in $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$. Für ihren étalen Raum gilt:

$$\overline{F_1 \times F_2} = \overline{F_1} \times \overline{F_2}$$

und $\overline{F_1 \times F_2} \to X_1 \times X_2$ ist durch das Produkt der $\overline{F_{1,2}} \to X_{1,2}$ gegeben.

Beweis. Die Beschreibung von $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$ als Paare topologischer Räume mit étaler Abbildung zeigt die Aussage über den étalen Raum des Produkts. Die induzierte Abbildung $\overline{F_1} \times \overline{F_2} \to X_1 \times X_2$ ist ein Homöomorphismus auf der Produktmenge der Umgebungen, auf denen $\overline{F_{1,2}} \to X_{1,2}$ Homöomorphismen sind.

Für die algebraische Beschreibung erhalten wir mit der Offenheit der Projektionen $\mathrm{pr}_{1,2}$ und 0.7 für die Schnitte über Basismengen $U_1 \times U_2$:

$$\begin{aligned}(F_1 \times F_2)(U_1 \times U_2) &\xrightarrow{\sim} (\mathrm{pr}_1^* F_1)(U_1 \times U_2) \times (\mathrm{pr}_2^* F_2)(U_1 \times U_2) \\ &\xrightarrow{\sim} F_1(U_1) \times F_2(U_2).\end{aligned}$$

Wir erhalten also einen Garbenmorphismus über $X_1 \times X_2$ von der algeraischen zur topologischen Beschreibung, indem einem Paar $(s,t) \in F_1(U_1) \times F_2 \times U_2$ der Schnitt $s \times t : U_1 \times U_2 \to \overline{F_1} \times \overline{F_2}$ zugeordnet wird. Dieser Morphismus induziert auf den Halmen die Bijektion $(F_1 \times F_2)_{x,y} \xrightarrow{\sim} (F_1)_x \times (F_2)_y$ aus dem Vertauschen von endlichen Produkten mit filtrierenden Kolimites. □

Bemerkung 0.9. Auf ähnliche Weise kann man auch für $\mathrm{Ens}_{/\!/\,\mathrm{Top}}$ endliche Produkte konstruieren: es handelt sich (wegen der opponierten Fasern) um das *Ko*produkt der mit den Projektionen auf den Produktraum zurückgezogenen Garben.

Wir könnten erwarten, dass wie das Produkt auch das interne Hom von $EnsX$ in unsere relative Situation übertragen werden kann. Dies gelingt tatsächlich aber im Allgemeinen nicht, denn in diesem Fall erhielten wir durch Nachschalten des Faserfunktors $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ bzw. $\mathrm{Ens}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ ein zum kartesischen Produkt adjungiertes internes Hom in der Kategorie der topologischen Räume, was bekanntermaßen in dieser Allgemeinheit nicht möglich ist ([**?**]). Wir müssen uns also wieder auf eine bequeme Kategorie topologischer Räume mit internem Hom einschränken.

Die häufige Wahl CGHaus ist für uns ungeeignet, denn der étale Raum einer Garbe über einem kompakt erzeugten Hausdorffraum ist im Allgemeinen kein Hausdorffraum mehr (betrachte etwa die Garbe der stetigen Funktionen nach $\mathbb{R}$). Abhilfe schafft uns eine Konstruktion aus [**?**], die die den kompakt erzeugten Räumen zugrundeliegenden Gedanken verallgemeinert. Wir geben hier nur die Ergebnisse an.

