

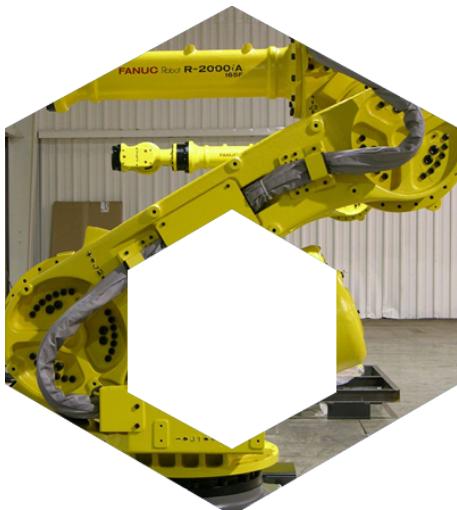
MODÉLISATION DES MÉCANISMES

Cours

CPGE

v1.2

Lycée La Fayette – 21 Bd Robert Schuman – 63000 Clermont-Ferrand – Académie de Clermont-Ferrand



Compétences visées:

- B2-09** Paramétriser les mouvements d'un solide indéformable
- B2-10** Associer un repère à un solide
- B2-11** Identifier les degrés de liberté d'un solide par rapport à un autre solide
- B2-12** Prendre en compte les symétries ou les restrictions de mouvement pour simplifier le modèle
- C2-11** Déterminer la loi entrée-sortie géométrique d'une chaîne cinématique
- C2-12** Déterminer les relations de fermeture de la chaîne cinématique
- D2-06** Réaliser un schéma cinématique

Table des matières

1	Préambule	3
2	Hypothèses – Définitions	3
2.1	Les solides	3
2.2	Les contacts	4
2.3	Degrés de liberté autorisés par un contact	5
2.4	Liaisons normalisées	8
3	Modélisation cinématique d'un mécanisme	11
3.1	Classes d'équivalence	12
3.2	Graphe de liaisons	13
4	Représentation d'un modèle : le schéma cinématique	16
4.1	Description	16
4.2	Méthode de construction	16
5	Modélisation plane	16
5.1	Définition du mouvement plan	16
5.2	Modèles de liaisons planes	17
5.3	Schéma cinématique d'une modélisation plane	18
6	Analyse géométrique d'un mécanisme	18
6.1	Construction géométrique	18
6.2	Paramétrage	18
6.3	Loi entrée-sortie	18
7	Conclusion	19
8	Annexe : vecteurs, projections et produit scalaire	20
8.1	Définitions	20
8.2	Repérage des vecteurs	20
8.3	Produit scalaire	21
8.4	Changement de bases	22

1 Préambule

De nombreuses performances d'un système sont liées à ses mouvements, à la manière dont ceux-ci sont obtenus. L'étude ou le dimensionnement de ces systèmes mécaniques nécessite la mise en place d'une modélisation de l'assemblage de pièces entre elles.

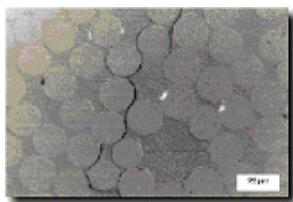
L'objectif du chapitre est de montrer les outils permettant de modéliser des systèmes mécaniques pour ensuite pouvoir mener différentes études à partir de ce modèle. Un tel modèle pourra être implanté dans un logiciel de simulation pour prévoir le comportement du mécanisme et valider le cahier des charges ou pour améliorer ses performances.

2 Hypothèses – Définitions

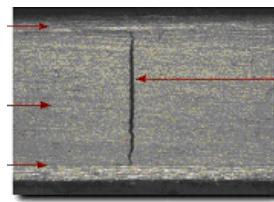
2.1 Les solides

Considérons un système constitué d'un seul élément (par exemple, une hélice). L'étape fondamentale de la modélisation consiste à choisir l'échelle à laquelle le mouvement de l'élément sera étudié. Plusieurs choix d'échelles sont alors possibles :

- on peut considérer les atomes (ou les éléments microscopiques) qui constituent cet élément (exemple : matériau composite à fibres de carbone et résine thermodurcissable) ;
- on peut considérer que la matière est continue et que l'élément peut se déformer, se casser (domaine de la Mécanique des Milieux Continus - niveau école d'ingénieur) (exemple : fissuration, rupture des fibres, dommages de la résine . . .) ;
- on peut étudier la déformation uniquement dans une direction privilégiée (résistance des matériaux - flexion des pales) ;
- on peut enfin considérer que la matière est continue mais que l'élément ne se déforme pas (domaine de la mécanique du solide indéformable).



Matériau composite



Fissure dans un matériau



Flexion de pales

Dans tout ce cours, on fait **l'hypothèse que les éléments étudiés ne se déforment pas**.



Définition Solide indéformable

On définit donc un **solide indéformable** par un ensemble de points dont la distance entre eux ne varie pas au cours du temps :

$$\forall A \in S, \forall B \in S, \left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \text{cste} \quad \forall t$$



Remarque

Un solide est, par définition, un ensemble de points matériels (point + masse). On utilisera indifféremment dans ce cours solide et solide indéformable.

Modéliser un système revient à proposer **une** représentation simplifiée de la réalité, afin de ne faire apparaître que les propriétés indispensables pour l'étude considérée. Il peut donc, pour un système donné, y avoir plusieurs modélisations.

2.2 Les contacts

Lorsqu'un système est constitué de plusieurs solides indéformables, certains sont en contact ; on dit alors qu'ils sont en liaison les uns avec les autres.



Définition *Liaison entre solides*

Une liaison entre deux solides est une relation de contact entre ces deux solides.

Ce contact est caractérisé par sa géométrie (point, droite, arc de cercle, plan...) et par les mouvements relatifs qu'il autorise. L'analyse des liaisons se fait toujours en considérant la **nature des surfaces de contact**. Si un contact change de nature, la liaison change et le modèle défini n'est alors plus valable.



Remarque

D'un point de vue physique, les zones de contact réelles entre deux solides sont surfaciques. Par contre, la modélisation par solides rigides des pièces réelles introduit la notion de zone de contact ponctuelle et linéaire.

2.2.1 Contact ponctuel



Définition *Contact ponctuel*

Deux solides S_1 et S_2 sont en contact ponctuel si l'intersection de leur représentation géométrique est un point.

Exemples : contact sphère/sphère, sphère/plan, cône/plan, cylindre/cylindre...



