

0.1 Schwach konstruierbare Garben auf simplizialen Mengen

In diesem Abschnitt möchten wir die Aussagen aus den Kapiteln ?? und ?? übertragen auf den Fall, dass es sich bei dem Basisraum um die Realisierung einer simplizialen Menge anstelle eines Simplizialkomplexes handelt. Simplizialkomplexe sind halbgeordnete Mengen und unsere Technik verwendete die Ordnungstopologie halbgeordneter Mengen. Simplizial konstante Garben auf simplizialen Mengen entsprechen hingegen Diagrammen von Mengen, in denen es auch mehrere Pfeile zwischen zwei zu nichtdegenerierten Simplizes gehörigen Punkten geben kann. Solche kategoriellen Realisierungen simplizialer Mengen werden wir in diesem Abschnitt konstruieren.

Konkret ist für $X \in \mathbf{sEns}$ eine simpliziale Menge eine Kategorie D_X gesucht, für die es eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathbf{Ens}_{/|X|}^{\text{sk}} \xrightarrow{\approx} [D_X^{\text{op}}, \mathbf{Ens}]$$

gibt. Dabei steht $\mathbf{Ens}_{/|X|}^{\text{sk}}$ für die *simplizial konstanten Garben* auf $|X|$, d. h. Garben, deren Einschränkungen auf die Zellen der geometrischen Realisierung aus ?? konstant sind. Wir diskutieren die in Frage kommenden Kategorien D_X an einem einfachen Beispiel. Betrachte die Standarddarstellung von S^1 als simpliziale Menge X mit einem nichtdegenerierten 1-Simplex und einem nichtdegenerierten 0-Simplex aus ?. Als kategorielle Realisierung D_X von X können folgende Diagramme in Frage kommen:

1. Das Diagramm $D_X = (\bullet \rightarrow \bullet)$. Es handelt sich um das Diagramm der nichtdegenerierten Simplizes von X mit der Angabe, welche Simplizes im Abschluss welcher Simplizes liegen. Dieses Diagramm ist zu grob, um simplizial konstanten Garben auf S^1 zu entsprechen, wie die Realisierung von D_X mit der Ordnungstopologie und dann die erste Garbenkohomologie zeigt. Im Abschnitt 0.1.2 werden wir diese kategorielle Realisierung mit der geometrischen Realisierung durch plumpe Simplizes in Beziehung setzen.
2. Das Diagramm $D_X = \Delta \downarrow r X$. Es handelt sich um das Diagramm aller Simplizes von X mit der Angabe von Rändern und Degenerationen. Dieses Diagramm ist zu fein, um von einer simplizial konstanten Garbe auf S^1 eindeutig bestimmt zu werden, denn diese trägt keine Informationen über die degenerierten Simplizes. Gleich im Anschluss werden wir diese kategorielle Realisierung mit den simplizialen Objekten in $\mathbf{Ens}_{//\text{Top}}$ mit diskreten Basisräumen X in Beziehung setzen.
3. Das Diagramm $D_X = (\bullet \rightrightarrows \bullet)$. Dieses Diagramm würden wir anschaulich erwarten. Es handelt sich um die nichtdegenerierten Simplizes von X mit der Angabe von Rändern, nicht aber von Degenerationen. Im Abschnitt 0.1.1 zeigen wir die versprochene Aussage, dass Prägarben auf diesem Diagramm simplizial konstanten Garben auf $|X|$ entsprechen.

Während wir für die anderen beiden kategoriellen Realisierungen mehr ausholen müssen, zeigen wir die Interpretation der Prägarben auf der Simplexkategorie von X direkt.

Betrachte für eine feste simpliziale Menge $X \in \mathbf{sEns}$ die volle Unterkategorie $(\mathbf{sEns}_{//\mathbf{Top}})_X \subset \mathbf{sEns}_{//\mathbf{Top}}$ der simplizialen Garben über topologischen Räumen mit Komorphismen, für die die Basisräume diskret und als simplizialer topologischer Raum isomorph zur simplizialen Menge X sind. Für eine Garbe $F \in (\mathbf{sEns}_{//\mathbf{Top}})_X$ und $\sigma \in X_n$ einen n -Simplex schreiben wir $F(\sigma)$ für die Menge $(F_n)_\sigma$, den Halm bei σ . Für $f : [n] \rightarrow [m]$ monoton bestehen die Komorphismen $Ff^*F_n \rightarrow F_m$ aus Abbildungen $F(f(\sigma)) \rightarrow F(\sigma)$ für $\sigma \in X_m$. Da die Simplexkategorie $\Delta \downarrow_r X$ von X gerade aus allen Simplizes $\sigma \in \bigsqcup_n X_n$ besteht mit Morphismen $\sigma \rightarrow f(\sigma)$ für alle $f : [n] \rightarrow [m]$ und $\sigma \in X_m$, haben wir gezeigt:

Proposition 0.1. *Die obige Zuordnung liefert für $X \in \mathbf{sEns}$ eine simpliziale Menge eine Äquivalenz von Kategorien*

$$[\Delta \downarrow_r X^{\text{op}}, \mathbf{Ens}] \xrightarrow{\sim} (\mathbf{sEns}_{//\mathbf{Top}})_X.$$

0.1.1 Realisierung als gerichtete Kategorie

Wir benötigen die Begriffe für nichtdegenerierte Simplizes (vgl. ??, ??).

