
Mécanique Générale

Notes de cours pour les élèves de CPGE PTSI

Version 1.0

29 mars 2012

écrit sous L^AT_EX 2_ε

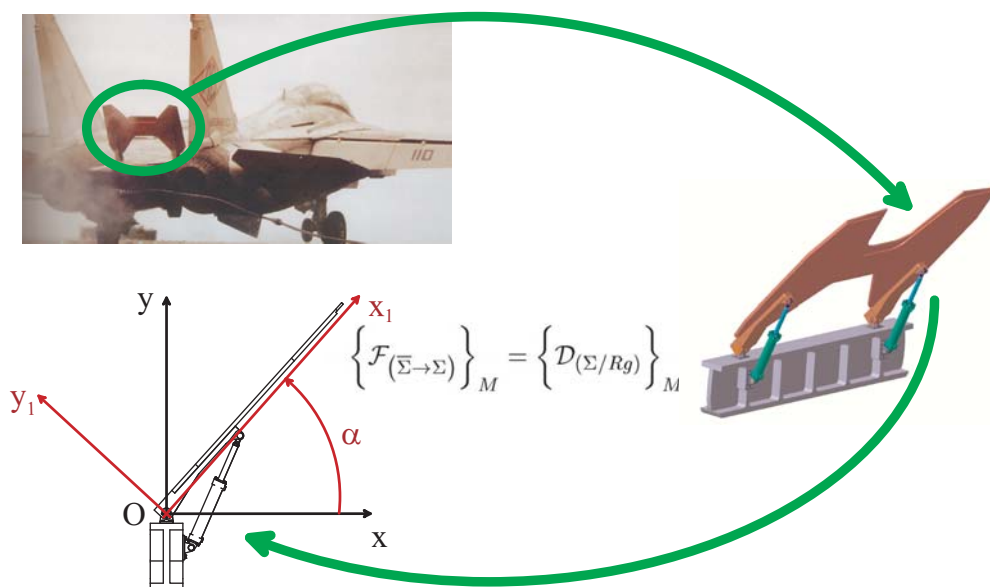


Table des matières

Notations utilisées	ix
Introduction	1
I Mécanique générale	5
1 Caractérisation cinématique d'un système matériel	7
1.1 Introduction	7
1.1.1 Référentiel	7
1.1.2 Quelques définitions... Nous en reparlerons plus tard	8
1.2 Paramétrage	8
1.2.1 Le point matériel	9
1.2.2 Le solide matériel	9
1.2.3 Cas général d'un système matériel	11
1.3 Notion de liaisons	11
1.3.1 Définitions	12
1.3.2 Classification	12
2 Cinématique	13
2.1 Cinématique du point	13
2.1.1 Les référentiels	13
2.1.2 Mouvement et trajectoire	14
2.1.3 Vitesse d'un point matériel	15
2.1.4 Accélération d'un point matériel	16
2.2 Dérivation vectorielle	17
2.2.1 Notion de rotation instantanée ou vecteur taux de rotation	18
2.2.2 Dérivation d'un vecteur, formule de la base mobile	20
2.3 Cinématique du solide	21
2.3.1 Le solide indéformable	21
2.3.2 Vitesse d'un point du solide	23
2.3.3 Équiprojectivité du champ des vitesses d'un solide	23
2.3.4 Torseur cinématique d'un solide	24
2.4 Axe central d'un mouvement ou axe de viriation	24
2.5 Mouvements particuliers	25

2.5.1	Mouvement de translation	26
2.5.2	Mouvement de rotation instantané	26
2.5.3	Exemple	27
2.6	Composition du mouvement	27
2.6.1	Composition des vitesses	30
2.6.2	Composition des vecteurs taux de rotation	31
2.6.3	Composition des torseurs cinématiques	31
2.6.4	Composition des accélérations	31
2.7	Cinématique du contact	32
2.7.1	Vitesse de glissement	33
2.7.2	Notion de roulement sans glissement	34
2.7.3	Notion de roulement et de pivotement	34
2.8	Cinématique graphique	35
2.8.1	Mouvement plan sur plan	35
2.8.2	Axe et centre instantanés de rotation	36
2.8.3	Méthodes de résolution graphique	37
2.9	Base et roulante	41
2.9.1	Base	41
2.9.2	Roulante	41
3	Modélisation cinématique d'un système mécanique	43
3.1	Modélisation d'un solide	44
3.1.1	Solide indéformable	44
3.1.2	Solide localement déformable	44
3.1.3	Solide déformable	44
3.2	Modélisation des liaisons entre solides	44
3.2.1	Degrés de liberté	45
3.2.2	Géométrie des contacts	45
3.2.3	Liaison parfaite	45
3.3	Les liaisons parfaites normalisées	46
3.3.1	Liaisons élémentaires	46
3.3.2	Liaisons composées	50
3.3.3	Associativité des liaisons	52
3.4	Notion de mécanisme	56
3.4.1	Réversibilité/irréversibilité	56
3.5	Classes d'équivalence cinématique	56
3.6	Graphe de structure (graphe de liaison)	58
3.7	Schéma cinématique	58
3.7.1	Schéma cinématique minimal	59
3.7.2	Schéma cinématique fonctionnel	60
3.7.3	Schéma d'architecture	60
3.7.4	Schéma technologique	61
3.8	Cas instructif des guidages en rotation	61
3.9	Torseur des petits déplacements	64
3.10	Chaînes de solides	65

3.10.1	Chaînes de solides ouvertes	65
3.10.2	Chaînes de solides fermées	66
3.10.3	Chaînes de solides complexes	68
3.10.4	Notion d'hyperstatisme	69
4	Modélisation des actions mécaniques	71
4.1	Lois de Newton	71
4.2	Définitions	72
4.2.1	Actions mécaniques	72
4.2.2	Les forces	72
4.2.3	Moment d'une force	72
4.3	Classification des actions mécaniques	74
4.3.1	Actions mécaniques intérieures et extérieures à Σ	74
4.3.2	Actions mécaniques de contact ou à distance	74
4.4	Modélisation d'une action mécanique élémentaire	74
4.4.1	Cas d'une action mécanique à distance	75
4.4.2	Cas d'une action mécanique de contact	77
4.5	Modélisation locale d'un ensemble d'actions mécaniques	77
4.6	Modélisation globale d'un ensemble d'actions mécaniques	78
4.6.1	Ensemble des actions mécaniques exercées sur un système matériel	78
4.6.2	Torseur des actions mécaniques	79
4.6.3	Cas des actions mécaniques élémentaires	80
4.7	Les lois de Coulomb	81
4.7.1	Modélisation locale des actions mécaniques	82
4.7.2	Cas du contact avec frottement	83
4.7.3	Cas du contact avec adhérence	84
4.7.4	Cas du contact parfait	86
4.8	Modélisation globale des actions mécaniques de contact	86
4.8.1	Résistance au pivotement	87
4.8.2	Résistance au roulement	87
4.9	Puissance développée par une action mécanique	87
4.9.1	Puissance développée par une force	87
4.9.2	Puissance développée par un système de forces appliquées en des points invariables d'un solide	89
4.9.3	Puissance développée par les inter-efforts	89
4.10	Torseur des actions transmissibles par les liaisons mécaniques usuelles	90
4.11	Retour sur les associations de liaison	93
5	Statique	97
5.1	Isolement mécanique d'un système	97
5.2	Principe Fondamental de la Statique	98
5.2.1	Notion d'équilibre statique	98
5.2.2	Énoncé du principe	99
5.3	Théorèmes généraux issus du principe fondamental de la statique	100
5.3.1	Théorème de la résultante statique	100
5.3.2	Théorème du moment statique	100

5.4	Exemple de calcul	101
5.5	Théorème des actions réciproques	102
5.6	Notion d'isostatisme et d'hyperstatisme	102
5.7	Statique graphique	103
5.7.1	Hypothèse : problème plan en statique	103
5.7.2	Équilibre d'un système soumis à 2 glisseurs	104
5.7.3	Équilibre d'un système soumis à 3 glisseurs	104
5.8	Arc-boutement	107
5.9	Méthode de résolution d'un problème de statique	108
II	Annexes	109
A	Vecteurs	111
A.1	Notion de bipoint	111
A.1.1	Définition	111
A.1.2	Bipoint équipollent	111
A.2	Notion de vecteur, définition	112
A.3	Base, repère, référentiel...	112
A.3.1	Base	112
A.3.2	Base orthogonale	112
A.3.3	Base orthonormée	112
A.3.4	Base directe	113
A.3.5	Repère	113
A.3.6	Référentiel	114
A.4	Addition vectorielle	114
A.4.1	Définition	114
A.4.2	Expression analytique	114
A.5	Produit scalaire	115
A.5.1	Définition	115
A.5.2	Expression analytique	115
A.5.3	Propriétés	115
A.5.4	Projection d'un vecteur sur une droite ou un axe	115
A.5.5	Changement de base	116
A.6	Produit vectoriel	116
A.6.1	Définition	116
A.6.2	Expression analytique	117
A.6.3	Propriétés	118
A.6.4	Le double produit vectoriel (Formule de Gibbs)	118
A.7	Produit mixte	118
A.7.1	Définition	118
A.7.2	Expression analytique	118
A.7.3	Propriétés	119
A.8	La division vectorielle	119
A.9	Moment d'un glisseur par rapport à un point	120

A.9.1	Passage d'un point A à un point B	120
B	Torseurs	123
B.1	Champ de vecteur	123
B.1.1	Champ équiprojectif	123
B.1.2	Champ antisymétrique	123
B.2	Torseur	124
B.2.1	Définition	124
B.2.2	Notation	125
B.3	Invariants d'un torseur	125
B.4	Opérations sur les torseurs	126
B.5	Éléments centraux d'un torseur	127
B.5.1	Point central	127
B.5.2	Axe central	127
B.5.3	Moment central	127
B.5.4	Description géométrique	128
B.5.5	Pas d'un torseur	128
B.6	Les torseurs couples	128
B.6.1	Définition	129
B.6.2	Propriétés	129
B.7	Les torseurs à résultante (glisseurs)	129
B.7.1	Définition	129
B.7.2	Propriété	129
B.7.3	Somme de glisseurs	129

Notations utilisées

Généralités

$Rg(O, \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g)$	Référentiel supposé galiléen
(O, \vec{x})	Axe défini par le glisseur (O, \vec{x})
$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$	Base orthonormée directe définie par les vecteurs \vec{i} , \vec{j} et \vec{k}
$R_i(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$	Repère d'origine O et défini par la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
Σ	Système matériel
$\overline{\Sigma}$	Extérieur au système matériel Σ
S_i	Solide supposé indéformable S_i
q_i	Paramètre indépendant définissant le système
ψ, θ, φ	Angles d'Euler
$\left[\frac{d\vec{U}}{dt} \right]_{R_i}$	Dérivée du vecteur \vec{U} par rapport au temps t relativement au repère R_i

Cinématique

$\overrightarrow{V_{(P/Rg)}}$	Vitesse du point P dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen Rg
$\overrightarrow{\Omega_{(S_i/R_j)}}$	Vecteur taux de rotation du solide S_i par rapport au repère R_j
$\left\{ \mathcal{V}_{(S/Rg)} \right\}_P$	Torseur cinématique du solide S exprimé au point P dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen Rg
$\overrightarrow{\Gamma_{(P/Rg)}}$	Accélération du point P dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen Rg

$\overrightarrow{Vg_{(I \in S_1/S_2)}}$	Vitesse de glissement en I de S_1 par rapport à S_2
${}_P \left\{ \mathcal{V}_{(S_1/S_2)} \right\}$	Torseur des vitesses relatives de S_1 par rapport à S_2 exprimé au point P
\vec{n}	Axe normal au contact entre deux solides
\vec{t}	Axe compris dans le plan tangent au contact entre deux solides

Actions mécaniques

(M, \vec{F})	Action mécanique \vec{F} appliquée au point M
$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{(P, \vec{F})}$	Moment calculé au point P de l'action mécanique \vec{F}
${}_P \left\{ \mathcal{F}_{(\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma)} \right\}$	Torseur des actions mécaniques extérieures à Σ exprimé au point P
$\overrightarrow{\mathcal{R}}_{(\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma)}$	Résultante des actions mécaniques extérieures à Σ
$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{(P, \overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma)}$	Moment résultant au point P des actions mécaniques extérieures à Σ
${}_M \left\{ \mathcal{F}_{(\Sigma \rightarrow \Sigma)} \right\}$	Torseur des actions mécaniques intérieures à Σ exprimé au point M
${}_P \left\{ \mathcal{F}_{(S_2 \rightarrow S_1)} \right\}$	Torseur des actions mécaniques de S_2 sur S_1 exprimé au point P
$\overrightarrow{R}_{(1 \rightarrow 2)}$	Réaction de contact du solide S_1 sur le solide S_2
$\overrightarrow{T}_{(1 \rightarrow 2)}$	Projection dans le plan tangent au contact de $\overrightarrow{R}_{(1 \rightarrow 2)}$
$\overrightarrow{N}_{(1 \rightarrow 2)}$	Projection suivant la normale au contact de $\overrightarrow{R}_{(1 \rightarrow 2)}$

Introduction

Définition

Mécanique : (latin : *mechanicus*, grec : *mêkhanikos*, de *mêkhanê*, machine) : Étude des mouvements et des lois de l'équilibre. Cette discipline scientifique expérimentale est l'une des plus anciennes théories physiques. La mécanique classique (ou générale) traite des aspects suivants :

- la **statique** (étude des conditions d'équilibre),
- la **cinématique** (description des mouvements, indépendamment des causes qui les provoquent),
- la **cinétique** (prise en compte de la géométrie des masses, mise en place des calculs préalables à la dynamique),
- la **dynamique** (relations entre les mouvements et les causes à l'origine de ceux-ci).

Ainsi, la mécanique classique exige des définitions précises de grandeurs telles que la quantité de mouvement, le temps, la vitesse, l'énergie, l'accélération, la masse ou la force.

Les différents domaines de la mécanique peuvent être abordés suivant trois approches différentes :

- la mécanique newtonienne, avec sa description vectorielle du mouvement,
- la mécanique analytique développée par Lagrange avec une description volontairement plus mathématique,
- la mécanique relativiste.

Un peu d'histoire

Les origines

L'origine de la mécanique se confond avec la naissance de l'intérêt que les hommes portent aux phénomènes naturels, puis aux techniques qu'ils ont élaborées. Dès l'antiquité, la géométrie euclidienne permettait de modéliser et de définir l'espace qui nous entoure, mais cet espace est encore fixe, il manque alors la notion de temps.

La première branche de la mécanique à être étudiée *scientifiquement* est la statique, en effet, c'est la discipline qui fait intervenir les notions les plus simples et surtout qui ne fait pas intervenir le temps. Cette discipline est liée aux travaux d'*Archimède*, qui introduit la notion de centre de gravité, pose les bases de l'équilibre des corps flottants et énonce le principe

du levier. Cette statique des machines simples (poulie, plan incliné, brouette, levier) très appliquée aux problèmes courants se perfectionne au cours du temps mais manque encore de fondement scientifique (la notion de force est encore absente).

La dynamique s'est donné pour objet la description de la cause des mouvements ; les réponses à ce difficile problème ont été marquées par les positions philosophiques des divers intervenants. Jusqu'au Moyen Âge, la mécanique fut essentiellement régie par la pensée d'*Aristote*, selon laquelle un corps ne peut présenter que deux types de mouvements : "naturel" ou "violent".

Le mouvement violent subsiste tant que la cause qui a pour effet de le produire perdure, et cesse dès la disparition de celle-ci. Le mouvement naturel est dirigé vers le lieu naturel des corps : ainsi les corps lourds tombent-ils vers la Terre tandis que les légers montent vers le ciel. Le mouvement naturel des corps célestes, supposés être d'une espèce non matérielle, est un mouvement circulaire autour du centre de l'Univers. La vitesse d'un objet animé d'un mouvement violent est proportionnelle à la force dépensée par le moteur responsable du mouvement, ce principe restera en vigueur jusqu'à l'arrivée de Galilée.

Vers le XIVe siècle, en particulier avec *Jean Buridan*, s'ajoute puis se substitue à ces notions celle d'*impetus*, qualité particulière imprimée à tous les corps en mouvement, elle-même source de mouvement et susceptible de s'accroître (pendant la chute) ou bien de s'affaiblir (lors d'un mouvement vers le haut). Cet *impetus* peut être d'origine naturel (chute des corps) ou violent (poussée sur un corps).

Il faudra alors attendre le XVIIe siècle et les recherches astronomiques de *Copernic*, *Tycho Brahé*, *Kepler* et de *Galilée* pour voir enfin apparaître de nouvelles théories pour expliquer le mouvement des corps.

Les grandes découvertes

L'avènement de la conception galiléenne de l'Univers marque la rupture de la mécanique avec les notions aristotéliennes, rupture particulièrement explicite à travers le principe d'inertie. *Galilée* indique en 1638 que le mouvement d'un corps sur un plan horizontal est uniforme, et *René Descartes* énonce le principe sous sa forme générale en 1644. D'autre part, *Galilée* réussit à démontrer que la vitesse d'un corps en chute libre est indépendante du poids de ce corps, ce qui est en contradiction avec le principe aristotélien de la dynamique.

La formalisation des principes de la mécanique est principalement due à *Sir Isaac Newton*, et publiée dans un des ouvrages les plus fondamentaux de la physique : les *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687), où sont définies les notions de masse, de quantité de mouvement, de forces (motrice, centripète). De même, *Newton* introduit un espace et un temps absolus et énonce les principes fondamentaux de l'inertie, de l'égalité des actions réciproques ainsi que la "relation fondamentale" exprimant l'égalité entre force et dérivée de la quantité de mouvement. Son œuvre, immense, deviendra au XVIIIe siècle la pierre angulaire de toute la mécanique classique.

A partir des *Principia* et durant le XVIIIe et le XIXe siècle, de nombreux savants se sont intéressés à toutes les disciplines de la mécanique, nous pouvons citer entre autres les noms d'*Euler*, de *Bernoulli*, de *Coriolis* (pour sa "force d'inertie" et ces études sur les changements de référentiel), de *Foucault* (pour sa célèbre expérience du pendule et le gyroscope), de *Poinsot* et de *Poisson* (pour leurs études en mécanique des solides).

Nous pouvons noter le développement de la mécanique analytique avec au départ la publication par *Jean d'Alembert* en 1743 d'un ouvrage portant sur l'étude des mouvements, et non sur celle des forces, notion qu'il juge obscure.

Cette discipline trouve son point de départ dans l'élaboration du calcul différentiel et dans l'écriture des principes variationnels développés à la fin du XVIIe siècle en mécanique, et dont le plus célèbre est le principe de moindre action de *Pierre Louis de Maupertuis* (1744).

De façon générale, les principes variationnels postulent que la trajectoire suivie par un corps en mouvement est celle qui rend minimale une certaine quantité caractéristique de ce mouvement, celle-ci étant généralement exprimée sous la forme d'une intégrale.

En 1788, *Lagrange* publie un ouvrage monumental, la Mécanique analytique, qui fonde cette science non plus sur le principe de moindre action mais sur un nouveau principe variationnel, issu de l'association du principe des vitesses virtuelles et de celui de *D'Alembert*. La très grande portée des équations de Lagrange est attestée par la variété des domaines où elles s'appliquent: hydrodynamique, corde vibrante...

Cette méthode sera prolongée par les travaux de *sir William R. Hamilton* (1834), qui introduisent une nouvelle forme dite canonique (forme intrinsèque la plus naturelle et la plus simple) des équations générales des systèmes conservatifs; celles-ci seront étendues et simplifiées par *Carl Jacobi* (1842). Ce formalisme sera à la base des travaux de physiciens tels que *Louis de Broglie*, qui ouvriront la voie à la mécanique quantique.

La remise en cause de la relativité

Lorsque la vitesse des corps est proche de celle de la lumière, les équations de la mécanique classique ne sont plus valables. Il faut alors appliquer les lois de la mécanique relativiste. La différence fondamentale entre ces deux théories réside dans la définition du temps. En mécanique classique, le temps est un paramètre identique pour chaque observateur; alors que dans la théorie de la relativité, le temps est une variable au même titre que les coordonnées d'espace et il ne s'écoule pas de la même manière pour tous les observateurs. Le postulat fondamental de la relativité, énoncé par *Albert Einstein* en 1905, stipule que la vitesse de la lumière est une constante fondamentale de l'Univers: elle ne dépend pas de l'observateur ni de la vitesse à laquelle celui-ci se déplace. La vitesse de la lumière constitue une limite infranchissable.

Les lois de la mécanique classique sont également mises en défaut lorsque l'on cherche à les appliquer à des systèmes dont l'action est de l'ordre de (ou inférieure à) la constante de Planck ($h = 6,63 \cdot 10^{-34} J.s$). On entre ici dans le domaine de la mécanique quantique. Un système physique est décrit en mécanique quantique par une fonction mathématique dite fonction d'onde, dont les variables sont les coordonnées et le temps, et qui contient toute l'information nécessaire à sa description: toutes les caractéristiques physiques du système (vitesse, énergie, moment magnétique) peuvent en être déduites.

Quelques noms et dates

Ce tableau n'est pas exhaustif et permet uniquement de mieux situer dans le temps quelques un des grands physiciens qui ont fait évoluer la mécanique jusqu'à nos jours.

Nom	Année de naissance	Année de décès
Archimède	-287	-212
Jean Buridan	1300	1358
Léonard de Vinci	1451	1519
Nicolas Copernic	1473	1543
Tycho Brahé	1546	1601
Galilée	1564	1642
Johannes Kepler	1571	1630
René Descartes	1596	1650
Blaise Pascal	1623	1662
Christian Huygens	1629	1695
Robert Hooke	1635	1703
Isaac Newton	1642	1727
Jacques Bernoulli	1654	1705
Jean Bernoulli	1667	1748
Daniel Bernoulli	1700	1782
Léonhard Euler	1707	1783
Jean Le Rond D'Alembert	1717	1783
Charles Augustin Coulomb	1736	1806
Joseph-Louis Lagrange	1736	1813
Jean-Baptiste Venturi	1746	1822
Louis Poincot	1777	1859
Siméon Denis Poisson	1781	1840
Gaspard Gustave de Coriolis	1792	1843
Charles Gustave Jacobi	1804	1851
Sir William Rowan Hamilton	1805	1865
Jean Bernard Léon Foucault	1819	1868
John William Strutt, Lord Rayleigh	1842	1919
Henri Poincaré	1854	1912
Albert Einstein	1879	1955

Première partie

Mécanique générale

Chapitre 1

Caractérisation cinématique d'un système matériel

Le but de ce chapitre est de donner les bases fondamentales permettant de décrire un système mécanique, de le modéliser dans le but d'étudier son mouvement en utilisant les *Lois Fondamentales de la Dynamique* énoncées par *Sir Isaac Newton* en 1687.

1.1 Introduction

1.1.1 Référentiel

Afin de mener à bien une étude de mécanique générale sur un point matériel ou sur un système matériel, nous devons nous fixer un système de référence nommé *référentiel*, il nous permettra de connaître à tout instant la position précise de chacun des points du système étudié. Ce référentiel se compose :

- d'un repère d'espace (3 dimensions), défini par un point et une base vectorielle $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$,
- d'un repère de temps (1 dimension), défini par une unité de temps et un instant initial.

Le repère d'espace utilisé par convention en mécanique générale est lié à une base :

- orthogonale, $\vec{x} \perp \vec{y}$, $\vec{y} \perp \vec{z}$, $\vec{z} \perp \vec{x}$,
- normée, $||\vec{x}|| = ||\vec{y}|| = ||\vec{z}|| = 1$,
- directe, $\vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{z}$.

Le plus souvent, le référentiel utilisé sera qualifié de *galiléen* ou d'*absolu* et noté R_g . Cette notion de référentiel galiléen étant défini par la première loi de Newton (CHAP. 4, p. 71). Cette notion de référentiel absolu est délicate à obtenir avec des références physiques liées à la Terre, toute la difficulté pour nous consiste à trouver un référentiel "*suffisamment galiléen*" pour l'étude à mener. Par exemple, les référentiels géocentrique et de laboratoire ne sont pas galiléens, les expériences du Pendule de Foucault au panthéon (1852 - déplacement du plan de l'oscillation) et de déviation vers l'est d'un corps en chute libre (1851 - puits de mine de 158 m : déviation de 2,75 cm vers l'est due à Coriolis) montrent que ces référentiels ne sont pas galiléens.

D'autre part, les connaissances actuelles sur l'expansion de l'univers dû au Big-bang tendent à prouver que même le repère de Copernic n'est pas rigoureusement Galiléen.

Malgré tout, ces trois repères restent de bonnes approximations du référentiel galiléen.

Type de référentiel	Origine	Axes
<i>Référentiel de Copernic</i>	Centre du soleil	3 étoiles fixes
<i>Référentiel de Foucault</i>	Centre de la terre	3 étoiles fixes
<i>Référentiel de laboratoire</i>	Liée à la surface de la Terre	Fixes par rapport à la Terre

Ces différents référentiels sont habituellement utilisés pour mener des études de mécanique générale.

REMARQUE 1 *Tout référentiel animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est également galiléen.*

1.1.2 Quelques définitions... Nous en reparlerons plus tard

1.1.2.1 Point matériel

On appelle point matériel tout point de l'espace affecté d'une mesure de masse constante.

1.1.2.2 Solide indéformable

Un solide indéformable est un ensemble de points matériels M dont la distance entre deux points quelconque reste invariante dans le temps, et ce quels que soient les actions mécaniques appliquées. On utilisera cette notion tout au long du module de mécanique générale.

1.1.2.3 Solide matériel

Un solide matériel est, par définition, un solide indéformable auquel on attache une mesure de masse constante.

1.1.2.4 Système matériel

On appelle système matériel tout ensemble de matière, homogène ou non, de masse constante au cours du temps. Ce système matériel peut être composé de solides indéformables mais aussi de fluides (gaz éjectés par un lanceur ou un avion, systèmes hydrauliques). Ce système est défini par sa frontière (surface extérieure du système).