Sphère sur plan



Sommet de cônes



Cylindres à axes orthogonaux

FIGURE 1 – Exemples de contacts ponctuels



2.2.2 Contact linéique



Définition *Contact linéique*

Deux solides S_1 et S_2 sont en contact linéique si l'intersection de leur représentation géométrique est une ligne.

En pratique, on se limitera à deux types de lignes : la droite (contact linéique rectiligne) et le cercle (contact linéique circulaire).

Exemples : contact cylindre/plan, sphère/cylindre, dentures d'engrenages ...

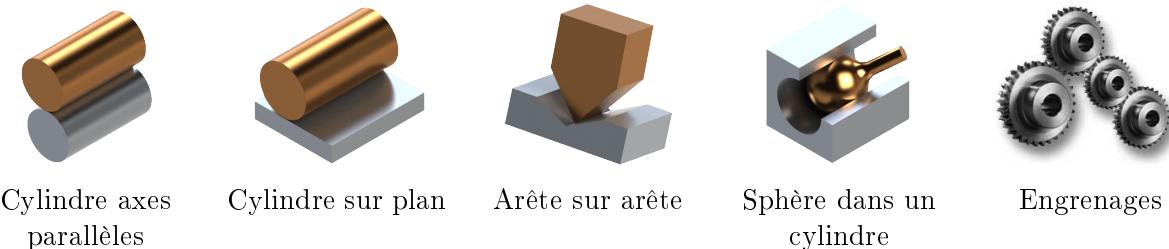


FIGURE 2 – Exemples de contacts linéiques

2.2.3 Contact surfacique



Définition *Contact surfacique*

Le cas général est d'avoir autour d'un point A , pour deux solides S_1 et S_2 , deux surfaces qui ont la même forme géométrique en contact. S_1 et S_2 peuvent avoir en commun une surface qui peut être gauche ou plane.

Exemples : contact plan/plan, arbre/alésage de même diamètre, sphère dans sphère...

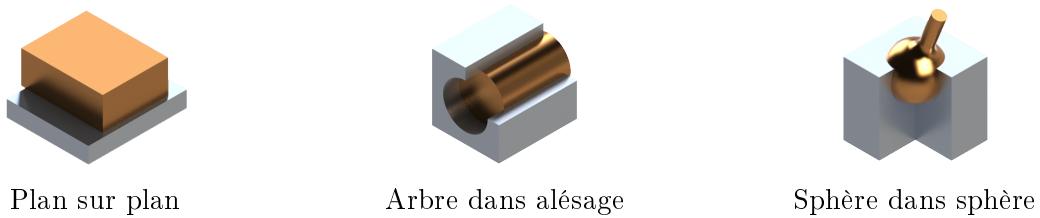


FIGURE 3 – Exemples de contacts surfaciques

2.3 Degrés de liberté autorisés par un contact

2.3.1 Repères

Pour caractériser la taille et la position des éléments d'un système, il est nécessaire de définir un (ou plusieurs) repère qui sera attaché à un référentiel donné.

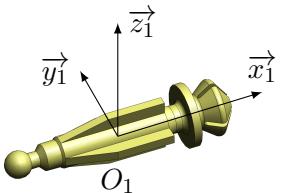


Définition Repère

Un repère est constitué d'une origine et d'une base orthonormée b constituée de 3 axes. Ainsi, $R_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) = (O_0, b_1)$ est le repère d'origine O_0 et de base b_1 .

Étudier le mouvement d'un solide S_1 par rapport à un solide S_0 muni d'un repère R_0 revient à l'étudier par rapport à ce repère :

$$\text{Mvt}_{S_1/S_0} = \text{Mvt}_{S_1/R_0}$$



On distingue plusieurs types de repères pour exprimer la position d'un point dans l'espace (FIGURE 4). Le repère cartésien est le plus utilisé car le plus simple à mettre en œuvre. Le repère cylindrique est utile quand on veut mettre en évidence une rotation. Le repère sphérique est surtout utilisé lorsque l'on a trois rotations.

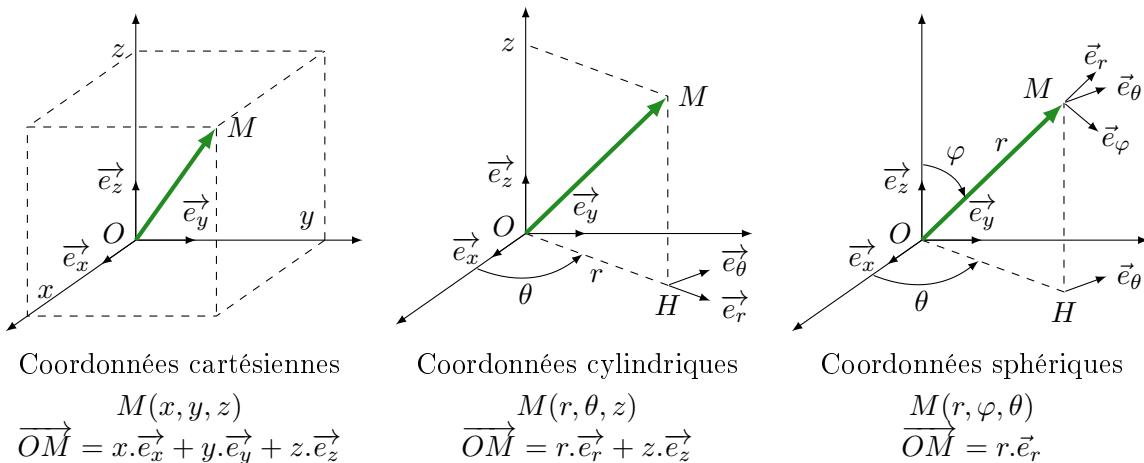
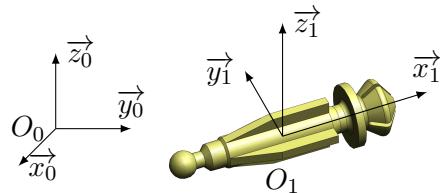


FIGURE 4 – Coordonnées d'un point M dans les 3 systèmes de coordonnées

2.3.2 Paramètres de position d'un solide dans l'espace

Afin de positionner un solide dans l'espace, il est nécessaire de connaître le nombre de paramètres nécessaires au positionnement d'un solide S_1 par rapport à un référentiel S_0 muni d'un repère $R_1(O_0, b_0)$. Le solide S_1 est muni d'un repère $R_1(O_1, b_1)$.



Il est usuel en mécanique de considérer :

- les trois coordonnées du point origine du repère R_1 dans le repère R_0 définissant 3 translations ;
- les trois angles qui définissent la position de la base du repère R_1 par rapport à celle du repère R_0 , définissant 3 rotations.

