Kapitel 1

Simpliziale Garben

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit simplizialen Objekten in der Kategorie der Garben auf einem topologischen Raum X. Während Simplizialkomplexe ungerichtete Graphen verallgemeinern, verallgemeinern simpliziale Mengen gerichtete Graphen, und werden uns so bei der geometrischen Realisierung von Objekten in Diagrammkategorien von Garben zur Verfügung stehen.

Wir betrachten die Menge Δ der nichtleeren endlichen Ordinalzahlen. Ihre Elemente sind von der Form $\{0, 1, \dots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, welche wir kurz mit $[n]$ bezeichnen werden. Wir verstehen diese Mengen $[n]$ als angeordnete Mengen.

Definition 1.1. Die Simplex-Kategorie Δ ist die Kategorie der endlichen nichtleeren Ordinalzahlen versehen mit monotonen Abbildungen als Morphismen.

Ist C eine Kategorie, so bezeichnen wir eine Prägarbe auf Δ mit Werten in C (d. h. einen Funktor $\Delta^{\mathrm{op}} \to C$) als simpliziales Objekt in C.

Unseren gewohnten Sprechweisen folgend nennen wir simpliziale Objekte in C auch kurz "simpliziale C" und sprechen etwa von simplizialen Mengen und simplizialen Garben. Wir notieren die Funktorkategorien simplizialer Objekte in C auch kurz mit $\mathrm{s}\,C = [\Delta^{\mathrm{op}}, C]$.

Die einfachsten Beispiele nichttrivialer simplizialer Mengen sind die Standard-n-Simplizes, die sich als die darstellbaren Funktoren $\Delta^n = \Delta(\cdot, [n])$ beschreiben lassen. Wir erhalten einen Funktor

$$\begin{aligned} \Delta &\to \mathrm{s}\,\mathrm{Ens}, \\ [n] &\mapsto \Delta^n = \Delta(\cdot, [n]). \end{aligned}$$

Ist $X \in \mathrm{s}\,\mathrm{Ens}$ eine simpliziale Menge, so bezeichnen wir $X_n := X([n])$ als die Menge der n-Simplizes von X. Nun sind die n-Simplizes von X gerade die "Bilder des n-ten Standardsimplizes in X" sind, präziser

$$X_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{s}\,\mathrm{Ens}(\Delta^n, X).$$

In der Tat besagt das Yoneda-Lemma, dass die Transformationen des freien Funktors $\Delta^n = \Delta(\cdot, [n])$ zum Funktor X in natürlicher Bijektion stehen zu $X([n])$.

Das folgende Lemma zeigt, dass sich eine simpliziale Menge X vollständig durch ihre Simplizes $\Delta^n \to X$ verstehen lässt. Wir betrachten dazu die Simplexkategorie von X, d. h. die Kategorie $\Delta \downarrow X$, wobei wir in der Notation unterschlagen, dass wir mittels $[n] \mapsto \Delta^n$ abstrakte Simplizes $[n]$ als simpliziale Mengen auffassen. Konkret ist also ein Objekt unserer Simplexkategorie von X ein Morphismus $\Delta^n \to X$ und ein Morphismus in der Simplexkategorie ein von $[n] \to [m]$ induzierter Morphismus simplizialer Mengen $\Delta^n \to \Delta^m$ über X.

Lemma 1.2. *Sei $X \in \mathrm{s\,Ens}$ eine simpliziale Menge. Dann gilt*

$$X \xrightarrow{\sim} \operatorname{col}_{\Delta^n \to X} \Delta^n,$$

mit dem Kolimes über die Simplexkategorie von X.

Beweis. Bezeichne C obigen Kolimes. Das System, über das der Kolimes gebildet wird, sichert uns nach der universellen Eigenschaft des Kolimes einen eindeutigen Morphismus $C \to X$. Wir müssen also zeigen, dass dieser Bijektionen auf den n-Simplizes induziert. Tatsächlich definiert ein n-Simplex $\Delta^n \to C$ durch Nachschalten von $C \to X$ einen n-Simplex in X. Diese Zuordnung ist bijektiv, denn wir erhalten eine Umkehrabbildung, wenn wir $\Delta^n \to X$ den zugehörigen Morphismus in den Kolimes $\Delta^n \to C$ zuordnen. □

Wir erklären nun die geometrische Realisierung simplizialer Mengen. Der Unterschied zur geometrsichen Realsierung von Simplizialkomplexen ist im Wesentlichen die Möglichkeit, Simplizes "wiederzuverwenden", was zu Identifikationen in der geomtrischen Realisierung führt. Beispielsweise soll die S^1 als geometrische Realisierung eines 1-Simplizes realisiert werden, dessen Endpunkte übereinstimmen.

Formal definieren wir zunächst die geometrische Realsierung des Standard-n-Simplex als den abgeschlossenen geometrischen Standard-n-Simplex

$$|\Delta^n| = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | 0 \leq x_i \leq 1, \sum_{i=0}^{n} x_i = 1\}$$

und fordern, dass sich die Realisierung mit Kolimites vertrage:

$$|\operatorname{col}_i X_i| \xrightarrow{\sim} \operatorname{col}_i |X_i|$$

. Das erreichen wir, indem wir für eine simpliziale Menge X setzen

$$|X| := \operatorname{col}_{\Delta^n \to X} |\Delta^n|,$$

wieder mit dem Kolimes über die Simplexkategorie von X.

Ein Morphismus simplizialer Mengen $X \to Y$ induziert nun durch Nachschalten von $X \to Y$ einen Funktor auf den Simplexkategorien $\Delta \downarrow X \to \Delta \downarrow Y$