

Arrêt Optimal - Problème des Secrétaires Classique et une variante

Fabiano Menezes e Sousa

Novembre 19, 2021

Abstract

Le problème des secrétaires est un problème consacré dans le domaine des mathématiques appliquées, la version classique pose pour le problème un cadre de restrictions spécifiques, lesquelles peuvent être altérées de façon à changer dramatiquement non seulement les résultats numériques mais aussi la façon d’approcher la solution. Dans ce contexte le présent travail propose d’explorer les solutions et résultats de la problématique originale et d’une variation plus adaptée au monde réel. Les méthodes utilisées pour les résultats théoriques sont principalement combinatoires, avec l’utilisation des équations de récurrence sur les variables aléatoires définies pour déterminer le temps d’arrêt optimal.

1 Problème des Secrétaires Classique

1.1 Introduction au problème

Le problème des secrétaires classique remonte au début des années 1960, il était déjà assez diffusé parmi la communauté de chercheurs de probabilité et statistiques pendant la décennie de 50, cependant la première version proprement formalisée et publiée n’a apparue qu’en février 1960 dans la revue scientifique “Scientific American”. Le problème original, possédant une solution analytique fermée, a motivé le développement de plusieurs variantes au cours des années qui ont suivi, lesquelles constituent aujourd’hui un champ propre d’études dans le domaine d’optimisation mathématique probabilistique.^[1]

Le problème des secrétaires classique, dorénavant réfère comme CSP, est un problème d’optimisation sur un choix de temps d’arrêt, dans ce cas le temps qu’on doit s’arrêter dans un processus d’entretien pour avoir la probabilité maximale de recruter le candidat plus qualifié de tout le bassin de candidates.

Les contraintes sont définies de la façon suivante :

- C.1. Il y a une unique position disponible.
- C.2. La cardinalité du bassin de candidats est finie et connue.
- C.3. Les candidates passent l’entretien dans une ordre aléatoire, chaque permutation étant équiprobable.

- C.4. Vous pouvez classier les candidates de façon relative sans possibilité d'erreur. En plus la décision d'accepter ou non un candidat doit être prise uniquement par moyen de sa classification relative aux autres candidats interviewés jusqu'au moment présent.
- C.5. Le choix est binaire et possible seulement lorsque vous n'avez pas encore passé d'entretien avec un nouveau candidat.
- C.6. La fonction de récompense est bien définie comme l'indicatrice de l'événement "le meilleur candidat a été recruté".

1.2 Définitions mathématiques

Nous ferons appel aux outils de la mathématique appliqué pour formaliser le problème :

Appelons N le nombre total de candidats, utilisant la condition [C.2]. Soit $(X_n)_{1 \leq n \leq N}$ une suite de variables aléatoires représentant le rang du n -ème candidat relative à tout le bassin de candidats. Alors la condition [C.3] implique que (X_n) est une permutation équiprobable de $\{1, \dots, N\}$. Alors il convient de définir les suites de variables aléatoires suivantes :

$$\begin{cases} S_n = 1 + \|\{X_i | X_i > X_n, 1 \leq i < n\}\| \\ G_n = \mathbb{1}_{\{\cap_{i=n}^N \{X_i \geq X_i\} \cap \{S_n=1\}\}} \end{cases} \quad (1)$$

Où S_n représente les rangs relatifs considérant tous les candidats déjà vus, et R_n représente la récompense gagnée en acceptant le n -ème candidat.

Vu que la décision ne doit prendre en compte que les candidats déjà vus [C.4], $\{\tau = k\}$ l'événement où on choisit le k -ème candidat dépend uniquement de $\{X_1, \dots, X_k\}$ et donc peut être défini comme un temps d'arrêt.