Definition 0.2. Die Unterkategorie der endlichen nichtleeren Ordinalzahlen mit injektiven monotonen Abbildungen $\Delta^+ \subset \Delta$ heißt *nichtdegenerierte Simplexkategorie*.

Wir wiederholen die Begriffe für simpliziale Mengen für Prägarben auf Δ^+ .

Definition 0.3. Die darstellbare Prägarbe auf Δ^+

$$\Delta^{+n} := \Delta^+(\cdot, [n])$$

heißt der *nichtdegenerierte Standard- n -Simplex*.

Diese Zuordnung liefert einen Funktor $r : \Delta^+ \rightarrow [\Delta^{+\text{op}}, \mathbf{Ens}]$. Wir erhalten unsere für die kategorielle Realisierung gewünschte kosimpliziale Kategorie durch den Funktor der nichtdegenerierten Simplizes des nichtdegenerierten Standard- n -Simplex. Bezeichne dazu $\iota : \Delta^+ \hookrightarrow \Delta$ den Inklusionsfunktor und $\iota^* : [\Delta^{\text{op}}, \mathbf{Ens}] \rightarrow [\Delta^{+\text{op}}, \mathbf{Ens}]$ den Rückzugsfunktor auf Prägarben.

Definition 0.4. Der *Stufenfunktor* ist der Funktor

$$N : \Delta^+ \downarrow_r \iota^* \Delta^n \rightarrow \Delta^+ \downarrow_r \Delta^{+n},$$

gegeben durch das kommutative Quadrat

$$\begin{array}{ccc} f : \Delta^{+m} \rightarrow \iota^* \Delta^n & \longmapsto & N(f) : \Delta^{+k} \rightarrow \iota^* \Delta^{+n} \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ f \in \Delta([m], [n]) & \longmapsto & N(f) \in \Delta^+([k], [n]), \end{array}$$

in dem die Vertikalen die eindeutigen Zuordnungen aus dem Yoneda-Lemma sind und die untere Horizontale die Abbildung, die eine monotone Abbildung f auf die eindeutige monotone Injektion $N(f)$ aus ?? mit demselben Bild (und anderem Definitionsbereich $[k]$) schickt.

0.1. SCHWACH KONSTRUIERBARE GARBEN AUF SIMPLIZIALEN MENGEN 3

Bemerkung 0.5. Der Name “Stufenfunktork” rührt daher, dass die Werte einer monotonen Funktion die Stufen in ihrem Graphen beschreiben.

Das Vorschalten von monotonen Injektionen vor $f \in \Delta([m], [n])$ (Morphismen in $\Delta^+ \downarrow_r \iota^* \Delta^n$) induziert auf der zugehörigen monotonen Injektion $\hat{f} \in \Delta^+([k], [n])$ ebenfalls Morphismen durch Vorschalten von Injektionen, denn das Einschränken von Funktionen auf Teilmengen verkleinert auch die Bildmengen. Dies zeigt die Funktorialität.

Proposition 0.6. *Die Zuordnung*

$$\begin{array}{ccc} [n] & \longmapsto & \Delta^+ \downarrow_r \Delta^{+n} \\ \downarrow f & & \downarrow f \circ \\ & & \Delta^+ \downarrow_r \iota^* \Delta^m \\ & & \downarrow N \\ [m] & \longmapsto & \Delta^+ \downarrow_r \Delta^{+m} \end{array}$$

ist ein Funktor $R : \Delta \rightarrow \text{Cat}$, genannt die kosimpliziale Standard-Kategorie.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass für monotone $f : [m] \rightarrow [n]$ und $g : [l] \rightarrow [m]$ gilt

$$N((f \circ g) \circ) = N(f \circ)N(g \circ)$$

für $(f \circ)$ den Nachschaltelfunktork und N den Stufenfunktork. Das folgt aber daraus, dass beide Funktoren eine monotone Injektion $h : [k] \rightarrow [l]$ auf die Injektion auf $\text{im}(f \circ g \circ h)$ schicken. Diese Entsprechung ist verträglich mit Einschränkungen von h (Vorschalten von monotonen Injektionen), ist also eine Transformation.

Es handelt sich bei den Kategorien $\Delta^+ \downarrow_r \Delta^{+n}$ um “gerichtete Kategorien”, bei denen es keine Kreise von Pfeilen außer den Identitäten gibt, denn die nicht-trivialen Morphismen sind das Vorschalten von echten Injektionen und senken somit den Grad eines Simplex. \square

Proposition 0.7. *Die Kategorie der kleinen Kategorien Cat ist kovollständig.*

Beweis. Koproducte in Cat sind die Koproducte der zugrundeliegenden Köcher, d. h. die disjunkte Vereinigung über die Objektmengen und aus den Ausgangskategorien übernommene Morphismenmengen.