1.2 Paramétrage

Nous allons, dans cette partie, établir comment choisir les paramètres à utiliser pour caractériser un système mécanique. Pour cela, nous allons partir du cas le plus simple (le point matériel) pour ensuite pouvoir généraliser à un système matériel.

1.2.1 Le point matériel

Afin de définir parfaitement la position d'un point matériel M dans un référentiel galiléen R_g , nous avons besoin de trois paramètres.

Ces trois paramètres qui peuvent être soit des angles, soit des distances sont couramment appelés les coordonnées du point.

Ces coordonnées peuvent être :

- cartésiennes (x, y, z) ,
- cylindriques (r, θ, z) ,
- sphériques (ρ, θ, φ) .

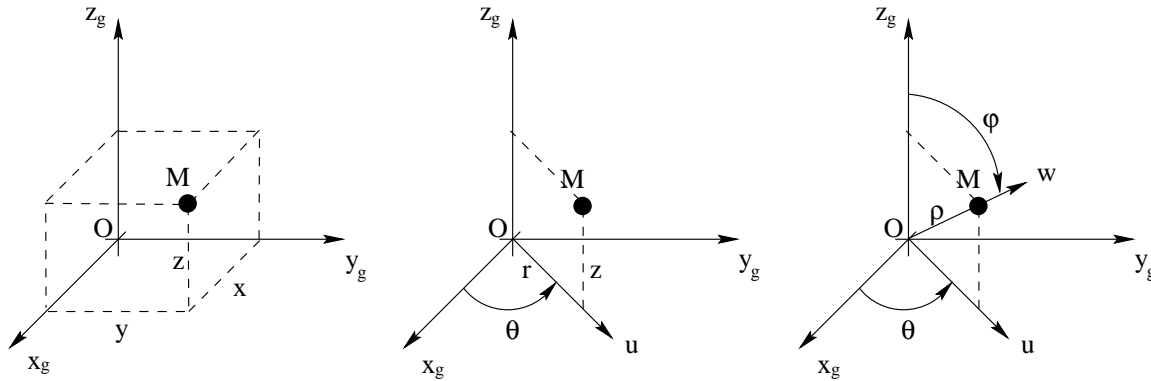


FIG. 1.1 – Différentes coordonnées permettant de définir la position d'un point

Ce paramétrage est intéressant dans le cas d'un point matériel, mais il est inadapté à la définition d'un solide matériel. Nous allons essayer de mettre en place la notion plus féconde de paramètres ou coordonnées généralisées.

1.2.2 Le solide matériel

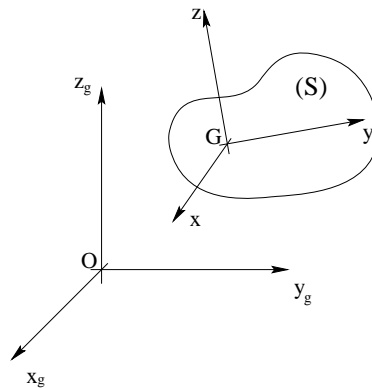


FIG. 1.2 – Cas du solide matériel

Le mouvement d'un solide par rapport à un référentiel est parfaitement connu si on connaît le mouvement d'un repère lié à ce solide. Il nous faut donc connaître à chaque

instant la position d'un point du solide (origine du repère : 3 paramètres) et l'orientation du solide autour de ce point (on parlera d'attitude : 3 paramètres).

Il faut donc un maximum de 6 paramètres pour définir totalement la position d'un solide dans l'espace.

1.2.2.1 Les angles d'Euler

Soit $Rg(O, \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g)$, un référentiel supposé galiléen.

Nous allons étudier le cas d'un solide S admettant un point fixe O dans le référentiel galiléen Rg (cas du montage gyroscopique).

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, un repère lié au solide S .

La position du solide S par rapport au référentiel Rg dépend de 3 paramètres uniquement (orientation du solide S autour du point O).

En effet, contrairement à un solide libre dans l'espace, la position d'un des points du solide (en l'occurrence O) est parfaitement connue.

Pour définir cette orientation de S autour de O , nous pouvons utiliser différents systèmes d'angles, un système couramment utilisé est celui des *angles aéronautiques* (roulis, tangage et lacet), très utiles pour la mécanique du vol, un peu moins en mécanique générale. Dans notre cas, nous utiliserons les angles d'Euler : ψ , θ et φ .

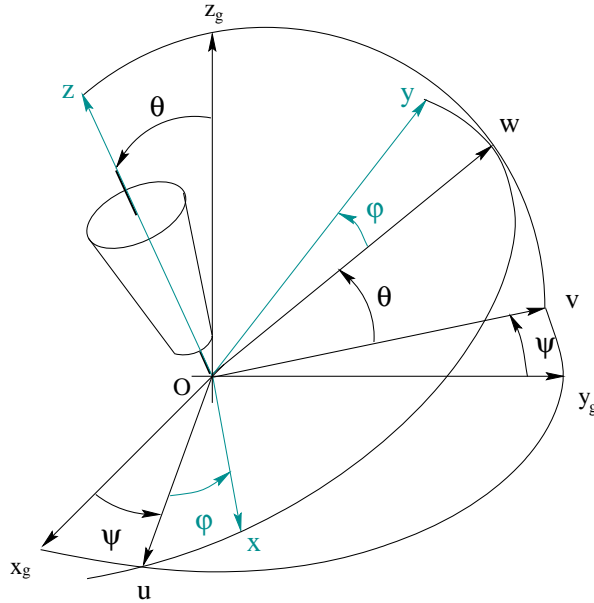


FIG. 1.3 – Définition des angles d'euler

Nous allons définir ces paramètres en utilisant des systèmes d'axes intermédiaires. Soit (O, \vec{u}) , l'intersection entre les plans $(\vec{x}_g, O, \vec{y}_g)$ et (\vec{x}, O, \vec{y}) , appelé *ligne des nœuds* (nous retrouverons cette notion en mécanique spatiale).

- $\psi = \widehat{(\vec{x}_g, \vec{u})}$ est l'angle de *précession* mesuré autour de \vec{z}_g ,

- $\theta = \widehat{(\vec{z}_g, \vec{z})}$ est l'angle de *nutation* mesuré autour de \vec{u} ,
- $\varphi = \widehat{(\vec{u}, \vec{x})}$ est l'angle de *rotation propre* mesuré autour de \vec{z} .

$$\overrightarrow{\Omega_{(S/Rg)}} = \dot{\psi} \cdot \vec{z}_g + \dot{\theta} \cdot \vec{u} + \dot{\varphi} \cdot \vec{z} \quad (1.1)$$

Ce vecteur taux de rotation n'est pas utilisable directement pour des calculs de mécanique, il faut le projeter dans une des différentes bases que nous avons à notre disposition.

1. Projection dans la base associée à Rg

$$\overrightarrow{\Omega_{(S/Rg)/Rg}} = \begin{cases} \left(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi \right) \cdot \vec{x}_g \\ \left(\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi \right) \cdot \vec{y}_g \\ \left(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \right) \cdot \vec{z}_g \end{cases}$$

2. Projection dans la base associée à R

$$\overrightarrow{\Omega_{(S/Rg)/R}} = \begin{cases} \left(\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi \right) \cdot \vec{x} \\ \left(-\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi \right) \cdot \vec{y} \\ \left(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \right) \cdot \vec{z} \end{cases}$$

3. Projection dans la base intermédiaire de Resal $(O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$

$$\overrightarrow{\Omega_{(S/Rg)/Resal}} = \begin{cases} \dot{\theta} \cdot \vec{u} \\ \dot{\psi} \sin \theta \cdot \vec{w} \\ \left(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \right) \cdot \vec{z} \end{cases}$$

1.2.3 Cas général d'un système matériel

Soit un système Σ composé de s solides et de q points matériels, alors, il faut un maximum de N paramètres pour définir totalement le mouvement du système.

$$N = 6 \cdot s + 3 \cdot q \quad (1.2)$$

1.3 Notion de liaisons

Dans la pratique, le mouvement d'un solide est souvent limité d'une manière ou d'une autre. En effet, un système mécanique est basé sur un ensemble de solides reliés entre eux de telle sorte que seulement quelques mouvements soient encore réalisables.

Par exemple, un solide indéformable est un système matériel composé d'une infinité de points matériels reliés entre eux par la condition suivante : la distance entre deux points du solide indéformable reste constante au cours du temps.

1.3.1 Définitions

Une liaison correspond à une limitation, une restriction ou une condition sur les mouvements du système (limitation en vitesse ou en position).

Les liaisons permettent d'ôter des degrés de libertés à un système matériel.

Elles se définissent mathématiquement par des relations (équations ou inéquations) reliant les paramètres primitifs du système.

1.3.2 Classification

1.3.2.1 Dissipative

Une liaison est dite dissipative si lors du mouvement relatif des solides participant à cette liaison, de l'énergie est dissipée, soit par frottements secs, soit par frottements visqueux.

1.3.2.2 Conservative

Par opposition, une liaison conservative est une liaison ne dissipant aucune énergie (pas de frottement). Nous nommerons liaison mécanique parfaite toute liaison conservative.

D'une manière plus technologique, nous pouvons dire qu'une liaison parfaite entre deux solides est caractérisée par :

- des surfaces de contact géométriquement parfaites et indéformables,
- des contacts sans résistance passive.

REMARQUE 2 *La liaison mécanique parfaite est un modèle purement théorique, elle ne correspond pas à la réalité des montages mécaniques réels. Malgré cela, nous utiliserons assez régulièrement ce type de modélisation pour sa simplicité.*

Chapitre 2

Cinématique

La cinématique correspond à l'étude des mouvements de systèmes matériels indépendamment des causes créant ces mouvements. Le but de cette science est de déterminer la position présente de systèmes et d'en déduire la position future. Il faut pour cela pouvoir en connaître la vitesse et l'accélération à tout instant. Nous allons donc étudier les notions de vitesse et d'accélération de points. La position d'un point n'étant connue que relativement à un repère, notre premier souci sera de définir totalement un système de référence permettant de paramétrer parfaitement la position de tout point à tout instant.

2.1 Cinématique du point

2.1.1 Les référentiels

2.1.1.1 Définition

Nous avons vu précédemment (CHAP. 1, p. 7) que l'ensemble d'un repère d'espace (à 3 dimensions) et d'un repère de temps constitue un référentiel.

Ce référentiel, comme son nom l'indique sera notre référence temporelle et d'espace pour tous les calculs de cinématique que nous allons mener. Nous choisirons dans la majorité des cas d'utiliser un référentiel qualifié de galiléen. Nous verrons en deuxième année lors du cours de dynamique tout l'intérêt de ce type de référentiel absolu.

2.1.1.2 Repère

Le repère choisi est toujours orthonormé direct par convention en mécanique. Un repère est constitué :

- d'un point d'origine O ,
- d'une base orthonormée directe $(\vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g)$.

La position d'un point M est définie par ses coordonnées (cartésiennes, cylindriques, ou sphériques). On appelle alors \overrightarrow{OM} rayon vecteur du point M ou vecteur position du point M dans le repère $(O, \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g)$.

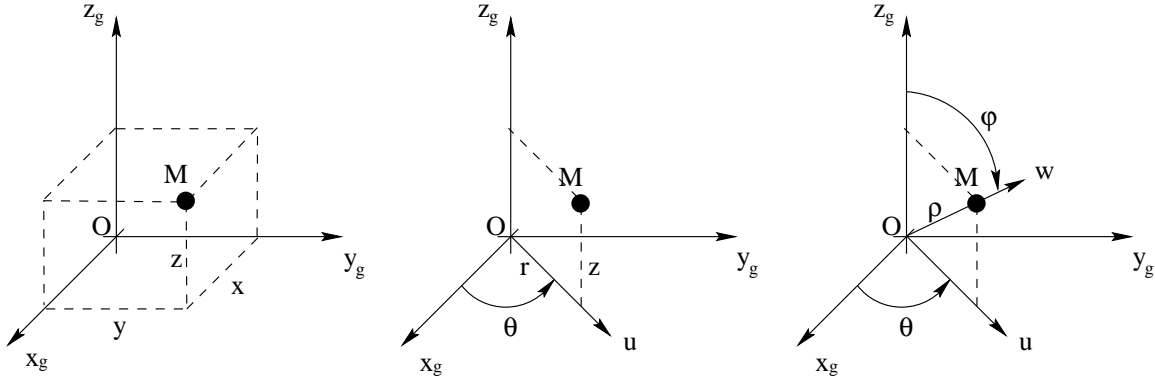


FIG. 2.1 – Coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OM} &= x \cdot \vec{x}_g + y \cdot \vec{y}_g + z \cdot \vec{z}_g & \overrightarrow{OM} &= r \cdot \vec{u} + z \cdot \vec{z}_g & \overrightarrow{OM} &= \rho \cdot \vec{w} \\
 \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} & & \begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \theta \\ z \end{cases} & & \begin{cases} x = \rho \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi \\ y = \rho \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ z = \rho \cdot \cos \varphi \end{cases} & (2.1)
 \end{aligned}$$

2.1.2 Mouvement et trajectoire

2.1.2.1 Définition mathématique du mouvement

On appelle mouvement de M toute application de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ deux fois dérivable à dérivée seconde continue qui à une variable t fait correspondre un point M de l'espace \mathbb{R}^3 rapporté au repère $Rg(O, \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g)$:

$$t \longrightarrow \overrightarrow{OM}(t)$$

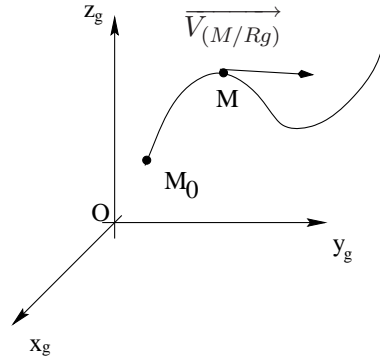


FIG. 2.2 – Mouvement d'un point matériel

Les coordonnées de M sont :

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{x}_g + y \cdot \vec{y}_g + z \cdot \vec{z}_g = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}_{Rg}$$

2.1.2.2 Trajectoire

On appelle trajectoire de M le lieu des positions successives occupées par le point M dans le repère R_g lorsque le temps t varie.

REMARQUE 3 Cette trajectoire est donc directement liée à l'ensemble des positions prises par le vecteur position \overrightarrow{OM} au cours du temps. Elle dépend donc du repère utilisé !

2.1.3 Vitesse d'un point matériel

2.1.3.1 Définition

La variation de position d'un point M dans un référentiel R entre deux instants est caractérisée par la vitesse de ce point M . Le vecteur vitesse est défini mathématiquement comme étant la dérivée par rapport au temps du vecteur position de M .

$$\overrightarrow{V_{(M/R_g)}} = \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right]_{R_g} \quad (2.2)$$

Le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire du point M à l'instant considéré.

REMARQUE 4 Il existe une différence entre calculer une vitesse par rapport à un repère et exprimer une vitesse dans la base liée à un repère.

2.1.3.2 Notations - Unités

On note indifféremment :

$$\overrightarrow{V_{(M \in S/R_g)}} = \overrightarrow{V_{R_g(M \in S)}}$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le solide d'appartenance, on peut simplifier l'écriture :

$$\overrightarrow{V_{(M/R_g)}} = \overrightarrow{V_{R_g(M)}}$$

Unité S.I. : $m.s^{-1}$

Unités usuelles : km/h , nœud.

2.1.3.3 Composantes de la vitesse

On se base dans un référentiel supposé galiléen $R_g(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, on peut alors utiliser différents types de coordonnées pour définir les composantes de la vitesse d'un point matériel.

En coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= x \cdot \vec{x}_g + y \cdot \vec{y}_g + z \cdot \vec{z}_g \\ \Rightarrow \overrightarrow{V_{(M/R_g)}} &= \frac{dx}{dt} \cdot \vec{x}_g + x \cdot \frac{d\vec{x}_g}{dt} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{y}_g + y \cdot \frac{d\vec{y}_g}{dt} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{z}_g + z \cdot \frac{d\vec{z}_g}{dt} \end{aligned}$$

or $\frac{d\vec{x}_g}{dt} = \frac{d\vec{y}_g}{dt} = \frac{d\vec{z}_g}{dt} = \vec{0}$ car les vecteurs \vec{x}_g , \vec{y}_g et \vec{z}_g sont des vecteurs unitaires fixes dans R_g , ils sont donc indépendant de t .

$$\Rightarrow \overrightarrow{V_{(M/R_g)}} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{x}_g + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{y}_g + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{z}_g = \dot{x} \cdot \vec{x}_g + \dot{y} \cdot \vec{y}_g + \dot{z} \cdot \vec{z}_g$$

Le sigle \dot{x} désigne la dérivation par rapport au temps d'une variable en mécanique générale.

En coordonnées polaires

$$\overrightarrow{OM} = r \cdot \vec{u}$$

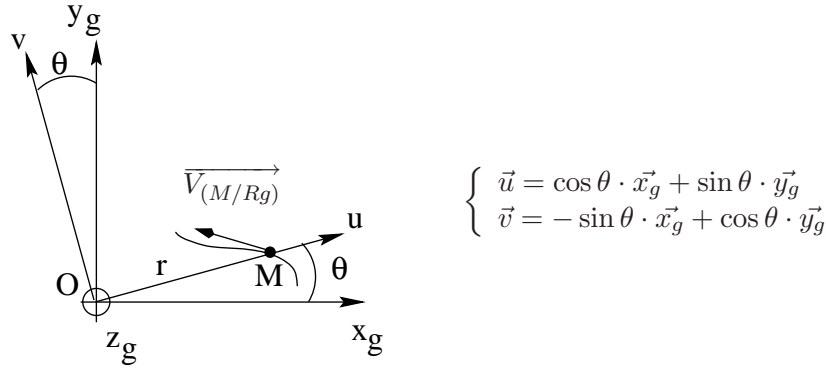


FIG. 2.3 – Coordonnées polaires

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\vec{u}}{dt} \right]_{R_g} &= -\dot{\theta} \sin \theta \cdot \vec{x}_g + \dot{\theta} \cos \theta \cdot \vec{y}_g = \dot{\theta} \cdot \vec{v} \\ \Rightarrow \left[\frac{d\vec{u}}{dt} \right]_{R_g} &= \dot{\theta} \cdot \vec{v} \quad \text{et} \quad \left[\frac{d\vec{v}}{dt} \right]_{R_g} = -\dot{\theta} \cdot \vec{u} \\ \Rightarrow \overrightarrow{V_{(M/R_g)}} &= \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right]_{R_g} = \dot{r} \cdot \vec{u} + r \cdot \left[\frac{d\vec{u}}{dt} \right]_{R_g} = \dot{r} \cdot \vec{u} + r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

2.1.4 Accélération d'un point matériel

2.1.4.1 Définition

La variation du vecteur vitesse d'un point M entre deux instants est caractérisée par le vecteur accélération.

Ce vecteur accélération est défini par la relation suivante :

$$\overrightarrow{\Gamma_{(M/R_g)}} = \left[\frac{d\overrightarrow{V_{(M/R_g)}}}{dt} \right]_{R_g} \quad (2.3)$$

2.1.4.2 Notations - Unités

On note indifféremment :

$$\overrightarrow{\Gamma_{(M \in S/R_g)}} = \overrightarrow{\Gamma_{R_g(M \in S)}}$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le solide d'appartenance, on peut simplifier l'écriture :

$$\overrightarrow{\Gamma_{(M/R_g)}} = \overrightarrow{\Gamma_{R_g(M)}}$$

Unité S.I. : $m.s^{-2}$

2.1.4.3 Composantes de l'accélération

En coordonnées cartésiennes Le raisonnement est identique à celui utilisé pour calculer la vitesse :

$$\overrightarrow{\Gamma_{(M/R_g)}} = \left[\frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \right]_{R_g} = \ddot{x} \cdot \vec{x} + \ddot{y} \cdot \vec{y} + \ddot{z} \cdot \vec{z}$$

En coordonnées polaires planes Nous repartons de l'expression de la vitesse que nous avons calculée au paragraphe précédent :

$$\overrightarrow{V_{(M/R_g)}} = \dot{r} \cdot \vec{u} + r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{v}$$

Il nous suffit donc de dériver :

$$\overrightarrow{\Gamma_{(M/R_g)}} = \left[\frac{d\overrightarrow{V_{(M/R_g)}}}{dt} \right]_{R_g} = \ddot{r} \cdot \vec{u} + 2\dot{r}\dot{\theta} \cdot \vec{v} + r\ddot{\theta} \cdot \vec{v} - r\dot{\theta}^2 \cdot \vec{u}$$

On trouve donc la valeur de l'accélération d'un point matérielle en coordonnées polaires planes :

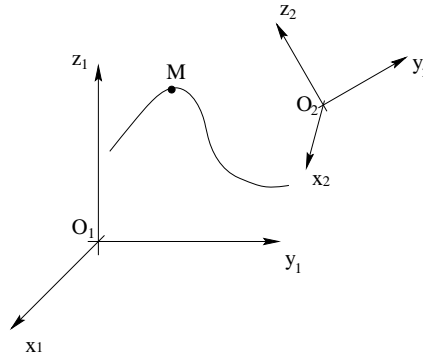
$$\overrightarrow{\Gamma_{(M/R_g)}} = \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)}_{\text{accélération radiale}} \cdot \vec{u} + \underbrace{(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})}_{\text{accélération orthoradiale}} \cdot \vec{v} \quad (2.4)$$

2.2 Dérivation vectorielle

Dans la partie précédente, nous avons décrit le mouvement d'un point M par rapport à un référentiel R_g en introduisant divers vecteurs :

- position,
- vitesse,
- accélération.

Considérons deux repères R_1 et R_2 en mouvement l'un par rapport à l'autre. Existe-t-il des relations qui nous permettent de passer des caractéristiques cinématiques d'un point M par rapport au repère R_2 aux caractéristiques cinématiques de ce même point M par rapport au repère R_1 ?



Il existe une relation simple pour ce qui est des vecteurs positions : la relation de Chasles.

$$\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2M} \quad (2.5)$$

Pour ce qui est des vitesses et des accélérations, des nouvelles relations vont intervenir. Nous allons les introduire un peu plus tard grâce aux relations de ce paragraphe.

Essayons de déterminer une relation de composition de vitesse en partant de la relation précédente (Éq. 2.5, p. 18).

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{(M/R_1)}} &= \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right]_{R_1} = \left[\frac{d(\overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2M})}{dt} \right]_{R_1} \\ \overrightarrow{V_{(M/R_1)}} &= \left[\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt} \right]_{R_1} + \left[\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt} \right]_{R_1} = \overrightarrow{V_{(O_2/R_1)}} + \left[\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt} \right]_{R_1} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Nous nous retrouvons confrontés à un problème, le calcul de la dérivée d'un vecteur mobile dans un repère. Pour cela, nous devons introduire plusieurs notions qui seront très utiles par la suite :

- le vecteur taux de rotation ou rotation instantanée,
- la formule de la base mobile.

2.2.1 Notion de rotation instantanée ou vecteur taux de rotation

2.2.1.1 Introduction et définition

Le repère $R_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est orthonormé direct donc par définition :

$$\begin{cases} \|\vec{x}_2\| = 1 \\ \|\vec{y}_2\| = 1 \\ \|\vec{z}_2\| = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{x}_2^2 = 1 \Rightarrow \vec{x}_2 \cdot \frac{d\vec{x}_2}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{x}_2}{dt} = \gamma \cdot \vec{y}_2 + \delta \cdot \vec{z}_2 \\ \vec{y}_2^2 = 1 \Rightarrow \vec{y}_2 \cdot \frac{d\vec{y}_2}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{y}_2}{dt} = \sigma \cdot \vec{x}_2 + \alpha \cdot \vec{z}_2 \\ \vec{z}_2^2 = 1 \Rightarrow \vec{z}_2 \cdot \frac{d\vec{z}_2}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{z}_2}{dt} = \xi \cdot \vec{y}_2 + \beta \cdot \vec{x}_2 \end{cases}$$

De plus, en utilisant les résultats précédents et à nouveau le fait que le repère soit

orthonormé, on trouve :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{y}_2 \cdot \vec{z}_2 = 0 \\ \vec{x}_2 \cdot \vec{z}_2 = 0 \\ \vec{x}_2 \cdot \vec{y}_2 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \vec{y}_2 \cdot \frac{d\vec{z}_2}{dt} + \vec{z}_2 \cdot \frac{d\vec{y}_2}{dt} = 0 \Rightarrow \xi = -\alpha \\ \vec{x}_2 \cdot \frac{d\vec{z}_2}{dt} + \vec{z}_2 \cdot \frac{d\vec{x}_2}{dt} = 0 \Rightarrow \delta = -\beta \\ \vec{x}_2 \cdot \frac{d\vec{y}_2}{dt} + \vec{y}_2 \cdot \frac{d\vec{x}_2}{dt} = 0 \Rightarrow \sigma = -\gamma \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \left[\frac{d\vec{x}_2}{dt} \right]_{R_1} = \gamma \cdot \vec{y}_2 - \beta \cdot \vec{z}_2 \\ \left[\frac{d\vec{y}_2}{dt} \right]_{R_1} = \alpha \cdot \vec{z}_2 - \gamma \cdot \vec{x}_2 \\ \left[\frac{d\vec{z}_2}{dt} \right]_{R_1} = \beta \cdot \vec{x}_2 - \alpha \cdot \vec{y}_2 \end{cases} \end{aligned}$$

On introduit alors le vecteur noté $\overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}}$ de composantes (α, β, γ) dans R_2 .

