Simpliziale Garben und Garben auf Simplizialkomplexen

Fabian Glöckle

4. Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Diagrammkategorien von Garben auf topologischen Räumen treten immer dann natürlich auf, wenn nicht nur das Verhalten einer einzelnen Garbe unter einer bestimmten Operation von Interesse ist, sondern auch das "Beziehungsgeflecht" der beteiligten Garben untereinander, etwa bei der Betrachtung kartesischer Quadrate von Garben auf einem topologischen Raum. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, für einfache Diagramme eine geometrische Interpretation von Diagrammkategorien von Garben von Mengen auf einem topologischen Raum herzustellen. Dies wird uns für zwei Klassen von Diagrammen gelingen: halbgeordnete Mengen vom Typ eines Simplizialkomplexes sowie gerichtete Kategorien vom Typ einer simplizialen Menge.

In 1 wird eine Interpretation von Diagrammen von Mengen von der Form eines Simplizialkomplexes als Garben auf dem zugehörigen topologischen Simplizialkomplex mit der Ordnungstopologie vorgestellt. Uns interessieren auch die relativen Aussagen, inwiefern Diagramme von Garben auf einem topologischen Raum X von der Form eines Simplizialkomplexes eine Garbe auf dem topologischen Produkt von X mit dem ordungstopologischen Simplizialkomplex beschreiben. Dies wird in 1.1 explizit vorgeführt. Der folgende Abschnitt liefert eine geometrischere Charakterisierung dieser Diagramme als die simplizial konstanten Garben auf der geometrischen Realisierung des Simplizialkomplexes und die zugehörige Aussage für die derivierten Kategorien, zunächst im nicht relativen Fall. Diesen beantwortet 1.3, indem eine allgemeine Technik zur Relativierung solcher Aussagen vorgestellt wird.

Um diese Aussagen auf ihre Varianten für simpliziale Mengen und die zugehörigen Diagramme zu übertragen, werden in 2 simpliziale Mengen und ihre geometrische Realisierung eingeführt. Dabei werden die grundlegenden Eigenschaften der geometrischen Realisierung, ihre Formulierung mittels nichtdegenerierter Simplizes und ihre Interpretation als iteratives Verkleben von Zellen, ausführlich dargestellt. Für die Formulierung der Exaktheitseigenschaften der Realisierung wird zudem gezeigt, dass es sich um kompakt erzeugte Hausdorffräume handelt.

Die geometrische Realisierung simplizialer Mengen lässt sich darstellen als Koende, eine universelle Konstruktion der Kategorientheorie. Diese werden in 3 eingeführt und als eigenständige Objekte untersucht. Die Rechenregeln für Koenden, der Koendenkalkül aus 3.2 wird sich im folgenden Kapitel als wichtiges Hilfsmittel für "abstract nonsense"-Beweise erweisen.

In 4 wird der Faden der Diagrammkategorien wiederaufgenommen. Gesucht wird zunächst ein Adjungierter zur geometrischen Realisierung simplizialer Garben aus 4.1. Dies gelingt über die allgemeine Dualität zwischen Nerv und Realisierung, wenn die beteiligte Garbenkategorie kartesisch abgeschlossen ist. Für die Kategorie der Garben auf einem topologischen Raum X wird dies in 4.1.2 gezeigt, für die Kategorie von Garben über variablen Basisräumen wird in 4.1.5 ein einschränkender Grund formuliert, wieso dies vermutlich nicht gilt. Für die korrekte Übertragung der Aussagen über Diagrammkategorien von Simplizialkomplexen ist die angesprochene Adjunktion allerdings nicht relevant. Vielmehr muss der Begriff des einer simplizialen Menge zugeordneten Diagramms geklärt werden, dies geschieht in 4.2. Die Verallgemeinerung der Aussagen über Diagrammkategorien kann dann für den Fall gerichteter Kategorien vom Typ einer simplizialen Menge mittels 2-Limites von Kategorien bewiesen werden.

In der Notation folgt die Arbeit im Wesentlichen den Notationen aus [Soe18d]. So steht der französischen Tradition folgend Ens für die Kategorie der Mengen und $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ für die Kategorie der Garben von Mengen auf dem topologischen Raum X.

Die Darstellung der Aussagen zu schwach konstruierbaren Garben auf Simplizialkomplexen folgt [KS94] und [Soe18c], die zu simplizialen Mengen [GJ09] und [GM96]. Das Kapitel zu Koenden ist stark an [Lor15] angelehnt. Nicht mit Verweisen auf Literatur markierte Aussagen sind eigenständig erarbeitet. Dies trifft insbesondere auf weite Teile 1.1, 1.3 und 4 zu. Beim Finden von Aussagen und Gegenbeispielen und dem generellen Vertrautwerden mit dem Gebiet bin ich dennoch der Autorschaft der Online-Enzyklopädie *Nlab* und des Frage-und-Antwort-Forums *Mathoverflow* zu Dank verpflichtet. Danken möchte ich auch meinem Betreuer Prof. Wolfgang Soergel für die Stellung des interessanten Themas und die Freiheiten bei der Bearbeitung und meinen Eltern für die persönliche und finanzielle Unterstützung meines Studiums. Ich danke meinem Bruder Jonathan Glöckle für die Formulierung von 4.37 und Prof. Huber-Klawitter für die Beantwortung meiner Frage zu 1.3.

Kapitel 1

Garben auf Simplizialkomplexen

1.1 Simplizialkomplexe von Garben

Definition 1.1. Ein Simplizialkomplex ist eine Menge E, genannt die Ecken des Simplizialkomplexes, samt einem System $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(E)$ von nichtleeren endlichen Teilmengen von E, genannt die Simplizes des Simplizialkomplexes, derart, dass gilt:

- Jede einelementige Menge ist ein Simplex (d.h. $\{e\} \in \mathcal{K}$ für alle $e \in E$) und
- ist $L \in \mathcal{K}$ ein Simplex, $K \subset L$ nichtleere Teilmenge, so $K \in \mathcal{K}$.

Ein Simplizialkomplex ist somit insbesondere eine halbgeordnete Menge mit der Mengeninklusion als Halbordnung.

Wir erinnern an die Interpretation von halbgeordneten Mengen als Kategorien. Gegeben eine halbgeordnete Menge X definiere die Kategorie C_X bestehend aus Objekten $\mathrm{Ob}(C_X) = X$ mit einem eindeutigen Morphismus $a \to b$ genau dann, wenn $a \leq b$ bezüglich der Halbordnung. Wir erhalten:

Lemma 1.2. *Obige Konstruktion liefert eine volltreue Einbettung*

$$\begin{aligned} \mathrm{poset} &\to \mathrm{Cat}, \\ X &\mapsto C_X. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet Cat die Kategorie der kleinen Kategorien, d.h. der Kategorien C, für die $\mathrm{Ob}(C)$ eine Menge ist und poset die Kategorie der halbgeordneten Mengen mit monotonen Abbildungen als Morphismen.

Beweis. Offenbar ist C_X tatsächlich eine kleine Kategorie. Funktoren $C_X \to C_Y$ sind Abbildungen f auf Objekten, mit der Eigenschaft, dass es einen Morphismus $f(a) \leftarrow f(b)$ in C_Y gibt, wann immer $a \leftarrow b$ in C_X. Das ist aber gerade die Eigenschaft einer monotonen Abbildung. □

Nun können wir Simplizialkomplexe von Garben definieren.

Definition 1.3. Sei C eine Kategorie, $\mathcal{K}$ ein Simplizialkomplex aufgefasst als Kategorie. Wir nennen einen Funktor $\mathcal{K} \to C$ einen Simplizialkomplex in C der Form $\mathcal{K}$.

Die Simplizialkomplexe in C bilden wie jede Funktorenkategorie eine Kategorie (Beweis einfach, vgl. ??). Wir notieren die Kategorie der Funktoren $F : A \to B$ häufig mit B^A oder auch $[A, B]$.

Allgemeiner nennen wir Funktorkategorien der Form $[C^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$ auch Prägarben auf C.

Insbesondere ist ein Simplizialkomplex in der terminalen Kategorie dasselbe wie ein gewöhnlicher Simplizialkomplex. Im Folgenden interessieren wir uns besonders für die Fälle von Garben- und Prägarbenkategorien $C = \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ bzw. $C = \mathrm{pEns}_{/\mathrm{X}}$ für X einen topologischen Raum.

Lemma 1.4. *Wir haben einen Isomorphismus von Kategorien*

$$[\mathcal{K}, \mathrm{pEns}_{/\mathrm{X}}] \xrightarrow{\sim} [\mathcal{K} \times \mathrm{Off_X}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$$

zwischen den Simplizialkomplexen von Prägarben auf X und den Prägarben auf $\mathcal{K}^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Off_X}$.

Hierbei bezeichnet $\mathrm{Off_X}$ die durch Mengeninklusion halbgeordnete Menge der offenen Mengen in X.

Beweis. Das folgt direkt aus $\mathrm{pEns}_{/\mathrm{X}} = [\mathrm{Off_X}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$ und dem Exponentialgesetz für Kategorien:

$$[A, [B, C]] \xrightarrow{\sim} [A \times B, C].$$

□

Unser Ziel wäre es nun, $\mathcal{K} \times \mathrm{Off_X}$ wieder als Kategorie von offenen Mengen eines topologischen Raums zu realisieren, der funktoriell von $\mathcal{K}$ und X abhängt. Das ist aber natürlich im Allgemeinen nicht möglich, da bereits in $\mathcal{K}$ die Vereinigungseigenschaft von Topologien in der Regel verletzt ist. Allerdings können wir $\mathcal{K} \times \mathrm{Off_X}$ recht leicht zur Basis einer Topologie von $\mathcal{K} \times X$ machen.

Definition 1.5. Sei $(X, \leq)$ eine halbgeordnete Menge. Wir bezeichnen die Topologie mit Basis den Mengen der Form $(\geq \sigma) = \{\tau \in X | \tau \geq \sigma\}$ (für $\sigma \in X$) als die Ordnungstopologie auf X.

Wir prüfen, dass es sich um die Basis einer Topologie handeln kann:

Lemma 1.6. *Sei $(X, \leq)$ eine halbgeordnete Menge. Dann lassen sich endliche Schnitte im System der Mengen $(\geq \sigma)$, $\sigma \in X$ als Vereinigungen von Mengen in diesem System schreiben und X wird durch die Mengen des Systems überdeckt.*

Beweis. Offenbar gilt $X = \cup_\sigma (\geq \sigma)$ und

$$(\geq \sigma) \cap (\geq \tau) = \bigcup_{x \in (\geq \sigma) \cap (\geq \tau)} (\geq x).$$

□

Eine Menge $U \subset X$ ist bezüglich der Ordnungstopologie also genau dann offen, wenn sie nach oben abgeschlossen ist, d. h. wenn gilt

$$U = \bigcup_{x \in U} (\geq x).$$

Für $X = \mathcal{K}$ einen Simplizialkomplex vereinfachen sich die Schnitte:

$$(\geq \sigma) \cap (\geq \tau) = (\geq (\sigma \cup \tau)) \text{ oder } (\geq \sigma) \cap (\geq \tau) = \emptyset. \tag{1.1}$$

Lemma 1.7. *Das Versehen mit der Ordnungstopologie definiert einen Funktor* $\mathrm{Ord} : \mathrm{poset} \to \mathrm{Top}$.

Beweis. Ist $f : X \to Y$ ein Morphismus halbgeordneter Mengen, so besteht das Urbild von $(\geq \sigma)$, $\sigma \in Y$ aus allen $\tau \in X$ mit $f(\tau) \geq \sigma$. Dies ist eine nach oben abgeschlossene Menge, also offen in $\mathrm{Ord}\, X$. □

Wir werden den Funktor Ord für Simplizialkomplexe $\mathcal{K}$ in der Notation unterschlagen und sie direkt als topologische Räume auffassen.

Bezeichne nun $\mathcal{B}$ die Basis der Produkttopologie von $\mathcal{K} \times X$ bestehend aus Produktmengen der Form $(\geq \sigma) \times U$ mit $\sigma \in \mathcal{K}, U \circledcirc X$. Präziser ist der Funktor

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Off}_{\mathrm{X}} &\to \mathcal{B}, \\ (\sigma, U) &\mapsto (\geq \sigma) \times U \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von Kategorien, denn ein Umkehrfunktor wird durch die Projektionen einer Produktmenge auf ihre Faktoren und Wahl des eindeutigen minimalen Elements im ersten Faktor gegeben. Die Inklusion ist in beiden Kategorien dieselbe, da $\sigma \geq \tau$ genau dann, wenn $(\geq \sigma) \subset (\geq \tau)$ gilt.

Nun gibt es zu viele offene Mengen in $\mathcal{K} \times X$ für eine Aussage der Art

$$[\mathcal{K}, \mathrm{pEns}_{/\mathrm{X}}] \xrightarrow{\sim} \mathrm{pEns}_{/\mathcal{K} \times X}.$$

Allerdings können wir beim Isomorphismus

$$[\mathcal{K}, \mathrm{pEns}_{/\mathrm{X}}] \xrightarrow{\sim} [\mathcal{K} \times \mathrm{Off}_{\mathrm{X}}{}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}] \xrightarrow{\sim} [\mathcal{B}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$$

die rechte Seite als eine Garbenkategorie verstehen, wenn in dieser Objekte schon auf einer Basis der Topologie eindeutig festgelegt sind. Das ist natürlich nicht der Fall für Prägarben, wohl aber durch die Verklebungseigenschaft für Garben.

Definition 1.8. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis eines topologischen Raumes X. Wir bezeichnen die volle Unterkategorie der Prägarben auf $\mathcal{B}$, die die Verklebungseigenschaft von Garben für Überdeckungen in $\mathcal{B}$ erfüllen, als die Kategorie der Garben auf $\mathcal{B}$ und notieren sie mit $\mathrm{Ens}_{/\mathcal{B}}$.

Konkret erfüllen Garben $F \in \mathrm{Ens}_{/\mathcal{B}}$ also die folgende Eigenschaft:

> Ist $U = \bigcup_{i \in I} V_i$ eine Vereinigung mit $U, V_i \in \mathcal{B}$ und sind $s_i \in F(V_i)$ Schnitte mit übereinstimmenden Restriktionen $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$ für alle i, j, so gibt es genau einen Schnitt $s \in F(U)$ mit $s|_{V_i} = s_i$.

Oder äquivalent, falls wir für $(V_i)_{i\in I}$ eine unter endlichen Schnitten stabile Überdeckung ist und wir als Systemmorphismen die Restriktionen wählen:

$$F(U) = \lim_{i\in I} F(V_i).$$

Satz 1.9. *Sei X ein topologischer Raum mit Basis $\mathcal{B}$. Dann gibt es eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ens}_{/\mathcal{B}}$$

gegeben durch die Einschränkung auf $\mathcal{B} \subset \mathrm{Off}_{\mathrm{X}}$.

Beweis. Wir konstruieren einen Quasi-Inversen: Sei dazu $F \in \mathrm{Ens}_{/\mathcal{B}}$ und $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ eine unter endlichen Schnitten stabile Überdeckung von $U \subset\!\!\circ X$ durch Basismengen $U_i \in \mathcal{B}$. Wir setzen $\hat{F}(U) = \lim F(U_i)$ und prüfen die Wohldefiniertheit. Sei $U = \bigcup_{j\in J} V_j$ eine weitere solche Überdeckung von U durch Basismengen $V_j \in \mathcal{B}$. Nun gilt nach der Garbeneigenschaft auf den Basismengen:

$$\lim_i F(U_i) \xrightarrow{\sim} \lim_i \lim_j F(U_i \cap V_j) \xrightarrow{\sim} \lim_j \lim_i F(U_i \cap V_j) \xrightarrow{\sim} \lim_j F(V_j).$$

Unsere Zurdnung $F \mapsto \hat{F}$ ist also wohldefiniert. Das Bild $\hat{F}$ ist tatsächlich eine Garbe, denn falls $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ eine unter endlichen Schnitten stabile Überdeckung durch offene Mengen und $U_i = \bigcup_j V_{ij}$ jeweils eine unter endlichen Schnitten stabile Überdeckung durch Basismengen $V_{ij} \in \mathcal{B}$ ist, so gilt

$$\hat{F}(U) = \lim_{i,j} F(V_{ij}) \xrightarrow{\sim} \lim_i \hat{F}(U_i)$$

zuerst nach der Definition von $\hat{F}(U)$ und dann wieder nach der Transitivität von Limites und der Definition der $\hat{F}(U_i)$.

Die Funktorialität unserer Zuordnung folgt direkt aus der Funktorialität des Limes. Da für eine Basismenge $U \in \mathcal{B}$ mit der offensichtlichen Überdeckung natürlich $\hat{F}(U) = \lim F(U) = F(U)$ gilt, handelt es sich tatsächlich um einen Quasi-Inversen. □

Satz 1.10. *Der Funktor*

$$[\mathcal{K}, \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}] \to \mathrm{Ens}_{/\mathcal{B}} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ens}_{/\mathcal{K}\times X}$$

ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweis. Wir haben schon den Isomorphismus auf den Prägarbenkategorien

$$[\mathcal{K}, \mathrm{pEns}_{/\mathrm{X}}] \xrightarrow{\sim} [\mathcal{B}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$$

und müssen nur noch zeigen, dass $[\mathcal{K}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}]$ und $\mathrm{Ens}_{/\mathcal{B}}$ durch äquivalente Bedingungen definierte volle Unterkategorien sind.

In $[\mathcal{K}^{\mathrm{op}}, \mathrm{pEns}_{/\mathrm{X}}]$ wird die Untekategorie der Simplizialkomplexe von Garben dadurch definiert, dass für festes $\sigma \in \mathcal{K}$ die Garbenbedingung für die $U \subset\!\!\circ X$ erfüllt sein muss, während in $[\mathcal{B}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$ die Garbenbedingung für beliebige Basismengen $(\geq \sigma) \times U$ gefordert wird. Tatsächlich sind aber beide äquivalent, da im Fall einer Überdeckung $\mathcal{U}$ einer Basismenge $(\geq \sigma) \times U$ durch Basismengen $(\geq \tau_i) \times U_i$ eine Teilüberdeckung $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ aus Produktmengen mit $\tau_i = \sigma$ gewählt werden kann. Ein verträgliches Tupel aus Schnitten über Mengen aus $\mathcal{U}$ entspricht dann einem verträglichem Tupel aus Schnitten über Mengen aus $\mathcal{V}$ und die Garbenbedingung für Basismengen folgt aus der für festes $\sigma \in \mathcal{K}$. □

Wir geben die nicht-relative Version dieser Aussage an, mit einem Beweis, der die entscheidenden Schritte im vorangehenden Beweis noch einmal systematischer darstellt. Mit den Techniken aus Kapitel **??** folgt daraus umgekehrt auch die relative Version.

Definition 1.11. Sei $(X, \leq)$ eine halbgeordnete Menge und $S \subset X$ eine Teilmenge. Ein Element $I \in X$ heißt Infimum von S, falls es eine größte untere Schranke von S ist, d. h. $I \leq x$ für alle $x \in S$ und falls $J \leq x$ für alle $x \in S$, dann $J \leq I$.

Infima sind Limites in der halbgeordneten Menge aufgefasst als Kategorie. Das Infimum einer Teilmenge $S \in X$ muss nicht existieren, ist in diesem Fall allerdings eindeutig. Ein Simplizialkomplex besitzt binäre Infima. Die Basis aus $(\geq \sigma)$-Mengen der Ordnungstopologie einer halbgeordneten Menge mit binären Infima ist schnittstabil, vergleiche Gleichung 1.1.

Satz 1.12. *Sei $\mathcal{K} \in \mathrm{poset}$ mit binären Infima. Dann ist der Funktor*

$$[\mathcal{K}, \mathrm{Ens}] \to \mathrm{Ens}_{/\mathcal{B}} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Ord}\,\mathcal{K}}$$

für $\mathcal{B}$ die Basis der Ordnungstopologie eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweis. Da $\sigma \leq \tau$ die umgekehrte Inklusion $\Rightarrow (\geq \sigma) \supset (\geq \tau)$ imppliziert, gilt $\mathcal{K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}^{\mathrm{op}}$. Die Garbenbedingung für $\mathcal{B}$ ist leer, denn jede Überdeckung von $(\geq \sigma)$ durch Basismengen enthält $(\geq \sigma)$, $(\geq \sigma)$ ist also initial in einer solchen Überdeckung und die Limites über die beiden Systeme stimmen überein. □

1.2 Schwach konstruierbare Garben auf Simplizialkomplexen

Ziel dieses Abschnitts ist es, eine geometrischere Charakterisierung von Garben auf einem Simplizialkomplex $\mathcal{K}$ zu geben. Wir werden sehen, dass sie sich als simplizial konstante Garben auf der geometrischen Realisierung von $\mathcal{K}$ auffassen lassen. Anschließend wollen wir die Ergebnisse auch auf die derivierte Kategorie der Garben auf $\mathcal{K}$ übertragen. Die Darstellung folgt im Wesentlichen [KS94] und [Soe18c].

In diesem Abschnitt bezeichne $(V, \mathcal{K})$ stets einen lokal-endlichen Simplizialkomplex mit Eckenmenge V. Für einen Simplex $\sigma \in \mathcal{K}$ definieren wir seine geometrische Realisierung $|\sigma| \subset \mathbb{R}^V = \mathrm{Ens}(V, \mathbb{R})$:

$$|\sigma| = \{x \in \mathbb{R}^V | x(v) = 0 \text{ für } v \notin \sigma, x(v) > 0 \text{ für } v \in \sigma, \sum_{v \in V} x(v) = 1\},$$

sowie die geometrische Realisierung $|\mathcal{K}| \subset \mathbb{R}^V$ von $\mathcal{K}$

$$\bigcup_{\sigma\in\mathcal{K}} |\sigma|,$$

jeweils versehen mit der induzierten Topologie von $\mathbb{R}^V$.

Wir erhalten eine Abbildung

$$p : |\mathcal{K}| \to \mathcal{K},$$

genannt Simplexanzeiger oder Indikatorabbildung, der einem Punkt $x \in |\mathcal{K}|$ in der geometrischen Realisierung den eindeutigen Simplex $\sigma \in \mathcal{K}$ mit $x \in |\sigma|$ zuordnet.

Lemma 1.13. *Der Simplexanzeiger $p : |\mathcal{K}| \to \mathcal{K}$ ist stetig.*

Beweis. Das Urbild einer Basismenge $(\geq \sigma)$ ist

$$p^{-1}((\geq \sigma)) = |\mathcal{K}| \cap \{x \in \mathbb{R}^V | x(v) > 0 \text{ für } v \in \sigma\},$$

der offene Stern um σ, den wir auch als $U(\sigma)$ notieren. □

Definition 1.14. Eine Garbe $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ heißt schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbar (oder kurz: schwach konstruierbar), falls für alle $\sigma \in \mathcal{K}$, die Einschränkungen $F|_{|\sigma|}$ konstante Garben sind. Wir bezeichnen die volle Unterkategorie der schwach konstruierbaren Garben in $\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ mit s-Kons$(\mathcal{K})$.

Eine derivierte Garbe $F \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$ heißt schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbar, falls für alle $j \in \mathbb{Z}$ die Kohomologiegarben $H^j(F)$ schwach konstruierbar sind. Wir bezeichnen die volle Unterkategorie der schwach konstruierbaren derivierten Garben in $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$ mit $\mathrm{Der}_{\mathrm{sk}}(|\mathcal{K}|)$.

Wir bemerken zunächst:

Lemma 1.15 ([KS94], 8.1.3)**.** *Die Kategorie* s-Kons$(\mathcal{K})$ *ist abelsch.*

Beweis. Durch den offensichtlichen Isomorphismus zur Kategorie der abelschen Gruppen (durch den Funktor der globalen Schnitte) ist die Kategorie der konstanten abelschen Garben auf einem topologischen Raum X eine abelsche Kategorie. Nun folgt die Aussage aus der Exaktheit und Additivität des Pullbacks i_σ^* entlang den Inklusionen $i_\sigma : |\sigma| \hookrightarrow |\mathcal{K}|$. □

Entscheidend ist die folgende Charakterisierung schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbarer Garben:

Proposition 1.16 ([Soe18c], 8.4.6.3)**.** *Für $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ sind äquivalent:*

(1) F ist schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbar

(2) Die Koeinheit der Adjunktion ist auf F ein Isomorphismus $p^*p_*F \xrightarrow{\sim} F$.

(3) F liegt im wesentlichen Bild des Rückzugs p^*.

(4) Die Restriktion $F(U(\sigma)) \to F_x$ ist für alle $\sigma \in \mathcal{K}$ und alle $x \in |\sigma|$ ein Isomorphismus.

Beweis. Die Äquivalenz (2) $\Leftrightarrow$ (3) ist allgemein kategorientheoretischer Natur. Dabei ist (2) $\Rightarrow$ (3) offensichtlich (nimm p_*F) und (3) $\Rightarrow$ (2) folgt aus den Dreiecksidentitäten.

Die Äquivalenz (2) $\Leftrightarrow$ (4) folgt aus der Bestimmung der Halme von p^*p_*F. Zunächst bemerken wir, dass in $\mathcal{K}$ die Menge $(\geq \sigma)$ die kleinste offene Umgebung von σ ist, und wir also $p_*F((\geq \sigma)) \xrightarrow{\sim} (p_*F)_\sigma$ erhalten. Somit gilt für $x \in |\sigma|$:

$$(p^*p_*F)_x \xrightarrow{\sim} (p_*F)_\sigma \xrightarrow{\sim} p_*F((\geq \sigma)) \xrightarrow{\sim} F(U(\sigma)). \tag{1.2}$$

Dabei wurde die Beschreibung der Halme des Rückzugs (mit $p(x) = \sigma$), obige Darstellung der Halme auf $\mathcal{K}$ und die Definition des Vorschubs (mit $p^{-1}((\geq \sigma)) = U(\sigma)$) verwendet.

Die Implikation (4) $\Rightarrow$ (1) folgt direkt aus dem nachgestellten Lemma, angewandt auf die Einschränkung von F auf $U(\sigma)$, und der Tatsache, dass beliebige Einschränkungen konstanter Garben wieder konstant sind.

Für die umgekehrte Richtung reicht es, die Aussage für die Einschränkung von F auf $U(\sigma)$ zu zeigen. Wir betrachten für $x \in |\sigma|$ die Zusammenziehung

$$\begin{aligned} h : (0,1] \times U(\sigma) &\to U(\sigma), \\ (t,y) &\mapsto h(t,y) = ty + (1-t)x. \end{aligned}$$

Die Mengen $h(\{t\} \times U(\sigma))$ bilden für $t \in (0,1]$ eine Umgebungsbasis von x, wir müssen also nur noch den Kolimes der Schnitte über diese Mengen bestimmen. Bezeichne $\pi : (0,1] \times U(\sigma) \to U(\sigma)$ die Projektion auf den zweiten Faktor. Nach der simplizialen Konstanz von F und wegen $h(t,y) \in |\tau| \Leftrightarrow y \in |\tau|$ ist der Rückzug h^*F konstant auf den Fasern von π und lässt sich somit nach dem zweiten nachgestellten Lemma schreiben als $\pi^*\pi_*h^*F \xrightarrow{\sim} h^*F$. Bezeichne $\iota_t : U(\sigma) \hookrightarrow (0,1] \times U(\sigma)$ die Inklusion. Dann erhalten wir wie gewünscht mit der Funktorialität des Rückzugs und $\pi \circ \iota_t = \mathrm{id}_{U(\sigma)}$

$$\begin{aligned} F_x &\xrightarrow{\sim} \mathrm{colf}_{t\in(0,1]}\, F(h(\{t\} \times U(\sigma))) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{colf}_{t\in(0,1]}\, \Gamma\iota_t^*h^*F \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{colf}_{t\in(0,1]}\, \Gamma\iota_t^*\pi^*\pi_*h^*F \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{colf}_{t\in(0,1]}\, \Gamma\iota_1^*\pi^*\pi_*h^*F \\ &\xrightarrow{\sim} \iota_1^*h^*F \\ &\xrightarrow{\sim} F(U(\sigma)). \end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.17. Aus Gleichung 1.2 und (4) folgt insbesondere auch $(p^*p_*F)(U(\sigma)) \xrightarrow{\sim} F(U(\sigma))$ für alle $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ und alle $\sigma \in \mathcal{K}$.

Wir tragen die benötigten Lemmata nach.