Quand un angle est défini, on lui associe une figure de calcul ou figure géométrale (ou figure plane) permettant de réaliser facilement des projections (cf. Annexes).

2.3.3 Degrés de liberté



Définition *Degrés de liberté*

6 paramètres sont donc nécessaires pour repérer un solide par rapport à un autre solide. On parle de **degrés de liberté**.

3 Rotations	3 Translations
R_x , rotation d'axe (A, \vec{x})	T_x , translation d'axe \vec{x}
R_y , rotation d'axe (A, \vec{y})	T_y , translation d'axe \vec{y}
R_z , rotation d'axe (A, \vec{z})	T_z , translation d'axe \vec{z}

TABLE 1 – Possibilités de mouvement d'un solide dans l'espace

Ces possibilités de mouvement sont notées généralement dans un tableau à deux colonnes appelé tableau des degrés de liberté :

$$\begin{vmatrix} R_x & T_x \\ R_y & T_y \\ R_z & T_z \end{vmatrix}$$



Définition

Une liaison entre deux solides supprime des degrés de liberté.

Pour caractériser ces liaisons, on définit un repère local $R(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ à partir des caractéristiques géométriques des contacts (point, droite, centre, axe, normale...).

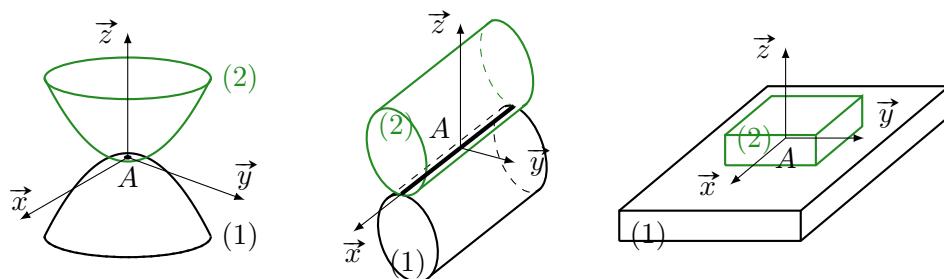


FIGURE 5 – Nature du contact et repère local associé

Ce repère est ensuite associé à chaque solide. On détermine alors les **possibilités de mouvements autorisés** entre les solides (d'un repère par rapport à l'autre), **sans changer la nature du contact**.

Le nombre de degrés de liberté d'une liaison entre deux solides est le nombre de **mouvements relatifs indépendants** que la liaison autorise entre ces deux solides **sans changer la nature du contact**. Ce nombre est égal au plus à 6. S'il est égal à 0, la liaison est appelée **liaison enca斯特rement**. S'il est égal à 6 la liaison est dite **libre**.



Définition Mécanisme

Un mécanisme ou système mécanique est un ensemble de solides reliés entre eux par des liaisons.

Application : voir TD1 - Système d'orientation de phare - Q1

2.4 Liaisons normalisées

2.4.1 Hypothèses de modélisation des liaisons

Les liaisons courantes rencontrées en mécanique sont normalisées par l'*AFNOR*. Un nom et une schématisation sont associés à chaque liaison. Ces liaisons sont considérées comme géométriquement parfaites, c'est à dire qu'elles vérifient les hypothèses suivantes :

- les pièces mécaniques sont des solides indéformables ;
- les surfaces sont géométriquement parfaites (FIGURE 6) ;
- les jeux sont nuls (FIGURE 7) ;
- le type de contact reste le même au cours du mouvement.

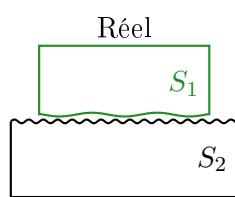


FIGURE 6 – Surface réelle (avec des défauts amplifiés) et modèle associé

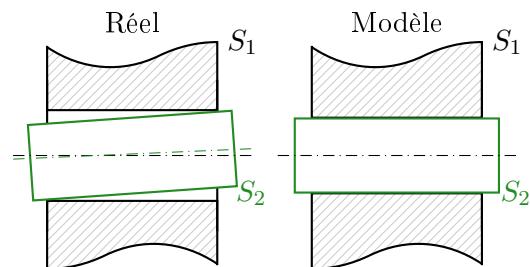


FIGURE 7 – Guidage réel avec jeu (avec des défauts amplifiés) et modèle associé

La liaison parfaite est donc une liaison théorique tant d'un point de vue géométrique que d'un point de vue de la nature physique du contact.

2.4.2 Liaisons élémentaires

Une liaison élémentaire entre deux solides S_1 et S_2 est obtenue à partir du contact d'une surface géométrique élémentaire liée à S_1 sur une surface géométrique élémentaire liée à S_2 . Les surfaces géométriques élémentaires obtenues à partir des principaux procédés d'usinage sont :

- le plan (par fraisage, tournage, lamage) ;
- le cylindre (par tournage, perçage, alésage) ;
- et la sphère (par tournage).

Le TABLEAU 2 donne les différentes combinaisons de surfaces et les noms de 6 liaisons normalisées :

- contact plan/sphère : liaison ponctuelle ou liaison sphère-plan ;
- contact plan/cylindre : liaison linéaire rectiligne ou liaison cylindre-plan ;
- contact plan/plan : liaison appui plan ;
- contact cylindre/sphère : liaison linéaire annulaire ou liaison sphère-cylindre ;
- contact cylindre/cylindre : liaison pivot glissant ;
- contact sphère/sphère : liaison rotule ou liaison sphérique.



(a) Tournage : rotation de la pièce, translation de l'outil



(b) Fraisage : rotation et translation de l'outil

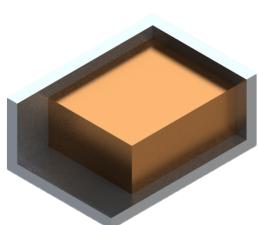
FIGURE 8 – Obtention des surfaces de contact par usinage

	Plan	Cylindre	Sphère
Sphère			
Cylindre			
Plan			

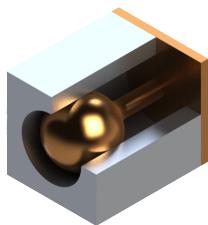
TABLE 2 – Association de surfaces élémentaires

2.4.3 Liaisons composées

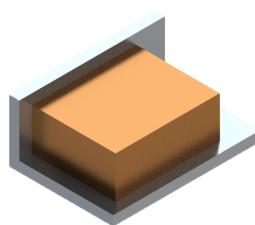
Une liaison composée est obtenue par association cohérente de liaisons élémentaires. Le TABLEAU 3 donne quelques associations possibles.