1.3 Resolution du CSP

Pour résoudre le CSP nous devons trouver une règle pour décider le temps d'arrêt optimal. Pour le faire, il faut pouvoir définir une valeur intrinsèque lié au pair $(n, S_n=s)$ représentant toutes les informations qui peuvent être utilisés pour prendre une décision. Cette valeur doit être la valeur maximale entre l'espérance de G_n sachant que $S_n=1$ (correspondant au choix d'accepter le candidat) et l'espérance de la valeur intrinsèque du pair aléatoire $(n+1, S_{n+1})$ (représentant récuser le candidat et passer au prochain). Les équations qui définissent cette valeur intrinsèque sont alors des équations de retro-induction de la programmation dynamique. Avant de les expliciter, nous ferons le calcul de l'espérance de G_n sachant S_n :

$$\mathbb{E}[G_n | S_n] = \begin{cases} \frac{n}{N} & \text{si } S_n=1 \\ 0 & \text{c.c} \end{cases} \quad (2)$$

L'explication n'est pas très compliquée. Vu que G_n est une indicatrice avec l'événement $\{S_n=1\}$ comme condition, forcément $\mathbb{E}[G_n | S_n]$ sera nulle quand

l'événement ne se passe pas. Si par contre nous savons que $S_n=1$ alors $\mathbb{E}[G_n|S_n]$ devient $\mathbb{E}[G_n|S_n = 1]$. Comme G_n est une indicatrice sa espérance est la probabilité de ses événements, ceux qui correspondent ensemble et conditionés par $S_n=1$ à l'événement «Le plus candidat le plus qualifié du bassin est parmi les n premiers candidats » ce qui nous donne une probabilité $\frac{n}{N}$ en vue de [C.3].

Ayant une équation pour l'espérance de G_n il reste juste définir les équations de retro-induction :

$$V(n, S_n = k) = \max(\mathbb{E}[G_n], \mathbb{E}[V(n+1, S_{n+1})])$$

Divisé dans les deux cas de [Eq.2] l'équation ci-dessus résulte en :

$$\begin{cases} V(n, S_n = 1) = \max\left(\frac{n}{N}, \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} V(n+1, S_{n+1}=i)\right) \\ V(n, S_n = k) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} V(n+1, S_{n+1}=i), \quad k \geq 2 \end{cases} \quad (3)$$

Les conditions initiales sont les cas où tous les candidats ont été interviewés et alors $V(N, S_N = k) = 1$ si et seulement si $k=1$.

Le temps d'arrêt optimal est le premier instant tel qu'il vaut mieux s'arrêter à continuer, c'est-à-dire :

$$\tau = \inf\{n \mid S_n = 1, \mathbb{E}[G_n|S_n] \geq \mathbb{E}[V(n+1, S_{n+1})]\}$$

La solution explicite de ce système, développé par Lindley ^[1] en 1961, donne la valeur τ optimal. Dans ce travail nous proposons une méthode spécifique au CSP pour trouver la solution, c'est important noter que pour la plupart des variations du problème il n'y existe pas de méthodes alternatives, exigeant alors le calcul computationnel de la fonction $V(n,s)$.

L'argument utilisé est que si T_j défine le meilleur taux de succès parmi toutes les règles d'arrêt qui rejettent les premiers j candidats, alors la suite $\{T_i\}$ est décroissante, vu que toute règle optimale qui rejette les premiers $j+1$ candidats est aussi une règle qui rejette les j premiers candidats, en plus le taux de succès sera tel que $T_j < j/N$, vu que nous avons décidé de rejeter tous les premiers j candidats inconditionnellement. La conclusion est que si c'est optimal de s'arrêter au candidat j , c'est également optimal de s'arrêter, quand le candidat est viable (i.e. $\{S_n = 1\}$), en $j+1$, vu que :

$$\frac{j+1}{N} > \frac{j}{N} \geq T_j \geq T_{j+1}$$

La stratégie optimale est donc telle qu'il existe un entier k tel qu'on choisit de voir tous les candidats jusqu'au k -ème, et après le k -ème nous nous arrêtons au premier candidat viable, ou au dernier cas il n'existe pas.

