Kapitel 1

Verallgemeinerte Garben

In diesem Abschnitt sollen die Beobachtungen der letzten beiden Abschnitte vereint werden. Nach Abschnitt **??** sind Garben auf einem Simplizialkomplex $\mathcal{K}$ nichts anderes als ein Simplizialkomplex von Garben über dem einpunktigen Raum. In Abschnitt **??** haben wir diese Garben auf $\mathcal{K}$ geometrisch charakterisiert als die simplizial konstanten Garben auf der geometrischen Realisierung $|\mathcal{K}|$ von $\mathcal{K}$. Wir erwarten daher auch eine relative Version dieser Aussage über einem beliebigen topologischen Raum X, die die Simplizialkomplexe von Garben auf X alias Garben auf $\mathcal{K} \times X$ geometrisch beschreibt.

Wir geben zunächst eine leichte Verallgemeinerung der Aussage von **??** an.

Wir definieren Garben mit Werten in beliebigen Kategorien C mit der schon in **??** verwandten allgemeinen Abstiegsbedingung.

Definition 1.1 ([**?**], 2.1.5)**.** Sei C eine Kategorie und X ein topologischer Raum. Eine C-wertige Prägarbe $F \in [\mathrm{Off_X}^{\mathrm{op}}, C]$ auf X heißt C-wertige Garbe auf X, falls sie die Abstiegsbedingung erfüllt:

> Für alle unter endlichen Schnitten stabilen offenen Überdeckungen
> $U = \bigcup_i U_i$ gilt $F(U) = \lim_i F(U_i)$.

Wir notieren die Kategorie der C-wertigen Prägarben auf X mit $\mathrm{p}\, C_{/X}$ und die der C-wertigen Garben auf X mit $C_{/X}$.

Für C die Kategorien der Mengen oder der abelschen Gruppen ist obige Definition äquivalent zur bekannten Definition über die eindeutige Verklebbarkeit von verträglichen Schnitten.

Auch das Konzept der Garbifizierung können wir auf C-wertige Prägarben verallgemeinern.

Satz 1.2. *Sei C eine vollständige und kovollständige Kategorie. Dann hat der Vergissfunktor $C_{/X} \to \mathrm{p}\, C_{/X}$ einen Linksadjungierten, genannt (verallgemeinerte) Garbifizierung.*

Beweis. Sei $F \in \mathrm{p}\, C_{/X}$. Wir behaupten, dass die Prägarbe

$$F^+(U) := \mathrm{colf}_{\mathcal{U}/U} \lim_j F(U_j)$$

mit den induzierten Restriktionen eine Garbe ist und die Adjunktionseigenschaft erfüllt. Dabei steht $\mathcal{U}/U$ für das filtrierende System aller gesättigten Überdeckungen $\mathcal{U}$ von U. Die Konstruktion ist funktoriell.

Für die Garbeneigenschaft konstruieren wir für eine gesättigte offene Überdeckung $U = \bigcup U_i$ inverse Morphismen

$$\operatorname{colf}_{\mathcal{U}/U} \lim_{V \in \mathcal{U}} F(V) \rightleftarrows \lim_i \operatorname{colf}_{\mathcal{U}_i/U_i} \lim_{V \in \mathcal{U}_i} F(V).$$

Diese erhalten wir einerseits aus den natürlichen Projektionen des Limes und Inklusionen des Kolimes und andererseits aus der Konstruktion verträglicher Familien von Abbildungen, deren Verträglichkeit sich jeweils sofort aus der Eindeutigkeit der Restriktionen ergibt. Dabei werden einer Überdeckung in $\mathcal{U}/U$ die Überdeckungen in $\mathcal{U}_i/U_i$ zugeordnet, die sich durch Schneiden mit U_i ergeben, und umgekehrt Familien von Überdeckungen der U_i die ihrer Vereinigung zugeordnete gesättigte Überdeckung von U. Dass beide Morphismen invers zueinander sind, ergibt sich erneut aus der Eindeutigkeit der Restriktionen.