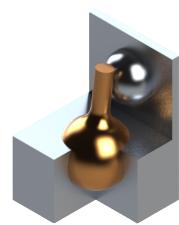
Encastrement



Pivot



Glissière

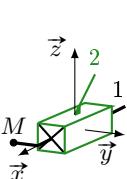
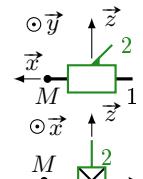
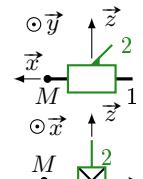
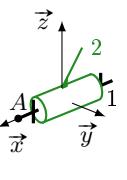
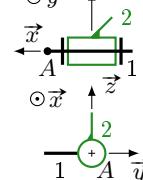
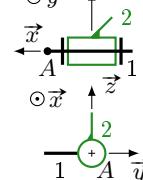
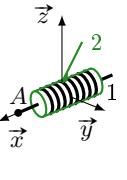
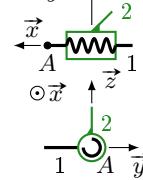
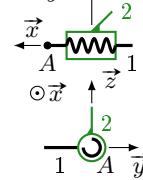
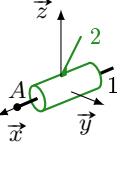
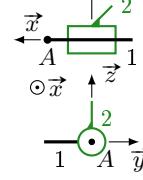
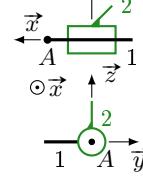
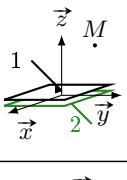
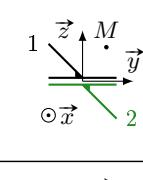
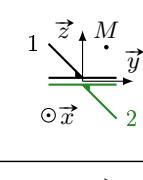
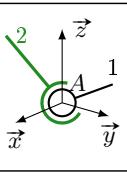
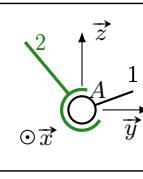
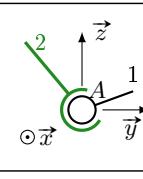


Sphérique à doigt

TABLE 3 – Liaisons composées

2.4.4 Tableau des liaisons normalisées

Les liaisons retenues par l'*AFNOR* sont définies par leurs éléments géométriques. Il est alors aisé d'en déduire les degrés de liberté. L'ensemble est résumé dans le TABLEAU 4 à **connaître par cœur**.

Nom	Caractéristique	Degrés de liberté	Schéma spatial (3D)	Schéma(s) plan(s) (2D)	Mobilités
Encastrement		0 ddl			$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Glissière 	Direction \vec{x}	1 ddl	 		$\begin{bmatrix} 0 & T_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Pivot 	Axe (A, \vec{x})	1 ddl	 		$\begin{bmatrix} R_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Hélicoïdale 	Axe (A, \vec{x})	1 ddl	 		$\begin{bmatrix} R_x & T_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Pivot glissant 	Axe (A, \vec{x})	2 ddl	 		$\begin{bmatrix} R_x & T_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Appui plan 	Normale au plan \vec{z}	3 ddl	 		$\begin{bmatrix} 0 & T_x \\ 0 & T_y \\ R_z & 0 \end{bmatrix}$
Sphérique 	Centre de la sphère A	3 ddl	 		$\begin{bmatrix} R_x & 0 \\ R_y & 0 \\ R_z & 0 \end{bmatrix}$

Nom	Caractéristique	Degrés de liberté	Schéma spatial (3D)	Schéma(s) plan(s) (2D)	Mobilités
Sphère cylindre 	Centre de la sphère A Direction \vec{x}	4 ddl			$\begin{bmatrix} R_x & T_x \\ R_y & 0 \\ R_z & 0 \end{bmatrix}$
Sphère plan 	Point de contact A Normale au plan \vec{z}	5 ddl			$\begin{bmatrix} R_x & T_x \\ R_y & T_y \\ R_z & 0 \end{bmatrix}$
Sphérique à doigt 	Centre de la sphère A Normale au plan \vec{x} Direction du doigt \vec{z}	2 ddl			$\begin{bmatrix} R_x & 0 \\ 0 & 0 \\ R_z & 0 \end{bmatrix}$
Linéaire rectiligne (ou cylindre plan) 	Droite de contact (A, \vec{x}) Normale au plan \vec{z}	4 ddl			$\begin{bmatrix} R_x & T_x \\ 0 & T_y \\ R_z & 0 \end{bmatrix}$

TABLE 4 – Tableau des liaisons normalisées

3 Modélisation cinématique d'un mécanisme

Comme on a pu le voir précédemment, un mécanisme est un ensemble de pièces mécaniques (solides) reliées entre elles par des liaisons.

La définition d'un modèle du mécanisme nécessite la mise en place :

- des classes d'équivalence ou groupes de pièces sans mouvement relatif ;
- des liaisons entre ces classes d'équivalence.

3.1 Classes d'équivalence

3.1.1 Définition



Définition *Classes d'équivalence*

Une **classe d'équivalence cinématique** est un ensemble de pièces **qui n'ont aucun mouvement relatif** entre elles. Elles sont liées complètement entre elles (par des liaisons encastrement) et ont donc le même mouvement.

Afin d'identifier les classes d'équivalence, il faut rechercher les éléments assurant la suppression totale des degrés de liberté entre les pièces. Il peut s'agir par exemple de l'utilisation d'éléments filetés, d'un montage collé ou d'un assemblage monté serré. Dans la suite de cours, seuls les mouvements entre classes d'équivalence seront étudiés.



Remarque

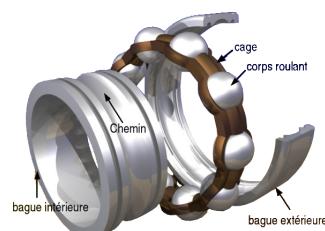
Si les dessins techniques ou des représentations volumiques sont à disposition, il peut être pertinent de colorier chaque classe d'équivalence d'une couleur différente.