Pour k fixé et les stratégies de cette forme, notons $\tau(k) = \inf\{t \mid t > k, S_t=1\}$ le temps où l'algorithme s'arrête, c'est-à-dire, le nombre du premier candidat mieux que les k -ème premiers candidats, au cas où ça ne se passe jamais

notons $\tau(k)=N+1$. Alors, vu que si la stratégie est gagnante l'événement $\{\bigcup_{j=k+1}^N \tau(k)=j\}$ est certain, avec ses termes disjoints, la stratégie donne une le taux de succès calculé par :

$$\begin{aligned}
T_k &= \sum_{j=k+1}^N \mathbb{P}(\{\tau(k)=j\} \cap \{G_j=1\}) = \\
&= \sum_{j=k+1}^N \mathbb{P}(\{G_j=1\}) \cdot \mathbb{P}(\{\tau(k)=j\} | \{G_j=1\}) = \\
&= \sum_{j=k+1}^N \frac{1}{N} \cdot \frac{k}{j-1} = \\
&= \frac{k}{N} \left(\frac{1}{k} + \dots + \frac{1}{N-1} \right) = \\
&= \frac{k}{N} (H_{N-1} - H_{k-1}), \quad H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \quad \text{le n-ème nombre harmonique}
\end{aligned} \tag{4}$$

Où nous avons utilisés le fait que $\mathbb{P}(\{\tau(k)=j\} | \{G_j=1\}) = \frac{k}{j-1}$, correspondant au fait que si $\{G_j=1\}$ alors on s'y arrêtera si et seulement si le meilleur candidat parmi les $j-1$ premiers est parmi les k premiers candidats, ce qui donne le rapport fractionnel en vue de [C.3].

Or, ayant l'expression de T_k il suffit juste la maximiser sur tous les k possibles, pour N pas trop grand il faut calculer les nombres harmoniques et résoudre le problème avec l'aide d'une machine. Cependant, en vue du fait que la suite des nombres harmoniques est asymptotique à $\ln(n)$ selon l'équation ^[3]:

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

γ étant la constant d'Euler-Mascheroni, pour N suffisamment grand :

$$\begin{aligned}
T_k &\approx \frac{k}{N} \left(\ln \left(\frac{N-1}{k-1} \right) \right) \\
\Rightarrow (T'(k) = 0) &\Leftrightarrow \frac{\ln(\frac{N-1}{k-1})}{N} + \frac{k}{N} \cdot \frac{k-1}{N-1} \cdot -\frac{N-1}{(k-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{k}{k-1} = \ln \left(\frac{N-1}{k-1} \right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow k \approx \frac{N}{e}
\end{aligned} \tag{5}$$

Cela donne donc le résultat explicite que, asymptotiquement, la stratégie est rejeter les premiers 36.8% des candidats, et ensuite accepter le prochain qui est viable. La qualité de cette approximation sera analyse plus tard. Dans la prochaine section les résultats numériques seront présentes et commentés.

1.4 Visualisation Numerique du CSP

Toutes les simulations et résultats numériques/graphiques de cette section ont été faits utilisant des notebooks Jupyter et les bibliothèques Python appropriés

(Matplotlib pour les graphes, Numpy pour les calculs, etc).

1.4.1 Simulation Monte-Carlo

Pour obtenir une référence fiable aux résultats analytiques, l'expérience a été simulé plusieurs fois et le résultat moyen a été affiché. C'est garanti par la loi des grands nombres que les résultats moyens approchent le résultat théorique lorsque le nombre de simulations est suffisamment haut.

Les simulations ont été faites de façon que, ayant généré un vecteur aléatoire X , le taux de succès de l'algorithme décrit dans la section antérieure a été calculé pour chaque k possible. Un vecteur comptant les réussites pour chaque k est sélectionné, et l'expérience est répétée un grand nombre de fois, chaque fois la k -ème entrée du vecteur de réussites est ajouté de la récompense binaire de l'algorithme, de façon que, après finir toutes les simulations, les entrées du vecteur divisé par le nombre d'expériences donnent le taux de succès pour chaque k , correspondant exactement au graphe que nous avons calculé explicitement avant, permettant alors une comparaison.