Lemma 1.18 ([Soe18d], 2.1.41)**.** *Sei X ein topologischer Raum, $F \in \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ eine Garbe auf X, für die die Restriktion $\Gamma F \xrightarrow{\sim} F_x$ für alle $x \in X$ bijektiv ist. Dann ist F eine konstante Garbe auf X mit Halm ΓF.*

Beweis. Bezeichne $c : X \to \mathrm{top}$ die konstante Abbildung. Die Koeinheit der Adjunktion $c^* c_* F \to F$ induziert auf den Halmen gerade die vorausgesetzten Bijektionen, ist also ein Garben-Isomorphismus. □

Lemma 1.19 ([Soe18d], 6.4.17)**.** *Sei X ein topologischer Raum, $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall, $F \in \mathrm{Ens}_{/X \times I}$ eine Garbe und $\pi : X \times I \to X$ die Projektion auf den ersten Faktor. Ist F konstant auf den Fasern von π, so ist die Koeinheit der Adjunktion auf F ein Isomorphismus $\pi^* \pi_* F \xrightarrow{\sim} F$.*

Beweis. Die Aussage ist äquivalent zum folgenden Fortsetzungsresultat:

Für alle $U \mathrel{\subset\!\!\!\!\circ} X$ und $t \in I$ ist die Restriktion ein Isomorphismus

$$\Gamma(U \times I, F) \xrightarrow{\sim} \Gamma(U \times \{t\}, F).$$

Denn ist die Koeinheit der Adjunktion ein Isomorphismus $\pi^* \pi_* F \xrightarrow{\sim} F$, so bestimmen wir die Schnitte über $U \times \{t\}$ wie folgt: Sei $\iota : U \times \{t\} \hookrightarrow X \times I$ die Inklusion. Wir bemerken, dass $\pi \circ \iota$ die Inklusion von U nach X ist und erhalten:

$$\Gamma(U \times \{t\}, F) = \Gamma \iota^* F \xrightarrow{\sim} \Gamma \iota^* \pi^* \pi_* F = \Gamma(U, \pi_* F) = \Gamma(U \times I, F).$$

Andersherum folgt der Isomorphismus der Koeinheit der Adjunktion aber auch aus dem Fortsetzungsresultat, denn wir können sofort den Isomorphismus auf den Halmen über $(x, t) \in X \times I$ zeigen:

$$\begin{aligned}
(\pi^* \pi_* F)_{(x,t)} &\xrightarrow{\sim} (\pi_* F)_x \\
&= \mathrm{colf}_{U \ni x} \Gamma(U \times I, F) \\
&\xrightarrow{\sim} \mathrm{colf}_{U \ni x} \Gamma(U \times \{t\}, F) \\
&\xrightarrow{\sim} \mathrm{colf}_{V \ni (x,t)} F(V) \\
&= F_{(x,t)}.
\end{aligned}$$

Dabei erhalten wir die Surjektivität von $F(V) \to \Gamma(U \times \{t\}, F)$ aus der Bijektivität der Verknüpfung

$$\Gamma(U \times I, F) \to F(V) \to \Gamma(U \times \{t\}, F)$$

und die Injektivität aus der Eigenschaft, dass bereits die faserweise stetige Fortsetzung eindeutig ist nach der Konstantheit der Einschränkungen von F auf die Fasern von π.

Nun können wir die Aussage zeigen. Zunächst folgt sie für I kompakt sofort aus eigentlichem Basiswechsel über dem kartesischen Diagramm mit eigentlichen und separierten Vertikalen

$$\begin{tikzcd}
(x,t) \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & X \times I \arrow[d, "\pi"] \\
x \arrow[r, hook] & X.
\end{tikzcd}$$

Ist nun $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall, so können wir es als aufsteigende Vereinigung von Kompakta $I = \bigcup_j I_j$ schreiben und erhalten für die Schnitte ebenfalls

$$\begin{aligned}\Gamma(U \times I, F) &= \mathrm{Top}(U \times I, \overline{F}) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{colf}_j \,\mathrm{Top}(U \times I_j, \overline{F}) = \mathrm{colf}_j \,\Gamma(U \times I_j, F) \xrightarrow{\sim} \Gamma(U \times \{t\}, F).\end{aligned}$$

□

Wir bezeichnen den Funktor $p^* p_* : \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|} \to \text{s-Kons}(\mathcal{K})$ kurz mit β. Es handelt sich um einen Koreflektor:

Lemma 1.20. *Der Funktor $\beta : \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|} \to \text{s-Kons}(\mathcal{K})$ ist ein Rechtsadjungierter zur Inklusion $\iota : \text{s-Kons}(\mathcal{K}) \to \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$.*

Beweis. Für $S \in \text{s-Kons}(\mathcal{K})$ und $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ gilt:

$$\begin{aligned}&\text{s-Kons}(\mathcal{K})(W, \beta F) \\ \xrightarrow{\sim}\, &\text{s-Kons}(\mathcal{K})(\beta W, \beta F) \\ \xrightarrow{\sim}\, &\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}(p_* W, p_* p^* p_* F) \\ \xrightarrow{\sim}\, &\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}(p_* W, p_* F) \\ \xrightarrow{\sim}\, &\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}(\beta W, F) \\ \xrightarrow{\sim}\, &\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}(W, F).\end{aligned}$$

Dabei wurde die bekannte Adjunktion (p^*, p_*) sowie im dritten Schritt das Lemma "finaler Rückzug mit zusammenhängenden Fasern" (1.21) benutzt. □

Lemma 1.21 ([Soe18d], 4.3.22)**.** *Sei $p : X \to Y$ eine finale Surjektion mit zusammenhängenden Fasern. Dann ist die Einheit der Adjunktion $\mathrm{Id} \Rightarrow p_* p^*$ für alle $G \in \mathrm{Ens}_{/Y}$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Wir zeigen, dass die Einheit der Adjunktion Bijektionen auf allen Schnitten über $U \subset\!\circ\, Y$ induziert. Ohne Einschränkung reicht der Fall der globalen Schnitte $U = Y$, denn die Einschränkung von p auf $p^{-1}(U) \to U$ erfüllt ebenfalls die Voraussetzungen des Lemmas. Zu zeigen ist also, dass die Einheit der Adjunktion Bijektionen $\Gamma G \xrightarrow{\sim} \Gamma p_* p^* G = \Gamma p^* G$ induziert. Nach der universellen Eigenschaft des Rückzugs stehen globale Schnitte $s : X \to p^* G$ von $p^* G \to X$ in Bijektion zu Schnitten $t : X \to G$ von $G \to Y$ über p. Eine solche Abbildung t faktorisiert nun nach der Surjektivität von p zunächst mengentheoretisch über p. Diese Faktorisierung ist eindeutig, denn t ist konstant auf den Fasern $p^{-1}(y)$ von $y \in Y$ als stetige Abbildung von einem zusammenhängenden Raum in den diskreten Raum G_y. Die Stetigkeit dieser mengentheoretischen Faktorisierung folgt nun aus der Finalität von p. Die Umkehrabbildung schaltet einem Schnitt von $G \to Y$ über id_Y einen Schnitt über p durch Vorschalten von p zu. □

Bemerkung 1.22. Die Voraussetzung zusammenhängender Fasern kann fallen gelassen werden, wenn stattdessen in $p^* G$ nur diejenigen Garbenschnitte als Schnitte zugelassen werden, welche gewisse zu den Daten von $p^* G$ gehörige Verträglichkeiten erfüllen müssen, die die Abbildung $p^{-1}(y) \to G_y$ wieder konstant machen. Dies werden wir in **??** benötigen und dort auch präzisieren.

Als Komposition zweier linksexakter Funktoren ist β wieder linksexakt. Der allgemeinen Terminologie folgend bezeichnen wir eine Garbe $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ β-azyklisch, falls ihre höheren Derivierten von β verschwinden, also falls

$$R^k \beta F = 0 \text{ für alle } k > 0.$$

Später benötigen wir die folgende Charakterisierung β-azyklischer Garben:

Proposition 1.23 ([KS94], 8.1.8)**.** *Sei $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$. Dann gilt:*

(i) $\Gamma(U(\sigma), R^k\beta F) \xrightarrow{\sim} H^k(U(\sigma); F)$ *für alle* $\sigma \in \mathcal{K}, k \geq 0$.

(ii) F *ist β-azyklisch genau dann, wenn* $H^k(U(\sigma); F) = 0$ *für alle* $\sigma \in \mathcal{K}, k > 0$.

Insbesondere sind schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbare Garben und welke Garben β-azyklisch.

Bemerkung 1.24. Man beachte, dass Aussage (ii) eine allgemeine Verbesserung unserer allgemeinen Charakterisierung höherer direkter Bilder als Garbifizierungen der Prägarben der Kohomologien der Fasern ist für den Fall, dass die Schnittfunktoren $\Gamma(\pi^{-1}(U), \cdot)$ exakt sind.

Beweis. (ii) folgt direkt aus (i) mit $R^k\beta F \in \text{s-Kons}(\mathcal{K})$ (vgl. 1.15) und unserer Aussage über die Halme 1.16 (4).

Mit der Exaktheit von Halmfunktoren $F \mapsto F_x$ und 1.16 (4) sind die Funktoren $\Gamma(U(\sigma), \cdot)$ auf schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbaren Garben exakt und vertauschen folglich bei einem Komplex mit der Bildung der Kohomologie. Wir erhalten für $F \hookrightarrow I^\bullet$ eine injektive Auflösung somit

$$\Gamma(U(\sigma), R^k\beta F) = \Gamma(U(\sigma), H^k(\beta I^\bullet)) \xrightarrow{\sim} H^k(\Gamma(U(\sigma), \beta I^\bullet)) \xrightarrow{\sim} H^k(\Gamma(U(\sigma), I^\bullet)) = H^k(U(\sigma), F),$$

wobei wir im dritten Schritt 1.17 verwendet haben. □

Damit können wir uns nun den derivierten Kategorien zuwenden.

Proposition 1.25. *Sei $F \in \mathrm{Ket}^+(\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$ ein gegen die Richtung der Pfeile beschränkter Kettenkomplex aus β-azyklischen Garben mit schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbaren Kohomologiegarben $H^q(F)$. Dann ist $\beta F \to F$ ein Quasi-Isomorphismus.*

Beweis. Wir schneiden aus dem Kettenkomplex (F^n, d^n) kurze exakte Sequenzen aus:

$$\begin{array}{lll} H^0 = \ker d^0 \hookrightarrow F^0 \twoheadrightarrow \operatorname{im} d^0 & & \\ & \operatorname{im} d^0 \hookrightarrow \ker d^1 \twoheadrightarrow H^1 & \\ & & \ker d^1 \hookrightarrow F^1 \twoheadrightarrow \operatorname{im} d^1 \\ & \vdots & \end{array}$$

Sind in einer kurzen exakten Sequenz zwei der drei Objekte azyklisch, so nach dem Fünferlemma auch das dritte. Da nach Voraussetzung und 1.23 F^q und H^q β-azyklisch sind, sind alle oben betrachteten Objekte β-azyklisch und die kurzen exakten Sequenzen bleiben exakt nach Anwendung von β. Es folgt $H^q(\beta F) \xrightarrow{\sim} \beta(H^q F)$ und weiter $\beta(H^q F) \xrightarrow{\sim} H^q F$ nach der schwachen Konstruierbarkeit von $H^q F$. □

Wir haben soeben die anschauliche Variante für in eine Richtung beschränkte Komplexe bewiesen und versuchen uns nun an der unbeschränkten Aussage.

Satz 1.26. *Sei $F \in \mathrm{Ket}(\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$ ein Kettenkomplex aus β-azyklischen Garben mit schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbaren Kohomologiegarben $H^q(F)$. Dann ist $\beta F \to F$ ein Quasi-Isomorphismus.*

Beweis. Für unseren Quasi-Isomorphismus $H^q(\beta F) \xrightarrow{\sim} H^q(F)$ reicht es nach dem Halmkriterium und 1.16 (4), dass auf den Schnitten über $U(\sigma)$ Isomorphismen $H^q(\beta F)(U(\sigma)) \xrightarrow{\sim} H^q(F)(U(\sigma))$ induziert werden für alle $\sigma \in \mathcal{K}$. Nun ist aber nach 1.23 (ii) der Funktor $\Gamma(U(\sigma), \cdot)$ exakt auf der vollen Unterkategorie der β-azyklischen Garben auf $|\mathcal{K}|$ und vertauscht somit mit dem Bilden der Kohomologie. Wir sind also fertig, falls $H^q(\Gamma(U(\sigma), \beta F)) \xrightarrow{\sim} H^q(\Gamma(U(\sigma), F))$, das ist aber gerade 1.17. □

Damit ist der entscheidende Schritt für unser Ziel gezeigt. Wir erhalten:

Theorem 1.27. *Sei $\mathcal{K}$ ein Simplizialkomplex. Die oben definierten Funktoren ι, β induzieren auf den derivierten Kategorien eine Äquivalenz*

$$\mathrm{Der}(\text{s-Kons}(\mathcal{K})) \underset{R\beta}{\overset{\iota}{\rightleftarrows}} \mathrm{Der}_{\mathrm{sk}}(|\mathcal{K}|).$$

Beweis. Mit [Soe18b], 3.6.10, finden wir für $F \in \mathrm{Ket}(\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$ eine homotopieinjektive Auflösung $F \xrightarrow{\approx} I$ durch injektive Garben, die also entfaltet ist für β. Mit dem vorangegangenen Satz 1.26 und der β-Azyklizität injektiver Garben 1.23 (ii) erhalten wir für $F \in \mathrm{Der}_{\mathrm{sk}}(|\mathcal{K}|)$:

$$R\beta F \xrightarrow{\sim} \beta I \xrightarrow{\sim} I \xleftarrow{\sim} F.$$

Tatsächlich hat $R\beta$ Bild in $\mathrm{Der}(\text{s-Kons}(\mathcal{K}))$ und unsere obige Aussage beinhaltet die Isotransformationen $\mathrm{Id} \overset{\sim}{\Rightarrow} R\beta \circ \iota$ und $\iota \circ R\beta \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Id}$. □

Bemerkung 1.28. Kashiwara und Schapira beschränken sich auf die Äquivalenz der beschränkten derivierten Kategorien, allerdings mit der gleichen Argumentation. In [KS94] 1.7.12 wird eine allgemeine Aussage für solche Situationen gezeigt, die hier aber m.E. nicht benötigt wird.

Bemerkung 1.29. Ist $\mathcal{K}$ lokal-endlich und von beschränkter Dimension, so erhalten wir dasselbe Ergebnis mit deutlich weniger Technik, nämlich ohne Rückgriff auf homotopieinjektive Auflösungen. In der Tat können wir nach dem Satz über das unbeschränkte Derivieren homologisch endlicher Funktoren ([Soe18d], 3.7.4) mit beliebigen Auflösungen aus β-azyklischen Objekten arbeiten und dann einfach mit 1.23 (ii) eine beliebige welke Auflösung wählen.

Wir müssen also zeigen, dass β homologisch rechtsendlich ist und sich jede Garbe $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ in eine β-azyklische einbetten lässt. Letzteres folgt wieder aus 1.23 (ii), ersteres zeigen wir im folgenden Lemma.

Lemma 1.30. *Ist $\mathcal{K}$ ein lokal-endlicher Simplizialkomplex beschränkter Dimension, so ist $\beta : \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|} \to \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ ein homologisch rechtsendlicher Funktor.*

Beweis. Sei $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$. Dann ist $R^k\beta F$ schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbar und wir bestimmen für $x \in |\sigma|$ die Halme mittels

$$(R^k\beta F)_x \xrightarrow{\sim} (R^k\beta F)(U(\sigma)) \xrightarrow{\sim} H^k(U(\sigma); F)$$

unter Verwendung von 1.16 (4) und 1.23 (i). Das führt die Aussage auf die beschränkte homologische Dimension von n-Mannigfaltigkeiten im folgenden Lemma zurück, denn für $\mathcal{K}$ lokal-endlich von beschränkter Dimension ist $U(\sigma)$ eine offene Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums $\mathbb{R}^n$. □

Lemma 1.31. *Für $U \mathrel{\overset{\circ}{\subset}} \mathbb{R}^n$ und $F \in \mathrm{Ab}_{/U}$ gilt $H^q(U; F) = 0$ für alle $q > n$.*

Beweis. Zunächst können wir ohne Einschränkung $U = \mathbb{R}^n$ annehmen, indem wir verwenden, dass die Fortsetzung durch Null entlang der Einbettung $j : U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ Isomorphismen

$$H^q(U; F) \xrightarrow{\sim} H^q(U; j_!F)$$

liefert.

Nach [KS94], 3.2.2, gibt es für $F \in \mathrm{Ab}_{/\mathbb{R}^n}$ eine n-Schritt Auflösung durch kompaktweiche Garben. Wir müssen also zeigen, dass kompaktweiche Garben Γ-azyklisch sind ([Soe18d], 4.8 zeigt das nur für $\Gamma_!$). Mit dem Azyklizitätskriterium [Soe18d], 4.1.6, und den Aussagen für $\Gamma_!$ bleibt nur noch zu zeigen, dass eine kurze exakte Sequenz von Garben $F' \hookrightarrow F \twoheadrightarrow F''$ mit F' kompaktweich exakt bleibt nach Anwenden von Γ. Dies folgern wir allerdings sofort aus der σ-Kompaktheit von $\mathbb{R}^n$ und den Aussagen für $\Gamma_!$: Sei dazu $\mathbb{R}^n = \bigcup_i K_i$ eine kompakte Ausschöpfung mit K_i kompakt und $K_i \subset \mathrm{int}(K_{i+1})$. Dann gilt $\Gamma_!(K_i, F) = \Gamma(K_i, F)$, $F|_{K_i}$ ist kompaktweich und unsere kurze exakte Sequenz bleibt exakt nach Anwenden von $\Gamma(K_i, \cdot)$ und somit auch im filtrierenden Kolimes nach Anwenden von $\Gamma = \mathrm{colf}_i\, \Gamma(K_i, \cdot)$. □

Bemerkung 1.32. Man beachte, dass der Beweis ab 1.20 ausschließlich auf homologischer Algebra beruht, die konkreten topologischen Eigenschaften der Situation fließen im Wesentlichen in 1.16 ein. Dies wird sich in **??** als nützlich erweisen, um die Aussage für simpliziale Mengen zu formulieren.

1.3 Verallgemeinerte Garben

In diesem Abschnitt sollen die Beobachtungen der letzten beiden Abschnitte vereint werden. Nach Abschnitt **??** sind Garben auf einem Simplizialkomplex $\mathcal{K}$ nichts anderes als ein Simplizialkomplex von Garben über dem einpunktigen Raum. In Abschnitt **??** haben wir diese Garben auf $\mathcal{K}$ geometrisch charakterisiert als die simplizial konstanten Garben auf der geometrischen Realisierung

$|\mathcal{K}|$ von $\mathcal{K}$. Wir erwarten daher auch eine relative Version dieser Aussage über einem beliebigen topologischen Raum X, die die Simplizialkomplexe von Garben auf X alias Garben auf $\mathcal{K} \times X$ geometrisch beschreibt.

Wir geben zunächst eine leichte Verallgemeinerung der Aussage von **??** an.

Wir definieren Garben mit Werten in beliebigen Kategorien C mit der schon in **??** verwandten allgemeinen Abstiegsbedingung.

Definition 1.33 ([Soe18d], 2.1.5)**.** Sei C eine Kategorie und X ein topologischer Raum. Eine C-wertige Prägarbe $F \in [\mathrm{Off_X}^{\mathrm{op}}, C]$ auf X heißt C-wertige Garbe auf X, falls sie die Abstiegsbedingung erfüllt:

> Für alle unter endlichen Schnitten stabilen offenen Überdeckungen $U = \bigcup_i U_i$ gilt $F(U) = \lim_i F(U_i)$.

Wir notieren die Kategorie der C-wertigen Prägarben auf X mit $\mathrm{p}\, C_{/X}$ und die der C-wertigen Garben auf X mit $C_{/X}$.

Für C die Kategorien der Mengen oder der abelschen Gruppen ist obige Definition äquivalent zur bekannten Definition über die eindeutige Verklebbarkeit von verträglichen Schnitten.

Auch das Konzept der Garbifizierung können wir auf C-wertige Prägarben verallgemeinern.

Satz 1.34. *Sei C eine vollständige und kovollständige Kategorie. Dann hat der Vergissfunktor $C_{/X} \to \mathrm{p}\, C_{/X}$ einen Linksadjungierten, genannt (verallgemeinerte) Garbifizierung.*

Beweis. Sei $F \in \mathrm{p}\, C_{/X}$. Wir behaupten, dass die Prägarbe

$$F^+(U) := \mathrm{colf}_{\mathcal{U}/U} \lim_j F(U_j)$$

mit den induzierten Restriktionen eine Garbe ist und die Adjunktionseigenschaft erfüllt. Dabei steht $\mathcal{U}/U$ für das filtrierende System aller gesättigten Überdeckungen $\mathcal{U}$ von U. Die Konstruktion ist funktoriell.

Für die Garbeneigenschaft konstruieren wir für eine gesättigte offene Überdeckung $U = \bigcup U_i$ inverse Morphismen

$$\mathrm{colf}_{\mathcal{U}/U} \lim_{V \in \mathcal{U}} F(V) \rightleftarrows \lim_i \mathrm{colf}_{\mathcal{U}_i/U_i} \lim_{V \in \mathcal{U}_i} F(V).$$

Diese erhalten wir einerseits aus den natürlichen Projektionen des Limes und Inklusionen des Kolimes und andererseits aus der Konstruktion verträglicher Familien von Abbildungen, deren Verträglichkeit sich jeweils sofort aus der Eindeutigkeit der Restriktionen ergibt. Dabei werden einer Überdeckung in $\mathcal{U}/U$ die Überdeckungen in $\mathcal{U}_i/U_i$ zugeordnet, die sich durch Schneiden mit U_i ergeben, und umgekehrt Familien von Überdeckungen der U_i die ihrer Vereinigung zugeordnete gesättigte Überdeckung von U. Dass beide Morphismen invers zueinander sind, ergibt sich erneut aus der Eindeutigkeit der Restriktionen.

Auch für die Adjunktionseigenschaft gehen wir wie bei mengenwertigen Garben vor und erhalten zunächst den natürlichen Prägarbenmorphismus $F \to F^+$, der zur einelementigen Überdeckung von U gehört. Wir möchten nun zeigen, dass jeder Prägarbenmorphismus $F \to G$ in eine Garbe G eindeutig über unseren natürlichen Morphismus $F \to F^+$ faktorisiert. Die Morphismen unseres Prägarbenmorphismus $F(V) \to G(V)$ induzieren nun nach der Restriktionsverträglichkeit Morphismen auf den Limites, und somit auch im Kolimes Morphismen in

$$C(F^+(U), G(U) = C(\mathrm{colf}_{\mathcal{U}/U} \lim_{V \in \mathcal{U}} F(V), \lim_{V \in \mathcal{U}} G(V)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{colf}_{\mathcal{U}/U} C(\lim_{V \in \mathcal{U}} F(V), \lim_{V \in \mathcal{U}} G(V)),$$

für alle $U \circledcirc X$, die ebenfalls mit den Restriktionen kompatibel sind.

Dass $F \to G$ nun mittels dieses Morphismus $F^+ \to G$ über $F \to F^+$ faktorisiert, folgt nun aber direkt, da der Morphismus für einelementige Überdeckungen der aus dem Prägarbenmorpismus ist.

Zur Eindeutigkeit dieser Faktorisierung halten wir fest, dass der Morphismus $F^+ \to G$ auf einelementigen Überdeckungen schon aufgrund der Faktorisierungseigenschaft und dann auf größeren Überdeckung durch die Garbeneigenschaften von F^+ und G eindeutig festgelegt ist. □

Wir prüfen, dass wir so insbesondere eine Garbifizierung zu “garbenwertigen Garben” erhalten.

Lemma 1.35. *Die Kategorien* $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ *und* $\mathrm{Ab}_{/\mathrm{X}}$ *der (abelschen) Garben auf einem topologischen Raum X sind vollständig und kovollständig.*

Beweis. Die Kategorien der Mengen Ens ist vollständig und kovollständig. Somit ist auch die Kategorie der Prägarben auf X $[\mathrm{Off_X}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$ vollständig und kovollständig nach der Beschreibung von Limites in Funktorkategorien als objektweise Limites. Als Rechtsadjungierter der Garbifizierung vertauscht nun der Inklusionsfunktor $\iota : \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}} \to \mathrm{pEns}_{/\mathrm{X}}$ mit Limites, d. h. die Limites in $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ sind die Limites der zugehörigen Prägarben. Die Kolimites sind gegeben durch die Garbifizierungen der Prägarben-Kolimites. Es gilt mit dem Prägarbenkolimes $\mathrm{col}_i\, \iota F_i$ über ein System von Garben $F_i \in \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ für eine Garbe $G \in \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}((\mathrm{col}_i\, \iota F_i)^+, G) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{pEns}_{/\mathrm{X}}(\mathrm{col}_i\, \iota F_i, \iota G) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{col}_i\, \mathrm{pEns}_{/\mathrm{X}}(\iota F_i, \iota G) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{col}_i\, \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}(F_i, G). \end{aligned}$$

Derselbe Beweis gilt für $\mathrm{Ab}_{/\mathrm{X}}$ unter Verwendung der Vollständigkeit und Kovollständigkeit der abelschen Gruppen. □

Der Beweis hat nur benutzt, dass $\mathrm{pEns}_{/\mathrm{X}}$ vollständig und kovollständig ist und $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ eine volle Unterkategorie mit Linksadjungiertem zur Inklusion.

Definition 1.36. Eine volle Unterkategorie einer Kategorie, für die die Inklusion einen Linksadjungierten besitzt, heißt *reflektive* Unterkategorie. In diesem Fall heißt der Linksadjungierte *Reflektor.*

Wir halten fest:

Proposition 1.37. *Sei $C \subset D$ eine reflektive Unterkategorie. Ist D vollständig, so ist auch C vollständig mit denselben Limites. Ist D kovollständig, so ist auch C kovollständig mit den Reflektionen der Kolimites in D als Kolimites.*

Bezeichne wieder $\mathcal{B}$ die Kategorie der Basis durch Produktmengen der Produkttopologie auf $X \times Y$ mit Inklusionen als Morphismen.

Satz 1.38. *Seien X und Y topologische Räume. Dann gibt es eine Äquivalenz von Kategorien*

$$(\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}})_{/Y} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ens}_{/\mathcal{B}} \xleftarrow{\approx} \mathrm{Ens}_{/X\times Y}$$

gegeben durch

$$\begin{aligned} U \times V &\mapsto (F(V))(U) \quad \text{für } F \in (\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}})_{/Y} \text{ und} \\ U \times V &\mapsto F(U \times V) \quad \text{die Restriktion für } F \in \mathrm{Ens}_{/X\times Y} \end{aligned}$$

für $U \circledcirc X$ und $V \circledcirc Y$.

Beweis. Die zweite Äquivalenz ist **??**. Für die erste Äquivalenz bemerken wir wie in **??**, dass die zugrundeliegenden Prägarbenkategorien übereinstimmen. Nun fordert die Garbenbedingung für $\mathrm{Ens}_{/\mathcal{B}}$ die Verklebungseigenschaft für beliebige Überdeckungen von Basismengen durch Basismengen, während die Garbenbedingungen für $(\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}})_{/Y}$ die Verklebungseigenschaft für "Produkt-Überdeckungen" von Basismengen fordert, d. h. für Überdeckungen der Form $U \times V = \bigcup_{i,j} U_i \times V_j$ für $U = \bigcup_i U_i$ eine Überdeckung von U und $V = \bigcup_j V_j$ eine Überdeckung von V. Wir rechnen dies nach:

$$\begin{aligned} (F(V))(U) &= (\lim_j F(V_j))(U) \\ &= \lim_j F(V_j)(U) \\ &= \lim_j \lim_i F(V_j)(U_i) \end{aligned}$$

wobei im ersten Schritt die Garbenbedingung von $F \in (\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}})_{/Y}$, und im dritten die von $F(V_j) \in \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ verwendet wurde. Der zweite Schritt ist die Beschreibung von Limites in Funktorkategorien als objektweise Limites.

Beide Verklebungsbedingungen sind aber äquivalent, da eine beliebige Überdeckung von $U \times V$ natürlich mit den Projektionen auf X und Y Überdeckungen von U und V induziert und die Verträglichkeitsvoraussetzung für die Garbenbedingung von $\mathrm{Ens}_{/\mathcal{B}}$ bezüglich der Produktüberdeckung genau dann erfüllt ist, wenn sie für die ursprüngliche Überdeckung erfüllt ist. □

Bemerkung 1.39. Für abelsche Garben erhalten wir die analoge Aussage $(\mathrm{Ab}_{/\mathrm{X}})_{/Y} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ab}_{/X\times Y}$.

1.3.1 Exkurs: Überlagerungen von Produkträumen

Nachdem der vorangegangene Satz die étalen Räume über einem Produktraum $X \times Y$ beschreibt, möchten wir nun die Überlagerungen eines solchen Produktraums beschreiben. Wir können die Frage in unserer allgemeineren Terminologie formulieren.

Proposition 1.40. *Die Äquivalenz von Kategorien*

$$\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}} \rightleftarrows \text{étTop}_X$$

induziert eine Äquivalenz der vollen Unterkategorien

$${\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}}^{\mathrm{lk}} \rightleftarrows \mathrm{Üb}_X,$$

wobei ${\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}}^{\mathrm{lk}}$ *die lokal konstanten Garben auf X bezeichnet.*

Beweis. Die Äquivalenz induziert zunächst die Äquivalenz der vollen Unterkategorien der konstanten Garben und der trivialen Überlagerungen und dann bei lokaler Forderung der jeweiligen Eigenschaften die Aussage des Satzes. □

Wir erinnern an die überlagerungstheoretische Definition einfachen Zusammenhangs in der Sprache von Garben.

Definition 1.41. Ein topologischer Raum Y heißt einfach zusammenhängend, falls jede lokal konstante Garbe auf Y konstant ist.

Einfach zusammenhängende Räume sind somit insbesondere zusammenhängend, da wir sonst auf den Zusammenhangskomponenten triviale Überlagerungen wählen können, deren Fasern verschiedene Kardinalitäten haben.

Satz 1.42. *Seien X und Y topologische Räume, Y einfach zusammenhängend. Bezeichne $\pi : X \times Y \to X$ die Projektion. Dann induzieren die Funktoren*

$${\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}}^{\mathrm{lk}} \underset{\pi_*}{\overset{\pi^*}{\rightleftarrows}} \mathrm{Ens}^{\mathrm{lk}}_{/X \times Y}$$

eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweis. Der Isomorphismus $F \xrightarrow{\sim} \pi_* \pi^* F$ für $F \in {\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}}^{\mathrm{lk}}$ ist gerade die Aussage zu finalem Rückzug mit zusammenhängender Faser 1.21, da Y zusammenhängend ist als einfach zusammenhängender Raum.

