

Kapitel 1

Simpliziale Garben

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit simplizialen Objekten in der Kategorie der Garben auf einem topologischen Raum X . Während Simplicialkomplexe ungerichtete Graphen verallgemeinern, verallgemeinern simpliziale Mengen gerichtete Graphen, und werden uns so bei der geometrischen Realisierung von Objekten in Diagrammkategorien von Garben zur Verfügung stehen.

1.1 Simpliziale Mengen

Wir betrachten die Menge Δ der nichtleeren endlichen Ordinalzahlen. Ihre Elemente sind von der Form $\{0, 1, \dots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, welche wir kurz mit $[n]$ bezeichnen werden. Wir verstehen diese Mengen $[n]$ als angeordnete Mengen.

Definition 1.1. Die Simplex-Kategorie Δ ist die Kategorie der endlichen nichtleeren Ordinalzahlen versehen mit monotonen Abbildungen als Morphismen.

Ist C eine Kategorie, so bezeichnen wir eine Prägarbe auf Δ mit Werten in C (d. h. einen Funktor $\Delta^{\text{op}} \rightarrow C$) als simpliziales Objekt in C .

Unseren gewohnten Sprechweisen folgend nennen wir simpliziale Objekte in C auch kurz “simpliziale C ” und sprechen etwa von simplizialen Mengen und simplizialen Garben. Wir notieren die Funktorkategorien simplizialer Objekte in C auch kurz mit $\text{s}C = [\Delta^{\text{op}}, C]$. Opponiert bezeichnen wir einen Funktor $\Delta \rightarrow C$ als kosimpliziales Objekt in C .

Für $X \in \text{s}C$ ein simpliziales Objekt notieren wir kurz $X_n = X([n])$ und für eine monotone Abbildung $f : [m] \rightarrow [n]$ auch $f^* = X(f)$.

Die monotonen Abbildungen $[m] \rightarrow [n]$ werden von zwei besonders einfachen Klassen monotoner Abbildungen erzeugt: von den *Randabbildungen*, den eindeutigen Injektionen $d_i^n : [n-1] \rightarrow [n]$, die $i \in \{0, \dots, n\}$ nicht treffen, und den *Degenerationsabbildungen*, den eindeutigen Surjektionen $s_i^n : [n+1] \rightarrow [n]$, für die $i \in \{0, \dots, n\}$ zweielementiges Urbild hat.

Lemma 1.2 ([?], I.2, ex. 1). (i) Die Rand- und Degenerationsabbildungen erfüllen die Relationen

$$\begin{aligned} d_j^{n+1} d_i^n &= d_i^{n+1} d_{j-1}^n \quad \text{für } i < j, \\ s_j^n s_i^{n+1} &= s_i^n s_{j+1}^{n+1} \quad \text{für } i \leq j, \\ s_j^{n-1} d_i^n &= \begin{cases} d_i^{n-1} s_{j-1}^{n-2} & \text{für } i < j, \\ \text{id}_{[n-1]} & \text{für } i = j \text{ oder } i = j+1, \\ d_{i-1}^{n-1} s_j^{n-2} & \text{für } i > j+1. \end{cases} \end{aligned}$$

(ii) Sei $f : [m] \rightarrow [n]$ monoton. Dann hat f eine eindeutige Darstellung

$$f = d_{i_1}^n \dots d_{i_s}^{n-s+1} s_{j_t}^{m-t} \dots s_{j_1}^{m-1}$$

mit $n \geq i_1 > \dots > i_s \geq 0$, $m > j_1 > \dots > j_t \geq 0$ und $n = m - t + s$.

(iii) Die vom Köcher der endlichen nichtleeren Ordinalzahlen mit den Rand- und Korandabbildungen und den angegebenen Relationen auf den Morphismenmengen erzeugte Pfadkategorie ist isomorph zu Δ .

Beweis. (i) Durch Bildchen Zeichnen oder explizites Nachrechnen: Wir werfen beide Abbildungen simultan auf allen Elementen aus und erhalten zum Beispiel für die erste Aussage:

$$\begin{array}{ccc} & (0, 1, \dots, i-1, i, i+1, \dots, j-2, j-1, j, \dots, n-1) & \\ \xrightarrow{d_i^n} & (0, 1, \dots, i-1, i+1, i+2, \dots, j-1, j, j+1, \dots, n) & \\ \xrightarrow{d_j^{n+1}} & (0, 1, \dots, i-1, i+1, i+2, \dots, j-1, j+1, j+2, \dots, n+1) & \end{array}$$

sowie

$$\begin{array}{ccc} & (0, 1, \dots, i-1, i, i+1, \dots, j-2, j-1, j, \dots, n-1) & \\ \xrightarrow{d_{j-1}^n} & (0, 1, \dots, i-1, i, i+1, \dots, j-2, j, j+1, \dots, n) & \\ \xrightarrow{d_i^{n+1}} & (0, 1, \dots, i-1, i+1, i+2, \dots, j-1, j+1, j+2, \dots, n+1). & \end{array}$$

- (ii) In einer solchen Darstellung gibt $m - t$ die Anzahl der Funktionswerte der Abbildung an, die j_k beschreiben die Partition von $(0, \dots, m)$ in zusammenhängende Abschnitte mit demselben Funktionswert und die i_k bestimmen die Funktionswerte selbst.
- (iii) Jeden Morphismus in der Pfadkategorie, d. h. jedes Tupel komponierbarer Rand- und Degenerationsabbildungen kann mit den Relationen aus dem ersten Teil auf eine Form wie in (ii) gebracht werden. Umgekehrt ist nach (ii) jede monotone Abbildung aber auch als ein solcher Pfad darstellbar. Den Isomorphismus definiert also der Funktor, der auf Objekten durch die Identität und auf Morphismen durch die offensichtliche Zuordnung der Erzeuger der Pfadkategorie auf die jeweiligen Rand- und Degenerationsabbildungen gegeben ist.

□

Die einfachsten Beispiele nichttrivialer simplizialer Mengen sind die Standard- n -Simplizes:

Definition 1.3. Die darstellbare simpliziale Menge $\Delta^n := \Delta(\cdot, [n])$ heißt *Standard- n -Simplex*.

Wir erhalten den Funktor

$$\begin{aligned} R : \Delta^{\text{op}} &\rightarrow \mathbf{sEns}, \\ [n] &\mapsto \Delta^n = \Delta(\cdot, [n]), \end{aligned}$$

der auf Morphismen durch Vorschalten gegeben ist, welches wir mit $f \mapsto f^*$ notieren.

Ist $X \in \mathbf{sEns}$ eine simpliziale Menge, so bezeichnen wir $X_n := X([n])$ als die Menge der n -Simplizes von X . Nun sind die n -Simplizes von X gerade die “Bilder des n -ten Standardsimplizes in X ” sind, präziser

$$X_n \xrightarrow{\sim} \mathbf{sEns}(\Delta^n, X). \quad (1.1)$$

In der Tat besagt das Yoneda-Lemma, dass die Transformationen des freien Funktors $\Delta^n = \Delta(\cdot, [n])$ zum Funktor X in natürlicher Bijektion stehen zu $X([n])$.

Das anschließende Lemma zeigt, dass sich eine simpliziale Menge X vollständig durch ihre Simplizes $\Delta^n \rightarrow X$ verstehen lässt. Dazu erklären wir zunächst Slice-Kategorien, Kategorien von Objekten über einem gegebenen Objekt bzw. Spezialfälle von Komma-Kategorien.

Definition 1.4. Sei $r : C \rightarrow D$ ein Funktor und $X \in D$ ein Objekt. Dann bezeichnet $C \downarrow_r X$ die Slice-Kategorie der Objekte von C über X mittels r , deren Objekte Objekte $Y \in C$ samt einem Morphismus $\pi_Y : rY \rightarrow X$ sind und deren Morphismen Morphismen $f : Y \rightarrow Z$ in C sind, für die rf ein Morphismus über X ist, d. h. $\pi_Y = \pi_Z \circ rf$ gilt.

Es handelt sich gewissermaßen um den Schnitt des Bildes des Funktors r mit der Über-Kategorie C_X .

Wir bezeichnen die Slice-Kategorie $\Delta \downarrow_r X$ als die Simplexkategorie von X . Konkret ist darin ein Objekt ein Morphismus $\Delta^n \rightarrow X$ und ein Morphismus ein von $[n] \rightarrow [m]$ induzierter Morphismus simplizialer Mengen $\Delta^n \rightarrow \Delta^m$ über X .