DÉFINITION 1 On note $\overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}}$, le vecteur taux de rotation ou rotation instantanée du repère R_2 par rapport à R_1 tel que :

$$\begin{cases} \left[\frac{d\vec{x}_2}{dt} \right]_{R_1} = \overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} \wedge \vec{x}_2 \\ \left[\frac{d\vec{y}_2}{dt} \right]_{R_1} = \overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} \wedge \vec{y}_2 \\ \left[\frac{d\vec{z}_2}{dt} \right]_{R_1} = \overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} \wedge \vec{z}_2 \end{cases} \quad (2.7)$$

Ce vecteur caractérise le mouvement de rotation du repère R_2 par rapport au repère R_1 .

PROPRIÉTÉS 1

- “Relation de Chasles” : $\overrightarrow{\Omega_{(R_3/R_1)}} = \overrightarrow{\Omega_{(R_3/R_2)}} + \overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}}$
- $\overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} = -\overrightarrow{\Omega_{(R_1/R_2)}}$
- Dans le cas d’un repère en translation par rapport à l’autre, le vecteur taux de rotation est nul.

2.2.1.2 Calcul du vecteur taux de rotation dans un cas pratique

Soit R_1 un repère fixe.

Soit R_2 un repère en rotation d’angle θ et d’axe (O, \vec{z}_1) autour de R_1 .

On utilise les formules de définition de $\overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}}$ (Éq. 2.7, p. 19) :

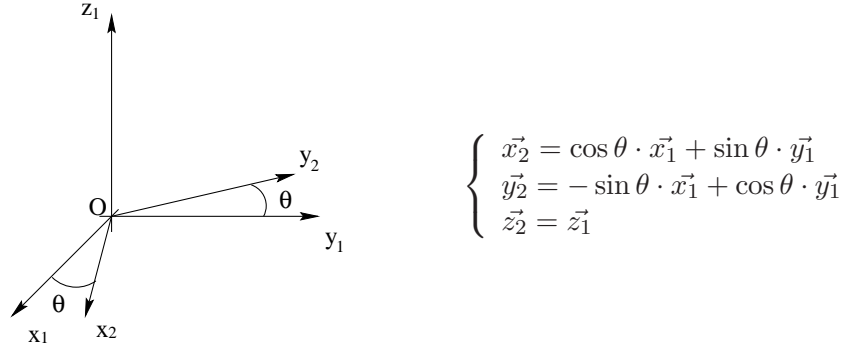
$$\left[\frac{d\vec{z}_2}{dt} \right]_{R_1} = \left[\frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_{R_1} = 0 \quad \text{car } \vec{z}_2 = \vec{z}_1 \quad \text{est constant dans } R_1.$$

Or

$$\left[\frac{d\vec{z}_2}{dt} \right]_{R_1} = \overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} \wedge \vec{z}_2 = \vec{0}$$

Donc $\overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}}$ et \vec{z}_2 sont colinéaires.

$$\Rightarrow \overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} = \lambda \cdot \vec{z}_1 = \lambda \cdot \vec{z}_2$$



On utilise alors la première relation définissant le vecteur taux de rotation :

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\vec{x}_2}{dt} \right]_{R_1} &= -\dot{\theta} \sin \theta \cdot \vec{x}_1 + \dot{\theta} \cos \theta \cdot \vec{y}_1 = \dot{\theta} \cdot \vec{y}_2 = \overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} \wedge \vec{x}_2 \\ \Rightarrow \dot{\theta} \cdot \vec{y}_2 &= \lambda \cdot \vec{z}_2 \wedge \vec{x}_2 \Rightarrow \lambda = \dot{\theta} \end{aligned}$$

Nous pouvons donc en déduire une relation simple permettant d'écrire le vecteur taux de rotation d'un repère R_2 par rapport à un autre repère R_1 .

RÉSULTAT 1 (Vecteur taux de rotation ou rotation instantanée)

Pour un repère R_2 en rotation plane d'angle θ et d'axe (O, \vec{z}_1) autour de R_1 , nous pouvons définir son vecteur taux de rotation $\overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}}$ par la relation suivante :

$$R_1 \xrightarrow{\text{rotation } (\theta, \vec{z}_1)} R_2 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} = \dot{\theta} \cdot \vec{z}_1 \quad (2.8)$$

REMARQUE 5 $\overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}}$, vecteur vitesse rotation instantanée ou vecteur taux de rotation de R_2 par rapport à R_1 quantifie :

- par sa direction, la direction de l'axe autour duquel R_2 tourne par rapport à R_1 ,
- par sa norme, la vitesse angulaire à laquelle se fait cette rotation,
- par son sens, le sens de rotation (règle du tire-bouchon).

2.2.2 Dérivation d'un vecteur, formule de la base mobile

Soit R_1 et R_2 , deux repères en mouvement, on connaît le vecteur taux de rotation de repère R_2 par rapport à R_1 : $\overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}}$.

Soit \vec{V} un vecteur libre défini par ses coordonnées dans R_2 :

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_{R_2}$$

Nous allons à présent essayer de déterminer la dérivée du vecteur \vec{V} par rapport au référentiel lié à R_1 en utilisant le vecteur taux de rotation $\overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}}$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_{R_1} &= \frac{du}{dt} \vec{x}_2 + \frac{dv}{dt} \vec{y}_2 + \frac{dw}{dt} \vec{z}_2 + u \left[\frac{d\vec{x}_2}{dt} \right]_{R_1} + v \left[\frac{d\vec{y}_2}{dt} \right]_{R_1} + w \left[\frac{d\vec{z}_2}{dt} \right]_{R_1} \\ \left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_{R_1} &= \left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} \wedge u \cdot \vec{x}_2 + \overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} \wedge v \cdot \vec{y}_2 + \overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} \wedge w \cdot \vec{z}_2 \\ \left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_{R_1} &= \left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} \wedge \vec{V} \end{aligned}$$

On obtient donc la relation suivante que nous appellerons formule de Bohr ou formule de la base mobile.

RÉSULTAT 2 (Formule de la base mobile)

Pour un vecteur \vec{V} dont les composantes sont connues dans le repère R_2 et que nous cherchons à dériver par rapport au repère R_1 , nous pouvons écrire que :

$$\left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_{R_1} = \left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} \wedge \vec{V} \quad (2.9)$$

Cette formule nous permet de calculer la dérivée d'un vecteur libre dans un repère.

2.3 Cinématique du solide

Nous avons étudié dans les paragraphes précédents les mouvements et les caractéristiques cinématiques d'un point matériel dans l'espace.

Ces résultats sont intéressants pour l'étude du mouvement de particules. Pour étudier le mouvement des différents objets qui nous entourent, nous allons introduire de nouvelles notions.

2.3.1 Le solide indéformable

2.3.1.1 Définition

Un solide indéformable est un ensemble de points matériels M dont la distance entre deux points quelconque reste invariante dans le temps, et ce quelles que soient les actions mécaniques appliquées.

Attention, c'est une modélisation. En réalité, les solides subissent des déformations réversibles (élastiques) ou irréversibles (plastiques) sous l'effet des actions mécaniques extérieures.

$$\forall t, \quad \overrightarrow{AB}^2 = Cste \quad (2.10)$$

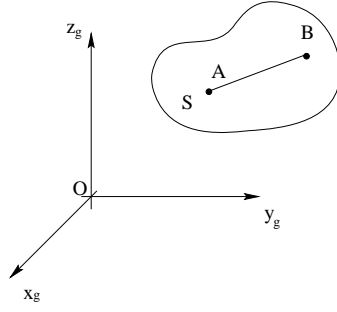


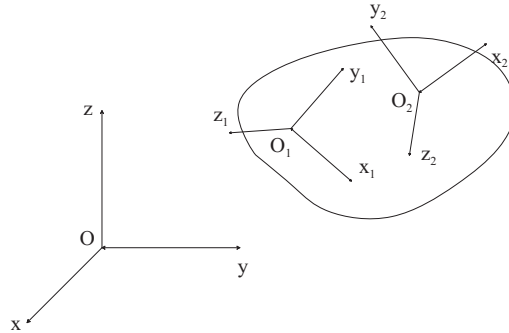
FIG. 2.4 – Modélisation d'un solide indéformable

Nous faisons donc une distinction entre solide indéformable et solide déformable suivant le type d'étude que nous désirons mener. Lorsque nous nous intéressons aux déformations et aux contraintes subies par le solide, nous utiliserons un modèle de solide déformable ; lorsque nous mènerons une étude de cinématique ou de dynamique, nous prendrons le modèle de solide indéformable.

2.3.1.2 Rotation instantanée d'un solide indéformable

Soit S un solide indéformable en mouvement par rapport à un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Soient R_1 et R_2 deux repères liés à S respectivement en O_1 et O_2 .



La relation de Chasles appliquée aux rotations instantanées donne :

$$\overrightarrow{\Omega_{(R_2/R)}} = \overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} + \overrightarrow{\Omega_{(R_1/R)}}$$

Or comme R_2 et R_1 sont liés au solide S , il n'y a pas de mouvement possible entre R_1 et R_2 donc :

$$\overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} = \vec{0}$$

On en déduit que le vecteur taux de rotation ou rotation instantanée d'un solide est égal au vecteur rotation instantanée de n'importe quel repère lié à ce solide.

$$\forall R_1, R_2 \text{ liés à } S \quad \overrightarrow{\Omega_{(R_2/R)}} = \overrightarrow{\Omega_{(R_1/R)}} = \overrightarrow{\Omega_{(S/R)}} \quad (2.11)$$

REMARQUE 6 *A tout instant, le vecteur taux de rotation ou rotation instantanée $\overrightarrow{\Omega_{(S/R)}}$ d'un solide S est le même en tout point du solide S , c'est donc un invariant vectoriel.*

2.3.2 Vitesse d'un point du solide

Soient A et B deux points distincts d'un solide S en mouvement par rapport à un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Soit le repère $R_S(A, \vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S)$ lié au solide S et centré sur A .

Si on cherche à dériver le vecteur \overrightarrow{AB} en utilisant la relation de dérivation d'un vecteur mobile (Éq. 2.9, p. 21) :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \right]_R = \left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \right]_{R_S} + \overrightarrow{\Omega_{(R_S/R)}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Or, comme R_S est lié à S , alors :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \right]_{R_S} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\Omega_{(R_S/R)}} = \overrightarrow{\Omega_{(S/R)}}$$

D'autre part,

$$\left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \right]_R = \left[\frac{d(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})}{dt} \right]_R = \left[\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt} \right]_R - \left[\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} \right]_R$$

En utilisant la définition de la vitesse d'un point, on trouve alors :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \right]_R = \overrightarrow{V_{(B \in S/R)}} - \overrightarrow{V_{(A \in S/R)}}$$

On trouve donc la relation définissant le champ des vitesses d'un solide :

$$\forall t, \forall A, B \in S, \quad \overrightarrow{V_{(B \in S/R)}} = \overrightarrow{V_{(A \in S/R)}} + \overrightarrow{\Omega_{(S/R)}} \wedge \overrightarrow{AB} \quad (2.12)$$

Le champ des vitesses d'un solide est donc antisymétrique.

2.3.3 Équiprojectivité du champ des vitesses d'un solide

Soient A et B deux points distincts d'un solide S en mouvement par rapport à un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Par définition du solide indéformable S , nous avons

$$\begin{aligned} \forall t, \quad \overrightarrow{AB}^2 = Cste &\Rightarrow \frac{d\overrightarrow{AB}^2}{dt} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{d\overrightarrow{AB}^2}{dt} = 2\overrightarrow{AB} \cdot \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \\ &\Rightarrow 2\overrightarrow{AB} \cdot \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \frac{d(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB})}{dt} = 0 \\ &\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \frac{d\overrightarrow{OB}}{dt} - \overrightarrow{AB} \cdot \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} = 0 \end{aligned}$$

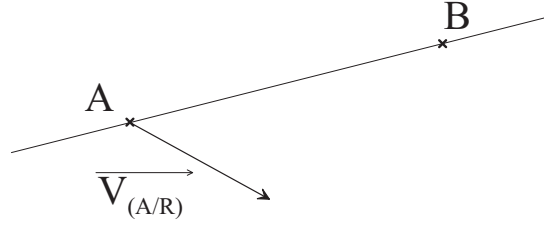


FIG. 2.5 – Relation d'équiprojectivité

Ce qui donne :

$$\forall t, \forall A, B \in S, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{V_{(A \in S/R)}} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{V_{(B \in S/R)}}$$

Nous retrouvons donc la relation d'équiprojectivité du champ des vitesses d'un solide. Cette relation est surtout intéressante pour faire de la cinématique graphique.

La connaissance de la vitesse d'un point d'un solide et du taux de rotation du solide permet de connaître la vitesse de tous les points de ce solide. Le champ des vitesses d'un solide étant équiprojectif et antisymétrique, ce champ de vecteur est un champ de moment de torseur. Nous pouvons donc introduire le torseur des vitesses d'un solide ou torseur cinématique.

2.3.4 Torseur cinématique d'un solide

Un torseur est la réunion de deux éléments de réduction : une résultante et un moment. Dans le cas du torseur cinématique d'un solide, on prend pour résultante, le vecteur taux de rotation du solide et pour le moment la vitesse du point considéré du solide.

En effet, le champ des vitesses d'un solide étant équiprojectif et antisymétrique, il correspond bien au champ des moments d'un torseur.

D'autre part le vecteur taux de rotation d'un solide est bien invariant, quel que soit le point ou on l'exprime.

On définit le torseur cinématique du solide S dans son mouvement par rapport à un repère quelconque $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S/R)} \right\} = {}_M \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{(S/R)}} \\ \overrightarrow{V_{(M \in S/R)}} \end{array} \right\} \quad (2.13)$$

La connaissance de ce torseur en un point permet de connaître la vitesse de tous les points du solide.

2.4 Axe central d'un mouvement ou axe de viration

Soit un solide S en mouvement par rapport à un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Le mouvement de ce solide est parfaitement connu, il est défini par son torseur cinématique au point A :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S/R)} \right\} = {}_A \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{(S/R)}} \\ \overrightarrow{V_{(A \in S/R)}} \end{array} \right\}$$

DÉFINITION 2 On appelle point central du mouvement de S par rapport à R , un point C tel que $\overrightarrow{V_{(C \in S/R)}}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{\Omega_{(S/R)}}$. La vitesse $\overrightarrow{V_{(C \in S/R)}}$ du point central C est minimale (elle peut même être nulle dans le cas de la rotation).

Si on connaît le torseur cinématique du solide S au point A , alors, on montre grâce à la théorie des torseurs que :

$$\overrightarrow{AC} = \frac{\overrightarrow{\Omega_{(S/R)}} \wedge \overrightarrow{V_{(A \in S/R)}}}{\overrightarrow{\Omega_{(S/R)}}^2} + \mu \overrightarrow{\Omega_{(S/R)}}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{\Omega_{(S/R)}}$ et $\overrightarrow{V_{(A \in S/R)}}$ étant donnés pour un instant t donné, les différents points centraux C sont répartis sur une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{\Omega_{(S/R)}}$ passant par le point H tel que :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{\Omega_{(S/R)}} \wedge \overrightarrow{V_{(A \in S/R)}}}{\overrightarrow{\Omega_{(S/R)}}^2}$$

Cette droite Δ est appelée axe central du mouvement de S par rapport au repère R , on l'appelle aussi axe de viration de S .

Les vecteurs $\overrightarrow{\Omega_{(S/R)}}$ et $\overrightarrow{V_{(A \in S/R)}}$ pouvant varier à tout instant, la position de cet axe par rapport à S ou par rapport à R peut varier à tout instant.

Lorsque le temps t varie, l'axe Δ engendre dans l'espace lié à S et dans l'espace lié à R deux surfaces, appelées axoïdes du mouvement.

2.5 Mouvements particuliers

En fonction de la valeur des éléments de réduction du torseur cinématique du solide S , nous pouvons définir un certain nombre de mouvements particuliers pour le solide S .

Dans le cas le plus général possible, avec $\overrightarrow{V_{(A \in S/R)}} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{\Omega_{(S/R)}} \neq \vec{0}$, on parle de mouvement hélicoïdal instantané autour de l'axe Δ . En effet, on peut décomposer la vitesse du point A en fonction de celle de C , point central :

$$\overrightarrow{V_{(A \in S/R)}} = \overrightarrow{V_{(C \in S/R)}} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{\Omega_{(S/R)}}$$

avec :

- $\overrightarrow{V_{(C \in S/R)}}$ vecteur colinéaire à $\overrightarrow{\Omega_{(S/R)}}$
- $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{\Omega_{(S/R)}}$ vecteur orthogonal à \overrightarrow{AC} et $\overrightarrow{\Omega_{(S/R)}}$

Le champ des vitesses est similaire à celui de l'hélice d'un avion, le segment $[AA'']$ correspondant à l'hélice de l'avion. L'hélice tourne à la vitesse de rotation $\overrightarrow{\Omega_{(S/R)}}$ par rapport à l'avion et $\overrightarrow{V_{(C \in S/R)}}$ correspond à la vitesse de translation de l'avion (colinéaire à $\overrightarrow{\Omega_{(S/R)}}$).

Ce mouvement hélicoïdal est dit instantané car $\overrightarrow{\Omega_{(S/R)}}$ est susceptible de varier à tout instant, en norme comme en direction, ce qui entraînera une variation de l'axe central.

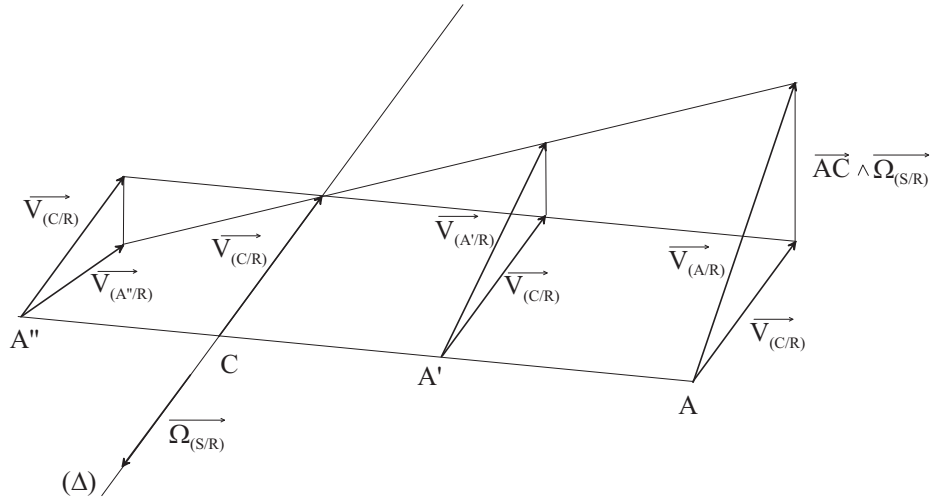


FIG. 2.6 – Mouvement hélicoïdal instantané

2.5.1 Mouvement de translation

Par définition, le solide S est en mouvement de translation par rapport au repère R si et seulement si son vecteur taux de rotation $\overrightarrow{\Omega}_{(S/R)}$ est nul.

Ce qui implique

$$\forall M \in S, \quad \forall N \in S, \quad \overrightarrow{V}_{(M \in S/R)} = \overrightarrow{V}_{(N \in S/R)}$$

Donc, pour un instant donné, tous les points du solide S sont affectés de la même vitesse par rapport au repère R .

Ce vecteur vitesse n'est pas nécessairement constant dans le temps.

Nous pouvons rencontrer différents types de translation :

La translation rectiligne Tous les points de S ont une trajectoire rectiligne par rapport à R et le même vecteur vitesse à un instant donné (ce vecteur n'a aucune raison d'être constant).

La translation rectiligne uniforme Tous les points de S ont une trajectoire rectiligne par rapport à R et le même vecteur vitesse à un instant donné, ce vecteur vitesse étant constant dans le temps.

La translation circulaire Tous les points de S ont une trajectoire circulaire par rapport à R et le même vecteur vitesse à un instant donné.

2.5.2 Mouvement de rotation instantané

Par définition, un solide est animé d'un mouvement de rotation instantané à l'instant t , si et seulement si, le vecteur vitesse des points centraux C du mouvement de S par rapport à R est nul à l'instant t . Dans ce cas, le torseur cinématique de S s'écrit :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S/R)} \right\}_C = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega}_{(S/R)} \\ \overrightarrow{V}_{(C \in S/R)} = \vec{0} \end{array} \right\}$$

Dans ce cas, l'axe central Δ du torseur cinématique s'appelle axe instantané de rotation, il ne garde pas nécessairement une position fixe par rapport à S et à R .

Pour tout point P appartenant à S et pour tout point C appartenant à l'axe central, on peut écrire :

$$\overrightarrow{V_{(P \in S/R)}} = \overrightarrow{PC} \wedge \overrightarrow{\Omega_{(S/R)}}$$

On retrouve bien une relation cinématique caractérisant une rotation du solide S autour du point C .

REMARQUE 7 *Mouvement de rotation*

Dans le cas où l'axe central Δ reste fixe au cours du temps par rapport à S et à R , le solide S est en mouvement de rotation par rapport à R autour de l'axe Δ . Alors, dans ce cas, tous les points de S ont une trajectoire circulaire autour de l'axe Δ et le vecteur vitesse de tout point de S est tangent à sa trajectoire circulaire et a une norme proportionnelle à la distance séparant le point de l'axe de rotation.

2.5.3 Exemple

Le manipulateur décrit ci-dessous permet d'aider un ouvrier dans la manipulation de charges lourdes. La préhension de la charge est effectuée par l'outil de prise. Un vérin d'équilibrage alimenté par de l'air comprimé à 0,70 MPa, fournit un effort qui compense le poids de la charge. L'utilisateur maintient l'outil de prise et peut commander le vérin d'équilibrage, qui n'agit que lors d'un mouvement de montée ou de descente. Les autres mouvements possibles sont assurés manuellement par l'ouvrier. Le schéma ci-dessous (FIG. 2.7, p. 28) représente un dessin du manipulateur dans une position repliée, lors de la prise de pièce, la charge à manipuler (en l'occurrence, un collecteur d'échappement, étant au départ sur un convoyeur).

On se propose d'effectuer une étude cinématique du manipulateur dans cette même position, laquelle est paramétrée sur le schéma cinématique donné ci-dessous (FIG. 2.8, p. 29).

Mouvement du bras inférieur 2 par rapport à 1 :

Mouvement du bras supérieur 3 par rapport à 1 :

Mouvement de la tige de vérin 4 par rapport à 6 :

Mouvement de la tête 5 par rapport à 1 :

2.6 Composition du mouvement

Les systèmes mécaniques industriels sont souvent composés de plusieurs solides liés entre eux par des liaisons (quoi de plus logique !). Nous verrons qu'il est assez simple de déterminer les torseurs cinématiques relatifs entre les différents solides composant le système, il nous reste à définir comment relier ces torseurs cinématiques, ainsi que les grandeurs cinématiques qui les composent, entre eux.

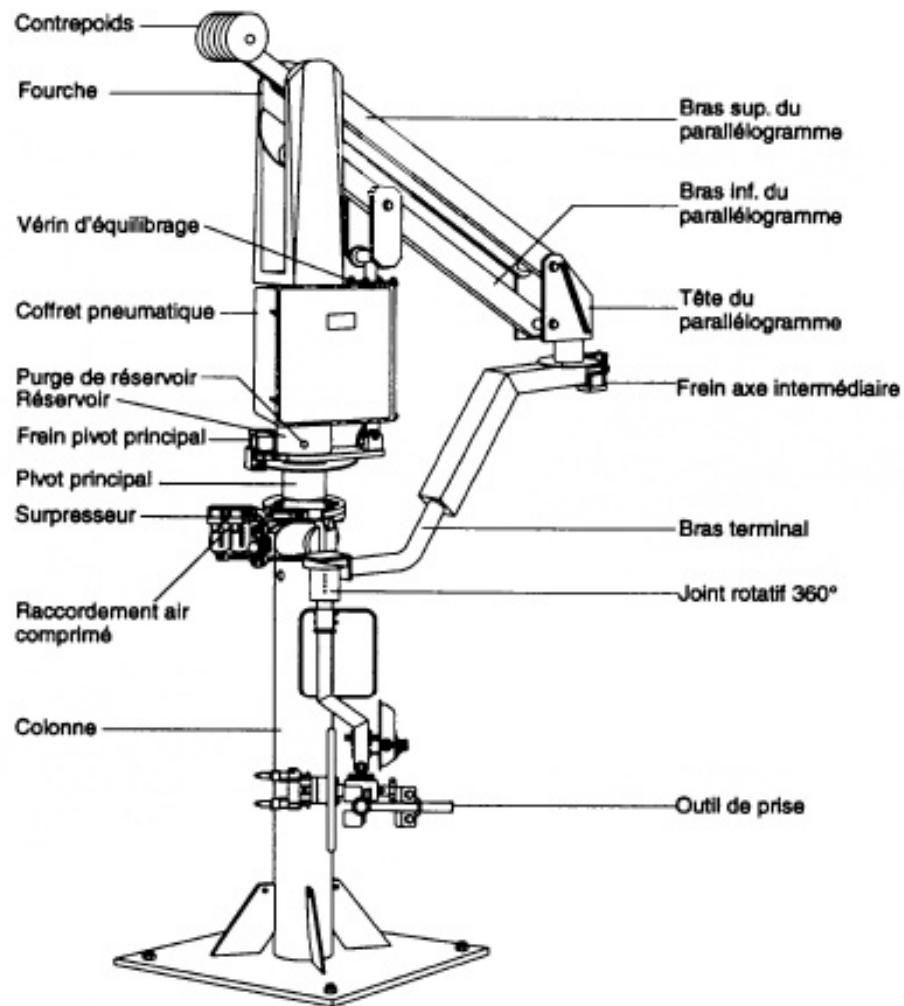


FIG. 2.7 – Schéma de principe du manipulateur

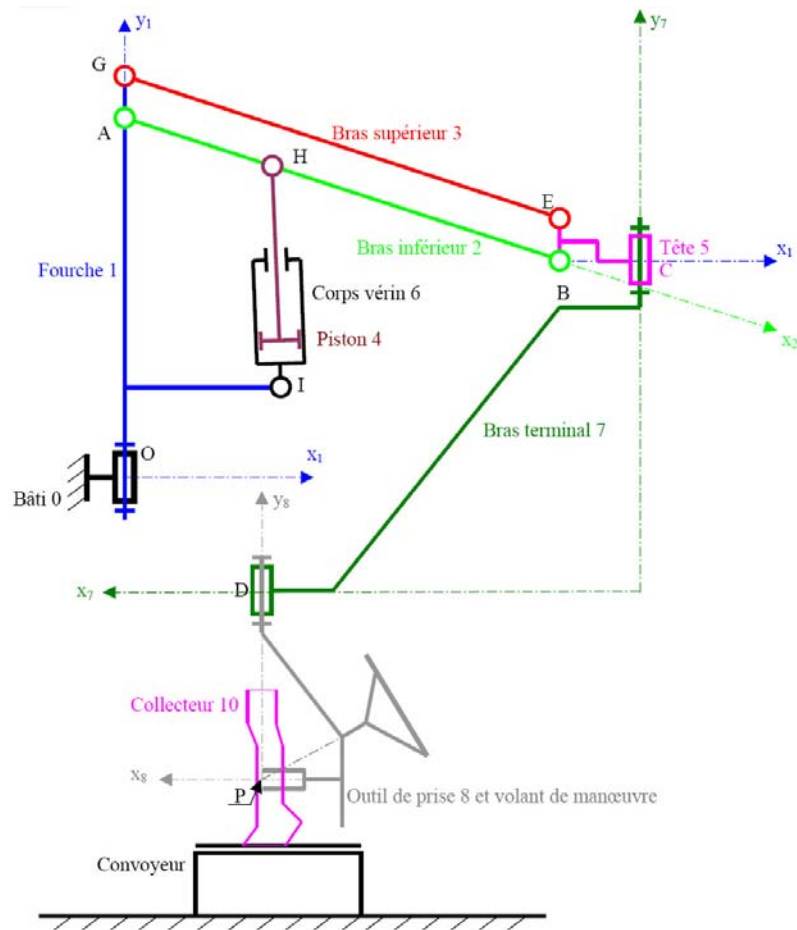


FIG. 2.8 – Schéma cinématique du manipulateur

2.6.1 Composition des vitesses

On pose S un solide en mouvement par rapport à deux repères distincts $R_1 (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et $R_2 (O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, en mouvement l'un par rapport à l'autre. Soit $R (A, \vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S)$, un repère lié au solide S . On cherche à trouver la relation existante entre la vitesse d'un point P quelconque de S calculée dans son mouvement par rapport à R_1 et par rapport à R_2 .