Der Isomorphismus $\pi^* \pi_* F \xrightarrow{\sim} F$ für $F \in \mathrm{Ens}^{\mathrm{lk}}_{/X \times Y}$ folgt aus der Aussage zu faserkonstanten Garben 1.19, falls wir zeigen können, dass F konstant ist auf den Fasern von π. Tatsächlich ist aber $F|_{\pi^{-1}(x)}$ eine lokal konstante Garbe auf Y und mithin konstant wegen des einfachen Zusammenhangs von Y. □

1.3.2 Anwendung auf relativ schwach konstruierbare Garben

Wir bezeichnen als eine relativ zu X schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbare Garbe eine Garbe $F \in \mathrm{Ab}_{|\mathcal{K}| \times X}$, für die die Einschränkungen $F|_{|\sigma| \times X}$ Rückzüge von Garben auf X sind, es also ein $G \in \mathrm{Ab}_{/\mathrm{X}}$ gibt mit

$$F|_{|\sigma| \times X} \xrightarrow{\sim} \pi^* G$$

für $\pi : |\sigma| \times X \to X$ die Projektion.

Wir könnten nun für diesen Begriff dieselben Aussagen wie im vorangegangen Abschnitt mit vollkommen analogen Argumenten erneut beweisen. Kategorientheorie und unsere obige Charakterisierung von Garben auf Produkträumen ermöglichen uns aber ein einfacheres Vorgehen. Wir bemerken, dass für die Konstruktion unserer Kategorienbifaserung $\mathrm{Ab}_{/\!\!/ \mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ mitsamt ihren bekannten Eigenschaften und die darauf aufbauende Argumentation im vorangegangenen Abschnitt der Umstand keine Rolle gespielt hat, dass unsere Garben Werte in den abelschen Gruppen annnehmen. Dieselben Konstruktionen funktionieren für $\mathcal{A}_{/\!\!/ \mathrm{Top}}$ eine Garbenkategorie mit Werten in einer beliebigen vollständigen abelschen Kategorie. Davon überzeugt man sich im Zweifel auch explizit zunächst durch Übertragung auf Garbenkategorien mit Werten in R-Linksmoduln und dann durch den Einbettungssatz von Mitchell auf beliebige abelsche Kategorien.

Um den relativen Fall abzuschließen, werden diese Argumentation auf den Fall $\mathcal{A} = \mathrm{Ab}_{/\mathrm{X}}$ anwenden. Die benötigten homotopieinjektiven Auflösungen im Beweis erhalten wir dann durch unsere Äquivalenz $(\mathrm{Ab}_{/\mathrm{X}})_{/Y} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ab}_{/X\times Y}$. Wir erhalten:

Theorem 1.43. *Sei $\mathcal{K}$ ein Simplizialkomplex. Dann gibt es eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\mathrm{Der}(\text{s-Kons}(\mathcal{K}\times X)) \underset{R\beta}{\overset{\iota}{\rightleftarrows}} \mathrm{Der}_{\mathrm{sk}}(|\mathcal{K}|\times X),$$

wobei ι die Inklusion und $\beta = (p\times \mathrm{id}_X)^*(p\times \mathrm{id}_X)_* : \mathrm{Ab}_{|\mathcal{K}|\times X} \to \text{s-Kons}(\mathcal{K}\times X)$ ist.

Bemerkung 1.44. Der tieferstehende Grund für 1.38 und die sich daraus ergebende Möglichkeit, alle über $X = \mathrm{pt}$ gezeigten Aussagen auch zu relativieren, ergibt sich daraus, dass es sich bei Ens und $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ um *elementare Topoi* handelt, also Kategorien, die die wichtigsten Eigenschaften der Kategorie der Mengen verallgemeinern. Für die Übertragung von Aussagen von Ens auf einen Topos E verwendet man die *Mitchell-Bénabou-Sprache* ([MLM94], VI.5) von E. Die *Kripke-Joyal-Semantik* ([MLM94], VI.6) weist Formeln der Mitchell-Bénabou-Sprache wieder logische Aussagen zu. Mit dieser Übertragungstechnik bleiben Aussagen aus Ens in E gültig, wenn sie mittels ausschließlich *konstruktiver* Argumente beweisbar sind. Konkreter sind als Schlussregeln die Regeln des intuitionistischen Prädikatenkalküls erlaubt, die sich von den Schlussregeln der klassischen Logik unterscheiden: nicht erlaubt sind Widerspruchsargumente (kein Satz vom ausgeschlossenen Dritten) und die Verwendung des Auswahlaxioms ([MLM94], VI.5, letzter Absatz).

Kapitel 2

Simpliziale Mengen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit simplizialen Objekten in der Kategorie der Garben auf einem topologischen Raum X. Während Simplizialkomplexe ungerichtete Graphen verallgemeinern, verallgemeinern simpliziale Mengen gerichtete Graphen, und werden uns so bei der geometrischen Realisierung von Objekten in Diagrammkategorien von Garben zur Verfügung stehen.

2.1 Definition simplizialer Mengen

Wir betrachten die Menge Δ der nichtleeren endlichen Ordinalzahlen. Ihre Elemente sind von der Form $\{0, 1, \dots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, welche wir kurz mit $[n]$ bezeichnen werden. Wir verstehen diese Mengen $[n]$ als angeordnete Mengen.

Definition 2.1. Die Simplex-Kategorie Δ ist die Kategorie der endlichen nichtleeren Ordinalzahlen versehen mit monotonen Abbildungen als Morphismen.

Ist C eine Kategorie, so bezeichnen wir eine Prägarbe auf Δ mit Werten in C (d. h. einen Funktor $\Delta^{\mathrm{op}} \to C$) als simpliziales Objekt in C.

Unseren gewohnten Sprechweisen folgend nennen wir simpliziale Objekte in C auch kurz "simpliziale C" und sprechen etwa von simplizialen Mengen und simplizialen Garben. Wir notieren die Funktorkategorien simplizialer Objekte in C auch kurz mit $\mathrm{s}\,C = [\Delta^{\mathrm{op}}, C]$. Opponiert bezeichnen wir einen Funktor $\Delta \to C$ als kosimpliziales Objekt in C.

Für $X \in \mathrm{s}\,C$ ein simpliziales Objekt notieren wir kurz $X_n = X([n])$ und für eine monotone Abbildung $f : [m] \to [n]$ auch $f^* = X(f)$.

Die monotonen Abbildungen $[m] \to [n]$ werden von zwei besonders einfachen Klassen monotoner Abbildungen erzeugt: von den *Randabbildungen*, den eindeutigen Injektionen $d_i^n : [n-1] \to [n]$, die $i \in \{0, \dots, n\}$ nicht treffen, und den *Degenerationsabbildungen*, den eindeutigen Surjektionen $s_i^n : [n+1] \to [n]$, für die $i \in \{0, \dots n\}$ zweielementiges Urbild hat.

Lemma 2.2 ([GM96], I.2, ex. 1). *(i) Die Rand- und Degenerationsabbildungen erfüllen die Relationen*

$$\begin{aligned} d_j^{n+1} d_i^n &= d_i^{n+1} d_{j-1}^n \quad \textit{für} \quad i < j, \\ s_j^n s_i^{n+1} &= s_i^n s_{j+1}^{n+1} \quad \textit{für} \quad i \leq j, \\ s_j^{n-1} d_i^n &= \begin{cases} d_i^{n-1} s_{j-1}^{n-2} & \textit{für} \quad i < j, \\ \mathrm{id}_{[n-1]} & \textit{für} \quad i = j \textit{ oder } i = j+1, \\ d_{i-1}^{n-1} s_j^{n-2} & \textit{für} \quad i > j+1. \end{cases} \end{aligned}$$

(ii) Sei $f : [m] \to [n]$ monoton. Dann hat f eine eindeutige Darstellung

$$f = d_{i_1}^n \dots d_{i_s}^{n-s+1} s_{j_t}^{m-t} \dots s_{j_1}^{m-1}$$

mit $n \geq i_1 > \cdots > i_s \geq 0$, $m > j_1 > \cdots > j_t \geq 0$ und $n = m - t + s$.

(iii) Die vom Köcher der endlichen nichtleeren Ordinalzahlen mit den Rand- und Korandabbildungen und den angegebenen Relationen auf den Morphismenmengen erzeugte Pfadkategorie ist isomorph zu Δ.

Beweis. (i) Durch Bildchen Zeichnen oder explizites Nachrechnen: Wir werten beide Abbildungen simultan auf allen Elementen aus und erhalten zum Beispiel für die erste Aussage:

$$\begin{aligned} & (0, 1, \dots, i-1, i, i+1, \cdots, j-2, j-1, j, \cdots, n-1) \\ \xmapsto{d_i^n} \; & (0, 1, \cdots, i-1, i+1, i+2, \cdots, j-1, j, j+1, \cdots, n) \\ \xmapsto{d_j^{n+1}} \; & (0, 1, \cdots, i-1, i+1, i+2, \cdots, j-1, j+1, j+2, \cdots, n+1) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} & (0, 1, \cdots, i-1, i, i+1, \cdots, j-2, j-1, j, \cdots, n-1) \\ \xmapsto{d_{j-1}^n} \; & (0, 1, \cdots, i-1, i, i+1, \cdots, j-2, j, j+1, \cdots, n) \\ \xmapsto{d_i^{n+1}} \; & (0, 1, \cdots, i-1, i+1, i+2, \cdots, j-1, j+1, j+2, \cdots, n+1). \end{aligned}$$

(ii) In einer solchen Darstellung gibt $m - t$ die Anzahl der Funktionswerte der Abbildung an, die j_k beschreiben die Partition von $(0, \cdots, m)$ in zusammenhängende Abschnitte mit demselben Funktionswert und die i_k bestimmen die Funktionswerte selbst.

(iii) Jeden Morphismus in der Pfadkategorie, d. h. jedes Tupel komponierbarer Rand- und Degenerationsabbildungen kann mit den Relationen aus dem ersten Teil auf eine Form wie in (ii) gebracht werden. Umgekehrt ist nach (ii) jede monotone Abbildung aber auch als ein solcher Pfad darstellbar. Den Isomorphismus definiert also der Funktor, der auf Objekten durch die Identität und auf Morphismen durch die offensichtliche Zuordnung der Erzeuger der Pfadkategorie auf die jeweiligen Rand- und Degenerationsabbildungen gegeben ist.

□

Die einfachsten Beispiele nichttrivialer simplizialer Mengen sind die Standard-n-Simplizes:

Definition 2.3. Die darstellbare simpliziale Menge $\Delta^n := \Delta(\cdot, [n])$ heißt *Standard-n-Simplex.*

Wir erhalten den Funktor

$$\begin{aligned} |\Delta| : \Delta^{\mathrm{op}} &\to \mathrm{s\,Ens}, \\ [n] &\mapsto \Delta^n = \Delta(\cdot, [n]), \end{aligned}$$

der auf Morphismen durch Vorschalten gegeben ist, welches wir mit $f \mapsto f^*$ notieren.

Ist $X \in \mathrm{s\,Ens}$ eine simpliziale Menge, so bezeichnen wir $X_n := X([n])$ als die Menge der n-Simplizes von X. Nun sind die n-Simplizes von X gerade die "Bilder des n-ten Standardsimplizes in X" sind, präziser

$$X_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{s\,Ens}(\Delta^n, X). \tag{2.1}$$

In der Tat besagt das Yoneda-Lemma, dass die Transformationen des freien Funktors $\Delta^n = \Delta(\cdot, [n])$ zum Funktor X in natürlicher Bijektion stehen zu $X([n])$.

Das anschließende Lemma zeigt, dass sich eine simpliziale Menge X vollständig durch ihre Simplizes $\Delta^n \to X$ verstehen lässt. Dazu erklären wir zunächst Slice-Kategorien, Kategorien von Objekten über einem gegebenen Objekt bzw. Spezialfälle von Komma-Kategorien.

Definition 2.4. Sei $r : C \to D$ ein Funktor und $X \in D$ ein Objekt. Dann bezeichnet $C \downarrow_r X$ die Slice-Kategorie der Objekte von C über X mittels r, deren Objekte Objekte $Y \in C$ samt einem Morphismus $\pi_Y : rY \to X$ sind und deren Morphismen Morphismen $f : Y \to Z$ in C sind, für die rf ein Morphismus über X ist, d. h. $\pi_Y = \pi_Z \circ rf$ gilt.

Es handelt sich gewissermaßen um den Schnitt des Bildes des Funktors r mit der Über-Kategorie C_X.

Wir bezeichnen die Slice-Kategorie $\Delta \downarrow_r X$ als die Simplexkategorie von X. Konkret ist darin ein Objekt ein Morphismus $\Delta^n \to X$ und ein Morphismus ein von $[n] \to [m]$ induzierter Morphismus simplizialer Mengen $\Delta^n \to \Delta^m$ über X.

Lemma 2.5. *Sei $X \in \mathrm{s\,Ens}$ eine simpliziale Menge. Dann gilt*

$$X \xrightarrow{\sim} \mathrm{col}_{\Delta^n \to X} \Delta^n,$$

mit dem Kolimes über die Simplexkategorie von X.

Beweis. Bezeichne K obigen Kolimes. Das System, über das der Kolimes gebildet wird, sichert uns nach der universellen Eigenschaft des Kolimes einen Morphismus $K \to X$. Wir müssen also zeigen, dass dieser Bijektionen auf den n-Simplizes induziert. Tatsächlich definiert ein n-Simplex $\Delta^n \to K$ durch Nachschalten von $K \to X$ einen n-Simplex in X. Diese Zuordnung ist bijektiv, denn wir erhalten eine Umkehrabbildung, wenn wir $\Delta^n \to X$ den zugehörigen Morphismus in den Kolimes $\Delta^n \to K$ zuordnen. $\square$

Der Beweis benötigte keine konkreten Eigenschaften der simplizialen Mengen. Wir halten mit wörtlich übertragenen Beweis allgemein fest:

Proposition 2.6. *Sei $F : C \to \mathrm{Ens}$ ein Funktor. Dann ist F ein Kolimes über darstellbare Funktoren $C(X, \cdot)$.*

Beweis. Wir betrachten mittels des Funktors $r : C \to \mathrm{Ens}^C, X \mapsto C(X, \cdot)$ die Slice-Kategorie $C \downarrow_r F$ der darstellbaren Funktoren über F und dann das System in Ens^C, das daraus durch Vergessen der Transformationen nach F hervorgeht. Wir bezeichnen wieder den Kolimes darüber mit K und erhalten mit der universellen Eigenschaft eine Tranformation $K \Rightarrow F$. Diese ist eine Isotransformation, wenn sie auf allen Objekten $X \in C$ Bijektionen $KX \xrightarrow{\sim} FX$ induziert. Nach dem Yoneda-Lemma entsprechen diese den Transformationen $C(X, \cdot) \Rightarrow K$ bzw. $C(X, \cdot) \Rightarrow F$. Diese stehen aber nach der universellen Eigenschaft des Kolimes und der Definition der Kategorie $C \downarrow_r F$ in Bijektion durch Nachschalten von $K \Rightarrow F$. □

Bemerkung 2.7. Dies folgt später auch sofort aus der Dichteformel für Koenden 3.15 und 3.4.

2.2 Der kosimpliziale Raum der Standardsimplizes

Die geometrsiche Realsierung einer simplizialen Menge soll sich mit geeigneten Identifikationen aus den geometrischen Realisierungen von Standard-n-Simplizes zusammensetzen. Diese definieren wir als die abgeschlossenen geometrischen Standard-n-Simplizes

$$|\Delta^n| = \left\{ (x_0, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, 0 \leq x_i \leq 1, \sum_{i=0}^{n} x_i = 1 \right\}.$$

Es wird sich später herausstellen, dass es sich hierbei tatsächlich um die geometrische Realisierung der kombinatorischen Standard-n-Simplizes Δ^n handelt, dies rechtfertigt die Notation.

Ein Morphismus $f : [m] \to [n]$ induziert eine stetige Abbildung $|f| : |\Delta^m| \to |\Delta^n|$ auf den zugehörigen Simplizes. Nach 2.2 reicht es, diese für Rand- und Degenerationsabbildungen anzugeben. Für die Randabbildung $|d_i^n| : |\Delta^{n-1}| \to |\Delta^n|$ $(0 \leq i \leq n)$ handelt es sich dabei um die Inklusion der i-ten Kante, d. h. in Koordinaten das Einfügen einer Null an der i-ten Stelle, für die Degenerationen $|s_i^n| : |\Delta^{n+1}| \to |\Delta^n|$ $(0 \leq i \leq n)$ um den Kollaps der i-ten direkten Kante, d. h. in Koordinaten die Ersetzung der i-ten und ihrer darauffolgenden Koordinate durch ihre Summe. In Formeln:

$$\begin{aligned} |d_i^n|(x_0, \cdots, x_{n-1}) &= (x_0, \cdots, x_{i-1}, 0, x_i, \cdots, x_{n-1}), \\ |s_i^n|(x_0, \cdots, x_{n+1}) &= (x_0, \cdots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{n+1}). \end{aligned}$$

Wir erhalten einen Funktor $|\Delta| : \Delta \to \mathrm{Top}, [n] \mapsto |\Delta^n|$, genannt der *kosimpliziale Raum der Standardsimplizes.*

Bemerkung 2.8 ([Moe95], III.1.1). Eine alternative Darstellung der geometrischen Standard-n-Simplizes ist für $I = [0, 1]$ das Einheitsintervall mit Endpunkten 0, 1 und Anordnung $\leq$:

$$|\Delta^n| = \{(x_1, \cdots, x_n) \in I^n \mid x_1 \leq \cdots \leq x_n\}$$

mit den Inklusionen von Rändern $|d_i^n| : |\Delta^{n-1}| \to |\Delta^n|$, $0 \leq i \leq n$:

$$|d_i^n|(x_1, \cdots, x_{n-1}) = \begin{cases} (0, x_1, \cdots, x_{n-1}) & i = 0, \\ (x_1, \cdots, x_{n-1}, 1) & i = n, \\ (x_1, \cdots, x_i, x_i, \cdots, x_{n-1}) & \text{sonst} \end{cases}$$

und Kollapsen von Kanten $|s_i^n| : |\Delta^{n+1}| \to |\Delta^n|$, $0 \leq i \leq n$, durch Vergessen der $(i+1)$-ten Koordinate

$$|s_i^n|(x_1, \cdots x_{n+1}) = (x_1, \cdots, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{n+1}).$$

Man beachte, dass die Konstruktion nur einen angeordneten topologischen Raum mit Minimum 0 und Maximum 1 benötigt, und sich auf solche "verallgemeinerten Intervalle" überträgt. Der Sierpinski-Raum aus einem offenen dichten Punkt 1 und einem abgeschlossenen Punkt 0 ist etwa solch ein verallgemeinertes Intervall.

Bemerkung 2.9. Wie im Fall der Simplizialkomplexe möchten wir neben der anschaulich-geometrischen Realisierung durch lokal reelle Räume auch noch eine kombinatorischere Realisierung analog zur Ordnungstopologie auf dem Simplizialkomplex finden. Nahe liegt es, die Standard-n-Simplizialkomplexe mit ihrer Ordnungsgtopologie zu verwenden. Wir konstruieren sie als Quotienten der reellen Standardsimplizes, werden aber später sehen, dass sie uns bei der kombinatorischen Beschreibung von Garben auf simplizialen Mengen nicht weiterhelfen.

Wir definieren die *plumpen Standard-n-Simplizes* $\blacktriangle^n$ Quotienten induktiv konstruierter Äquivalenzrelationen:

$$\blacktriangle^0 := |\Delta^0| = \mathrm{pt}$$

und

$$\blacktriangle^n := |\Delta^n| / \sim$$

mit der Äquivalenzrelation

$$\begin{aligned} x \sim y \qquad & \text{für } x, y \in \operatorname{int} |\Delta^n| \text{ und} \\ |d_i| x \sim |d_i| y \qquad & \text{für } x \sim y \in |\Delta^{n-1}|. \end{aligned}$$

Dabei steht $\operatorname{int} |\Delta^n|$ für das offene Innere von $|\Delta^n| \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Anschaulich gesprochen wird also bei $|\Delta^n| \to \blacktriangle^n$ das offene Innere zu einem Punkt identifiziert und eine solche Identifikation auch auf allen Rändern vorgenommen. Der offene Punkt im Inneren ist dicht, wir nennen ihn auch den *generischen Punkt* von $\blacktriangle^n$.

Beispiel 2.10. *Der plumpe Standard-*1*-Simplex ist ein dreipunktiger Raum mit einem offenen dichten Punkt und zwei abgeschlossenen Punkten, eine Variante des Sierpinski-Raums. Der plumpe Standard-*2*-Simplex ist siebenpunktig.*

Lemma 2.11. *Die stetigen Abbildungen* $|f| : |\Delta^m| \to |\Delta^n|$ *für monotones* $f : [m] \to [n]$ *induzieren stetige Abbildungen* $\overline{|f|} : \blacktriangle^m \to \blacktriangle^n$*, sodass*

$$\begin{tikzcd} |\Delta^m| \arrow[r, "|f|"] \arrow[d] & |\Delta^n| \arrow[d] \\ \blacktriangle^m \arrow[r, "\overline{|f|}"] & \blacktriangle^n \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. Für die Randabbildungen $|d_i|$ folgt das sofort aus der Definition der Äquivalenzrelation. Die Menge $\operatorname{int}|\Delta^m|$ wird beschrieben durch die Menge der Punkte $(x_0, \cdots, x_m)$, für die alle Koordinaten echt positiv sind. Diese Beschreibung ist invariant unter Addition mittlerer Koordinaten. Dies zeigt die Wohldefiniertheit der induzierten Abbildung $\overline{|s_i|} : \blacktriangle^m \to \blacktriangle^{m-1}$ für im Inneren identifizierte Punkte. Genauso argumentiert man auf den Rändern. □

Diese Transformation liefert den kosimplizialen Raum $\blacktriangle : \Delta \to \mathrm{Top}, [n] \mapsto \blacktriangle^n$ der plumpen Standardsimplizes.

2.3 Geometrische Realisierung simplizialer Mengen

Wir erklären nun die geometrische Realisierung simplizialer Mengen. Der Unterschied zur geometrischen Realsierung von Simplizialkomplexen ist im Wesentlichen die Möglichkeit, Simplizes wiederzuverwenden und zu degenerieren, was zu Identifikationen in der geometrischen Realisierung führt. Ein Fall von "Wiederverwendung" ist etwa die Realisierung der S^1 als 1-Simplex, dessen Endpunkte übereinstimmen. Degeneration bedeutet, dass niedererdimensionale Simplizes auch die Rolle höherdimensionaler Simplizes übernehmen können. Wir können etwa unser Beispiel modifizieren und die S^n als n-Simplex realisieren, bei dem alle niederdimensionalen Kanten in einem Punkt zusammenfallen.

Die geometrische Realisierung von Standard-n-Simplizes haben wir gerade gesehen. Nun fordern wir, dass sich die Realisierung mit Kolimites vertrage:

$$|\operatorname{col}_i X_i| \xrightarrow{\sim} \operatorname{col}_i |X_i|. \tag{2.2}$$

Wenn dies der Fall sein soll, so müssen wir mit der Darstellung

$$X := \operatorname{col}_{\Delta^n \to X} \Delta^n$$

aus **??** auf jeden Fall setzen

$$|X| := \operatorname{col}_{\Delta^n \to X} |\Delta^n|. \tag{2.3}$$

Debei wird der Kolimes wieder über die Simplexkategorie von X gebildet, nun allerdings mit den induzierten stetigen Abbildungen aus Gleichung **??** als Systemmorphismen.

Ein Morphismus simplizialer Mengen $X \to Y$ induziert nun durch Nachschalten von $X \to Y$ einen Funktor auf den Simplexkategorien $\Delta \downarrow X \to \Delta \downarrow Y$ und damit auch auf den Kolimites eine stetige Abbildung $|X| \to |Y|$. Wir erhalten also den Funktor der geometrischen Realisierung $|\cdot| : \mathrm{s\,Ens} \to \mathrm{Top}$.

Unsere Konstruktion erfüllt tatsächlich:

Proposition 2.12. *Der Funktor der geometrischen Realisierung simplizialer Mengen $|\cdot|$ vertauscht mit beliebigen Kolimites über kleine Indexkategorien.*

Beweis. Zu zeigen ist, dass die Bildung der Simplexkategorie mit Kolimites vertauscht, d. h. für einen Funktor $X : I \to \mathrm{s\,Ens}$ gilt:

$$\Delta \downarrow_r \mathrm{col}_i\, X_i \xrightarrow{\sim} \mathrm{col}_i\, \Delta \downarrow_r X_i.$$

In der Funktorkategorie s Ens erhalten wir Bijektionen zwischen den Mengen von n-Simplizes

$$(\mathrm{col}_i\, X_i)_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{col}_i (X_i)_n.$$

Diese sind mit den Morphismen in Δ verträglich. □

Wie ganz allgemein können wir den Kolimes topologischer Räume auch explizit mittels Koprodukt und Koegalisator ausschreiben. Wir verstehen die Mengen X_n als diskrete topologische Räume und erhalten:

$$|X| \xrightarrow{\sim} (\bigsqcup_n X_n \times |\Delta^n|)/\sim$$

mit der Quotiententopologie, die durch die von

$$(x, |f|(p)) \sim (f^* x, p)$$

für alle monotonen $f : [m] \to [n]$ erzeugte Äquivalenzrelation gegeben ist.

2.4 Sparsame Realisierung durch nichtdegenerierte Simplizes

Während die Definition simplizialer Mengen und ihrer Realisierung mit Degenerationsabbildungen wie gesehen von einem formalen Standpunkt aus sehr elegant ist, ist für die konkrete Arbeit häufig eine explizitere Form der Realisierung praktischer, die "unnötige Simplizes von vornherein weglässt".

Definition 2.13 ([GM96], I.2.9)**.** Sei $X \in \mathrm{s\,Ens}$ eine simpliziale Menge. Ein Simplex $x \in X_n$ heißt degeneriert, falls es einen Simplex $y \in X_m$ und eine surjektive monotone Abbildung $s : [n] \to [m], n > m$ gibt mit $x = s^* y$.

Andernfalls heißt ein Simplex nichtdegeneriert. Für $X \in \mathrm{s\,Ens}$ bezeichne NX_n die Menge der nichtdegenerierten n-Simplizes von X.

Lemma 2.14. *Sei $X \in \mathrm{s\,Ens}$ eine simpliziale Menge und $x \in X_n$ ein n-Simplex. Dann gibt es eine eindeutige Darstellung $x = s^* y$ für $y \in NX_m$ einen nichtdegenerierten Simplex von X und $s : [n] \to [m]$ eine surjektive monotone Abbildung.*

Beweis. Ist x nichtdegeneriert, wähle $y = x$ und $s = \mathrm{id}_{[n]}$. Andernfalls gibt es nach Definition ein y und eine Surjektion mit der gewünschten Eigenschaft. Diese sind eindeutig nach den Relationen aus 2.2. $\square$

Wir notieren für eine solche Darstellung $x = s^*y$ auch $y = N(x)$ oder zur Bewahrung der Information über s auch $y = N_s(x)$.

Wir definieren nun die *sparsame geometrsiche Realisierung* einer simplizialen Menge X wie folgt:

$$\|X\| := \bigsqcup_n NX_n \times |\Delta^n| / \sim_N,$$

wobei wie gehabt NX_n die diskrete Topologie trägt und die Äquivalenzrelation erzeugt ist von

$$(x, |d_i|(p)) \sim_N (N_s(d_i^* x), |s|(p)),$$

mit der eindeutigen Darstellung Degenerierter aus 2.14. Diese Äquivalenzrelation lässt sich interpretieren als das Umgehen der mittleren Schritte in der Rechnung

$$(x, d_i p) \sim (d_i^* x, p) \sim (s^* y, p) \sim (y, |s|(p))$$

mit $y = N_s(d_i^* x)$.

Satz 2.15. *Die von der Inklusion*

$$\bigsqcup_n NX_n \times |\Delta^n| \hookrightarrow \bigsqcup_n X_n \times |\Delta^n|$$

induzierte Abbildung $\|X\| \xrightarrow{\sim} |X|$ *ist ein Homöomorphismus.*

Beweis. Die Abbildung existiert und ist stetig nach der universellen Eigenschaft topologischer Quotienten, denn die Äquivalenzrelation $\sim$ umfasst $\sim_N$. Sie ist bijektiv, denn für die dazukommenden Punkte in degenerierten Simplizes s^*x gilt ohnehin $(s^*x, p) \sim (x, |s|(p))$. Weiter ist sie offen: Ist $U \mathrel{\subset\!\!\circ} \|X\|$ eine offene Teilmenge, so berechnen wir ihr Bild in $|X|$ durch das Bild ihres Urbilds V in $\bigsqcup_n NX_n \times |\Delta^n|$ unter

$$\bigsqcup_n NX_n \times |\Delta^n| \hookrightarrow \bigsqcup_n X_n \times |\Delta^n| \xrightarrow{q} |X|.$$

Bezeichne $\overline{V}$ den Abschluss von $V \mathrel{\subset\!\!\circ} \bigsqcup_n X_n \times |\Delta^n|$ unter $\sim$-Äquivalenz. Es gilt $\overline{V} = q^{-1}(q(V))$ und wir müssen nach Definition der Quotiententopologie zeigen, dass $\overline{V}$ offen ist. Bezeichne für x einen nichtdegenerierten Simplex von X den Schnitt von V mit dem zu x gehörigen geometrischen Simplex $|\Delta^n|$ mit V_x. Bei Übergang von V zu $\overline{V}$ kommen dann alle Punkte (s^*x, p) mit $(x, |s|(p)) \in U_x$ hinzu. Das Urbild der offenen Menge U_x unter dem stetigen s-Kollaps $|s|$ ist dann natürlich wieder offen. $\square$

Beispiel 2.16. *Mit diesem Satz kann man sich geometrische Realisierungen sofort veranschaulichen. Die Realisierung einer simplizialen Menge mit einem nichtdegenerierten* n*-Simplex* ($n \geq 1$) *und einem nichtdegenerierten* 0*-Simplex ist etwa die* n*-Sphäre.*

Beispiel 2.17. *Die geometrische Realisierung mittels plumper Simplizes dieser Standard-Darstellung der S^n als simpliziale Menge liefert den Sierpinski-Raum bestehend aus einem offenen dichten und einem abgeschlossenen Punkt. Dies zeigt, dass die plumpe Realisierung für unsere Zwecke zu grob ist und sich in 4.2 nicht für die Übertragung der Aussagen über schwach konstruierbare Garben auf Simplizialkomplexen eignen wird.*

2.5 Iterative Konstruktion der geometrischen Realisierung

Wir geben eine weitere Interpretation der geometrischen Realisierung als iteratives Ankleben geometrischer Simplizes an ihre Ränder an und werden so insbesondere sehen, dass die geometrische Realisierung einen Hausdorffraum liefert ([Moe95], III.1).