Äquivalent zu unserer (der *point-set*-Topologie entspringenden) Definition kompakt erzeugter Räume ist die folgende Charakterisierung:

Lemma 0.10 (**??**, Variante)**.** *Ein topologischer Raum X ist kompakt erzeugt genau dann, wenn gilt: Eine Teilmenge $U \subset X$ ist offen genau dann, wenn ihr Urbild unter allen stetigen Abbildungen $K \to X$, K kompakt, offen ist.*

Beweis. Unsere Bedingung besagt, dass X die Finaltopologie bezüglich des Systems der $K \to X$, K kompakt tragen soll. Die Bedingung aus der ursprünglichen Definition ist dieselbe für das System der Inklusionen kompakter Mengen $K \subset X$. Da jede stetige Abbilung $K \to X$, K kompakt, über die Inklusion ihres kompakten Bilds faktorisiert, ist letzteres System in ersterem konfinal und die Finaltopologien stimmen überein. □

Der in **??** angesprochene zur Inklusion Rechtsadjungierte $k : \mathrm{Top} \to \mathrm{CG}$ lässt sich nun auch beschreiben als das Versehen der X zugrundeliegenden Menge mit der genannten Finaltopologie. Der Raum kX ist dann sogar ein Kolimes über das System der $K \to X$, K kompakt, mitsamt den Morphismen über X ([**?**], 1.1).

Nun verallgemeinern wir ([?], 1): Sei $\mathcal{I}$ eine nichtleere volle Unterkategorie von Top (für CG die kompakten Räume). Betrachte die Kategorie $\mathcal{I} \downarrow X$ und $kX := \mathrm{col}_{mathcalI\downarrow X}\, X$. Bezeichne die volle Unterkategorie der topologischen Räume X mit $kX \cong X$ mit $\mathcal{K}$. Dann ist $k : \mathrm{Top} \to \mathcal{K}$ ein Funktor und rechtsadjungiert zur Inklusion $\mathcal{K} \to \mathrm{Top}$. Es gilt $\mathcal{I} \subset \mathcal{K}$.

Bemerkung 0.11. Eine volle Unterkategorie mit zur Inklusion Rechtsadjungiertem heißt auch *koreflektiert* (engl. *coreflective*), der Rechtsadjungierte heißt *Koreflektor*.

Wir nehmen nun an, dass $\mathcal{I}$ die folgenden Axiome erfüllt:

1. Ist $A \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum eines Objekts $X \in \mathcal{I}$, dann gilt $A \in \mathcal{K}$.
2. $\mathcal{I}$ ist abgeschlossen unter endlichen kartesischen Produkten (Produkten in Top).
3. Sind $X, Y \in \mathcal{I}$, so ist die Auswertungsabbildung

   $$\mathrm{ev}_{X,Y} : \mathrm{Top}_{co}(X,Y) \times X \to Y, (f,x) \qquad \mapsto f(x)$$

   stetig. Dabei ist $\mathrm{Top}_{co}(X,Y)$ die Morphismenmenge $\mathrm{Top}(X;Y)$ versehen mit der kompakt-offen Topologie.

Dann besitzt $\mathcal{K}$ die Struktur einer kartesisch abgeschlossenen Kategorie mit Produkten

$$X \otimes Y \ := \ k(X \times Y)$$

den “k-ifizierungen” der Produkte in Top und internem Hom

$$X \Rightarrow Y \ := \ k(\mathrm{Top}_{co}(X,Y))$$

([?], 3).

Definition 0.12. Ein topologischer Raum heißt *lokalkompakt* (im starken Sinne), wenn jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen besitzt.

Bemerkung 0.13. Dies ist eine stärkere Bedingung als *lokal kompakt* (im schwachen Sinne) wie in **??** zu sein. Jene stimmt überein mit unserer Konvention für “lokal Eigenschaft” und wird daher getrennt geschrieben. Für Hausdorffräume stimmen beide Begriffe überein.

Die volle Unterkategorie der lokalkompakten topologischen Räume $\mathcal{L} \subset \mathrm{Top}$ erfüllt die Axiome und hat deshalb eine zugehörige kartesisch abgeschlossene Unterkategorie $\mathcal{K}$, die die kompakt erzeugten Hausdorffräume und lokalkompakten Räume umfasst ([?], 5.3).

Der Vorteil dieser Konstruktion im Vergleich zu den kompakt erzeugten Hausdorffräumen ist folgende Beobachtung:

Proposition 0.14. *(i) Ein étaler Raum über einem lokalkompakten topologischen Raum ist lokalkompakt.*

(ii) Die Kategorie der lokalkompakten topologischen Räume $\mathcal{L}$ ist

Beweis. (i) Étale Abbildungen sind nach Definition lokale Homöomorphismen, Lokalkompaktheit ist eine lokale Eigenschaft.