3.1.2 Règles à respecter pour la détermination des classes d'équivalence

- les pièces qui se déforment (ressorts, amortisseurs...) ne sont pas prises en compte dans la modélisation des liaisons (FIGURE 9a) ;
- les éléments roulants des roulements (qui constituent chacun un groupe cinématique) ne sont pas pris en compte. On ne s'intéresse qu'aux bagues intérieures et extérieures (voir FIGURE 9b) ;
- on utilise les règles de dessin technique et la méthode de lecture d'un plan pour identifier les classes d'équivalence (le coloriage aide à la visualisation des classes d'équivalence) :
 - ◊ observer les éléments tels que les vis/écrous facilement repérable (FIGURE 10a), clavettes (FIGURE 10b), circlips (FIGURE 10c)... qui regroupent deux pièces et forme une seule classe d'équivalence ;
 - ◊ identifier deux classes d'équivalence différentes séparées par des éléments de guidage (roulements, coussinets ...).

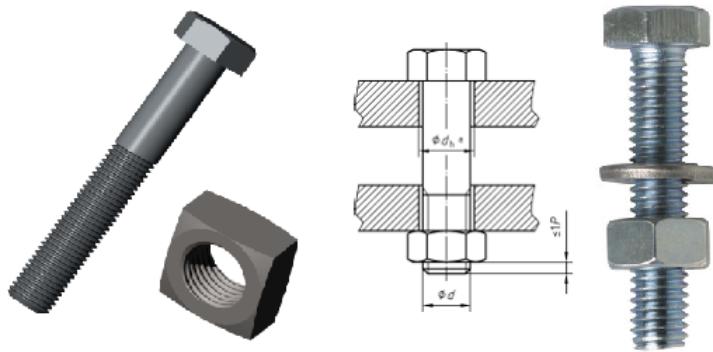


(a) Ressort

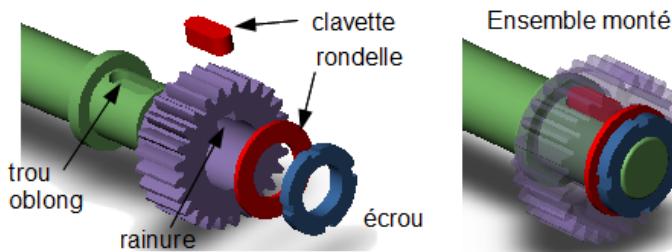


(b) Roulement à billes

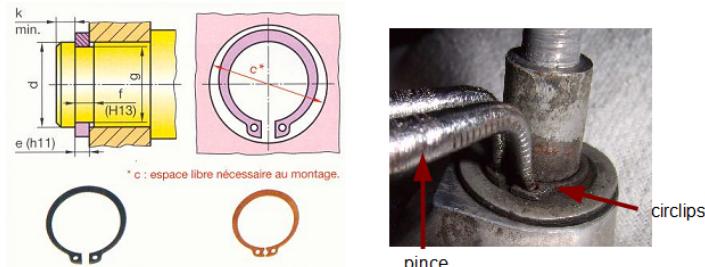
FIGURE 9 – Exemples de composants à ne pas prendre en compte



(a) Assemblage par système vis+écrou



(b) Blocage en rotation par clavette, blocage en translation par écrou à encoche



(c) Blocage en translation par anneau élastique – circlips

FIGURE 10 – Exemples d'assemblages de pièces entre elles (liaison encastrement)

3.2 Graphe de liaisons

3.2.1 Définition



Définition *Graphe de liaisons*

Le graphe de liaisons est une représentation graphique qui répertorie les classes d'équivalence et les modèles de liaisons entre celles-ci (exemple FIGURE 11). Dans ce graphe :

- chaque classe d'équivalence cinématique est représentée par un cercle dans lequel le nom de la classe est indiqué ;
- chaque liaison est indiquée par un arc tracé entre deux classes d'équivalence. Pour chaque liaison, son nom et ses caractéristiques géométriques sont indiqués.

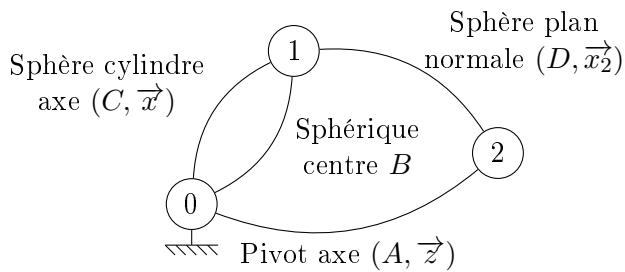


FIGURE 11 – Exemple de graphe de liaisons d'un mécanisme



Attention

- une liaison existe chaque fois que deux classes d'équivalence ont des surfaces directement en contact ;
- on fait toujours l'hypothèse que les liaisons sont géométriquement parfaites ;
- pour les roulements, on adopte une modélisation particulière obtenue en considérant le jeu entre la bague intérieure et extérieure. On associe alors un modèle de liaison entre la bague intérieure et la bague extérieure. En observant la manière dont sont bloquées les bagues intérieures et extérieures, on peut en déduire une liaison entre les deux pièces.

3.2.2 Méthode de construction

Pour établir un graphe de liaisons, il faut :

- déterminer les classes d'équivalence cinématiques (en coloriant les pièces) et dessiner un cercle par classe nommée ;
- rechercher les classes en contact direct ou reliées par des éléments roulants. Faire une liaison dans le graphe des liaisons entre les classes correspondantes ;
- pour chaque contact, déterminer les mouvements autorisés sans changer la nature du contact et en déduire le type de liaison à l'aide du tableau des liaisons normalisées ;
- nommer et caractériser chaque liaison sur le graphe des liaisons.

La construction du graphe de liaisons peut conduire à deux cas particuliers classiques :

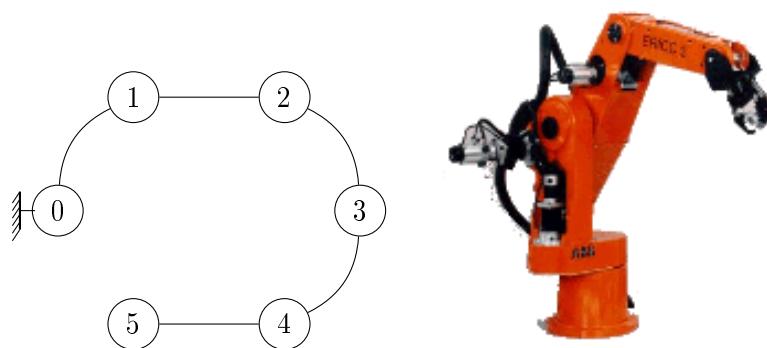
- une **chaîne ouverte** (voir FIGURE 12a) est constituée d'une association en série de solides (ou classes d'équivalence) et de liaisons. Chacune des liaisons est généralement motorisée et l'objectif de l'étude est de relier le mouvement du dernier solide (5) par rapport au bâti (0) en fonction des paramètres des liaisons et des caractéristiques géométriques constantes (les longueurs des pièces et les angles constants) ;
- une **chaîne fermée** (voir FIGURE 12b) est constituée d'un ensemble de solides (ou classes d'équivalence) reliés par de multiples liaisons. Dans le cas d'une chaîne fermée simple, une unique boucle apparaît dans le graphe de liaisons et les paramètres ne sont plus indépendants. Le mécanisme étant motorisé au niveau de certaines liaisons où le mouvement est connu, l'objectif est de déterminer l'évolution des paramètres inconnus associés à une ou plusieurs autres liaisons.

