# Kapitel 1

# Simpliziale Garben

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit simplizialen Objekten in der Kategorie der Garben auf einem topologischen Raum $X$. Während Simplizialkomplexe ungerichtete Graphen verallgemeinern, verallgemeinern simpliziale Mengen gerichtete Graphen, und werden uns so bei der geometrischen Realisierung von Objekten in Diagrammkategorien von Garben zur Verfügung stehen.

Wir betrachten die Menge $\Delta$ der nichtleeren endlichen Ordinalzahlen. Ihre Elemente sind von der Form $\{0, 1, \ldots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, welche wir kurz mit $[n]$ bezeichnen werden. Wir verstehen diese Mengen $[n]$ als angeordnete Mengen.

**Definition 1.1.** Die Simplex-Kategorie $\Delta$ ist die Kategorie der endlichen nichtleeren Ordinalzahlen versehen mit monotonen Abbildungen als Morphismen.

Ist $C$ eine Kategorie, so bezeichnen wir eine Prägarbe auf $\Delta$ mit Werten in $C$ (d. h. einen Funktor $\Delta^{\mathrm{op}} \to C$) als simpliziales Objekt in $C$.

Unseren gewohnten Sprechweisen folgend nennen wir simpliziale Objekte in $C$ auch kurz "simpliziale $C$" und sprechen etwa von simplizialen Mengen und simplizialen Garben. Wir notieren die Funktorkategorien simplizialer Objekte in $C$ auch kurz mit $\mathrm{s}\, C = [\Delta^{\mathrm{op}}, C]$.

Die monotonen Abbildungen $[m] \to [n]$ werden von zwei besonders einfachen Klassen monotoner Abbildungen erzeugt: von den *Randabbildungen*, den eindeutigen Injektionen $d_i^n : [n-1] \to [n]$, die $i \in \{0, \ldots, n\}$ nicht treffen, und den *Degenerationsabbildungen*, den eindeutigen Surjektionen $s_i^n : [n+1] \to [n]$, für die $i \in \{0, \ldots n\}$ zweielementiges Urbild hat.

**Lemma 1.2** ([?], I.2, ex. 1). *(i) Die Rand- und Degenerationsabbildungen erfüllen die Relationen*

$$d_j^{n+1} d_i^n = d_i^{n+1} d_{j-1}^n \quad \textit{für} \quad i < j,$$
$$s_j^n s_i^{n+1} = s_i^n s_{j+1}^{n+1} \quad \textit{für} \quad i \leq j,$$
$$s_j^{n-1} d_i^n = \begin{cases} d_i^{n-1} s_{j-1}^{n-2} & \textit{für} \quad i < j, \\ \mathrm{id}_{[n-1]} & \textit{für} \quad i = j \textit{ oder } i = j+1, \\ d_{i-1}^{n-1} s_j^{n-2} & \textit{für} \quad i > j+1. \end{cases}$$

*(ii) Sei $f : [m] \to [n]$ monoton. Dann hat $f$ eine eindeutige Darstellung*

$$f = d^n_{i_1} \dots d^{n-s+1}_{i_s} s^{m-t}_{j_t} \dots s^{m-1}_{j_1}$$

*mit $n \geq i_1 > \cdots > i_s \geq 0$, $m > j_1 > \cdots > j_t \geq 0$ und $n = m - t + s$.*

*(iii) Die vom Köcher der endlichen nichtleeren Ordinalzahlen mit den Rand- und Korandabbildungen und den angegebenen Relationen auf den Morphismenmengen erzeugte Pfadkategorie ist isomorph zu $\Delta$.*

*Beweis.* (i) Durch Bildchen Zeichnen oder explizites Nachrechnen: Wir werten beide Abbildungen simultan auf allen Elementen aus und erhalten zum Beispiel für die erste Aussage:

$$\begin{aligned} & (0, 1, \dots, i-1, i, i+1, \cdots, j-2, j-1, j, \cdots, n-1) \\ \xmapsto{d^n_i} \; & (0, 1, \cdots, i-1, i+1, i+2, \cdots, j-1, j, j+1, \cdots, n) \\ \xmapsto{d^{n+1}_j} \; & (0, 1, \cdots, i-1, i+1, i+2, \cdots, j-1, j+1, j+2, \cdots, n+1) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} & (0, 1, \cdots, i-1, i, i+1, \cdots, j-2, j-1, j, \cdots, n-1) \\ \xmapsto{d^n_{j-1}} \; & (0, 1, \cdots, i-1, i, i+1, \cdots, j-2, j, j+1, \cdots, n) \\ \xmapsto{d^{n+1}_i} \; & (0, 1, \cdots, i-1, i+1, i+2, \cdots, j-1, j+1, j+2, \cdots, n+1). \end{aligned}$$