Die Koegalisateur in Cat sind schwieriger, vergleiche [?]. Wir geben die Konstruktion kurz an. Betrachte kleine Kategorien mit Funktoren $A \rightrightarrows_G^F B$. Die dem Koegalisateur $B \rightarrow C$ zugrundeliegende mengentheoretische Abbildung ist der Koegalisateur der den Funktoren F und G zugrundeliegenden mengentheoretischen Abbildungen. Durch diese Identifikationen in C werden Morphismen neu komponierbar, deren Kompositionen den durch die Identifikationen verschmolzenen Morphismenmengen hinzugefügt werden. Weiter müssen wie im

folgenden Diagramm Morphismen Ff und Gf identifiziert werden, was auf die Kompositionen fortgesetzt wird.

$$\begin{array}{ccccc} a & & Fa & \sim & Ga \\ \downarrow f & \mapsto & \downarrow Ff & \sim & \downarrow Gf \\ b & & Fb & \sim & Gb \end{array}$$

Die Identifikationen $Fa \sim Ga$ für $a \in A$ und $Ff \sim Gf$ für $f \in A(a, b)$ sind notwendig für einen Koegalisateur $B \rightarrow C$, damit $A \rightrightarrows_G^F B \rightarrow C$ übereinstimmen. Die weiteren Schritte machen “minimalinvasiv” B mit diesen Identifikationen wieder zu einer Kategorie. \square

Bemerkung 0.8. Der Ansatz, Limites und Kolimites in Cat mittels ?? über die Einbettung $Cat \subset Quiv$ in die Kategorie der Köcher zu konstruieren, funktioniert *nicht*. Jene ist als Prägarbenkategorie tatsächlich vollständig und kovollständig und die Inklusion hat mit der freien Pfadkategorie über einem Köcher tatsächlich einen Linksadjungierten; allerdings handelt es sich nicht um eine volle (dann also reflektive) Unterkategorie, weshalb die Limites und Kolimites von denen in $Quiv$ bzw. ihren freien Pfadkategorien abweichen.

Definition 0.9. Die *kategorielle Realisierung* einer simplizialen Menge $X \in sEns$ ist definiert als das Tensorprodukt von Funktoren $X \otimes R \in Cat$ für R die kosimpliziale Standard-Kategorie und die natürliche Ens -tensorierte Struktur auf Cat (??).

Beispiel 0.10. Betrachte die Standarddarstellung von S^1 als simpliziale Menge X mit einem nichtdegenerierten 1-Simplex und einem nichtdegenerierten 0-Simplex aus ??. Wie angekündigt ist die kategorielle Realisierung von X das Diagramm

$$\bullet \rightrightarrows \bullet$$

mit zwei Objekten und zwei parallelen Pfeilen dazwischen, sowie nicht eingezeichneten Identitäten.

Als zweite Zutat für unseren Satz, der simplizial konstante Garben auf $|X|$ mit Prägarben auf der kategoriellen Realisierung $X \otimes R$ in Beziehung setzen soll, benötigen wir eine Beschreibung von Garben auf Kolimites. Die Argumentation ist recht einfach, sofern die richtigen Begriffe von Limites und Kolimites von großen Kategorien zur Verfügung stehen. Problematisch dabei ist, dass wir selten tatsächliche Gleichheit von Funktoren und Isomorphismen von Kategorien haben (und benötigen), sondern Isotransformationen von Funktoren und Äquivalenzen von Kategorien. Ein Limes-Begriff für Kategorien muss insofern die *2-kategorielle Struktur* der “Kategorie” der Kategorien berücksichtigen. Wir erhalten die richtigen Formulierungen wie in [?] erklärt anhand des Übersetzungsschemas:

1-Kategorie	\leftrightarrow	2-Kategorie
Gleichheit von Morphismen	\leftrightarrow	2-Isomorphismus von Morphismen (Isotransformation)
kommutieren	\leftrightarrow	kommutieren bis auf 2-Isomorphismus
Isomorphismus	\leftrightarrow	Quasi-Isomorphismus (Äquivalenz von Kategorien)

Ein 2-Limes über ein über I indiziertes System von Kategorien C_i ist also etwa eine Kategorie C , für die es für jede Testkategorie T eine Äquivalenz von Kategorien gibt zwischen der Funktorkategorie $[T, C]$ und der Kategorie bestehend aus (großen) Tupeln von Funktoren $F_i \in [T, C_i]$ für alle $i \in I$, für die es Isotransformationen $Cf \circ F_i \xrightarrow{\sim} F_j$ für alle $f : i \rightarrow j$ in I gibt. Mit dieser Definition folgt automatisch die Exaktheit des Kategorien-Homs:

$$[C, \lim_i D_i] \xrightarrow{\sim} \lim_i [C, D_i],$$

$$[\text{col}_i C_i, D] \xrightarrow{\sim} \lim_i [C_i, D].$$

2-Limites von Kategorien sind dann eindeutig bis auf Isomorphismus im 2-Kategorie-Sinne, d. h. bis auf Äquivalenz von Kategorien.

Nun können wir die Beschreibung von Garben auf Kolimites formulieren.

Satz 0.11. *Sei $X = \text{col}_i X_i$ ein Kolimes topologischer Räume. Dann ist der Limes von Funktoren*

$$\kappa = \lim_i \text{in}_i^* : \text{Ens}_X \rightarrow \lim_i \text{in}_i^* \text{Ens}_{X_i}$$

eine Äquivalenz von Kategorien. Dabei ist $\text{in}_i^ \text{Ens}_X$ das wesentliche Bild des Rückzugs entlang den Abbildungen des Kolimes $\text{in}_i : X_i \rightarrow X$ und die System-morphismen sind das Nachschalten von $f^* : \text{Ens}_{X_j} \rightarrow \text{Ens}_{X_i}$ für $f : i \rightarrow j$ in I .*

Beweis. Ist $X = \bigsqcup_i X_i$ ein Koproduct (d. h. I diskret), so sind die in_i^* Restriktionen, das Bild $\text{in}_i^* \text{Ens}_X \subset \text{Ens}_{X_i}$ ist dicht und die Äquivalenz ist die bekannte Aussage $\text{Ens}_X \xrightarrow{\sim} \prod_i \text{Ens}_{X_i}$.