(ii) Das Produkt $X \times Y$ aus Top ist lokalkompakt, falls beide Faktoren es sind und stimmt dann auch mit den Produkten in $\mathcal{L}$ und $\mathcal{K}$ überein.

□

Unsere Hoffnung, eine kartesisch abgeschlossene Struktur auf $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$ zu finden, wird sich nicht erfüllen. Wir können aber erklären, wieso.

Satz 0.15. *Es gibt keine kartesisch abgeschlossene Struktur auf* $\mathrm{Ens}_{/C} \subset \mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$ *für* $C \subset \mathrm{Top}$ *eine nichtleere volle Unterkategorie der topologischen Räume.*

Beweis. Wir erinnern daran, dass ein Morphismus in $\mathrm{Ens}_{/C}$ ein kommutatives Quadrat

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d, "p"] & G \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

ist. In diesem Beweis notieren wir Objekte in $\mathrm{Ens}_{/C}$ mitsamt ihrer Basis als $F \to X$.

Zunächst zeigen wir, dass Produkt und internes Hom von $\mathrm{Ens}_{/C}$ ein Produkt und internes Hom in C liefern. Betrachte dazu die volltreuen Einbettungen $C \to \mathrm{Ens}_{/C}$ durch faserweise initiale Garben $\iota : X \mapsto (\varnothing \to X)$ (konstant leer) und durch faserweise terminale Garben $\tau : X \mapsto (X \xrightarrow{\mathrm{id}} X)$ (konstant einelementig). Wir haben natürliche Bijektionen

$$\mathrm{Ens}_{/C}(\iota X, U \to L) \xrightarrow{\sim} C(X, L) \qquad \text{und}$$
$$\mathrm{Ens}_{/C}(\tau X, U \to L) \xrightarrow{\sim} C(X, U).$$

durch Betrachten des unteren bzw. oberen Pfeils des kommutativen Quadrats.

Sei $(U \to L) = \tau Y \times \tau Z$ das Produkt in $\mathrm{Ens}_{/C}$. Dieses erfüllt die universelle Eigenschaft des Produkts insbesondere für Testobjekte der Form ιX und wir erhalten aus der universellen Eigenschaft durch Einschränken auf den unteren Pfeil

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ens}_{/C}(\iota X, U \to L) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\sim"] & \mathrm{Ens}_{/C}(\iota X, \tau Y) \times \mathrm{Ens}_{/C}(\iota X, \tau Z) \arrow[d, "\sim"] \\ C(X, L) \arrow[r, "\sim"] & C(X, Y) \times C(X, Z). \end{tikzcd}$$

Es erfüllt also L die universelle Eigenschaft des Produkts $Y \times Z$ in C. Betrachten wir Testobjekte der Form τX, so erhalten wir entsprechend durch Einschränken auf den oberen Pfeil auch, dass $U \xrightarrow{\sim} Y \times Z$ ist und die Abbildung dazwischen nach dem Yoneda-Lemma der eindeutige Isomorphismus zwischen den universellen Objekten. Es ist also $\tau X \times \tau Y \xrightarrow{\sim} \tau(X \times Y)$ in $\mathrm{Ens}_{/C}$. Analog finden wir

$$\iota X \times (G \to Y) \xrightarrow{\sim} \iota(X \times Y). \tag{1}$$

Mit derselben Technik erhalten wir auch für $(U \to L) = (\tau Y \Rightarrow \tau Z)$ das interne Hom, dass wegen

$$\begin{aligned} C(X,U) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}_{/C}(\tau X, U \to L) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}_{/C}(\tau X \times \tau Y, \tau Z) \\ &\xrightarrow{\sim} C(X \times Y, Z) \end{aligned}$$

U ein internes Hom in C für Y und Z ist und wegen

$$\begin{aligned} C(X,L) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}_{/C}(\iota X, U \to L) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}_{/C}(\iota X \times \tau Y, \tau Z) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}_{/C}(\iota(X \times Y), \tau Z) \\ &\xrightarrow{\sim} C(X \times Y, Z) \end{aligned}$$

auch L. Wieder ist nach dem Yoneda-Lemma $U \to L$ der eindeutige Isomorphismus zweier einen Funktor darstellenden Objekte [1].

