# 1 Schwach konstruierbare Garben auf Simplizialkomplexen, relative Version

In diesem Abschnitt sollen die Beobachtungen der letzten beiden Abschnitte vereint werden. Nach Abschnitt **??** sind Garben auf einem Simplizialkomplex $\mathcal{K}$ nichts anderes als ein Simplizialkomplex von Garben über dem einpunktigen Raum. In Abschnitt **??** haben wir diese Garben auf $\mathcal{K}$ geometrisch charakterisiert als die simplizial konstanten Garben auf der geometrischen Realisierung $|\mathcal{K}|$ von $\mathcal{K}$. Wir erwarten daher auch eine relative Version dieser Aussage über einem beliebigen topologischen Raum $X$, die die Simplizialkomplexe von Garben auf $X$ alias Garben auf $\mathcal{K} \times X$ geometrisch beschreibt.

Wir geben zunächst eine leichte Verallgemeinerung der Aussage von **??** an.

Wir definieren Garben mit Werten in beliebigen Kategorien $C$ mit der schon in **??** verwandten allgemeinen Abstiegsbedingung.

**Definition 1** ([**?**], 2.1.5)**.** Sei $C$ eine vollständige Kategorie und $X$ ein topologischer Raum. Eine $C$-wertige Prägarbe $F \in [{\mathrm{Off}_\mathrm{X}}^{\mathrm{op}}, C]$ auf $X$ heißt $C$-wertige Garbe auf $X$, falls sie die Abstiegsbedingung erfüllt:

> Für alle unter endlichen Schnitten stabilen offenen Überdeckungen $U = \bigcup_i U_i$ gilt $F(U) = \lim_i F(U_i)$.

Für $C$ die Kategorien der Mengen oder der abelschen Gruppen ist diese Definition äquivalent zur bekannten Definition über die eindeutige Verklebbarkeit von verträglichen Schnitten.

Bezeichne wieder $\mathcal{B}$ die Kategorie der Basis der Topologie auf einem Produkt topologischer Räume $X \times Y$ mit Inklusionen als Morphismen.

**Satz 2.** *Seien $X$ und $Y$ topologische Räume. Dann gibt es eine Äquivalenz von Kategorien*

$$(\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}})_{/Y} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ens}_{/\mathcal{B}} \xleftarrow{\approx} \mathrm{Ens}_{/X\times Y}$$

*gegeben durch*

$$\begin{aligned} U \times V &\mapsto (F(V))(U) && \textit{für } F \in (\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}})_{/Y} \textit{ und} \\ U \times V &\mapsto F(U \times V) && \textit{die Restriktion für } F \in \mathrm{Ens}_{/X\times Y}\,. \end{aligned}$$

*Beweis.* Die zweite Äquivalenz ist **??**. Für die erste Äquivalenz bemerken wir wie in **??**, dass die zugrundeliegenden Prägarbenkategorien übereinstimmen. Nun fordert die Garbenbedingung für $\mathrm{Ens}_{/\mathcal{B}}$ die Verklebungseigenschaft für beliebige Überdeckungen von Basismengen durch Basismengen, während die Garbenbedingungen für $(\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}})_{/Y}$ die Verklebungseigenschaft für "Produkt-Überdeckungen" von Basismengen fordert, d. h. für Überdeckungen der Form $U \times V = \bigcup_{i,j} U_i \times V_j$ für $U = \bigcup_i U_i$ eine Überdeckung von $U$ und $V = \bigcup_j V_j$ eine Überdeckung von $V$. □