Auch für die Adjunktionseigenschaft gehen wir wie bei mengenwertigen Garben vor und erhalten zunächst den natürlichen Prägarbenmorphismus $F \to F^+$, der zur einelementigen Überdeckung von U gehört. Wir möchten nun zeigen, dass jeder Prägarbenmorphismus $F \to G$ in eine Garbe G eindeutig über unseren natürlichen Morphismus $F \to F^+$ faktorisiert. Die Morphismen unseres Prägarbenmorphismus $F(V) \to G(V)$ induzieren nun nach der Restriktionsverträglichkeit Morphismen auf den Limites, und somit auch im Kolimes Morphismen in

$$C(F^+(U), G(U) = C(\operatorname{colf}_{\mathcal{U}/U} \lim_{V \in \mathcal{U}} F(V), \lim_{V \in \mathcal{U}} G(V)) \xrightarrow{\sim} \operatorname{colf}_{\mathcal{U}/U} C(\lim_{V \in \mathcal{U}} F(V), \lim_{V \in \mathcal{U}} G(V)),$$

für alle $U \circledcirc X$, die ebenfalls mit den Restriktionen kompatibel sind.

Dass $F \to G$ nun mittels dieses Morphismus $F^+ \to G$ über $F \to F^+$ faktorisiert, folgt nun aber direkt, da der Morphismus für einelementige Überdeckungen der aus dem Prägarbenmorpismus ist.

Zur Eindeutigkeit dieser Faktorisierung halten wir fest, dass der Morphismus $F^+ \to G$ auf einelementigen Überdeckungen schon aufgrund der Faktorisierungseigenschaft und dann auf größeren Überdeckung durch die Garbeneigenschaften von F^+ und G eindeutig festgelegt ist. □

Wir prüfen, dass wir so insbesondere eine Garbifizierung zu "garbenwertigen Garben" erhalten.

Lemma 1.3. *Die Kategorien* $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ *und* $\mathrm{Ab}_{/\mathrm{X}}$ *der (abelschen) Garben auf einem topologischen Raum* X *sind vollständig und kovollständig.*

Beweis. Die Kategorien der Mengen Ens ist vollständig und kovollständig. Somit ist auch die Kategorie der Prägarben auf X $[\mathrm{Off}_{\mathrm{X}}{}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$ vollständig und kovollständig nach der Beschreibung von Limites in Funktorkategorien als objektweise Limites. Als Rechtsadjungierter der Garbifizierung vertauscht nun der Inklusionsfunktor $\iota : \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}} \to \mathrm{pEns}_{/\mathrm{X}}$ mit Limites, d. h. die Limites in $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ sind die Limites der zugehörigen Prägarben. Die Kolimites sind gegeben durch die

Garbifizierungen der Prägarben-Kolimites. Es gilt mit dem Prägarbenkolimes $\mathrm{col}_i\, \iota F_i$ über ein System von Garben $F_i \in \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ für eine Garbe $G \in \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}((\mathrm{col}_i\, \iota F_i)^+, G) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{pEns}_{/\mathrm{X}}(\mathrm{col}_i\, \iota F_i, \iota G)\\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{col}_i\, \mathrm{pEns}_{/\mathrm{X}}(\iota F_i, \iota G)\\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{col}_i\, \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}(F_i, G).\end{aligned}$$

Derselbe Beweis gilt für $\mathrm{Ab}_{/\mathrm{X}}$ unter Verwendung der Vollständigkeit und Kovollständigkeit der abelschen Gruppen. □

Der Beweis hat nur benutzt, dass $\mathrm{pEns}_{/\mathrm{X}}$ vollständig und kovollständig ist und $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ eine volle Unterkategorie mit Linksadjungiertem zur Inklusion.

Definition 1.4. Eine volle Unterkategorie einer Kategorie, für die die Inklusion einen Linksadjungierten besitzt, heißt *reflektive* Unterkategorie. In diesem Fall heißt der Linksadjungierte *Reflektor.*

Wir halten fest:

Proposition 1.5. *Sei $C \subset D$ eine reflektive Unterkategorie. Ist D vollständig, so ist auch C vollständig mit denselben Limites. Ist D kovollständig, so ist auch C kovollständig mit den Reflektionen der Kolimites in D als Kolimites.*

Bezeichne wieder $\mathcal{B}$ die Kategorie der Basis der Topologie auf einem Produkt topologischer Räume $X \times Y$ mit Inklusionen als Morphismen.