(ii) In einer solchen Darstellung gibt $m - t$ die Anzahl der Funktionswerte der Abbildung an, die $j_k$ beschreiben die Partition von $(0, \cdots, m)$ in zusammenhängende Abschnitte mit demselben Funktionswert und die $i_k$ bestimmen die Funktionswerte selbst.

(iii) Jeden Morphismus in der Pfadkategorie, d. h. jedes Tupel komponierbarer Rand- und Degenerationsabbildungen kann mit den Relationen aus dem ersten Teil auf eine Form wie in (ii) gebracht werden. Umgekehrt ist nach (ii) jede monotone Abbildung aber auch als ein solcher Pfad darstellbar. Den Isomorphismus definiert also der Funktor, der auf Objekten durch die Identität und auf Morphismen durch die offensichtliche Zuordnung der Erzeuger der Pfadkategorie auf die jeweiligen Rand- und Degenerationsabbildungen gegeben ist.

□

Die einfachsten Beispiele nichttrivialer simplizialer Mengen sind die Standard-$n$-Simplizes, die sich als die darstellbaren Funktoren $\Delta^n = \Delta(\cdot, [n])$ beschreiben lassen. Wir erhalten den Funktor

$$\begin{aligned} R : \Delta^{\mathrm{op}} &\to \mathrm{s\,Ens}, \\ [n] &\mapsto \Delta^n = \Delta(\cdot, [n]), \end{aligned}$$

der auf Morphismen durch Vorschalten gegeben ist, welches wir mit $f \mapsto f^*$ notieren.

Ist $X \in \mathrm{s\,Ens}$ eine simpliziale Menge, so bezeichnen wir $X_n := X([n])$ als die Menge der $n$-Simplizes von $X$. Nun sind die $n$-Simplizes von $X$ gerade die "Bilder des $n$-ten Standardsimplizes in $X$" sind, präziser

$$X_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{s\,Ens}(\Delta^n, X).$$

In der Tat besagt das Yoneda-Lemma, dass die Transformationen des freien Funktors $\Delta^n = \Delta(\cdot, [n])$ zum Funktor $X$ in natürlicher Bijektion stehen zu $X([n])$.

Das anschließende Lemma zeigt, dass sich eine simpliziale Menge $X$ vollständig durch ihre Simplizes $\Delta^n \to X$ verstehen lässt. Dazu erklären wir zunächst Slice-Kategorien, Kategorien von Objekten über einem gegebenen Objekt bzw. Spezialfälle von Komma-Kategorien.

**Definition 1.3.** Sei $r : C \to D$ ein Funktor und $X \in D$ ein Objekt. Dann bezeichnet $C \downarrow_r X$ die Slice-Kategorie der Objekte von $C$ über $X$ mittels $r$, deren Objekte Objekte $Y \in C$ samt einem Morphismus $\pi_Y : rY \to X$ sind und deren Morphismen Morphismen $f : Y \to Z$ in $C$ sind, für die $rf$ ein Morphismus über $X$ ist, d. h. $\pi_Y = \pi_Z \circ rf$ gilt.

Wir bezeichnen die Slice-Kategorie $\Delta \downarrow_r X$ als die Simplexkategorie von $X$. Konkret ist darin ein Objekt ein Morphismus $\Delta^n \to X$ und ein Morphismus ein von $[n] \to [m]$ induzierter Morphismus simplizialer Mengen $\Delta^n \to \Delta^m$ über $X$.