Les résultats obtenus ont deux principales caractéristiques importantes passives d'analyse. Premièrement l'ajuste de la courbe résultant des simulations vers la courbe théorique de la section antérieure, ce qui se passe lorsque le nombre N de candidats augmente. La deuxième caractéristique importante à retirer de la simulation sont les points d'extremum de chaque simulation, en particulier ces points nous permettent de vérifier la convergence du point de maximum réel vers le point de maximum calculé à partir de la fonction T_k exacte, et non pas l'approximation, qui sera traité ensuite.

Dessous sont les résultats graphiques, en bleu la fonction théorique exacte, en orange les résultats des simulations, suivi par le tableau avec les résultats numériques des points d'extremum.

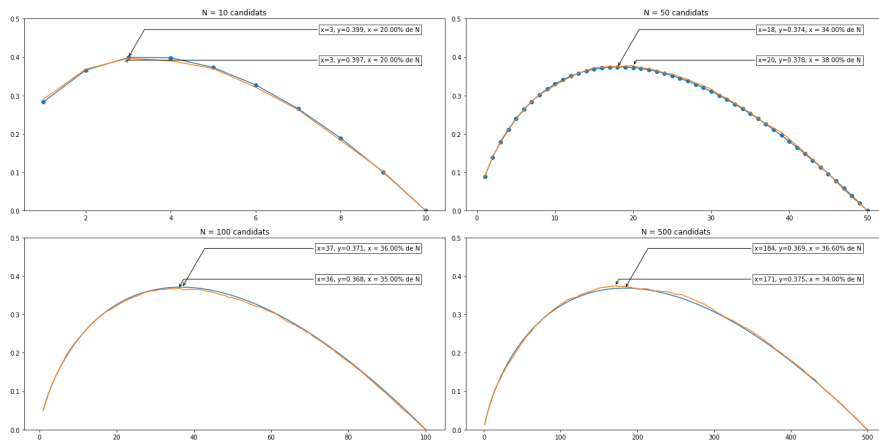


Figure 1: Resultat pour Num = 10000 simulations

Resultats Numeriques — 10000 simulations				
Candidats	τ simulé	τ théorique	% de N - sim.	% de N - theo.
N=10	3	4	30.0%	36.4%
N=50	19	19	38.0%	37.3%
N=100	38	37	38.0%	36.6%
N=500	169	184	33.8%	36.7%

Ces résultats démontrent la convergence du temps d'arrêt simulé vers le temps d'arrêt théorique lorsque le nombre de candidats augmente, ce qui est attendu une fois que quand les courbes s'approchent les petites variations de T_k dans un voisinage du maximum (où la dérivée est attendue être zéro, donc toujours sensible même pour grands N) représentent une pourcentage plus petite du maximum N.

Maintenant nous changeons les simulations afin de présenter des résultats pour différents valeurs du nombre de simulations et un N constant, nous attendons trouver une convergence plus vite du temps d'arrêt en vue du fait que la loi des grands nombres n'a pas la sensibilité dans les points maximum, la différence entre les résultats théorique et simulé peuvent devenir arbitrairement petites.

Resultats Numeriques — 50 candidats				
Simulations	τ simulé	τ théorique	% de N - sim.	% de N - theo.
N=100	11	18	22.0%	36.0%
N=1000	22	18	44.0%	36.0%
N=5000	19	18	38.0%	36.0%
N=100000	18	18	36.0%	36.0%