Lemma 1.5. Sei $X \in \mathbf{sEns}$ eine simpliziale Menge. Dann gilt

$$X \xrightarrow{\sim} \text{col}_{\Delta^n \rightarrow X} \Delta^n,$$

mit dem Kolimes über die Simplexkategorie von X .

Beweis. Bezeichne K obigen Kolimes. Das System, über das der Kolimes gebildet wird, sichert uns nach der universellen Eigenschaft des Kolimes einen Morphismus $K \rightarrow X$. Wir müssen also zeigen, dass dieser Bijektionen auf den n -Simplizes induziert. Tatsächlich definiert ein n -Simplex $\Delta^n \rightarrow K$ durch Nachschalten von $K \rightarrow X$ einen n -Simplex in X . Diese Zuordnung ist bijektiv, denn wir erhalten eine Umkehrabbildung, wenn wir $\Delta^n \rightarrow X$ den zugehörigen Morphismus in den Kolimes $\Delta^n \rightarrow K$ zuordnen. \square

Der Beweis benötigt keine konkreten Eigenschaften der simplizialen Mengen. Wir halten mit wörtlich übertragenen Beweis allgemein fest:

Proposition 1.6. *Sei $F : C \rightarrow \text{Ens}$ ein Funktor. Dann ist F ein Kolimes über darstellbare Funktoren $C(X, \cdot)$.*

Beweis. Wir betrachten mittels des Funktors $r : C \rightarrow \text{Ens}^C, X \mapsto C(X, \cdot)$ die Slice-Kategorie $C \downarrow_r F$ der darstellbaren Funktoren über F und dann das System in Ens^C , das daraus durch Vergessen der Transformationen nach F hervorgeht. Wir bezeichnen wieder den Kolimes darüber mit K und erhalten mit der universellen Eigenschaft eine Transformation $K \Rightarrow F$. Diese ist eine Isotransformation, wenn sie auf allen Objekten $X \in C$ Bijektionen $KX \xrightarrow{\sim} FX$ induziert. Nach dem Yoneda-Lemma entsprechen diese den Transformationen $C(X, \cdot) \Rightarrow K$ bzw. $C(X, \cdot) \Rightarrow F$. Diese stehen aber nach der universellen Eigenschaft des Kolimes und der Definition der Kategorie $C \downarrow_r F$ in Bijektion durch Nachschalten von $K \Rightarrow F$. \square

Bemerkung 1.7. Dies folgt später auch sofort aus der Dichteformel für Koenden 1.41 und 1.30.

1.2 Der kosimpliziale Raum der Standardsimplizes

Die geometrische Realisierung einer simplizialen Menge soll sich mit geeigneten Identifikationen aus den geometrischen Realisierungen von Standard- n -Simplizes zusammensetzen. Diese definieren wir als die abgeschlossenen geometrischen Standard- n -Simplizes

$$|\Delta^n| = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leq x_i \leq 1, \sum_{i=0}^n x_i = 1 \right\}.$$

Ein Morphismus $f : [m] \rightarrow [n]$ induziert eine stetige Abbildung $|f| : |\Delta^m| \rightarrow |\Delta^n|$ auf den zugehörigen Simplizes. Nach 1.2 reicht es, diese für Rand- und Degenerationsabbildungen anzugeben. Für die Randabbildung $|d_i|$ handelt es sich dabei um die Inklusion der i -ten Kante, d. h. in Koordinaten das Einfügen einer Null an der i -ten Stelle, für die Degenerationen $|s_i|$ um den Kollaps der i -ten direkten Kante, d. h. in Koordinaten die Ersetzung der i -ten und ihrer darauffolgenden Koordinate durch ihre Summe. In Formeln:

$$\begin{aligned} |d_i^n|(x_0, \dots, x_{n-1}) &= (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1}), \\ |s_i^n|(x_0, \dots, x_{n+1}) &= (x_0, \dots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{n+1}). \end{aligned}$$

Wir erhalten einen Funktor $R : \Delta \rightarrow \text{Top}, [n] \mapsto |\Delta^n|$, genannt der *kosimpliziale Raum der Standardsimplizes*.

Bemerkung 1.8. Wie im Fall der Simplizialkomplexe möchten wir neben der anschaulich-geometrischen Realisierung durch Hausdorffräume auch noch eine

kombinatorischere Realisierung analog zur Ordnungstopologie auf dem Simplicialkomplex finden. Wir definieren die *plumpen Standard- n -Simplizes* \blacktriangle^n Quotienten induktiv konstruierter Äquivalenzrelationen:

$$\blacktriangle^0 := |\Delta^0| = \text{pt}$$

und

$$\blacktriangle^n := |\Delta^n| / \sim$$

mit der Äquivalenzrelation

$$\begin{aligned} x \sim y & \quad \text{für } x, y \in \text{int } |\Delta^n| \text{ und} \\ |d_i|x \sim |d_i|y & \quad \text{für } x \sim y \in |\Delta^{n-1}|. \end{aligned}$$

Dabei steht $\text{int } |\Delta^n|$ für das offene Innere von $|\Delta^n| \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Anschaulich gesprochen wird also bei $|\Delta^n| \rightarrow \blacktriangle^n$ das offene Innere zu einem Punkt identifiziert und eine solche Identifikation auch auf allen Rändern vorgenommen. Der offene Punkt im Inneren ist dicht, wir nennen ihn auch den *generischen Punkt* von \blacktriangle^n .

Beispiel 1.9. *Der plumpe Standard-1-Simplex ist ein dreipunktiger Raum mit einem offenen dichten Punkt und zwei abgeschlossenen Punkten, eine Variante des Sierpinski-Raums. Der plumpe Standard-2-Simplex ist siebenpunktig.*

Lemma 1.10. *Die stetigen Abbildungen $|f| : |\Delta^m| \rightarrow |\Delta^n|$ für monotonen $f : [m] \rightarrow [n]$ induzieren stetige Abbildungen $\overline{|f|} : \blacktriangle^m \rightarrow \blacktriangle^n$, sodass*

$$\begin{array}{ccc} |\Delta^m| & \xrightarrow{|f|} & |\Delta^n| \\ \downarrow & & \downarrow \\ \blacktriangle^m & \xrightarrow{\overline{|f|}} & \blacktriangle^n \end{array}$$

kommutiert.

Beweis. Für die Randabbildungen $|d_i|$ folgt das sofort aus der Definition der Äquivalenzrelation. Die Menge $\text{int } |\Delta^m|$ wird beschrieben durch die Menge der Punkte (x_0, \dots, x_m) , für die alle Koordinaten echt positiv sind. Diese Beschreibung ist invariant unter Addition mittlerer Koordinaten. Dies zeigt die Wohldefiniertheit der induzierten Abbildung $\overline{|s_i|} : \blacktriangle^m \rightarrow \blacktriangle^{m-1}$ für im Inneren identifizierte Punkte. Genauso argumentiert man auf den Rändern. \square

Diese Transformation liefert den kosimplizialen Raum $\blacktriangle R : \Delta \rightarrow \text{Top}, [n] \mapsto \blacktriangle^n$ der plumpen Standardsimplizes.

1.3 Geometrische Realisierung simplizialer Mengen

Wir erklären nun die geometrische Realisierung simplizialer Mengen. Der Unterschied zur geometrischen Realisierung von Simplicialkomplexen ist im Wesentlichen die Möglichkeit, Simplizes wiederzuverwenden und zu degenerieren, was zu

Identifikationen in der geometrischen Realisierung führt. Ein Fall von “Wiederverwendung” ist etwa die Realisierung der S^1 als 1-Simplex, dessen Endpunkte übereinstimmen. Degeneration bedeutet, dass niederdimensionale Simplizes auch die Rolle höherdimensionaler Simplizes übernehmen können. Wir können etwa unser Beispiel modifizieren und die S^n als n -Simplex realisieren, bei dem alle niederdimensionalen Kanten in einem Punkt zusammenfallen.

Die geometrische Realisierung von Standard- n -Simplizes haben wir gerade gesehen. Nun fordern wir, dass sich die Realisierung mit Kolimites vertrage:

$$|\operatorname{col}_i X_i| \xrightarrow{\sim} \operatorname{col}_i |X_i|. \quad (1.2)$$

Wenn dies der Fall sein soll, so müssen wir mit der Darstellung

$$X := \operatorname{col}_{\Delta^n \rightarrow X} \Delta^n$$

aus ?? auf jeden Fall setzen

$$|X| := \operatorname{col}_{\Delta^n \rightarrow X} |\Delta^n|. \quad (1.3)$$

Debei wird der Kolimes wieder über die Simplexkategorie von X gebildet, nun allerdings mit den induzierten stetigen Abbildungen aus ?? als Systemmorphis-men.