Es muss also C kartesisch abgeschlossen sein.

Ein Morphismus

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & G \\ \big\downarrow{\scriptstyle p} & & \big\downarrow{\scriptstyle q} \\ X & \longrightarrow & Y, \end{array}$$

ist nach der Kommutativität des Quadrats ein Element des Faserprodukts von Mengen

$$\mathrm{Ens}_{/C}(F \to X, G \to Y) = \mathrm{Top}(F,G) \times_{\mathrm{Top}(F,Y)} C(X,Y),$$

wobei die Abbildungen nach $\mathrm{Top}(F,Y)$ durch Nachschalten von q bzw. Vorschalten von p gegeben sind.

Wir bestimmen nun mit einem bekannten Trick die den internen Hom-Objekten zugrundeliegenden Mengen. Bezeichne $v : \mathrm{Top} \to \mathrm{Ens}$ den Vergissfunktor. Wir können den Funktor

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Ens}_{/C} & \to & \mathrm{Top} & \to & \mathrm{Ens}, \\ (U \to L) & \mapsto & U & \mapsto & vU \end{array}$$

darstellen durch $\mathrm{Ens}_{/C}(\tau\,\mathrm{pt}, \cdot)$ und den Funktor

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Ens}_{/C} & \to & C & \to & \mathrm{Ens}, \\ (U \to L) & \mapsto & L & \mapsto & vL \end{array}$$

durch $\mathrm{Ens}_{/C}(\iota\,\mathrm{pt}, \cdot)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathrm{Ens}_{/C}(\tau\,\mathrm{pt}, (F \to X) \Rightarrow (G \to Y)) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}_{/C}(\tau\,\mathrm{pt} \times (F \to X), G \to Y) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}_{/C}(F \to X, G \to Y) \qquad \text{und} \\ \mathrm{Ens}_{/C}(\iota\,\mathrm{pt}, (F \to X) \Rightarrow (G \to Y)) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}_{/C}(\iota\,\mathrm{pt} \times (F \to X), G \to Y) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}_{/C}(\iota X, G \to Y) \\ &\xrightarrow{\sim} C(X,Y), \end{aligned}$$

[1] Solche bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutigen Objekte werden wir wie üblich kanonisch wählen und die eindeutigen Isomorphismen als Identitäten schreiben.

da $\tau\,\mathrm{pt}$ das terminale Objekt von $\mathrm{Ens}_{/C}$ ist sowie nach Gleichung 1.

Die Abbildung im internen Hom-Objekt bestimmen wir mit den Funktorialitäten: Das Vorschalten von $\iota X \to (F \to X)$ induziert einen Morphismus $\big((F \to X) \Rightarrow (G \to Y)\big) \to \big(\iota X \Rightarrow (G \to Y)\big)$ bzw.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Top}(F,G) \times_{\mathrm{Top}(F,Y)} C(X,Y) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Top}(\varnothing,G) \times_{\mathrm{Top}(\varnothing,Y)} C(X,Y) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & C(X,Y) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
C(X,Y) \arrow[r, "\mathrm{id}"] & C(X,Y) \arrow[r, "\mathrm{id}"] & C(X,Y).
\end{tikzcd}$$

Dabei kommt die Identität in der Basis aus dem Yoneda-Lemma für

$$\mathrm{Ens}_{/C}(\iota\,\mathrm{pt}, (F \to X) \Rightarrow (G \to Y)) \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Ens}_{/C}(\iota\,\mathrm{pt}, \iota X \Rightarrow (G \to Y)).$$

Die Abbildung im Hom-Objekt ist also (wie nicht anders zu erwarten) die Projektion auf den zweiten Faktor. Soll diese étale sein, so muss

$\square$