Im Fall eines Koegalisors $Z \xrightarrow[f]{g} Y \xrightarrow{q} X$ besteht eine Garbe G in der Limes-kategorie aus einer Garbe G auf Y , einem Isomorphismus $G \xrightarrow{\sim} q^* F$ für F eine Garbe auf X und einem Isomorphismus $\tau : f^* G \xrightarrow{\sim} g^* G$ von Garben auf Z . Wir behaupten, dass ein Quasiinverser zu κ durch eine Abwandlung q_* des direkten Bilds gegeben ist mit

$$(q_* G)(U) := \{s \in G(q^{-1}(U)) \mid \tau_x(s_{f(x)}) = s_{g(x)} \text{ für alle } x \in (q \circ f)^{-1}(U)\}$$

und der Abbildung τ_x definiert durch das kommutative Quadrat

$$\begin{array}{ccc} (f^* G)_x & \xrightarrow{\tau} & (g^* G)_x \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ G_{f(x)} & \xrightarrow{\tau_x} & G_{g(x)}. \end{array}$$

Der Isomorphismus $q_* \kappa F \xrightarrow{\sim} F$ folgt nun mit der Finalität und Surjektivität von q ähnlich wie im Beweis der Aussage zum finalen Rückzug mit zusammenhängenden Fasern (??). Dort benötigten wir für $x \in X$ die Aussage, dass die Verknüpfung $U \rightarrow \kappa F \rightarrow F$ eines Schnitts über U mit der Abbildung des Rückzugs $\kappa F \rightarrow F$ über X (mengentheoretisch) faktorisiert, also konstant ist in der Einschränkung auf die Faser $q^{-1}(x) \rightarrow F_x$. Ist nun $f(x) \sim g(x)$ eine Identifikation in der Faser, so stellt unsere Konstruktion sicher, dass ein q_* -Schnitt der Limesgarbe κF gerade die von $F_{q(f(x))} = F_{q(g(x))}$ herrührenden Identifikationen berücksichtigen muss und wieder über X faktorisiert.

Der umgekehrte Isomorphismus $\kappa q_* G \xrightarrow{\sim} G$ folgt aus diesem, da die Limeskategorie gerade das wesentliche Bild von κ ist. \square

Bemerkung 0.12. Entscheidend in diesem Beweis ist, dass die Isomorphismen τ zu den Daten von Limesgarben dazugehören. Im Fall von $X = S^1$ ist dies die Verklebung, die bestimmt, wie aus einer Garbe auf dem Einheitsintervall eine Garbe auf der Kreislinie gemacht wird.

Diese Äquivalenz schränkt ein zu einer Äquivalenz der vollen Unterkategorien simplizial konstanter Garben.

Proposition 0.13. *Für eine simpliziale Menge $X \in \mathbf{sEns}$ gilt:*

$$\mathbf{Ens}_{/|X|}^{\text{sk}} \xrightarrow{\sim} \lim_{\Delta \downarrow X} \mathbf{Ens}_{/|\Delta^n|}^{\text{sk}}.$$

Beweis. Bei den simplizial konstanten Garben auf den Simplizes $\Delta^n \rightarrow X$ handelt es sich um die wesentlichen Bilder des Rückzugs entlang der Einbettungen $|\Delta^n| \rightarrow |X|$. Das folgt daraus, dass unter diesen Abbildungen das Urbild einer Zelle eine Vereinigung von Zellen ist. \square

Theorem 0.14. *Sei $X \in \mathbf{sEns}$ eine simpliziale Menge. Dann gibt es eine Äquivalenz von Kategorien zwischen Prägarben auf der kategoriellen Realisierung von X und simplizial konstanten Garben auf $|X|$:*

$$[(X \otimes R)^{\text{op}}, \mathbf{Ens}] \xrightarrow{\sim} \mathbf{Ens}_{/|X|}^{\text{sk}}.$$

Beweis. Wir nutzen, dass nach 0.13 beide Seiten mit dem Kolimes $|X| = \text{col}_{\Delta \downarrow X} |\Delta^n|$ vertauschen:

$$\begin{aligned} [(X \otimes R)^{\text{op}}, \mathbf{Ens}] &\xrightarrow{\sim} [\text{col}_{\Delta \downarrow X} (\Delta^n \otimes R)^{\text{op}}, \mathbf{Ens}] \\ &\xrightarrow{\sim} \lim_{\Delta \downarrow X} [(\Delta^n \otimes R)^{\text{op}}, \mathbf{Ens}] \\ &\xrightarrow{\sim} \lim_{\Delta \downarrow X} [(\Delta^n \otimes P)^{\text{op}}, \mathbf{Ens}] \\ &\xrightarrow{\sim} \lim_{\Delta \downarrow X} \mathbf{Ens}_{/\text{Ord}(\Delta^n)} \\ &\xrightarrow{\sim} \lim_{\Delta \downarrow X} \mathbf{Ens}_{/|\Delta^n|}^{\text{sk}} \\ &\xrightarrow{\sim} \mathbf{Ens}_{/|X|}^{\text{sk}}. \end{aligned}$$

0.1. SCHWACH KONSTRUIERBARE GARBEN AUF SIMPLIZIALEN MENSEN 7

Dabei verwendet der zweite Schritt die Stetigkeit des Kategorien-Homs, der dritte den Umstand, dass es in Δ^n keine Mehrfachkanten gibt, der vierte 0.22 und der fünfte ??.

