0.1 Simpliziale Garben

Die Beschreibung der geometrischen Realsierung als Tensorprodukt von Funktoren eröffnet uns eine Reihe weiterer geometrischer Realisierungen, die diejenige simplizialer Mengen verallgemeinern.

Zunächst stellen wir fest, dass wir in unserer Konstruktion simpliziale Mengen immer als diskrete simpliziale topologische Räume betrachtet haben, und die Diskretheit genauso gut auch fallen lassen können. Wir erhalten die geometrische Realisierung $|X| = X \otimes R$ eines simplizialen topologischen Raums $X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Top}$.

Beispiel 0.1. *Wir betrachten den simplizialen topologischen Raum* $X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Top}$*, den wir aus dem (kombinatorischen) Standard-1-Simplex* Δ^1 *erhalten, indem wir disjunkte Vereinigungen von Punkten durch disjunkte Vereinigungen von Intervallen* $I = [0, 1]$ *mit von den Identitäten induzierten Abbildungen ersetzen. Offenbar ist die geometrische Realiserung das Produnkt* $I \times |\Delta^1|$*. Ersetzen wir* X_0 *wieder durch zwei Punkte* $0, 1$ *mit beliebigen Degenerationen, so erhalten wir eine zu einer Kreisscheibe verdickte Linie zwischen den beiden Punkten als Realisierung. Ersetzen wir die höheren* $X_n, n \geq 2$ *ebenfalls wieder durch Punkte mit beliebigen Randabbildungen, so sorgen deren Identifikationen dafür, dass die geometrische Realisierung wieder* $|\Delta^1|$ *wird.*

Weiter verallgemeinert die Konstruktion auch auf Diagrammkategorien. Ist I eine kleine Kategorie und $X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Top}^I$ ein simpliziales I-System topologischer Räume, so erhalten wir eine geometrische Realisierung $|X| = X \otimes R$ von X, wenn wir $R : \Delta \to \mathrm{Top} \to \mathrm{Top}^I$ mittels des Funktors der konstanten Darstellung auf die Diagrammkategorie fortsetzen. Insbesondere erhalten wir eine geometrische Realisierung für die Kategorie der Paare topologischer Räume mit stetiger Abbildung, d. h. die Diagrammkategorie Top^I für I die von $\{\bullet \to \bullet\}$ erzeugte Kategorie. Uns interessiert der Fall von Garben:

Satz 0.2. *Sei* $I = \{\bullet \to \bullet\}$, $X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Top}^I$ *ein simpliziales Paar topologischer Räume mit stetiger Abbildung, für die* $X_n : E_n \to Y_n$ *étale ist für alle* $[n]$*. Dann ist auch die geometrische Realisierung* $|X| : |E| \to |Y|$ *étale.*

Beweis. Die Realisierung ist die Abbildung $|E| = \coprod_n E_n \times |\Delta^n|/\sim \to |Y| = \coprod_n Y_n \times |\Delta^n|/\sim$, die von den $X_n : E_n \to Y_n$ induziert wird. Sind die $X_n : E_n \to Y_n$ étale, so ist die Abbildung auf den Koprodukten étale und es reicht zu bemerken, dass die Wirkung von $f : [n] \to [m]$ auf den Koprodukten verträglich ist nach Definition eines Funktors nach Top^I. □

In die Sprache der Garben zurückübersetzt bedeutet das, dass wir eine geometrische Realisierung erklärt haben für simpliziale Garben über topologischen Räumen $X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$:

$$E_n \in \mathrm{Ens}_{/Y_n} \qquad \rightsquigarrow \qquad |E| \in \mathrm{Ens}_{/|Y|}\,.$$

Man beachte, dass Morphismen étaler Top^I den "Morphismen" in $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$ entsprechen, während sonst häufig mit Komorphismen gearbeitet wird.

0.1.1 Die Dualität von Nerv und Realisierung

Wir suchen Rechtsadjungierte für unsere geometrischen Realisierungen. Für die Realisierung simplizialer Mengen gelingt uns das einfach.

Satz 0.3. *Der Funktor der singulären Ketten* $S : \mathrm{Top} \to \mathrm{s\,Ens}$, $SY = \mathrm{Top}(R\,\cdot, Y) : [n] \mapsto \mathrm{Top}(|\Delta^n|, Y)$ *ist rechtsadjungiert zur geometrischen Realisierung* $|\cdot| : \mathrm{s\,Ens} \to \mathrm{Top}$.