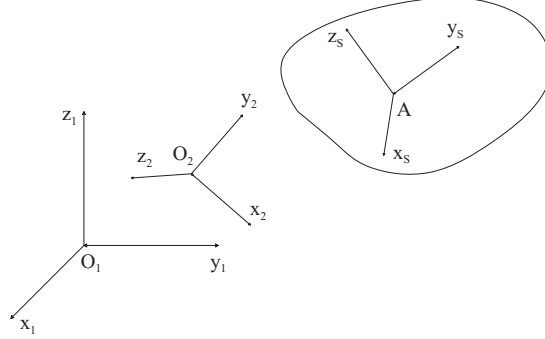


FIG. 2.9 – Composition des vitesses

Par définition,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{(P \in S/R_1)}} &= \left[\frac{d\overrightarrow{O_1 P}}{dt} \right]_{R_1} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1 O_2}}{dt} \right]_{R_1} + \left[\frac{d\overrightarrow{O_2 P}}{dt} \right]_{R_1} \\ \overrightarrow{V_{(P \in S/R_1)}} &= \overrightarrow{V_{(O_2/R_1)}} + \left[\frac{d\overrightarrow{O_2 P}}{dt} \right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} \wedge \overrightarrow{O_2 P} \\ \overrightarrow{V_{(P \in S/R_1)}} &= \overrightarrow{V_{(O_2/R_1)}} + \overrightarrow{V_{(P/R_2)}} + \overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} \wedge \overrightarrow{O_2 P} \end{aligned}$$

Si on calcule la vitesse par rapport à R_1 du point coïncidant à P lié à R_2 à l'instant t donné en utilisant la relation de champ des vitesses du "solide" R_2 , on trouve :

$$\overrightarrow{V_{(P \in R_2/R_1)}} = \overrightarrow{V_{(O_2/R_1)}} + \overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} \wedge \overrightarrow{O_2 P}$$

On obtient donc la formule de composition des vitesses :

$$\underbrace{\overrightarrow{V_{(P \in S/R_1)}}}_{\text{vitesse absolue}} = \underbrace{\overrightarrow{V_{(P \in S/R_2)}}}_{\text{vitesse relative}} + \underbrace{\overrightarrow{V_{(P \in R_2/R_1)}}}_{\text{vitesse d'entraînement}} \quad (2.14)$$

La *vitesse relative* correspond à la vitesse du point P dans le repère d'origine R_2 . La *vitesse d'entraînement* correspond à la vitesse du point P^* fixe dans R_2 et coïncidant avec P à l'instant t par rapport au repère R_1 .

Dans le cas plus général d'un solide appartenant à un système à n repères différents en mouvement les un par rapport aux autres, :

$$\overrightarrow{V_{(P \in R/R_1)}} = \overrightarrow{V_{(P \in R/R_n)}} + \overrightarrow{V_{(P \in R_n/R_{n-1})}} + \cdots + \overrightarrow{V_{(P \in R_2/R_1)}} \quad (2.15)$$

REMARQUE 8 Il y a donc plusieurs méthodes de calcul de la vitesse d'un point d'un solide en mouvement par rapport à un repère quelconque. On peut :

- soit utiliser la définition du vecteur vitesse,

- soit la relation du champ des vitesses d'un solide,
- soit par la relation de composition des vitesses.

Le choix entre les différentes méthodes se fera en fonction du point à étudier...

2.6.2 Composition des vecteurs taux de rotation

Nous avons vu précédemment (PROP. 1) que les vecteurs taux de rotation sont liés entre eux par la relation de Chasles. Donc, dans le cas général d'un solide S en mouvement par rapport à un repère R_n , lui-même en mouvement par rapport à un repère R_{n-1} , ainsi de suite jusqu'au repère R_1 , nous pouvons écrire une relation de composition du vecteur rotation instantanée du solide S :

$$\overrightarrow{\Omega_{(S/R_1)}} = \overrightarrow{\Omega_{(S/R_n)}} + \overrightarrow{\Omega_{(R_n/R_{n-1})}} + \cdots + \overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} \quad (2.16)$$

2.6.3 Composition des torseurs cinématiques

Cette relation n'est qu'une relation condensée des deux relations précédentes, le vecteur vitesse et le vecteur rotation instantané pouvant être regroupés dans le torseur cinématique.

On note S_i , les n solides en mouvement les uns par rapport aux autres auquel on lie les repères R_i . Soit S un solide supplémentaire en mouvement par rapport aux autres. On désire exprimer la vitesse du point P appartenant à S dans son mouvement par rapport à R_1 .

Nous pouvons alors écrire :

$$\forall P \in S, \left\{ \mathcal{V}_{(S/R_1)} \right\} = \left\{ \mathcal{V}_{(S/R_n)} \right\} + \left\{ \mathcal{V}_{(R_n/R_{n-1})} \right\} + \cdots + \left\{ \mathcal{V}_{(R_2/R_1)} \right\} \quad (2.17)$$

2.6.4 Composition des accélérations

On désire maintenant trouver une relation permettant de définir l'accélération d'un point matériel P défini dans un repère R_2 par rapport à un repère R_1 .

On part de la définition générale de l'accélération d'un point :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Gamma_{(P/R_1)}} &= \left[\frac{d\overrightarrow{V_{(P/R_1)}}}{dt} \right]_{R_1} = \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{V_{(P/R_2)}} + \overrightarrow{V_{(O_2/R_1)}} + \overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} \wedge \overrightarrow{O_2P} \right]_{R_1} \\ \overrightarrow{\Gamma_{(P/R_1)}} &= \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{V_{(P/R_2)}} \right]_{R_1} + \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{V_{(O_2/R_1)}} \right]_{R_1} + \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} \wedge \overrightarrow{O_2P} \right]_{R_1} \\ \overrightarrow{\Gamma_{(P/R_1)}} &= \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{V_{(P/R_2)}} \right]_{R_1} + \overrightarrow{\Gamma_{(O_2/R_1)}} + \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} \right]_{R_1} \wedge \overrightarrow{O_2P} + \overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} \wedge \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{O_2P} \right]_{R_1} \end{aligned}$$

On utilise la formule de la base mobile pour calculer la dérivée relativement au repère R_1 de $\overrightarrow{V_{(P/R_2)}}$ et de $\overrightarrow{O_2P}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Gamma_{(P/R_1)}} &= \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{V_{(P/R_2)}} \right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} \wedge \overrightarrow{V_{(P/R_2)}} + \overrightarrow{\Gamma_{(O_2/R_1)}} + \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} \right]_{R_1} \wedge \overrightarrow{O_2P} \\
&+ \overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} \wedge \left(\frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{O_2P} \right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} \wedge \overrightarrow{O_2P} \right) \\
\overrightarrow{\Gamma_{(P/R_1)}} &= \overrightarrow{\Gamma_{(P/R_2)}} + \overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} \wedge \overrightarrow{V_{(P/R_2)}} + \overrightarrow{\Gamma_{(O_2/R_1)}} + \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} \right]_{R_1} \wedge \overrightarrow{O_2P} \\
&+ \overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} \wedge \left(\overrightarrow{V_{(P/R_2)}} + \overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} \wedge \overrightarrow{O_2P} \right) \\
\overrightarrow{\Gamma_{(P/R_1)}} &= \overrightarrow{\Gamma_{(P/R_2)}} + \overrightarrow{\Gamma_{(O_2/R_1)}} + 2\overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} \wedge \overrightarrow{V_{(P/R_2)}} + \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} \right]_{R_1} \wedge \overrightarrow{O_2P} \\
&+ \overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} \wedge \overrightarrow{O_2P} \right)
\end{aligned}$$

On en déduit finalement la valeur de l'accélération absolue :

$$\overrightarrow{\Gamma_{(P/R_1)}} = \overrightarrow{\Gamma_{(P/R_2)}} + \overrightarrow{\Gamma_{entraînement}} + \overrightarrow{\Gamma_{Coriolis}} \quad (2.18)$$

L'accélération $\overrightarrow{\Gamma_{(P/R_2)}}$ est appelée accélération relative de P .

L'accélération de Coriolis correspond au terme :

$$\overrightarrow{\Gamma_{Coriolis}} = 2\overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} \wedge \overrightarrow{V_{(P/R_2)}} \quad (2.19)$$

L'accélération d'entraînement correspond aux termes restant :

$$\overrightarrow{\Gamma_{entraînement}} = \overrightarrow{\Gamma_{(O_2/R_1)}} + \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} \right]_{R_1} \wedge \overrightarrow{O_2P} + \overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{(R_2/R_1)}} \wedge \overrightarrow{O_2P} \right) \quad (2.20)$$

Nous verrons dans la suite du cours que l'utilisation de ces formules n'est pas très courante. En effet, pour une utilisation en dynamique, il suffit de connaître certaines projections de l'accélération d'un point.

On peut retenir que l'accélération et la vitesse d'entraînement correspondent à l'accélération et la vitesse d'un point P considéré comme fixe dans le repère d'entraînement $\overrightarrow{\Gamma_{(P \in R_2/R_1)}}$.

2.7 Cinématique du contact

Soient deux solides S_1 et S_2 en mouvement dans un référentiel galiléen $\text{Rg}(O, \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g)$.

On suppose que ces deux solides sont en contact et que ce contact est ponctuel.

Soient O_1 et O_2 deux points respectifs de S_1 et S_2 .

On peut distinguer au contact de S_1 et de S_2 , trois points :

- I : point géométrique de contact,
- $I_1 = I \in S_1$: point coïncidant avec I et appartenant à S_1 au moment contact,
- $I_2 = I \in S_2$: point coïncidant avec I et appartenant à S_2 au moment contact.

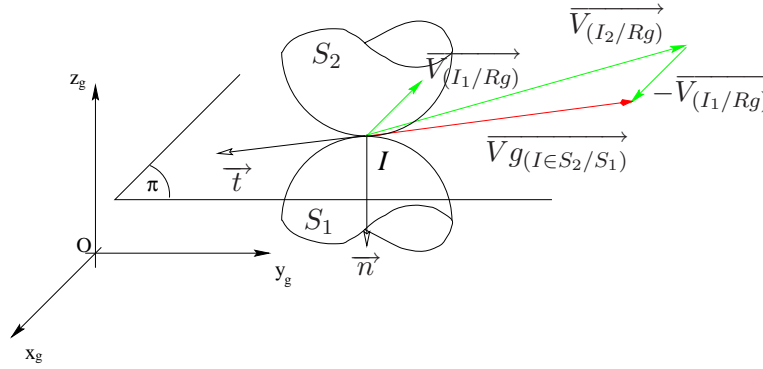


FIG. 2.10 – Modélisation d'un contact ponctuel entre deux solides

Les torseurs cinématiques des solides S_1 et S_2 sont supposés totalement connus:

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_1/Rg)} \right\}_{O_1} = \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega_{(S_1/Rg)}}}{\overrightarrow{V_{(O_1 \in S_1/Rg)}}} \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \mathcal{V}_{(S_2/Rg)} \right\}_{O_2} = \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega_{(S_2/Rg)}}}{\overrightarrow{V_{(O_2 \in S_2/Rg)}}} \right\}$$

On peut donc connaître le torseur cinématique relatif de contact au point I entre les solides S_1 et S_2 :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_2/S_1)} \right\}_I = \left\{ \mathcal{V}_{(S_2/Rg)} \right\}_I - \left\{ \mathcal{V}_{(S_1/Rg)} \right\}_I = \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}}}{\overrightarrow{V_{(I \in S_2/S_1)}}} \right\}$$

REMARQUE 9 Ce type de contact ponctuel est une modélisation mathématique. En effet, les solides n'étant pas réellement indéformables, la surface de contact est une ellipse. On utilisera alors la notion de solide localement déformable (voir chapitre sur la modélisation).

2.7.1 Vitesse de glissement

On appelle vitesse de glissement du point I_2 par rapport au point I_1 , à l'instant t , le vecteur noté :

$$\overrightarrow{\mathcal{G}_{(I \in S_2/S_1)}} = \overrightarrow{Vg_{(I \in S_2/S_1)}} = \overrightarrow{V_{(I \in S_2/Rg)}} - \overrightarrow{V_{(I \in S_1/Rg)}} \quad (2.21)$$

Soient R_1 et R_2 , deux repères liés respectivement à S_1 et S_2 .

On peut retrouver la définition de cette vitesse de glissement à partir de la relation de composition des vitesses.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{(I \in S_2/Rg)}} &= \overrightarrow{V_{(I \in S_2/R_1)}} + \overrightarrow{V_{(O_1/Rg)}} + \overrightarrow{\Omega_{(R_1/Rg)}} \wedge \overrightarrow{O_1 I_2} \quad \text{or} \quad \overrightarrow{O_1 I_2} = \overrightarrow{O_1 I_1} \\ \overrightarrow{V_{(I \in S_2/Rg)}} &= \overrightarrow{V_{(I \in S_2/R_1)}} + \underbrace{\overrightarrow{V_{(O_1/Rg)}} + \overrightarrow{\Omega_{(R_1/Rg)}} \wedge \overrightarrow{O_1 I_1}}_{\overrightarrow{V_{(I \in S_1/Rg)}}} \\ \overrightarrow{V_{(I \in S_2/Rg)}} &= \overrightarrow{V_{(I \in S_2/R_1)}} + \overrightarrow{V_{(I \in S_1/Rg)}} \quad \text{or} \quad \overrightarrow{Vg_{(I \in S_2/S_1)}} = \overrightarrow{V_{(I \in S_2/R_1)}} \end{aligned}$$

On retrouve bien la définition de la vitesse de glissement.

REMARQUE 10

- La vitesse de glissement correspond à la vitesse du solide S_2 par rapport au solide S_1 ¹, elle ne dépend donc pas du référentiel R_g .
- La vitesse de glissement appartient au plan tangent au contact π .
- On ne peut pas calculer la vitesse des points I_1 et I_2 par dérivation directe du vecteur position $\overrightarrow{OI_1}$ et $\overrightarrow{OI_2}$.

$$\overrightarrow{V_{(I \in S_1/R_g)}} \neq \left[\frac{d\overrightarrow{OI_1}}{dt} \right]_{R_g}$$

En effet, le point coïncidant n'est pas un point que l'on suit dans son mouvement.

- On utilise la relation du champ des vitesses des solides S_1 et S_2 pour calculer la vitesse des points $I \in S_1$ et $I \in S_2$.

2.7.2 Notion de roulement sans glissement

2.7.2.1 Condition de roulement sans glissement

Une grande majorité des mécanismes utilisés de nos jours est basée sur la modélisation de liaisons de roulement sans glissement (roue d'une voiture sur la route, engrenages, roues de friction). Le contact se fait entre deux solides à forte adhérence ne permettant pas le glissement relatif.

Le roulement sans glissement sera le plus souvent une modélisation, en effet, il existe souvent un glissement relatif résiduel entre les deux solides.

Nous introduisons la condition théorique de roulement sans glissement sous la forme suivante.

RÉSULTAT 3 (Condition de roulement sans glissement)

Deux solides S_1 et S_2 sont dit liés par une liaison de roulement sans glissement s'ils sont en contact ponctuel et si la vitesse de glissement entre les deux solides au point de contact est nulle.

$$\overrightarrow{g_{(I \in S_2/S_1)}} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{Vg_{(I \in S_2/S_1)}} = \vec{0} \quad (2.22)$$

Cette relation est très importante puisqu'elle nous permettra d'obtenir une relation entre les divers paramètres du système.

2.7.3 Notion de roulement et de pivotement

De la même façon que nous avons défini la vitesse de glissement comme étant la vitesse relative entre les deux solides, nous pouvons définir la notion de taux de rotation relatif du solide S_2 par rapport à S_1 .

1. ou son opposée... Cela va de soi.

$$\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}} = \overrightarrow{\Omega_{(S_2/Rg)}} - \overrightarrow{\Omega_{(S_1/Rg)}} \quad (2.23)$$

Ce vecteur peut être décomposer en deux composantes projetées sur la normale au contact $\vec{n} : \left(\overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}}\right)$ et sur le plan tangent $\pi : \left(\overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}}\right)$.

$$\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}} = \overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}} + \overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}}$$

$\overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}}$: Rotation instantanée de pivotement (suivant la normale), nous pouvons aisément faire l'analogie avec le changement de direction des roues d'une voiture.

$\overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}}$: Rotation instantanée de roulement (suivant le plan tangent au contact), nous pouvons à nouveau faire l'analogie avec la rotation des roues dû au moteur de la voiture.

2.8 Cinématique graphique

Vous verrez par la suite que la cinématique analytique peut être extrêmement coûteuse en temps de calculs pour des systèmes matériels complexes.

La cinématique graphique permet de s'affranchir du formalisme mathématique et des calculs analytiques trop longs. Cette méthodologie permet de déterminer graphiquement (cela tombe sous le sens!) tout ou partie (direction, support, sens ou norme) des vitesses des points des différents solides composant le système étudié. Malheureusement, cette méthode n'est pas suffisante pour résoudre tous les problèmes de cinématique :

- d'une part, les calculs de cinématique sont souvent les calculs préalables à une étude plus complète de dynamique², et dans ce cas les valeurs analytiques sont nécessaires,
- d'autre part, cette méthode n'est utilisable que dans le cas de problèmes plans,
- enfin, cette méthode ne nous donne que des résultats instantanés, il faut donc réitérer l'étude graphique pour chaque position intéressante.

Cependant, cette méthode permet de déterminer simplement des résultats très précis (dans le cas de l'utilisation de l'outils informatique) et permet d'étudier des positions particulières ou critiques d'un mécanisme sans calculer de manière analytique l'ensemble des données cinématiques.

2.8.1 Mouvement plan sur plan

On note S_2 un solide en mouvement par rapport à un autre solide S_1 auquel on associe un repère $R_1 (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. On note $R_2 (O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ avec $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$ le repère associé à S_2 . On suppose qu'au cours du mouvement de S_2 , le plan $(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2)$ reste constamment confondu avec le plan $(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$. Alors, on qualifie le mouvement de S_2 par rapport à S_1 de plan sur plan.

2. vous verrez cela l'année prochaine...

En conséquence de la définition ci-dessus, nous pouvons dire que :

- les vecteurs vitesses de tous les points de S_2 en mouvement par rapport à S_1 restent parallèles au plan $(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ et donc que :

$$\forall M \in S_2, \quad \overrightarrow{V_{(M \in S_2/S_1)}} \cdot \vec{z}_1 = 0$$

- le vecteur taux de rotation de S_2 reste constamment colinéaire à l'axe (O_1, \vec{z}_1) , normal au plan du mouvement :

$$\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}} \wedge \vec{z}_1 = \vec{0}$$

En résumé, le torseur cinématique de S_2 dans son mouvement par rapport à S_1 est obligatoirement de la forme :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_2/S_1)} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}} \\ \overrightarrow{V_{(M \in S_2/S_1)}} \end{array} \right\}_M = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & V_x \\ 0 & V_y \\ \Omega_z & 0 \end{array} \right\}_{(x_1, y_1, z_1)}$$

Le plan $P(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ sera appelé plan de construction.

REMARQUE 11 *La notion de mouvement plan sur plan reste une modélisation, dans la réalité est souvent beaucoup plus complexe.*

2.8.2 Axe et centre instantanés de rotation

DÉFINITION 3 *Par définition, on appelle axe instantané de rotation de S_2 par rapport à S_1 , l'axe central du torseur cinématique de S_2/S_1 .*

On note $\left\{ \mathcal{V}_{(S_2/S_1)} \right\}$, le torseur cinématique de S_2 dans son mouvement par rapport à S_1 , tel que :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_2/S_1)} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}} \\ \overrightarrow{V_{(P \in S_2/S_1)}} \end{array} \right\}_P$$

Par définition de l'axe central, l'axe instantané de rotation est l'ensemble des points N tel que :

$$\overrightarrow{PN} = \frac{\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}} \wedge \overrightarrow{V_{(P \in S_2/S_1)}}}{\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}}^2} + \mu \overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}}$$

Cela définit l'axe Δ de vecteur directeur $\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}}$ et passant par le point I appartenant au plan de construction tel que :

$$\mu = 0 \Rightarrow \overrightarrow{PI} = \frac{\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}} \wedge \overrightarrow{V_{(P \in S_2/S_1)}}}{\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}}^2}$$

Dans le cas d'un mouvement plan sur plan, nous avons par définition :

$$\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}} \cdot \overrightarrow{V_{(P \in S_2/S_1)}} = 0 \quad (2.24)$$

On peut dire que l'invariant scalaire du torseur cinématique est nul. Ceci est vrai pour tout point de S et plus particulièrement pour I .

Or, par définition de l'axe central, $\overrightarrow{V_{(I \in S_2/S_1)}}$ doit être colinéaire à $\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}}$. En reprenant la relation (Éq. 2.24, p. 36), nous pouvons en déduire que :

$$\overrightarrow{V_{(I \in S_2/S_1)}} = \vec{0}$$

Le torseur cinématique du solide S_2 dans son mouvement par rapport à S_1 s'écrit alors au point I :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_2/S_1)} \right\} = {}_I \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

Le mouvement d'un solide en mouvement plan peut toujours être rapporté à un mouvement de rotation instantanée autour du centre instantané de rotation I ou de son axe instantané de rotation Δ passant par I et perpendiculaire au plan de construction.

DÉFINITION 4 *À l'instant t , il existe un unique point I , appelé le Centre Instantané de Rotation, intersection de l'axe instantané de rotation et du plan de construction tel que le solide S_2 ai un mouvement de rotation autour de l'axe (I, \vec{z}_1) par rapport au solide S_1 .*

REMARQUE 12 *Dans le cas général, la position du point I est variable au cours du temps.*

Dans le cas d'un mouvement de rotation, le CIR est confondu avec le centre de rotation et il reste fixe au cours du temps.

Une translation pouvant se définir mathématiquement comme une rotation de rayon infini, le CIR existe aussi mais il est rejeté à l'infini...

2.8.3 Méthodes de résolution graphique

Une vitesse est graphiquement représentée par un pointeur, c'est à dire d'un point d'application, d'un sens, d'une direction et d'une norme. Effectuer une étude de cinématique graphique revient souvent à déterminer le sens, la direction et la norme du vecteur vitesse pour un point donné.

Les différents cas listés ci-dessous devraient vous permettre de vous sortir de tous les problèmes de cinématique graphique...

REMARQUE 13 *La partie la plus importante d'une étude de cinématique graphique est de définir une échelle (si elle existe déjà, de l'utiliser !) afin de déterminer la norme des vecteurs vitesses.*

Soit deux solides S_1 et S_2 en mouvement plan l'un par rapport à l'autre.

2.8.3.1 Translation

On suppose que le solide S_2 est en translation par rapport au solide S_1 .

Alors, dans ce cas, d'après la définition de la translation, la vitesse de tous les points de S_2 par rapport à S_1 est identique. On en déduit aisément la vitesse de tout point de S_2 . Ceci est valable pour tous les types de translation (rectiligne, circulaire, etc.).

