1 Schwach konstruierbare Garben auf Simplizialkomplexen

Ziel dieses Abschnitts ist es, eine geometrischere Charakterisierung von Garben auf einem Simplizialkomplex $\mathcal{K}$ zu geben. Wir werden sehen, dass sie sich als simplizial konstante Garben auf der geometrischen Realisierung von $\mathcal{K}$ auffassen lassen. Anschließend wollen wir die Ergebnisse auch auf die derivierte Kategorie der Garben auf $\mathcal{K}$ übertragen. Die Darstellung folgt im Wesentlichen [**?**] und [**?**].

In diesem Abschnitt bezeichne $(V, \mathcal{K})$ stets einen lokal-endlichen Simplizialkomplex mit Eckenmenge V. Für einen Simplex $\sigma \in \mathcal{K}$ definieren wir seine geometrische Realisierung $|\sigma| \subset \mathbb{R}^V = \mathrm{Ens}(V, \mathbb{R})$:

$$|\sigma| = \{x \in \mathbb{R}^V | x(v) = 0 \text{ für } v \notin \sigma, x(v) > 0 \text{ für } v \in \sigma, \sum_{v \in V} x(v) = 1\},$$

sowie die geometrische Realisierung $|\mathcal{K}| \subset \mathbb{R}^V$ von $\mathcal{K}$

$$\bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} |\sigma|,$$

jeweils versehen mit der induzierten Topologie von $\mathbb{R}^V$.

Wir erhalten eine Abbildung

$$p : |\mathcal{K}| \to \mathcal{K},$$

genannt Simplexanzeiger oder Indikatorabbildung, der einem Punkt $x \in |\mathcal{K}|$ in der geometrischen Realisierung den eindeutigen Simplex $\sigma \in \mathcal{K}$ mit $x \in |\sigma|$ zuordnet.

Lemma 1. *Der Simplexanzeiger* $p : |\mathcal{K}| \to \mathcal{K}$ *ist stetig.*

Beweis. Das Urbild einer Basismenge $(\geq \sigma)$ ist

$$p^{-1}((\geq \sigma)) = |\mathcal{K}| \cap \{x \in \mathbb{R}^V | x(v) > 0 \text{ für } v \in \sigma\},$$

der offene Stern um σ, den wir auch als $U(\sigma)$ notieren. □

Definition 2. Eine Garbe $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ heißt schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbar (oder kurz: schwach konstruierbar), falls für alle $\sigma \in \mathcal{K}$, die Einschränkungen $F|_{|\sigma|}$ konstante Garben sind. Wir bezeichnen die volle Unterkategorie der schwach konstruierbaren Garben in $\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ mit s-Kons($\mathcal{K}$).

Eine derivierte Garbe $F \in \mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$ heißt schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbar, falls für alle $j \in \mathbb{Z}$ die Kohomologiegarben $H^j(F)$ schwach konstruierbar sind. Wir bezeichnen die volle Unterkategorie der schwach konstruierbaren derivierten Garben in $\mathrm{Der}(\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$ mit $\mathrm{Der}_{\mathrm{sk}}(|\mathcal{K}|)$.

Wir bemerken zunächst:

Lemma 3 ([**?**], 8.1.3)**.** *Die Kategorie* s-Kons($\mathcal{K}$) *ist abelsch.*

Beweis. Durch den offensichtlichen Isomorphismus zur Kategorie der abelschen Gruppen (durch den Funktor der globalen Schnitte) ist die Kategorie der konstanten abelschen Garben auf einem topologischen Raum X eine abelsche Kategorie. Nun folgt die Aussage aus der Exaktheit und Additivität des Pullbacks i_σ^* entlang den Inklusionen $i_\sigma : |\sigma| \hookrightarrow |\mathcal{K}|$. □

Entscheidend ist die folgende Charakterisierung schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbarer Garben:

Proposition 4 ([?], 8.4.6.3)**.** *Für $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ sind äquivalent:*

(1) F ist schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbar

(2) Die Koeinheit der Adjunktion ist auf F ein Isomorphismus $p^*p_*F \xrightarrow{\sim} F$.

(3) F liegt im wesentlichen Bild des Rückzugs p^*.