Beweis. Die Rand- und Degenerationsabbildungen von SY sind für $f : [n] \to [m]$ gegeben durch Vorschalten von $|f| : |\Delta^n| \to |\Delta^m|$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\mathrm{Top}(|X|, Y) &= \mathrm{Top}(\mathrm{col}_{\Delta\downarrow_{\mathrm{r}} X}\, |\Delta^n|, Y) \\
&\xrightarrow{\sim} \mathrm{col}_{\Delta\downarrow_{\mathrm{r}} X}\, \mathrm{Top}(|\Delta^n|, Y) \\
&\xrightarrow{\sim} \mathrm{col}_{\Delta\downarrow_{\mathrm{r}} X}\, \mathrm{s\,Ens}(\Delta^n, \mathrm{Top}(R\,\cdot, Y)) \\
&\xrightarrow{\sim} \mathrm{s\,Ens}(\xrightarrow{\sim} \mathrm{col}_{\Delta\downarrow_{\mathrm{r}} X}\, \Delta^n, \mathrm{Top}(R\,\cdot, Y)) \\
&\xrightarrow{\sim} \mathrm{s\,Ens}(X, SY)
\end{aligned}$$

mit der Definition der geometrischen Realisierung im ersten Schritt (Gl. **??**), der Verträglichkeit von $\mathrm{Hom} : C^{\mathrm{op}} \times C \to \mathrm{Ens}$ mit Limites im zweiten und vierten Schritt, unserer Bestimmung der n-Simplizes als Morphismenmenge (Gl. **??**) im dritten Schritt und unserer Beschreibung einer simplizialen Menge als Kolimes über ihre Simplexkategorie (**??**) im letzten Schritt. □

Während dieses Argument wieder ein sehr anschauliches ist, möchten wie wie in **??** erklärt, unser Argument mit den Begriffen und Techniken von Koenden führen, um es automatisch verallgemeinern zu können. Wir geben hier noch einmal die direkte Übersetzung obigen Beweises in die Sprache der Koenden an, und dann sofort die Verallgemeinerung.

Beweis. ([**?**], 3.2) Wir berechnen mit den Regeln des Koenden-Kalküls:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Top}(|X|, Y) &= \mathrm{Top}\left(\int^{[n]} X[n] \times R[n], Y\right) \\
&\xrightarrow[\textbf{??}]{\sim} \int_{[n]} \mathrm{Top}\big(X[n] \times R[n], Y\big) \\
&\xrightarrow[\textbf{??}]{\sim} \int_{[n]} \mathrm{Ens}\big(X[n], \mathrm{Top}(R[n], Y)\big) \\
&\xrightarrow[\textbf{??}]{\sim} [\Delta^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]\big(X, \mathrm{Top}(R\,\cdot, Y)\big) \\
&= \mathrm{s\,Ens}(X, SY).
\end{aligned}$$

□

Theorem 0.4 (Allgemeine Nerv-Realisierungs-Dualität, [**?**], 3.2)**.** *Seien C eine V-Kategorie mit Koexponentialen und ein Funktor $R : S \to C$ gegeben. Dann gibt es eine Adjunktion* $(|\cdot|, N)$

$$C \underset{N}{\overset{|\cdot|}{\rightleftarrows}} [S^{\mathrm{op}}, V]$$

mit

$$\begin{aligned} |\cdot| :& X \mapsto \int^s X(s) \odot R(s) \qquad \textit{und} \\ N :& \, Y \mapsto C(R\,\cdot, Y). \end{aligned}$$

Beweis. In wörtlicher Verallgemeinerung des Vorangegangenen:

$$\begin{aligned} C(|X|, Y) &= C\left(\int^s X(s) \odot R(s), Y\right) \\ &\xrightarrow[\textbf{??}]{\sim} \int_s C\big(X(s) \odot R(s), Y\big) \\ &\xrightarrow[\textbf{??}]{\sim} \int_s V\big(X(s), C(R(s), Y)\big) \\ &\xrightarrow[\textbf{??}]{\sim} [S^{\mathrm{op}}, V]\big(X, C(R\,\cdot, Y)\big) \\ &= [S^{\mathrm{op}}, V](X, NY). \end{aligned}$$

□

0.1.2 Die kartesisch abgeschlossene Struktur der Garben auf X

Für unsere allgemeine Dualität von Nerv und Realisierung **??** benötigen wir also eine bessere V-angereichterte Struktur auf C. Wenn wir uns auf $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ beschränken, erhalten wir sogar die Struktur einer kartesisch abgeschlossenen Kategorie (engl. *cartesian closed category*), d. h. einer Kategorie mit endlichen Produkten, für deren kartesische monoidale Struktur es ein internes Hom gibt.