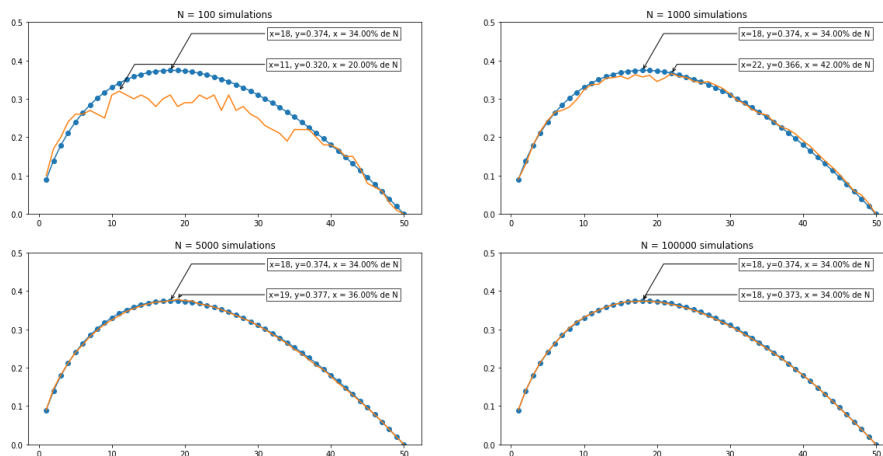


Figure 2: Results pour N = 50 candidats

Ici la convergence est très vite, conséquence directe de la loi des grandes nombres.

1.4.2 Sensibilité de T_k à l'approximation logarithmique

Dans cette sub-section nous discutons rapidement la qualité de l'approximation fait à la série harmonique par le logarithme dans la formule de T_k .

Le fait important à noter est que pour la formule de calcul de T_k , l'approximation de H_n est fait de manière que c'est la différence entre deux approximations que vraiment emporte les erreurs, comme l'approximation utilisée possède une erreur de première ordre constant, la différence cancelle la constante ce que fait qui l'erreur

$$\left[\ln\left(\frac{N-1}{k-1}\right) - (H_{N-1} - H_{k-1}) \right] = \mathcal{O}(1/N)$$

Cela nous donne alors une approximation très précise de la fonction exacte. Ci-dessous est le résultat numérique obtenu pour la différence entre la formule exacte et la formule approximé.

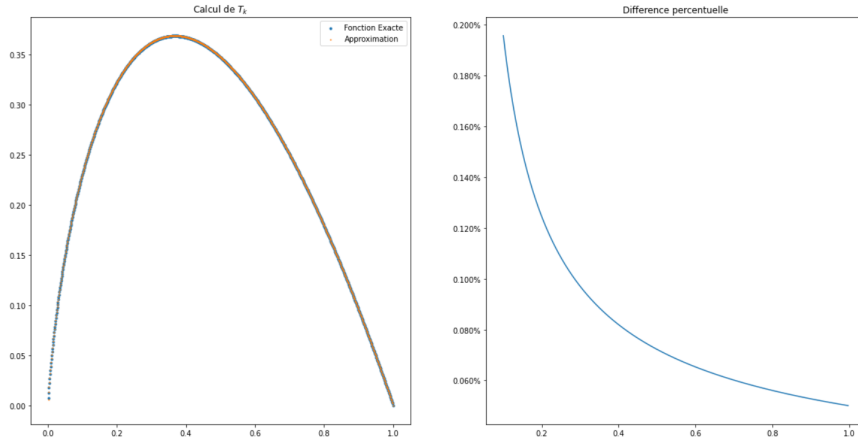


Figure 3: Comparation pour $N = 1000$ candidats

Les simulations montrent qu'en effet même pour des valeurs de N pas très grandes l'approximation représente bien la solution correcte, en particulier que même pour un nombre très élevé de simulations la différence entre la courbe théorique approximé et l'exakte est négligeable par rapport à la différence entre la courbe simulé et les deux courbes théoriques.

2 Min-CSP: Minimisation de l'espérance du rang sélectionné

Comme nous avons discuté avant, la solution du CSP dans les années 60 a rapidement développé un champs de recherche dans le domaine d'optimisation mathématique-probabiliste. Naturellement l'une des premières questions passives d'analyse est de savoir qu'est-ce que se passe quand nous changeons les conditions définies dans la section 1.1, vu que la plupart des considérations y prises ne sont pas très réalistes pour modeler un problème réel. Ces variations du CSP qui découlent des moindres variations aux conditions sont très

différentes les unes des autres de façon qu'en général elles sont étudiées de façon indépendante. Des exemples notables incluent ^[2] les changements à la condition [C.1], c'est à dire un procès d'interview qui permet la recruté de plusieurs candidats (Problème des k-Secrétaires), les changements à la condition [C.2], considérant un horizon infini ou inconnu d'événements, les modifications à la condition [C.4], considérant la probabilité d'erreur de jugement, ou d'une classification pas par les rangs relatives, mais par une note absolue, entre autres variantes.