(4) Die Restriktion $F(U(\sigma)) \to F_x$ ist für alle $\sigma \in \mathcal{K}$ und alle $x \in |\sigma|$ ein Isomorphismus.

Beweis. Die Äquivalenz (2) $\Leftrightarrow$ (3) ist allgemein kategorientheoretischer Natur. Dabei ist (2) $\Rightarrow$ (3) offensichtlich (nimm p_*F) und (3) $\Rightarrow$ (2) folgt aus den Dreiecksidentitäten.

Die Äquivalenz (2) $\Leftrightarrow$ (4) folgt aus der Bestimmung der Halme von p^*p_*F. Zunächst bemerken wir, dass in $\mathcal{K}$ die Menge $(\geq \sigma)$ die kleinste offene Umgebung von σ ist, und wir also $p_*F((\geq \sigma)) \xrightarrow{\sim} (p_*F)_\sigma$ erhalten. Somit gilt für $x \in |\sigma|$:

$$(p^*p_*F)_x \xrightarrow{\sim} (p_*F)_\sigma \xrightarrow{\sim} p_*F((\geq \sigma)) \xrightarrow{\sim} F(U(\sigma)). \tag{1}$$

Dabei wurde die Beschreibung der Halme des Rückzugs (mit $p(x) = \sigma$), obige Darstellung der Halme auf $\mathcal{K}$ und die Definition des Vorschubs (mit $p^{-1}((\geq \sigma)) = U(\sigma)$) verwendet.

Die Implikation (4) $\Rightarrow$ (1) folgt direkt aus dem nachgestellten Lemma, angewandt auf die Einschränkung von F auf $U(\sigma)$, und der Tatsache, dass beliebige Einschränkungen konstanter Garben wieder konstant sind.

Für die umgekehrte Richtung reicht es, die Aussage für die Einschränkung von F auf $U(\sigma)$ zu zeigen. Wir betrachten für $x \in |\sigma|$ die Zusammenziehung

$$\begin{aligned} h : (0,1] \times U(\sigma) &\to U(\sigma), \\ (t,y) &\mapsto h(t,y) = ty + (1-t)x. \end{aligned}$$

Die Mengen $h(\{t\} \times U(\sigma))$ bilden für $t \in (0,1]$ eine Umgebungsbasis von x, wir müssen also nur noch den Kolimes der Schnitte über diese Mengen bestimmen. Bezeichne $\pi : (0,1] \times U(\sigma) \to U(\sigma)$ die Projektion auf den zweiten Faktor. Nach der simplizialen Konstanz von F und wegen $h(t,y) \in |\tau| \Leftrightarrow y \in |\tau|$ ist der Rückzug h^*F konstant auf den Fasern von π und lässt sich somit nach dem zweiten nachgestellten Lemma schreiben als $\pi^*\pi_*h^*F \xrightarrow{\sim} h^*F$. Bezeichne

$\iota_t : U(\sigma) \hookrightarrow (0,1] \times U(\sigma)$ die Inklusion. Dann erhalten wir wie gewünscht mit der Funktorialität des Rückzugs, $\pi \circ \iota_t = \mathrm{id}_{U(\sigma)}$ sowie $\Gamma \pi_* = \Gamma$

$$\begin{aligned} F_x &\xrightarrow{\sim} \operatorname{colf}_{t \in (0,1]} F(h(\{t\} \times U(\sigma))) \\ &\xrightarrow{\sim} \operatorname{colf}_{t \in (0,1]} \Gamma \iota_t^* h^* F \\ &\xrightarrow{\sim} \operatorname{colf}_{t \in (0,1]} \Gamma \iota_t^* \pi^* \pi_* h^* F \\ &\xrightarrow{\sim} \Gamma \operatorname{id}^* \pi_* h^* F \\ &\xrightarrow{\sim} \Gamma h^* F \\ &\xrightarrow{\sim} \Gamma F = F(U(\sigma)), \end{aligned}$$

im letzten Schritt nach der Surjektivität von h. □

Bemerkung 5. Aus Gleichung 1 und (4) folgt insbesondere auch $(p^* p_* F)(U(\sigma)) \xrightarrow{\sim} F(U(\sigma))$ für alle $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ und alle $\sigma \in \mathcal{K}$.