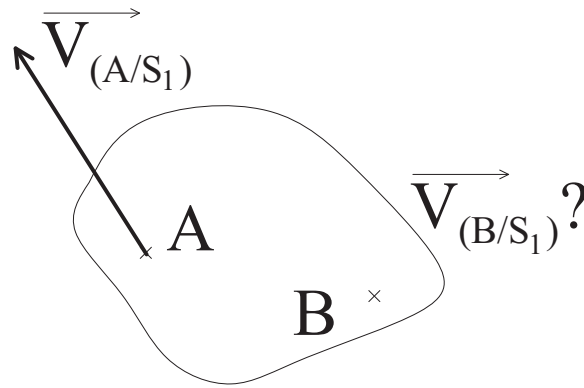


FIG. 2.11 – Cas de solide en translation

2.8.3.2 Rotation

Le solide S_2 est supposé en rotation par rapport à S_1 autour du point O . On connaît le vecteur vitesse au point A . On sait que pour un mouvement de rotation :

$$\overrightarrow{V_{(A \in S_2/S_1)}} = \overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}} \wedge \overrightarrow{OA} \Rightarrow \|\overrightarrow{V_{(A \in S_2/S_1)}}\| = \|\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}}\| \cdot \|\overrightarrow{OA}\|$$

On peut en déduire $\|\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}}\|$ (en $rad.s^{-1}$). D'autre part,

$$\overrightarrow{V_{(B \in S_2/S_1)}} = \overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}} \wedge \overrightarrow{OB} \Rightarrow \|\overrightarrow{V_{(B \in S_2/S_1)}}\| = \|\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}}\| \cdot \|\overrightarrow{OB}\|$$

Donc le support de $\overrightarrow{V_{(B \in S_2/S_1)}}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}}$ et à \overrightarrow{OB} . On peut donc construire aisément $\overrightarrow{V_{(B \in S_2/S_1)}}$.

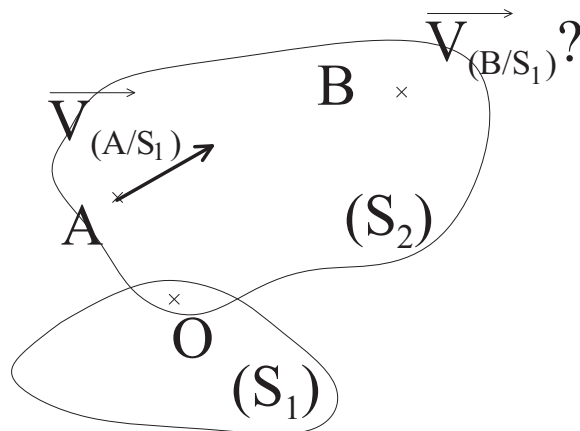


FIG. 2.12 – Cas de solide en rotation

2.8.3.3 Équiprojectivité

On connaît $\overrightarrow{V_{(A \in S_2/S_1)}}$ et le support de $\overrightarrow{V_{(B \in S_2/S_1)}}$.

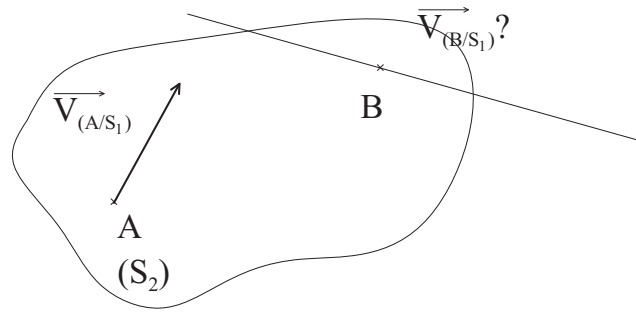


FIG. 2.13 – Utilisation de l'équiprojectivité

On utilise la relation d'équiprojectivité définie précédemment qui s'écrit :

$$\overrightarrow{V_{(A \in S_2/S_1)}} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_{(B \in S_2/S_1)}} \cdot \overrightarrow{AB}$$

On en déduit aisément $\overrightarrow{V_{(B \in S_2/S_1)}}$.

2.8.3.4 Double équiprojectivité

On connaît $\overrightarrow{V_{(A \in S_2/S_1)}}$ et $\overrightarrow{V_{(B \in S_2/S_1)}}$ et on cherche à déterminer la vitesse d'un troisième point $\overrightarrow{V_{(C \in S_2/S_1)}}$. On applique alors deux fois l'équiprojectivité et on en déduit la vitesse de tout point appartenant au solide S_2 et plus particulièrement celle de C .

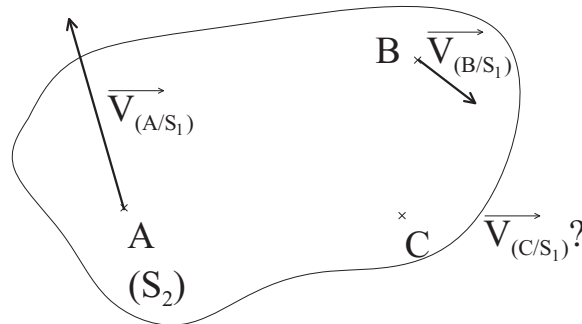


FIG. 2.14 – Utilisation de la double équiprojectivité

2.8.3.5 Composition des vecteurs vitesses

La grande majorité des systèmes mécaniques fait intervenir des chaînes cinématiques composées de plusieurs solides. Afin de déterminer les mouvements ou les vitesses des différents éléments du système considéré, comme pour la cinématique analytique, nous devons faire de la composition de mouvement. Cette composition se traduit graphiquement par une addition vectorielle.

Nous allons étudier le cas du système de déploiement de l'aérofrein du F14 Tomcat. L'aérofrein 1 est en liaison pivot avec la structure porteuse de l'avion 0 au point O. Cet aérofrein est déployé grâce à un vérin hydraulique, composé d'un corps 3 en liaison rotule au

point A avec 0 et d'une tige 2, elle aussi en liaison rotule avec l'aérofrein 1. Le mouvement de 2 par rapport à 3 est une translation et il est possible de connaître aisément la vitesse de sortie de la tige 2 par rapport au corps 3. Il suffit d'utiliser la relation de composition de vitesse au point B pour déterminer les différentes vitesses.

$$\overrightarrow{V_{(B \in 1/0)}} = \overrightarrow{V_{(B \in 2/0)}} = \overrightarrow{V_{(B \in 2/3)}} + \overrightarrow{V_{(B \in 3/0)}}$$

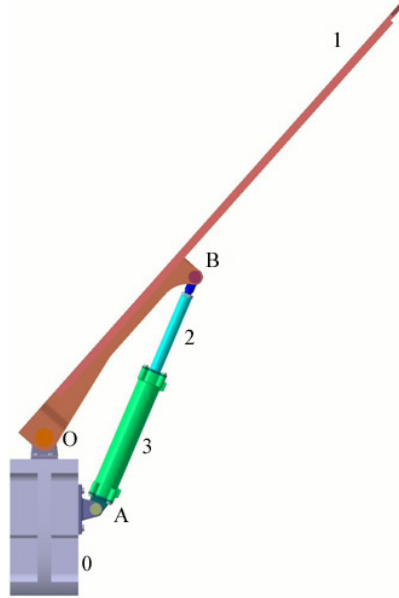


FIG. 2.15 – Utilisation de la composition des vitesses

2.8.3.6 Utilisation du CIR

On peut déterminer géométriquement le CIR de manière extrêmement simple. Il suffit pour cela de connaître le support des vitesses de deux points d'un même solide. Le CIR est situé à l'intersection des deux normales aux vecteurs vitesses. Un fois le CIR connu, on peut utiliser les propriétés de la rotation pour déterminer les vitesses des différents points du solide considéré.

PROPRIÉTÉS 2 Lorsque trois solides S_0, S_1, S_2 sont en mouvement plan les uns par rapport aux autres, on peut définir trois CIR, I_{01}, I_{12} et I_{02} . Ces trois CIR sont alignés.

DÉMONSTRATION 1 Soient trois solides S_0, S_1 et S_2 en mouvement plan sur plan de normale \vec{z} . On note respectivement I_{01}, I_{12} et I_{02} les CIR du mouvement de S_0/S_1 , de S_1/S_2 et de S_0/S_2 .

Par définition, on a :

$$\overrightarrow{V_{(I_{02} \in S_0/S_2)}} = \vec{0} = \overrightarrow{V_{(I_{02} \in S_0/S_1)}} + \overrightarrow{V_{(I_{02} \in S_1/S_2)}}$$

or

$$\overrightarrow{V_{(I_{02} \in S_0/S_1)}} = \overrightarrow{V_{(I_{01} \in S_0/S_1)}} + \overrightarrow{\Omega_{(S_0/S_1)}} \wedge \overrightarrow{I_{01}I_{02}}$$

et

$$\overrightarrow{V_{(I_{02} \in S_1/S_2)}} = \overrightarrow{V_{(I_{12} \in S_1/S_2)}} + \overrightarrow{\Omega_{(S_1/S_2)}} \wedge \overrightarrow{I_{12}I_{02}}$$

on trouve alors

$$\overrightarrow{\Omega_{(S_0/S_1)}} \wedge \overrightarrow{I_{01}I_{02}} + \overrightarrow{\Omega_{(S_1/S_2)}} \wedge \overrightarrow{I_{12}I_{02}} = \vec{0}$$

donc

$$\vec{z} \wedge \left(\omega_{S_0/S_1} \cdot \overrightarrow{I_{01}I_{02}} + \omega_{S_1/S_2} \cdot \overrightarrow{I_{12}I_{02}} \right) = \vec{0}$$

\vec{z} étant non nul, alors

$$\omega_{S_0/S_1} \cdot \overrightarrow{I_{01}I_{02}} + \omega_{S_1/S_2} \cdot \overrightarrow{I_{12}I_{02}} = \vec{0}$$

Donc, les 3 CIR I_{01} , I_{12} et I_{02} sont alignés.

2.9 Base et roulante

On étudie le mouvement plan sur plan d'un solide S_1 par rapport à un repère noté $R_0 (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. On note $R_1 (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, le repère associé au solide S_1 . On note $I_{(S/R_0)}$ le centre instantané de rotation du solide S par rapport au repère R_0 .

Au cours du mouvement de S_1 par rapport au repère R_0 , le point $I_{(S_1/R_0)}$ peut changer de position par rapport au repère R_0 mais aussi par rapport au solide, et donc par rapport au repère $R_1 (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

2.9.1 Base

La base du mouvement du solide S_1 par rapport à R_0 correspond à la trajectoire du Centre Instantané de Rotation $I_{(S_1/R_0)}$ par rapport au repère $R_0 (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

2.9.2 Roulante

La roulante du mouvement du solide S_1 par rapport à R_0 correspond à la trajectoire du Centre Instantané de Rotation $I_{(S_1/R_0)}$ par rapport au repère $R_1 (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ lié au solide S .

REMARQUE 14 Par définition, la vitesse du CIR $\overrightarrow{V_{(I \in S_1/R_0)}} = \vec{0}$, la base et la roulante d'un mouvement sont deux courbes tangentes à tout instant au point $I_{(S_1/R_0)}$ et qui roulent sans glisser l'une sur l'autre en ce point.

REMARQUE 15 Dans le mouvement inverse ou $R_1 (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est pris comme référence, le CIR reste le même mais la base et la roulante sont inversées.

Chapitre 3

Modélisation cinématique d'un système mécanique

Lors de l'étude ou de la conception d'un système mécanique, on utilise un grand nombre d'outils (cinématique, statique, dynamique, résistance des matériaux, etc.). L'utilisation de ces outils est directement liée à la mise en place d'hypothèses simplificatrices. En effet, ces outils ne s'appliquent pas sur l'objet réel mais sur une représentation mathématique plus ou moins simpliste du réel : le modèle.

La modélisation cinématique a pour objet la constitution d'un outil de calcul permettant de valider ou de vérifier par le calcul les performances mécaniques (cinématiques, statiques ou dynamiques) d'un système.

Il existe autant de modélisation du réel que de problème ou de personnes effectuant la modélisation. Il faut donc toujours garder à l'esprit que tous les calculs sont fait à partir d'un modèle (plus ou moins pertinent) et qu'il faut vérifier la validité des hypothèses ainsi que la pertinence des résultats pour le système réel.

La modélisation d'un système mécanique se décompose en quatre points distincts :

- la (ou les) notion(s) de solide,
- la notion de liaison mécanique et les modèles associés,
- la notion de graphe de structure et de schéma cinématique,
- la notion d'actions mécaniques.

Nous verrons au chapitre suivant comment modéliser simplement (!) les actions mécaniques appliquées à un système mécanique.

“Un modèle est une abstraction de la réalité qui ressemble suffisamment à l'objet modélisé pour qu'il soit possible de répondre à certaines questions concernant cet objet en consultant le modèle.” (Peter FREEMAN)

“Un modèle peut être défini comme étant une image de la réalité, l'expression de quelque chose que nous cherchons à appréhender, représentée en des termes que nous pensons comprendre.” (Gérald M. WEINBERG)

3.1 Modélisation d'un solide

Selon le type d'étude à mener, on utilise différents modèles pour représenter un solide matériel.

3.1.1 Solide indéformable

En cinématique du solide, et notamment en avant-projet, on utilise souvent le modèle de solide localement et globalement indéformable. Les pièces sont supposées infiniment rigides. Un solide S est dit indéformable lorsqu'à tout instant t , la distance entre deux points quelconques A et B , est constante. Mathématiquement, on peut écrire que $\overline{AB}^2 = Cste$.

3.1.2 Solide localement déformable

Le modèle de solide localement et globalement indéformable atteint ses limites en étude des contacts. En effet, lorsque deux solides sont en contact, la pression de contact engendre des contraintes et des déformations dans les solides au voisinage de leurs surfaces communes. Le contact ponctuel par exemple, n'est pas envisageable dans la réalité, il donnerait une pression de contact infinie ! Dans l'étude des actions de contact, il est alors d'usage de modéliser l'un des deux solides, ou les deux (modèle de Hertz), déformables localement.

3.1.3 Solide déformable

En mécanique des structures (programme de 2nd année), on étudie par exemple la déformation de pièces mécaniques sous l'action de chargements. Il est alors obligatoire de considérer que le solide est déformable. Cependant, les déformations du corps sont supposées très petites (ce qui est vrai dans la majorité des cas) et sans influence sur l'intensité et la direction des forces appliquées.

3.2 Modélisation des liaisons entre solides

Il existe autant de modèles de liaisons que de point de vue "métier" sur la question. On pourra distinguer des liaisons suivants de nombreux facteurs :

- avec ou sans jeu,
- avec ou sans dissipation d'énergie (liaison parfaite),
- démontable ou permanente,
- rigide ou élastique,
- directe ou par élément interposé...

C'est en combinant ces différents options qu'on mettra en place des modèles permettant de déterminer l'ensemble des performances d'un mécanisme : vitesses, efforts, résistance, usures, faisabilité, rigidité...

3.2.1 Degrés de liberté

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère local, associé à la liaison entre deux solides 1 et 2. Le nombre de degrés de liberté d'une liaison entre deux solides, est le nombre de mouvements élémentaires indépendants que la liaison autorise. Au maximum, ce nombre est égal à 6¹ :

- 3 translations T_x, T_y, T_z , dans les direction principales du repère R ,
- 3 rotations R_x, R_y, R_z , autour d'axes parallèles aux axes du repère R .

On note m le nombre de degrés de liberté d'une liaison.

Le nombre de degrés de liaison est au contraire le nombre de mouvements élémentaires indépendants que la liaison interdit. Dans l'espace, le degré de liaison vaut $(6 - m)$ ².

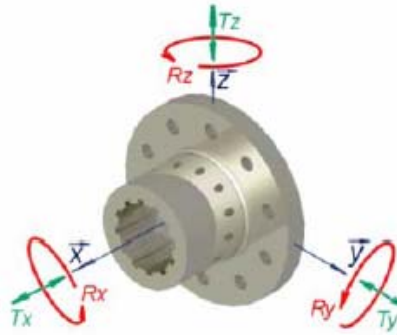


FIG. 3.1 – Degrés de liberté

3.2.2 Géométrie des contacts

On appelle liaison mécanique tout obstacle avec un autre solide, qui supprime au moins un degré de liberté. De ce fait la nature des liaisons mécaniques dépend de la forme de la zone du contact mutuel entre les solides considérés. Cette zone de contact est totalement tributaire des surfaces en contact. L'analyse et la modélisation des liaisons est d'abord une analyse géométrique des contacts.

Il faut donc savoir modéliser la nature du contact. Dans la réalité, quel que soit le cas, il y a toujours une petite surface... dans le modèle (TAB. 3.2, p. 46), il y aura un :

- contact ponctuel (sphère/plan),
- contact linéique (sphère/cylindre, cylindre/plan)
- contact surfacique (sphère/sphère, cylindre/cylindre, plan/plan).

3.2.3 Liaison parfaite

L'étude des liaisons réelles existantes entre les différentes pièces d'un mécanisme est délicate et difficile. En effet, les défauts entre les surfaces de contact (rugosité, défaut de

1. Dans le cas d'un mouvement plan, ce nombre de degrés de liberté maximal tombe à 3 (deux translations dans le plan et une rotation autour de la normale au plan).

2. Dans le plan, le degré de liaison vaut $(3 - m)$

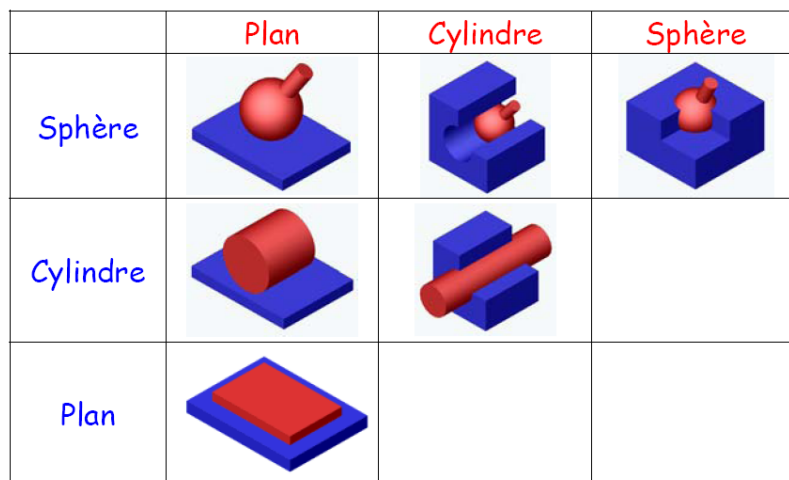


FIG. 3.2 – Différents types de contacts élémentaires

forme), la présence de jeu, la déformation des pièces, les frottements, et l'usure écarte le modèle théorique de la liaison de la réalité. Afin de pouvoir étudier le fonctionnement d'un mécanisme, il est nécessaire de modéliser les liaisons entre les différentes pièces.

Une liaison est dite parfaite si:

- le contact s'établit théoriquement en un point, sur une ligne ou sur une surface de définition géométrique simple (plan, sphère, cylindre, surface hélicoïdale, ...),
- les surfaces de contact sont supposées géométriquement parfaites et indéformables,
- la liaison est sans jeu, sans frottement ni adhérence.

REMARQUE 16 Dans une liaison parfaite, la puissance dissipée par les intefforts est nulle quels que soient les mouvements autorisés par la liaison.

REMARQUE 17 Bien entendu, cette notion de liaison parfaite est un modèle purement théorique...

3.3 Les liaisons parfaites normalisées

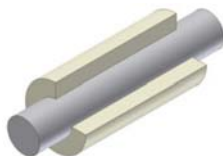
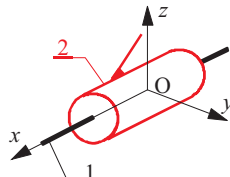
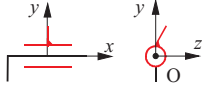
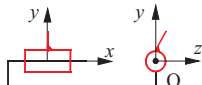
La norme NF EN ISO 3952-1 présente neuf liaisons normalisées que l'on peut décomposer en liaisons élémentaires et en liaisons composées (la représentation en perspective ne fait pas l'objet d'une normalisation, elle n'est que "fortement conseillée"). Dans certains cas, l'appellation ou la représentation de l'ancienne norme NF E 04-015-1, plus explicite, est donnée.

3.3.1 Liaisons élémentaires

Une liaison élémentaire entre deux solides S_1 et S_2 est réalisée à partir d'un unique couple de surfaces de contact (sphère/sphère, sphère/plan, plan/plan, cylindre/cylindre, cylindre/plan ou sphère/cylindre).


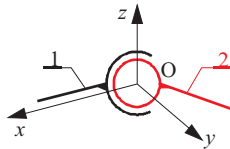
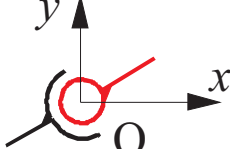
3.3.1.1 Liaison pivot glissant

Deux solides sont en liaison pivot glissant si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible résulte d'une rotation et d'une translation par rapport à un axe.

Pivot glissant d'axe (O,\vec{x}) (contact cylindre/cylindre)		
Degrés de liberté	Torseur cinématique	
2 degrés de liberté $\begin{pmatrix} Rx & Tx \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\left\{ \mathcal{V}_{(2/1)} \right\} =_{\forall P \in (O,\vec{x})} \begin{pmatrix} \omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x},_,_)}$	
La forme littérale du torseur cinématique est valable en tout point de l'axe (O,\vec{x}) et dans toute base contenant le vecteur \vec{x} .		
Exemple	Schématisation spatiale	Schématisation plane
		<div>NF </div> <div>ISO </div>

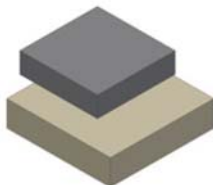
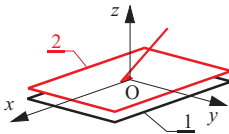
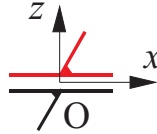
3.3.1.2 Liaison sphérique ou rotule

Deux solides sont en liaison sphérique ou rotule si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible est une rotation autour d'un point.

Sphérique (ou rotule) de centre O (contact sphère/sphère)		
Degrés de liberté	Torseur cinématique	
3 degrés de liberté $\begin{pmatrix} Rx & 0 \\ Ry & 0 \\ Rz & 0 \end{pmatrix}$	$\left\{ \mathcal{V}_{(2/1)} \right\} =_O \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(_, _, _)}$	
La forme littérale du torseur cinématique est valable dans n'importe quelle base centrée sur le point O .		
Exemple	Schématisation spatiale	Schématisation plane
		

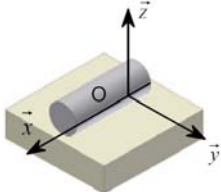
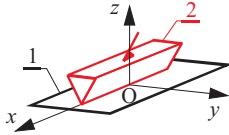
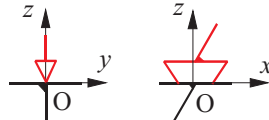
3.3.1.3 Liaison appui plan

Deux solides sont en liaison appui plan si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible résulte d'une rotation autour d'un axe et de la translation le long de deux axes perpendiculaires au premier.

Appui plan de normale \vec{z} (contact plan/plan)		
Degrés de liberté	Torseur cinématique	
3 degrés de liberté $\begin{pmatrix} 0 & Tx \\ 0 & Ty \\ Rz & 0 \end{pmatrix}$	$\left\{ \mathcal{V}_{(2/1)} \right\}_{\forall P} = \begin{Bmatrix} 0 & V_x \\ 0 & V_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(_, _, \vec{z})}$	
La forme littérale du torseur cinématique est valable en tout point de l'espace et dans toute base contenant le vecteur \vec{z} .		
Exemple	Schématisation spatiale	Schématisation plane
		


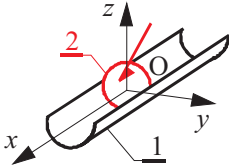
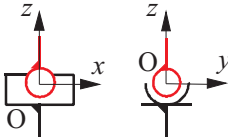
3.3.1.4 Liaison linéaire rectiligne (ancienne norme NF E 04-015-1)

Deux solides sont en liaison linéaire rectiligne si le seul mouvement relatif possible résulte d'une rotation autour de deux axes et de la translation le long de deux autres axes, l'une des rotations et l'une des translations étant relatives au même axe.

Linéaire rectiligne d'axe (O,\vec{x}) et de normale \vec{z} (contact cylindre/plan)		
Degrés de liberté	Torseur cinématique	
4 degrés de liberté $\begin{pmatrix} Rx & Tx \\ 0 & Ty \\ Rz & 0 \end{pmatrix}$	$\left\{ \mathcal{V}_{(2/1)} \right\}_O = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ 0 & V_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	
La forme littérale du torseur cinématique est valable en tout point du plan (O,\vec{x},\vec{z}) .		
Exemple	Schématisation spatiale	Schématisation plane
		

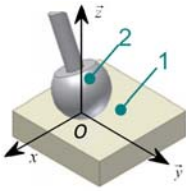
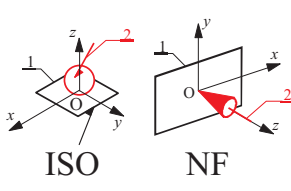
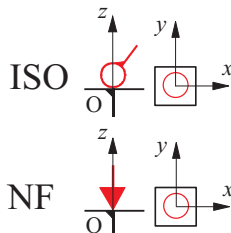
3.3.1.5 Liaison sphère-cylindre ou linéaire annulaire

Deux solides sont en liaison linéaire annulaire si le seul mouvement relatif possible résulte d'une rotation autour d'un point et d'une translation suivant un axe passant par ce point.

Sphère-cylindre de centre O et de direction \vec{x} (contact sphère/cylindre)		
Degrés de liberté	Torseur cinématique	
4 degrés de liberté $\begin{pmatrix} Rx & Tx \\ Ry & 0 \\ Rz & 0 \end{pmatrix}$	$\left\{ \mathcal{V}_{(2/1)} \right\}_O = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, _, _)}$	
La forme littérale du torseur cinématique est valable dans n'importe quelle base comportant le vecteur \vec{x} centrée sur le point O .		
Exemple	Schématisation spatiale	Schématisation plane
		

3.3.1.6 Liaison sphère-plan ou ponctuelle

Deux solides sont en liaison ponctuelle si le seul mouvement relatif possible résulte de la rotation autour d'un point et de la translation le long de deux axes concourants en ce point.