Satz 1.6. *Seien X und Y topologische Räume. Dann gibt es eine Äquivalenz von Kategorien*

$$(\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}})_{/Y} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ens}_{/\mathcal{B}} \xleftarrow{\approx} \mathrm{Ens}_{/X\times Y}$$

gegeben durch

$$\begin{aligned}&U \times V \mapsto (F(V))(U) \quad \textit{für } F \in (\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}})_{/Y} \textit{ und}\\ &U \times V \mapsto F(U \times V) \quad \textit{die Restriktion für } F \in \mathrm{Ens}_{/X\times Y}\end{aligned}$$

für $U \circledcirc X$ und $V \circledcirc Y$.

Beweis. Die zweite Äquivalenz ist **??**. Für die erste Äquivalenz bemerken wir wie in **??**, dass die zugrundeliegenden Prägarbenkategorien übereinstimmen. Nun fordert die Garbenbedingung für $\mathrm{Ens}_{/\mathcal{B}}$ die Verklebungseigenschaft für beliebige Überdeckungen von Basismengen durch Basismengen, während die Garbenbedingungen für $(\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}})_{/Y}$ die Verklebungseigenschaft für "Produkt-Überdeckungen" von Basismengen fordert, d. h. für Überdeckungen der Form $U \times V = \bigcup_{i,j} U_i \times V_j$ für $U = \bigcup_i U_i$ eine Überdeckung von U und $V = \bigcup_j V_j$ eine Überdeckung von V. Wir rechnen dies nach:

$$\begin{aligned}(F(V))(U) &= (\lim_j F(V_j))(U)\\ &= \lim_j F(V_j)(U)\\ &= \lim_j \lim_i F(V_j)(U_i)\end{aligned}$$

wobei im ersten Schritt die Garbenbedingung von $F \in (\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}})_{/Y}$, und im dritten die von $F(V_j) \in \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ verwendet wurde. Der zweite Schritt ist die Beschreibung von Limites in Funktorkategorien als objektweise Limites.

Beide Verklebungsbedingungen sind aber äquivalent, da eine beliebige Überdeckung von $U \times V$ natürlich mit den Projektionen auf X und Y Überdeckungen von U und V induziert und die Verträglichkeitsvoraussetzung für die Garbenbedingung von $\mathrm{Ens}_{/\mathcal{B}}$ bezüglich der Produktüberdeckung genau dann erfüllt ist, wenn sie für die ursprüngliche Überdeckung erfüllt ist. □

Bemerkung 1.7. Für abelsche Garben erhalten wir die analoge Aussage $(\mathrm{Ab}_{/\mathrm{X}})_{/Y} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ab}_{/X\times Y}$.

1.0.1 Exkurs: Überlagerungen von Produkträumen

Nachdem der vorangegangene Satz die étalen Räume über einem Produktraum $X \times Y$ beschreibt, möchten wir nun die Überlagerungen eines solchen Produktraums beschreiben. Wir können die Frage in unserer allgemeineren Terminologie formulieren.

Proposition 1.8. *Die Äquivalenz von Kategorien*

$$\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}} \rightleftarrows \text{étTop}_X$$

induziert eine Äquivalenz der vollen Unterkategorien

$$\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}{}^{\mathrm{lk}} \rightleftarrows \text{Üb}_X,$$

wobei $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}{}^{\mathrm{lk}}$ *die lokal konstanten Garben auf X bezeichnet.*

Beweis. Die Äquivalenz induziert zunächst die Äquivalenz der vollen Unterkategorien der konstanten Garben und der trivialen Überlagerungen und dann bei lokaler Forderung der jeweiligen Eigenschaften die Aussage des Satzes. □

Wir erinnern an die überlagerungstheoretische Definition einfachen Zusammenhangs in der Sprache von Garben.

Definition 1.9. Ein topologischer Raum Y heißt einfach zusammenhängend, falls jede lokal konstante Garbe auf Y konstant ist.

Einfach zusammenhängende Räume sind somit insbesondere zusammenhängend, da wir sonst auf den Zusammenhangskomponenten triviale Überlagerungen wählen können, deren Fasern verschiedene Kardinalitäten haben.

Satz 1.10. *Seien X und Y topologische Räume, Y einfach zusammenhängend. Bezeichne $\pi : X \times Y \to X$ die Projektion. Dann induzieren die Funktoren*

$$\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}{}^{\mathrm{lk}} \underset{\pi_*}{\overset{\pi^*}{\rightleftarrows}} \mathrm{Ens}^{\mathrm{lk}}_{/X\times Y}$$

eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweis. Der Isomorphismus $F \xrightarrow{\sim} \pi_*\pi^*F$ für $F \in \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}{}^{\mathrm{lk}}$ ist gerade die Aussage zu finalem Rückzug mit zusammenhängender Faser **??**, da Y zusammenhängend ist als einfach zusammenhängender Raum.