Wir tragen die benötigten Lemmata nach.

Lemma 6 ([?], 2.1.41). *Sei X ein topologischer Raum, $F \in \mathrm{Ens}_{/\mathrm{X}}$ eine Garbe auf X, für die die Restriktion $\Gamma F \xrightarrow{\sim} F_x$ für alle $x \in X$ bijektiv ist. Dann ist F eine konstante Garbe auf X mit Halm ΓF.*

Beweis. Bezeichne $c : X \to \mathrm{top}$ die konstante Abbildung. Die Koeinheit der Adjunktion $c^* c_* F \to F$ induziert auf den Halmen gerade die vorausgesetzten Bijektionen, ist also ein Garben-Isomorphismus. □

Lemma 7 ([?], 6.4.17). *Sei X ein topologischer Raum, $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall, $F \in \mathrm{Ens}_{/X \times I}$ eine Garbe und $\pi : X \times I \to X$ die Projektion auf den ersten Faktor. Ist F konstant auf den Fasern von π, so ist die Koeinheit der Adjunktion auf F ein Isomorphismus $\pi^* \pi_* F \xrightarrow{\sim} F$.*

Beweis. Die Aussage ist äquivalent zum folgenden Fortsetzungsresultat:

Für alle $U \circledcirc X$ und $t \in I$ ist die Restriktion ein Isomorphismus

$$\Gamma(U \times I, F) \xrightarrow{\sim} \Gamma(U \times \{t\}, F).$$

Denn ist die Koeinheit der Adjunktion ein Isomorphismus $\pi^* \pi_* F \xrightarrow{\sim} F$, so bestimmen wir die Schnitte über $U \times \{t\}$ wie folgt: Sei $\iota : U \times \{t\} \hookrightarrow X \times I$ die Inklusion. Wir bemerken, dass $\pi \circ \iota$ die Inklusion von U nach X ist und erhalten:

$$\Gamma(U \times \{t\}, F) = \Gamma \iota^* F \xrightarrow{\sim} \Gamma \iota^* \pi^* \pi_* F = \Gamma(U, \pi_* F) = \Gamma(U \times I, F).$$

Andersherum folgt der Isomorphismus der Koeinheit der Adjunktion aber auch aus dem Fortsetzungsresultat, denn wir können sofort den Isomorphismus auf den Halmen über $(x,t) \in X \times I$ zeigen:

$$\begin{aligned} (\pi^* \pi_* F)_{(x,t)} &\xrightarrow{\sim} (\pi_* F)_x \\ &= \operatorname{colf}_{U \ni x} \Gamma(U \times I, F) \\ &\xrightarrow{\sim} \operatorname{colf}_{U \ni x} \Gamma(U \times \{t\}, F) \\ &\xrightarrow{\sim} \operatorname{colf}_{V \ni (x,t)} F(V) \\ &= F_{(x,t)}. \end{aligned}$$

Dabei erhalten wir die Surjektivität von $F(V) \to \Gamma(U \times \{t\}, F)$ aus der Bijektivität der Verknüpfung

$$\Gamma(U \times I, F) \to F(V) \to \Gamma(U \times \{t\}, F)$$

und die Injektivität aus der Eigenschaft, dass bereits die faserweise stetige Fortsetzung eindeutig ist nach der Konstantheit der Einschränkungen von F auf die Fasern von π.

Nun können wir die Aussage zeigen. Zunächst folgt sie für I kompakt sofort aus eigentlichem Basiswechsel über dem kartesischen Diagramm mit eigentlichen und separierten Vertikalen

$$\begin{tikzcd}
(x,t) \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & X \times I \arrow[d, "\pi"] \\
x \arrow[r, hook] & X.
\end{tikzcd}$$

Ist nun $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall, so können wir es als aufsteigende Vereinigung von Kompakta $I = \bigcup_j I_j$ schreiben und erhalten für die Schnitte ebenfalls

$$\begin{aligned}
\Gamma(U \times I, F) &= \mathrm{Top}(U \times I, \overline{F}) \\
&\xrightarrow{\sim} \mathrm{colf}_j \, \mathrm{Top}(U \times I_j, \overline{F}) = \mathrm{colf}_j \, \Gamma(U \times I_j, F) \xrightarrow{\sim} \Gamma(U \times \{t\}, F).
\end{aligned}$$