Dans cette section nous allons explorer une des variations plus importantes et une des premières à être exploré à fond historiquement, avec une première résolution proposé par Lindley juste après sa solution du CSP. Le principe est de changer la condition [C.6] qui donne la récompense du choix de candidat, la condition de récompense binaire étant assez restrictive, le problème demande de minimiser l'espérance du rang sélectionné, représenté par le mêmes notations du CSP, cela donne mathématiquement l'énoncé:

[CSP - Minimisation du Rang] Étant X_n [Eq.1] la suite des rangs absoluts des candidats, trouver

$$\min(\mathbb{E}[X_\tau])$$

Toujours comme au CSP, en vue de la condition [C.4], l'événement $\{\tau = k\}$ ne doit pas dépendre du futur et est donc un temps d'arrêt.

2.1 Solution de Min-CSP

Pour résoudre le problème nous allons utiliser une fonction de gain qui soit maximisé quand le rang sélectionné soit minimisé, une telle fonction est

$$G_n = N - X_n$$

Le but alors n'est plus de trouver un τ que minimise la espérance de G_τ , vu que la règle d'arrêt dépendra également du rang relative du candidat (différemment du CSP où nous savions que nécessairement $S_k=1$ pour le candidat choisi). Les règles d'arrêt seront donc des paires (k, s) de temps et rang relative où il convient s'arrêter. Vu que les variables qu'on utilise pour décider l'événement $\{\tau = k\}$ sont les $S_{i \leq k}$, il se fait nécessaire calculer la distribution de X_k conditionné par la connaissance de S_k :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_k = i | S_k = s) &= \binom{N-i}{k-s} \binom{i-1}{s-1} / \binom{N}{k} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{i=s}^{N-(k-s)} \binom{N-i}{k-s} \binom{i-1}{s-1} = \binom{N}{k} \end{aligned} \quad (6)$$

Nous explicitons une démonstration combinatoire de ce fait. Or, il y existent $\binom{N}{k}$ façons de tirer le rang des premiers k candidats, entre elles, nous cherchons celles tel que le k-ème candidat ait les rangs relatif/absolut $= (s, i)$ fixés, mais ça se passe si et seulement si, parmi les k premiers candidats, il y a $s - 1$ membres de la liste de candidats plus qualifiés que lui, de cardinalité

$i - 1$, et $k - s$ membres de la liste de candidats moins qualifiés que lui, de cardinalité $N - i$. Cela donne exactement la formule dessus.

Avec la probabilité conditionnelle, nous pouvons calculer $\mathbb{E}[G_k | S_k = s]$, qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\binom{N}{k} \cdot \mathbb{E}[G_k | S_k = s] &= \binom{N}{k} \sum_{i=s}^{N-(k-s)} (G_k | X_k = i) \mathbb{P}(X_k = i | S_k = s) = \\
&= \sum_{i=s}^{N-(k-s)} \left[(N - i + 1 - 1) \binom{N-i}{k-s} \right] \binom{i-1}{s-1} = \\
&= (k - s + 1) \sum_{i=s}^{N+1-(k+1-s)} \binom{N+1-i}{k+1-s} \binom{i-1}{s-1} \quad (7) \\
&= \sum_{i=s}^{N-(k-s)} \binom{N-i}{k-s} \binom{i-1}{s-1} = \\
&= (k - s + 1) \binom{N+1}{k+1} - \binom{N}{k} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \mathbb{E}[G_k | S_k = s] = N - \frac{N+1}{k+1} s
\end{aligned}$$