Ein Morphismus simplizialer Mengen $X \rightarrow Y$ induziert nun durch Nachschalten von $X \rightarrow Y$ einen Funktor auf den Simplexkategorien $\Delta \downarrow X \rightarrow \Delta \downarrow Y$ und damit auch auf den Kolimites eine stetige Abbildung $|X| \rightarrow |Y|$. Wir erhalten also den Funktor der geometrischen Realisierung $|\cdot| : \mathbf{sEns} \rightarrow \mathbf{Top}$.

Unsere Konstruktion erfüllt tatsächlich:

Proposition 1.11. *Der Funktor der geometrischen Realisierung simplizialer Mengen $|\cdot|$ vertauscht mit beliebigen Kolimites über kleine Indexkategorien.*

Beweis. Zu zeigen ist, dass die Bildung der Simplexkategorie mit Kolimites vertauscht, d. h. für einen Funktor $X : I \rightarrow \mathbf{sEns}$ gilt:

$$\Delta \downarrow_r \operatorname{col}_i X_i \xrightarrow{\sim} \operatorname{col}_i \Delta \downarrow_r X_i.$$

In der Funktorkategorie \mathbf{sEns} erhalten wir Bijektionen zwischen den Mengen von n -Simplizes

$$(\operatorname{col}_i X_i)_n \xrightarrow{\sim} \operatorname{col}_i (X_i)_n.$$

Diese sind mit den Morphismen in Δ verträglich. □

Wie ganz allgemein können wir den Kolimes topologischer Räume auch explizit mittels Koprodukt und Koegalisateur ausschreiben. Wir verstehen die Mengen X_n als diskrete topologische Räume und erhalten:

$$|X| \xrightarrow{\sim} \left(\bigsqcup_n X_n \times |\Delta^n| \right) / \sim$$

mit der Quotiententopologie, die durch die von

$$(x, |f|(p)) \sim (f^*x, p)$$

für alle monotonen $f : [m] \rightarrow [n]$ erzeugte Äquivalenzrelation gegeben ist.

1.4 Sparsame Realisierung durch nichtdegenerierte Simplizes

Während die Definition simplizialer Mengen und ihrer Realisierung mit Degenerationsabbildungen wie gesehen von einem formalen Standpunkt aus sehr elegant ist, ist für die konkrete Arbeit häufig eine explizitere Form der Realisierung praktischer, die “unnötige Simplizes von vornherein weglässt”.

Definition 1.12 ([?], I.2.9). Sei $X \in \mathbf{sEns}$ eine simpliziale Menge. Ein Simplex $x \in X_n$ heißt degeneriert, falls es einen Simplex $y \in X_m$ und eine surjektive monotone Abbildung $s : [n] \rightarrow [m], n > m$ gibt mit $x = s^*y$.

Andernfalls heißt ein Simplex nichtdegeneriert. Für $X \in \mathbf{sEns}$ bezeichne NX_n die Menge der nichtdegenerierten n -Simplizes von X .

Lemma 1.13 ([?], Prop. 9). Sei $X \in \mathbf{sEns}$ eine simpliziale Menge und $x \in X_n$ ein n -Simplex. Dann gibt es eine eindeutige Darstellung $x = s^*y$ für $y \in NX_m$ einen nichtdegenerierten Simplex von X und $s : [n] \rightarrow [m]$ eine surjektive monotone Abbildung.

Beweis. Ist x nichtdegeneriert, wähle $y = x$ und $s = \text{id}_{[n]}$. Andernfalls gibt es nach Definition ein y und eine Surjektion mit der gewünschten Eigenschaft. Diese sind eindeutig nach den Relationen aus 1.2, vergleiche [?], Prop. 9. \square

Wir notieren für eine solche Darstellung $x = s^*y$ auch $y = N(x)$ oder zur Bewahrung der Information über s auch $y = N_s(x)$.

Wir definieren nun die *sparsame geometrische Realisierung* einer simplizialen Menge X wie folgt:

$$\|X\| := \bigsqcup_n NX_n \times |\Delta^n| / \sim_N,$$

wobei wie gehabt NX_n die diskrete Topologie trägt und die Äquivalenzrelation erzeugt ist von

$$(x, |d_i|(p)) \sim_N (N_s(d_i^*x), |s|(p)),$$

mit der eindeutigen Darstellung Degenerierter aus 1.13. Diese Äquivalenzrelation lässt sich interpretieren als das Umgehen der mittleren Schritte in der Rechnung

$$(x, d_i p) \sim (d_i^*x, p) \sim (s^*y, p) \sim (y, |s|(p))$$

mit $y = N_s(d_i^*x)$.

Satz 1.14. *Die von der Inklusion*

$$\bigsqcup_n NX_n \times |\Delta^n| \hookrightarrow \bigsqcup_n X_n \times |\Delta^n|$$

induzierte Abbildung $\|X\| \xrightarrow{\sim} |X|$ ist ein Homöomorphismus.

Beweis. Die Abbildung existiert und ist stetig nach der universellen Eigenschaft topologischer Quotienten, denn die Äquivalenzrelation \sim umfasst \sim_N . Sie ist bijektiv, denn für die dazukommenden Punkte in degenerierten Simplizes s^*x gilt ohnehin $(s^*x, p) \sim (x, |s|(p))$. Weiter ist sie offen: Ist $U \subset \|X\|$ eine offene Teilmenge, so berechnen wir ihr Bild in $|X|$ durch das Bild ihres Urbilds V in $\bigsqcup_n NX_n \times |\Delta^n|$ unter

$$\bigsqcup_n NX_n \times |\Delta^n| \hookrightarrow \bigsqcup_n X_n \times |\Delta^n| \xrightarrow{q} |X|.$$

Bezeichne \bar{V} den Abschluss von $V \subset \bigsqcup_n X_n \times |\Delta^n|$ unter \sim -Äquivalenz. Es gilt $\bar{V} = q^{-1}(q(V))$ und wir müssen nach Definition der Quotiententopologie zeigen, dass \bar{V} offen ist. Bezeichne für x einen nichtdegenerierten Simplex von X den Schnitt von V mit dem zu x gehörigen geometrischen Simplex $|\Delta^n|$ mit V_x . Bei Übergang von V zu \bar{V} kommen dann alle Punkte (s^*x, p) mit $(x, |s|(p)) \in U_x$ hinzu. Das Urbild der offenen Menge U_x unter dem stetigen s -Kollaps $|s|$ ist dann natürlich wieder offen. \square

Beispiel 1.15. *Mit diesem Satz kann man sich geometrische Realisierungen sofort veranschaulichen. Die Realisierung einer simplizialen Menge mit einem nichtdegenerierten n -Simplex ($n \geq 1$) und einem nichtdegenerierten 0-Simplex ist etwa die n -Sphäre.*

Beispiel 1.16. *Die geometrische Realisierung mittels plumper Simplizes dieser Standard-Darstellung der S^n als simpliziale Menge liefert den Sierpinski-Raum bestehend aus einem offenen dichten und einem abgeschlossenen Punkt. Dies zeigt, dass die plumpe Realisierung für unsere Zwecke zu grob ist und sich in ?? nicht für die Übertragung der Aussagen über schwach konstruierbare Garben auf Simplicialkomplexen eignen wird.*

1.5 Iterative Konstruktion der geometrischen Realisierung

Wir geben eine weitere Interpretation der geometrischen Realisierung als iteratives Ankleben geometrischer Simplizes an ihre Ränder an und werden so insbesondere sehen, dass die geometrische Realisierung einen Hausdorffraum liefert ([?], III.1).

Bezeichne dazu $\|X^{\leq k}\| = \bigsqcup_{n=0}^k NX_n \times |\Delta^n| / \sim_N$ die geometrische Realisierung durch nichtdegenerierte Simplizes der Dimension $\leq k$. Wir erhalten Einbettungen $\|X^{\leq k}\| \hookrightarrow \|X\|$ sowie $\|X\| = \bigcup_k \|X^{\leq k}\|$, denn die Äquivalenzrelation von ganz $\|X\|$ fügt keine neuen Identifikationen auf den Teilmengen $\|X^{\leq k}\| \subset \|X\|$ hinzu.