□

Wir bezeichnen den Funktor $p^* p_* : \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|} \to \text{s-Kons}(\mathcal{K})$ kurz mit β und bemerken, dass er nach obiger Proposition ein Rechtsadjungierter zur Inklusion $\iota : \text{s-Kons}(\mathcal{K}) \to \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ ist. Für $S \in \text{s-Kons}(\mathcal{K})$ und $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\text{s-Kons}(\mathcal{K})(W, \beta F) \\
\xrightarrow{\sim}\ &\text{s-Kons}(\mathcal{K})(\beta W, \beta F) \\
\xrightarrow{\sim}\ &\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}(p_* W, p_* p^* p_* F) \\
\xrightarrow{\sim}\ &\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}(p_* W, p_* F) \\
\xrightarrow{\sim}\ &\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}(\beta W, F) \\
\xrightarrow{\sim}\ &\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}(W, F).
\end{aligned}$$

Dabei wurde die bekannte Adjunktion (p^*, p_*) sowie im dritten Schritt "finaler Rückzug mit zusammenhängenden Fasern" ([**?**], 4.3.22) benutzt.

Als Komposition zweier linksexakter Funktoren ist β natürlich wieder linksexakt. Der allgemeinen Terminologie folgend bezeichnen wir eine Garbe $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ β-azyklisch, falls ihre höheren Derivierten von β verschwinden, also falls

$$R^k \beta F = 0 \text{ für alle } k > 0.$$

Später benötigen wir die folgende Charakterisierung β-azyklischer Garben:

Proposition 8 ([**?**], 8.1.8)**.** *Sei $F \in \mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$. Dann gilt:*

(i) $\Gamma(U(\sigma), R^k\beta F) \xrightarrow{\sim} H^k(U(\sigma); F)$ *für alle* $\sigma \in \mathcal{K}, k \geq 0$.

(ii) F *ist* β*-azyklisch genau dann, wenn* $H^k(U(\sigma); F) = 0$ *für alle* $\sigma \in \mathcal{K}, k > 0$.

Insbesondere sind schwach $|\mathcal{K}|$*-konstruierbare Garben und welke Garben* β*-azyklisch.*

Bemerkung 9. Man beachte, dass Aussage (ii) eine allgemeine Verbesserung unserer allgemeinen Charakterisierung höherer direkter Bilder als Garbifizierungen der Prägarben der Kohomologien der Fasern ist für den Fall, dass die Schnittfunktoren $\Gamma(\pi^{-1}(U), \cdot)$ exakt sind.

Beweis. (ii) folgt direkt aus (i) mit $R^k\beta F \in$ s-Kons$(\mathcal{K})$ (vgl. 3) und unserer Aussage über die Halme 4 (4).

Mit der Exaktheit von Halmfunktoren $F \mapsto F_x$ und 4 (4) sind die Funktoren $\Gamma(U(\sigma), \cdot)$ auf schwach $|\mathcal{K}|$-konstruierbaren Garben exakt und vertauschen folglich bei einem Komplex mit der Bildung der Kohomologie. Wir erhalten für $F \hookrightarrow I^\bullet$ eine injektive Auflösung somit

$$\Gamma(U(\sigma), R^k\beta F) = \Gamma(U(\sigma), H^k(\beta I^\bullet)) \xrightarrow{\sim} H^k(\Gamma(U(\sigma), \beta I^\bullet)) \xrightarrow{\sim} H^k(\Gamma(U(\sigma), I^\bullet)) = H^k(U(\sigma), F),$$

wobei wir im dritten Schritt 5 verwendet haben. □

Damit können wir uns nun den derivierten Kategorien zuwenden.