Avec ce résultat nous pouvons résoudre le problème comme présenté à la section du CSP, c'est à dire avec les équations de rétro-induction, définies de la façon suivante :

$$\begin{cases} V(n, S_n = s) = \max(\mathbb{E}[G_n | S_n = s], \mathbb{E}[V(n+1, S_{n+1})]) = \\ \quad = \max\left(N - \frac{N+1}{n+1} s, \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} V(n+1, S_{n+1} = i)\right) \\ V(N, S_N = s) = N - s \end{cases} \quad (8)$$

La résolution numérique de ce système nous remporte les règles d'arrêt :

$$\{(\tau, s)\} = \{(t, u) | \mathbb{E}[G_t | S_t = u] > \mathbb{E}[V(t+1, S_{t+1})]\} \quad (9)$$

Les moment où l'espérance de la récompense d'accepter le candidat surpasse le valeur du procès en $\tau + 1$, sachant son rang relatif. Il n'y a pas de formule close pour ces valeurs ni l'espérance du rang optimal $\mathbb{E}[G_\tau]$. Cependant, Lindley a montré^[1] que cette valeur a une formule analytique lorsque $N \rightarrow \infty$, la valeur obtenu dans son article étant :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[G_\tau] = \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j+2}{j} \right)^{1/j+1} \approx 3.8695$$

Nous nous contenterons dans cette partie du travail de montrer numériquement la convergence dessus.

2.2 Resultats Numeriques: Min-CSP

Pour simuler la convergence, comme au CSP nous avons utilisés des notebooks Jupyter et les bibliothèques appropriées pour traiter le problème/afficher les résultats. En définissant les équations de rétro-induction avec Python, le seul détail à faire attention a été l'utilisation de la programmation dynamique pour ne pas répéter plusieurs fois les calculs des mêmes valeurs de $V(n,s)$. La convergence de $\mathbb{E}[G_\tau]$ est explicité dessous :

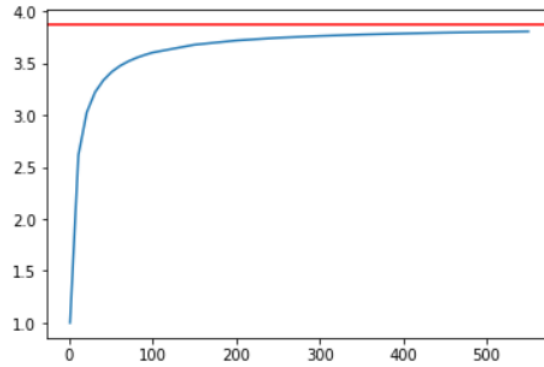


Figure 4: Convergence de l'esperance du rank pour l'estrategie optimale

Dessous sont les résultats pour les mêmes nombres de candidats des simulations CSP:

Resultats Numeriques		
N° de candidats	$\mathbb{E}[G_\tau]$	% de la limite
N=10	2.56	66.1%
N=50	3.41	88.2%
N=100	3.60	93.1%
N=500	3.80	98.2%

Enfin, comme dernier partie des développements choisis à approfondissement, les règles d'arrêt ont été explicitement graphés pour chaque N de la liste dessus, dans un graphe 2D, de façon qu'une coordonné (k, s) est peint noir si, et seulement si, pour ce N , le pair est une règle d'arrêt, définie selon l'Équation [Eq.9].