Wir können die $\|X^{\leq k}\|$ iterativ konstruieren. Betrachte dazu die stetigen Abbildungen π_k , die uns den “ k -dimensionalen Teil” von $\|X\|$ liefern:

$$\pi_k : NX_k \times |\Delta^k| \hookrightarrow \bigsqcup_{n=0}^k NX_n \times |\Delta^n| \twoheadrightarrow \|X^{\leq k}\|.$$

Proposition 1.17 ([?], III.1, [?], I.2.3). *Sei $X \in \mathbf{sEns}$ eine simpliziale Menge. Dann ist*

$$\begin{array}{ccc} NX_k \times \partial|\Delta^k| & \hookrightarrow & NX_k \times |\Delta^n| \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \pi_k \\ \|X^{\leq k-1}\| & \hookrightarrow & \|X^{\leq k}\| \end{array}$$

ein Pushout topologischer Räume. Dabei ist die Abbildung links auf der i -ten Kante $|d_i| : |\Delta^{k-1}| \hookrightarrow \partial|\Delta^k|$ gegeben durch

$$\begin{aligned} NX_k \times |\Delta^{k-1}| &\rightarrow \|X^{\leq k-1}\| \\ (x, p) &\mapsto [(N_s(d_i^*x), |s|(p))]. \end{aligned}$$

Beweis. Die Definition der Abbildung links ist sinnvoll, da sie auf den niederdimensionalen Überschneidungskanten von $|d_i||\Delta^k|$ und $|d_j||\Delta^k|$ übereinstimmt.

Sowohl der Pushout des Diagramms als auch $\|X^{\leq k}\|$ sind Quotienten von $\bigsqcup_{n=0}^k NX_n \times |\Delta^n|$ nach gewissen Äquivalenzrelationen. Bezeichne die Einschränkung von \sim_N auf $\bigsqcup_{n=0}^k NX_n \times |\Delta^n|$ mit \sim_N^k . Die erzeugenden Relationen für \sim_N^k sind:

$$(x, |d_i|(p)) \sim (N_s(d_i^*x), |s|(p)) \quad \text{für } x \in NX_n, n \leq k.$$

Das sind für $x \in NX_n$ und $n \leq k-1$ genau die erzeugenden Relationen von \sim_N^{k-1} und für $n = k$ genau die Relationen aus der Definition des Pushouts. \square

Korollar 1.18. *Die geometrische Realisierung $|X|$ einer simplizialen Menge $X \in \mathbf{sEns}$ ist ein CW-Komplex und insbesondere ein Hausdorffraum.*

Beweis. Die vorangegangene Proposition zeigt, dass es sich um einen CW-Komplex handelt. Die Pushouts sind dabei das Ankleben von k -Zellen $D^k \cong |\Delta^k|$. Konkret zur Hausdorff-Eigenschaft: Seien $p, q \in \|X\|$, $p \neq q$. Dann gibt es ein k mit $p, q \in \|X^{\leq k}\| \setminus \|X^{\leq k-1}\|$. Somit liegt ohne Einschränkung p im Inneren eines k -Simplexes und kann ohne Probleme durch disjunkte offene Umgebungen $U_k, V_k \subset \|X^{\leq k}\|$ von Randpunkten dieses Simplexes und Punkten in anderen Simplexes getrennt werden. Wir erhalten daraus disjunkte offene Umgebungen U und V in ganz $|X|$, indem wir sie “baryzentrisch ergänzen”: Sei dazu zu jedem geometrischen Standardsimplex $|\Delta^n|$ ein ausgezeichnete Punkt z_n in seinem offenen Inneren fest gewählt (etwa das Baryzentrum). Wir setzen für $n \geq k$ induktiv

$$\begin{aligned} U_{n+1} = \{ [(y, r)] \in \|X^{\leq n+1}\| \mid & \quad y \in NX_{n+1}, \exists t \in (0, 1], w \in |\Delta^n| : \\ & (d_i^*y, w) \in U_n, r = tw + (1-t)z_y \}, \end{aligned}$$

den konvexen Abschluss zu z_y von U_n in den an U_n angrenzenden Simplexes y und dann $U = \bigcup_{n \geq k} U_n$ sowie V entsprechend. Diese Teilmengen sind nach Induktion disjunkt, offen und enthalten p bzw. q . \square

1.6 Kompakt erzeugte Hausdorffräume

Die geometrischen Realisierungen simplizialer Mengen liegen tatsächlich sogar in einer in ihren kategoriellen Eigenschaften bequemen (engl. *convenient*) Kategorie topologischer Räume, den kompakt erzeugten Hausdorffräumen.

Definition 1.19 ([?]). Ein topologischer Raum X heißt kompakt erzeugt, falls gilt: eine Teilmenge $A \subset X$ ist abgeschlossen, falls $A \cap K$ in K abgeschlossen ist für jedes Kompaktum $K \subset X$.

Bemerkung 1.20. Äquivalent dazu ist: eine Teilmenge $U \subset X$ ist offen, falls $U \cap K$ in K offen ist für jedes Kompaktum $K \subset X$.

Wir notieren volle Unterkategorie der kompakt erzeugten topologischen Räume in den topologischen Räumen mit CG und der kompakt erzeugten Hausdorffräume mit CGHaus. Die kompakt erzeugten topologischen Räume umfassen eine sehr große Klasse an relevanten topologischen Räumen, etwa CW-Komplexe (nach dem nachfolgenden Lemma 1.21) oder erstabzählbare Räume ([?], 2.2).

Für uns relevant sind die folgenden Kriterien:

Lemma 1.21. (i) Ist X ein lokal kompakter topologischer Raum, so ist X kompakt erzeugt.

(ii) Ist $p : X \rightarrow Y$ eine Quotientenabbildung (d. h. Y trägt die Finaltopologie bezüglich p) und X kompakt erzeugt, so ist auch Y kompakt erzeugt.

(iii) Ist X ein CW-Komplex, so ist X kompakt erzeugt.

Dabei heißt ein topologischer Raum *lokal kompakt* (im schwachen Sinne), falls jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt. Beachte den Unterschied zu ?? und ??.

Beweis. (i) Sei $U \subset X$ mit $U \cap K$ offen für alle $K \subset X$ kompakt. Mit der Lokalkompaktheit von X wählen wir zu jedem $x \in X$ eine kompakte Umgebung K_x und erhalten, dass $U = \bigcup_{x \in X} U \cap K_x$ offen ist als Vereinigung offener Mengen.

(ii) Sei $A \subset Y$ mit $A \cap K$ abgeschlossen für alle $K \subset Y$ kompakt. Mit der Finaltopologie auf Y gilt, dass $A \subset Y$ genau dann abgeschlossen ist, wenn $p^{-1}(A) \subset X$ abgeschlossen ist. Sei nun $\tilde{K} \subset X$ kompakt. Es ist $p^{-1}(A) \cap \tilde{K}$ abgeschlossen, denn $p(p^{-1}(A) \cap \tilde{K}) = p(\tilde{K}) \cap A$ ist abgeschlossen nach Voraussetzung ($p(\tilde{K}) \subset Y$ ist kompakt als stetiges Bild eines Kompaktums). Da X kompakt erzeugt ist, folgt nun, dass $p^{-1}(A)$ abgeschlossen ist und somit auch $A \subset Y$.

(iii) Die n -Bälle D^n und $n - 1$ -Sphären S^{n-1} sind kompakt erzeugt nach (i). Disjunkte Vereinigungen kompakt erzeugter Räume sind kompakt erzeugt. Quotienten kompakt erzeugter Räume sind kompakt erzeugt nach (ii). Da kompakte Teilmengen von CW-Komplexen nur endlich viele offene Zellen treffen, ist auch die Vereinigung über alle n -Skelette kompakt erzeugt.

□

Mit diesen Kriterien folgt sofort unser Ziel.

Korollar 1.22. *Die geometrische Realisierung $|X|$ einer simplizialen Menge $X \in \mathbf{sEns}$ ist ein kompakt erzeugter Hausdorffraum.*

Beweis. Es handelt sich um einen Hausdorffraum nach 1.18. Nach 1.21 (i) ist $\bigsqcup_n X_n \times |\Delta^n|$ kompakt erzeugt und mit 1.21 (ii) auch $|X|$. Das folgt auch aus 1.18 und 1.21 (iii). \square

Der entscheidende Grund, in der Kategorie CGHaus statt in Top zu arbeiten, ist die Existenz eines internen Hom.

Theorem 1.23 ([?], III, 2.1.2). *Die Kategorie CGHaus der kompakt erzeugten Hausdorffräume ist kartesisch abgeschlossen.*

Aus der Adjunktion $(\times Y, Y \Rightarrow)$ folgt auch die Rechtsexaktheit von Produkten in CGHaus.

