

1 Schwach konstruierbare Garben auf Simplizialkomplexen

Ziel dieses Abschnitts ist die Charakterisierung schwach konstruierbarer Garben auf Simplizialkomplexen und ihrer derivierten Kategorie. Die Darstellung folgt im Wesentlichen [?] und [?].

In diesem Abschnitt bezeichne (V, \mathcal{K}) einen lokal-endlichen Simplizialkomplex mit Eckenmenge V . Für einen Simplex $\sigma \in \mathcal{K}$ definieren wir seine geometrische Realisierung $|\sigma| \subset \mathbb{R}^V = \text{Ens}(V, \mathbb{R})$:

$$|\sigma| = \{x \in \mathbb{R}^V \mid x(v) = 0 \text{ für } v \notin \sigma, x(v) > 0 \text{ für } v \in \sigma, \sum_{v \in V} x(v) = 1\},$$

sowie die geometrische Realisierung $|\mathcal{K}| \subset \mathbb{R}^V$ von \mathcal{K}

$$\bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} |\sigma|,$$

jeweils versehen mit der induzierten Topologie von \mathbb{R}^V .

Wir erhalten eine Abbildung

$$p : |\mathcal{K}| \rightarrow \mathcal{K},$$

genannt Simplexanzeiger oder Indikatorabbildung, der einem Punkt $x \in |\mathcal{K}|$ in der geometrischen Realisierung den eindeutigen Simplex $\sigma \in \mathcal{K}$ mit $x \in |\sigma|$ zuordnet.

Lemma 1. *Der Simplexanzeiger $p : |\mathcal{K}| \rightarrow \mathcal{K}$ ist stetig.*

Beweis. Das Urbild einer Basismenge ($\geq \sigma$) ist

$$p^{-1}((\geq \sigma)) = |\mathcal{K}| \cap \{x \in \mathbb{R}^V \mid x(v) > 0 \text{ für } v \in \sigma\},$$

der offene Stern um σ , den wir auch als $U(\sigma)$ notieren. □

Definition 2. Eine Garbe $F \in \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ heißt schwach $|\mathcal{K}|$ -konstruierbar (oder kurz: schwach konstruierbar), falls für alle $\sigma \in \mathcal{K}$, die Einschränkungen $F|_{|\sigma|}$ konstante Garben sind. Wir bezeichnen die volle Unterkategorie der schwach konstruierbaren Garben in $\text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ mit $\text{s-Kons}(\mathcal{K})$.

Eine derivierte Garbe $F \in \text{Der}(\text{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$ heißt schwach $|\mathcal{K}|$ -konstruierbar, falls für alle $j \in \mathbb{Z}$ die Kohomologiegaren $H^j(F)$ schwach konstruierbar sind. Wir bezeichnen die volle Unterkategorie der schwach konstruierbaren derivierten Garben in $\text{Der}(\text{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$ mit $\text{Der}_{\text{sk}}(|\mathcal{K}|)$.

Wir bemerken zunächst:

Lemma 3. *Die Kategorie $\text{s-Kons}(\mathcal{K})$ ist abelsch.*

Beweis. Durch den offensichtlichen Isomorphismus zur Kategorie der abelschen Gruppen (durch den Funktor der globalen Schnitte) ist die Kategorie der konstanten abelschen Garben auf einem topologischen Raum X eine abelsche Kategorie. Nun folgt die Aussage aus der Exaktheit des Pullbacks i_σ^* entlang den Inklusionen $i_\sigma : |\sigma| \hookrightarrow |\mathcal{K}|$. \square

Entscheidend ist die folgende Charakterisierung schwach $|\mathcal{K}|$ -konstruierbarer derivierter Garben:

Proposition 4 ([?]). *Für $F \in \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ sind äquivalent:*

1. F ist schwach $|\mathcal{K}|$ -konstruierbar
2. Die Koeinheit der Adjunktion ist auf F ein Isomorphismus $p^*p_*F \xrightarrow{\sim} F$.
3. F liegt im wesentlichen Bild des Rückzugs p^* .
4. Die Restriktion $F(U(\sigma)) \rightarrow F_x$ ist für alle $\sigma \in \mathcal{K}$ und $x \in |\sigma|$ ein Isomorphismus.