Bezeichne dazu $\|X^{\leq k}\| = \bigsqcup_{n=0}^k NX_n \times |\Delta^n| / \sim_N$ die geometrische Realisierung durch nichtdegenerierte Simplizes der Dimension $\leq k$. Wir erhalten Einbettungen $\|X^{\leq k}\| \hookrightarrow \|X\|$ sowie $\|X\| = \bigcup_k \|X^{\leq k}\|$, denn die Äquivalenzrelation von ganz $\|X\|$ fügt keine neuen Identifikationen auf den Teilmengen $\|X^{\leq k}\| \subset \|X\|$ hinzu.

Wir können die $\|X^{\leq k}\|$ iterativ konstruieren. Betrachte dazu die stetigen Abbildungen π_k, die uns den "k-dimensionalen Teil" von $\|X\|$ liefern:

$$\pi_k : NX_k \times |\Delta^k| \hookrightarrow \bigsqcup_{n=0}^{k} NX_n \times |\Delta^n| \twoheadrightarrow \|X^{\leq k}\|.$$

Proposition 2.18 ([Moe95], III.1, [GJ09], I.2.3)**.** *Sei $X \in \mathrm{s\,Ens}$ eine simpliziale Menge. Dann ist*

$$\begin{tikzcd}
NX_k \times \partial|\Delta^k| \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & NX_k \times |\Delta^n| \arrow[d, "\pi_k"] \\
\|X^{\leq k-1}\| \arrow[r, hook] & \|X^{\leq k}\|
\end{tikzcd}$$

ein Pushout topologischer Räume. Dabei ist die Abbildung links auf der i-ten Kante $|d_i| : |\Delta^{k-1}| \hookrightarrow \partial|\Delta^k|$ gegeben durch

$$\begin{aligned} NX_k \times |\Delta^{k-1}| &\to \|X^{\leq k-1}\| \\ (x,p) &\mapsto [(N_s(d_i^* x), |s|(p))]. \end{aligned}$$

Beweis. Die Definition der Abbildung links ist sinnvoll, da sie auf den niederdimensionalen Überschneidungskanten von $|d_i||\Delta^k|$ und $|d_j||\Delta^k|$ übereinstimmt.

Sowohl der Pushout des Diagramms als auch $\|X^{\leq k}\|$ sind Quotienten von $\bigsqcup_{n=0}^k NX_n \times |\Delta^n|$ nach gewissen Äquivalenzrelationen. Bezeichne die Einschränkung von $\sim_N$ auf $\bigsqcup_{n=0}^k NX_n \times |\Delta^n|$ mit $\sim_N^k$. Die erzeugenden Relationen für $\sim_N^k$ sind:

$$(x, |d_i|(p)) \sim (N_s(d_i^* x), |s|(p)) \quad \text{für} x \in NX_n, n \leq k.$$

Das sind für $x \in NX_n$ und $n \leq k-1$ genau die erzeugenden Relationen von $\sim_N^{k-1}$ und für $n = k$ genau die Relationen aus der Definition des Pushouts. $\square$

Korollar 2.19. *Die geometrische Realisierung $|X|$ einer simplizialen Menge $X \in \mathrm{s\,Ens}$ ist ein CW-Komplex und insbesondere ein Hausdorffraum.*

Beweis. Die vorangegangene Proposition zeigt, dass es sich um einen CW-Komplex handelt. Die Pushouts sind dabei das Ankleben von k-Zellen $D^k \cong |\Delta^k|$. Konkret zur Hausdorff-Eigenschaft: Seien $p, q \in \|X\|$, $p \neq q$. Dann gibt es ein k mit $p, q \in \|X^{\leq k}\| \setminus \|X^{\leq k-1}\|$. Somit liegt ohne Einschränkung p im Inneren eines k-Simplizes und kann ohne Probleme durch disjunkte offene Umgebungen $U_k, V_k \overset{\circ}{\subset} \|X^{\leq k}\|$ von Randpunkten dieses Simplexes und Punkten in anderen Simplizes getrennt werden. Wir erhalten daraus disjunkte offene Umgebungen U und V in ganz $|X|$, indem wir sie "baryzentrisch ergänzen": Sei dazu zu jedem geometrischen Standardsimplex $|\Delta^n|$ ein ausgezeichneter Punkt z_n in seinem offenen Inneren fest gewählt (etwa das Baryzentrum). Wir setzen für $n \geq k$ induktiv

$$U_{n+1} = \Big\{ [(y,r)] \in \|X^{\leq n+1}\| \;\Big|\; \begin{array}{l} y \in NX_{n+1}, \exists t \in (0,1], w \in |\Delta^n| : \\ (d_i^* y, w) \in U_n, r = tw + (1-t) z_y \end{array} \Big\},$$

den konvexen Abschluss zu z_y von U_n in den an U_n angrenzenden Simplizes y und dann $U = \bigcup_{n \geq k} U_n$ sowie V entsprechend. Diese Teilmengen sind nach Induktion disjunkt, offen und enthalten p bzw. q. □

Bemerkung 2.20. Nach dem Korollar kann die geometrische Realisierung einer simplizialen Menge disjunkt in ihre Zellen, die Bilder der offenen Inneren ihrer nichtdegenerierten Simplizes, zerlegt werden.

2.6 Kompakt erzeugte Hausdorffräume

Die geometrischen Realisierungen simplizialer Mengen liegen tatsächlich sogar in einer in ihren kategoriellen Eigenschaften bequemen (engl. *convenient*) Kategorie topologischer Räume, den kompakt erzeugten Hausdorffräumen.

Definition 2.21 ([Ste67])**.** Ein topologischer Raum X heißt kompakt erzeugt, falls gilt: eine Teilmenge $A \subset X$ ist abgeschlossen, falls $A \cap K$ in K abgeschlossen ist für jedes Kompaktum $K \subset X$.

Bemerkung 2.22. Äquivalent dazu ist: eine Teilmenge $U \subset X$ ist offen, falls $U \cap K$ in K offen ist für jedes Kompaktum $K \subset X$.

Wir notieren volle Unterkategorie der kompakt erzeugten topologischen Räume in den topologischen Räumen mit CG und der kompakt erzeugten Hausdorffräume mit CGHaus. Die kompakt erzeugten topologischen Räume umfassen eine sehr große Klasse an relevanten topologischen Räumen, etwa CW-Komplexe (nach dem nachfolgenden Lemma 2.23) oder erstabzählbare Räume ([Ste67], 2.2).

Für uns relevant sind die folgenden Kriterien:

Lemma 2.23. *(i) Ist X ein lokal kompakter topologischer Raum, so ist X kompakt erzeugt.*

(ii) *Ist $p : X \twoheadrightarrow Y$ eine Quotientenabbildung (d. h. Y trägt die Finaltopologie bezüglich p) und X kompakt erzeugt, so ist auch Y kompakt erzeugt.*

(iii) *Ist X ein CW-Komplex, so ist X kompakt erzeugt.*

Dabei heißt ein topologischer Raum *lokal kompakt* (im schwachen Sinne), falls jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt. Beachte den Unterschied zu **??** und **??**.

Beweis. (i) Sei $U \subset X$ mit $U \cap K$ offen für alle $K \subset X$ kompakt. Mit der Lokalkompaktheit von X wählen wir zu jedem $x \in X$ eine kompakte Umgebung K_x und erhalten, dass $U = \bigcup_{x \in X} U \cap K_x$ offen ist als Vereinigung offener Mengen.

(ii) Sei $A \subset Y$ mit $A \cap K$ abgeschlossen für alle $K \subset Y$ kompakt. Mit der Finaltopologie auf Y gilt, dass $A \subset Y$ genau dann abgeschlossen ist, wenn $p^{-1}(A) \subset X$ abgeschlossen ist. Sei nun $\tilde{K} \subset X$ kompakt. Es ist $p^{-1}(A) \cap \tilde{K}$ abgeschlossen, denn $p(p^{-1}(A) \cap \tilde{K}) = p(\tilde{K}) \cap A$ ist abgeschlossen nach Voraussetzung ($p(\tilde{K}) \subset Y$ ist kompakt als stetiges Bild eines Kompaktums). Da X kompakt erzeugt ist, folgt nun, dass $p^{-1}(A)$ abgeschlossen ist und somit auch $A \subset Y$.

(iii) Die n-Bälle D^n und $n-1$-Sphären S^{n-1} sind kompakt erzeugt nach (i). Disjunkte Vereinigungen kompakt erzeugter Räume sind kompakt erzeugt. Quotienten kompakt erzeugter Räume sind kompakt erzeugt nach (ii). Da kompakte Teilmengen von CW-Komplexen nur endlich viele offene Zellen treffen, ist auch die Vereinigung über alle n-Skelette kompakt erzeugt.

□

Mit diesen Kriterien folgt sofort unser Ziel.

Korollar 2.24. *Die geometrische Realisierung $|X|$ einer simplizialen Menge $X \in \mathrm{s\,Ens}$ ist ein kompakt erzeugter Hausdorffraum.*

Beweis. Es handelt sich um einen Hausdorffraum nach 2.19. Nach 2.23 (i) ist $\coprod_n X_n \times |\Delta^n|$ kompakt erzeugt und mit 2.23 (ii) auch $|X|$. Das folgt auch aus 2.19 und 2.23 (iii). □

Der entscheidende Grund, in der Kategorie CGHaus statt in Top zu arbeiten, ist die Existenz eines internen Hom.

Theorem 2.25 ([GZ67], III, 2.1.2)**.** *Die Kategorie* CGHaus *der kompakt erzeugten Hausdorffräume ist kartesisch abgeschlossen.*

Aus der Adjunktion $(\times Y, Y \Rightarrow)$ folgt auch die Rechtsexaktheit von Produkten in CGHaus.

Satz 2.26 ([GZ67], III, 3)**.** *Die geometrische Realisierung $|\cdot| : \mathrm{s\,Ens} \to \mathrm{CGHaus}$ vertauscht mit endlichen Limites.*

Bemerkung 2.27. Entscheidend ist, dass das Produkt in Top zweier kompakt erzeugter Hausdorffräume im Allgemeinen nicht wieder kompakt erzeugt ist. Das korrekte Produkt in CGHaus heißt auch *Kelley-Produkt* und wird notiert $X \times_{Ke} Y$. Es ist gegeben durch Anwenden des Rechtsadjungierten der Inklusion $\mathrm{CG} \to \mathrm{Top}$ auf das Produkt in Top. Dieser Rechtsadjungierte $k : \mathrm{Top} \to \mathrm{CG}$ verfeinert die Topologie eines Raumes X um alle Mengen $U \subset X$, deren Schnitte mit allen Kompakta $K \subset X$ in K offen sind, also genau um die für kompakte Erzeugtheit benötigten. Es gilt also:

$$|X \times Y| \xrightarrow{\sim} k(|X| \times |Y|).$$

Beweisskizze. ([GZ67], III, 3) Ganz allgemein lassen sich endliche Limites als Egalisatoren endlicher Produkte darstellen. Für die Egalisatoren verweisen auf [GZ67], III, 3.3. Für das Vertauschen mit endlichen Produkten zeigt man, dass die Aussage für Standardsimplizes gilt, es also einen Homöomorphismus $|\Delta^n \times \Delta^m| \xrightarrow{\sim} |\Delta^n| \times |\Delta^m|$ gibt, siehe [GZ67], III, 3.4. Dann folgt die Aussage sofort aus dem Vertauschen des Produkts in CGHaus mit Kolimites als linksadjungierter Funktor des internen Hom in CGHaus (2.25):

$$\begin{aligned}
|X \times Y| &\xrightarrow{\sim} |\operatorname{col}_{\Delta\downarrow r X} \Delta^n \times \operatorname{col}_{\Delta\downarrow r Y} \Delta^m| \\
&\xrightarrow{\sim} \operatorname{col}_{\Delta\downarrow r X} \operatorname{col}_{\Delta\downarrow r Y} |\Delta^n \times \Delta^m| \\
&\xrightarrow{\sim} \operatorname{col}_{\Delta\downarrow r X} \operatorname{col}_{\Delta\downarrow r Y} (|\Delta^n| \times_{Ke} |\Delta^m|) \\
&\xrightarrow{\sim} |\operatorname{col}_{\Delta\downarrow r X} \Delta^n| \times_{Ke} |\operatorname{col}_{\Delta\downarrow r Y} \Delta^m|) \\
&\xrightarrow{\sim} |X| \times_{Ke} |Y|.
\end{aligned}$$

□

Beispiel 2.28 ([Eng77], 3.3.29)**.** *Ein Produkt in* Top *zweier kompakt erzeugter Hausdorff-Räume ist im Allgemeinen nicht wieder kompakt erzeugt. Ein Beispiel ist das Produkt* $X \times Y$ *mit* $X = \mathbb{R} \setminus 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$ *mit der Teilraumtopologie und* Y *einem unendlichen Bouquet von Kreisen mit der Quotiententopologie von* $\mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{N} = Y$.

Kapitel 3

Koenden

3.1 Geometrische Realisierung als Koende

Die Sprache der Enden und Koenden ermöglicht uns eine allgemeinere Sicht auf die geometrische Realisierung und wird sich später als nützlich erweisen, um andere Formen der geometrischen Realisierung einzuführen. Wir führen Koenden und ihre Eigenschaften ein, Enden sind dazu formal dual. Die Darstellung folgt [Lor15].

Definition 3.1 ([Lor15], 1.1 f.)**.** Sei $F : C^{\mathrm{op}} \times C \to D$ ein Funktor. Ein Objekt $K \in D$ mit Morphismen $\iota_c : F(c,c) \to K$ für alle $c \in C$ heißt Kokeil für F, falls für alle Morphismen $f : c \to d$ in C das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} F(d,c) & \xrightarrow{F(f,\mathrm{id})} & F(c,c) \\ \big\downarrow{\scriptstyle F(\mathrm{id},f)} & & \big\downarrow{\scriptstyle \iota_c} \\ F(d,d) & \xrightarrow{\quad \iota_d \quad} & K \end{array}$$

Die Kokeile für F bilden eine Kategorie (Morphismen verträglich mit den ι_c). Ein initiales Objekt in der Kategorie der Kokeile für F (ein universeller Kokeil) heißt das Koende von F.

Ein Kokeil für einen Funktor $F : C^{\mathrm{op}} \times C \to D^{\mathrm{op}}$ heißt entsprechend Keil für den assoziierten Funktor $F^{\mathrm{op}} : C \times C^{\mathrm{op}} \to D$ und ein universeller Keil das Ende des Funktors F^{op}. Wir notieren häufig das Koende von F als Integral:

$$\int^{c \in C} F(c,c).$$

Wir können Koenden als Koegalisator von Koprodukten darstellen:

Lemma 3.2 ([Lor15], 1.14)**.** *Sei $F : C^{\mathrm{op}} \times C \to D$ ein Funktor und K sein Koende. Dann ist das folgende Diagramm ein Koegalisator:*

$$\coprod_{f: c \to d} F(d,c) \overset{F(f,\mathrm{id}}{\underset{F(\mathrm{id},f)}{\rightrightarrows}} \coprod_{c \in C} F(c,c) \to K.$$

Beweis. Der Morphismus in das Koende ist von den $\iota_c : F(c,c) \to K$ induziert, die Morphismen des Egalisators durch die angegebenen Morphismen auf den Komponenten $F(d,c) \xrightarrow{F(f,\mathrm{id})} F(c,c)$ und $F(d,c) \xrightarrow{F(\mathrm{id},f)} F(d,d)$. Die universellen Eigenschaften, die den Koegalisator und das Koende definieren, sind dann identisch. □

Damit ist klar, dass Koenden Kolimites über eine geeignete Kategorie sind. Wir machen diese Aussage präzise:

Definition 3.3. Sei C eine Kategorie. Die *Unterteilungskategorie* (engl. *subdivision category*) $\mathrm{Sub}(C)$ von C besteht aus Objekten $X^\S$ und $f^\S$ für alle Objekte $X \in C$ und Morphismen $f : X \to Y$ in C. Die Morphismen von $\mathrm{Sub}(C)$ sind die Identitäten sowie für $f : X \to Y$ Pfeile

$$X^\S \leftarrow f^\S \to Y^\S.$$

Proposition 3.4 ([ML98], IX.5.1, [Lor15], 1.13)**.** *Es gibt einen Funktor $[C^{\mathrm{op}} \times C, D] \to [\mathrm{Sub}(C) \to D], F \mapsto \hat{F}$, der einen Äquivalenz von Kategorien zwischen der Kategorie der Kokeile für F und der Kategorie der Kokegel für $\hat{F}$ induziert. Insbesondere gilt*

$$\int^{c \in C} F(c,c) \xrightarrow{\sim} \operatorname{col} \hat{F}.$$

Beweis. Wir erhalten $\hat{F}$ durch die folgenden Zuordnungen für $f : c \to d$ einen Morphismus in C und c, d Objekte in C:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sub}(C) \arrow[d] & c^\S \arrow[d, mapsto] & f^\S \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, mapsto] & d^\S \arrow[d, mapsto] \\
D & F(c,c) & F(d,c) \arrow[l, "F(f,\mathrm{id})"] \arrow[r, "F(\mathrm{id},f)"] & F(d,d).
\end{tikzcd}$$

Diese Zuordnung $F \mapsto \hat{F}$ ist selbst funktoriell: Transformationen $F \Rightarrow G$ induzieren Transformationen $\hat{F} \Rightarrow \hat{G}$. Kokeile für F und Kokegel für $\hat{F}$ bestehen nun beide aus einem Objekt K mit Morphismen $\iota_c : F(c,c) \to K$ für $c \in C$ und $\iota_f : F(d,c) \to K$ für $f : c \to d$, sodass die drei Morphismen $F(d,c) \to K$ übereinstimmen:

$$\iota_f = \iota_c \circ F(f, \mathrm{id}) = \iota_d \circ F(\mathrm{id}, f).$$

Ein Morphismus von Kokeilen für F und von Kokegeln für $\hat{F}$ ist jeweils ein mit den angegebenen Inklusionen ι_c, ι_f verträglicher Morphismus der Objekte $K \to K'$. Koenden für F und Kolimites für $\hat{F}$ sind die initialen Objekte der Kategorien von Kokeilen für F bzw. Kokegeln für $\hat{F}$. □

Korollar 3.5. *Koenden vertauschen mit Kolimites über die sie definierenden Funktoren, es gilt für ein System von Funktoren $F_i : C^{\mathrm{op}} \times C \to D$*

$$\operatorname{col}_i \int^c F_i(c,c) \xrightarrow{\sim} \int^c \operatorname{col}_i F_i(c,c),$$

wenn die beteiligten Terme definiert sind.

Beweis. Unsere Beschreibung von Koenden als Kolimites und das Vertauschen von Kolimites reduzieren die Aussage auf die Kostetigkeit von $F \mapsto \hat{F}$. Dies ist klar, da Kolimites in Funktorkategorien objektweise berechnet werden. □

Bemerkung 3.6 ([Lor15], 1.12). Eine andere Beschreibung verwendet statt der Unterteilungskategorie $\mathrm{Sub}(C)$ die verdrehte Pfeilkategorie $\mathrm{TW}(C)$ von C, deren Objekte Morphismen $f : c \to c'$ in C und Morphismen zwischen $f : c \to c'$ und $g : d \to g'$ kommutative Quadrate

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"] & d \arrow[d, "g"] \\ c' & d'. \arrow[l, "k"] \end{tikzcd}$$

Wir erhalten eine Äquivalenz der Kategorien von Kokegeln über Funktoren $F : \mathrm{TW}(C) \to D$ bzw. über Funktoren $G : \mathrm{Sub}(C) \to D$: beide bestehen aus Morphismen $\mathrm{id}_c \to K$ bzw. $c^{\S} \to K$, die mit $f \to \mathrm{id}_c, f \to \mathrm{id}_{c'}$ bzw. $f^{\S} \to c^{\S}, f^{\S} \to c'^{\S}$ kompatibel sein sollen. Die weiteren Kompatibilitäten für einen Kokegel über $F : \mathrm{TW}(C) \to D$, die von $f \to g$ gefordert werden, sind bereits automatisch erfüllt, denn mit den Bezeichnungen wie im Diagramm gilt etwa, dass die Kompitibilität $f \to g \to \mathrm{id}_d \to K = f \to id_{c'} \to K$ diejenige zu $k \circ g : d \to c'$ ist. Der Morphismus $f \to g$ in $\mathrm{TW}(C)$ fordert Kompatibiltäten für die Inklusionen von $\mathrm{id}_c, \mathrm{id}_d, \mathrm{id}_{d'}$ und $\mathrm{id}_{c'}$ nach K. Diese entsprechen jeweils Kompatibilitäten zu den Kompositionen $g \circ h, k \circ g$ und $k \circ g \circ h$ im obigen Diagramm.

Der Funktor $[C^{\mathrm{op}} \times C, D] \to [\mathrm{TW}(C), D]$ ordnet dann einem Funktor F den Funktor

$$\begin{aligned} (f : c \to d) &\mapsto F(d, c)), \\ (f \to g) &\mapsto F(h, k) \end{aligned}$$

mit Vorschalten von h und Nachschalten von k für einen Morphismus $f \to g$ wie im obigen Diagramm zu.

Sind $F : C^{\mathrm{op}} \to D$ und $G : C \to D$ Funktoren und ist D eine monoidale Kategorie (Schmelzkategorie mit universellen Verschmelzungen), so definieren sie einen Funktor

$$\begin{aligned} C^{\mathrm{op}} \times C \to D \times D &\to D, \\ (a, b) \mapsto (Fa, Gb) &\mapsto Fa \otimes Gb. \end{aligned}$$

Das Koende über diesen Funktor heißt das *Tensorprodukt* $F \otimes G$ von F und G.

Wir erinnern an die Darstellung der geometrischen Realisierung mit Koegalisator und Koprodukt:

$$|X| \xrightarrow{\sim} (\bigsqcup_n X_n \times |\Delta^n|)/ \sim$$

mit dem Quotienten nach der Äquivalenzrelation

$$(x, |f|(p)) \sim (f^* x, p)$$

für alle monotonen $f : [m] \to [n]$. Das ist gerade der Koegalisator

$$\coprod_{f:[n]\to[m]} X_n \times |\Delta^m| \overset{f^*\times \mathrm{id}}{\underset{\mathrm{id}\times|f|)}{\rightrightarrows}} \coprod_{[n]} X_n \times |\Delta^n| \to |X|$$

aus 3.2 und mithin, falls Top mit ihrer kartesischen Schmelzstruktur durch Produkte versehen ist, das Tensorprodukt der Funktoren

$$\begin{array}{llll} X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens} \to \mathrm{Top} & & & \text{und} \\ |\Delta| : \Delta & \to & \mathrm{Top}, & [n] \mapsto |\Delta^n|, \end{array}$$

wobei die Mengen X_n als diskrete topologische Räume aufgefasst werden ([Moe95], III.1):

$$|X| = X \otimes |\Delta|.$$

Bemerkung 3.7. Rückblickend halten wir fest, dass während unsere durch die "Kostetigkeitseigenschaft" für die Simplexkategorie $\Delta \downarrow_{r} X$ (Gl. 2.3, 2.2) definierte geometrische Realisierung in dieser Situation elegant ist, sie auf einer konkreten Eigenschaft der Situation simplizialer *Mengen* beruht, die wir bei allgemeineren simplizialen Objekten nicht mehr gegeben haben. Konkret werden wir im nächsten Abschnitt einen gewissen Begriff einer Wirkung einer Kategorie auf einer anderen Kategorie erklären (Koexponentiale, siehe 3.21). Die Besonderheit simplizialer Mengen beruht nun darauf, dass sich die Wirkung von Ens auf Top $(X_n, |\Delta^n|) \mapsto \coprod_{X_n} |\Delta^n|$ als von der Wirkung von Ens auf $\mathrm{s\,Ens}$, $(X_n, \Delta^n) \mapsto \coprod_{X_n} \Delta^n \cong \left\{\Delta^n \xrightarrow{x} X \,\middle|\, x \in X_n\right\}$ induziert darstellen lässt, was uns zum Begriff der Simplexkategorie von X geführt hat. Bei Wirkungen wie von Top auf Top durch das kartesische Produkt wird es nicht mehr möglich sein, die $\Delta^n \to X$ aus der Simplexkategorie als topologischen Raum aufzufassen. Unsere Beschreibung der geometrischen Realisierung als Koende ist also die für allgemeinere Kontexte richtige Beschreibung.

3.2 Der Koendenkalkül

Die Sprache der Enden und Koenden besitzt eine Reihe an Verträglichkeits- und Umformungseigenschaften, die sie zu einem mächtigen Werkzeug für eine Vielzahl formaler Rechnungen in Anwendungen der Kategorientheorie machen (für Beispiele siehe [Lor15]). Im folgenden werden einige Umformungsregeln dieses Kalküls [1] zusammengestellt.

Lemma 3.8 (Funktorialität, [Lor15])**.** *Sind $F \overset{\eta}{\Rightarrow} G \overset{\tau}{\Rightarrow} H$ Transformationen von Funktoren $F, G, H : C^{\mathrm{op}} \times C \to D$, deren Koenden existieren, so sind die auf den Koenden induzierten Morphismen*

$$\int(\tau\circ\eta), \int\tau \circ \int\eta : \int^c F(c,c) \to \int^c H(c,c)$$

durch die Transformationen auf den Koenden gegeben und damit verträglich: $\int(\tau\circ\eta), \int\tau\circ\int\eta$.

[1] Bei der Übersetzung aus dem Englischen geht leider die Analogie zu den Regeln der Differentiations- und Integrationstheorie verloren.

Beweis. Dies folgt sofort aus der Eindetigkeit dieses Morphismus in der universellen Definition von Koenden. $\square$

Lemma 3.9 (Fubini, [Lor15], 1.9, [ML98], IX.8)**.** *Sei $F : C^{\mathrm{op}} \times C \times D^{\mathrm{op}} \times D \to E$ ein Funktor, für den die Koenden $\int^c F(c, c, d, d')$ für alle $d, d' \in D$ existieren.*

Dann ist

$$\int^{c \in C} F(c, c, \cdot, -) : D^{\mathrm{op}} \times D \to E$$

ein Funktor und es gilt

$$\int^{d \in D} \int^{c \in C} F(c, c, d, d) \xrightarrow{\sim} \int^{(c,d) \in C \times D} F(c, c, d, d),$$

falls eines der beiden Koenden existiert, wobei rechts F als Funktor $F : (C \times D)^{\mathrm{op}} \times (C \times D)$ aufgefasst wird.

Bemerkung 3.10. Formal fließt in die Aussage der *Parameter-Satz* ein, der besagt, dass Koenden mit der Adjunktion $[C^{\mathrm{op}} \times C \times D, E] \xrightarrow{\sim} [C^{\mathrm{op}} \times C, [D, E]]$ verträglich sind, also Koenden in Funktorkategorien objektweise berechnet werden können ([ML98], IX.7). Dies folgt sofort aus der Darstellung von Koenden als Kolimites 3.4.

Beweis. Sei $K : D^{\mathrm{op}} \times D \to E$ ein Kokeil für $F : C^{\mathrm{op}} \times C \to [D^{\mathrm{op}} \times D, E]$ in der Funktorkategorie $D^{\mathrm{op}} \times D \to E$ und $L(K)$ ein Kokeil für K. Auch solche iterierten Kokeile $L(K)$ bestehen aus Morphismen $F(c, c, d, d) \to L(K)$ für alle c, d als Komposition von $F(c, c, \cdot, \cdot) \Rightarrow K$ ausgewertet auf $(d, d) \in D^{\mathrm{op}} \times D$ mit $K(d, d) \to L(K)$. Sie erfüllen die Kommutativitätseigenschaft von Kokeil-Quadraten für alle Morphismen der Form (f, id_d) in $C \times D$ (die Transformation aus der Kokeil-Eigenschaft von K ausgewertet in $(d, d) \in D^{\mathrm{op}} \times D$) sowie (id_c, g) in $C \times D$ (durch Vorschalten der zur Transformation $F(c, c, \cdot, \cdot) \Rightarrow K$ gehörigen Morphismen vor das Kokeil-Quadrat von $L(K)$).

Nach denselben Argumenten definiert ein Kokeil M für $F : (C \times D)^{\mathrm{op}} \times (C \times D)$ einen iterierten Kokeil: Mit der Unterteilungskategorie können wir einen iterierten Kokeil "sparsam" angeben, indem wir die inneren Kokeile nicht für alle $(d, d') \in D^{\mathrm{op}} \times D$, sondern nur für Diagonalelemente $(d, d) \in D^{\mathrm{op}} \times D$ sowie Morphismenobjekte $(d', d) \in D^{\mathrm{op}} \times D$ für einen Morphismus $f : d \to d'$ angeben. Der iterierte Kokeil ist dadurch nach 3.4 vollständig festgelegt. Nun ist M zunächst wegen der Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
F(c', c, d, d) \arrow[r] \arrow[d] & F(c, c, d, d) \arrow[d] \\
F(c', c', d, d) \arrow[r] & M
\end{tikzcd}$$

ein (d, d)-Kokeil und dann durch Setzen der Inklusionen $F(c, c, d', d) \to M$ als Komposition $F(c, c, d', d) \to F(c, c, d', d') \to M = F(c, c, d', d) \to F(c, c, d, d) \to$

M wegen der Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
F(c',c,d',d) \arrow[rr] \arrow[dd] & & F(c,c,d',d) \arrow[d] \\
& & F(c,c,d,d) \arrow[d] \\
F(c',c',d',d) \arrow[r] & F(c',c',d',d') \arrow[r] & M
\end{tikzcd}$$

auch ein (d',d)-Morphismenkokeil. Klarerweise ist dann auch M ein iterierter Kokeil über sich selbst als (d,d)- und (d',d)-Kokeil.