Satz 1.24 ([?], III, 3). *Die geometrische Realisierung $|\cdot| : \mathbf{sEns} \rightarrow \mathbf{CGHaus}$ vertauscht mit endlichen Limites.*

Bemerkung 1.25. Entscheidend ist, dass das Produkt in Top zweier kompakt erzeugter Hausdorffräume im Allgemeinen nicht wieder kompakt erzeugt ist. Das korrekte Produkt in CGHaus heißt auch *Kelley-Produkt* und wird notiert $X \times_{Ke} Y$. Es ist gegeben durch Anwenden des Rechtsadjungierten der Inklusion $\mathbf{CG} \rightarrow \mathbf{Top}$ auf das Produkt in Top. Dieser Rechtsadjungierte $k : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{CG}$ verfeinert die Topologie eines Raumes X um alle Mengen $U \subset X$, deren Schnitte mit allen Kompakta $K \subset X$ in K offen sind, also genau um die für kompakte Erzeugtheit benötigten. Es gilt also:

$$|X \times Y| \xrightarrow{\sim} k(|X| \times |Y|).$$

Beweisskizze. ([?], III, 3) Ganz allgemein lassen sich endliche Limites als Egalisatoren endlicher Produkte darstellen. Für die Egalisatoren verweisen auf [?], III, 3.3. Für das Vertauschen mit endlichen Produkten zeigt man, dass die Aussage für Standardsimplizes gilt, es also einen Homöomorphismus $|\Delta^n \times \Delta^m| \xrightarrow{\sim} |\Delta^n| \times |\Delta^m|$ gibt, siehe [?], III, 3.4. Dann folgt die Aussage sofort aus dem Vertauschen des Produkts in CGHaus mit Kolimites als linksadjungierter Funktor des internen Hom in CGHaus (1.23):

$$\begin{aligned} |X \times Y| &\xrightarrow{\sim} |\mathrm{col}_{\Delta \downarrow X} \Delta^n \times \mathrm{col}_{\Delta \downarrow Y} \Delta^m| \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{col}_{\Delta \downarrow X} \mathrm{col}_{\Delta \downarrow Y} |\Delta^n \times \Delta^m| \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{col}_{\Delta \downarrow X} \mathrm{col}_{\Delta \downarrow Y} (|\Delta^n| \times_{Ke} |\Delta^m|) \\ &\xrightarrow{\sim} |\mathrm{col}_{\Delta \downarrow X} \Delta^n| \times_{Ke} |\mathrm{col}_{\Delta \downarrow Y} \Delta^m| \\ &\xrightarrow{\sim} |X| \times_{Ke} |Y|. \end{aligned}$$

\square

Beispiel 1.26 ([?], 3.3.29). *Ein Produkt in Top zweier kompakt erzeugter Hausdorff-Räume ist im Allgemeinen nicht wieder kompakt erzeugt. Ein Beispiel ist das Produkt $X \times Y$ mit $X = \mathbb{R} \setminus \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ mit der Teilraumtopologie und Y einem unendlichen Bouquet von Kreisen mit der Quotiententopologie von $\mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{N} = Y$.*

1.7 Geometrische Realisierung als Koende

Die Sprache der Enden und Koenden ermöglicht uns eine allgemeinere Sicht auf die geometrische Realisierung und wird sich später als nützlich erweisen, um andere Formen der geometrischen Realisierung einzuführen. Wir führen Koenden und ihre Eigenschaften ein, Enden sind dazu formal dual. Die Darstellung folgt [?].

Definition 1.27 ([?], 1.1 f.). Sei $F : C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ ein Funktor. Ein Objekt $K \in D$ mit Morphismen $\iota_c : F(c, c) \rightarrow K$ für alle $c \in C$ heißt Kokeil für F , falls für alle Morphismen $f : c \rightarrow d$ in C das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} F(d, c) & \xrightarrow{F(f, \text{id})} & F(c, c) \\ \downarrow F(\text{id}, f) & & \downarrow \iota_c \\ F(d, d) & \xrightarrow{\iota_d} & K \end{array}$$

Die Kokeile für F bilden eine Kategorie (Morphismen verträglich mit den ι_c). Ein initiales Objekt in der Kategorie der Kokeile für F (ein universeller Kokeil) heißt das Koende von F .

Ein Kokeil für einen Funktor $F : C^{\text{op}} \times C \rightarrow D^{\text{op}}$ heißt entsprechend Keil für den assoziierten Funktor $F^{\text{op}} : C \times C^{\text{op}} \rightarrow D$ und ein universeller Keil das Ende des Funktors F^{op} . Wir notieren häufig das Koende von F als Integral:

$$\int^{c \in C} F(c, c).$$

Wir können Koenden als Koegalisateur von Koproducten darstellen:

Lemma 1.28 ([?], 1.14). Sei $F : C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ ein Funktor und K sein Koende. Dann ist das folgende Diagramm ein Koegalisateur:

$$\bigsqcup_{f: c \rightarrow d} F(d, c) \begin{array}{c} \xrightarrow{F(f, \text{id})} \\ \xrightarrow{F(\text{id}, f)} \end{array} \bigsqcup_{c \in C} F(c, c) \rightarrow K.$$

Beweis. Der Morphismus in das Koende ist von den $\iota_c : F(c, c) \rightarrow K$ induziert, die Morphismen des Egalisators durch die angegebenen Morphismen auf den Komponenten $F(d, c) \xrightarrow{F(f, \text{id})} F(c, c)$ und $F(d, c) \xrightarrow{F(\text{id}, f)} F(d, d)$. Die universellen Eigenschaften, die den Koegalisateur und das Koende definieren, sind dann identisch. \square

Damit ist klar, dass Koenden Kolimites über eine geeignete Kategorie sind. Wir machen diese Aussage präzise:

Definition 1.29. Sei C eine Kategorie. Die *Unterteilungskategorie* (engl. *subdivision category*) $\text{Sub}(C)$ von C besteht aus Objekten X^{\S} und f^{\S} für alle Objekte $X \in C$ und Morphismen $f : X \rightarrow Y$ in C . Die Morphismen von $\text{Sub}(C)$ sind die Identitäten sowie für $f : X \rightarrow Y$ Pfeile

$$X^{\S} \leftarrow f^{\S} \rightarrow Y^{\S}.$$

Proposition 1.30 ([?], IX.5.1, [?], 1.13). *Es gibt einen Funktor $[C^{\text{op}} \times C, D] \rightarrow [\text{Sub}(C) \rightarrow D]$, $F \mapsto \hat{F}$, der eine Äquivalenz von Kategorien zwischen der Kategorie der Kokeile für F und der Kategorie der Kokegel für \hat{F} induziert. Insbesondere gilt*

$$\int^{c \in C} F(c, c) \xrightarrow{\sim} \text{col } \hat{F}.$$

Beweis. Wir erhalten \hat{F} durch die folgenden Zuordnungen für $f : c \rightarrow d$ einen Morphismus in C und c, d Objekte in C :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Sub}(C) & & c^{\S} & \xleftarrow{\quad} & f^{\S} & \xrightarrow{\quad} & d^{\S} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ D & & F(c, c) & \xleftarrow[\hat{F}(f, \text{id})]{} & F(d, c) & \xrightarrow{F(\text{id}, f)} & F(d, d). \end{array}$$

Diese Zuordnung $F \mapsto \hat{F}$ ist selbst funktoriell: Transformationen $F \Rightarrow G$ induzieren Transformationen $\hat{F} \Rightarrow \hat{G}$. Kokeile für F und Kokegel für \hat{F} bestehen nun beide aus einem Objekt K mit Morphismen $\iota_c : F(c, c) \rightarrow K$ für $c \in C$ und $\iota_f : F(d, c) \rightarrow K$ für $f : c \rightarrow d$, sodass die drei Morphismen $F(d, c) \rightarrow K$ übereinstimmen:

$$\iota_f = \iota_c \circ F(f, \text{id}) = \iota_d \circ F(\text{id}, f).$$

Ein Morphismus von Kokeilen für F und von Kokegeln für \hat{F} ist jeweils ein mit den angegebenen Inklusionen ι_c, ι_f verträglicher Morphismus der Objekte $K \rightarrow K'$. Koenden für F und Kolimites für \hat{F} sind die initialen Objekte der Kategorien von Kokeilen für F bzw. Kokegeln für \hat{F} . \square

Korollar 1.31. *Koenden vertauschen mit Kolimites über die sie definierenden Funktoren, es gilt für ein System von Funktoren $F_i : C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$*

$$\text{col}_i \int^c F_i(c, c) \xrightarrow{\sim} \int^c \text{col}_i F_i(c, c),$$

wenn die beteiligten Terme definiert sind.

