# Kapitel 1

# Verallgemeinerte Garben

In diesem Abschnitt sollen die Beobachtungen der letzten beiden Abschnitte vereint werden. Nach Abschnitt **??** sind Garben auf einem Simplizialkomplex $\mathcal{K}$ nichts anderes als ein Simplizialkomplex von Garben über dem einpunktigen Raum. In Abschnitt **??** haben wir diese Garben auf $\mathcal{K}$ geometrisch charakterisiert als die simplizial konstanten Garben auf der geometrischen Realisierung $|\mathcal{K}|$ von $\mathcal{K}$. Wir erwarten daher auch eine relative Version dieser Aussage über einem beliebigen topologischen Raum $X$, die die Simplizialkomplexe von Garben auf $X$ alias Garben auf $\mathcal{K} \times X$ geometrisch beschreibt.

Wir geben zunächst eine leichte Verallgemeinerung der Aussage von **??** an.

Wir definieren Garben mit Werten in beliebigen Kategorien $C$ mit der schon in **??** verwandten allgemeinen Abstiegsbedingung.

**Definition 1.1** ([**?**], 2.1.5)**.** Sei $C$ eine Kategorie und $X$ ein topologischer Raum. Eine $C$-wertige Prägarbe $F \in [\mathrm{Off_X}^{\mathrm{op}}, C]$ auf $X$ heißt $C$-wertige Garbe auf $X$, falls sie die Abstiegsbedingung erfüllt:

> Für alle unter endlichen Schnitten stabilen offenen Überdeckungen $U = \bigcup_i U_i$ gilt $F(U) = \lim_i F(U_i)$.

Wir notieren die Kategorie der $C$-wertigen Prägarben auf $X$ mit $\mathrm{p}\, C_{/X}$ und die der $C$-wertigen Garben auf $X$ mit $C_{/X}$.

Für $C$ die Kategorien der Mengen oder der abelschen Gruppen ist obige Definition äquivalent zur bekannten Definition über die eindeutige Verklebbarkeit von verträglichen Schnitten.

Auch das Konzept der Garbifizierung können wir auf $C$-wertige Prägarben verallgemeinern.

**Satz 1.2.** *Sei $C$ eine vollständige und kovollständige Kategorie. Dann hat der Vergissfunktor $C_{/X} \to \mathrm{p}\, C_{/X}$ einen Linksadjungierten, genannt (verallgemeinerte) Garbifizierung.*

*Beweis.* Sei $F \in \mathrm{p}\, C_{/X}$. Wir behaupten, dass die Prägarbe

$$F^+(U) := \mathrm{colf}_{\mathcal{U}/U} \lim_j F(U_j)$$

mit den induzierten Restriktionen eine Garbe ist und die Adjunktionseigenschaft erfüllt. Dabei steht $\mathcal{U}/U$ für das filtrierende System aller gesättigten Überdeckungen $\mathcal{U}$ von $U$. Die Konstruktion ist funktoriell.

Für die Garbeneigenschaft konstruieren wir für eine gesättigte offene Überdeckung $U = \bigcup U_i$ inverse Morphismen

$$\mathrm{colf}_{\mathcal{U}/U} \lim_{V \in \mathcal{U}} F(V) \rightleftarrows \lim_i \mathrm{colf}_{\mathcal{U}_i/U_i} \lim_{V \in \mathcal{U}_i} F(V).$$

Diese erhalten wir einerseits aus den natürlichen Projektionen des Limes und Inklusionen des Kolimes und andererseits aus der Konstruktion verträglicher Familien von Abbildungen, deren Verträglichkeit sich jeweils sofort aus der Eindeutigkeit der Restriktionen ergibt. Dabei werden einer Überdeckung in $\mathcal{U}/U$ die Überdeckungen in $\mathcal{U}_i/U_i$ zugeordnet, die sich durch Schneiden mit $U_i$ ergeben, und umgekehrt Familien von Überdeckungen der $U_i$ die ihrer Vereinigung zugeordnete gesättigte Überdeckung von $U$. Dass beide Morphismen invers zueinander sind, ergibt sich erneut aus der Eindeutigkeit der Restriktionen.