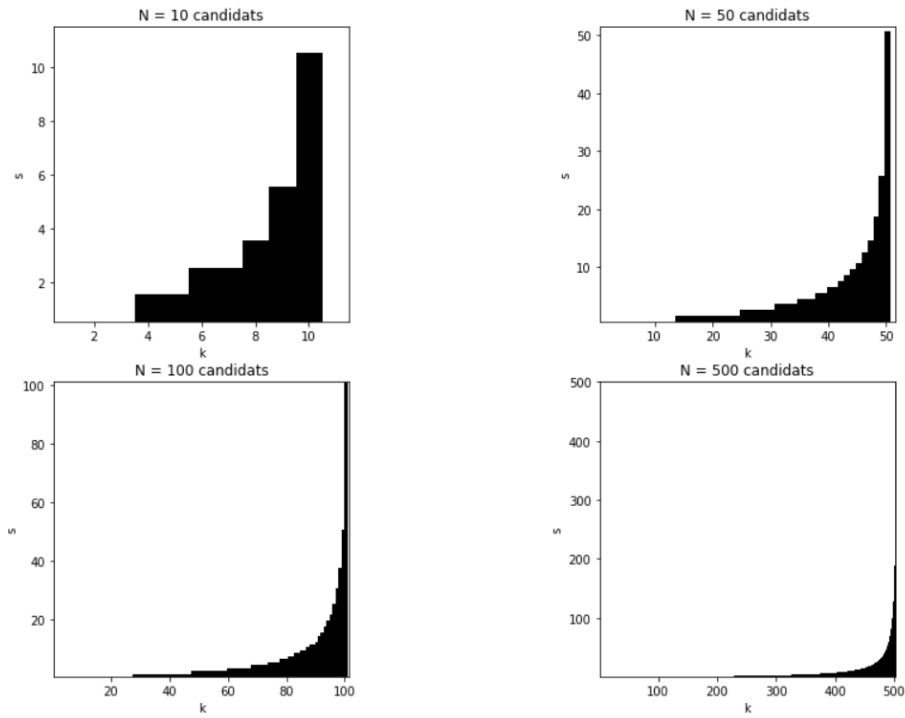


Figure 5: Règles d'arrêt pour $N \in \{10, 50, 100, 500\}$

3 Conclusion

Le Problème des Secrétaires est un problème de caractère central dans le domaine d'optimisation mathématique-probabiliste, il démontre les concepts de temps d'arrêt optimal et d'obtention d'une fonction de valuation d'état par le processus de retro-induction (équivalent à la valeur d'un jeu dans la théorie des jeux, sur l'idée que la stratégie qui donne la valuation de l'état doit être la décision la plus logique possible). Les variantes du PSC servent comme modèle à plusieurs situations de la vie réelle, le processus de recrutement n'a rien de particulier et en fait les mêmes conclusions sont vraies pour les problèmes de recherche optimale pour trouver un partenaire, chercher des maisons à acheter, etc.

Tous les codes et recourses de calcul utilisés dans ce travail peuvent être trouvés sur le lien: <https://github.com/fab-mnz/SecProb>

4 Bibliographies

- [1] - Samuels, S., 1989. [Who Solved the Secretary Problem?]: Comment: Who will Solve the Secretary Problem?. Statistical Science, 4(3).
- [2] - Skarupski, M., 2020. Secretary Problem with Possible Errors in Obser-

vation. Mathematics, 8(10), p.1639.

[3] - Knuth, D., 1976 "The Art of Computer Programming," Volume 1 (Fundamental Algorithms), Addison Wesley. Sec. 1.2.11.2 (page 108).

[4] - Bruss, F., 2000. Sum the odds to one and stop. The Annals of Probability, 28(3).

[5] - Sigman, K., 2006. Stopping Times.
Disponibile à: <http://www.columbia.edu/~ww2040/4701Sum07/4701-06-Notes-ST.pdf>

[6] -Chow, Y., Moriguti, S., Robbins, H. and Samuels, S., 1964. Optimal selection based on relative rank (the "secretary problem"). Israel Journal of Mathematics, 2(2), pp.81-90.

[7] - Freeman, P., 1983. The Secretary Problem and Its Extensions: A Review. International Statistical Review / Revue Internationale de Statistique, 51(2), p.189.

[8] -Freeman J. Dyson "Missed opportunities," Bulletin of the American Mathematical Society, Bull. Amer. Math. Soc. 78(5), 635-652, (September 1972)

[9] - Samuels, Stephen M. (1992). "Secretary Problems as a Source of Benchmark Bounds". Lecture Notes-Monograph Series. Institute of Mathematical Statistics Lecture Notes - Monograph Series. 22. Institute of Mathematical Statistics. pp. 371-387. doi:10.1214/lnms/1215461963. ISBN 0-940600-29-3. JSTOR 4355753. 1992