Beweis. Unsere Beschreibung von Koenden als Kolimites und das Vertauschen von Kolimites reduzieren die Aussage auf die Kostetigkeit von $F \mapsto \hat{F}$. Dies ist klar, da Kolimites in Funktorkategorien objektweise berechnet werden. \square

Bemerkung 1.32 ([?], 1.12). Eine andere Beschreibung verwendet statt der Unterteilungskategorie $\text{Sub}(C)$ die verdrehte Pfeilkategorie $\text{TW}(C)$ von C , deren Objekte Morphismen $f : c \rightarrow c'$ in C und Morphismen zwischen $f : c \rightarrow c'$ und $g : d \rightarrow g'$ kommutative Quadrate

$$\begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{h} & d \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ c' & \xleftarrow{k} & d'. \end{array}$$

Wir erhalten eine Äquivalenz der Kategorien von Kokegeln über Funktoren $F : \text{TW}(C) \rightarrow D$ bzw. über Funktoren $G : \text{Sub}(C) \rightarrow D$: beide bestehen

aus Morphismen $\text{id}_c \rightarrow K$ bzw. $c^\S \rightarrow K$, die mit $f \rightarrow \text{id}_c, f \rightarrow \text{id}_{c'}$ bzw. $f^\S \rightarrow c^\S, f^\S \rightarrow c'^\S$ kompatibel sein sollen. Die weiteren Kompatibilitäten für einen Kokegel über $F : \text{TW}(C) \rightarrow D$, die von $f \rightarrow g$ gefordert werden, sind bereits automatisch erfüllt, denn mit den Bezeichnungen wie im Diagramm gilt etwa, dass die Kompatibilität $f \rightarrow g \rightarrow \text{id}_d \rightarrow K = f \rightarrow \text{id}_{d'} \rightarrow K$ diejenige zu $k \circ g : d \rightarrow c'$ ist. Der Morphismus $f \rightarrow g$ in $\text{TW}(C)$ fordert Kompatibilitäten für die Inklusionen von $\text{id}_c, \text{id}_d, \text{id}_{d'}$ und $\text{id}_{c'}$ nach K . Diese entsprechen jeweils Kompatibilitäten zu den Kompositionen $g \circ h, k \circ g$ und $k \circ g \circ h$ im obigen Diagramm.

Der Funktor $[C^{\text{op}} \times C, D] \rightarrow [\text{TW}(C), D]$ ordnet dann einem Funktor F den Funktor

$$\begin{aligned} (f : c \rightarrow d) &\mapsto F(d, c), \\ (f \rightarrow g) &\mapsto F(h, k) \end{aligned}$$

mit Vorschalten von h und Nachschalten von k für einen Morphismus $f \rightarrow g$ wie im obigen Diagramm zu.

Sind $F : C^{\text{op}} \rightarrow D$ und $G : C \rightarrow D$ Funktoren und ist D eine monoidale Kategorie (Schmelzkategorie mit universellen Verschmelzungen), so definieren sie einen Funktor

$$\begin{aligned} C^{\text{op}} \times C &\rightarrow D \times D \rightarrow D, \\ (a, b) &\mapsto (Fa, Gb) \mapsto Fa \otimes Gb. \end{aligned}$$

Das Koende über diesen Funktor heißt das *Tensorprodukt* $F \otimes G$ von F und G .

Wir erinnern an die Darstellung der geometrischen Realisierung mit Koegalisa-
tor und Koproduct:

$$|X| \xrightarrow{\sim} \left(\bigsqcup_n X_n \times |\Delta^n| \right) / \sim$$

mit dem Quotienten nach der Äquivalenzrelation

$$(x, |f|(p)) \sim (f^*x, p)$$

für alle monotonen $f : [m] \rightarrow [n]$. Das ist gerade der Koegalisa-
tor

$$\bigsqcup_{f:[n] \rightarrow [m]} X_n \times |\Delta^m| \xrightarrow[\text{id} \times |f|]{f^* \times \text{id}} \bigsqcup_{[n]} X_n \times |\Delta^n| \rightarrow |X|$$

aus 1.28 und mithin, falls Top mit ihrer kartesischen Schmelzstruktur durch
Produkte versehen ist, das Tensorprodukt der Funktoren

$$\begin{aligned} X : \Delta^{\text{op}} &\rightarrow \text{Ens} \rightarrow \text{Top} & \text{und} \\ R : \Delta &\rightarrow \text{Top}, & [n] \mapsto |\Delta^n|, \end{aligned}$$

wobei die Mengen X_n als diskrete topologische Räume aufgefasst werden ([?],
III.1):

$$|X| = X \otimes R.$$

Bemerkung 1.33. Rückblickend halten wir fest, dass während unsere durch die “Kostetigkeitseigenschaft” für die Simplexkategorie $\Delta \downarrow_r X$ (Gl. 1.3, 1.2) definierte geometrische Realisierung in dieser Situation elegant ist, sie auf einer konkreten Eigenschaft der Situation simplizialer *Mengen* beruht, die wir bei allgemeineren simplizialen Objekten nicht mehr gegeben haben. Konkret werden wir im nächsten Abschnitt einen gewissen Begriff einer Wirkung einer Kategorie auf einer anderen Kategorie erklären (Koexponentiale, siehe ??). Die Besonderheit simplizialer Mengen beruht nun darauf, dass sich die Wirkung von Ens auf Top $(X_n, |\Delta^n|) \mapsto \bigsqcup_{X_n} |\Delta^n|$ als von der Wirkung von Ens auf $s\text{Ens}$, $(X_n, \Delta^n) \mapsto \bigsqcup_{X_n} \Delta^n \cong \left\{ \Delta^n \xrightarrow{x} X \mid x \in X_n \right\}$ induziert darstellen lässt, was uns zum Begriff der Simplexkategorie von X geführt hat. Bei Wirkungen wie von Top auf Top durch das kartesische Produkt wird es nicht mehr möglich sein, die $\Delta^n \rightarrow X$ aus der Simplexkategorie als topologischen Raum aufzufassen. Unsere Beschreibung der geometrischen Realisierung als Koende ist also die für allgemeinere Kontexte richtige Beschreibung.

1.8 Der (Ko-) Enden-Kalkül

Die Sprache der (Ko-) Enden besitzt eine Reihe an Verträglichkeits- und Umformungseigenschaften, die sie zu einem mächtigen Werkzeug für eine Vielzahl formaler Rechnungen in Anwendungen der Kategorientheorie machen (für Beispiele siehe [?]). Im folgenden werden einige Umformungsregeln dieses Kalküls¹ zusammengestellt.

Lemma 1.34 (Funktorialität, [?]). *Sind $F \xRightarrow{\eta} G \xRightarrow{\tau} H$ Transformationen von Funktoren $F, G, H : C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$, deren Koenden existieren, so sind die auf den Koenden induzierten Morphismen*

$$\int (\tau \circ \eta), \int \tau \circ \int \eta : \int^c F(c, c) \rightarrow \int^c H(c, c)$$

durch die Transformationen auf den Koenden gegeben und damit verträglich:
 $\int (\tau \circ \eta), \int \tau \circ \int \eta.$

Beweis. Dies folgt sofort aus der Eindeutigkeit dieses Morphismus in der universellen Definition von Koenden. \square

Lemma 1.35 (Fubini, [?], 1.9, [?], IX, 8). *Sei $F : C^{\text{op}} \times C \times D^{\text{op}} \times D \rightarrow E$ ein Funktor, für den die Koenden $\int^c F(c, c, d, d')$ für alle $d, d' \in D$ existieren.*

Dann ist

$$\int^{c \in C} F(c, c, \cdot, -) : D^{\text{op}} \times D \rightarrow E$$

ein Funktor und es gilt

$$\int^{d \in D} \int^{c \in C} F(c, c, d, d) \xrightarrow{\sim} \int^{(c, d) \in C \times D} F(c, c, d, d),$$

¹Bei der Übersetzung aus dem Englischen geht leider die Analogie zu den Regeln der Differentiations- und Integrationstheorie verloren.

falls eines der beiden Koenden existiert, wobei rechts F als Funktor $F : (C \times D)^{\text{op}} \times (C \times D)$ aufgefasst wird.