Beweis. Die Äquivalenz $(2) \Leftrightarrow (3)$ ist allgemein kategorientheoretischer Natur. Dabei ist $(3) \Rightarrow (2)$ offensichtlich (nimm p_*F) und $(2) \Rightarrow (3)$ folgt aus den Dreiecksidentitäten.

Die Äquivalenz $(2) \Leftrightarrow (4)$ folgt aus der Bestimmung der Halme von p^*p_*F . Zunächst bemerken wir, dass in \mathcal{K} die Menge $(\geq \sigma)$ die kleinste offene Umgebung von σ ist, und wir also $p_*F((\geq \sigma)) \xrightarrow{\sim} (p_*F)_\sigma$ erhalten. Somit gilt für $x \in |\sigma|$:

$$(p^*p_*F)_x \xrightarrow{\sim} (p_*F)_\sigma \xrightarrow{\sim} p_*F((\geq \sigma)) \xrightarrow{\sim} F(U(\sigma)).$$

Dabei wurde die Beschreibung der Halme des Rückzugs (mit $p(x) = \sigma$), obige Darstellung der Halme auf \mathcal{K} und die Definition des Vorschubs (mit $p^{-1}((\geq \sigma)) = U(\sigma)$) verwendet.

Die Implikation $(4) \Rightarrow (1)$ folgt direkt aus dem nachgestellten Lemma, angewandt auf die Einschränkung von F auf $U(\sigma)$, und der Tatsache, dass beliebige Einschränkungen konstanter Garben wieder konstant sind.

Für die umgekehrte Richtung reicht es, die Aussage für die Einschränkung von F auf $U(\sigma)$ zu zeigen. Wir betrachten für $x \in |\sigma|$ und $t \in (0, 1]$ die Zusammenhang

$$\begin{aligned} h : U(\sigma) &\rightarrow U(\sigma), \\ y &\mapsto h_t(y) = ty + (1 - t)x. \end{aligned}$$

Die Mengen $h_t(U(\sigma))$ bilden für $t \in (0, 1]$ eine Umgebungsbasis von x . \square

Wir tragen das benötigte Lemma nach.

Lemma 5 ([?, 2.1.41]). *Sei X ein topologischer Raum, $F \in \text{Ens}_{/X}$ eine Garbe auf X , für die die Restriktion $\Gamma F \xrightarrow{\sim} F_x$ für alle $x \in X$ bijektiv ist. Dann ist F eine konstante Garbe auf X mit Halm ΓF .*

Beweis. Bezeichne $c : X \rightarrow \text{top}$ die konstante Abbildung. Die Koeinheit der Adjunktion $c^*c_*F \rightarrow F$ induziert auf den Halmen gerade die vorausgesetzten Bijektionen, ist also ein Garben-Isomorphismus. \square

Wir bezeichnen den Funktor $p^*p_* : \text{Ab}_{/X} \rightarrow \text{s-Kons}$ kurz mit β und bemerken, dass er nach obiger Proposition ein Rechtsadjungierter zur Inklusion $\iota : \text{s-Kons} \rightarrow \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ ist:

Als Komposition zweier linksexakter Funktoren ist β natürlich wieder links-exakt. Der allgemeinen Terminologie folgend bezeichnen wir eine Garbe $F \in \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ β -azyklisch, falls ihre höheren Derivierten von β verschwinden, also falls

$$R^k\beta F = 0 \text{ für alle } k > 0.$$

Später benötigen wir die folgende Charakterisierung β -azyklischer Garben:

Proposition 6. *Eine Garbe $F \in \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ ist β -azyklisch genau dann, wenn $H^k(U(\sigma); F) = 0$ für alle $\sigma \in \mathcal{K}, k > 0$.*

Insbesondere gilt:

1. *Schwach $|\mathcal{K}|$ -konstruierbare Garben sind β -azyklisch.*
2. *Welke Garben sind β -azyklisch.*

Beweis. Nach der Charakterisierung höherer direkter Bilder ist $R^q\beta F = p^*R^qp_*F$ für $F \in \text{Ab}_{/|\mathcal{K}|}$ isomorph zur Garbifizierung der Prägarbe

$$(\geq \sigma) \mapsto H^q(p^{-1}((\geq \sigma)); F) = H^q(p^{-1}(U(\sigma)); F).$$

...