Morphismen von Kokeilen entsprechen nun Morphismen iterierter Kokeile und damit entsprechen sich auch Koenden alias die initialen Objekte der beiden Kategorien. □

Ein konzeptionellerer Beweis benutzt die Darstellung von Koenden als Kolimites aus 3.4.

Alternativer Beweis. Der Isomorphismus von Kategorien $\mathrm{TW}(C\times D) \xrightarrow{\sim} \mathrm{TW}(C)\times \mathrm{TW}(D)$ ist verträglich mit dem Funktor $F \to \hat{F}$ aus 3.4:

$$\begin{tikzcd}
{[(C\times D)^{\mathrm{op}}\times(C\times D),E]} \arrow[r, "F\mapsto\hat{F}"] \arrow[d, "\sim"] & {[\mathrm{TW}(C\times D),E]} \arrow[d, "\sim"] \\
{[C^{\mathrm{op}}\times C,[D^{\mathrm{op}}\times D,E]]} \arrow[r] & {[\mathrm{TW}(C),[\mathrm{TW}(D),E]],}
\end{tikzcd}$$

wobei der untere Funktor gegeben ist durch

$$[C^{\mathrm{op}}\times C,[D^{\mathrm{op}}\times D,E]] \to [\mathrm{TW}(C),[D^{\mathrm{op}},\times D,E]] \to [\mathrm{TW}(C),[\mathrm{TW}(D),E]].$$

Die Darstellung iterierter Koenden als Produkt-Koenden folgt dann direkt aus der Darstellung iterierter Kolimites als Produkt-Kolimites:

$$\mathrm{col}_{I\times J} F \xrightarrow{\sim} \mathrm{col}_I \mathrm{col}_J \tilde{F},$$

falls $F \mapsto \tilde{F}$ unter dem Exponentialgesetz $[I\times J,C] \xrightarrow{\sim} [I,[J,C]]$. □

Definition 3.11. Sei $F : C \to D$ ein Funktor. F heißt *stetig*, falls er mit Limites über kleine Kategorien vertauscht. F heißt *kostetig*, falls er mit Kolimites über kleine Kategorien vertauscht.

Lemma 3.12 (Koenden und kostetige Funktoren, [Lor15], 1.16)**.** *Ist $F : D \to E$ ein kostetiger Funktor und $T : C^{\mathrm{op}}\times C \to D$ ein Funktor, dann ist der natürliche Morphismus*

$$F\int^c T(c,c) \xrightarrow{\sim} \int^c F\circ T(c,c),$$

ein Isomorphismus, wann immer eines der beiden Koenden existiert.

Beweis. Das folgt direkt aus unserer Beschreibung von Koenden als Kolimites in 3.2. □

Bemerkung 3.13. Das wichtigste Beispiel für diesen Fall ist der Hom-Funktor. Praktisch nach Definition von Limes und Kolimes sind $D(d,\cdot) : D \to \mathrm{Ens}$ und $D(\cdot, d) : D^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ stetig. Wir erhalten für $F : C^{\mathrm{op}} \times C \to D$:

$$D(d, \int_c F(c,c)) \xrightarrow{\sim} \int_c D(d, F(c,c))$$
$$D(\int^c F(c,c), d) \xrightarrow{\sim} \int_c D(F(c,c), d).$$

Lemma 3.14 (Transformationen als Ende, [Lor15], 1.18)**.** *Seien $F, G : C \to D$ zwei Funktoren. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$[C, D](F, G) \xrightarrow{\sim} \int_c D(Fc, Gc).$$

Beweis. Transformationen $F \Rightarrow G$ sind genau diejenigen Tupel aus $\prod_c D(Fc, Gc)$, für die für jedes $f : c \to d$ in C die Bilder rechts unten im Diagramm übereinstimmen:

$$\begin{tikzcd} & D(Fc, Gc) \arrow[d, "Gf\circ"] \\ D(Fd, Gd) \arrow[r, "\circ Ff"] & D(Fc, Gd) \end{tikzcd}.$$

Damit ist $[C, D](F, G)$ der Egalisator aus der Dualisierung von 3.2 und folglich das angegebene Ende. □

Neben dem Fubini-Satz für Enden gibt es eine weitere bemerkenswerte Analogie zu Interalen. Aus der Integrationstheorie ist die Formel

$$\int_X f \, d\delta_x = f(x)$$

für δ_x das Diracmaß zum Punkt $x \in X$ bekannt. Im Koendenkalkül kommt der Yoneda-Einbettung die Rolle des Diracmaßes zu:

Proposition 3.15 (Dichteformel, [Lor15], 2.1)**.** *Seien $F : C \to \mathrm{Ens}$ und $G : C^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ Funktoren. Dann gibt es eine Isotransformation von Funktoren $C \to \mathrm{Ens}$*

$$F \overset{\sim}{\Rightarrow} \int^c F(c) \times C(c, \cdot)$$

sowie von Funktoren $C^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$

$$G \overset{\sim}{\Rightarrow} \int^c G(c) \times C(\cdot, c).$$

Bemerkung 3.16. Die Aussage trägt in [Lor15], 2.1, den sehr treffenden Namen *Ninja Yoneda-Lemma.*

Beweis. Dies folgt aus dem Yoneda-Lemma und unseren schon bekannten Rechenregeln, wir zeigen die erste Aussage. Seien dazu $F, G : C \to \mathrm{Ens}$ Funktoren, dann gilt:

$$
\begin{aligned}
& [C, \mathrm{Ens}]\Big(\int^{c} F(c) \times C(c, \cdot), G\Big) \\
\xrightarrow[3.14]{\sim}\; & \int_{d} \mathrm{Ens}\Big(\int^{c} F(c) \times C(c, d), Gd\Big) \\
\xrightarrow[3.12]{\sim}\; & \int_{d} \int_{c} \mathrm{Ens}(F(c) \times C(c, d), Gd) \\
\xrightarrow[3.9]{\sim}\; & \int_{c} \int_{d} \mathrm{Ens}(F(c) \times C(c, d), Gd) \\
\xrightarrow[int.Hom]{\sim}\; & \int_{c} \int_{d} \mathrm{Ens}(C(c, d), Fc \Rightarrow Gd) \\
\xrightarrow[3.14]{\sim}\; & \int_{c} [C, \mathrm{Ens}](\mathrm{Ens}(C(c, \cdot), Fc \Rightarrow G\cdot) \\
\xrightarrow[Yon.]{\sim}\; & \int_{c} (Fc \Rightarrow Gc) \\
\xrightarrow{\sim}\; & \int_{c} \mathrm{Ens}(Fc, Gc) \\
\xrightarrow[3.14]{\sim}\; & [C, \mathrm{Ens}](F, G),
\end{aligned}
$$

was mit dem “Yoneda-Lemma für Cat” die Aussage zeigt. □

Bemerkung 3.17. Wie weit die Analogie zwischen Integralen und (Ko-) Enden reicht, ist mir nicht bekannt. Sie ist vermutlich neben den analogen Eigenschaften (Fubini, Dichteformel) durch die Konstruktion von Koenden als direkte Summen von Produkten zweier Objekte (analog zu Riemann- bzw. Lebesguesummen in der Maßtheorie) inspiriert [2] Die Frage ist, inwiefern maßtheoretische Aussagen eine direkte Übersetzung in die Sprache der (Ko-) Enden haben. Das folgende Beispiel beleuchtet dies nur bedingt, ist aber eine schöne Anwendung der Dichteformel.

Beispiel 3.18. *Nach der Verträglichkeit des Integrals mit Verwandtschaft ([Soe18a], 1.5.19) ist der Integraloperator $(f, \mu) \mapsto \int f\, \mu$ auf einem Koende definiert. Bezeichne dazu $\mathcal{M}$ die Kategorie der Messräume (Mengen mit σ-Algebra) und M_X die Menge der Maße auf einem Messraum X. Das Integral ist dann eine Paarung $M_X \times \mathcal{M}(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ (der Maßraum $\mathbb{R}$ links wie üblich versehen mit der Borelalgebra), für die die beiden Wirkungen einer messbaren Abbildung $\Phi : X \to Y$ durch Vorschalten bzw. Bildmaß übereinstimmen:*

$$\int (f \circ \Phi)\, \mu = \int f\, \Phi_*(\mu).$$

Somit ist der Integraloperator definiert auf dem Koende

$$\int^{X \in \mathcal{M}} M_X \times \mathcal{M}(X, \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} M_{\mathbb{R}}$$

[2] Vergleiche hierzu die Diskussion in `https://mathoverflow.net/questions/239326/why-do-we-denote-coends-with-integral-notation-beyond-fubinis-theorem`.

nach der Dichteformel. Dies ist die Aussage, dass es wegen

$$\int f\,\mu = \int (\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ f)\,\mu = \int \mathrm{id}_R\, f_*(\mu)$$

reicht, die Identitätsfunktion auf $\mathbb{R}$ *bezüglich allen Maßen auf* $\mathbb{R}$ *integrieren zu können.*

3.2.1 Angereicherte Kategorien

In der ursprünglichen Definition einer Kategorie tragen die Morphismen $C(x, y)$ die Struktur einer Menge. Der Wunsch, Begriffe wie "die Summe zweier Morphismen" oder "der Nullmorphismus" aus der Kategorie der R-Moduln auch kategorientheoretisch zu erfassen, brachte uns zum Begriff der additiven Kategorien, bei denen Morphismenmengen abelsche Gruppen sind und Funktoren Gruppenhomomorphismen auf den Morphismengruppen induzieren. Diese Konstruktion möchten wir auch für Kategorien zur Verfügung stehen haben, bei denen die Morphismenmengen eine andere Struktur tragen (etwa die eines topologischen Raums) oder gar keine Mengen sind, sondern Objekte einer anderen Kategorie V. Solche Kategorien bezeichnet man als über V angereicherte (engl. *enriched*) Kategorien. Wir imitieren die herkömmliche Definition von Kategorien:

Definition 3.19 (Angereicherte Kategorie)**.** Sei V eine monoidale Kategorie (Schmelzkategorie mit universellen Verschmelzungen). Eine über V angereicherte Kategorie C (V-Kategorie) besteht aus:

1. einer Klasse von Objekten $\mathrm{Ob}(C)$
2. für jedes Paar von Objekten (x, y) ein Objekt $C(x, y) \in V$
3. einer Komposition $C(x, y) \otimes C(y, z) \to C(x, z)$
4. für jedes Objekt $x \in \mathrm{Ob}(C)$ einem Morphismus in V $\mathrm{id}_x : I \to C(x, x)$ für I die universelle 0-Verschmelzung,

sodass die Komposition assoziativ ist (bezüglich des eindeutigen Morphismus $C(w, x) \otimes (C(x, y) \otimes C(y, z)) \xrightarrow{\sim} (C(w, x) \otimes C(x, y)) \otimes C(y, z))$ und verträglich mit den Identitäten (bezüglich der eindeutigen Morphismen $C(x, y) \otimes I \xrightarrow{\sim} C(x, y)$ und $I \otimes C(x, y) \xrightarrow{\sim} C(x, y)$).

Ein Funktor zwischen V-Kategorien $F : C \to D$ ist eine Zuordnung auf Objekten $F : c \mapsto Fc$ zusammen mit Morphismen $C(x, y) \to D(Fx, Fy)$ in V.

Beispiel 3.20. *Eine Kategorie ist eine über* Ens *angereicherte Kategorie bezüglich der kartesischen monoidalen Struktur auf* Ens*. Eine Kategorie mit additiver Struktur ist eine über* Ab *angereicherte Kategorie bezüglich des Tensorprodukts auf* Ab*. Jede monoidale Kategorie mit adjungiertem internem Hom (monoidale geschlossene Kategorie) V ist eine V-Kategorie über sich selbst.*

In einer monoidalen geschlossenen Kategorie V haben wir die Adjunktion

$$V(a \otimes b, c) \xrightarrow{\sim} V(a, V(b, c))$$

mit $V(b, c) = (b \Rightarrow c)$ dem internen Hom-Objekt. Das Objekt $a \otimes b$ ist dann ein darstellendes Objekt für den Funktor $c \mapsto V(a, V(b, c))$ und heißt manchmal auch Koexponential (engl. *copower*) von a und b. Wir verallgemeinern diese Situationen auf Koexponentiale in angereicherten Kategorien:

Definition 3.21. Sei C eine V-Kategorie. Ist $v \odot b \in C$ ein darstellendes Objekt für den Funktor $c \mapsto V(v, C(b, c))$ mit $v \in V, b \in C$, gilt also

$$C(v \odot b, c) \xrightarrow{\sim} V(v, C(b, c))$$

natürlich in b, c und v, so heißt $v \odot b$ das Koexponential von v und b.

In diesem Fall nennt man die Kategorie C auch *tensoriert über* V.

Beispiel 3.22. *Jede Kategorie mit beliebigen Koprodukten hat Koexponentiale über* Ens. *Mit* $V \odot B = \coprod_V B$ *gilt:*

$$C(V \odot B, C) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(V, C(B, C)).$$

Wir können nun auch die geometrische Realisierung in der Sprache angereicherter Kategorien formulieren. Ist C eine V-Kategorie mit Koexponentialen und sind Funktoren

$$\begin{aligned} R &: \Delta && \to C \qquad \textit{und} \\ X &: \Delta^{\mathrm{op}} && \to V \end{aligned}$$

gegeben, so erklären wir die geometrische Realisierung von X als das Koende über den Funktor

$$\begin{aligned} &\Delta^{\mathrm{op}} \times S \to C, \\ &[n], [m] \mapsto X[n] \odot R[m]. \end{aligned}$$

Der Fall simplizialer Mengen ist $C = \mathrm{Top}$ und $V = \mathrm{Ens}$ mit dem kanonischem Koexponential.

Bemerkung 3.23. In dieser Formulierung ist auch klar, dass eine Transformation $R \Rightarrow \overline{R}$ einen Morphismus der Koenden $R \otimes X \to \overline{R} \otimes X$ induziert. Konkret erhalten wir aus unserem Morphismus kosimplizialer Räume $|\Delta| \to \blacktriangle$ also stetige Abbildungen zwischen den geometrischen Realisierungen $|X| \to \blacktriangle|X|$.

Kapitel 4

Simpliziale Garben

4.1 Realisierung simplizialer Garben

Die Beschreibung der geometrischen Realisierung als Tensorprodukt von Funktoren eröffnet uns eine Reihe weiterer geometrischer Realisierungen, die diejenige simplizialer Mengen verallgemeinern.

Zunächst stellen wir fest, dass wir in unserer Konstruktion simpliziale Mengen immer als diskrete simpliziale topologische Räume betrachtet haben, und die Diskretheit genauso gut auch fallen lassen können. Wir erhalten die geometrische Realisierung $|X| = X \otimes R$ eines simplizialen topologischen Raums $X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Top}$.

Beispiel 4.1. *Wir betrachten den simplizialen topologischen Raum $X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Top}$, den wir aus dem (kombinatorischen) Standard-1-Simplex Δ^1 erhalten, indem wir disjunkte Vereinigungen von Punkten durch disjunkte Vereinigungen von Intervallen $I = [0,1]$ mit von den Identitäten induzierten Abbildungen ersetzen. Offenbar ist die geometrische Realiserung das Produnkt $I \times |\Delta^1|$. Ersetzen wir X_0 wieder durch zwei Punkte $0, 1$ mit beliebigen Degenerationen, so erhalten wir eine zu einer Kreisscheibe verdickte Linie zwischen den beiden Punkten als Realisierung. Ersetzen wir die höheren $X_n, n \geq 2$ ebenfalls wieder durch Punkte mit beliebigen Randabbildungen, so sorgen deren Identifikationen dafür, dass die geometrische Realisierung wieder $|\Delta^1|$ wird.*

Interessanter ist vielleicht der simpliziale topologische Raum, der in Grad 0 aus den Simplizes $S^1 \sqcup \mathrm{pt}$ und in Grad 1 aus den nichtdegenerierten Simplizes D^2 besteht, und dessen Randabbildungen $S^1 \times 0$ mit pt und $S^1 \times 1$ mit $S^1 \subset D^2$ durch "Wickeln mit doppelter Geschwindigkeit" (komplex $x \mapsto x^2$) identifizieren. Dazu kommen degenerierte Simplizes, sodass die Degenerationsabbildungen keine weiteren Identifikationen verursachen. Wir erhalten so den zweidimensionalen reell-projektiven Raum.

Weiter verallgemeinert die Konstruktion auch auf Diagrammkategorien. Ist I eine kleine Kategorie und $X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Top}^I$ ein simpliziales I-System topologischer Räume, so erhalten wir eine geometrische Realisierung $|X| = X \otimes R$ von

X, wenn wir $R : \Delta \to \mathrm{Top} \to \mathrm{Top}^I$ mittels des Funktors der konstanten Darstellung auf die Diagrammkategorie fortsetzen. Insbesondere erhalten wir eine geometrische Realisierung für die Kategorie der Paare topologischer Räume mit stetiger Abbildung, d. h. die Diagrammkategorie $\mathrm{Top}^{[1]}$ für [1] die Kategorie des Ordinals $[1] \in \Delta$, die Pfeilkategorie $\{\bullet \to \bullet\}$. Eine Realisierung für Garben über topologischen Räumen erhalten wir so aber nicht: Sind in einem simplizialen $\mathrm{Top}^{[1]}$ alle Abbildungen étale, bedeutet das noch nicht, dass auch die induzierte Abbildung in der geometrischen Realisierung étale ist. Sind etwa alle Basisräume X_n einpunktig, so ist die Realisierung $|X|$ ebenfalls einpunktig. Étale Räume $F_n \to X_n$ sind diskret, d. h. die geometrische Realisierung $|F|$ ist die einer simplizialen Menge, also im Allgemeinen ein höherdimensionaler CW-Komplex. Ein solcher ist nicht diskret, also nicht étale über $|X|$. Wir erhalten die korrekte Realisierung für $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$, indem wir den Kolimes in der Garbenkategorie statt in den topologischen Räumen bilden.

Proposition 4.2. *Sei $F \in [\Delta^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}]$ eine simpliziale Garbe über topologischen Räumen mit Morphismen und $R : \Delta \to \mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$ eine kosimpliziale Garbe über topologischen Räumen. Dann ist die Realisierung $F \otimes R \in \mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$ eine Garbe über der geometrischen Realisierung der Basisräume.*

Beweis. Die Existenz der Realisierung folgt direkt aus der Beschreibung von Koenden als Kolimites 3.4 und der Kovollständigkeit von $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$ nach **??**. Dort wird auch der Basisraum des Kolimites zum Kolimes der Basisräume bestimmt. □

Bemerkung 4.3. Eine kanonische Wahl für R ist etwa die konstant einelementige Garbe $|\Delta^n| \to |\Delta^n|$ oder ihre plumpe Variante $\blacktriangle^n \to \blacktriangle^n$.

Bemerkung 4.4. Diese geometrische Realisierung simplizialer Garben auf topologischen Räumen spezialisiert zu einer geometrischen Realisierung simplizialer Garben auf X: Ist $F : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ eine simpliziale Garbe auf X, so ist ihre geometrische Realisierung aus 4.1 eine Garbe $|F| \in \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$, da die geometrische Realisierung des konstanten simplizialen topologischen Raums $X : [n] \mapsto X$ selbst X ist.

Für Garben E_n auf diskreten Räumen D_n handelt es sich um die geometrische Realisierung eines Pfeils simplizialer Mengen. Die relative Version über X hiervon ist die folgende: für Garben E_n auf $X \times D_n$ für diskrete D_n und zu für $f : [m] \to [n]$ monoton von $D_n \to D_m$ induzierten Basen $D_n \times X \to D_m \times X$ der Garbenmorphismen ist die geometrische Realisierung eine Garbe über $X \times |D|$, für $|D|$ die Realisierung der simplizialen Menge $[n] \mapsto D_n$.

Ziel unserer Überlegungen wird es sein, die Aussagen zu simplizial konstanten Garben auf der geometrischen Realisierung eines Simplizialkomplexes $\mathcal{K}$ als Garben auf dem topologischen Raum $\mathcal{K}$ auf die Situation simplizialer Mengen zu übertragen. Die angesprochenen Realisierungen in 4.1 und 4.4 sind dafür nicht geeignet. Das liegt daran, dass wir, um aus Garben auf der Realisierung wieder ein Diagramm von Garben zu erhalten, generisierende Randabbildungen benötigen. Im Fall einer simplizialen Garbe $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$ sind die Randabbildungen im Garbensystem dagegen gegenläufig zu den generisierenden Einbettungen $|d_i| : |\Delta^{n-1}| \hookrightarrow |\Delta^n|$ der Basisräume.

Wir erklären eine neue Realisierung, die diesem Anspruch gerecht wird. Sei dazu $R : \Delta \to \mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$ eine kosimplizialer topologischer Raum und $F : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}}, [n] \mapsto F_n \in Ens_{/X_n}$ eine simpliziale Garbe über topologischen Räumen mit Komorphismen. Für $f : [n] \to [m]$ monoton gibt es also eine stetige Abbildung $Ff : X_m \to X_n$ und einen Morphismus von Garben über X_m: $Ff^*F_n \to F_m$. Wir erhalten einen Funktor K von der Unterteilungskategorie $\mathrm{Sub}(\Delta)$ von Δ in die Garben über topologischen Räumen

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Sub}(\Delta) \arrow[ddd] & {[n]^\S} \arrow[d, mapsto] & f^\S \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, mapsto] & {[m]^\S} \arrow[d, mapsto] \\
 & & & \\
 & F_n \times R[n] \arrow[d] & Ff^*F_n \times R[n] \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & F_m \times R[m] \arrow[d] \\
\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}} & X_n \times R[n] & X_m \times R[n] \arrow[l] \arrow[r] & X_m \times R[m],
\end{tikzcd}
\tag{4.1}
$$

der für $f : [n] \to [m]$ in Δ auf Morphismen $f^\S \to [n]^\S$ vom universellen Morphismus $Ff^*F_n \to F_n$ über Ff induziert ist und auf Morphismen $f^\S \to [m]^\S$ durch die Morphismen $Ff^*F_n \to F_m$ in $\mathrm{Ens}_{/X_m}$ sowie Rf. Letzterer ist tatsächlich ein Morphismus in $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$, denn es kommutiert

$$
\begin{tikzcd}
Ff^*F_n \times R[n] \arrow[r] \arrow[d] & F_m \times R[n] \arrow[r] \arrow[d] & F_m \times R[m] \arrow[d] \\
X_m \times R[n] \arrow[r] & X_m \times R[n] \arrow[r] & X_m \times R[m].
\end{tikzcd}
$$

Wir erhalten die folgende *kovariante Realisierung*:

Proposition 4.5. *Sei* $F \in [\Delta^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}}]$ *eine simpliziale Garbe über topologischen Räumen mit Komorphismen und* $R : \Delta \to \mathrm{Top}$ *ein kosimplizialer topologischer Raum. Dann ist der Kolimes* $|F|$ *über den oben definierten zugehörigen Funktor* $K : \mathrm{Sub}(\Delta) \to \mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$ *eine Garbe über der geometrischen Realisierung* $X \otimes R$ *der Basisräume.*

Bemerkung 4.6. Diese geometrische Realisierung simplizialer Garben auf topologischen Räumen mit Komorphismen spezialisiert zu einer geometrischen Realisierung simplizialer Garben auf X: Ist $F : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}_{/\!\!/X}$ eine simpliziale Garbe auf topologischen Räumen mit Komorphismen und konstantem Basisraum X alias eine kosimpliziale Garbe $F^{\mathrm{op}} : \Delta \to \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$, so vereinfacht das Diagramm 4.1 zu

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Sub}(\Delta) \arrow[ddd] & {[n]^\S} \arrow[d, mapsto] & f^\S \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, mapsto] & {[m]^\S} \arrow[d, mapsto] \\
 & & & \\
 & F_n \times R[n] \arrow[d] & Ff^*F_n \times R[n] \arrow[l, equal] \arrow[r] \arrow[d] & F_m \times R[m] \arrow[d] \\
\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}} & X \times R[n] & X \times R[n] \arrow[l, equal] \arrow[r] & X \times R[m],
\end{tikzcd}
$$

und ihre geometrische Realisierung aus 4.5 ist eine Garbe $|F| \in \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$, der Kolimes über den Funktor $\Delta \to \mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$, der $f : [n] \to [m]$ monoton auf den Morphismus

$$\begin{tikzcd} F_n \times R[n] \arrow[r, "F^{\mathrm{op}} f \times |f|"] \arrow[d] & F_m \times R[m] \arrow[d] \\ X \times R[n] \arrow[r] & X \times R[m] \end{tikzcd}$$

schickt.

Sind alle X_n diskret, so bestimmt für $\sigma \in X_n$ der Halm $(F_m)_\sigma$ die konstante Garbe $(F_m)_\sigma \times R[n] \to \sigma \times R[n]$ und wir erhalten für monotones $f : [n] \to [m]$ Abbildungen $(F_n)_{f(\sigma)} \to (F_m)_\sigma$, die diese konstanten Garben verkleben. Insbesondere sind für Randabbildungen d_i die Verklebungen Generisierungen, die angeben, wie ein Element des Halms am Rand eines Simplex einen Schnitt über eine Umgebung dieses Punkts (auch im Inneren des Simplex) definiert. Wir werden diese Beobachtungen in **??** präzisieren und die zunächst seltsam anmutende Konstruktion als natürlich wahrnehmen.

Für die relative Version betrachten wir Basisräume $X_n = X \times D_n$ mit diskreten D_n und von $D_m \to D_n$ induzierten Abbildungen. Zu $\sigma \in D_n$ gehört dann eine Garbe $F_\sigma := F_n|_{\sigma \times X} \in \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ und wir erhalten für monotones $f : [n] \to [m]$ Garbenmorphismen $F_{f(\sigma)} \to F_\sigma$, die diese Garben verkleben. Wieder sind diese generisierend, erlauben also die Ausweitung eines U-Schnitts von einem Randpunkt auf einen U-Schnitt im Inneren.

Bemerkung 4.7. Eine weitere Idee zur geometrischen Realisierung simplizialer Garben ist die folgende: Ist F eine Prägarbe auf I mit Werten in C und $G : C \to D$ ein Funktor, so ist $GF : I^{\mathrm{op}} \to D$ eine Prägarbe mit Werten in D. Nach dem Exponentialgesetz von Funktoren ist eine simpliziale Prägarbe über X dasselbe wie eine Prägarbe mit Werten in den simplizialen Mengen und wir können die geometrische Realisierung $|\cdot| : \mathrm{s\,Ens} \to \mathrm{CGHaus}$ nachschalten. Dies liefert eine Prägarbe topologischer Räume auf X. Allerdings schränkt diese Konstruktion nicht auf die vollen Unterkategorien der Garben ein: die Garbenbedingung ist als Limes über ein im Allgemeinen unendliches System formuliert, die geometrische Realisierung vertauscht aber im Allgemeinen nicht mit beliebigen Limites.

4.1.1 Die Dualität von Nerv und Realisierung

Wir suchen Rechtsadjungierte für unsere geometrischen Realisierungen. Für die Realisierung simplizialer Mengen gelingt uns das einfach.

Satz 4.8. *Der Funktor der singulären Ketten* $S : \mathrm{Top} \to \mathrm{s\,Ens}$*,* $SY = \mathrm{Top}(R\,\cdot, Y) : [n] \mapsto \mathrm{Top}(|\Delta^n|, Y)$ *ist rechtsadjungiert zur geometrischen Realisierung* $|\cdot| : \mathrm{s\,Ens} \to \mathrm{Top}$.

Beweis. Die Rand- und Degenerationsabbildungen von SY sind für $f : [n] \to$

$[m]$ gegeben durch Vorschalten von $|f| : |\Delta^n| \to |\Delta^m|$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\mathrm{Top}(|X|, Y) &= \mathrm{Top}(\mathrm{col}_{\Delta \downarrow^r X} |\Delta^n|, Y) \\
&\xrightarrow{\sim} \mathrm{col}_{\Delta \downarrow^r X} \mathrm{Top}(|\Delta^n|, Y) \\
&\xrightarrow{\sim} \mathrm{col}_{\Delta \downarrow^r X} \mathrm{s\,Ens}(\Delta^n, \mathrm{Top}(R\,\cdot, Y)) \\
&\xrightarrow{\sim} \mathrm{s\,Ens}(\mathrm{col}_{\Delta \downarrow^r X} \Delta^n, \mathrm{Top}(R\,\cdot, Y)) \\
&\xrightarrow{\sim} \mathrm{s\,Ens}(X, SY)
\end{aligned}$$

mit der Definition der geometrischen Realisierung im ersten Schritt (Gl. 2.3), der Verträglichkeit von Hom : $C^{\mathrm{op}} \times C \to \mathrm{Ens}$ mit Limites im zweiten und vierten Schritt, unserer Bestimmung der n-Simplizes als Morphismenmenge (Gl. 2.1) im dritten Schritt und unserer Beschreibung einer simplizialen Menge als Kolimes über ihre Simplexkategorie (**??**) im letzten Schritt. □

Während dieses Argument wieder ein sehr anschauliches ist, möchten wir wie in 3.7 erklärt, unser Argument mit den Begriffen und Techniken von Koenden führen, um es automatisch verallgemeinern zu können. Wir geben hier noch einmal die direkte Übersetzung obigen Beweises in die Sprache der Koenden an, und dann sofort die Verallgemeinerung.