Lorsque le modèle du mécanisme comporte plusieurs boucles, le modèle (ou même le mécanisme par extension) est dit **à chaînes complexes** (voir FIGURE 12c).

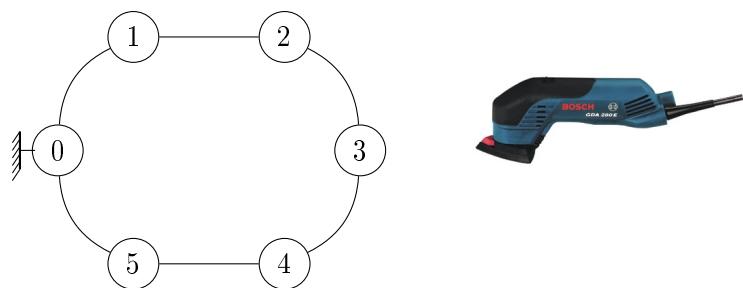


Remarque

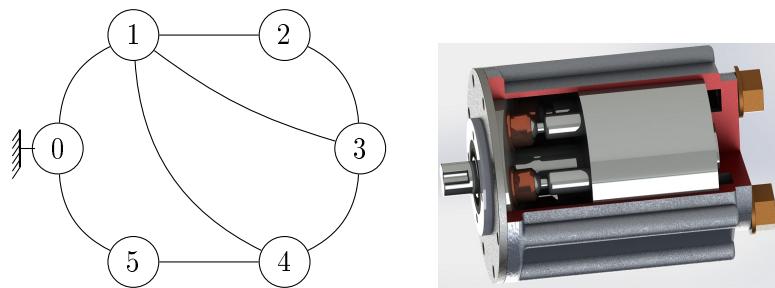
Dans la littérature, la chaîne ouverte est parfois appelée simplement « chaîne » et la chaîne fermée « boucle ». Ces deux termes sont moins classiques que les termes de chaînes ouvertes et fermées.



(a) Chaîne ouverte - exemple d'un robot



(b) Chaîne fermée simple - exemple de la ponceuse



(c) Chaînes complexes - exemple d'une pompe à pistons axiaux

FIGURE 12 – Graphe de liaisons et structure de mécanismes

Application : voir TD1 - Système d'orientation de phare - Q2

4 Représentation d'un modèle : le schéma cinématique

4.1 Description

Le schéma cinématique d'un mécanisme est une figure plane ou spatiale qui permet :

- d'aider à la compréhension du fonctionnement du mécanisme ;
- de mener des études théoriques (géométriques, cinématiques, dynamiques...).

Le schéma cinématique est une représentation du graphe des liaisons au moyen des symboles des liaisons normalisées. Il doit être représentatif du mécanisme réel.

4.2 Méthode de construction

- choisir une représentation adaptée en utilisant les figures ou les vues données (2D : choix d'axes représentatifs ou 3D perspective isométrique en général) ;
- choisir une couleur par classe d'équivalence et mettre ces couleurs sur le graphe des liaisons ;
- mettre en place les points, les axes, les normales... mis en évidence sur le graphe des liaisons en les positionnant comme sur les images données du mécanisme (photo, représentation volumique) ;
- mettre en place les symboles normalisés des liaisons autour de ces points, de ces axes en utilisant les caractéristiques des liaisons pour les déplacer si nécessaire (utiliser obligatoirement les deux couleurs des classes d'équivalence identifiées) ;
- relier les sorties des symboles pour reconstituer les classes d'équivalence (relier les couleurs entre elles) en respectant le parallélisme. Reporter les numéros des classes d'équivalence si besoin sur le schéma. Utiliser le symbole du bâti (pièce fixe) à plusieurs endroits si nécessaire



Remarque

Certaines liaisons peuvent être regroupées en une seule liaison normalisée (on parle de liaisons équivalentes). Dans ces conditions, le schéma cinématique est simplifié, on parle de schéma cinématique minimal. Le graphe des liaisons correspondant est alors dit minimal.

Application : voir TD1 - Système d'orientation de phare - Q3

5 Modélisation plane

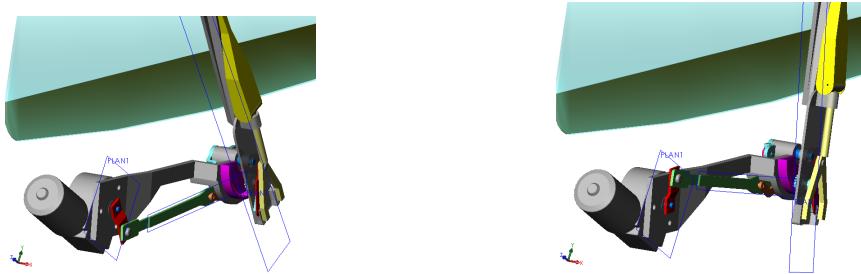
5.1 Définition du mouvement plan



Définition *Mouvement plan*

Le mouvement d'un solide S_2 par rapport à un solide S_1 est dit plan si il existe un plan Π_2 lié à S_2 qui reste coïncident avec un plan Π_1 lié à S_1 au cours du mouvement.

Exemple : essuie-glace Mercedes



Les plans représentés par des cadres sur la figure ci-dessus coïncident entre eux au cours du mouvement.

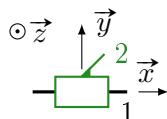
Conséquences : le paramétrage du solide S_2 par rapport au solide S_1 ne nécessite que **3 paramètres** (positionnement d'un point dans un plan ou dans l'espace) :

- 2 translations dans le plan ;
- 1 rotation d'axe perpendiculaire au plan (on parle d'articulation en un point donné dans ces conditions).