**Lemma 1.4.** *Sei $X \in \mathrm{s\,Ens}$ eine simpliziale Menge. Dann gilt*

$$X \xrightarrow{\sim} \mathrm{col}_{\Delta^n \to X}\, \Delta^n,$$

*mit dem Kolimes über die Simplexkategorie von $X$.*

*Beweis.* Bezeichne $K$ obigen Kolimes. Das System, über das der Kolimes gebildet wird, sichert uns nach der universellen Eigenschaft des Kolimes einen Morphismus $K \to X$. Wir müssen also zeigen, dass dieser Bijektionen auf den $n$-Simplizes induziert. Tatsächlich definiert ein $n$-Simplex $\Delta^n \to K$ durch Nachschalten von $K \to X$ einen $n$-Simplex in $X$. Diese Zuordnung ist bijektiv, denn wir erhalten eine Umkehrabbildung, wenn wir $\Delta^n \to X$ den zugehörigen Morphismus in den Kolimes $\Delta^n \to K$ zuordnen. □

Der Beweis benötigte keine konkreten Eigenschaften der simplizialen Mengen. Wir halten mit wörtlich übertragenen Beweis allgemein fest:

**Proposition 1.5.** *Sei $F : C \to \mathrm{Ens}$ ein Funktor. Dann ist $F$ ein Kolimes über darstellbare Funktoren $C(X, \cdot)$.*

*Beweis.* Wir betrachten mittels des Funktors $r : C \to \mathrm{Ens}^C, X \mapsto C(X, \cdot)$ die Slice-Kategorie $C \downarrow_r F$ der darstellbaren Funktoren über $F$ und dann das System in $\mathrm{Ens}^C$, das daraus durch Vergessen der Transformationen nach $F$ hervorgeht. Wir bezeichnen wieder den Kolimes darüber mit $K$ und erhalten mit der universellen Eigenschaft eine Tranformation $K \Rightarrow F$. Diese ist eine Isotransformation, wenn sie auf allen Objekten $X \in C$ Bijektionen $KX \xrightarrow{\sim} FX$ induziert. Nach dem Yoneda-Lemma entsprechen diese den Transformationen

$C(X,\cdot) \Rightarrow K$ bzw. $C(X,\cdot) \Rightarrow F$. Diese stehen aber nach der universellen Eigenschaft des Kolimes und der Definition der Kategorie $C \downarrow_r F$ in Bijektion durch Nachschalten von $K \Rightarrow F$. $\square$

Wir erklären nun die geometrische Realisierung simplizialer Mengen. Der Unterschied zur geometrischen Realsierung von Simplizialkomplexen ist im Wesentlichen die Möglichkeit, Simplizes wiederzuverwenden und zu degenerieren, was zu Identifikationen in der geometrischen Realisierung führt. Ein Fall von "Wiederverwendung" ist etwa die Realisierung der $S^1$ als 1-Simplex, dessen Endpunkte übereinstimmen. Degeneration bedeutet, dass niedererdimensionale Simplizes auch die Rolle höherdimensionaler Simplizes übernehmen können. Wir können etwa unser Beispiel modifizieren und die $S^n$ als $n$-Simplex realisieren, bei dem alle Kanten in einem Punkt zusammenfallen.

Formal definieren wir zunächst die geometrische Realsierung des Standard-$n$-Simplex als den abgeschlossenen geometrischen Standard-$n$-Simplex

$$|\Delta^n| = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | 0 \leq x_i \leq 1, \sum_{i=0}^{n} x_i = 1\}.$$

Ein Morphismus $f : [m] \to [n]$ definiert eine stetige Abbildung $|f| : |\Delta^m| \to |\Delta^n|$ auf den zugehörigen Simplizes. Nach 1.2 reicht es, diese für Rand- und Degenerationsabbildungen anzugeben. Für die Randabbildung $|d_i|$ handelt es sich dabei um die Inklusion der $i$-ten Kante, d. h. in Koordinaten das Einfügen einer Null an der $i$-ten Stelle, für die Degenerationen $|s_i|$ um den Kollaps der $i$-ten Kante, d. h. in Koordinaten die Ersetzung der $i$-ten und ihrer darauffolgenden Koordinate durch ihre Summe. In Formeln:

$$|d_i^n|(x_0, \cdots, x_{n-1}) = (x_0, \cdots, x_{i-1}, 0, x_i, \cdots, x_{n-1}),$$
$$|s_i^n|(x_0, \cdots, x_{n+1}) = (x_0, \cdots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{n+1}).$$

Wir erhalten einen Funktor $R : \Delta \to \mathrm{Top}, [n] \mapsto \Delta^n$.

Nun fordern wir, dass sich die Realisierung mit Kolimites vertrage:

$$|\operatorname{col}_i X_i| \xrightarrow{\sim} \operatorname{col}_i |X_i|.$$

Das erreichen wir, indem wir für eine simpliziale Menge $X$ setzen

$$|X| := \operatorname{col}_{\Delta^n \to X} |\Delta^n|,$$

wieder mit dem Kolimes über die Simplexkategorie von $X$ sowie mit den oben definierten induzierten stetigen Abbildungen auf den geometrischen Simplizes.