Beweis. ([Lor15], 3.2) Wir berechnen mit den Regeln des Koenden-Kalküls:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Top}(|X|, Y) &= \mathrm{Top}\left(\int^{[n]} X[n] \times R[n], Y\right) \\
&\xrightarrow[3.12]{\sim} \int_{[n]} \mathrm{Top}\big(X[n] \times R[n], Y\big) \\
&\xrightarrow[\mathbf{??}]{\sim} \int_{[n]} \mathrm{Ens}\big(X[n], \mathrm{Top}(R[n], Y)\big) \\
&\xrightarrow[3.14]{\sim} [\Delta^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]\big(X, \mathrm{Top}(R\,\cdot, Y)\big) \\
&= \mathrm{s\,Ens}(X, SY).
\end{aligned}$$

□

Theorem 4.9 (Allgemeine Nerv-Realisierungs-Dualität, [Lor15], 3.2)**.** *Seien C eine V-Kategorie mit Koexponentialen $\odot$ und ein Funktor $R : S \to C$ gegeben. Dann gibt es eine Adjunktion $(|\cdot|, N)$*

$$C \underset{N}{\overset{|\cdot|}{\rightleftarrows}} [S^{\mathrm{op}}, V]$$

mit

$$\begin{aligned}
|\cdot| : X &\mapsto \int^{s \in S} X(s) \odot R(s) \qquad \textit{und} \\
N : Y &\mapsto C(R\,\cdot, Y).
\end{aligned}$$

Beweis. In wörtlicher Verallgemeinerung des Vorangegangenen:

$$\begin{aligned} C(|X|, Y) &= C\left(\int^s X(s) \odot R(s), Y\right) \\ &\xrightarrow[3.12]{\sim} \int_s C\big(X(s) \odot R(s), Y\big) \\ &\xrightarrow[\textbf{??}]{\sim} \int_s V\big(X(s), C(R(s), Y)\big) \\ &\xrightarrow[3.14]{\sim} [S^{\mathrm{op}}, V]\big(X, C(R\,\cdot, Y)\big) \\ &= [S^{\mathrm{op}}, V](X, NY). \end{aligned}$$

□

4.1.2 Die kartesisch abgeschlossene Struktur der Garben auf X

Für unsere allgemeine Dualität von Nerv und Realisierung 4.9 benötigen wir also eine bessere V-angereichterte Struktur auf C. Wenn wir uns auf $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ beschränken, erhalten wir sogar die Struktur einer kartesisch abgeschlossenen Kategorie.

Definition 4.10. Eine Kategorie C mit endlichen Produkten heißt *kartesisch abgeschlossen*, falls es ein internes Hom für die kartesische Schmelzstruktur durch Produkte gibt.

Das bedeutet konkret, dass es eine Adjunktion $(\times Y, Y \Rightarrow)$ gibt, also eine in allen Variablen natürliche Bijektion

$$C(X \times Y, Z) \xrightarrow{\sim} C(X, Y \Rightarrow Z).$$

Proposition 4.11. *Die Kategorie* $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ *ist kartesisch abgeschlossen mit Produkt*

$$(F \times G)(U) = F(U) \times G(U)$$

und internem Hom

$$(F \Rightarrow G)(U) = \mathrm{Ens}_{/U}(F|_U, G|_U)$$

jeweils mit den von den Restriktionen von F und G induzierten Restriktionen. Der étale Raum des Produkts ist gegeben durch das Faserprodukt über X:

$$\overline{F \times G} \xrightarrow{\sim} \overline{F} \times_X \overline{G}.$$

Beweis. Das Produkt erfüllt offenbar die universelle Eigenschaft in $\mathrm{pEns}_{/\mathrm{X}}$ und ist eine Garbe, da Produkte mit dem Limes der Garbeneigenschaft vertauschen (Spezialfall von 1.35). Das interne Hom besteht aus stetigen Abbildungen über U und erfüllt somit die Garbenbedingung, die ja sogar nach der Verklebbarkeit stetiger Abbildungen modelliert war. Für die Adjunktion müssen wir zeigen

$$\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}(F \times G, H) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}(F, G \Rightarrow H).$$

Links stehen restriktionsverträgliche Systeme $F(U)\times G(U)\to H(U)$ alias $F(U)\to \mathrm{Ens}(G(U),H(U))$, rechts restriktionsverträgliche Systeme $F(U)\to \mathrm{Ens}_{/U}(G|_U,H|_U)$. Wir erhalten eine Abbildung von rechts nach links durch den globalen Teil $G(U)\to H(U)$ des Garbenmorphismus $G|_U\to H|_U$ und das Exponentialgesetz in Ens und von links nach rechts durch Ergänzen des globalen Teils $G(U)\to H(U)$ durch verträgliche $G(V)\to H(V)$ als die Bilder unter $F(U)\to F(V)\to \mathrm{Ens}(G(V),H(V))$. Diese Abbildungen sind zueinander invers.

Für den étalen Raum des Produkts erhalten wir nach der universellen Eigenschaft des Faserprodukts eine stetige Abbildung über X

$$\overline{F\times G}\to \overline{F}\times_X \overline{G}.$$

Diese induziert auf den Halmen die Bijektionen

$$(F\times G)_x \xrightarrow{\sim} F_x\times G_x$$

aus dem Vertauschen endlicher Limites mit filtrierenden Kolimites. □

Diese Struktur einer kartesisch abgeschlossenen Kategorie macht $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ insbesondere zu einer über sich selbst tensorierten Kategorie im Sinne von **??**. Wir erhalten einen Nerv-Funktor für die geometrische Realisierung simplizialer Garben auf X aus 4.9.

Den obigen konkreten Beweis für das interne Hom der Prägarbenkategorie $\mathrm{pEns}_{/\mathrm{X}} = [\mathrm{Off_X}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ens}]$ können wir mit einer Rechnung im Koendenkalkül auf beliebige Prägarbenkategorien ausweiten.

Proposition 4.12. *Ist C eine kleine Kategorie, so ist die Prägarbenkategorie $\mathrm{Ens}^{C^{\mathrm{op}}}$ kartesisch abgeschlossen.*

Beweis. Nach der objektweisen Berechnung von Limites in Funktorkategorien ist das Prägarbenprodukt gegeben durch $(F\times G)(c) = F(c)\times G(c)$ für $F,G\in \mathrm{Ens}^{C^{\mathrm{op}}}$ und $c\in C$. Wir behaupten, dass das interne Hom in der Prägarbenkategorie die Prägarbe

$$(F\Rightarrow G)(c) := \mathrm{Ens}^{C^{\mathrm{op}}}(F\times C(\cdot,c),G),$$

ist, die auf Morphismen $f: c\to d$ durch Vorschalten von Transformationen $\mathrm{id}_F\times(\circ f)$ gegeben ist, mit $(\circ f): C(\cdot,c)\to C(\cdot,d)$ dem Nachschalten von f. Mit 3.14 sind Morphismen in $\mathrm{Ens}^{C^{\mathrm{op}}}$ darstellbar als Ende

$$\mathrm{Ens}^{C^{\mathrm{op}}}(F,G) = \int_c \mathrm{Ens}(F(c),G(c))$$

und wir berechnen mit den Regeln des (Ko-) Endenkalküls für $F, G, H \in \mathrm{Ens}^{C^{\mathrm{op}}}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ens}^{C^{\mathrm{op}}}(F, G \Rightarrow H) &\xrightarrow[Def.]{\sim} \mathrm{Ens}^{C^{\mathrm{op}}}(F, \mathrm{Ens}^{C^{\mathrm{op}}}(F \times C(\cdot, \bullet), G)) \\
&\xrightarrow[3.14]{\sim} \int_c \mathrm{Ens}(F(c), \int_d \mathrm{Ens}(G(d) \times C(d,c), H(d))) \\
&\xrightarrow[3.12]{\sim} \int_c \int_d \mathrm{Ens}(F(c), \mathrm{Ens}(G(d) \times C(d,c), H(d))) \\
&\xrightarrow[3.9]{\sim} \int_d \int_c \mathrm{Ens}(F(c), \mathrm{Ens}(G(d) \times C(d,c), H(d))) \\
&\xrightarrow[Adj.]{\sim} \int_d \int_c \mathrm{Ens}(F(c) \times G(d) \times C(d,c), H(d)) \\
&\xrightarrow[3.12]{\sim} \int_d \mathrm{Ens}(\int^c F(c) \times G(d) \times C(d,c), H(d)) \\
&\xrightarrow[3.15]{\sim} \int_d \mathrm{Ens}(F(d) \times G(d), H(d)) \\
&\xrightarrow[3.14]{\sim} \mathrm{Ens}^{C^{\mathrm{op}}}(F \times G, H).
\end{aligned}$$

□

Die obere Aussage über Prägarben auf topologischen Räumen ergibt sich daraus durch die Beobachtung, dass $F|_U = F \times \mathrm{Off}_{\mathrm{X}}(\cdot, U)$ ist, denn $\mathrm{Off}_{\mathrm{X}}$ ist halbgeordnet durch Inklusionen. Wir erhalten auch die kartesisch abgeschlossene Struktur simplizialer Mengen, der Prägarbenkategorie auf Δ. Explizit ist für $X, Y \in \mathrm{s\,Ens}$:

$$(X \times Y)_n = X_n \times Y_n$$

und

$$(X \Rightarrow Y)_n = \mathrm{s\,Ens}(X \times \Delta^n, Y).$$

Auch die Rolle von Ens kann verallgemeinert werden. Wir erhalten:

Proposition 4.13. *Sei E eine kartesisch abgeschlossene Kategorie und C eine kleine Kategorie. Dann ist die Kategorie der Prägarben $E^{C^{\mathrm{op}}}$ angereichert über E und kartesisch abgeschlossen.*

Beweis. Sind $F, G \in E^{C^{\mathrm{op}}}$ Prägarben, so erhalten wir die angereicherte Struktur durch Übertragung der obigen Formulierung als Ens-Ende:

$$E^{C^{\mathrm{op}}}(F, G) := \int_c E(F(c), G(c)) \in E,$$

für $E(\cdot, \cdot)$ das interne Hom in E. Damit funktioniert der Beweis oben auch für diesen Fall. □

4.1.3 Kategorien von Garben über topologischen Räumen

Wir betrachten die Kategorienfaserungen $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ mit Morphismen den stetigen Abbildungen zwischen den étalen Räumen über der stetigen Abbildung in der Basis sowie $\mathrm{Ens}\mathbin{/\!\!/}\mathrm{Top} \to \mathrm{Top}$ mit Opkomorphismen als Morphismen, d. h. für $F \in \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ und $G \in \mathrm{Ens}_{/Y}$:

$$\mathrm{Ens}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}}(F,G) = \coprod_{f:X\to Y} \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}(f^*G,F).$$

Wir möchten einen Nerv-Funktor nicht nur für die Realisierung simplizialer Garben über X finden, sondern auch für simpliziale Garben über variablen topologischen Räumen, also für simpliziale Objekte in $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$ und $\mathrm{Ens}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}}$. Dafür benötigen wir wieder eine monoidal abgeschlossene Struktur auf diesen Kategorien.

Die Kategorie $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$ besitzt endliche Produkte, die algebraisch gegeben sind durch Rückzug und Produkt und topologisch durch Bilden der Produkträume. Konkret:

Proposition 4.14. *Seien $F_{1,2} \in \mathrm{Ens}_{/X_{1,2}}$ Garben über topologischen Räumen X_1 und X_2. Dann ist die Garbe*

$$F_1 \times F_2 := \mathrm{pr}_1^* F_1 \times \mathrm{pr}_2^* F_2 \in \mathrm{Ens}_{/X_1\times X_2}$$

mit $\mathrm{pr}_{1,2} : X_1 \times X_2 \to X_{1,2}$ den Projektionen das Produkt von F_1 und F_2 in $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$. Ihr étaler Raum ist:

$$\overline{F_1 \times F_2} = \overline{F_1} \times \overline{F_2} \to X_1 \times X_2$$

mit der von $\overline{F_{1,2}} \to X_{1,2}$ induzierten Produktabbildung.

Beweis. Für ein Testobjekt $G \in \mathrm{Ens}_{/Y}$ prüft man leicht die Bijektion von Faserprodukten

$$\begin{aligned} &\mathrm{Top}(\overline{G}, \overline{F_1} \times \overline{F_2}) \times_{\mathrm{Top}(\overline{G},X_1\times X_2)} \mathrm{Top}(Y, X_1 \times X_2) \\ \xrightarrow{\sim}\quad &\mathrm{Top}(\overline{G}, \overline{F_1}) \times_{\mathrm{Top}(\overline{G},X_1)} \mathrm{Top}(Y, X_1) \\ &\times \mathrm{Top}(\overline{G}, \overline{F_2}) \times_{\mathrm{Top}(\overline{G},X_2)} \mathrm{Top}(Y, X_2), \end{aligned}$$

dies zeigt die Aussage über den étalen Raum des Produkts. Die Abbildung $\overline{F_1} \times \overline{F_2} \to X_1 \times X_2$ ist étale und konkret ein Homöomorphismus auf der Produktmenge der Umgebungen, auf denen $\overline{F_{1,2}} \to X_{1,2}$ Homöomorphismen sind.

Für die algebraische Beschreibung erhalten wir mit der Offenheit der Projektionen $\mathrm{pr}_{1,2}$ und 4.11 für die Schnitte über Basismengen $U_1 \times U_2$:

$$\begin{aligned} (F_1 \times F_2)(U_1 \times U_2) &\xrightarrow{\sim} (\mathrm{pr}_1^* F_1)(U_1 \times U_2) \times (\mathrm{pr}_2^* F_2)(U_1 \times U_2) \\ &\xrightarrow{\sim} F_1(U_1) \times F_2(U_2). \end{aligned}$$

Wir erhalten also einen Garbenmorphismus über $X_1 \times X_2$ von der algeraischen zur topologischen Beschreibung, indem einem Paar $(s,t) \in F_1(U_1) \times F_2 \times U_2$ der Schnitt $s \times t : U_1 \times U_2 \to \overline{F_1} \times \overline{F_2}$ zugeordnet wird. Dieser Morphismus induziert auf den Halmen die Bijektion $(F_1 \times F_2)_{x,y} \xrightarrow{\sim} (F_1)_x \times (F_2)_y$ aus dem Vertauschen von endlichen Produkten mit filtrierenden Kolimites. □

Bemerkung 4.15. Auf ähnliche Weise kann man auch für $\mathrm{Ens}_{/\!\!/\,\mathrm{Top}}$ endliche Produkte konstruieren: es handelt sich (wegen der opponierten Fasern) um das *Ko*produkt der mit den Projektionen auf den Produktraum zurückgezogenen Garben.

Auch dieses Verfahren können wir für beliebige Limites und Kolimites durchführen und so 1.35 übertragen:

Satz 4.16. *Die Kategorie der Garben auf topologischen Räumen mit Morphismen* $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$ *besitzt endliche Limites.*

Beweis. Es reicht mit 4.14 die Existenz von Egalisatoren zu zeigen. Seien dazu $(F \to X) \rightrightarrows (G \to Y)$ zwei Morphismen. Wir zeigen, dass der Egalisator $E \to W$ aus $\mathrm{Top}^{[1]}$ eine Garbe ist. Sei f die (übereinstimmende) Verknüpfung $W \to X \rightrightarrows Y$. Nun ist E insbesondere ein Egalisator von Garben über $W \subset X$: $E \to F|_W \rightrightarrows f^*G$ und somit eine Garbe. □

Bemerkung 4.17. Die verbleibenden Fragen zur Vollständigkeit und Kovollständigkeit von $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$ werden in 4.38 und **??** negativ beantwortet.

4.1.4 Kartesisch abgeschlossene koreflektive Kategorien topologischer Räume

Wir könnten erwarten, dass wie das Produkt auch das interne Hom von $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ in unsere relative Situation übertragen werden kann. Dies gelingt tatsächlich aber im Allgemeinen nicht, denn in diesem Fall erhielten wir durch Einschränken auf die Basis ein zum kartesischen Produkt adjungiertes internes Hom in der Kategorie der topologischen Räume (4.29), was bekanntermaßen in dieser Allgemeinheit nicht möglich ist ([Bor94], Prop. 7.1.2). Wir müssen uns also wieder auf eine bequeme Kategorie topologischer Räume mit internem Hom einschränken.

Die häufige Wahl CGHaus ist für uns ungeeignet, denn der étale Raum einer Garbe über einem kompakt erzeugten Hausdorffraum ist im Allgemeinen kein Hausdorffraum mehr (betrachte etwa die Garbe der stetigen Funktionen nach $\mathbb{R}$). Abhilfe schafft uns eine Konstruktion aus [Vog71], die die den kompakt erzeugten Räumen zugrundeliegenden Gedanken verallgemeinert. Wir geben hier nur die Ergebnisse an.

Äquivalent zu unserer (der *point-set*-Topologie entspringenden) Definition kompakt erzeugter Räume ist die folgende Charakterisierung:

Lemma 4.18 (2.21, Variante)**.** *Ein topologischer Raum X ist kompakt erzeugt genau dann, wenn gilt: Eine Teilmenge $U \subset X$ ist offen genau dann, wenn ihr Urbild unter allen stetigen Abbildungen $K \to X$, K kompakt, offen ist.*

Beweis. Unsere Bedingung besagt, dass X die Finaltopologie bezüglich des Systems der $K \to X$, K kompakt tragen soll. Die Bedingung aus der ursprünglichen Definition ist dieselbe für das System der Inklusionen kompakter Mengen $K \subset X$. Da jede stetige Abbilung $K \to X$, K kompakt, über die Inklusion ihres kompakten Bilds faktorisiert, ist letzteres System in ersterem konfinal und die Finaltopologien stimmen überein. □

Der in **??** angesprochene zur Inklusion Rechtsadjungierte $k : \mathrm{Top} \to \mathrm{CG}$ lässt sich nun auch beschreiben als das Versehen der X zugrundeliegenden Menge mit der genannten Finaltopologie. Der Raum kX ist dann sogar ein Kolimes über das System der $K \to X$, K kompakt, mitsamt den Morphismen über X ([Vog71], 1.1).

Nun verallgemeinern wir ([Vog71], 1): Sei $\mathcal{I}$ eine nichtleere volle Unterkategorie von Top (für CG die kompakten Räume). Betrachte die Kategorie $\mathcal{I} \downarrow X$ und $kX := \mathrm{col}_{mathcal I \downarrow X}\, X$. Bezeichne die volle Unterkategorie der topologischen Räume X mit $kX \cong X$ mit $\mathcal{K}$. Dann ist $k : \mathrm{Top} \to \mathcal{K}$ ein Funktor und rechtsadjungiert zur Inklusion $\mathcal{K} \to \mathrm{Top}$. Es gilt $\mathcal{I} \subset \mathcal{K}$.

Bemerkung 4.19. Dual zu 1.36 heißt eine volle Unterkategorie mit zur Inklusion Rechtsadjungiertem *koreflektiv*, der Rechtsadjungierte heißt *Koreflektor*. Die Konstruktion, die zur vollen Unterkategorie $\mathcal{I} \subset \mathrm{Top}$ eine koreflektive Unterkategorie $\mathcal{K} \subset \mathrm{Top}$ liefert, welche $\mathcal{I}$ umfasst, heißt auch Übergang zur *koreflektiven Hülle*. Es handelt sich tatsächlich um eine idempotente Operation ([Vog71], Prop. 1.5).

Die koreflektive Hülle besitzt die folgenden Stabilitätseigenschaften:

Proposition 4.20. *Die koreflektive Hülle $\mathcal{K}$ ist vollständig und kovollständig. Die Kolimites stimmen mit den Kolimites aus* Top *überein, die Limites entstehen durch Anwendung des Koreflektors k auf den Limes in* Top*.*

Insbesondere ist $\mathcal{K}$ also stabil unter disjunkten Summen und Quotientenbildung.

Beweis. Das ist die duale Aussage zu 1.37. Die Vollständigkeit und Kovollständigkeit von Top durch Versehen der mengentheoretischen Limites bzw. Kolimites mit der Initial- bzw. Finaltopologie ist bekannt. □

Im allgemeinen kann man keine Aussage darüber treffen, ob mit der Relativtopologie versehene Unterräume von Objekten in $\mathcal{K}$ wieder zu $\mathcal{K}$ gehören. Wir benötigen die folgende Eigenschaft:

1. Ist $U \overset{\circ}{\subset} X$ ein offener Unterraum eines Objekts $X \in \mathcal{I}$ versehen mit der Relativtopologie, so gilt $U \in \mathcal{K}$.

In diesem Fall gilt bereits für Objekte $X \in \mathcal{K}$, dass offene Unterräume $U \overset{\circ}{\subset} X$ wieder Objekte von $\mathcal{K}$ sind. Dieselbe Aussage gilt, wenn man "offen" zweimal durch "abgeschlossen" ersetzt ([Vog71], Prop. 2.4).

Wir nehmen nun an, dass $\mathcal{I}$ die folgenden Axiome erfüllt ([Vog71], Axiom 2):

2. $\mathcal{I}$ ist abgeschlossen unter endlichen kartesischen Produkten (Produkten in Top).

3. Sind $X, Y \in \mathcal{I}$, so ist die Auswertungsabbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_{X,Y} : \mathrm{Top}_{co}(X,Y) \times X &\to Y, \\ (f,x) &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

stetig. Dabei ist $\mathrm{Top}_{co}(X,Y)$ die Morphismenmenge $\mathrm{Top}(X,Y)$ versehen mit der kompakt-offen Topologie.

Dann besitzt $\mathcal{K}$ die Struktur einer kartesisch abgeschlossenen Kategorie mit Produkten

$$X \otimes Y \;:=\; k(X \times Y)$$

den "k-ifizierungen" der Produkte in Top und internem Hom

$$X \Rightarrow Y \;:=\; k(\mathrm{Top}_{co}(X, Y))$$

([Vog71], 3).

Definition 4.21. Ein topologischer Raum heißt *lokalkompakt* (im starken Sinne), wenn jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen besitzt.

Bemerkung 4.22. Dies ist eine stärkere Bedingung als *lokal kompakt* (im schwachen Sinne) wie in 2.23 zu sein. Jene stimmt überein mit unserer Konvention für "lokal Eigenschaft" und wird daher getrennt geschrieben. Für Hausdorffräume stimmen beide Begriffe überein.

Proposition 4.23 ([Vog71], 5)**.** *Die folgenden vollen Unterkategorien der Kategorie der topologischen Räume erfüllen die Axiome 1 - 3.*

(i) die Kategorie der kompakten Hausdorffräume $\mathcal{I}_K$,

(ii) die Kategorie der lokalkompakten topologischen Räume $\mathcal{I}_L$.

Für das Axiom 1 weisen wir das nach. Da es sich um eine lokale Eigenschaft handelt, gilt die Aussage im Fall der lokalkompakten Räume sofort. Für die kompakten Hausdorffräume bemerkt man, dass nach dem folgenden Lemma eine offene Teilmenge eines kompakten Hausdorffraums lokalkompakt ist und lokalkompakte Hausdorffräume mit den kompakt erzeugten Hausdorffräumen allgemein (vgl. 2.23 (i)) in der koreflektiven Hülle der kompakten Hausdorffräume enthalten sind: in der Tat ist für diese das System der Inklusionen kompakter Teilmengen konfinal im System der von kompakten Hausdorffräumen ausgehenden stetigen Abbildungen, da das Bild von Kompakta unter stetigen Abbildungen kompakt ist. Die Bedingung, kompakt erzeugt zu sein, bedeutet aber gerade, die Finaltopologie bezüglich dieser Inklusionen zu tragen.

Lemma 4.24. *Sei K ein kompakter Hausdorffraum und $U \subset\!\!\!\circ\, K$ eine offene Teilmenge. Dann ist U mit der induzierten Topologie lokalkompakt.*

Beweis. Sei $V \subset\!\!\!\circ\, U$ eine offene Umgebung eines Punktes $x \in U$. Der Rand ∂V ist als abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Hausdorffraums kompakt und kann somit durch endlich viele offene Mengen überdeckt werden, die disjunkt zu einer offenen Umgebung W_0 von x sind. Bezeichne die Vereinigung dieser Mengen mit W. Wegen $W \supset \partial V$ ist $V \setminus W = \overline{V} \setminus W$ abgeschlossen und somit eine kompakte Umgebung von x, die die offene Umgebung W_0 von x enthält. $\square$

Auch Axiom 2 sieht man direkt: ein Produkt von Hausdorffräumen ist bekanntermaßen wieder Hausdorffsch und ein Produkt kompakter Räume wieder kompakt. Mit dieser Aussage finden wir auch bei einem Produkt lokalkompakter Räume Umgebungsbasen aus Kompakta durch die Umgebungsbasen aus Produktmengen.

Für das Axiom 3 verweisen wir auf die Literatur, siehe etwa [Soe18e], 1.12.12.

Korollar 4.25. *Die koreflektiven Hüllen von $\mathcal{I}_K$ und $\mathcal{I}_L$ sind kartesisch abgeschlossen und enthalten mit jedem Objekt X auch alle offenen und alle abgeschlossenen Unterräume $Y \subset X$.*

Damit können wir die für uns entscheidende Eigenschaft zeigen:

Proposition 4.26. *Ist $X \in \mathcal{K}$ für $\mathcal{K}$ die koreflektive Hülle von $\mathcal{I}_K$ bzw. $\mathcal{I}_L$ und $F \to X$ eine étale Abbildung, so ist auch $F \in \mathcal{K}$.*

Beweis. Wir können den étalen Raum $F \to X$ als Kolimes mittels der Schnitte $F(U)$ über offene Mengen $U \overset{\circ}{\subset} X$ darstellen:

$$F \xrightarrow{\sim} \coprod_{U \overset{\circ}{\subset} X} F(U) \times U / \sim .$$

Dabei läuft das Koprodukt über alle offenen Teilmengen von X und ist die Äquivalenzrelation die Identifikation gleicher Keime, d. h.

$$(s, p) \sim (t, q) \Leftrightarrow p = q \text{ und } s_p = t_p.$$

Die étale Abbildung $F \to X$ ist dann von der Projektion auf die zweiten Faktoren induziert und wohldefiniert. Man erkennt leicht den Isomorphismus als die Koeinheit der Adjunktion $(\text{ét}, S)$ aus [Soe18d], 2.1.24, eingeschränkt auf die Kategorie der étalen Räume über X.

Nach den Stabilitätseigenschaften von $\mathcal{K}$ sind die offenen Teilmengen $U \subset X$ Objekte von $\mathcal{K}$ und dann auch der Kolimes F bestehend aus Koprodukt und Koegalisator. Man beachte, dass es sich bei $F(U) \times U$ mit der diskreten Topologie auf $F(U)$ formal um das Koprodukt $\coprod_{F(U)} U$ handelt. $\square$

Bemerkung 4.27. Der Beweis wiederholt bei genauerer Betrachtung die Aussage, dass jede Prägarbe auf X ein Kolimes über darstellbare Prägarben $\mathrm{Off}_{\mathrm{X}}(\cdot, U)$ ist (2.6).

4.1.5 Kartesischer Abschluss von Garben auf topologischen Räumen

Wir können uns nun der Frage nach einer kartesisch abgeschlossenen Struktur auf $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$ zuwenden. Ganz allgemein gilt:

Proposition 4.28. *Ist $C \subset D$ eine koreflektive Unterkategorie einer kartesisch abgeschlossenen Kategorie C und stimmen die Produkte in C und D überein, dann ist D kartesisch abgeschlossen.*

Beweis. In diesem Fall ist die Koreflektion $(X \Rightarrow Y)^+$ des internen Hom in D ein internes Hom in C. $\square$

Damit können wir folgern:

Proposition 4.29. *Die Kategorie der Garben über topologischen Räumen mit Morphismen $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$ ist nicht kartesisch abgeschlossen.*

Beweis. Betrachte die volle Unterkategorie $\mathrm{Top} \subset \mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$ gegeben durch die Einbettung $X \mapsto (\varnothing \to X)$. Diese ist koreflektiv mit dem Koreflektor $(G \to Y) \mapsto (\varnothing \to Y)$. In der Tat gilt:

$$\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}((\varnothing \to X),(G \to Y)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Top}(X,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}((\varnothing \to X),(\varnothing \to Y)).$$

Die Produkte in $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$ und $\mathrm{Top} \subset \mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$ stimmen nach 4.14 überein. Somit müsste laut **??** Top kartesisch abgeschlossen sein, ein Widerspruch zu der bekannten Aussage, dass dies für Top nicht möglich ist ([Bor94], Prop. 7.1.2). □

Da das einzige Problem die fehlende kartesisch abgeschlossene Struktur in der Basis war, schränken wir uns auf eine bequemere Kategorie $\mathcal{K}$ ein. Zunächst betrachten wir den Fall von Paaren von $\mathcal{K}$-Räumen mit stetiger, aber nicht notwendigerweise étaler, Abbildung.