Proposition 0.5. *Die Kategorie* $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ *ist kartesisch abgeschlossen mit Produkt*

$$(F \times G)(U) = F(U) \times G(U)$$

und internem Hom

$$(F \Rightarrow G)(U) = G(U)^{F(U)}$$

.

Beweis. Das Produkt erfüllt offenbar die universelle Eigenschaft in $\mathrm{pEns}_{/\mathrm{X}}$ und ist eine Garbe, da Produkte mit dem Limes der Garbeneigenschaft vertauschen. Das interne Hom besteht für $U \overset{\circ}{\subset} X$ und $V \subset U$ offen aus verträglichen Abbildungen $F(V) \to G(V)$, mithin also aus Garbenmorphismen $F|_U \to G|_U$. Diese sind untereinander veträglich durch Einschränkung und erfüllen die Garbenbedingung, die ja gerade nach der Verklebbarkeit stetiger Abbildungen modelliert war. Für die Adjunktion $(\cdot \times G, G \Rightarrow \cdot)$ bemerken wir, dass sie nach dem Exponentialgesetz in Ens bereits für die Prägarbenkategorien gilt. □

Diese Strukrur einer kartesisch abgeschlossenen Kategorie macht $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ insbesondere zu einer über sich selbst tensorierten Kategorie im Sinne von **??**. Wir erhalten einen Nerv-Funktor für die geometrische Realisierung simplizialer Garben auf X aus 0.4.

0.1.3 Kategorien von Garben über topologischen Räumen

Wir betrachten die Kategorienfaserungen $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ mit Morphismen den stetigen Abbildungen zwischen den étalen Räumen über der stetigen Abbildung in der Basis sowie $\mathrm{Ens}\,/\!\!/\,\mathrm{Top} \to \mathrm{Top}$ mit Opkomorphismen als Morphismen, d. h. für $F \in \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ und $G \in \mathrm{Ens}_{/Y}$:

$$\mathrm{Ens}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}}(F, G) = \coprod_{f: X \to Y} \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}(f^* G, F).$$

Wir möchten einen Nerv-Funktor nicht nur für die Realisierung simplizialer Garben über X finden, sondern auch für simpliziale Garben über variablen topologischen Räumen, also für simpliziale Objekte in $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$ und $\mathrm{Ens}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}}$. Dafür benötigen wir wieder eine monoidal abgeschlossene Struktur auf diesen Kategorien.

Die Kategorie $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$ besitzt endliche Produkte, die algebraisch gegeben sind durch Rückzug und Produkt und topologisch durch Bilden der Produkträume. Konkret:

Proposition 0.6. *Seien $F_{1,2} \in \mathrm{Ens}_{/X_{1,2}}$ Garben über topologischen Räumen X_1 und X_2. Dann erfüllt die Garbe*

$$F_1 \times F_2 := \mathrm{pr}_1^* F_1 \times \mathrm{pr}_2^* F_2 \in \mathrm{Ens}_{/X_1 \times X_2}$$

mit $\mathrm{pr}_{1,2} : X_1 \times X_2 \to X_{1,2}$ den Projektionen die universelle Eigenschaft des Produkts von F_1 und F_2 in $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$. Für ihren étalen Raum gilt:

$$\overline{F_1 \times F_2} = \overline{F_1} \times \overline{F_2}$$

und $\overline{F_1 \times F_2} \to X_1 \times X_2$ ist durch das Produkt der $\overline{F_{1,2}} \to X_{1,2}$ gegeben.

Beweis. Die Beschreibung von $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$ als Paare topologischer Räume mit étaler Abbildung zeigt die Aussage über den étalen Raum des Produkts. Die induzierte Abbildung $\overline{F_1} \times \overline{F_2} \to X_1 \times X_2$ ist ein Homöomorphismus auf der Produktmenge der Umgebungen, auf denen $\overline{F_{1,2}} \to X_{1,2}$ Homöomorphismen sind.