Auch für die Adjunktionseigenschaft gehen wir wie bei mengenwertigen Garben vor und erhalten zunächst den natürlichen Prägarbenmorphismus $F \to F^+$, der zur einelementigen Überdeckung von $U$ gehört. Wir möchten nun zeigen, dass jeder Prägarbenmorphismus $F \to G$ in eine Garbe $G$ eindeutig über unseren natürlichen Morphismus $F \to F^+$ faktorisiert. Die Morphismen unseres Prägarbenmorphismus $F(V) \to G(V)$ induzieren nun nach der Restriktionsverträglichkeit Morphismen auf den Limites, und somit auch im Kolimes Morphismen in

$$C(F^+(U), G(U) = C(\mathrm{colf}_{\mathcal{U}/U} \lim_{V \in \mathcal{U}} F(V), \lim_{V \in \mathcal{U}} G(V)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{colf}_{\mathcal{U}/U}\, C(\lim_{V \in \mathcal{U}} F(V), \lim_{V \in \mathcal{U}} G(V)),$$

für alle $U \overset{\circ}{\subset} X$, die ebenfalls mit den Restriktionen kompatibel sind.

Dass $F \to G$ nun mittels dieses Morphismus $F^+ \to G$ über $F \to F^+$ faktorisiert, folgt nun aber direkt, da der Morphismus für einelementige Überdeckungen der aus dem Prägarbenmorpismus ist.

Zur Eindeutigkeit dieser Faktorisierung halten wir fest, dass der Morphismus $F^+ \to G$ auf einelementigen Überdeckungen schon aufgrund der Faktorisierungseigenschaft und dann auf größeren Überdeckung durch die Garbeneigenschaften von $F^+$ und $G$ eindeutig festgelegt ist. □

Wir prüfen, dass wir so insbesondere eine Garbifizierung zu "garbenwertigen Garben" erhalten.

**Lemma 1.3.** *Die Kategorien* $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ *und* $\mathrm{Ab}_{/\mathrm{X}}$ *der (abelschen) Garben auf einem topologischen Raum* $X$ *sind vollständig und kovollständig.*

*Beweis.* Die Kategorien der Mengen Ens ist vollständig und kovollständig. Somit ist auch die Kategorie der Prägarben auf $X$ $[\mathrm{Off_X}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$ vollständig und kovollständig nach der Beschreibung von Limites in Funktorkategorien als objektweise Limites. Tatsächlich ist aber in $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ die Limes-Prägarbe eines Systems von Garben bereits eine Garbe nach unserer Fromulierung der Garbenbedingung als Limes und der Kommutativität von Limites. Für die Kovollständigkeit behaupten wir, dass die Garbifizierung der Kolimes-Prägarbe die universelle Eigenschaft des Kolimes in der Kategorie $\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ erfüllt. In der Tat folgt das direkt aus der universellen Eigenschaft des Kolimes in der Prägarbenkategorie und der universellen Eigenschaft der Garbifizierung. Derselbe Beweis gilt für $\mathrm{Ab}_{/\mathrm{X}}$ unter Verwendung der Vollständigkeit und Kovollständigkeit der abelschen Gruppen. □

Bezeichne wieder $\mathcal{B}$ die Kategorie der Basis der Topologie auf einem Produkt topologischer Räume $X \times Y$ mit Inklusionen als Morphismen.

**Satz 1.4.** *Seien $X$ und $Y$ topologische Räume. Dann gibt es eine Äquivalenz von Kategorien*

$$(\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}})_{/Y} \overset{\approx}{\longrightarrow} \mathrm{Ens}_{/\mathcal{B}} \overset{\approx}{\longleftarrow} \mathrm{Ens}_{/X \times Y}$$

*gegeben durch*

$$\begin{aligned} U \times V &\mapsto (F(V))(U) \quad \textit{für } F \in (\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}})_{/Y} \textit{ und} \\ U \times V &\mapsto F(U \times V) \quad \textit{die Restriktion für } F \in \mathrm{Ens}_{/X \times Y} \end{aligned}$$

