

0.1 Schwach konstruierbare Garben auf simplizialen Mengen

In diesem Abschnitt möchten wir die Aussagen aus Kapitel ?? übertragen auf den Fall, dass es sich bei dem Basisraum um die Realisierung einer simplizialen Menge anstelle eines Simplizialkomplexes handelt. Wir gehen vor wie in den ersten beiden Abschnitten.

Proposition 0.1. *Die geometrische Realisierung diskret simplizialer Garben liefert eine Äquivalenz von Katgeorien*

Nach der Bemerkung ?? reicht es, die topologischen Teile des Beweises aus ?? zu übertragen. Wir formulieren ganz allgemein:

Definition 0.2. Eine Konstruierbarkeitssituation ist eine stetige Abbildung $p : |\mathcal{K}| \rightarrow \mathcal{K}$ topologischer Räume, sodass gilt: Jeder Punkt $\sigma \in \mathcal{K}$ besitzt eine kleinste offene Umgebung $(\geq \sigma)$. Wir notieren $U(\sigma) = p^{-1}((\geq \sigma))$. Eine Garbe $F \in \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ heißt schwach $|\mathcal{K}|$ -konstruierbar, falls die Koeinheit der Adjunktion auf F einen Isomorphismus $p^*p_*F \xrightarrow{\sim} F$ ist.

In unserer Konstruierbarkeitssituation nennen wir \mathcal{K} die *kombinatorische* und $|\mathcal{K}|$ die *geometrische Realisierung*. Wir übertragen den Begriff derivierter schwach $|\mathcal{K}|$ -konstruierbarer Garben (mit schwach $|\mathcal{K}|$ -konstruierbaren Kohomologiegargen) und die Notationen $\text{s-Kons}(\mathcal{K})$ und $\text{Der}_{\text{sk}}(|\mathcal{K}|)$.

Wir können mit identischem Beweis den allgemeinen Teil von ?? übertragen:

Proposition 0.3. *Für $F \in \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ sind äquivalent:*

- (1) *F ist schwach $|\mathcal{K}|$ -konstruierbar*
- (2) *F liegt im wesentlichen Bild des Rückzugs p^* .*
- (3) *Die Restriktion $F(U(\sigma)) \rightarrow F_x$ ist für alle $\sigma \in \mathcal{K}$ und alle $x \in |\sigma|$ ein Isomorphismus.*

In guten Konstruierbarkeitssituationen lässt sich auch eine geometrische Formulierung schwacher $|\mathcal{K}|$ -Konstruierbarkeit angeben:

Definition 0.4. In einer Konstruierbarkeitssituation $p : |\mathcal{K}| \rightarrow \mathcal{K}$ heißt eine Garbe $F \in \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ geometrisch schwach $|\mathcal{K}|$ -konstruierbar, falls die Einschränkungen $F|_{|\sigma|}$ konstant sind für alle Urbilder $|\sigma| = p^{-1}(\sigma)$ von Punkten $\sigma \in \mathcal{K}$.

Proposition 0.5. *Ist in einer Konstruierbarkeitssituation $p : |\mathcal{K}| \rightarrow \mathcal{K}$... so ist für eine Garbe $F \in \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ äquivalent:*

1. *F ist $|\mathcal{K}|$ -konstruierbar.*
2. *F ist geometrisch schwach $|\mathcal{K}|$ -konstruierbar.*

Das ist der fehlende Teil von ??.

Beweis. Die Richtung $1 \Rightarrow 2$ folgt wieder aus 0.3 (3) und ?? wegen $|\sigma| \subset U(\sigma)$.

Für die umgekehrte Richtung □