\square

Proposition 7. *Sei $F \in \text{Ket}^+(\text{Ab}_{/|\mathcal{K}|})$ ein gegen die Richtung der Pfeile beschränkter Kettenkomplex aus β -azyklischen Garben mit schwach $|\mathcal{K}|$ -konstruierbaren Kohomologiegargen $H^q(F)$. Dann ist $\beta F \rightarrow F$ ein Quasi-Isomorphismus.*

Beweis. Wir schneiden aus dem Kettenkomplex (F^n, d^n) kurze exakte Sequenzen aus:

$$\begin{array}{ccccccc} H^0 = \ker d^0 & \hookrightarrow & F^0 & \twoheadrightarrow & \text{im } d^0 & & \\ & & & & \text{im } d^0 & \hookrightarrow & \ker d^1 \twoheadrightarrow H^1 \\ & & & & & & \ker d^1 \hookrightarrow F^1 \twoheadrightarrow \text{im } d^1 \\ & & & & & & \vdots \end{array}$$

Sind in einer kurzen exakten Sequenz zwei der drei Objekte azyklisch, so nach dem Fünferlemma auch das dritte. Da nach Voraussetzung und 6 F^q und H^q β -azyklisch sind, sind alle oben betrachteten Objekte β -azyklisch und die kurzen

exakten Sequenzen bleiben exakt nach Anwendung von β . Es folgt $H^q(\beta F) \xrightarrow{\sim} \beta(H^q F)$ und weiter $\beta(H^q F) \xrightarrow{\sim} H^q F$ nach der schwachen Konstruierbarkeit von $H^q F$. \square

Damit ist der entscheidende Schritt für unser Ziel gezeigt. Wir erhalten:

Theorem 8. *Sei \mathcal{K} ein lokal-endlicher Simplicialkomplex.*

Die oben definierten Funktoren ι, β induzieren auf den derivierten Kategorien eine Äquivalenz

$$\mathrm{Der}^+(\mathrm{s}\text{-}\mathrm{Kons}(\mathcal{K})) \xrightleftharpoons[R\beta]{\iota} \mathrm{Der}_{\mathrm{sk}}^+(|\mathcal{K}|).$$

Beweis. Die Kategorien $\mathrm{Der}^+(\mathrm{s}\text{-}\mathrm{Kons}(\mathcal{K}))$ und $\mathrm{Der}_{\mathrm{sk}}^+(|\mathcal{K}|)$ haben genug Injektive. Mit der Grothendieck-Spektralsequenz für derivierte Kategorien ([?], 3.4.18) und der Exaktheit von ι erhalten wir somit

$$R\beta \circ R\iota \xrightarrow{\sim} R(\beta \circ \iota) \xrightarrow{\sim} R\mathrm{Id} = \mathrm{Id}$$

auf $\mathrm{Der}^+(\mathrm{s}\text{-}\mathrm{Kons}(\mathcal{K}))$, da welche Garben β -azyklisch sind, sowie

$$\iota \circ R\beta \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}$$

auf $\mathrm{Der}_{\mathrm{sk}}^+(|\mathcal{K}|)$ nach der vorangegangenen Proposition. \square

Bemerkung 9. Kashiwara und Schapira beschränken sich auf die Äquivalenz der beschränkten derivierten Kategorien, allerdings mit der gleichen Argumentation. In [?] 1.7.12 wird eine allgemeine Aussage für solche Situationen gezeigt, die hier aber m.E. nicht benötigt wird.