*für $U \underset{\circ}{\subset} X$ und $V \underset{\circ}{\subset} Y$.*

*Beweis.* Die zweite Äquivalenz ist **??**. Für die erste Äquivalenz bemerken wir wie in **??**, dass die zugrundeliegenden Prägarbenkategorien übereinstimmen. Nun fordert die Garbenbedingung für $\mathrm{Ens}_{/\mathcal{B}}$ die Verklebungseigenschaft für beliebige Überdeckungen von Basismengen durch Basismengen, während die Garbenbedingungen für $(\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}})_{/Y}$ die Verklebungseigenschaft für "Produkt-Überdeckungen" von Basismengen fordert, d. h. für Überdeckungen der Form $U \times V = \bigcup_{i,j} U_i \times V_j$ für $U = \bigcup_i U_i$ eine Überdeckung von $U$ und $V = \bigcup_j V_j$ eine Überdeckung von $V$. Wir rechnen dies nach:

$$\begin{aligned} (F(V))(U) &= (\lim_j F(V_j))(U) \\ &= \lim_j F(V_j)(U) \\ &= \lim_j \lim_i F(V_j)(U_i) \end{aligned}$$

wobei im ersten Schritt die Garbenbedingung von $F \in (\mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}})_{/Y}$, und im dritten die von $F(V_j) \in \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ verwendet wurde. Der zweite Schritt ist die Beschreibung von Limites in Funktorkategorien als objektweise Limites.

Beide Verklebungsbedingungen sind aber äquivalent, da eine beliebige Überdeckung von $U \times V$ natürlich mit den Projektionen auf $X$ und $Y$ Überdeckungen von $U$ und $V$ induziert und die Verträglichkeitsvoraussetzung für die Garbenbedingung von $\mathrm{Ens}_{/\mathcal{B}}$ bezüglich der Produktüberdeckung genau dann erfüllt ist, wenn sie für die ursprüngliche Überdeckung erfüllt ist. □

*Bemerkung* 1.5. Für abelsche Garben erhalten wir die analoge Aussage $(\mathrm{Ab}_{/\mathrm{X}})_{/Y} \overset{\approx}{\longrightarrow} \mathrm{Ab}_{/X \times Y}$.

### 1.0.1 Exkurs: Überlagerungen von Produkträumen

### 1.0.2 Anwendung auf relativ schwach konstruierbare Garben

Wir bezeichnen als eine relativ zu $X$ schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbare Garbe eine Garbe $F \in \mathrm{Ab}_{|\mathcal{K}| \times X}$, für die die Einschränkungen $F|_{|\sigma| \times X}$ Rückzüge von Garben auf $X$ sind, es also ein $G \in \mathrm{Ab}_{/\mathrm{X}}$ gibt mit

$$F|_{|\sigma| \times X} \xrightarrow{\sim} \pi^* G$$

für $\pi : |\sigma| \times X \to X$ die Projektion.

Wir könnten nun für diesen Begriff dieselben Aussagen wie im vorangegangen Abschnitt mit vollkommen analogen Argumenten erneut beweisen. Ein bisschen Kategorientheorie und unsere obige Charakterisierung ermöglichen uns aber ein einfacheres Vorgehen. Wir bemerken, dass für die Konstruktion unserer Kategorienbifaserung $\mathrm{Ab}_{/\,\mathrm{Top}} \to \mathrm{Top}$ mitsamt ihren bekannten Eigenschaften und die darauf aufbauende Argumentation im vorangegangenen Abschnitt der Umstand keine Rolle gespielt hat, dass unsere Garben Werte in den abelschen Gruppen annnehmen. Dieselben Konstruktionen funktionieren für $\mathcal{A}_{/\,\mathrm{Top}}$ eine Garbenkategorie mit Werten in einer beliebigen vollständigen abelschen Kategorie. Davon überzeugt man sich im Zweifel auch explizit zunächst durch Übertragung auf Garbenkategorien mit Werten in $R$-Linksmoduln und dann durch den Einbettungssatz von Mitchell auf beliebige abelsche Kategorien.

Wir erhalten:

**Theorem 1.6.**