Beachte, dass der auftretende Kolimes zunächst ein (starker) Kolimes in der 1-Kategorie der kleinen Kategorien ist und mit dem (schwachen) 2-Kolimes für den zweiten Schritt übereinstimmt, weil es sich bei den beteiligten Kategorien um Skelettkategorien handelt. \square

Bemerkung 0.15. Prägarben auf der kategoriellen Realisierung sind sogar Garben auf einer Basis: Formuliert man die Garbenbedingung für Garben auf einer Basis analog zum Fall von Überdeckungen in Off_X ordnungstheoretisch, erhält man:

Eine Prägarbe F auf einer halbgeordneten Menge X heißt Garbe, falls sie jedes Supremum (jeden Kolimes) über bezüglich endlichen Infima (Limites) abgeschlossene Teilsysteme von X auf den zugehörigen Limes schickt, sofern das Supremum in X existiert:

$$F(\text{col}_i U_i) \xrightarrow{\sim} \lim_i F(U_i).$$

Dies ist bei Prägarben auf der kategoriellen Realisierung trivialerweise erfüllt, denn ist in der kategoriellen Realisierung $x = \sup S$, so ist bereits $x \in S$.

Bemerkung 0.16. Ein erster Ansatz für die Beschreibung von Garben auf Kolimites führt über ihre Beschreibung als gewisse volle Unterkategorie der Funktorkategorie $[\text{Off}_X^{\text{op}}, \text{Ens}]$. Eine halbgeordnete Menge mit beliebigen Suprema (Vereinigungen), endlichen Infima (Schnitten) und einem Distributivgesetz heißt auch *Locale*. Diese bilden mit Locale-Morphismen, opponierten Morphismen halbgeordneter Mengen, die Suprema und endliche Infima erhalten, eine Kategorie Loc . Man könnte versuchen, den Funktor $\text{Off} : \text{Top} \rightarrow \text{Loc}$ in Beziehung zu Kolimites zu setzen. Überraschend ist dabei, dass für Koprodukte die zugehörige Locale erzeugt ist vom Koprodukt der Locales, für Koegalisateur die zugehörige Locale jedoch der *Egalisator* der zugehörigen Locales ist.

Es schließt sich an diese Beschreibung simplizial konstanter Garben auf simplizialen Mengen eine Reihe an Fragen an, die hier nicht mehr abschließend beantwortet werden können:

1. Gilt in Analogie zu ?? nicht nur

$$\text{Der}([(X \otimes R)^{\text{op}}, \text{Ab}]) \xrightarrow{\sim} \text{Der}(\text{Ab}_{/|X|}^{\text{sk}}),$$

sondern sogar

$$\text{Der}([(X \otimes R)^{\text{op}}, \text{Ab}]) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\text{sk}}(\text{Ab}_{/|X|}),$$

für $\text{Der}_{\text{sk}}(\text{Ab}_{/|X|})$ die derivierten abelschen Garben auf $|X|$ mit simplizial konstanten Kohomologiegarden?

2. Wie lassen sich die gerichteten Kategorien charakterisieren, die als kategorielle Realisierung simplizialer Mengen auftreten? Beispielsweise ist $(\bullet \rightarrow \bullet)$ keine solche gerichtete Kategorie.

3. Lassen sich die Ergebnisse mittels des Nerven einer Kategorie auf beliebige Diagrammkategorien verallgemeinern?

Wir können die Antworten nur in Teilen skizzieren:

- 1.
2. Einem Objekt σ einer gerichteten Kategorie kann eine Kardinalzahl zugeordnet werden, die angibt, wie viele nichttriviale Morphismen von σ auslaufen. Sind es $n + 1$ Stück, nennen wir n die Dimension von σ . (Gibt es keine, nennen wir σ nulldimensional.) Eine gerichtete Kategorie C tritt genau dann als kategorielle Realisierung einer simplizialen Menge auf, wenn alle Objekte endliche Dimension haben und die Dimensionen der Objekte eine Halbordnung auf C definieren, die mit der Halbordnung durch Identifikation paralleler Morphismen in C übereinstimmt.

Alle gerichteten Kategorien lassen sich jedoch als Kolimes von zu simplizialen Mengen gehörigen gerichteten Kategorien auffassen. Anders ausgedrückt sind die gerichteten Kategorien die koreflektive Hülle in \mathbf{Cat} der zu simplizialen Mengen gehörigen gerichteten Kategorien und die Aussage von ?? überträgt sich durch Kostetigkeit. Dies ist ein zur Konstruktion koreflektiver kartesisch abgeschlossener Kategorien aus sich gut verhaltenden Unterkategorien topologischer Räume analoges Vorgehen. Die geometrische Realisierung einer gerichteten Kategorie $C = \text{col}_i(C_i \otimes R)$ ist dabei der Kolimes $|C| = \text{col}_i |X_i|$ für C_i zu simplizialen Mengen X_i gehörige gerichtete Kategorien. Beispielsweise gehört der Sierpinski-Raum zum Quotienten von S^1 nach der Identifikation der Bilder zweier gegenläufiger Pfade $|\Delta^1| \rightarrow S^1$.