Bemerkung 1.36. Formal fließt in die Aussage der *Parameter-Satz* ein, der besagt, dass Koenden mit der Adjunktion $[C^{\text{op}} \times C \times D, E] \xrightarrow{\sim} [C^{\text{op}} \times C, [D, E]]$ verträglich sind, also Koenden in Funktorkategorien objektweise berechnet werden können ([?], IX, 7). Dies folgt sofort aus der Darstellung von Koenden als Kolimites 1.30.

Beweis. Sei $K : D^{\text{op}} \times D \rightarrow E$ ein Kokeil für $F : C^{\text{op}} \times C \rightarrow [D^{\text{op}} \times D, E]$ in der Funktorkategorie $D^{\text{op}} \times D \rightarrow E$ und $L(K)$ ein Kokeil für K . Auch solche iterierten Kokeile $L(K)$ bestehen aus Morphismen $F(c, c, d, d) \rightarrow L(K)$ für alle c, d als Komposition von $F(c, c, \cdot, \cdot) \Rightarrow K$ ausgewertet auf $(d, d) \in D^{\text{op}} \times D$ mit $K(d, d) \rightarrow L(K)$. Sie erfüllen die Kommutativitätseigenschaft von Kokeil-Quadraten für alle Morphismen der Form (f, id_d) in $C \times D$ (die Transformation aus der Kokeil-Eigenschaft von K ausgewertet in $(d, d) \in D^{\text{op}} \times D$) sowie (id_c, g) in $C \times D$ (durch Vorschalten der zur Transformation $F(c, c, \cdot, \cdot) \Rightarrow K$ gehörigen Morphismen vor das Kokeil-Quadrat von $L(K)$).

Nach denselben Argumenten definiert ein Kokeil M für $F : (C \times D)^{\text{op}} \times (C \times D)$ einen iterierten Kokeil: Mit der Unterteilungskategorie können wir einen iterierten Kokeil “sparsam” angeben, indem wir die inneren Kokeile nicht für alle $(d, d') \in D^{\text{op}} \times D$, sondern nur für Diagonalelemente $(d, d) \in D^{\text{op}} \times D$ sowie Morphismenobjekte $(d', d) \in D^{\text{op}} \times D$ für einen Morphismus $f : d \rightarrow d'$ angeben. Der iterierte Kokeil ist dadurch nach 1.30 vollständig festgelegt. Nun ist M zunächst wegen der Kommutativität von

$$\begin{array}{ccc} F(c', c, d, d) & \longrightarrow & F(c, c, d, d) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(c', c', d, d) & \longrightarrow & M \end{array}$$

ein (d, d) -Kokeil und dann durch Setzen der Inklusionen $F(c, c, d', d) \rightarrow M$ als Komposition $F(c, c, d', d) \rightarrow F(c, c, d', d') \rightarrow M = F(c, c, d', d) \rightarrow F(c, c, d, d) \rightarrow M$ wegen der Kommutativität von

$$\begin{array}{ccccc} F(c', c, d', d) & \xrightarrow{\hspace{4cm}} & F(c, c, d', d) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ & & F(c, c, d, d) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ F(c', c', d', d) & \longrightarrow & F(c', c', d', d') & \longrightarrow & M \end{array}$$

auch ein (d', d) -Morphismenkokeil. Klarerweise ist dann auch M ein iterierter Kokeil über sich selbst als (d, d) - und (d', d) -Kokeil.

Morphismen von Kokeilen entsprechen nun Morphismen iterierter Kokeile und damit entsprechen sich auch Koenden alias die initialen Objekte der beiden Kategorien. \square

Ein konzeptionellerer Beweis benutzt die Darstellung von Koenden als Kolimites aus 1.30.

Alternativer Beweis. Der Isomorphismus von Kategorien $\text{TW}(C \times D) \xrightarrow{\sim} \text{TW}(C) \times \text{TW}(D)$ ist verträglich mit dem Funktor $F \rightarrow \hat{F}$ aus 1.30:

$$\begin{array}{ccc} [(C \times D)^{\text{op}} \times (C \times D), E] & \xrightarrow{F \mapsto \hat{F}} & [\text{TW}(C \times D), E] \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ [C^{\text{op}} \times C, [D^{\text{op}} \times D, E]] & \longrightarrow & [\text{TW}(C), [\text{TW}(D), E]], \end{array}$$

wobei der untere Funktor gegeben ist durch

$$[C^{\text{op}} \times C, [D^{\text{op}} \times D, E]] \rightarrow [\text{TW}(C), [D^{\text{op}}, \times D, E]] \rightarrow [\text{TW}(C), [\text{TW}(D), E]].$$

Die Darstellung iterierter Koenden als Produkt-Koenden folgt dann direkt aus der Darstellung iterierter Kolimites als Produkt-Kolimites:

$$\text{col}_{I \times J} F \xrightarrow{\sim} \text{col}_I \text{col}_J \tilde{F},$$

falls $F \mapsto \tilde{F}$ unter dem Exponentialgesetz $[I \times J, C] \xrightarrow{\sim} [I, [J, C]]$. \square

Definition 1.37. Sei $F : C \rightarrow D$ ein Funktor. F heißt *stetig*, falls er mit Limites über kleine Kategorien vertauscht. F heißt *kostetig*, falls er mit Kolimites über kleine Kategorien vertauscht.

Lemma 1.38 (Koenden und kostetige Funktoren, [?], 1.16). *Ist $F : D \rightarrow E$ ein kostetiger Funktor und $T : C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ ein Funktor, dann ist der natürliche Morphismus*

$$F \int^c T(c, c) \xrightarrow{\sim} \int^c F \circ T(c, c),$$

ein Isomorphismus, wann immer eines der beiden Koenden existiert.

Beweis. Das folgt direkt aus unserer Beschreibung von Koenden als Kolimites in 1.28. \square

Bemerkung 1.39. Das wichtigste Beispiel für diesen Fall ist der Hom-Funktor. Praktisch nach Definition von Limes und Kolimes sind $D(d, \cdot) : D \rightarrow \text{Ens}$ und $D(\cdot, d) : D^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ stetig. Wir erhalten für $F : C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$:

$$\begin{aligned} D(d, \int_c F(c, c)) &\xrightarrow{\sim} \int_c D(d, F(c, c)) \\ D(\int_c F(c, c), d) &\xrightarrow{\sim} \int_c D(F(c, c), d). \end{aligned}$$

Lemma 1.40 (Transformationen als Ende, [?], 1.18). *Seien $F, G : C \rightarrow D$ zwei Funktoren. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$[C, D](F, G) \xrightarrow{\sim} \int_c D(Fc, Gc).$$

Beweis. Transformationen $F \Rightarrow G$ sind genau diejenigen Tupel aus $\prod_c D(Fc, Gc)$, für die für jedes $f : c \rightarrow d$ in C die Bilder rechts unten im Diagramm übereinstimmen:

$$\begin{array}{ccc} & D(Fc, Gc) & \\ & \downarrow Gf \circ & \\ D(Fd, Gd) & \xrightarrow{\circ Ff} & D(Fc, Gd) \end{array} \quad .$$

Damit ist $[C, D](F, G)$ der Egalisator aus der Dualisierung von 1.28 und folglich das angegebene Ende. \square

Neben dem Fubini-Satz für Enden gibt es eine weitere bemerkenswerte Analogie zu Integralen. Aus der Integrationstheorie ist die Formel

$$\int_X f d\delta_x = f(x)$$

für δ_x das Diracmaß zum Punkt $x \in X$ bekannt. Im Koendenkalkül kommt der Yoneda-Einbettung die Rolle des Diracmaßes zu:

Proposition 1.41 (Dichteformel, [?], 2.1). *Seien $F : C \rightarrow \mathbf{Ens}$ und $G : C^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$ Funktoren. Dann gibt es eine Isotransformation von Funktoren $C \rightarrow \mathbf{Ens}$*

$$F \xrightarrow{\sim} \int^c F(c) \times C(c, \cdot)$$

sowie von Funktoren $C^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$

$$G \xrightarrow{\sim} \int_c G(c) \times C(\cdot, c).$$

Bemerkung 1.42. Die Aussage trägt in [?], 2.1, den sehr treffenden Namen *Ninja Yoneda-Lemma*.