Wie ganz allgemein können wir den Kolimes topologischer Räume auch explizit mittels Koprodukt und Koegalisator ausschreiben. Wir verstehen die Mengen $X_n$ als diskrete topologische Räume und erhalten:

$$|X| \xrightarrow{\sim} (\coprod_n X_n \times |\Delta^n|)/\sim$$

mit der Quotiententopologie, die durch die von

$$(x, |f|(p)) \sim (f^*(x), p)$$

für alle monotonen $f : [m] \to [n]$ erzeugte Äquivalenzrelation gegeben ist.

Ein Morphismus simplizialer Mengen $X \to Y$ induziert nun durch Nachschalten von $X \to Y$ einen Funktor auf den Simplexkategorien $\Delta \downarrow X \to \Delta \downarrow Y$ und damit auch auf den Kolimites eine stetige Abbildung $|X| \to |Y|$. Wir erhalten also den Funktor der geometrischen Realisierung $|\cdot| : \mathrm{s\,Ens} \to \mathrm{Top}$.

*Bemerkung* 1.6. Diese Konstruktion lässt sich interpretieren als das Tensorprodukt der Funktoren

$$X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Top} \quad \text{und}$$
$$R : \Delta \to \mathrm{Top}, [n] \mapsto |\Delta^n|,$$

wobei die Mengen $X_n$ als diskrete topologische Räume aufgefasst werden ([**?**], III.1):

$$|X| = X \otimes R.$$

Die geometrischen Realisierungen simplizialer Mengen liegen tatsächlich sogar in einer in ihren kategoriellen Eigenschaften bequemen (*convenient*) Kategorie topologischer Räume, den kompakt erzeugten Hausdorffräumen.

**Definition 1.7** ([**?**])**.** Ein topologischer Raum $X$ heißt kompakt erzeugt, falls gilt: eine Teilmenge $A \subset X$ ist abgeschlossen, falls $A \cap K$ abgeschlossen ist für jedes Kompaktum $K \subset X$.

*Bemerkung* 1.8. Äquivalent dazu ist: eine Teilmenge $U \subset X$ ist offen, falls $U \cap K$ offen ist für jedes Kompaktum $K \subset X$.

Wir notieren volle Unterkategorie der kompakt erzeugten Hausdorffräume in den topologischen Räumen mit CGHaus. Die kompakt erzeugten Hausdorffräume umfassen eine sehr große Klasse an relevanten topologischen Räumen, etwa CW-Komplexe oder erstabzählbare Räume. Für uns relevant sind die folgenden Kriterien:

**Lemma 1.9.** *(i) Ist $X$ ein lokal kompakter topologischer Raum, so ist $X$ kompakt erzeugt.*

*(ii) Ist $p : X \twoheadrightarrow Y$ eine Quotientenabbildung (d. h. $Y$ trägt die Finaltopologie bezüglich $p$) und $X$ kompakt erzeugt, so ist auch $Y$ kompakt erzeugt.*

*Beweis.* (i) Sei $U \subset X$ mit $U \cap K$ offen für alle $K \subset X$ kompakt. Mit der Lokalkompaktheit von $X$ wählen wir zu jedem $x \in X$ eine kompakte Umgebung $K_x$ und erhalten, dass $U = \bigcup_{x \in X} U \cap K_x$ offen ist als Vereinigung offener Mengen.

(ii) Sei $A \subset Y$ mit $A \cap K$ abgeschlossen für alle $K \subset Y$ kompakt. Mit der Finaltopologie auf $Y$ gilt, dass $A \subset Y$ genau dann abgeschlossen ist, wenn $p^{-1}(A) \subset X$ abgeschlossen ist. Sei nun $\tilde{K} \subset X$ kompakt. Es ist $p^{-1}(A) \cap \tilde{K}$ abgeschlossen, denn $p(p^{-1}(A) \cap \tilde{K}) = p(\tilde{K}) \cap A$ ist abgeschlossen nach Voraussetzung ($p(\tilde{K}) \subset Y$ ist kompakt als stetiges Bild eines Kompaktums). Da $X$ kompakt erzeugt ist, folgt nun, dass $p^{-1}(A)$ abgeschlossen ist und somit auch $A \subset Y$.

□