- 3.

0.1.2 Realisierung als halbgeordnete Menge

Der kombinatorische topologische Raum $\blacktriangle X$ einer simplizialen Menge eignet sich *nicht* für die Übertragung der Aussagen zu schwach konstruierbaren Garben auf Simplizialkomplexen auf die Situation simplizialer Mengen, denn diese geometrische Realisierung sieht nicht mehrfache Verklebungsabbildungen. Dies möchten wir präzise machen. Wir definieren dazu eine Realisierung $X \otimes P$ von X durch halbgeordnete Mengen. Die kosimpliziale halbgeordnete Menge $P : \Delta \rightarrow \text{poset}$ erhalten wir dabei aus $R : \Delta \rightarrow \mathbf{Cat}$ durch Anwenden eines Reflektors $\mathbf{Cat} \rightarrow \text{poset}$.

Proposition 0.17. *Die Kategorie poset der halbgeordneten Mengen ist kovollständig.*

Beweis. Die halbgeordneten Mengen sind eine volle Unterkategorie $\text{poset} \subset \mathbf{Cat}$. Wir können daher ?? verwenden, mit dem Reflektor $\mathbf{Cat} \rightarrow \text{poset}$, der im folgenden Lemma konstruiert wird. \square

Definition 0.18. Eine Kategorie heißt *dünn*, falls jede Morphismenmenge höchstens einelementig ist. Eine Kategorie heißt *Skelettkategorie*, falls in ihr jeder Isomorphismus eine Identität ist.

Lemma 0.19. *Die vollen Unterkategorien $\text{thinCat}, \text{skelCat} \subset \text{Cat}$ der dünnen bzw. Skelettkategorien sind reflektiv. Der Reflektor $\text{Cat} \rightarrow \text{skelCat}$ macht aus dünnen Kategorien dünne Kategorien und liefert durch Komposition mit dem Reflektor $\text{Cat} \rightarrow \text{thinCat}$ einen Reflektor $\text{pos} : \text{Cat} \rightarrow \text{poset}$.*

Beweis. Der Linksadjungierte zu $\text{thinCat} \hookrightarrow \text{Cat}$ ist gegeben durch die Identifikation aller nichtleeren Morphismenmengen zu einelementigen Morphismenmengen. Der Linksadjungierte zu $\text{skelCat} \hookrightarrow \text{Cat}$ ist die zu einer kleinen Kategorie mit dem Auswahlaxiom konstruierte Unterkategorie, die Isomorphieklassen von Objekten durch ein Objekt aus diesen ersetzt. Klar ist, dass Funktoren $F : C \rightarrow D$ in eine dünne Kategorie D Abbildungen auf Objekten sind mit der Zusatzeigenschaft, dass es einen Morphismus $Ff : Fx \rightarrow Fy$ in D geben muss, wann immer es einen Morphismus $f : x \rightarrow y$ in C gibt. Das ist unerheblich davon, wie viele Morphismen $x \rightarrow y$ es in C gibt und zeigt die erste Adjunktion. Ein Funktor in eine Skelettkategorie schickt isomorphe Objekte auf dasselbe Objekt, wird also schon durch das Bild eines Objekts jeder Isomorphieklasse eindeutig festgelegt. Dies zeigt die zweite Adjunktion.

Der Reflektor $\text{Cat} \rightarrow \text{skelCat}$ liefert eine Unterkategorie und erhält deshalb Düntheit. Halbgeordnete Mengen sind nach Definition dünne Skelettkategorien. \square

Bezeichne nun $P = \text{pos } R : \Delta \rightarrow \text{poset}$ die kosimpliziale halbgeordnete Menge zu unseren Standardkategorien. Die halbgeordneten Mengen $P[n] = \text{pos } \Delta^+ \downarrow_r \Delta^{+n}$ sind dann die opponierten Standard- n -Simplizialkomplexe.

Proposition 0.20. *Sei $X \in \text{sEns}$ eine simpliziale Menge. Dann gibt es einen Homöomorphismus $\blacktriangle X \xrightarrow{\sim} \text{Ord}((X \otimes P)^{\text{op}})$.*

Beweis. Der Funktor $\text{Ord} : \text{poset} \rightarrow \text{Top}$ ist nach dem nachgestellten Lemma kostetig. Daher reicht es mit ?? (und der Kostetigkeit des Opponierens), einen Isomorphismus kosimplizialer topologischer Räume $\blacktriangle \rightarrow \text{Ord } P^{\text{op}}$ zu finden. Beide bestehen aus einem Punkt pro nichtdegeneriertem Simplex (??) von Δ^n und haben als offene Mengen nach oben abgeschlossene Mengen. Randabbildungen d_i sind Inklusionen in die Ränder, Degenerationen Kollapse von Kanten. Dies begründen wir sorgfältiger: Unsere Definition von $Ps_i : P[n] \rightarrow P[n-1]$ schickt einen nichtdegenerierten Simplex $f : [m] \rightarrow [n]$ monoton und injektiv auf $N(s_i \circ f)$, den nichtdegenerierten Simplex, der zum Kollaps von i und $i+1$ in f gehört. \square

Lemma 0.21. *Der Funktor $\text{Ord} : \text{poset} \rightarrow \text{Top}$, der eine halbgeordnete Menge mit der Ordnungstopologie versieht, ist kostetig.*