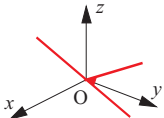
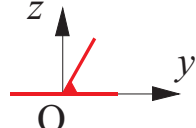
Sphère-plan ou ponctuelle de normale (O, \vec{z}) (contact sphère/plan)		
Degrés de liberté	Torseur cinématique	
5 degrés de liberté $\begin{pmatrix} Rx & Tx \\ Ry & Ty \\ Rz & 0 \end{pmatrix}$	$\left\{ \mathcal{V}_{(2/1)} \right\}_O = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(_, _, \vec{z})}$	
La forme littérale du torseur cinématique est valable en tout point de l'axe (O, \vec{z}) dans toute base comportant la normale au contact.		
Exemple	Schématisation spatiale	Schématisation plane
		

3.3.2 Liaisons composées

Une liaison composée est réalisée à l'aide de plusieurs couples de surfaces de contact positionnés de manière cohérente.


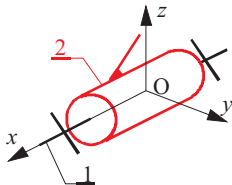
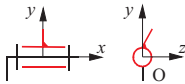
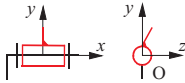
3.3.2.1 Liaison encastrement

Deux solides sont en liaison encastrement s'il n'existe aucun degré de liberté entre eux.

Encastrement		
Degrés de liberté	Torseur cinématique	
0 degrés de liberté	$\left\{ \mathcal{V}_{(2/1)} \right\}_{\forall P} = \left\{ 0 \right\}_{(_, _, _)}$	
La forme littérale du torseur cinématique est valable en tout point P de l'espace et dans toute base.		
Exemple	Schématisation spatiale	Schématisation plane
		

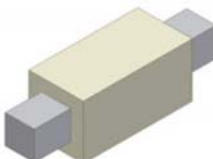
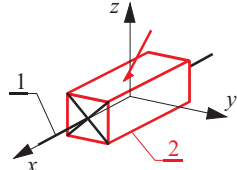
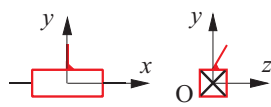
3.3.2.2 Liaison pivot

Deux solides sont en liaison pivot si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible est une rotation autour d'un axe.

Pivot d'axe (O, \vec{x})		
Degrés de liberté	Torseur cinématique	
1 degré de liberté	$\left\{ \mathcal{V}_{(2/1)} \right\}_{\forall P \in (O, \vec{x})} = \left\{ \begin{matrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_{(\vec{x}, _, _)}$	
La forme littérale torseur cinématique est valable en tout point de l'axe (O, \vec{x}) et dans toute base contenant le vecteur \vec{x} .		
Exemple	Schématisation spatiale	Schématisation plane
		<div><div>NF</div><div></div></div> <div><div>ISO</div><div></div></div>


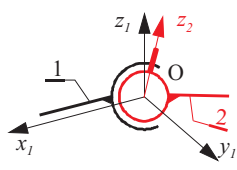
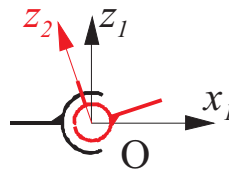
3.3.2.3 Liaison glissière

Deux solides sont en liaison glissière si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible est une translation le long d'un axe.

Glissière de direction \vec{x}		
Degrés de liberté	Torseur cinématique	
1 degré de liberté $\begin{pmatrix} 0 & Tx \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\left\{ \mathcal{V}_{(2/1)} \right\}_{\forall P} = \begin{Bmatrix} 0 & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, _, _)}$	
La forme littérale du torseur cinématique est valable en tout point P et dans toute base contenant le vecteur \vec{x} .		
Exemple	Schématisation spatiale	Schématisation plane
		


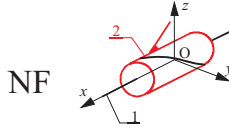
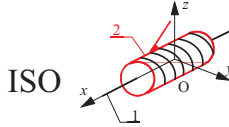
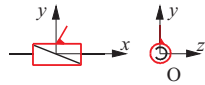
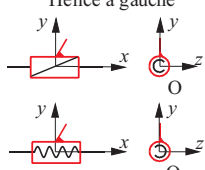
3.3.2.4 Liaison sphérique à doigt

Deux solides sont en liaison sphérique à doigt si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible résulte de la rotation par rapport à deux axes concourants.

Sphérique à doigt (d'axe de doigt (O, \vec{z}_2) et de plan de rainure $(\vec{x}_1, O, \vec{z}_1)$)		
Degrés de liberté	Torseur cinématique	
2 degrés de liberté $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Ry & 0 \\ Rz & 0 \end{pmatrix}$	$\left\{ \mathcal{V}_{(2/1)} \right\}_O = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$	
La forme littérale du torseur cinématique est valable au point O .		
Exemple	Schématisation spatiale	Schématisation plane
		

3.3.2.5 Liaison hélicoïdale

Deux solides sont en liaison hélicoïdale si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible résulte d'une rotation et d'une translation proportionnelles par rapport à un axe.

Hélicoïdale d'axe (O,\vec{x})		
Degrés de liberté	Torseur cinématique	
<p>1 degré de liberté</p> $\begin{pmatrix} Rx & Tx \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ <p>Rx et Tx sont liés.</p>	$\left\{ \mathcal{V}_{(2/1)} \right\} =_{\forall P \in (O,\vec{x})} \begin{Bmatrix} \omega_x & Vx \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},_,_)}$ <p>$Vx = \pm \frac{p}{2\pi} \omega_x$ Hélice à droite (+) ou à gauche (-)</p>	
Le torseur cinématique est valable en tout point de l'axe (O,\vec{x}) et dans toute base contenant le vecteur \vec{x} . p est le pas de la liaison hélicoïdale.		
Exemple	Schématisation spatiale	Schématisation plane
	<p>NF </p> <p>ISO </p>	<p>Hélice à droite</p> <p>NF </p> <p>Hélice à gauche</p> <p>ISO </p>

3.3.3 Associativité des liaisons

Dans la plupart des systèmes mécaniques, les liaisons n'apparaissent pas très clairement, les surfaces de contact qui réalisent ces liaisons sont "éclatées" en plusieurs éléments géométriques dont le rôle est de réaliser une partie de la liaison. Ceci est d'autant plus vrai pour les liaisons à faible degrés de liberté (pivot, glissière) et dont on attend de bonne caractéristiques de guidage et de stabilité.

Afin de réduire le nombre de liaisons dans un mécanisme, on peut être amené lors d'une approche globale à chercher des liaisons fictives équivalentes appelées *liaisons cinématiques équivalentes*.

Deux cas se présentent alors, à la vue du système, soit les liaisons sont en série, soit elles sont en parallèle.

3.3.3.1 Liaisons en série

Il suffit d'utiliser la relation de composition des torseurs cinématiques entre les liaisons en série afin d'obtenir le torseur cinématique de la *liaison cinématique équivalente*. Il suffit

alors d'identifier ce torseur avec les torseurs des liaisons normalisées pour définir de quel type est la liaison équivalente.

EXEMPLE 1 *Étude d'une presse de menuisier*

Nous nous intéressons à une partie d'une presse de menuisier qui permet de bloquer la planche (2) sur un établi lors d'un assemblage (par collage par exemple) grâce au patin (3).

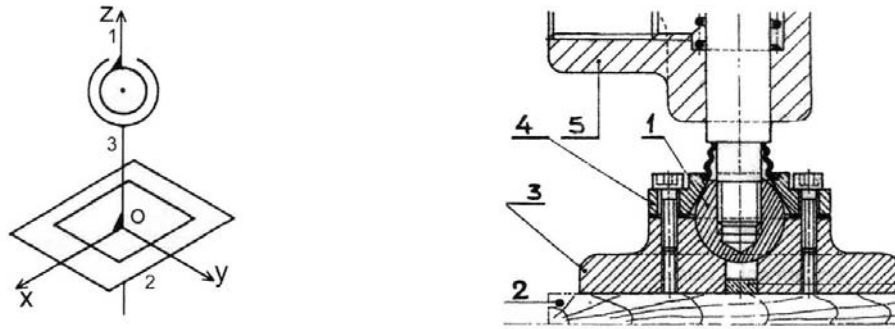


FIG. 3.3 – Mécanisme de serrage de la presse

On écrit le torseur cinématique $\{\mathcal{V}_{(1/3)}\}$ de la liaison de (1/3) et le torseur cinématique $\{\mathcal{V}_{(3/2)}\}$ de (3/2).

$$\left\{ \mathcal{V}_{(1/3)} \right\} =$$

$$\left\{ \mathcal{V}_{(3/2)} \right\} =$$

On utilise alors la relation de composition des torseurs cinématiques :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(1/2)} \right\} = \left\{ \mathcal{V}_{(1/3)} \right\} + \left\{ \mathcal{V}_{(3/2)} \right\} =$$

Ce torseur cinématique correspond au torseur cinématique d'une liaison...

3.3.3.2 Liaisons en parallèle

Dans ce cas, les liaisons à réduire sont entre les deux mêmes solides, on ne peut donc pas utiliser la composition des torseurs cinématique. On résonne donc sur les degrés de liberté supprimés par chacune des liaisons, les degrés de libertés supprimés par chacune des liaisons doivent être identiques.

EXEMPLE 2 *Étude d'une carrellette de maçon*

Une carrellette est composée de deux barres cylindriques parallèles (2) liées à un même support (1). Sur ces deux barres, glisse un mécanisme avec une molette qui entaille le carrelage selon une ligne droite. Il suffit alors d'un petit choc pour que le carrelage se casse suivant une arête rectiligne (fragilisation dû à un effet d'entaille).

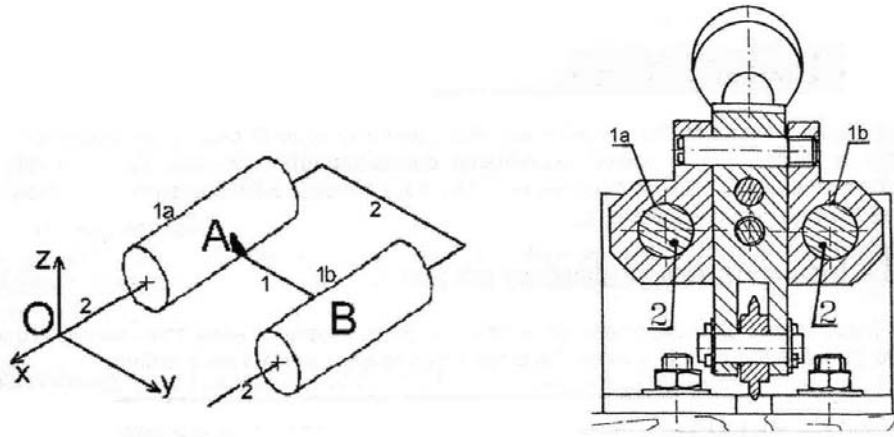


FIG. 3.4 – Mécanisme de guidage de la carrette

On écrit le torseur cinématique $\{\mathcal{V}_{(1a/2)}\}$ de la liaison de (1a/2) au point A et le torseur cinématique $\{\mathcal{V}_{(1b/2)}\}$ de (1b/2) au point B.

$$\{\mathcal{V}_{(1a/2)}\} =$$

$$\{\mathcal{V}_{(1b/2)}\} =$$

On utilise alors la relation de champ de moment du torseur $\{\mathcal{V}_{(1b/2)}\}$ pour l'exprimer au point A :

$$\{\mathcal{V}_{(1b/2)}\} =$$

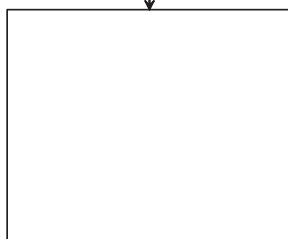
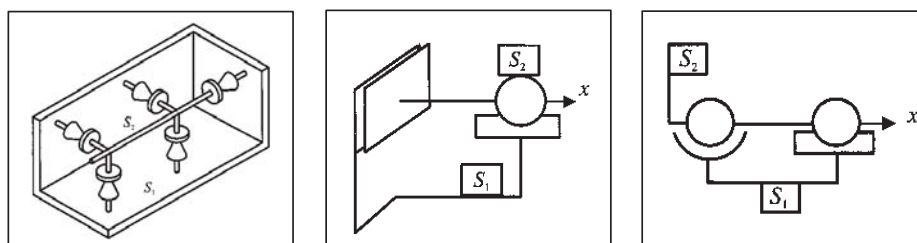
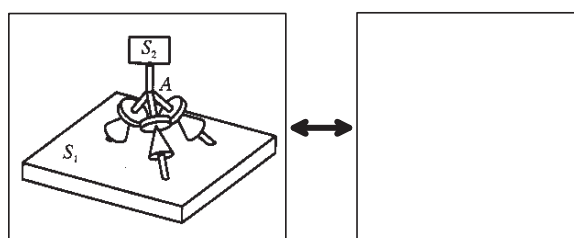
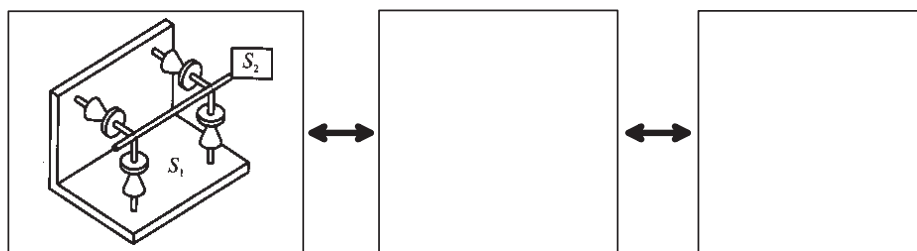
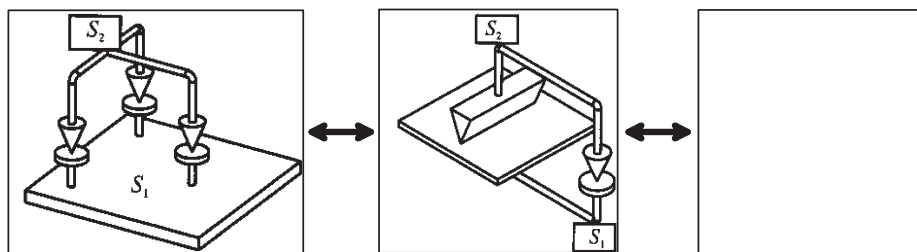
On compare alors les degrés de liberté des deux torseurs qui doivent être identiques.

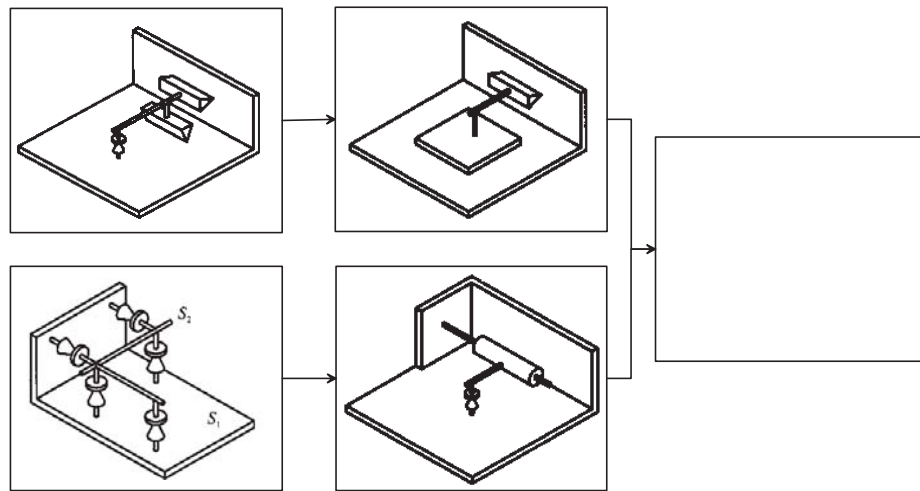
La liaison équivalente à ces deux liaisons pivot glissant en parallèle est donc une liaison...

3.3.3.3 Différentes associations possibles

On peut alors utiliser les notions précédentes pour identifier les liaisons équivalentes sur un système réel à partir de l'étude de l'orientation des normales au contact.

On peut définir différentes associations de liaisons élémentaires afin d'obtenir des liaisons de faible degré de liberté (pivot, glissière).





3.4 Notion de mécanisme

Un mécanisme est un ensemble organisé de pièces mécaniques, reliées entre elles par des liaisons, dont la finalité est le plus souvent d'établir techniquement une relation entrée/sortie (mouvements, efforts) répondant à un besoin exprimé.

Dans un mécanisme, la transmission des efforts s'effectue par des surfaces de contact entre pièces liées. Un des problèmes essentiels du concepteur est de choisir (nature géométrique des surfaces) et de dimensionner (étendue des surfaces, matériaux) correctement ces surfaces.

Dans un mécanisme il y aura toujours un mouvement relatif entre les solides, on définira comme entrée le solide lié "au moteur" et sortie le solide dont le mouvement est utile.

3.4.1 Réversibilité/irréversibilité

Un mécanisme est dit *réversible* si on peut intervertir entrée et sortie. C'est à dire qu'un mouvement du solide en sortie, impliquera le mouvement du solide à l'entrée. (ex : un train d'engrenage, le système vis écrou si on néglige les frottements, la roue arrière et le pédalier de votre vélo, s'il a un pignon fixe datant d'avant l'invention de la roue libre...)

Par opposition un mécanisme où un mouvement en sortie ne peut faire bouger l'entrée est dit *irréversible*.

3.5 Classes d'équivalence cinématique

Pour concevoir ou pour étudier le fonctionnement d'un mécanisme, il est courant de schématiser sa structure à l'aide des représentations normalisées des liaisons simples. Pour cela il faut déterminer les différents ensembles en mouvement les uns par rapport aux autres. Un tel ensemble s'appelle classe d'équivalence cinématique (ou encore ensemble cinématiquement lié). Elle est constituée de pièces immobiles les unes par rapport aux autres :

- soit en permanence : les pièces sont en liaison encastrement,

- soit dans une phase de fonctionnement ; elles pourront être mobiles entre elles dans une autre phase (fonctionnement normal, maintenance, réglage).

En phase de fonctionnement normal, de maintenance, de réglage, ..., un mécanisme peut avoir des sous-ensembles fonctionnels différents. Il faut donc préciser dans quelle phase de fonctionnement on considère le mécanisme pour déterminer les classes d'équivalence cinématiques.

EXEMPLE 3 pompe “5 pistons” Citroën

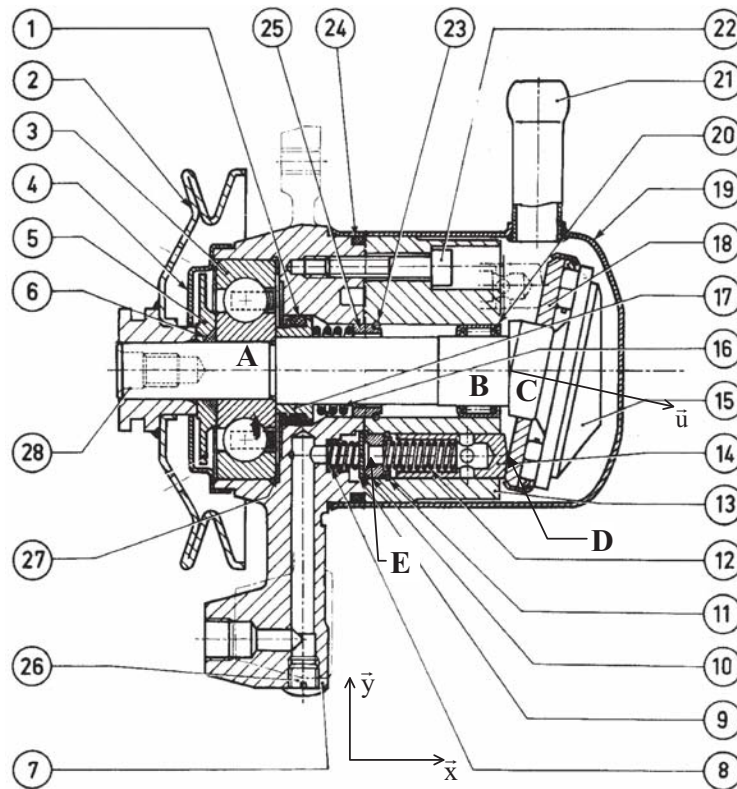


FIG. 3.5 – Dessin d'ensemble de la pompe hydraulique Citroën

En ne tenant compte que d'un unique piston, nous pouvons écrire les classes d'équivalence suivantes :

$$\begin{aligned} \text{corps} = 0 &= \{4, 7, 9, 10, 11, 13, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27\}; & \text{arbre} = 1 &= \{2, 5, 6, 15, 17, 28\}; \\ \text{piston} = 2 &= \{14\}; & \text{plateau} = 3 &= \{18\} \end{aligned}$$

REMARQUE 18 L'ensemble des classes d'équivalence d'un mécanisme doit être représentatif de celui-ci. Toutefois, les pièces déformables (ressorts, rondelles élastiques,...), les éléments de roulements, ne sont en général, pas pris en compte.

3.6 Graphe de structure (graphe de liaison)

Un graphe de structure (ou graphe des liaisons), est un graphe représentant les différentes classes d'équivalence (ce sont les noeuds) reliés entre eux par des traits matérialisant les liaisons. On y ajoute aussi le nom des différentes liaisons ainsi que leurs caractéristiques géométriques.

REMARQUE 19 Pour un graphe de liaison, on peut dire que :

- Les patatoïdes représentent les classes d'équivalence, désignées soit par un chiffre (par exemple le plus petit repère des pièces de la classe) soit par une lettre.
- Il synthétise le mécanisme sous forme d'une association de classes d'équivalences et de liaisons.
- Il peut être ouvert ou fermé, on parlera de boucle.
- 2 liaisons peuvent rejoindre les mêmes classes, on parle alors de liaisons en parallèles.

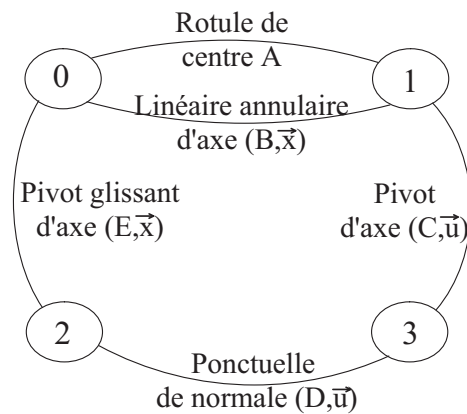


FIG. 3.6 – Graphe de structure de la pompe hydraulique Citroën

3.7 Schéma cinématique

Le schéma cinématique est une représentation plane ou spatiale, simplifiée, du mécanisme, utilisant les symboles normalisés des liaisons entre solides. C'est un outil de communication technique, un préalable à tout calcul de mécanique. Il peut être minimal lorsqu'il correspond au graphe de structure minimal. Dans d'autres cas, on l'appelle schéma cinématique d'architecture. Il peut donc exister plusieurs schémas cinématiques d'un même mécanisme selon le degré de finesse de l'étude envisagée.

Le schéma cinématique à deux fonctions principales en mécanique :

- aide à la conception en donnant le principe cinématique de fonctionnement.
- aide à la compréhension du dispositif existant.

Ces schémas cinématiques peuvent être plan ou en perspective (3 dimensions).

REMARQUE 20 Le programme de PTSI utilise seulement le vocabulaire : graphe de structure, schéma technologique, schéma d'architecture, schéma cinématique. Cependant, vous

serez amenés à utiliser les différentes modélisations données ci-dessous avec un vocabulaire associé pas toujours très précis ou même hors programme.

3.7.1 Schéma cinématique minimal

On appelle schéma cinématique minimal celui qui représente un mécanisme avec au plus une liaison mécanique entre deux pièces ou classes d'équivalences. Il tient compte au mieux de la géométrie du système mais n'est pas obligatoirement produit à l'échelle.

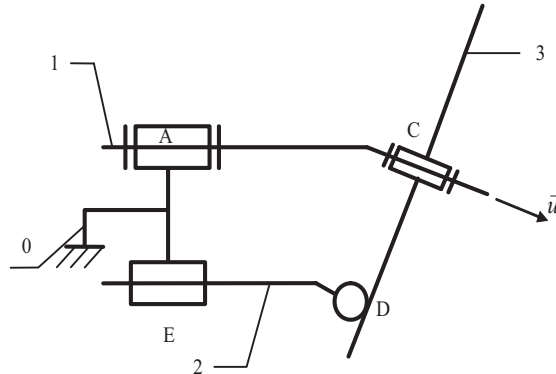


FIG. 3.7 – Schéma cinématique minimal de la pompe Citroën

REMARQUE 21 Attribuer une couleur par classe d'équivalence facilite la lecture ou l'établissement du schéma donc la compréhension du mécanisme. **Il est donc obligatoire de le faire !** Les solides du mécanisme qui se déforment, comme par exemple un ressort, seront bien entendu exclus de notre analyse puisqu'on suppose les solides indéformables...

REMARQUE 22 Utiliser une couleur spécifique (par exemple, le jaune) pour les éléments roulants présents dans le système afin de les faire ressortir... et donc de faire ressortir la liaison qui leur est associée. De toute façon, ils n'appartiennent à aucune classe d'équivalence cinématique !

REMARQUE 23 Afin de tracer aisément (sic!) un schéma cinématique, il est bon d'être méthodique. On suit donc la trame ci-dessous :

- On place les éléments caractéristiques des liaisons (points, axes, normales).
- On place alors les représentations normalisées des liaisons en respectant les couleurs et la géométrie du système.
- On relie alors les liaisons entre elles en respectant au maximum la géométrie du système modélisé.
- Il reste alors à vérifier la cohérence entre le réel et le modèle (Feedback pour parler comme les automaticiens...).