Beweis. Dies folgt aus dem Yoneda-Lemma und unseren schon bekannten Rechenregeln, wir zeigen die erste Aussage. Seien dazu $F, G : C \rightarrow \mathbf{Ens}$ Funktoren,

dann gilt:

$$\begin{aligned}
& [C, \text{Ens}] \left(\int^c F(c) \times C(c, \cdot), G \right) \\
& \xrightarrow[1.40]{\sim} \int_d \text{Ens} \left(\int^c F(c) \times C(c, d), Gd \right) \\
& \xrightarrow[1.38]{\sim} \int_d \int_c \text{Ens}(F(c) \times C(c, d), Gd) \\
& \xrightarrow[1.35]{\sim} \int_c \int_d \text{Ens}(F(c) \times C(c, d), Gd) \\
& \xrightarrow[\text{int.Hom}]{\sim} \int_c \int_d \text{Ens}(C(c, d), Fc \Rightarrow Gd) \\
& \xrightarrow[1.40]{\sim} \int_c [C, \text{Ens}](\text{Ens}(C(c, \cdot), Fc \Rightarrow G \cdot)) \\
& \xrightarrow[\text{Yon.}]{\sim} \int_c (Fc \Rightarrow Gc) \\
& \xrightarrow{\sim} \int_c \text{Ens}(Fc, Gc) \\
& \xrightarrow[1.40]{\sim} [C, \text{Ens}](F, G),
\end{aligned}$$

was mit dem “Yoneda-Lemma für Cat” die Aussage zeigt. \square

Bemerkung 1.43. Wie weit die Analogie zwischen Integralen und (Ko-) Enden reicht, ist mir nicht bekannt. Sie ist vermutlich neben den analogen Eigenschaften (Fubini, Dichteformel) durch die Konstruktion von Koenden als direkte Summen von Produkten zweier Objekte (analog zu Riemann- bzw. Lebesgue-Summen in der Maßtheorie) inspiriert.² Die Frage ist, inwiefern maßtheoretische Aussagen eine direkte Übersetzung in die Sprache der (Ko-) Enden haben. Das folgende Beispiel beleuchtet dies nur bedingt, ist aber eine schöne Anwendung der Dichteformel.

Beispiel 1.44. *Nach der Verträglichkeit des Integrals mit Verwandtschaft ([?], 1.5.19) ist der Integraloperator $(f, \mu) \mapsto \int f \mu$ auf einem Koende definiert. Bezeichne dazu \mathcal{M} die Kategorie der Messräume (Mengen mit σ -Algebra) und M_X die Menge der Maße auf einem Messraum X . Das Integral ist dann eine Paarung $M_X \times \mathcal{M}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ (der Maßraum \mathbb{R} links wie üblich versehen mit der Borel-Algebra), für die die beiden Wirkungen einer messbaren Abbildung $\Phi : X \rightarrow Y$ durch Vorschalten bzw. Bildmaß übereinstimmen:*

$$\int (f \circ \Phi) \mu = \int f \Phi_*(\mu).$$

Somit ist der Integraloperator definiert auf dem Koende

$$\int^{X \in \mathcal{M}} M_X \times \mathcal{M}(X, \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} M_{\mathbb{R}}$$

²Vergleiche hierzu die Diskussion in <https://mathoverflow.net/questions/239326/why-do-we-denote-coends-with-integral-notation-beyond-fubinis-theorem>.

nach der Dichteformel. Dies ist die Aussage, dass es wegen

$$\int f \mu = \int (\text{id}_{\mathbb{R}} \circ f) \mu = \int \text{id}_R f_*(\mu)$$

reicht, die Identitätsfunktion auf \mathbb{R} bezüglich allen Maßen auf \mathbb{R} integrieren zu können.

1.8.1 Angereicherte Kategorien

In der ursprünglichen Definition einer Kategorie tragen die Morphismen $C(x, y)$ die Struktur einer Menge. Der Wunsch, Begriffe wie “die Summe zweier Morphismen” oder “der Nullmorphimus” aus der Kategorie der R -Moduln auch kategorientheoretisch zu erfassen, brachte uns zum Begriff der additiven Kategorien, bei denen Morphismenmengen abelsche Gruppen sind und Funktoren Gruppenhomomorphismen auf den Morphismengruppen induzieren. Diese Konstruktion möchten wir auch für Kategorien zur Verfügung stehen haben, bei denen die Morphismenmengen eine andere Struktur tragen (etwa die eines topologischen Raums) oder gar keine Mengen sind, sondern Objekte einer anderen Kategorie V . Solche Kategorien bezeichnet man als über V angereicherte (engl. *enriched*) Kategorien. Wir imitieren die herkömmliche Definition von Kategorien:

Definition 1.45 (Angereicherte Kategorie). Sei V eine monoidale Kategorie (Schmelzkategorie mit universellen Verschmelzungen). Eine über V angereicherte Kategorie C (V -Kategorie) besteht aus:

1. einer Klasse von Objekten $\text{Ob}(C)$
2. für jedes Paar von Objekten (x, y) ein Objekt $C(x, y) \in V$
3. einer Komposition $C(x, y) \otimes C(y, z) \rightarrow C(x, z)$
4. für jedes Objekt $x \in \text{Ob}(C)$ einem Morphismus in V $\text{id}_x : I \rightarrow C(x, x)$ für I die universelle 0-Verschmelzung,

sodass die Komposition assoziativ ist (bezüglich des eindeutigen Morphismus $C(w, x) \otimes (C(x, y) \otimes C(y, z)) \xrightarrow{\sim} (C(w, x) \otimes C(x, y)) \otimes C(y, z)$) und verträglich mit den Identitäten (bezüglich der eindeutigen Morphismen $C(x, y) \otimes I \xrightarrow{\sim} C(x, y)$ und $I \otimes C(x, y) \xrightarrow{\sim} C(x, y)$).

Ein Funktor zwischen V -Kategorien $F : C \rightarrow D$ ist eine Zuordnung auf Objekten $F : c \mapsto Fc$ zusammen mit Morphismen $C(x, y) \rightarrow D(Fx, Fy)$ in V .

Beispiel 1.46. Eine Kategorie ist eine über Ens angereicherte Kategorie bezüglich der kartesischen monoidalen Struktur auf Ens . Eine Kategorie mit additiver Struktur ist eine über Ab angereicherte Kategorie bezüglich des Tensorprodukts auf Ab . Jede monoidale Kategorie mit adjungiertem internem Hom (monoidale geschlossene Kategorie) V ist eine V -Kategorie über sich selbst.

In einer monoidalen geschlossenen Kategorie V haben wir die Adjunktion

$$V(a \otimes b, c) \xrightarrow{\sim} V(a, V(b, c))$$

mit $V(b, c) = (b \Rightarrow c)$ dem internen Hom-Objekt. Das Objekt $a \otimes b$ ist dann ein darstellendes Objekt für den Funktor $c \mapsto V(a, V(b, c))$ und heißt manchmal auch Koexponential (engl. *copower*) von a und b . Wir verallgemeinern diese Situationen auf Koexponentiale in angereicherten Kategorien:

Definition 1.47. Sei C eine V -Kategorie. Ist $x \in C$ ein darstellendes Objekt für den Funktor $c \mapsto V(v, C(b, c))$ mit $v \in V, b \in C$, gilt also

$$C(x, c) \xrightarrow{\sim} V(v, C(b, c))$$

natürlich in $c \in C$, so heißt $x = v \odot b$ das Koexponential von v und b .

In diesem Fall nennt man die Kategorie C auch *tensoriert über V* .

Beispiel 1.48. Jede Kategorie mit beliebigen Koproducten hat Koexponentiale über \mathbf{Ens} . Mit $V \odot B = \bigsqcup_V B$ gilt:

$$C(V \odot B, C) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Ens}(V, C(B, C)).$$

Wir können nun auch die geometrische Realisierung in der Sprache angereicherter Kategorien formulieren. Ist C eine V -Kategorie mit Koexponentialen und sind Funktoren

$$\begin{array}{ccc} R : \Delta & \rightarrow C & \text{und} \\ X : \Delta^{\text{op}} & \rightarrow V & \end{array}$$

gegeben, so erklären wir die geometrische Realisierung von X als das Koende über den Funktor

$$\begin{aligned} \Delta^{\text{op}} \times S &\rightarrow C, \\ [n], [m] &\mapsto X[n] \odot R[m]. \end{aligned}$$

Der Fall simplizialer Mengen ist $C = \mathbf{Top}$ und $V = \mathbf{Ens}$ mit dem kanonischem Koexponential.

Bemerkung 1.49. In dieser Formulierung ist auch klar, dass eine Transformation $R \Rightarrow \bar{R}$ einen Morphismus der Koenden $R \otimes X \rightarrow \bar{R} \otimes X$ induziert. Konkret erhalten wir aus unserem Morphismus kosimplizialer Räume $|\Delta| \rightarrow \blacktriangle$ also stetige Abbildungen zwischen den geometrischen Realisierungen $|X| \rightarrow \blacktriangle|X|$.