Der Isomorphismus $\pi^*\pi_*F \xrightarrow{\sim} F$ für $F \in \mathrm{Ens}^{\mathrm{lk}}_{/X\times Y}$ folgt aus der Aussage zu faserkonstanten Garben **??**, falls wir zeigen können, dass F konstant ist auf den Fasern von π. Tatsächlich ist aber $F|_{\pi^{-1}(x)}$ eine lokal konstante Garbe auf Y und mithin konstant wegen des einfachen Zusammenhangs von Y. □

1.0.2 Anwendung auf relativ schwach konstruierbare Garben

Wir bezeichnen als eine relativ zu X schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbare Garbe eine Garbe $F \in \mathrm{Ab}_{|\mathcal{K}|\times X}$, für die die Einschränkungen $F|_{|\sigma|\times X}$ Rückzüge von Garben auf X sind, es also ein $G \in \mathrm{Ab}_{/\mathrm{X}}$ gibt mit

$$F|_{|\sigma|\times X} \xrightarrow{\sim} \pi^*G$$

für $\pi : |\sigma| \times X \to X$ die Projektion.

Wir könnten nun für diesen Begriff dieselben Aussagen wie im vorangegangen Abschnitt mit vollkommen analogen Argumenten erneut beweisen. Kategorientheorie und unsere obige Charakterisierung von Garben auf Produkträumen ermöglichen uns aber ein einfacheres Vorgehen. Wir bemerken, dass für die Konstruktion unserer Kategorienbifaserung $\mathrm{Ab}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ mitsamt ihren bekannten Eigenschaften und die darauf aufbauende Argumentation im vorangegangenen Abschnitt der Umstand keine Rolle gespielt hat, dass unsere Garben Werte in den abelschen Gruppen annnehmen. Dieselben Konstruktionen funktionieren für $\mathcal{A}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}}$ eine Garbenkategorie mit Werten in einer beliebigen vollständigen abelschen Kategorie. Davon überzeugt man sich im Zweifel auch explizit zunächst durch Übertragung auf Garbenkategorien mit Werten in R-Linksmoduln und dann durch den Einbettungssatz von Mitchell auf beliebige abelsche Kategorien.

Um den relativen Fall abzuschließen, werden diese Argumentation auf den Fall $\mathcal{A} = \mathrm{Ab}_{/\mathrm{X}}$ anwenden. Die benötigten homotopieinjektiven Auflösungen im Beweis erhalten wir dann durch unsere Äquivalenz $(\mathrm{Ab}_{/\mathrm{X}})_{/Y} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ab}_{/X\times Y}$. Wir erhalten:

Theorem 1.11. *Sei $\mathcal{K}$ ein Simplizialkomplex. Dann gibt es eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\mathrm{Der}(\text{s-Kons}(\mathcal{K}\times X)) \underset{R\beta}{\overset{\iota}{\rightleftarrows}} \mathrm{Der}_{\mathrm{sk}}(|\mathcal{K}|\times X),$$

wobei ι die Inklusion und $\beta = (p\times \mathrm{id}_X)^*(p\times\mathrm{id}_X)_* : \mathrm{Ab}_{|\mathcal{K}|\times X} \to \text{s-Kons}(\mathcal{K}\times X)$ ist.

Bemerkung 1.12. Der tieferstehende Grund für 1.6 und die sich daraus ergebende Möglichkeit, alle über $X = \mathrm{pt}$ gezeigten Aussagen auch zu relativieren, ergibt sich daraus, dass es sich bei Ens und $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ beiden um *elementare Topoi* handelt, also Kategorien, die die wichtigsten Eigenschaften der Kategorie der Mengen verallgemeinern. Für die Übertragung von Aussagen von Ens auf andere Topoi ist entscheidend, dass diese über eine konstruktive interne Logik verfügen, die etwa das Auswahlaxiom oder oder den Satz vom ausgeschlossenen Dritten aus der klassischen Logik und Mengenlehre nicht kennt. Argumente, die diese Eigenschaften der klassischen Logik nicht benutzen, übertragen sich sofort auf andere Topoi. Siehe [**?**] für eine Darstellung dieser Ideen.