Beweis. Klar ist, dass Ord mit Koprodukten vertauscht. Sei nun $A \rightrightarrows_G^F B \rightarrow C$ ein Koegalisor in den halbgeordneten Mengen. Dann ist nach 0.7 und 0.19 die zugrundeliegende mengentheoretische Abbildung von $q : B \rightarrow C$ der mengentheoretische Koegalisor: nur der Reflektor $\text{Cat} \rightarrow \text{skelCat}$ könnte die zugrundeliegende Menge ändern, wird aber bereits auf eine Skelettkategorie angewandt, denn ein Kategorienkolimes über halbgeordnete Mengen enthält keine Morphismen in entgegengesetzte Richtungen. Wir müssen noch zeigen, dass

$\text{Ord}(q) : \text{Ord } B \rightarrow \text{Ord } C$ final ist. Ist $U \subset C$ eine Menge mit offenem Urbild $q^{-1}(U)$, so ist ein Morphismus $x \rightarrow y$ in C mit $x \in U$ ein Pfad $x = v_0 \rightarrow v_1 \sim w_1 \rightarrow w_2 \sim v_2 \rightarrow \dots \rightarrow y$ bestehend aus Morphismen in B , die sich nach den Identifikationen durch q verknüpfen lassen. Induktiv liegen nun nach der Abgeschlossenheit nach oben von $q^{-1}(U)$ alle v_i, w_i in $q^{-1}(U)$ und somit auch y . Es folgt die Offenheit von U . \square

Mit ?? und 0.20 erhalten wir sofort die folgende kombinatorische Charakterisierung von Garben auf der plumpen Realisierung:

Proposition 0.22. *Sei $X \in \text{sEns}$ eine simpliziale Menge. Dann gibt es eine Äquivalenz von Kategorien $\text{Ens}_{/\mathbf{A}X} \xrightarrow{\sim} [(X \otimes P)^{\text{op}}, \text{Ens}]$.*

0.1.3 Allgemeine schwache Konstruierbarkeit

Wir kommen nun zur Übertragung der Ergebnisse aus ?? auf die Situation simplizialer Mengen. Dies ermöglicht etwa die Aussage auch für Triangulierungen wie in Beispiel ??.

Nach der Bemerkung ?? reicht es, die topologischen Teile des Beweises zu übertragen. Wir sammeln die benötigten Axiome:

Definition 0.23. Eine *Konstruierbarkeitssituation* ist eine stetige Abbildung $p : |\mathcal{K}| \rightarrow \mathcal{K}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. p ist final, surjektiv und hat zusammenhängende Fasern.
2. Jeder Punkt $\sigma \in \mathcal{K}$ besitzt eine kleinste offene Umgebung ($\geq \sigma$).

Wir notieren $U(\sigma) = p^{-1}(\geq \sigma)$. In einer Konstruierbarkeitssituation nennen wir \mathcal{K} die *kombinatorische* und $|\mathcal{K}|$ die *geometrische Realisierung*.

Der “richtige” äquivalente Begriff von schwacher Konstruierbarkeit aus ?? wird zur allgemeinen Definition:

Definition 0.24. Eine Garbe $F \in \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ heißt schwach $|\mathcal{K}|$ -konstruierbar, falls die Koeinheit der Adjunktion auf F ein Isomorphismus $p^*p_*F \xrightarrow{\sim} F$ ist.

Auch übertragen wir den Begriff derivierter schwach $|\mathcal{K}|$ -konstruierbarer Garben (mit schwach $|\mathcal{K}|$ -konstruierbaren Kohomologiegargen) und die Notationen $\text{s-Kons}(\mathcal{K})$ und $\text{Der}_{\text{sk}}(|\mathcal{K}|)$.

Mit identischem Beweis überträgt sich der allgemeine Teil von ?? übertragen:

Proposition 0.25. *In einer Konstruierbarkeitssituation $p : |\mathcal{K}| \rightarrow \mathcal{K}$ sind für $F \in \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ äquivalent:*

- (1) F ist schwach $|\mathcal{K}|$ -konstruierbar
- (2) F liegt im wesentlichen Bild des Rückzugs p^* .
- (3) Die Restriktion $F(U(\sigma)) \rightarrow F_x$ ist für alle $\sigma \in \mathcal{K}$ und alle $x \in |\sigma|$ ein Isomorphismus.

Und es folgt sofort, in Anbetracht von ??:

Theorem 0.26. *Sei $p : |\mathcal{K}| \rightarrow \mathcal{K}$ eine Konstruierbarkeitssituation und $X \in \text{Top}$. Dann gibt es eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\text{Der}(\text{s-Kons}(\mathcal{K} \times X)) \xrightleftharpoons[R\beta]{\iota} \text{Der}_{\text{sk}}(|\mathcal{K}| \times X),$$

wobei ι die Inklusion und $\beta = (p \times \text{id}_X)^*(p \times \text{id}_X)_* : \text{Ab}_{|\mathcal{K}| \times X} \rightarrow \text{s-Kons}(\mathcal{K} \times X)$ ist.

Es reicht also für den Fall simplizialer Mengen, die Axiome einer Konstruierbarkeitssituation zu zeigen.