Proposition 10. *Sei* $F \in \mathrm{Ket}^+(\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$ *ein gegen die Richtung der Pfeile beschränkter Kettenkomplex aus* β*-azyklischen Garben mit schwach* $|\mathcal{K}|$*-konstruierbaren Kohomologiegarben* $H^q(F)$*. Dann ist* $\beta F \to F$ *ein Quasi-Isomorphismus.*

Beweis. Wir schneiden aus dem Kettenkomplex (F^n, d^n) kurze exakte Sequenzen aus:

$$\begin{array}{lllllll}
H^0 = \ker d^0 \hookrightarrow F^0 \twoheadrightarrow \operatorname{im} d^0 & & & & \\
 & \operatorname{im} d^0 \hookrightarrow \ker d^1 \twoheadrightarrow H^1 & & \\
 & & \ker d^1 \hookrightarrow F^1 \twoheadrightarrow \operatorname{im} d^1 \\
 & \vdots & &
\end{array}$$

Sind in einer kurzen exakten Sequenz zwei der drei Objekte azyklisch, so nach dem Fünferlemma auch das dritte. Da nach Voraussetzung und 8 F^q und H^q β-azyklisch sind, sind alle oben betrachteten Objekte β-azyklisch und die kurzen exakten Sequenzen bleiben exakt nach Anwendung von β. Es folgt $H^q(\beta F) \xrightarrow{\sim} \beta(H^q F)$ und weiter $\beta(H^q F) \xrightarrow{\sim} H^q F$ nach der schwachen Konstruierbarkeit von $H^q F$. □

Wir haben soeben die anschauliche Variante für in eine Richtung beschränkte Komplexe bewiesen und versuchen uns nun an der unbeschränkten Aussage.

Satz 11. *Sei* $F \in \mathrm{Ket}^(\mathrm{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$ *ein Kettenkomplex aus* β*-azyklischen Garben mit schwach* $|\mathcal{K}|$*-konstruierbaren Kohomologiegarben* $H^q(F)$*. Dann ist* $\beta F \to F$ *ein Quasi-Isomorphismus.*

Beweis. Für unseren Quasi-Isomorphismus $H^q(\beta F) \xrightarrow{\sim} H^q(F)$ reicht es nach dem Halmkriterium und 4 (4), dass auf den Schnitten über $U(\sigma)$ Isomorphismen $H^q(\beta F)(U(\sigma)) \xrightarrow{\sim} H^q(F)(U(\sigma))$ induziert werden für alle $\sigma \in \mathcal{K}$. Nun ist aber nach 8 (ii) der Funktor $\Gamma(U(\sigma), \cdot)$ exakt auf der vollen Unterkategorie der β-azyklischen Garben auf $|\mathcal{K}|$ und vertauscht somit mit dem Bilden der Kohomologie. Wir sind also fertig, falls $H^q(\Gamma(U(\sigma), \beta F)) \xrightarrow{\sim} H^q(\Gamma(U(\sigma), F))$, das ist aber gerade 5. □

Damit ist der entscheidende Schritt für unser Ziel gezeigt. Wir erhalten:

Theorem 12. *Sei* $\mathcal{K}$ *ein lokal endlicher Simplizialkomplex.*

Die oben definierten Funktoren ι, β *induzieren auf den derivierten Kategorien eine Äquivalenz*

$$\mathrm{Der}^+(\text{s-Kons}(\mathcal{K})) \underset{R\beta}{\overset{\iota}{\rightleftarrows}} \mathrm{Der}^+_{\mathrm{sk}}(|\mathcal{K}|).$$

Beweis. Die Kategorien s-Kons($\mathcal{K}$) und $\mathrm{Der}^+_{\mathrm{sk}}(|\mathcal{K}|)$ haben genug Injektive. Mit der Grothendieck-Spektralsequenz für derivierte Kategorien ([**?**], 3.4.18) und der Exaktheit von ι erhalten wir somit

$$R\beta \circ R\iota \xrightarrow{\sim} R(\beta \circ \iota) \xrightarrow{\sim} R\,\mathrm{Id} = \mathrm{Id}$$

auf $\mathrm{Der}^+(\text{s-Kons}(\mathcal{K}))$, da welke Garben β-azyklisch sind, sowie

$$\iota \circ R\beta \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}$$

auf $\mathrm{Der}^+_{\mathrm{sk}}(|\mathcal{K}|)$ nach der vorangegangenen Proposition. □

Bemerkung 13. Kashiwara und Schapira beschränken sich auf die Äquivalenz der beschränkten derivierten Kategorien, allerdings mit der gleichen Argumentation. In [**?**] 1.7.12 wird eine allgemeine Aussage für solche Situationen gezeigt, die hier aber m.E. nicht benötigt wird.