3.7.2 Schéma cinématique fonctionnel

Un schéma cinématique fonctionnel est un schéma cinématique d'un mécanisme sur lequel on ajoute les symboles normalisés de composants technologiques standards.

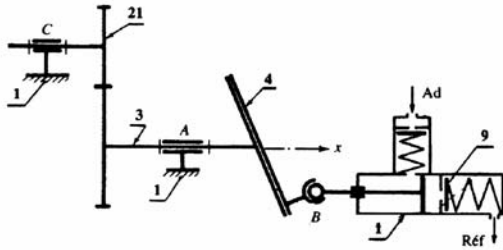


FIG. 3.8 – Pompe à pistons axiaux

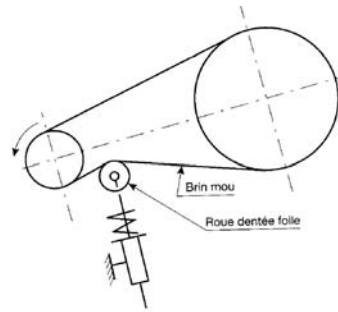


FIG. 3.9 – Chaîne pignon avec roue dentée folle

3.7.3 Schéma d'architecture

Il peut y avoir intérêt à décomposer une liaison en liaisons élémentaires, comme par exemple une pivot réalisée par deux roulements à billes assurant respectivement une liaison rotule et une liaison linéaire annulaire. Cela permet alors, par le calcul de déterminer la part d'actions mécaniques subie par chacun des éléments alors que les actions mécaniques effectivement et globalement transmises par la liaison pivot sont inexploitable.

Le plus souvent, il est produit à l'échelle, il peut alors servir de fond d'esquisse dans des calculs de vitesses et forces. On parle aussi de schéma distributeur des liaisons.

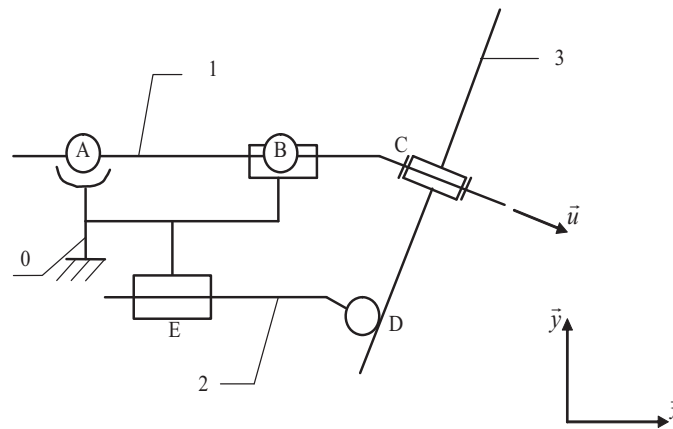


FIG. 3.10 – Schéma cinématique d'architecture de la pompe Citroën

EXEMPLE 4 *Atterrisseur principal de Mirage 2000* On s'intéresse à l'atterrisseur principal de Mirage 2000, composé de la jambe de train 1-2 et de la fusée 6, du vérin contrefiche 3-4 et du compas 5. Le tout est lié à la cellule de l'avion 0.

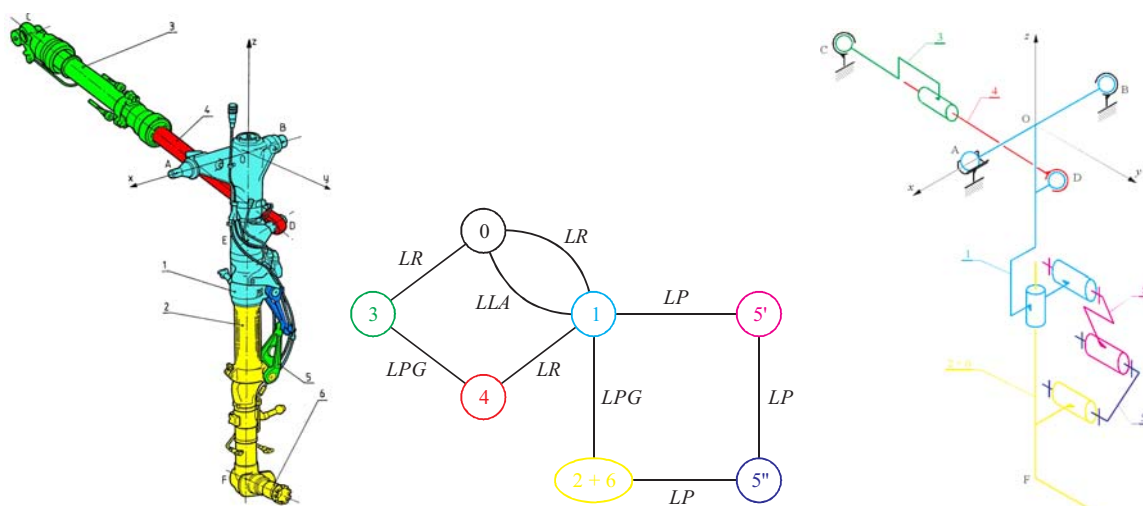


FIG. 3.11 – Graphe de structure et schéma cinématique d'architecture de l'atterrisseur principal de Mirage 2000

3.7.4 Schéma technologique

En utilisant des symboles technologiques, le schéma technologique traduit l'agencement des surfaces fonctionnelles et des composants standards qui composent le mécanisme. On parle aussi de schéma ossature.

Le volume d'une pièce est délimité par un ensemble de surfaces. Parmi ces surfaces, certaines sont donc destinées à être en contact avec d'autre(s) pièce(s). Ce sont des surfaces fonctionnelles car elles ont une fonction précise au sein du système mécanique. Elles permettent de lier les solides entre eux. Il est donc encore plus proche du mécanisme réel... d'un coup d'œil, on voit les solutions technologiques utilisées.

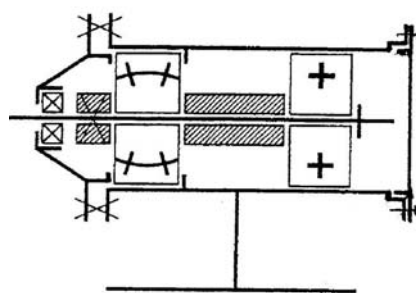


FIG. 3.12 – Schéma technologique d'un guidage en rotation

3.8 Cas instructif des guidages en rotation

Dans le guidage d'un solide par rapport à un autre, certains mouvements peuvent se faire avec de fortes amplitudes, et d'autres sont dus uniquement à la présence de jeux fonction-

nels, de déformations de solides. Bien que petits, ces déplacements sont d'une importance capitale car ils peuvent permettre un montage plus aisé, des tolérances de fabrication plus importantes, des actions mécaniques amoindries.

Le problème est de savoir jusqu'ou dans notre modèle nous devons prendre en compte "les petits jeux". Pour cela, nous utiliserons le rapport L/D avec L la longueur de guidage et D le diamètre du guidage.

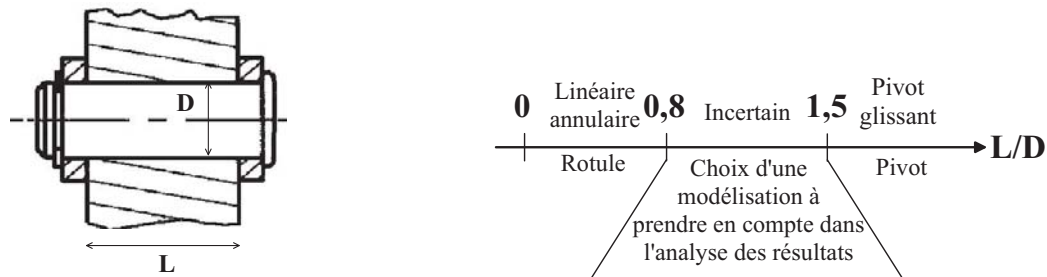


FIG. 3.13 – Modélisation en fonction du rapport L/D

Cette méthode bien que très arbitraire, permet de modéliser assez simplement les guidages de rotation, les valeurs de 0,8 et 1,5 sont à moduler en fonction des matériaux et des procédés de fabrication utilisés. Aussi, nous utiliserons ces valeurs en gardant à l'esprit qu'elles sont critiquables car fonction du contexte industriel.

Le cas du montage des roulements est extrêmement important, ce type de guidage en rotation est très souvent utilisé dans les mécanismes, il faut donc savoir modéliser parfaitement la liaison constituée par un ou plusieurs roulements.

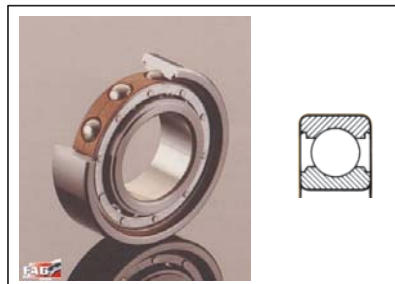


FIG. 3.14 – Exemple de roulement à billes

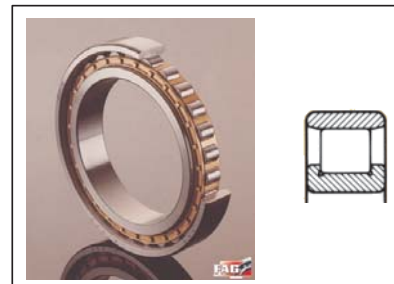


FIG. 3.15 – Exemple de roulement à rouleaux

Un roulement, quel qu'il soit, doit être positionné axialement par rapport à l'arbre et à l'alésage, voici les différentes configurations de positionnement axial.

Les carrés noirs (FIG. 3.16, p. 63) représentent les arrêts axiaux (circlips, épaulement, entretoise, rondelle élastique, écrou, etc).

Un montage est en général basé sur deux paliers, l'un est monté fixe, l'autre est monté libre. Le palier fixe assure le guidage radial ainsi que le maintien axial dans les deux sens. Ce palier fixe est donc arrêté axialement par rapport à l'arbre et à l'alésage. Le palier mobile, lui, n'assure que le guidage radial, il doit permettre un déplacement axial de façon à éviter

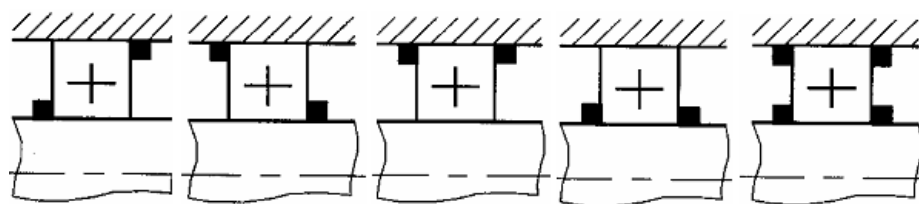


FIG. 3.16 – Différents types d'arrêt axiaux pour des roulements

un coincement des roulements suite à une dilatation de l'arbre³.

3.8.0.1 Exemples de montage de roulements

Il existe un grand nombre de montages différents de roulements, nous n'allons pas développer ici les différents types de montage possibles⁴.

Dans le cas d'un arbre tournant par rapport à la direction de la charge fixe, les bagues intérieures des deux paliers sont montées serrées sur l'arbre. On place alors un arrêt axial de chaque côté des bagues intérieures (écrou à encoches, circlips, épaulement, entretoise, etc.). On arrête axialement uniquement la bague extérieure du palier fixe.

Dans le cas d'un logement tournant par rapport à la direction de la charge fixe, les bagues extérieures sont montées serrées dans le logement avec 4 arrêts axiaux et il n'y a que deux arrêts axiaux sur l'arbre.

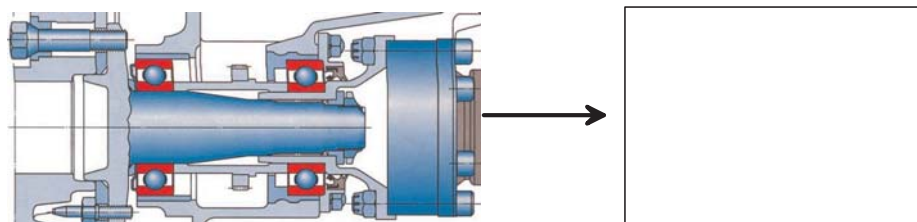


FIG. 3.17 – Ancien montage sur roue arrière motrice d'une Ferrari 348 (Document SKF)

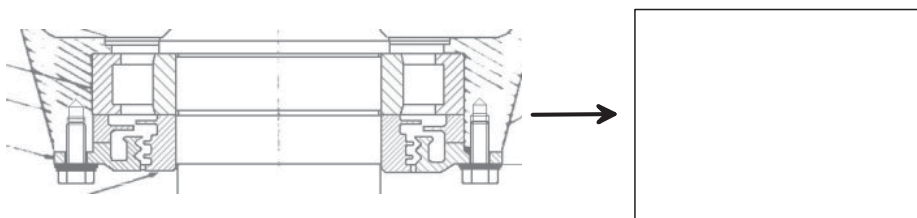


FIG. 3.18 – Cas de guidage avec étanchéité sympathique...

3. Pour les roulement à rouleaux ou à aiguilles, la mobilité axiale est assurée par les éléments roulants. Dans ce cas, toutes les bagues sont fixées.

4. Rendez vous en PT ou en École d'Ingénieurs pour en savoir plus...

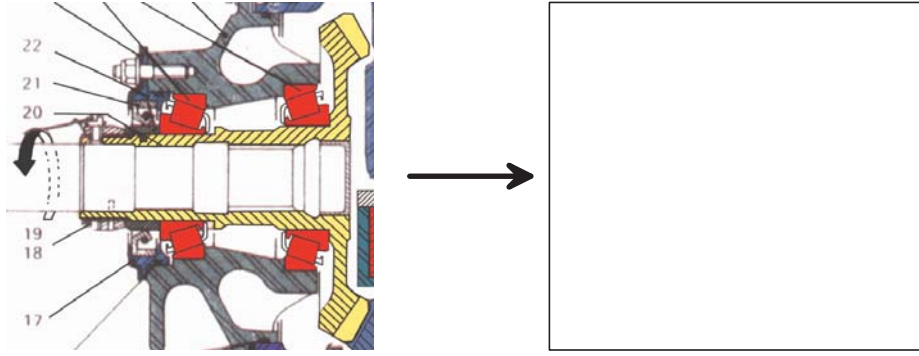


FIG. 3.19 – Boîte de transmission arrière de Gazelle (SA 341)

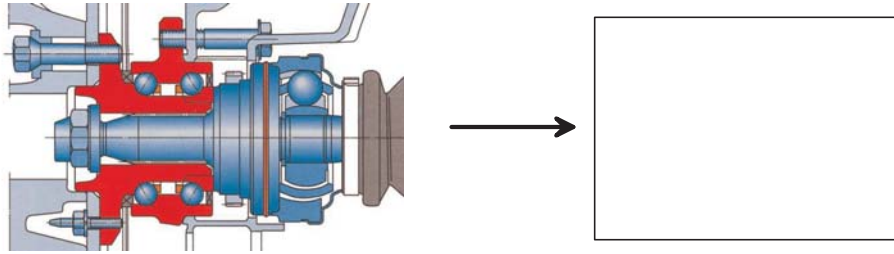


FIG. 3.20 – Nouveau montage sur roue arrière motrice d'une Ferrari 348 (Document SKF)

Les deux derniers montages utilisent des roulements à contact oblique (roulement à billes à contact oblique et roulement à rouleaux coniques) et sont appelés *montages en O*, il existe aussi un *montage en X* (montage généralement moins coûteux). Les montages en O permettent une grande rigidité même avec un écartement faible entre les paliers. Les montages en O sont réservés aux cas où le logement est tournant ou lors d'un arbre tournant avec un chargement en porte à faux. Le montage en X est utilisé pour les arbres tournant avec un chargement entre les deux paliers (engrenage, etc.). Ce type de roulement nécessite une précharge (nécessité de réglage) pour fonctionner correctement. Cette précharge est réalisée par l'utilisation d'écrous ou de cales de réglage.

3.9 Torseur des petits déplacements

On s'aperçoit que le modèle de la liaison va dépendre parfois des petits mouvements possibles (jeu) entre les 2 solides S_1 et S_2 . Pour faire apparaître et modéliser les petits mouvements admissibles par la liaison de S_2/S_1 , nous allons intégrer les éléments de réduction du torseur cinématique $\{\mathcal{V}_{(S_2/S_1)}\}$.

Soit un solide S_2 en mouvement par rapport à un autre S_1 . Soient deux points quelconques A et B du solide indéformable S_2 . On a :

$$\forall t, \quad \forall A, B \in S_2, \quad \overrightarrow{V_{(B \in S_2/S_1)}} = \overrightarrow{V_{(A \in S_2/S_1)}} + \overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Soit dt , un intervalle de temps élémentaire, on peut écrire :

$$dt \cdot \overrightarrow{V_{(B \in S_2/S_1)}} = dt \cdot \overrightarrow{V_{(A \in S_2/S_1)}} + dt \cdot \overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

On pose alors :

$$\overrightarrow{\delta u_{(B, S_2/S_1)}} = dt \cdot \overrightarrow{V_{(A \in S_2/S_1)}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\delta \theta_{(S_2/S_1)}} = dt \cdot \overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}}$$

DÉFINITION 5 Le torseur des petits déplacements du solide S_2 dans son mouvement par rapport à S_1 s'écrit :

$$\left\{ \delta D_{(S_2/S_1)} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\delta \theta_{(S_2/S_1)}} \\ \overrightarrow{\delta u_{(A, S_2/S_1)}} \end{array} \right\}$$

La résultante $\overrightarrow{\delta \theta_{(S_2/S_1)}}$ est appelée vecteur petite rotation du solide S_2 par rapport à S_1 .

Le moment $\overrightarrow{\delta u_{(A, S_2/S_1)}}$ est appelé vecteur petit déplacement de S_2 par rapport à S_1 au point A .

Le petit déplacement répond à la relation de champ des moments d'un torseur donc :

$$\overrightarrow{\delta u_{(B, S_2/S_1)}} = \overrightarrow{\delta u_{(A, S_2/S_1)}} + \overrightarrow{\delta \theta_{(S_2/S_1)}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

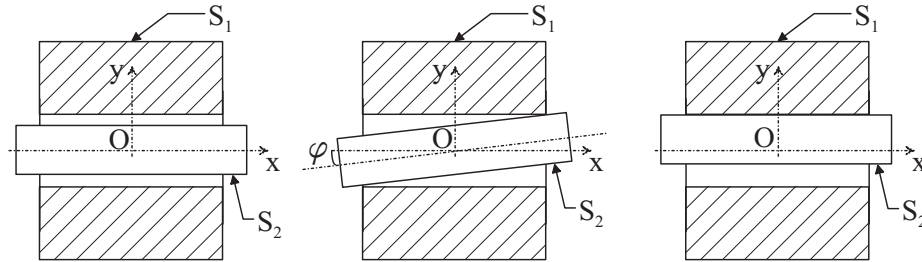


FIG. 3.21 – Différentes positions possibles de l'arbre pour une liaison avec du jeu

Cette liaison entre l'arbre S_2 et l'alésage S_1 devrait permettre uniquement un mouvement de rotation et de translation autour de l'axe (O, \vec{x}) . La présence d'un petit jeu ($D_1 > D_2$) entre les deux solides permet un certain nombre de petits mouvements entraînant des petits déplacements des points de S_2 par rapport à S_1 . L'arbre S_2 peut donc avoir un petit mouvement de rotation autour de l'axe (O, \vec{z}) ou (O, \vec{y}) ou un mouvement de translation radial comme montré ci-dessus (FIG. 3.21, p. 65).

3.10 Chaînes de solides

3.10.1 Chaînes de solides ouvertes

Un mécanisme est dit à chaîne ouverte s'il n'existe pas de boucle. En partant du bâti, on va de solide en solide vers un solide terminal (cas typique des bras manipulateurs).

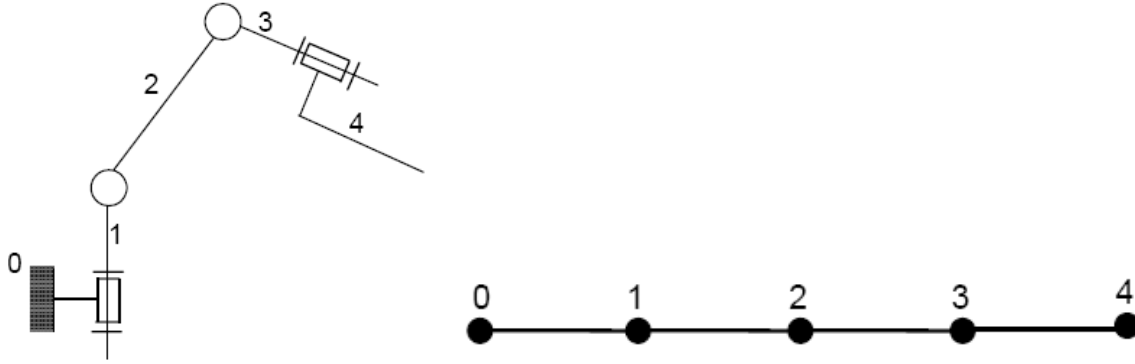


FIG. 3.22 – Cas d'un bras manipulateur

3.10.2 Chaînes de solides fermées

Une chaîne de solides S_1, S_2, \dots, S_n est fermée si le solide initial est le même que le solide final.

On peut déterminer une relation vectorielle dite “de fermeture géométrique” pour la boucle, en écrivant une relation de Chasles entre les centres des liaisons.

On note O_i , avec i allant de 0 à n , les points caractéristiques des liaisons entre les solides.

On peut alors écrire :

$$\overrightarrow{O_0 O_n} = \overrightarrow{O_0 O_1} + \overrightarrow{O_1 O_2} + \dots + \overrightarrow{O_{n-1} O_n} \quad (3.1)$$

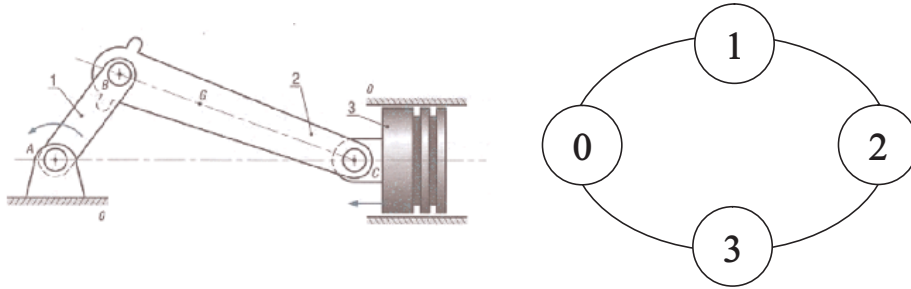


FIG. 3.23 – Système bielle manivelle

Dans le cas du système bielle-manivelle, on peut écrire :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Cette relation peut permettre de déterminer la relation liant l'angle d'orientation de la manivelle et la position du piston.

On peut aussi écrire une fermeture de la chaîne cinématique et ainsi obtenir une relation entre les torseurs cinématiques des différents solides constituant la boucle.

Dans le cas du système bielle-manivelle, cela donne :

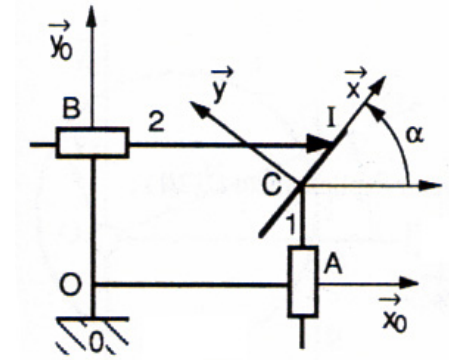
$$\left\{ \mathcal{V}_{(3/0)} \right\} = \left\{ \mathcal{V}_{(3/2)} \right\} + \left\{ \mathcal{V}_{(2/1)} \right\} + \left\{ \mathcal{V}_{(1/0)} \right\}$$

EXEMPLE 5 Étude d'un coin

On associe au bâti 0 le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. On note :

$$\vec{OA} = a \cdot \vec{x}_0 \quad \vec{OB} = b \cdot \vec{y}_0$$

La barre 1 est liée au bâti 0 par une liaison glissière de direction \vec{y}_0 . on note $\vec{AC} = y \cdot \vec{y}_0$. Le repère $R(C, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est lié à la barre 1, on note $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x})$ avec α constant. La barre 2 est liée au bâti par une liaison glissière de direction \vec{x}_0 telle que $\vec{BI} = x \cdot \vec{x}_0$.



Les deux solides 1 et 2 sont en contact au point I, un système non représenté permet d'assurer le maintien du contact en I.

Nous pouvons alors tracer le graphe de structure et caractériser les torseurs cinématiques des différentes liaisons.

Ensuite, nous pouvons effectuer une fermeture géométrique afin de déterminer la relation reliant les paramètres x et y .

Il faut choisir "intelligemment" un axe afin de projeter cette relation pour faire apparaître les deux paramètres et supprimer les inconnues non désirées. Pour cela, nous choisissons de projeter suivant l'axe

On trouve alors la relation suivante :

Nous pouvons ensuite effectuer une fermeture cinématique. Pour ne pas faire intervenir de paramètres inconnus, nous choisissons le point ... afin d'écrire cette fermeture.

La relation sur les vecteurs taux de rotation était prévisible, celle des vitesses nous donne une relation reliant \dot{x} et \dot{y} en la projetant suivant l'axe

On peut donc obtenir une loi d'entrée sortie sans avoir à déterminer les différents paramètres intermédiaires du système. Et même si nous avons besoin de caractériser la vitesse de glissement $\vec{V}_{(I \in 1/2)}$ en I entre 1 et 2 en fonction du paramètre d'entrée \dot{x} , nous pouvons le faire en projetant notre relation des vitesses suivant l'axe

3.10.3 Chaînes de solides complexes

Une chaîne complexe est constituée de plusieurs boucles fermées appelées cycles.