Lemma 4.30. *Sei $\mathcal{K} \subset \mathrm{Top}$ eine koreflektive, kartesisch abgeschlossene Kategorie topologischer Räume. Dann ist $\mathcal{K}^{[1]}$ kartesisch abgeschlossen.*

Beweis. Es handelt sich um eine Prägarbenkategorie auf $[1]^{\mathrm{op}}$ mit Werten in einer kartesisch abgeschlossenen Kategorie. Die Aussage folgt somit aus 4.13. Expliziter ist das interne Hom von $F \to X$ mit $G \to Y$ das Paar

$$\mathcal{K}(F,G) \times_{\mathcal{K}(F,Y)} \mathcal{K}(X,Y) \to \mathcal{K}(X,Y),$$

das die Menge der kommutativen Quadrate mit einer Topologie ausstattet, mit der Projektion auf den zweiten Faktor als Abbildung. Die Adjunktion $\mathcal{K}^{[1]}((F \to X) \times (G \to Y),(H \to Z)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}^{[1]}((F \to X),(G \to Y) \Rightarrow (H \to Z))$ für $(F \to X),(G \to Y),(H \to Z) \in \mathcal{K}^{[1]}$ ist dann die Bijektion von Faserprodukten

$$\begin{aligned} &\mathcal{K}(F \times G, H) \times_{\mathcal{K}(F \times G, Z)} \mathcal{K}(X \times Y, Z) \\ \xrightarrow{\sim}\ &\mathcal{K}(F, \mathcal{K}(G,H) \times_{\mathcal{K}(G,Z)} \mathcal{K}(Y,Z)) \times_{\mathcal{K}(F,\mathcal{K}(Y,Z))} \mathcal{K}(X,\mathcal{K}(Y,Z)). \end{aligned}$$

□

Im allgemeinen ist das interne Hom in $\mathcal{K}^{[1]}$ für $(F \to X)$ und $G \to Y)$ mit étalen Abbildungen nicht wieder étale. Wir können versuchen, es zu "étalisieren":

Lemma 4.31 ([Soe18d], 2.1.40)**.** *Für X einen topologischen Raum ist die volle Unterkategorie* $\text{étTop}_X \hookrightarrow \mathrm{Top}_X$ *koreflektiv. Der zur Inklusion Rechtsadjungierte heißt* Étalisierung*.*

Beweis. ([Soe18d], 2.1.40) Wir erhalten die Étalisierung als die Verknüpfung $\text{ét} \circ S$ für S den Funktor der Schnittgarbe und ét den Funktor des étalen Raums einer Garbe. Es handelt sich um die Verknüpfung von Adjunktionen

$$(\text{ét}, S) \circ (S, \text{ét}) = (\text{ét} \circ S, \text{ét} \circ S) : \mathrm{Top}_X \rightleftarrows \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}} \rightleftarrows \text{étTop}_X,$$

wobei letztere Adjunktion die bekannte Äquivalenz von Kategorien ist. □

Ist $\mathcal{K} \subset \mathrm{Top}$ nun eine Kategorie topologischer Räume, die mit jedem Raum X auch jeden étalen Raum über X enthält (etwa wie in 4.26), so können wir die Kategorie der étalen Räume über $\mathcal{K}$ als volle Unterkategorie von $\mathcal{K}^{[1]}$ auffassen:

$$\text{ét}\mathcal{K}^{[1]} := \mathrm{Ens}_{/\mathcal{K}} \subset \mathcal{K}^{[1]}.$$

Gäbe es nun einen Koreflektor $^+ : \mathcal{K}^{[1]} \to \text{ét}\mathcal{K}^{[1]}$, so hätten wir für $F, G, H \in \text{ét}\mathcal{K}^{[1]}$:

$$\begin{aligned}\text{ét}\mathcal{K}^{[1]}(F \times G, H) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{K}^{[1]}(F \times G, H)\\ &\xrightarrow{\sim} \mathcal{K}^{[1]}(F, G \Rightarrow H)\\ &\xrightarrow{\sim} \text{ét}\mathcal{K}^{[1]}(F, (G \Rightarrow H)^+),\end{aligned}$$

mit der kartesisch abgeschlossenen Struktur aus 4.30 im zweiten Schritt. Die Produkte in $\mathcal{K}^{[1]}$ und $\text{ét}\mathcal{K}^{[1]}$ stimmen dabei nach dem folgenden Lemma überein. Umgekehrt ist, falls ein internes Hom $(G \Rightarrow H)^+$ in $\text{ét}\mathcal{K}^{[1]}$ existiert, die Zuordnung $(G \Rightarrow H) \mapsto (G \Rightarrow H)^+$ ein partiell definierter Koreflektor. Unsere Aufgabe ist es nun zu zeigen, dass eine solche relative Form der Étalisierung nicht möglich ist.

Lemma 4.32. *Ist $k : \mathrm{Top} \to \mathcal{K}$ ein Koreflektor und $p : F \to X$ étale in* Top*, so ist $kp : kF \to kX$ étale.*

Bemerkung 4.33. Die Bedingung, dass $\mathcal{K}$ koreflektiv sei, ist hier nur eine sehr schwache Einschränkung, denn sie ist äquivalent dazu, dass $\mathcal{K}$ unter Kolimites in Top abgeschlossen ist ([HS79], Thm. 37.3).

Beweis. Dass p étale ist, bedeutet, dass es für jedes $x \in F$ ein kommutatives Quadrat

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook] \arrow[d, "\sim"] & F \arrow[d, "p"] \\ p(U) \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

gibt mit $U \subset\!\circ F$ und $p(U) \subset\!\circ X$. Anwendung von k ergibt das entsprechende Diagramm, in welchem kU und $k(p(U))$ offen sind, da der Koreflektor die Topologien höchstens verfeinert und die Abbildungen injektiv bleiben, da k die zugrundeliegenden mengentheoretischen Abbildungen erhält. Da k ein Funktor ist, kommutiert das Quadrat und $kU \xrightarrow{\sim} k(p(U)) = (kp)(KU)$ ist ein Homöomorphismus. □

Das Übereinstimmen der Produkte in $\mathcal{K}^{[1]}$ und $\text{ét}\mathcal{K}^{[1]}$ ergibt sich nun daraus, dass für $(F \to X), (G \to Y) \in \text{ét}\mathcal{K}^{[1]}$ zunächst das Produkt $(F \times G \to X \times Y)$ in Top étale ist, und dann nach dem Lemma auch das Produkt $k(F \times G) \to k(X \times Y)$ in $\mathcal{K}^{[1]}$ étale und somit in $\text{ét}\mathcal{K}^{[1]}$ ist.

Satz 4.34. *Sei $\mathcal{K} \subset \mathrm{Top}$ eine volle Unterkategorie. Der partiell definierte Koreflektor $^+ : \mathcal{K}^{[1]} \to \text{ét}\mathcal{K}^{[1]}$ ist nur auf $\text{ét}\mathcal{K}^{[1]}$ definiert.*

Beweis. Dies liegt daran, dass die Testobjekte, mit denen wir Objekte in $\mathcal{K}^{[1]}$ eindeutig festlegen können, bereits étale sind. Betrachte dazu die Einbettungen

$\iota, \tau : \mathcal{K} \to \text{ét}\mathcal{K}^{[1]}$ durch über dem betreffenden Raum initiale bzw. terminale Garben:

$$\iota X := (\varnothing \to X),$$
$$\tau X := (X \xrightarrow{\text{id}} X.$$

Gelte also

$$\mathcal{K}^{[1]}((F \to X), (G \to Y)) \xrightarrow{\sim} \text{ét}\mathcal{K}^{[1]}((F \to X), (G \to Y)^{+}) \tag{4.2}$$

für alle étalen $F \to X$. Ein Objekt $(H \to Z) \in \mathcal{K}^{[1]}$ ist nach dem Yoneda-Lemma (bis auf eindeutigen Isomorphismus) eindeutig festgelegt durch seine Yoneda-Einbettung $\mathcal{K}^{[1]}(\cdot, (H \to Z))$. Wir behaupten, dass sogar die Funktoren $\mathcal{K}^{[1]}(\iota\cdot, (H \to Z)) = \mathcal{K}(\cdot, Z)$ und $\mathcal{K}^{[1]}(\tau\cdot, (H \to Z)) = \mathcal{K}(\cdot, H) : \mathcal{K} \to \text{Ens}$ und ihre aus $\iota\cdot \Rightarrow \tau\cdot$ entstehende Transformation ausreichen, um $H \to Z$ eindeutig festzulegen. In der Tat bestimmen die beiden Funktoren nach dem Yoneda-Lemma bereits die beteiligten Räume H und Z eindeutig und der Morphismus $H \to Z$ entspricht der Transformation. Nun sind $\iota X, \tau X \in \text{ét}\mathcal{K}^{[1]}$ für alle $X \in \mathcal{K}$, was den Beweis abschließt: dann müssen nämlich im Fall von 4.2 $(G \to Y)$ und $(G \to Y)^{+}$ isomorph sein und die Koreflektion ist genau dann definiert, wenn $(G \to Y)$ sowieso schon étale ist. □

Korollar 4.35. *Es gibt ein internes Hom für $F \to X$ und $G \to Y$ in* $\text{ét}\mathcal{K}^{[1]}$ *genau dann, wenn die Projektion auf den zweiten Faktor*

$$\mathcal{K}(F, G) \times_{\mathcal{K}(F,Y)} \mathcal{K}(X, Y) \to \mathcal{K}(X, Y)$$

étale ist.

Beweis. Dies folgt aus 4.30 und 4.34. □

Bemerkung 4.36. Wenn $\mathcal{K}(F, G)$ die kompakt-offen Topologie trägt, erhielten wir folgendes Gegenbeispiel zum kartesischen Abschluss von $\text{ét}\mathcal{K}^{[1]}$: Für $X = Y = \text{pt}$ sind étale Räume $F \to X$ und $G \to Y$ diskret. Das interne Hom von $F \Rightarrow G$ lautet $\mathcal{K}(F, G) \to \mathcal{K}(X, Y) = \text{pt}$ und muss folglich selbst diskret sein. Dies ist im Fall, dass F unendlich ist, ein Widerspruch zum folgenden Lemma. Im Fall der koreflektiven Hüllen von $\mathcal{K} = \mathcal{I}_K$ oder $\mathcal{K} = \mathcal{I}_L$ aus dem vorangegangenen Abschnitt gilt allerdings $\mathcal{K}(F, G) = k(\text{Top}_{co}(F, G))$. Mir ist nicht bekannt, ob der Koreflektor die Topologien so sehr verfeinern kann, dass $\mathcal{K}(F, G)$ auch bei unendlichem F diskret wird.

Lemma 4.37. *Ist G diskret, so ist die kompakt-offen Topologie auf* $\text{Top}(F, G)$, $F \in \text{Top}$ *genau dann diskret, wenn X endlich viele Zusammenhangskomponenten hat.*

Beweis. Die kompakt-offen Topologie ist genau dann diskret, wenn jede stetige Abbildung $f : F \to G$ durch endlich viele Aussagen der Form $f(K) \subset U$ für $K \subset F$ kompakt und $U \overset{\circ}{\subset} G$ eindeutig festgelegt ist. Ein Kompaktum $K \subset F$ trifft nur endlich viele Zusammenhangskomponenten von F. Daher kann f nicht eindeutig festgelegt werden, wenn F unendlich viele Zusammenhangskomponenten hat. Umgekehrt ist f als stetige Funktion in einen diskreten Raum konstant auf Zusammenhangskomponenten und kann durch die Angabe des Funktionswerts (Punkte in G sind offen) eines Punktes in jeder Zusammenhangskomponente eindeutig festgelegt werden. □

4.1.6 Vollständigkeitseigenschaften der Garben auf topologischen Räumen

Mit denselben Techniken können wir auch zeigen, dass die Kategorie $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$ der Garben auf topologischen Räumen über die endlichen Limites aus 4.16 und die trivialen Koprodukte hinaus weder vollständig noch kovollständig ist.

Proposition 4.38. *Die Kategorie* $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$ *der Garben über topologischen Räumen besitzt keine unendlichen Produkte.*

Beweis. Dies sieht man schon am Beispiel eines unendlichen Produkts von Inklusionen $\iota : U \hookrightarrow X$ einer echten offenen Teilmenge $U \neq X$. Die Abbildung

$$\prod_{\mathbb{N}} \iota : \prod_{n} U \to \prod_{\mathbb{N}} X$$

ist nicht étale, denn es gibt keine Schnitte $\prod_{\mathbb{N}} X \to \prod_{\mathbb{N}} U$, weil eine Menge in der Basis der Produkttopologie von $\prod_{\mathbb{N}} X$ in fast allen Faktoren X die Projektion X hat. Dies wäre aber wegen des Fehlens eines Koreflektors (4.34) für die Existenz von unendlichen Produkten nötig. □

Korollar 4.39. *Die volle Unterkategorie* $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}} \subset \mathrm{Top}^{[1]}$ *ist nicht reflektiv.*

Beweis. Gäbe es einen zur Inklusion Linksadjungierten, so wäre die Inklusion linksexakt, würde also Limites erhalten. □

Wir können sogar zeigen, dass es den Reflektor praktisch nicht gibt. Bezeichne dazu einen Punkt in einem Raum $F \in \mathrm{Top}_X$ als *étale*, wenn er die lokale Homöomorphismus-Eigenschaft eines étalen Raums über X erfüllt.

Proposition 4.40. *Der partiell definierte Reflektor* $\mathrm{Top}^{[1]} \to \mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$ *ist auf* $F \in \mathrm{Top}_X$ *genau dann definiert, wenn jeder nichtétale Punkt* $\sigma \in F$ *eine kleinste offene Umgebung* $U(\sigma)$ *besitzt.*

Beweis. Besitzt jeder nichtétale Punkt in F eine kleinste offene Umgebung, so ergänzt der Reflektor in F einen nichtétalen Punkt σ lokal zu einer Kopie von $U(\sigma)$. Ein Morphismus von F in eine Garbe $G \in \mathrm{Ens}_{/Y}$ schickt σ auf einen Keim $f(\sigma)$ eines Schnitts in $G(V)$ für eine offene Umgebung V des Basispunkts von $f(\sigma)$, deren Urbild $f^{-1}(V) \supset U(\sigma)$ die kleinste offene Umgebung von σ enthält. Da Übereinstimmungsmengen von Schnitten offen sind, enthält ihr Urbild mit σ auch $U(\sigma)$ und es lässt sich somit ein Morphismus $F \to G$ eindeutig über den Reflektor $F \to F^+$ faktorisieren.

Sei umgekehrt der Reflektor $^+$ definiert auf einem Objekt $F \to X$. Durch Testen mit Zielobjekten τY, $Y \in \mathrm{Top}$ ist nach dem Yoneda-Lemma die Basis von $(F \to X)^+$ wieder (bis auf eindeutigen Homöomorphismus) X und die Einheit der Adjunktion $\kappa : F \to F^+$ liegt über der Identität auf X. Wegen der eindeutigen Faktorisierung über κ müssen sich nicht nur die gesamten Mengen von kommutativen Quadraten von $F \to X$ bzw. $(F \to X)^+$ in eine Garbe entsprechen, sondern sogar die Morphismen über jeder Abbildung f in der Basis. Sei $\sigma \in F$ nun ein nichtétaler Punkt, $U \subset\!\circ X$ eine étale Umgebung von

$\kappa(\sigma)$ und $V \subsetneq U$ eine echt kleinere offene Umgebung von $\kappa(\sigma)$. Wir wählen als Testraum die Garbe G über dem Sierpinski-Raum mit zweielementigem Halm über dem offenen Punkt und genau einem globalen Schnitt und als Abbildung in der Basis die Abbildung, für die das Urbild des offenen Punktes V ist. Nun gibt es Morphismen $F \to G$, die σ auf den nichtfortsetzbaren Schnitt über dem offenen Punkt schicken, aber keine Morphismen $F^+ \to G$, die $\kappa(\sigma)$ auf den nichtfortsetzbaren Schnitt über dem offenen Punkt schicken, ein Widerspruch zur eindeutigen Faktorisierung über κ. □

Korollar 4.41. *Ein Kolimes in* $\mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Top}}$ *existiert genau dann, wenn alle nichtétalen Punkte des Kolimes in* $\mathrm{Top}^{[1]}$ *eine kleinste offene Umgebung haben.*

Beispiel 4.42. *Betrachte den Basisraum* $X = [0,1] \sqcup \mathrm{pt}$ *und die über* $[0,1]$ *konstant einelementige und über* pt *zweielementige Garbe* $F \in \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$*. Durch Identifikation (d. h. einen Koegalisator mit der konstant einelementigen Garbe über dem Punkt) des Punkts in* F_0 *mit einem der Punkte aus* F_{pt} *und der zugehörigen Identifaktion* $0 \sim \mathrm{pt}$ *entsteht ein topologischer Raum über dem Quotienten* $[0,1]$ *der Basis mit einem globalen Schnitt und einem weiteren, nichtétalen Punkt über* 0.

4.2 Schwach konstruierbare Garben auf simplizialen Mengen

In diesem Abschnitt möchten wir die Aussagen aus Abschnitt 1.1 übertragen auf den Fall, dass es sich bei dem Basisraum um die Realisierung einer simplizialen Menge anstelle eines Simplizialkomplexes handelt. Simplizialkomplexe sind halbgeordnete Mengen und unsere Technik verwendete die Ordnungstopologie halbgeordneter Mengen. Simplizial konstante Garben auf simplizialen Mengen entsprechen hingegen Diagrammen von Mengen, in denen es auch mehrere Pfeile zwischen zwei zu nichtdegenerierten Simplizes gehörigen Punkten geben kann. Solche kategoriellen Realisierungen simplizialer Mengen werden wir in diesem Abschnitt konstruieren.

Konkret ist für $X \in \mathrm{s\,Ens}$ eine simpliziale Menge eine Kategorie D_X gesucht, für die es eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathrm{Ens}^{\mathrm{sk}}_{/|X|} \xrightarrow{\approx} [D_X^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$$

gibt. Dabei steht $\mathrm{Ens}^{\mathrm{sk}}_{/|X|}$ für die *simplizial konstanten Garben* auf $|X|$, d. h. Garben, deren Einschränkungen auf die Zellen der geometrischen Realisierung aus 2.20 konstant sind. Wir diskutieren die in Frage kommenden Kategorien D_X an einem einfachen Beispiel. Betrachte die Standarddarstellung von S^1 als simpliziale Menge X mit einem nichtdegenerierten 1-Simplex und einem nichtdegenerierten 0-Simplex aus 2.16. Als kategorielle Realisierung D_X von X können folgende Diagramme in Frage kommen:

1. Das Diagramm $D_X = (\bullet \to \bullet)$. Es handelt sich um das Diagramm der nichtdegenerierten Simplizes von X mit der Angabe, welche Simplizes im

Abschluss welcher Simplizes liegen. Dieses Diagramm ist zu grob, um simplizial konstanten Garben auf S^1 zu entsprechen, wie die Realisierung von D_X mit der Ordnungstopologie und dann die erste Garbenkohomologie zeigt. Im Abschnitt 4.2.2 werden wir diese kategorielle Realisierung mit der geometrischen Realisierung durch plumpe Simplizes in Beziehung setzen.

2. Das Diagramm $D_X = \Delta \downarrow_r X$. Es handelt sich um das Diagramm aller Simplizes von X mit der Angabe von Rändern und Degenerationen. Diese Diagramm ist zu fein, um von einer simplizial konstanten Garbe auf S^1 eindeutig bestimmt zu werden, denn diese trägt keine Informationen über die degenerierten Simplizes. Gleich im Anschluss werden wir diese kategorielle Realisierung mit den simplizialen Objekten in $\mathrm{Ens}_{/\!\!/ \mathrm{Top}}$ mit diskreten Basisräumen X in Beziehung setzen.

3. Das Diagramm $D_X = (\bullet \rightrightarrows \bullet)$. Dieses Diagramm würden wir anschaulich erwarten. Es handelt sich um die nichtdegenerierten Simplizes von X mit der Angabe von Rändern, nicht aber von Degenerationen. Im Abschnitt 4.2.1 zeigen wir die versprochene Aussage, dass Prägarben auf diesem Diagramm simplizial konstanten Garben auf $|X|$ entsprechen.

Während wir für die anderen beiden kategoriellen Realisierungen mehr ausholen müssen, zeigen wir die Interpretation der Prägarben auf der Simplexkategorie von X direkt.

Betrachte für eine feste simpliziale Menge $X \in \mathrm{s\,Ens}$ die volle Unterkategorie $(\mathrm{s\,Ens}_{/\!\!/ \mathrm{Top}})_X \subset \mathrm{s\,Ens}_{/\!\!/ \mathrm{Top}}$ der simplizialen Garben über topologischen Räumen mit Komorphismen, für die die Basisräume diskret und als simplizialer topologischer Raum isomorph zur simplizialen Menge X sind. Für eine Garbe $F \in (\mathrm{s\,Ens}_{/\!\!/ \mathrm{Top}})_X$ und $\sigma \in X_n$ einen n-Simplex schreiben wir $F(\sigma)$ für die Menge $(F_n)_\sigma$, den Halm bei σ. Für $f : [n] \to [m]$ monoton bestehen die Komorphismen $F f^* F_n \to F_m$ aus Abbildungen $F(f(\sigma)) \to F(\sigma)$ für $\sigma \in X_m$. Da die Simplexkategorie $\Delta \downarrow_r X$ von X gerade aus allen Simplizes $\sigma \in \bigsqcup_n X_n$ besteht mit Morphismen $\sigma \to f(\sigma)$ für alle $f : [n] \to [m]$ und $\sigma \in X_m$, haben wir gezeigt:

Proposition 4.43. *Die obige Zuordnung liefert für* $X \in \mathrm{s\,Ens}$ *eine simpliziale Menge eine Äquivalenz von Kategorien*

$$[\Delta \downarrow_r X^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}] \xrightarrow{\approx} (\mathrm{s\,Ens}_{/\!\!/ \mathrm{Top}})_X.$$

4.2.1 Realisierung als gerichtete Kategorie

Wir benötigen die Begriffe für nichtdegenerierte Simplizes (vgl. 2.1, 2.3).

Definition 4.44. Die Unterkategorie der endlichen nichtleeren Ordinalzahlen mit injektiven monotonen Abbildungen $\Delta^+ \subset \Delta$ heißt *nichtdegenerierte Simplexkategorie.*

Wir wiederholen die Begriffe für simpliziale Mengen für Prägarben auf Δ^+.

Definition 4.45. Die darstellbare Prägarbe auf Δ^+

$$\Delta^{+n} := \Delta^+(\cdot, [n])$$

heißt der *nichtdegenerierte Standard-n-Simplex.*

Diese Zuordnung liefert einen Funktor $r : \Delta^+ \to [\Delta^{+\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$. Wir erhalten unsere für die kategorielle Realisierung gewünschte kosimpliziale Kategorie durch den Funktor der nichtdegenerierten Simplizes des nichtdegenerierten Standard-n-Simplex. Bezeichne dazu $\iota : \Delta^+ \hookrightarrow \Delta$ den Inklusionsfunktor und $\iota^* : [\Delta^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}] \to [\Delta^{+\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$ den Rückzugsfunktor auf Prägarben.

Definition 4.46. Der *Stufenfunktor* ist der Funktor

$$N : \Delta^+ \downarrow_r \iota^*\Delta^n \to \Delta^+ \downarrow_r \Delta^{+n},$$

gegeben durch das kommutative Quadrat

$$\begin{tikzcd}
f : \Delta^{+m} \to \iota^*\Delta^n \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto, "\sim"] & N(f) : \Delta^{+k} \to \iota^*\Delta^{+n} \arrow[d, mapsto, "\sim"] \\
f \in \Delta([m],[n]) \arrow[r, mapsto] & N(f) \in \Delta^+([k],[n]),
\end{tikzcd}$$

in dem die Vertikalen die eindeutigen Zuordnungen aus dem Yoneda-Lemma sind und die untere Horizontale die Abbildung, die eine monotone Abbildung f auf die eindeutige monotone Injektion $N(f)$ aus 2.14 mit demselben Bild (und anderem Definitionsbereich $[k]$) schickt.

Bemerkung 4.47. Der Name "Stufenfunktor" rührt daher, dass die Werte einer monotonen Funktion die Stufen in ihrem Graphen beschreiben.

Das Vorschalten von monotonen Injektionen vor $f \in \Delta([m],[n])$ (Morphismen in $\Delta^+ \downarrow_r \iota^*\Delta^n$) induziert auf der zugehörigen monotonen Injektion $\hat{f} \in \Delta^+([k],[n])$ ebenfalls Morphismen durch Vorschalten von Injektionen, denn das Einschränken von Funktionen auf Teilmengen verkleinert auch die Bildmengen. Dies zeigt die Funktorialität.

Proposition 4.48. *Die Zuordnung*

$$\begin{tikzcd}
{[n]} \arrow[r, mapsto] \arrow[dd, "f"] & \Delta^+ \downarrow_r \Delta^{+n} \arrow[d, "f\circ"] \\
& \Delta^+ \downarrow_r \iota^*\Delta^m \arrow[d, "N"] \\
{[m]} \arrow[r, mapsto] & \Delta^+ \downarrow_r \Delta^{+m}
\end{tikzcd}$$

ist ein Funktor $R : \Delta \to \mathrm{Cat}$, genannt die kosimpliziale Standard-Kategorie.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass für monotone $f : [m] \to [n]$ und $g : [l] \to [m]$ gilt

$$N((f \circ g)\circ) = N(f\circ)N(g\circ)$$

für $(f\circ)$ den Nachschaltefunktor und N den Stufenfunktor. Das folgt aber daraus, dass beide Funktoren eine monotone Injektion $h : [k] \to [l]$ auf die Injektion auf $\mathrm{im}(f \circ g \circ h)$ schicken. Diese Entsprechnung ist verträglich mit Einschränkungen von h (Vorschalten von monotonen Injektionen), ist also eine Transformation.

Es handelt sich bei den Kategorien $\Delta^+ \downarrow_r \Delta^{+n}$ um "gerichtete Kategorien", bei denen es keine Kreise von Pfeilen außer den Identitäten gibt, denn die nichttrivialen Morphismen sind das Vorschalten von echten Injektionen und senken somit den Grad eines Simplex. □

Proposition 4.49. *Die Kategorie der kleinen Kategorien* Cat *ist kovollständig.*

Beweis. Koprodukte in Cat sind die Koprodukte der zugrundeliegenden Köcher, d. h. die disjunkte Vereinigung über die Objektmengen und aus den Ausgangskategorien übernommene Morphismenmengen.

Die Koegalisatoren in Cat sind schwieriger, vergleiche [BBP99]. Wir geben die Konstruktion kurz an. Betrachte kleine Kategorien mit Funktoren $A \rightrightarrows^F_G B$. Die dem Koegalisator $B \to C$ zugrundeliegende mengentheoretische Abbildung ist der Koegalisator der den Funktoren F und G zugrundeliegenden mengentheoretischen Abbildungen. Durch diese Identifikationen in C werden Morphismen neu komponierbar, deren Kompositionen den durch die Identifikationen verschmolzenen Morphismenmengen hinzugefügt werden. Weiter müssen wie im folgenden Diagramm Morphismen Ff und Gf identifiziert werden, was auf die Kompositionen fortgesetzt wird.

$$\begin{array}{ccccc} a & & Fa & \sim & Ga \\ \downarrow{\scriptstyle f} & \longmapsto & \downarrow{\scriptstyle Ff} & \sim & \downarrow{\scriptstyle Gf} \\ b & & Fb & \sim & Gb \end{array}$$

Die Identifikationen $Fa \sim Ga$ für $a \in A$ und $Ff \sim Gf$ für $f \in A(a,b)$ sind notwendig für einen Koegalisator $B \to C$, damit $A \rightrightarrows^F_G B \to C$ übereinstimmen. Die weiteren Schritte machen "minimalinvasiv" B mit diesen Identifikationen wieder zu einer Kategorie. □

Bemerkung 4.50. Der Ansatz, Limites und Kolimites in *Cat* mittels 1.37 über die Einbettung Cat $\subset$ Quiv in die Kategorie der Köcher zu konstruieren, funktioniert *nicht*. Jene ist als Prägarbenkategorie tatsächlich vollständig und kovollständig und die Inklusion hat mit der freien Pfadkategorie über einem Köcher tatsächlich einen Linksadjungierten; allerdings handelt es sich nicht um eine volle (dann also reflektive) Unterkategorie, weshalb die Limites und Kolimites von denen in Quiv bzw. ihren freien Pfadkategorien abweichen.

Definition 4.51. Die *kategorielle Realisierung* einer simplizialen Menge $X \in$ s Ens ist definiert als das Tensorprodukt von Funktoren $X \otimes R \in$ Cat für R die kosimpliziale Standard-Kategorie und die natürliche Ens-tensorierte Struktur auf Cat (3.22).

Beispiel 4.52. *Betrachte die Standarddarstellung von S^1 als simpliziale Menge X mit einem nichtdegenerierten* 1*-Simplex und einem nichtdegenerierten* 0*-Simplex aus 2.16. Wie angekündigt ist die kategorielle Realisierung von X das*

Diagramm

$$\bullet \rightrightarrows \bullet$$

mit zwei Objekten und zwei parallelen Pfeilen dazwischen, sowie nicht eingezeichneten Identitäten.

Als zweite Zutat für unseren Satz, der simplizial konstante Garben auf $|X|$ mit Prägarben auf der kategoriellen Realisierung $X \otimes R$ in Beziehung setzen soll, benötigen wir eine Beschreibung von Garben auf Kolimites. Die Argumentation ist recht einfach, sofern die richtigen Begriffe von Limites und Kolimites von großen Kategorien zur Verfügung stehen. Problematisch dabei ist, dass wir selten tatsächliche Gleichheit von Funktoren und Isomorphismen von Kategorien haben (und benötigen), sondern Isotransformationen von Funktoren und Äquivalenzen von Kategorien. Ein Limes-Begriff für Kategorien muss insofern die *2-kategorielle Struktur* der "Kategorie" der Kategorien berücksichtigen. Wir erhalten die richtigen Formulierungen wie in [nLa18] erklärt anhand des Übersetzungsschemas:

1-Kategorie	$\leftrightarrow$	2-Kategorie
Gleichheit von Morphismen	$\leftrightarrow$	2-Isomorphismus von Morphismen (Isotransformation)
kommutieren	$\leftrightarrow$	kommutieren bis auf 2-Isomorphismus
Isomorphismus	$\leftrightarrow$	Quasi-Isomorphismus (Äquivalenz von Kategorien)

Ein 2-Limes über ein über I indiziertes System von Kategorien C_i ist also etwa eine Kategorie C, für die es für jede Testkategorie T eine Äquivalenz von Kategorien gibt zwischen der Funktorkategorie $[T, C]$ und der Kategorie bestehend aus (großen) Tupeln von Funktoren $F_i \in [T, C_i]$ für alle $i \in I$, für die es Isotransformationen $Cf \circ F_i \overset{\approx}{\Rightarrow} F_j$ für alle $f : i \to j$ in I gibt. Mit dieser Definition folgt automatisch die Exaktheit des Kategorien-Homs:

$$[C, \lim_i D_i] \xrightarrow{\approx} \lim_i [C, D_i],$$
$$[\operatorname{col}_i C_i, D] \xrightarrow{\approx} \lim_i [C_i, D].$$

2-Limites von Kategorien sind dann eindeutig bis auf Isomorphismus im 2-Kategorie-Sinne, d. h. bis auf Äquivalenz von Kategorien.