Für die algebraische Beschreibung erhalten wir mit der Offenheit der Projektionen $\mathrm{pr}_{1,2}$ und 0.5 für die Schnitte über Basismengen $U_1 \times U_2$:

$$\begin{aligned}(F_1 \times F_2)(U_1 \times U_2) &\xrightarrow{\sim} (\mathrm{pr}_1^* F_1)(U_1 \times U_2) \times (\mathrm{pr}_2^* F_2)(U_1 \times U_2) \\ &\xrightarrow{\sim} F_1(U_1) \times F_2(U_2).\end{aligned}$$

Wir erhalten also einen Garbenmorphismus über $X_1 \times X_2$ von der algeraischen zur topologischen Beschreibung, indem einem Paar $(s, t) \in F_1(U_1) \times F_2 \times U_2$ der Schnitt $s \times t : U_1 \times U_2 \to \overline{F_1} \times \overline{F_2}$ zugeordnet wird. Dieser Morphismus induziert auf den Halmen die Bijektion $(F_1 \times F_2)_{x,y} \xrightarrow{\sim} (F_1)_x \times (F_2)_y$ aus dem Vertauschen von endlichen Produkten mit filtrierenden Kolimites. □

Bemerkung 0.7. Auf ähnliche Weise kann man auch für $\mathrm{Ens}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}}$ endliche Produkte konstruieren: es handelt sich (wegen der opponierten Fasern) um das *Ko*produkt der mit den Projektionen auf den Produktraum zurückgezogenen Garben.

Wir könnten erwarten, dass wie das Produkt auch das interne Hom von $EnsX$ in unsere relative Situation übertragen werden kann. Dies gelingt tatsächlich aber im Allgemeinen nicht, denn in diesem Fall erhielten wir durch Nachschalten des Faserfunktors $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ bzw. $\mathrm{Ens}_{/\!/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ ein zum kartesischen Produkt adjungiertes internes Hom in der Kategorie der topologischen Räume, was bekanntermaßen in dieser Allgemeinheit nicht möglich ist ([**?**]). Wir müssen uns also wieder auf eine bequeme Kategorie topologischer Räume mit internem Hom einschränken.

Die häufige Wahl CGHaus ist für uns ungeeignet, denn der étale Raum einer Garbe über einem kompakt erzeugten Hausdorffraum ist im Allgemeinen kein Hausdorffraum mehr (betrachte etwa die Garbe der stetigen Funktionen nach $\mathbb{R}$). Abhilfe schafft uns eine Konstruktion aus [**?**], die die den kompakt erzeugten Räumen zugrundeliegenden Gedanken verallgemeinert. Wir geben hier nur die Ergebnisse an.

Äquivalent zu unserer (der *point-set*-Topologie entspringenden) Definition kompakt erzeugter Räume ist die folgende Charakterisierung:

Lemma 0.8 (**??**, Variante)**.** *Ein topologischer Raum X ist kompakt erzeugt genau dann, wenn gilt: Eine Teilmenge $U \subset X$ ist offen genau dann, wenn ihr Urbild unter allen stetigen Abbildungen $K \to X$, K kompakt, offen ist.*

Beweis. Unsere Bedingung besagt, dass X die Finaltopologie bezüglich des Systems der $K \to X$, K kompakt tragen soll. Die Bedingung aus der ursprünglichen Definition ist dieselbe für das System der Inklusionen kompakter Mengen $K \subset X$. Da jede stetige Abbilung $K \to X$, K kompakt, über die Inklusion ihres kompakten Bilds faktorisiert, ist letzteres System in ersterem konfinal und die Finaltopologien stimmen überein. $\square$

Der in **??** angesprochene zur Inklusion Linksadjungierte $k : \mathrm{Top} \to \mathrm{CG}$ lässt sich nun auch beschreiben als das Versehen der X zugrundeliegenden Menge mit der genannten Finaltopologie. Der Raum kX ist dann sogar ein Kolimes über das System der $K \to X$, K kompakt, mit Morphismen über X ([**?**], 1.1).

Nun verallgemeinern wir: Sei $\mathcal{I}$ eine nichtleere volle Unterkategorie von Top (für CG die kompakten Räume). Betrachte die Kategorie $\mathcal{I} \downarrow X$ und $kX := \mathrm{col}_{mathcalI\downarrow X}\, X$.

...