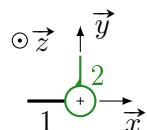
5.2 Modèles de liaisons planes

Dans le cas d'un mouvement plan, compte tenu des mouvements possibles, on distingue :

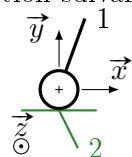
- la liaison glissière qui permet un mouvement de translation (ci-dessous, le symbole dans le plan de la liaison glissière de direction x)



- la liaison pivot qui permet un mouvement de rotation (d'axe perpendiculaire au plan), on parle généralement d'articulation en un point (ci-dessous, le symbole d'une liaison pivot d'axe orthogonal au plan du mouvement)



- la liaison sphère-plan qui permet à la fois un mouvement de translation dans le plan et un mouvement de rotation d'axe perpendiculaire au plan (ci-dessous, le symbole dans le plan d'une liaison sphère-plan permettant une translation suivant l'axe \vec{x}')



Le référentiel est représenté par le symbole ci-après. Le référentiel est aussi appelé bâti

En analysant les mouvements entre les solides qui constituent un mécanisme plan, on peut alors définir un schéma de mouvement à l'aide des symboles précédents.

5.3 Schéma cinématique d'une modélisation plane

En modélisation plane uniquement :

- **on ne schématise pas des modèles de liaison** (on ne tient pas compte de la géométrie des contacts) ;
- on représente les **mouvements relatifs entre deux pièces dans le plan d'étude**.

Le schéma établi est donc un schéma de mouvement. Il utilise les symboles des liaisons préconisés par l'*AFNOR*, non pas comme tels, mais pour définir des mouvements relatifs. C'est là toute l'ambiguïté. Ce subtil distinguo demande beaucoup de vigilance. Il est utilisé pour simplifier les études théoriques.

Application : voir TD1 - Système d'orientation de phare - Q4-Q5-Q6

6 Analyse géométrique d'un mécanisme

6.1 Construction géométrique

En utilisant l'hypothèse de solides indéformables et les degrés de liberté des liaisons, le modèle établi permet de construire le mécanisme dans différentes configurations, ce qui permet de déterminer le débattement angulaire d'une pièce, la course d'un solide en translation...

Application : voir TD1 - Système d'orientation de phare - Q7

6.2 Paramétrage

Pour pouvoir déterminer le mouvement du mécanisme de manière systématique, il est nécessaire de définir un paramétrage qui permettra de mener différentes études.

Paramétrage des solides : à chaque solide, on associe un repère. Il est construit en prenant en compte les caractéristiques géométriques du solide et de ses liaisons avec les autres solides. On définit ensuite les distances entre les points particuliers de chaque solide.

Paramétrage des liaisons : on associe à chaque liaison autant de paramètres que de degrés de liberté. Pour chaque angle introduit, on réalise une figure plane (ou géométrale) qui permettra de mener des calculs justes et précis (cf. Annexe).

Exemples:

- liaison pivot : un paramètre angulaire ;
- liaison glissière : un paramètre de distance (les repères sont les mêmes).

Application : voir TD1 - Système d'orientation de phare - Q8

6.3 Loi entrée-sortie

L'objectif est de déterminer des relations entre les paramètres géométriques des solides et les paramètres des liaisons de manière à comprendre le fonctionnement du mécanisme.

On choisit un paramètre de liaison particulier appelé entrée (c'est généralement le mouvement piloté par un moteur ou un vérin linéaire) et on s'intéresse à un paramètre de liaison donné appelé sortie.





Définition *Loi entrée-sortie*

La loi entrée-sortie est une relation (souvent non linéaire) qui relie le paramètre de sortie au paramètres d'entrée en ne faisant intervenir que les paramètres géométriques de définition des solides (longueur fixe, angle fixe).

Elle est généralement obtenue à partir de la fermeture géométrique, qui se décompose en 2 fermetures selon l'aspect souhaité.

6.3.1 Aspect angulaire

On fait une **fermeture angulaire** (relation de Chasles sur les vecteurs de base, obtenue en parcourant les solides de la chaîne). Il est très rare que cet aspect soit utile.

Application : voir TD1 - Système d'orientation de phare - Q9

6.3.2 Aspect linéaire

On effectue une **fermeture linéaire** appelée aussi fermeture géométrique par abus de langage (relation de Chasles obtenue en passant par les points caractéristiques des différents solides et en parcourant la chaîne fermée).

On projette ensuite la relation vectorielle obtenues dans une base judicieusement choisie de manière à faire apparaître tous les paramètres (on choisit en général une base intermédiaire entre toutes les bases définies pour limiter les projections).

Application : voir TD1 - Système d'orientation de phare - Q10

6.3.3 Méthodologie : obtenir une loi entrée-sortie

- à partir des équations projetées, si on souhaite déterminer une distance variable, on isole les cosinus et sinus des angles qui ne nous intéressent pas, on élève au carré et on utilise la relation de trigo. $\cos^2 + \sin^2 = 1$ ou bien on utilise les relations $\sin(\arccos(\theta)) = \cos(\arcsin(\theta)) = \sqrt{1 - \theta^2}$;
- si on désire une relation entre les angles, on effectue le rapport des équations pour faire apparaître des tangentes ;
- on ne garde que les solutions mathématiques ayant un **sens physique**.

Application : voir TD1 - Système d'orientation de phare - Q11

7 Conclusion

L'étude géométrique est pertinente mais souvent insuffisante pour caractériser un système. En général, les actionneurs (moteurs, pompe...) permettent de définir non pas des distances ou des angles mais plutôt des vitesses. C'est pourquoi il sera nécessaire pour bien caractériser un système mécanique d'étudier sa cinématique ou sa dynamique (cf. chapitre 6).



8 Annexe : vecteurs, projections et produit scalaire

Les théories de la mécanique utilisent des grandeurs qui peuvent mathématiquement être représentées par des vecteurs (vitesse, position, accélération, force...). Ces vecteurs sont des éléments d'espaces vectoriels euclidiens sur \mathbb{R} de dimension 3 noté (E) . Les grandeurs vecteurs sont intrinsèques, elles sont indépendantes de la base dans laquelle elles sont représentées. Ces espaces sont munis d'opérations définies ci-dessous.

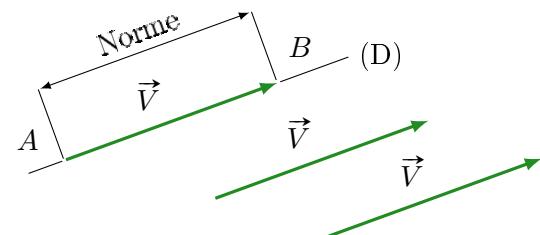
8.1 Définitions

Soient deux points A et B . (A, B) est appelé un bipoint. Un bipoint est défini par son origine A , son sens (de A vers B), sa direction (droite (AB)) et sa norme (distance de A à B).