Proposition 0.27. *Sei $X \in \text{sEns}$ eine simpliziale Menge. Dann ist $p : |X| \rightarrow \blacktriangle X$ eine Konstruierbarkeitssituation.*

Beweis. Die Abbildung $p : |X| \rightarrow \blacktriangle X$ ist ein Kolimes über die Quotientenabbildungen $|\Delta^n| \rightarrow \blacktriangle^n$ mit zusammenhängenden Fasern und das Axiom 0.23 1 folgt aus dem nachgestellten Lemma. Das Axiom 0.23 2 zur Existenz kleinster offener Umgebungen wurde in 0.22 gezeigt. \square

Lemma 0.28. *Sei $X_i \rightarrow Y_i$ ein Morphismus von Diagrammen von topologischen Räumen $[I, \text{Top}]$ mit finalen, surjektiven Abbildungen $X_i \rightarrow Y_i$ mit zusammenhängenden Fasern. Dann ist die induzierte Abbildung $\text{col}_i X_i \rightarrow \text{col}_i Y_i$ final, surjektiv und hat zusammenhängende Fasern.*

Beweis. Die Surjektivität ist offensichtlich (nimm ein Urbild unter einem geeigneten $Y_i \rightarrow \text{col}_i Y_i$, dann unter $X_i \rightarrow Y_i$ und dann dessen Inklusion nach $\text{col}_i X_i$). Ist die Komposition $\text{col}_i X_i \rightarrow \text{col}_i Y_i \rightarrow Z$ stetig, so sind alle

$$X_i \rightarrow \text{col}_i X_i \rightarrow \text{col}_i Y_i \rightarrow Z = X_i \rightarrow Y_i \rightarrow \text{col}_i Y_i \rightarrow Z$$

stetig, und die Stetigkeit von g folgt daraus, dass die Kompositionen finaler Familien final ist und $\text{col}_i Y_i$ folglich die Finaltopologie bezüglich aller $X_i \rightarrow \text{col}_i Y_i$ trägt.

Zum Zusammenhang der Fasern: Die beiden Kolimites sind Quotienten der disjunkten Vereinigung über das System nach einer von den Systemmorphisamen herrührenden Äquivalenzrelation. Ist $y_i \sim Yf(y_i)$ mit $y_i \in F_i$ und $Yf : Y_i \rightarrow Y_j$ einem Systemmorphismus eine erzeugende Relation, so sind auch die Urbilder der Zusammenhangskomponenten von y_i und $Yf(y_i)$ in $\text{col}_i X_i$ nicht disjunkt: ist etwa x_i ein Urbild von y_i , so ist $Xf(x_i)$ ein Urbild von $Yf(y_i)$ und die Zusammenhangskomponenten treffen sich im Kolimes $\text{col}_i X_i$ im Punkt $x_i \sim Xf(x_i)$. \square

Bei der Übertragung von ?? ist die interessanteste äquivalente Formulierung schwacher $|\mathcal{K}|$ -Konstruierbarkeit bislang unter den Tisch gefallen.

Definition 0.29. In einer Konstruierbarkeitssituation $p : |\mathcal{K}| \rightarrow \mathcal{K}$ heißt eine Garbe $F \in \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ *geometrisch schwach $|\mathcal{K}|$ -konstruierbar*, falls die Einschränkungen $F|_{|\sigma|}$ konstant sind für alle Urbilder $|\sigma| = p^{-1}(\sigma)$ von Punkten $\sigma \in \mathcal{K}$.

Wir erhalten im Allgemeinen nur noch eine Implikation:

Proposition 0.30. *Ist $p : |\mathcal{K}| \rightarrow \mathcal{K}$ eine Konstruierbarkeitssituation, so impliziert für eine Garbe $F \in \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ schwache $|\mathcal{K}|$ -Konstruierbarkeit geometrisch schwache $|\mathcal{K}|$ -Konstruierbarkeit.*

Das ist der fehlende Teil von ??.

Beweis. Dies folgt wieder aus 0.25 (3) und ?? wegen $|\sigma| \subset U(\sigma)$. □

Beispiel 0.31. *Die umgekehrte Richtung gilt im Allgemeinen nicht: Sei etwa $|X| = S^1$ mit der Triangulierung als simpliziale Menge aus ?? und $F \in \text{Ab}_{/|X|}$ die nichtkonstante lokal konstante Garbe auf S^1 mit Halm \mathbb{Z} . Für σ den 0-Simplex ist dann $U(\sigma) = S^1$ und es ist $\mathbb{Z} \cong F_\sigma \not\cong F(U(\sigma)) = \Gamma F = 0$.*

Bemerkung 0.32. Für die umgekehrte Richtung würden wir für $x \in U(\sigma)$ eine stetige Zusammenziehung

$$h : (0, 1] \times U(\sigma) \rightarrow U(\sigma)$$

benötigen, für die gilt:

1. Die Mengen $h(t \times U(\sigma))$ bilden für $t \in (0, 1]$ eine Umgebungsbasis von x .
2. Es gilt $h(t, y) \in |\tau| \Leftrightarrow y \in |\tau|$.
3. h ist surjektiv.

(Dies sind die Eigenschaften aus dem Beweis von ??.) Die Existenz solcher Zusammenziehungen als Axiom zu setzen, bedeutet im Wesentlichen, nur Triangulierungen zu erlauben, bei denen die $U(\sigma)$ -Mengen “sich nicht selbst wieder treffen” und damit im Wesentlichen wieder mit Simplizialkomplexen zu arbeiten.