Nun können wir die Beschreibung von Garben auf Kolimites formulieren.

Satz 4.53. *Sei $X = \operatorname{col}_i X_i$ ein Kolimes topologischer Räume. Dann ist der Limes von Funktoren*

$$\kappa = \lim_i \mathrm{in}_i^* : \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}} \to \lim_i \mathrm{in}_i^* \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$$

eine Äquivalenz von Kategorien. Dabei ist $\mathrm{in}_i^* \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ das wesentliche Bild des Rückzugs entlang den Abbildungen des Kolimes $\mathrm{in}_i : X_i \to X$ und die Systemmorphismen sind das Nachschalten von $f^* : \mathrm{Ens}_{/X_j} \to \mathrm{Ens}_{/X_i}$ für $f : i \to j$ in I.

Beweis. Ist $X = \coprod_i X_i$ ein Koprodukt (d. h. I diskret), so sind die in_i^* Restriktionen, das Bild $\mathrm{in}_i^* \operatorname{Ens}_{/\mathrm{X}} \subset \operatorname{Ens}_{/X_i}$ ist dicht und die Äquivalenz ist die bekannte Aussage $\operatorname{Ens}_{/\mathrm{X}} \xrightarrow{\approx} \prod_i \operatorname{Ens}_{/X_i}$.

Im Fall eines Koegalisators $Z \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{q} X$ besteht eine Garbe G in der Limeskategorie aus einer Garbe G auf Y, einem Isomorphismus $G \xrightarrow{\sim} q^*F$ für F eine Garbe auf X und einem Isomorphismus $\tau : f^*G \xrightarrow{\sim} g^*G$ von Garben auf Z. Wir behaupten, dass ein Quasiinverser zu κ durch eine Abwandlung q_* des direkten Bilds gegeben ist mit

$$(q_*G)(U) := \left\{ s \in G(q^{-1}(U)) \,\middle|\, \tau_x(s_{f(x)}) = s_{g(x)} \text{ für alle } x \in (q \circ f)^{-1}(U) \right\}$$

und der Abbildung τ_x definiert durch das kommutative Quadrat

$$\begin{array}{ccc} (f^*G)_x & \xrightarrow{\tau} & (g^*G)_x \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ G_{f(x)} & \xrightarrow{\tau_x} & G_{g(x)}. \end{array}$$

Der Isomorphismus $q_* \kappa F \xrightarrow{\sim} F$ folgt nun mit der Finalität und Surjektivität von q ähnlich wie im Beweis der Aussage zum finalen Rückzug mit zusammenhängenden Fasern (1.21). Dort benötigten wir für $x \in X$ die Aussage, dass die Verknüpfung $U \to \kappa F \to F$ eines Schnitts über U mit der Abbildung des Rückzugs $\kappa F \to F$ über X (mengentheoretisch) faktorisiert, also konstant ist in der Einschränkung auf die Faser $q^{-1}(x) \to F_x$. Ist nun $f(x) \sim g(x)$ eine Identifikation in der Faser, so stellt unsere Konstruktion sicher, dass ein q_*-Schnitt derLimesgarbe κF gerade die von $F_{q(f(x))} = F_{q(g(x))}$ herrührenden Identifikationen berücksichtigen muss und wieder über X faktorisiert.

Der umgekehrte Isomorphismus $\kappa\, q_*\, G \xrightarrow{\sim} G$ folgt aus diesem, da die Limeskategorie gerade das wesentliche Bild von κ ist. □

Bemerkung 4.54. Entscheidend in diesem Beweis ist, dass die Isomorpismen τ zu den Daten von Limesgarben dazugehören. Im Fall von $X = S^1$ ist dies die Verklebung, die bestimmt, wie aus einer Garbe auf dem Einheitsintervall eine Garbe auf der Kreislinie gemacht wird.

Diese Äquivalenz schränkt ein zu einer Äquivalenz der vollen Unterkategorien simplizial konstanter Garben.

Proposition 4.55. *Für eine simpliziale Menge $X \in \mathrm{s}\operatorname{Ens}$ gilt:*

$$\operatorname{Ens}^{\mathrm{sk}}_{/|X|} \xrightarrow{\approx} \lim_{\Delta \downarrow_r X} \operatorname{Ens}^{\mathrm{sk}}_{/|\Delta^n|}.$$

Beweis. Bei den simplizial konstanten Garben auf den Simplizes $\Delta^n \to X$ handelt es sich um die wesentlichen Bilder des Rückzugs entlang der Einbettungen $|\Delta^n| \to |X|$. Das folgt daraus, dass unter diesen Abbildungen das Urbild einer Zelle eine Vereinigung von Zellen ist. □

Theorem 4.56. *Sei* $X \in \mathrm{s\,Ens}$ *eine simpliziale Menge. Dann gibt es eine Äquivalenz von Kategorien zwischen Prägarben auf der kategoriellen Realisierung von* X *und simplizial konstanten Garben auf* $|X|$*:*

$$[(X \otimes R)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}] \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ens}^{\mathrm{sk}}_{/|X|}\,.$$

Beweis. Wir nutzen, dass nach 4.55 beide Seiten mit dem Kolimes $|X| = \mathrm{col}_{\Delta\downarrow_{\mathrm{r}} X} |\Delta^n|$ vertauschen:

$$\begin{aligned}
[(X \otimes R)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}] &\xrightarrow{\approx} [\mathrm{col}_{\Delta\downarrow_{\mathrm{r}} X} (\Delta^n \otimes R)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}] \\
&\xrightarrow{\approx} \lim_{\Delta\downarrow_{\mathrm{r}} X} [(\Delta^n \otimes R)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}] \\
&\xrightarrow{\approx} \lim_{\Delta\downarrow_{\mathrm{r}} X} [(\Delta^n \otimes P)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}] \\
&\xrightarrow{\approx} \lim_{\Delta\downarrow_{\mathrm{r}} X} \mathrm{Ens}_{/\,\mathrm{Ord}(\Delta^n)} \\
&\xrightarrow{\approx} \lim_{\Delta\downarrow_{\mathrm{r}} X} \mathrm{Ens}^{\mathrm{sk}}_{/|\Delta^n|} \\
&\xrightarrow{\approx} \mathrm{Ens}^{\mathrm{sk}}_{/|X|}\,.
\end{aligned}$$

Dabei verwendet der zweite Schritt die Stetigkeit des Kategorien-Homs, der dritte den Umstand, dass es in Δ^n keine Mehrfachkanten gibt, der vierte 4.64 und der fünfte 1.16.

Beachte, dass der auftretende Kolimes zunächst ein (starker) Kolimes in der 1-Kategorie der kleinen Kategorien ist und mit dem (schwachen) 2-Kolimes für den zweiten Schritt übereinstimmt, weil es sich bei den beteiligten Kategorien um Skelettkategorien handelt. □

Bemerkung 4.57. Prägarben auf der kategoriellen Realisierung sind sogar Garben auf einer Basis: Formuliert man die Garbenbedingung für Garben auf einer Basis analog zum Fall von Überdeckungen in $\mathrm{Off}_{\mathrm{X}}$ ordnungstheoretisch, erhält man:

> Eine Prägarbe F auf einer halbgeordneten Menge X heißt Garbe, falls sie jedes Supremum (jeden Kolimes) über bezüglich endlichen Infima (Limites) abgeschlossene Teilsysteme von X auf den zugehörigen Limes schickt, sofern das Supremum in X existiert:
>
> $$F(\mathrm{col}_i\, U_i) \xrightarrow{\sim} \lim_i F(U_i).$$

Dies ist bei Prägarben auf der kategoriellen Realisierung trivialerweise erfüllt, denn ist in der kategoriellen Realisierung $x = \sup S$, so ist bereits $x \in S$.

Bemerkung 4.58. Ein erster Ansatz für die Beschreibung von Garben auf Kolimites führt über ihre Beschreibung als gewisse volle Unterkategorie der Funktorkategorie $[\mathrm{Off}_{\mathrm{X}}{}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$. Eine halbgeordnete Menge mit beliebigen Suprema (Vereinigungen), endlichen Infima (Schnitten) und einem Distributivgesetz heißt auch *Locale.* Diese bilden mit Locale-Morphismen, opponierten Morphismen halbgeordneter Mengen, die Suprema und endliche Infima erhalten, eine Kategorie Loc. Man könnte versuchen, den Funktor $\mathrm{Off} : \mathrm{Top} \to \mathrm{Loc}$ in Beziehung zu Kolimites zu setzen. Überraschend ist dabei, dass für Koprodukte die zugöhrige Locale erzeugt ist vom Koprodukt der Locales, für Koegalisatoren die zugehörige Locale jedoch der *Egalisator* der zugehörigen Locales ist.

Es schließt sich an diese Beschreibung simplizial konstanter Garben auf simplizialen Mengen eine Reihe an Fragen an, die hier nicht mehr abschließend beantwortet werden können:

1. Gilt in Analogie zu 1.27 nicht nur

$$\mathrm{Der}([(X \otimes R)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab}]) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}^{\mathrm{sk}}_{/|X|}),$$

   sondern sogar

$$\mathrm{Der}([(X \otimes R)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab}]) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Der}_{\mathrm{sk}}(\mathrm{Ab}_{/|X|}),$$

   für $\mathrm{Der}_{\mathrm{sk}}(\mathrm{Ab}_{/|X|})$ die derivierten abelschen Garben auf $|X|$ mit simplizial konstanten Kohomologiegarben?

2. Wie lassen sich die gerichteten Kategorien charakterisieren, die als kategorielle Realisierung simplizialer Mengen auftreten? Beispielsweise ist $(\bullet \to \bullet)$ keine solche gerichtete Kategorie.

3. Lassen sich die Ergebnisse mittels des Nerven einer Kategorie auf beliebige Diagrammkategorien verallgemeinern?

Wir können die Antworten nur in Teilen skizzieren:

1.

2. Einem Objekt σ einer gerichteten Kategorie kann eine Kardinalzahl zugeordnet werden, die angibt, wie viele nichttriviale Morphismen von σ auslaufen. Sind es $n+1$ Stück, nennen wir n die Dimension von σ. (Gibt es keine, nennen wir σ nulldimensional.) Eine gerichtete Kategorie C tritt genau dann als kategorielle Realisierung einer simplizialen Menge auf, wenn alle Objekte endliche Dimension haben und die Dimensionen der Objekte eine Halbordnung auf C definieren, die mit der Halbordnung durch Identifikation paralleler Morphismen in C übereinstimmt.

   Alle gerichteten Kategorien lassen sich jedoch als Kolimes von zu simplizialen Mengen gehörigen gerichteten Kategorien auffassen. Anders ausgedrückt sind die gerichteten Kategorien die koreflektive Hülle in Cat der zu simplizialen Mengen gehörigen gerichteten Kategorien und die Aussage von 4.56 überträgt sich durch Kostetigkeit. Dies ist ein zur Konstruktion koreflektiver kartesisch abgeschlossener Kategorien aus sich gut verhaltenden Unterkategorien topologischer Räume analoges Vorgehen. Die geometrische Realisierung einer gerichteten Kategorie $C = \mathrm{col}_i(C_i \otimes R)$ ist dabei der Kolimes $|C| = \mathrm{col}_i |X_i|$ für C_i zu simplizialen Mengen X_i gehörige gerichtete Kategorien. Beispielsweise gehört der Sierpinski-Raum zum Quotienten von S^1 nach der Identifikation der Bilder zweier gegenläufiger Pfade $|\Delta^1| \to S^1$.

3.

4.2.2 Realisierung als halbgeordnete Menge

Der kombinatorische topologische Raum $\blacktriangle X$ einer simplizialen Menge eignet sich *nicht* für die Übertragung der Aussagen zu schwach konstruierbaren Garben auf Simplizialkomplexen auf die Situation simplizialer Mengen, denn diese geometrische Realisierung sieht nicht mehrfache Verklebungsabbildungen. Dies möchten wir präzise machen. Wir definieren dazu eine Realisierung $X \otimes P$ von X durch halbgeordnete Mengen. Die kosimpliziale halbgeordnete Menge $P : \Delta \to \mathrm{poset}$ erhalten wir dabei aus $R : \Delta \to \mathrm{Cat}$ durch Anwenden eines Reflektors $\mathrm{Cat} \to \mathrm{poset}$.

Proposition 4.59. *Die Kategorie* poset *der halbgeordneten Mengen ist kovollständig.*

Beweis. Die halbgeordneten Mengen sind eine volle Unterkategorie $\mathrm{poset} \subset \mathrm{Cat}$. Wir können daher 1.37 verwenden, mit dem Reflektor $\mathrm{Cat} \to \mathrm{poset}$, der im folgenden Lemma konstruiert wird. □

Definition 4.60. Eine Kategorie heißt *dünn*, falls jede Morphismenmenge höchstens einelementig ist. Eine Kategorie heißt *Skelettkategorie*, falls in ihr jeder Isomorphismus eine Identität ist.

Lemma 4.61. *Die vollen Unterkategorien* $\mathrm{thinCat}, \mathrm{skelCat} \subset \mathrm{Cat}$ *der dünnen bzw. Skelettkategorien sind reflektiv. Der Reflektor* $\mathrm{Cat} \to \mathrm{skelCat}$ *macht aus dünnen Kategorien dünne Kategorien und liefert durch Komposition mit dem Reflektor* $\mathrm{Cat} \to \mathrm{thinCat}$ *einen Reflektor* $\mathrm{pos} : \mathrm{Cat} \to \mathrm{poset}$.

Beweis. Der Linksadjungierte zu $\mathrm{thinCat} \hookrightarrow \mathrm{Cat}$ ist gegeben durch die Identifikation aller nichtleeren Morphismenmengen zu einelementigen Morphismenmengen. Der Linksadjungierte zu $\mathrm{skelCat} \hookrightarrow \mathrm{Cat}$ ist die zu einer kleinen Kategorie mit dem Auswahlaxiom konstruierte Unterkategorie, die Isomorphieklassen von Objekten durch ein Objekt aus diesen ersetzt. Klar ist, dass Funktoren $F : C \to D$ in eine dünne Kategorie D Abbildungen auf Objekten sind mit der Zusatzeigenschaft, dass es einen Morphismus $Ff : Fx \to Fy$ in D geben muss, wann immer es einen Morphismus $f : x \to y$ in C gibt. Das ist unerheblich davon, wie viele Morphismen $x \to y$ es in C gibt und zeigt die erste Adjunktion. Ein Funktor in eine Skelettkategorie schickt isomorphe Objekte auf dasselbe Objekt, wird also schon durch das Bild eines Objekts jeder Isomorphieklasse eindeutig festgelegt. Dies zeigt die zweite Adjunktion.

Der Reflektor $\mathrm{Cat} \to \mathrm{skelCat}$ liefert eine Unterkategorie und erhält deshalb Dünnheit. Halbgeordnete Mengen sind nach Definition dünne Skelettkategorien. □

Bezeichne nun $P = \mathrm{pos}\, R : \Delta \to \mathrm{poset}$ die kosimpliziale halbgeordnete Menge zu unseren Standardkategorien. Die halbgeordneten Mengen $P[n] = \mathrm{pos}\, \Delta^+ \downarrow_r \Delta^{+n}$ sind dann die opponierten Standard-n-Simplizialkomplexe.

Proposition 4.62. *Sei* $X \in \mathrm{s\,Ens}$ *eine simpliziale Menge. Dann gibt es einen Homöomorphismus* $\blacktriangle X \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ord}((X \otimes P)^{\mathrm{op}})$.

Beweis. Der Funktor Ord : poset $\to$ Top ist nach dem nachgestellten Lemma kostetig. Daher reicht es mit 3.12 (und der Kostetigkeit des Opponierens), einen Isomorphismus kosimplizialer topologischer Räume $\blacktriangle \to \mathrm{Ord}\, P^{\mathrm{op}}$ zu finden. Beide bestehen aus einem Punkt pro nichtdegeneriertem Simplex (**??**) von Δ^n und haben als offene Mengen nach oben abgeschlossene Mengen. Randabbildungen d_i sind Inklusionen in die Ränder, Degenerationen Kollapse von Kanten. Dies begründen wir sorgfältiger: Unsere Definition von $Ps_i : P[n] \to P[n-1]$ schickt einen nichtdegenerierten Simplex $f : [m] \to [n]$ monoton und injektiv auf $N(s_i \circ f)$, den nichtdegenerierten Simplex, der zum Kollaps von i und $i+1$ in f gehört. $\square$

Lemma 4.63. *Der Funktor* Ord : poset $\to$ Top*, der eine halbgeordneten Menge mit der Ordnungstopologie versieht, ist kostetig.*

Beweis. Klar ist, dass Ord mit Koprodukten vertauscht. Sei nun $A \rightrightarrows_G^F B \to C$ ein Koegalisator in den halbgeordneten Mengen. Dann ist nach 4.49 und 4.61 die zugrundeliegende mengentheoretische Abbildung von $q : B \to C$ der mengentheoretische Koegalisator: nur der Reflektor Cat $\to$ skelCat könnte die zugrundeliegende Menge ändern, wird aber bereits auf eine Skelettkategorie angewandt, denn ein Kategorienkolimes über halbgeordnete Mengen enthält keine Morphismen in entgegengesetzte Richtungen. Wir müssen noch zeigen, dass $\mathrm{Ord}(q) : \mathrm{Ord}\, B \to \mathrm{Ord}\, C$ final ist. Ist $U \subset C$ eine Menge mit offenem Urbild $q^{-1}(C)$, so ist ein Morphismus $x \to y$ in C mit $x \in U$ ein Pfad $x = v_0 \to v_1 \sim w_1 \to w_2 \sim v_2 \to \cdots \to y$ bestehend aus Morphismen in B, die sich nach den Identifaktionen durch q verknüpfen lassen. Induktiv liegen nun nach der Abgeschlossenheit nach oben von $q^{-1}(U)$ alle v_i, w_i in $q^{-1}(U)$ und somit auch y. Es folgt die Offenheit von U. $\square$

Mit 1.12 und 4.62 erhalten wir sofort die folgende kombinatorische Charakterisierung von Garben auf der plumpen Realisierung:

Proposition 4.64. *Sei* $X \in \mathrm{s\,Ens}$ *eine simpliziale Menge. Dann gibt es eine Äquivalenz von Kategorien* $\mathrm{Ens}_{/\blacktriangle X} \xrightarrow{\approx} [(X \otimes P)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$.

4.2.3 Allgemeine schwache Konstruierbarkeit

Wir kommen nun zur Übertragung der Ergebnisse aus **??** auf die Situation simplizialer Mengen. Dies ermöglicht etwa die Aussage auch für Triangulierungen wie in Beispiel 2.16.

Nach der Bemerkung 1.32 reicht es, die topologischen Teile des Beweises zu übertragen. Wir sammeln die benötigten Axiome:

Definition 4.65. Eine *Konstruierbarkeitssituation* ist eine stetige Abbildung $p : |\mathcal{K}| \to \mathcal{K}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. p ist final, surjektiv und hat zusammenhängende Fasern.

2. Jeder Punkt $\sigma \in \mathcal{K}$ besitzt eine kleinste offene Umgebung $(\geq \sigma)$.

Wir notieren $U(\sigma) = p^{-1}((\geq \sigma))$. In einer Konstruierbarkeitssituation nennen wir $\mathcal{K}$ die *kombinatorische* und $|\mathcal{K}|$ die *geometrische Realisierung.*

Der "richtige" äquivalente Begriff von schwacher Konstruierbarkeit aus 1.16 wird zur allgemeinen Definition:

Definition 4.66. Eine Garbe $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ heißt schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbar, falls die Koeinheit der Adjunktion auf F ein Isomorphismus $p^*p_*F \xrightarrow{\sim} F$ ist.

Auch übertragen wir den Begriff derivierter schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbarer Garben (mit schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbaren Kohomologiegarben) und die Notationen s-Kons$(\mathcal{K})$ und $\mathrm{Der}_{\mathrm{sk}}(|\mathcal{K}|)$.

Mit identischem Beweis überträgt sich der allgemeine Teil von 1.16 übertragen:

Proposition 4.67. *In einer Konstruierbarkeitssituation $p : |\mathcal{K}| \to \mathcal{K}$ sind für $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ sind äquivalent:*

(1) F ist schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbar

(2) F liegt im wesentlichen Bild des Rückzugs p^*.

(3) Die Restriktion $F(U(\sigma)) \to F_x$ ist für alle $\sigma \in \mathcal{K}$ und alle $x \in |\sigma|$ ein Isomorphismus.

Und es folgt sofort, in Anbetracht von 1.43:

Theorem 4.68. *Sei $p : |\mathcal{K}| \to \mathcal{K}$ eine Konstruierbarkeitssituation und $X \in$* Top. *Dann gibt es eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\mathrm{Der}(\text{s-Kons}(\mathcal{K} \times X)) \underset{R\beta}{\overset{\iota}{\rightleftarrows}} \mathrm{Der}_{\mathrm{sk}}(|\mathcal{K}| \times X),$$

wobei ι die Inklusion und $\beta = (p \times \mathrm{id}_X)^*(p \times \mathrm{id}_X)_* : \mathrm{Ab}_{|\mathcal{K}| \times X} \to \text{s-Kons}(\mathcal{K} \times X)$ ist.

Es reicht also für den Fall simplizialer Mengen, die Axiome einer Konstruierbarkeitssituation zu zeigen.

Proposition 4.69. *Sei $X \in \mathrm{s\,Ens}$ eine simpliziale Menge. Dann ist $p : |X| \to \blacktriangle X$ eine Konstruierbarkeitssituation.*

Beweis. Die Abbildung $p : |X| \to \blacktriangle X$ ist ein Kolimes über die Quotientenabbildungen $|\Delta^n| \to \blacktriangle^n$ mit zusammenhängenden Fasern und das Axiom 4.65 1 folgt aus dem nachgestellten Lemma. Das Axiom 4.65 2 zur Existenz kleinster offener Umgebungen wurde in 4.64 gezeigt. □

Lemma 4.70. *Sei $X_i \to Y_i$ ein Morphismus von Diagrammen von topologischen Räumen $[I, \mathrm{Top}]$ mit finalen, surjektiven Abbildungen $X_i \to Y_i$ mit zusammenhängenden Fasern. Dann ist die induzierte Abbildung $\mathrm{col}_i X_i \to \mathrm{col}_i Y_i$ final, surjektiv und hat zusammenhängende Fasern.*

Beweis. Die Surjektivität ist offensichtlich (nimm ein Urbild unter einem geeigneten $Y_i \to \mathrm{col}_i Y_i$, dann unter $X_i \twoheadrightarrow Y_i$ und dann dessen Inklusion nach $\mathrm{col}_i X_i$). Ist die Komposition $\mathrm{col}_i X_i \to \mathrm{col}_i Y_i \to Z$ stetig, so sind alle

$$X_i \to \mathrm{col}_i X_i \to \mathrm{col}_i Y_i \to Z = X_i \to Y_i \to \mathrm{col}_i Y_i \to Z$$

stetig, und die Stetigkeit von g folgt daraus, dass die Kompositionen finaler Familien final ist und $\mathrm{col}_i Y_i$ folglich die Finaltopologie bezüglich aller $X_i \to \mathrm{col}_i Y_i$ trägt.

Zum Zusammenhang der Fasern: Die beiden Kolimites sind Quotienten der disjunkten Vereinigung über das System nach einer von den Systemmorphismen herrührenden Äquivalenzrelation. Ist $y_i \sim Yf(y_i)$ mit $y_i \in F_i$ und $Yf : Y_i \to Y_j$ einem Systemmorphismus eine erzeugende Relation, so sind auch die Urbilder der Zusammenhangskomponenten von y_i und $Yf(y_i)$ in $\mathrm{col}_i X_i$ nicht disjunkt: ist etwa x_i ein Urbild von y_i, so ist $Xf(x_i)$ ein Urbild von $Yf(y_i)$ und die Zusammenhangskomponenten treffen sich im Kolimes $\mathrm{col}_i X_i$ im Punkt $x_i \sim Xf(x_i)$. □

Bei der Übertragung von 1.16 ist die interessanteste äquivalente Formulierung schwacher $|\mathcal{K}|$-Konstruierbarkeit bislang unter den Tisch gefallen.

Definition 4.71. In einer Konstruierbarkeitssituation $p : |\mathcal{K}| \to \mathcal{K}$ heißt eine Garbe $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ *geometrisch schwach* $|\mathcal{K}|$*-konstruierbar*, falls die Einschränkungen $F|_{|\sigma|}$ konstant sind für alle Urbilder $|\sigma| = p^{-1}(\sigma)$ von Punkten $\sigma \in \mathcal{K}$.

Wir erhalten im Allgemeinen nur noch eine Implikation:

Proposition 4.72. *Ist $p : |\mathcal{K}| \to \mathcal{K}$ eine Konstruierbarkeitssituation, so impliziert für eine Garbe $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ schwache $|\mathcal{K}|$-Konstruierbarkeit geometrisch schwache $|\mathcal{K}|$-Konstruierbarkeit.*

Das ist der fehlende Teil von 1.16.

Beweis. Dies folgt wieder aus 4.67 (3) und 1.18 wegen $|\sigma| \subset U(\sigma)$. □

Beispiel 4.73. *Die umgekehrte Richtung gilt im Allgemeinen nicht: Sei etwa $|X| = S^1$ mit der Triangulierung als simpliziale Menge aus 2.16 und $F \in \mathrm{Ab}_{/|X|}$ die nichtkonstante lokal konstante Garbe auf S^1 mit Halm $\mathbb{Z}$. Für σ den 0-Simplex ist dann $U(\sigma) = S^1$ und es ist $\mathbb{Z} \cong F_\sigma \not\cong F(U(\sigma)) = \Gamma F = 0$.*

Bemerkung 4.74. Für die umgekehrte Richtung würden wir für $x \in U(\sigma)$ eine stetige Zusammenziehung

$$h : (0, 1] \times U(\sigma) \to U(\sigma)$$

benötigen, für die gilt:

1. Die Mengen $h(t \times U(\sigma))$ bilden für $t \in (0, 1]$ eine Umgebungsbasis von x.
2. Es gilt $h(t, y) \in |\tau| \Leftrightarrow y \in |\tau|$.

3. h ist surjektiv.

(Dies sind die Eigenschaften aus dem Beweis von 1.16.) Die Existenz solcher Zusammenziehungen als Axiom zu setzen, bedeutet im Wesentlichen, nur Triangulierungen zu erlauben, bei denen die $U(\sigma)$-Mengen "sich nicht selbst wieder treffen" und damit im Wesentlichen wieder mit Simplizialkomplexen zu arbeiten.

Literaturverzeichnis

[BBP99] Marek A. Bednarczyk, Andrzej M. Borzyszkowski, and Wieslaw Pawlowski. Generalized congruences—epimorphisms in cat. *Theory Appl. Categ.*, 5:No. 11, 266–280, 1999.

[Bor94] Francis Borceux. *Handbook of categorical algebra. 2*, volume 51 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. Categories and structures.

[Eng77] Ryszard Engelking. *General topology*. PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1977. Translated from the Polish by the author, Monografie Matematyczne, Tom 60. [Mathematical Monographs, Vol. 60].

[GJ09] Paul G. Goerss and John F. Jardine. *Simplicial homotopy theory*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. Reprint of the 1999 edition [MR1711612].

[GM96] Sergei I. Gelfand and Yuri I. Manin. *Methods of homological algebra*. Springer-Verlag, Berlin, 1996. Translated from the 1988 Russian original.

[GZ67] P. Gabriel and M. Zisman. *Calculus of fractions and homotopy theory*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 35. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1967.

[HS79] Horst Herrlich and George E. Strecker. *Category theory*, volume 1 of *Sigma Series in Pure Mathematics*. Heldermann Verlag, Berlin, second edition, 1979. An introduction.

[KS94] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Sheaves on manifolds*, volume 292 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1994. With a chapter in French by Christian Houzel, Corrected reprint of the 1990 original.

[Lor15] F. Loregian. This is the (co)end, my only (co)friend. *ArXiv e-prints*, January 2015.

[ML98] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.

[MLM94] Saunders Mac Lane and Ieke Moerdijk. *Sheaves in geometry and logic*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 1994. A first introduction to topos theory, Corrected reprint of the 1992 edition.

[Moe95] I. Moerdijk. *Classifying spaces and classifying topoi*, volume 1616 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[nLa18] nLab authors. 2-limit. `http://ncatlab.org/nlab/show/2-limit`, October 2018. Revision 51.

[Soe18a] Wolfgang Soergel. Analysis 3. Skriptum, October 2018.

[Soe18b] Wolfgang Soergel. Derivierte Kategorien und Funktoren. Skriptum, July 2018.

[Soe18c] Wolfgang Soergel. Garben auf Simplizialkomplexen. Unveröffentlichte Aufzeichnungen, February 2018.

[Soe18d] Wolfgang Soergel. Garbenkohomologie. Skriptum, July 2018.

[Soe18e] Wolfgang Soergel. Topologie und kompakte Gruppen. Skriptum, October 2018.

[Ste67] N. E. Steenrod. A convenient category of topological spaces. *Michigan Math. J.*, 14:133–152, 1967.

[Vog71] Rainer M. Vogt. Convenient categories of topological spaces for homotopy theory. *Arch. Math. (Basel)*, 22:545–555, 1971.

Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, noch nicht zu anderen Prüfungszwecken vorgelegt und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Wörtlich und inhaltlich entnommene Stellen sind als solche gekennzeichnet.

Freiburg, den 4. Oktober 2018

(Fabian Glöckle)