Un vecteur est l'ensemble des bipoints équipollents (parallèles, même sens, même norme) au bipoint (A, B) .

Pour le vecteur, on définit :

- son support : la droite $(D) = (AB)$
- le sens : de A vers B
- sa norme : la distance de A vers B , notée $\|\vec{V}\|$.



8.2 Repérage des vecteurs

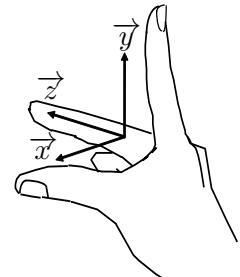
8.2.1 Base

L'association de trois vecteurs indépendants forme une base b de (E) , noté $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Tout vecteur \vec{V} se décompose de manière unique sur cette base :

$$\vec{V} = v_x \cdot \vec{x} + v_y \cdot \vec{y} + v_z \cdot \vec{z}$$

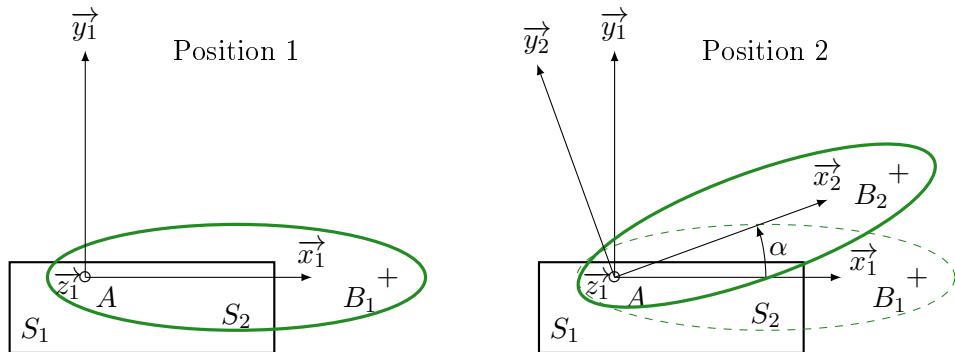
8.2.2 Base orthonormée directe

On utilisera en Sciences de l'Ingénieur des bases orthonormées directes $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, c'est-à-dire des vecteurs orthogonaux, de même norme égale à 1. La base est directe si elle vérifie la « règle de la main droite ».



8.2.3 Expression d'un vecteur dans différents repères

Considérons un système de solides S_1 et S_2 liés par une articulation (pivot) de centre A et d'axe perpendiculaire au plan de la feuille. Considérons le point B appartenant au solide S_2 à une distance L de A . Le solide S_1 est fixe par rapport à la feuille. À l'instant t_1 le système est en position 1, considérons le vecteur $\overrightarrow{AB_1}$, puis à l'instant t_2 le système est en position 2, considérons le vecteur $\overrightarrow{AB_2}$. Pour caractériser ces deux vecteurs nous pouvons les exprimer dans une base (un repère). Le choix de la base est arbitraire, soit $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ base orthonormé définie sur la figure en position 1 ou $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ base orthonormé définie sur la figure en position 2.



Notons L la longueur du segment $[AB]$.

Dans la position 1, on a $\overrightarrow{AB_1} = L \cdot \vec{x}_1$ dans le repère R_1 .

Dans la position 2, on a $\overrightarrow{AB_2} = L \cdot \vec{x}_2$ dans le repère R_2 . Mais aussi $\overrightarrow{AB_2} = L \cos \alpha \cdot \vec{x}_1 + L \sin \alpha \cdot \vec{y}_1$ dans le repère R_1 .

8.3 Produit scalaire

8.3.1 Définition

Le **produit scalaire** de deux vecteurs est **nombre**, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ tel que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ avec la norme du vecteur $\vec{u} : \|\vec{u}\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$ (idem pour \vec{v}).

8.3.2 Propriétés

Commutativité : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Distributivité : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

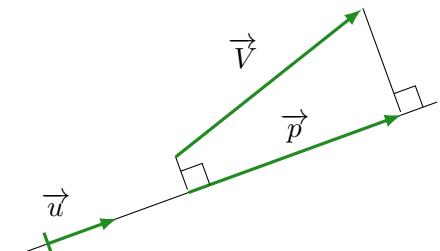
Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ alors $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Si $\vec{u} \parallel \vec{v}$ alors on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \varepsilon \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ avec $\varepsilon = \pm 1$ suivant l'orientation de \vec{u} et \vec{v} .

8.3.3 Expression analytique

Dans une base orthonormée $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, on peut montrer que le produit scalaire entre \vec{u} et \vec{v} est défini par la relation entre les coordonnées :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$



8.3.4 Interprétation géométrique

Soit \vec{p} la projection vectorielle d'un vecteur \vec{V} sur une droite de vecteur directeur \vec{u} (unitaire) alors :

$$\vec{p} = (\vec{V} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{u}$$

8.4 Changement de bases

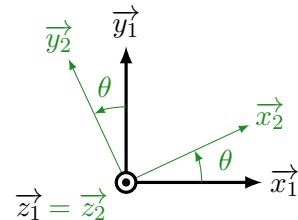
Dans la pratique, la lecture de figure spatiale étant délicate, on se ramène toujours à des figures planes. Dans la plupart des cas, le passage d'une base à une autre est réalisé par **une rotation plane**.

Pour faciliter le calcul des projections, on utilise des figures planes appelées aussi *figures de projection*, *figures de calcul*, *figures de changement de bases* ou *figures géométrales*.



Attention

Ces figures seront toujours réalisées avec des angles positifs proche de 20° , le vecteur commun aux deux bases étant perpendiculaire à la feuille toujours dirigé vers le lecteur de la figure.



Les projections des différents vecteurs sont (à connaître **par cœur** et à savoir retrouver !) :

$$\begin{aligned}\vec{x}_2 &= \cos \theta \cdot \vec{x}_1 + \sin \theta \cdot \vec{y}_1 \\ \vec{x}_1 &= \cos \theta \cdot \vec{x}_2 - \sin \theta \cdot \vec{y}_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{y}_2 &= \cos \theta \cdot \vec{y}_1 - \sin \theta \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 &= \cos \theta \cdot \vec{y}_2 + \sin \theta \cdot \vec{x}_2\end{aligned}$$

Pour éviter toute erreur, il est utile de vérifier ses formules de projection en $\theta = 0$ et $\theta = 90^\circ$.