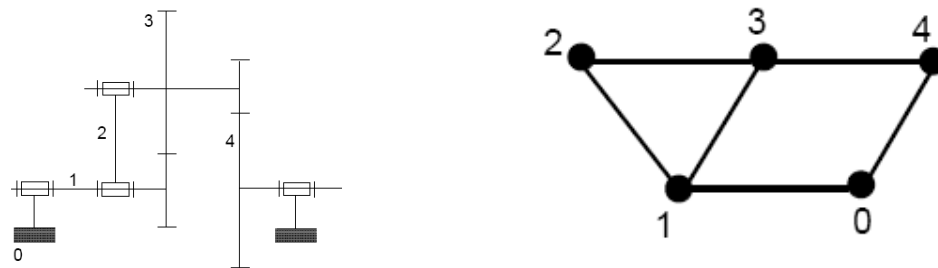


FIG. 3.24 – Cas d'un réducteur à train épicycloïdal

Le nombre cyclomatique du graphe peut être calculé par la formule :

$$\lambda = N_{Liaisons} - N_{Pieces} + 1$$

Il représente le nombre de cycles indépendants suivant lesquels on peut parcourir un chemin fermé. Si on applique les relations de composition des vitesses sur une boucle complète, ce qui revient à écrire des vecteurs nuls, on obtient pour chaque cycle, 6 équations algébriques dont les inconnues sont les paramètres de position de chaque liaison (degrés de liberté) auxquelles il faut retirer le nombre de mobilités du mécanisme (autant de degré pilotes).

Ce nombre permettra de déterminer le degré de mobilité et le degré d'hyperstatisme d'une chaîne complexe fermée.

3.10.4 Notion d'hyperstatisme

D'un point de vue cinématique, une liaison entre deux solides permet d'ôter des degrés de liberté à des solides. Mais si on s'intéresse au point de vue statique ou dynamique, une liaison permet aussi de transmettre des actions mécaniques d'un solide à un autre.

EXEMPLE 6 Cas d'un tabouret à trois pieds

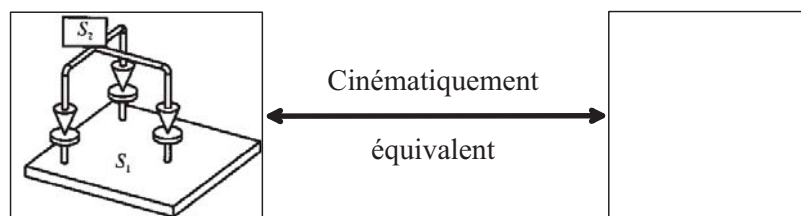


FIG. 3.25 – Modélisation cinématique d'un tabouret à 3 pieds...

Dans ce cas, trois liaisons ponctuelles de normales colinéaires permettent de créer une liaison appui-plan caractéristique d'un tabouret sur le sol. Le système "tabouret" est isostatique, pourtant, dans la majorité des cas, on construit des tabourets à 4 pieds. L'ajout d'un quatrième pied ne change en rien la cinématique du système mais va permettre d'améliorer le comportement statique ou dynamique du tabouret. On construit alors un tabouret hyperstatique.

Lorsque un mouvement entre deux classes d'équivalences est arrêté plusieurs fois on dit que le système est *hyperstatique*.

Par opposition, lorsque la liaison est réalisée par un nombre minimum de surfaces de contacts, le système est dit *isostatique*.

3.10.4.1 Avantages de l'hyperstatisme

L'hyperstatisme dans un mécanisme (ou dans une partie de mécanisme) permet :

- une meilleure répartition des actions mécaniques,
- une augmentation de la rigidité de l'ensemble (application statique),
- une meilleure résistance aux vibrations (applications dynamiques).

3.10.4.2 Inconvénients de l'hyperstatisme

La fabrication, le montage et la conception d'un système hyperstatique sont beaucoup plus délicats, ils nécessitent des contraintes géométriques et dimensionnelles très importantes pour que le montage et le fonctionnement puissent être satisfaisants.

Chapitre 4

Modélisation des actions mécaniques

Les bases de la mécanique générale enseignées actuellement sont directement liées à l'utilisation des trois lois fondamentales de la dynamique développées par **Sir Isaac Newton** dans ses “*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*” en 1687¹. Ces trois lois permettent de développer un formalisme vectoriel faisant apparaître la notion de force, d'action mécanique ou de moment d'une force. Ce chapitre décrit la modélisation utilisée pour définir les actions mécaniques exercées par un système sur un autre. Conjointement au chapitre précédent, il permet de préparer les études futures de statique ou de dynamique sur des modélisations des systèmes réels.

4.1 Lois de Newton

RÉSULTAT 4 (1° Loi de Newton ou Principe de l'inertie)

Par rapport à tout référentiel privilégié Rg , qualifié de galiléen, tout point matériel A , éloigné de tout autre corps a un mouvement rectiligne uniforme.

$$\overrightarrow{V_{(A/Rg)}} = Cste$$

RÉSULTAT 5 (2° Loi de Newton ou Loi fondamentale de la dynamique)

Par rapport à tout référentiel privilégié Rg , qualifié de galiléen, le mouvement d'un point matériel A de masse m soumis à plusieurs forces \overrightarrow{F} , dont la somme est $\sum \overrightarrow{F}$, satisfait à la relation :

$$\sum \overrightarrow{F} = \frac{d\overrightarrow{p}}{dt} \iff \sum \overrightarrow{F} = m \cdot \overrightarrow{\Gamma_{(A/Rg)}}$$

où $\overrightarrow{p} = m \cdot \overrightarrow{V_{(A/Rg)}}$ est appelé vecteur quantité de mouvement de A par rapport à Rg .

RÉSULTAT 6 (3° Loi de Newton ou Principe des actions réciproques)

Si un point matériel A_1 exerce sur un autre point matériel A_2 une force $\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}}$, alors A_2 exerce sur A_1 la force opposée : $\overrightarrow{F_{2 \rightarrow 1}} = -\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}}$.

1. On retrouve d'ailleurs dans cet ouvrage la loi de l'attraction universelle qui nous permet de manière simple et élégante de déterminer les trajectoires des planètes et des satellites dans l'espace avec une précision assez importante.

4.2 Définitions

4.2.1 Actions mécaniques

On appelle *action mécanique*, toute cause susceptible de :

- maintenir un corps en équilibre,
- créer ou modifier le mouvement d'un corps,
- engendrer une déformation sur un corps.

REMARQUE 24 *Le corps en question correspond à tout ou partie d'un système matériel, il peut donc être un solide mais aussi un fluide (liquide ou gaz).*

4.2.2 Les forces

C'est une action mécanique modélisée par le glisseur (P, \vec{F}) . P est le point d'application de la force et \vec{F} un vecteur dont :

- la norme permet de quantifier l'effet de l'action mécanique,
- la direction et le sens permettent de définir l'orientation de l'action mécanique.

On appelle *support de la force*, l'axe défini par le point d'application de la force et par la direction de la force. Une force s'exprime en *Newton* (N).

4.2.3 Moment d'une force

La notion de force n'est pas totalement suffisante pour permettre de représenter toutes les actions mécaniques et notamment la tendance que peut avoir un ensemble de forces à modifier le mouvement de rotation d'un système matériel. En effet, si on soumet un crayon à un système de deux forces \vec{F} égales et opposées à chacune de ses extrémités, il aura tendance à tourner autour de son axe central (O, \vec{z}) , et cela, bien que la somme des efforts appliqués au stylo soit nulle. Il faut donc introduire une méthode permettant de modéliser la tendance qu'aura un ensemble d'actions mécaniques à donner un mouvement de rotation à un système matériel déterminé.

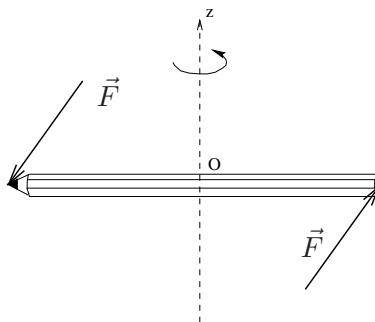


FIG. 4.1 – Exemple d'utilisation de moment d'une force

On introduit alors la notion de moment d'une force en un point. On appelle moment en M d'une force \vec{F} appliquée en P , le vecteur $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{(M,\vec{F})}$ et tel que :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{(M,\vec{F})} = \overrightarrow{MP} \wedge \vec{F} \quad (4.1)$$

Le moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{(M,\vec{F})}$ d'une force \vec{F} s'exprime en *Newton.mètre* (N.m).

EXEMPLE 7 *Cas d'une porte !*

On désire modéliser l'action mécanique exercée par une personne pour refermer une porte. On modélise l'action mécanique exercée sur la porte par une force \vec{F} appliquée au point P .

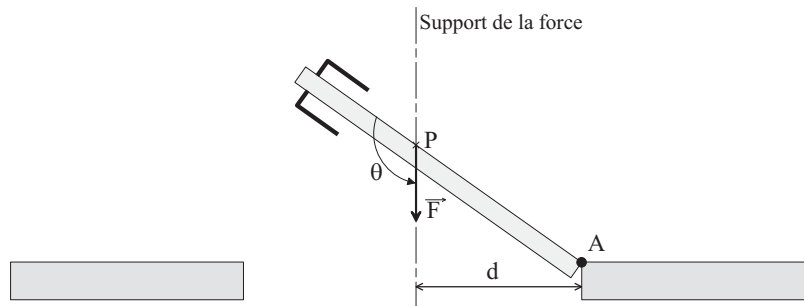


FIG. 4.2 – Modélisation d'une porte...

On peut alors calculer le moment au point A de la force \vec{F} en utilisant la définition d'un moment de force :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{(A,\vec{F} \rightarrow \text{porte})} = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{F}$$

D'après la définition du produit vectoriel, nous savons que ce vecteur $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{(A,\vec{F} \rightarrow \text{porte})}$ est tel que :

- la direction du moment est orthogonale au plan formé par \overrightarrow{AP} et \vec{F} ,
- le sens du moment est tel que $(\overrightarrow{AP}, \vec{F}, \overrightarrow{\mathcal{M}}_{(A,\vec{F} \rightarrow \text{porte})})$ soit direct,
- la norme du moment vaut :

$$\|\overrightarrow{\mathcal{M}}_{(A,\vec{F} \rightarrow \text{porte})}\| = \|\overrightarrow{AP}\| \cdot \|\vec{F}\| \cdot |\sin \theta| = \|\vec{F}\| \cdot \underbrace{\|\overrightarrow{AP}\| \cdot |\sin \theta|}_d = \|\vec{F}\| \cdot d$$

Cette distance d est appelée le *bras de levier*, cela correspond à la distance la plus courte entre le point de calcul du moment (souvent sur un axe de rotation) et le support de la force considérée. Nous voyons sur cet exemple simple qu'il est possible de calculer un moment de force (ou couple) de deux manières différentes :

- en utilisant la notion de produit vectoriel voire même de torseur et en calculant mathématiquement la valeur de ce moment,
- en utilisant la notion plus physique de bras de levier.

Nous verrons d'ici peu que ces deux méthodes sont à maîtriser parfaitement afin de **s'adapter** au type de sujet (écrit ou oral, fonction du type de concours, etc.).

4.3 Classification des actions mécaniques

Il existe deux manières de classer les actions mécaniques appliquées à un système matériel lors d'une étude de mécanique générale :

- à partir de leur situation physique,
- à partir de leur origine.

4.3.1 Actions mécaniques intérieures et extérieures à Σ

Habituellement, nous définissons les limites de notre étude de mécanique grâce à la notion de système matériel Σ . Ce système matériel Σ sera à nouveau au centre de notre étude de statique ou de dynamique.

Nous pouvons donc classer les actions mécaniques à partir de leur situation par rapport au système Σ étudié.

Les *actions mécaniques extérieures* à Σ sont des actions mécaniques dues à des interventions extérieures au système Σ étudié de frontière extérieure $\partial\Sigma$, cela peut être une action de contact d'un solide extérieur de Σ sur Σ , ou d'un moteur, d'un ressort, d'un champ magnétique ou de pesanteur.

Les *actions mécaniques intérieures* à Σ sont des actions mécaniques exercées par des portions du système matériel Σ sur une autre portion de Σ . On peut en lister un certain nombre :

- efforts de contact entre éléments du système,
- amortisseurs ou ressorts à l'intérieur du système,
- efforts de cohésion de la matière au sein des solides composant le système.

4.3.2 Actions mécaniques de contact ou à distance

On peut aussi diviser les actions mécaniques qui s'appliquent à un système Σ à partir de leur origine :

- *Actions mécaniques de densité volumique*, ou actions mécaniques à distance, action provenant de l'interaction à distance entre 2 systèmes :
 - champ de pesanteur ou de gravitation,
 - champ magnétique ou électromagnétique.
- *Actions mécaniques de densité surfacique*, par opposition, action provenant du contact entre deux solides, ou entre un solide et un fluide :
 - réaction due à un obstacle (fixe ou mobile, avec ou sans frottements, solide, liquide ou gazeux),
 - actions de ressorts,
 - actions d'amortisseurs.

4.4 Modélisation d'une action mécanique élémentaire

Une action mécanique élémentaire résulte de l'action d'un corps sur un petit élément de surface ou de volume d'un autre corps. Cette action mécanique élémentaire peut être

modélisée par un glisseur $(M, d\vec{f}_{(M)})$, avec M un point appartenant au petit élément étudié et $d\vec{f}_{(M)}$ tel que :

- $\|d\vec{f}_{(M)}\|$ caractérise l'intensité de l'action mécanique élémentaire (en Newton),
- le sens et la direction de $d\vec{f}_{(M)}$ caractérise le sens et la direction de l'action mécanique élémentaire.

4.4.1 Cas d'une action mécanique à distance

Dans ce cas, on parle d'action mécanique de densité volumique, le petit élément considéré sera alors un petit élément de volume élémentaire dV .

L'action mécanique élémentaire sera alors modélisée par :

$$d\vec{f}_{v(M)} = f_{v(M)} \cdot dV \cdot \vec{u} \quad (4.2)$$

Avec :

- $f_{v(M)}$: densité volumique d'effort ($N \cdot m^{-3}$),
- dV : volume élémentaire (m^3),
- \vec{u} : vecteur unitaire.

4.4.1.1 Action mécanique de la pesanteur

L'action mécanique de la pesanteur est très importante lors des études de statique ou de dynamique, c'est en effet la seule action mécanique qui sera toujours présente. Toutefois, nous verrons bientôt que très souvent, cette action mécanique est négligée devant les autres actions mécaniques exercées sur le système.

On parle "d'action mécanique de la pesanteur" ou de "poids" pour caractériser l'action mécanique exercée sur un corps (de masse m) par l'attraction universelle de la terre (gravité²) et les forces inertielles (dûes au fait que le référentiel terrestre n'est pas un référentiel galiléen, accélération d'entraînement). Cette action mécanique est verticale descendante (dirigée vers le centre de la terre), elle est proportionnelle à la masse m de ce corps, le facteur de proportion est g , l'accélération de la pesanteur dont nous utilisons la valeur moyenne $9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.³

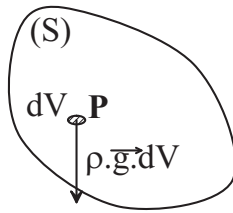
REMARQUE 25 *Attention à bien distinguer masse et poids, le langage courant les rend synonymes, mais en fait ces deux termes représentent des caractéristiques différentes, la masse est une grandeur intrinsèque au solide considéré, alors que le poids dépend du champ de pesanteur dans lequel le solide est plongé.*

Soit un solide S , de masse volumique ρ , soumis au champ de pesanteur terrestre \vec{g} . L'action mécanique élémentaire pour un petit élément de volume dV centré sur le point P de S peut se modéliser par :

$$d\vec{P} = \rho \cdot \vec{g} dV$$

2. Attention à ne pas confondre le champ de gravité terrestre et le champ de pesanteur terrestre, l'un dépend uniquement de l'attraction terrestre et l'autre de l'attraction mais aussi des forces inertielles...

3. La pesanteur terrestre varie entre $9,78 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ à l'équateur et $9,83 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ au niveau des pôles, cette différence provient de l'accélération d'entraînement et de l'aplatissement terrestre.

FIG. 4.3 – Action mécanique de la pesanteur sur un solide S

On peut donc en déduire l'action mécanique globale de la pesanteur sur le solide S considéré :

$$\vec{P} = \int_S d\vec{P} = \int_S \rho \cdot \vec{g} dV = \rho \cdot \int_V dV \vec{g} = \rho \cdot V \vec{g} = m \cdot \vec{g}$$

4.4.1.2 Centre d'inertie

Par définition, on appelle *centre d'inertie* d'un système matériel Σ de masse totale m , le barycentre de tous les points M du système matériel Σ affectés de leur masse élémentaire respective dm . Ce point n'est défini qu'à partir des données intrinsèques du système et en aucun cas à partir du mouvement ou de l'environnement dans lequel évolue Σ .

$$\forall Q, \quad \overrightarrow{QG} = \frac{1}{m} \int_{\Sigma} \overrightarrow{QM} \cdot dm \quad (4.3)$$

On en tire directement la relation suivante qui nous sera très utile par la suite :

$$\int_{\Sigma} \overrightarrow{GM} \cdot dm = \vec{0} \quad (4.4)$$

REMARQUE 26 Attention, il ne faut pas confondre centre d'inertie et centre de gravité d'un solide. En effet, le centre de gravité est défini comme étant le point d'application de la résultante des actions de la gravité sur le système matériel considéré, il dépend donc de l'environnement dans lequel se situe le système et plus particulièrement du champ de gravité dans lequel il est plongé. Pour nos études, au niveau du sol, ces deux points seront supposés confondus et le centre d'inertie sera abusivement noté G .

REMARQUE 27 Pour un système Σ composé d'un ensemble de solides, le centre d'inertie G du système est défini comme étant le barycentre de chacun des centres d'inertie des solides composant Σ affectés de leur masse respective.

$$\forall Q, \quad \overrightarrow{QG} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{QG_i} \quad M = \sum_{i=1}^n m_i$$

REMARQUE 28 S'il existe un élément de symétrie matériel pour le système Σ (point, axe ou plan), le centre d'inertie appartient obligatoirement à cet élément.

Si on cherche à calculer le moment développé par l'action mécanique de la pesanteur au point G , on trouve :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{(G, pesanteur \rightarrow S)}} = \int_S \overrightarrow{GP} \wedge \rho \cdot \vec{g} dV = \underbrace{\int_S \overrightarrow{GP} \cdot \rho dV}_{\vec{0}} \wedge \vec{g} = \vec{0}$$

On représente donc l'action mécanique de la pesanteur par un glisseur exprimé en G :

$$\left\{ \mathcal{F}_{(pesanteur \rightarrow S)} \right\}_G = \left\{ \overrightarrow{\mathcal{R}_{(pesanteur \rightarrow S)}}_{\vec{0}} = m \cdot \vec{g} \right\}$$

4.4.2 Cas d'une action mécanique de contact

Dans ce cas, les actions mécaniques sont fonction du contact entre les corps, ce sont donc des actions mécaniques de densité surfacique. Le petit élément considéré sera donc un petit élément de surface élémentaire dS . L'action mécanique élémentaire sera alors modélisée par :

$$d\vec{f}_{s(M)} = f_{s(M)} \cdot dS \cdot \vec{u} \quad (4.5)$$

Avec :

- $f_{s(M)}$: densité surfacique d'effort ($N \cdot m^{-2}$),
- dS : surface élémentaire (m^2),
- \vec{u} : vecteur unitaire.

REMARQUE 29 Dans le cas des actions mécaniques de densité linéique (problème plan, simplification habituelle), le petit élément considéré sera un petit élément de longueur élémentaire dl . L'action mécanique sera alors modélisée par :

$$d\vec{f}_{l(M)} = f_{l(M)} \cdot dl \cdot \vec{u} \quad (4.6)$$

Avec :

- $f_{l(M)}$: densité linéique d'effort ($N \cdot m^{-1}$),
- dl : longueur élémentaire (m),
- \vec{u} : vecteur unitaire.

4.5 Modélisation locale d'un ensemble d'actions mécaniques

Une action mécanique d'un système matériel Σ_1 sur un autre système matériel Σ_2 est le résultat de la combinaison des effets d'une infinité d'actions mécaniques élémentaires de densité volumique ou surfacique.

Comme nous l'avons vu précédemment, chaque action mécanique élémentaire est modélisée par un glisseur, c'est à dire un point d'application M_i ainsi qu'un vecteur $d\vec{f}_{(M_i)}$. L'ensemble de ces actions mécaniques élémentaires définit l'action mécanique de Σ_1 sur Σ_2 ,

on la modélise par un champ de vecteurs $d\vec{f}_{(M_i)}$ en tout point M_i du volume ou de la surface concernée.

REMARQUE 30 *La répartition des actions élémentaires sur le domaine considéré (volume ou surface) peut être de différents types : uniforme, linéaire, etc. Le critère servant à déterminer les conditions d'emploi limites des solides en contact (clavette) est un critère de pression limite appelée pression de matage, valeur conventionnelle donnée par les constructeurs et les ouvrages de calculs de mécanique. La condition limite est donc :*

$$p < p_{\text{matage}}$$

Il est donc important de savoir déterminer la pression de contact entre deux solides à partir de plusieurs types de répartition de pression.

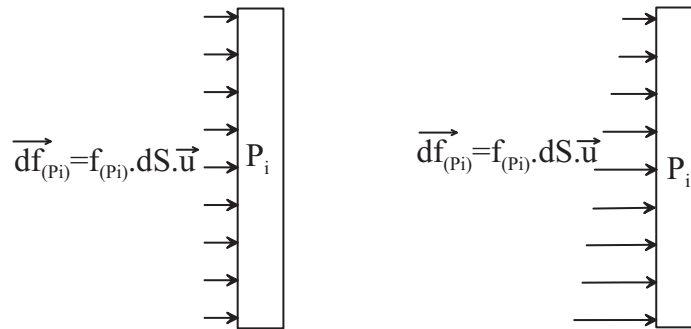


FIG. 4.4 – Différents types de répartition d'actions mécaniques élémentaires de contact

4.6 Modélisation globale d'un ensemble d'actions mécaniques

La modélisation locale des actions mécaniques permet de bien spécifier l'effet "local"⁴ des actions mécaniques sur un système, ce qui aura son intérêt lorsque nous étudierons les déformations de ce système (relation contrainte, pression de contact).

Cependant, cette modélisation est très lourde à utiliser sur des systèmes complexes (ou non d'ailleurs...) du fait de la présence d'une infinité de points à étudier. Lors d'une étude statique ou dynamique, c'est à dire lorsque l'on s'intéresse aux mouvements ou à l'équilibre d'un système, une modélisation plus globale permet de représenter efficacement l'action mécanique d'un système matériel sur un autre.

4.6.1 Ensemble des actions mécaniques exercées sur un système matériel

D'une manière générale, si un système matériel Σ_1 exerce sur un système matériel Σ_2 un ensemble fini d'actions mécaniques modélisées par p forces \vec{F}_i aux points d'application

4. Quoi de plus normal!

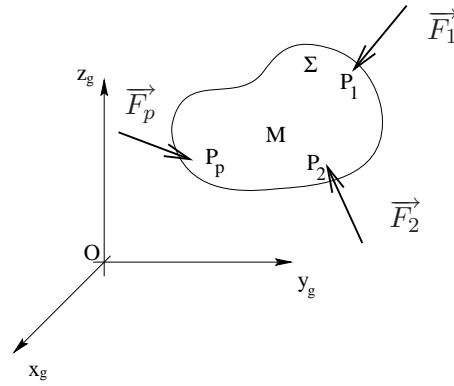


FIG. 4.5 – Système matériel soumis à un ensemble d'actions mécaniques

P_i , on peut caractériser l'ensemble des actions mécaniques appliquées à ce système matériel par deux vecteurs :

- la résultante des actions mécaniques exercée par Σ_1 sur Σ_2 :

$$\overrightarrow{\mathcal{R}}_{(\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2)} = \sum_{i=1}^p \overrightarrow{F}_i \quad (4.7)$$

- le moment résultant calculé au point M des actions mécaniques de Σ_1 sur Σ_2 :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{(M, \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2)} = \sum_{i=1}^p \overrightarrow{MP}_i \wedge \overrightarrow{F}_i \quad (4.8)$$

REMARQUE 31 Si on cherche à interpréter de manière plus physique les deux vecteurs définis ci-dessus, nous pouvons dire que :

- La résultante $\overrightarrow{\mathcal{R}}_{(\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2)}$ caractérise l'effet de l'ensemble des actions mécaniques de Σ_1 sur Σ_2 permettant de modifier le (ou les) mouvement de translation de Σ_2 .
- Le moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{(M, \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2)}$ caractérise l'effet de l'ensemble des actions mécaniques de Σ_1 sur Σ_2 permettant de modifier le (ou les) mouvement de rotation de Σ_2 .

REMARQUE 32 Cette modélisation permet de regrouper les actions mécaniques élémentaires d'un système matériel sur un autre mais aussi de regrouper par exemple l'ensemble des actions mécaniques extérieures appliquées à un solide ou à un système matériel.

4.6.2 Torseur des actions mécaniques

Le moment résultant des actions mécaniques appliquées au système matériel Σ_2 vérifie la relation de changement de point d'un torseur. On peut donc regrouper la résultante des

actions mécaniques et le moment résultant dans le torseur suivant :

$$\left\{ \mathcal{F}_{(\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2)} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\mathcal{R}_{(\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2)}} = \sum_{i=1}^p \overrightarrow{F_i} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{(M, \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2)}} = \sum_{i=1}^p \overrightarrow{MP_i} \wedge \overrightarrow{F_i} \end{array} \right\}_M \quad (4.9)$$

Ce torseur est appelé le *torseur des actions mécaniques* du système Σ_1 appliquées sur le système Σ_2 .

Contrairement aux autres torseurs utilisés en mécanique, le torseur des actions mécaniques est souvent exprimé sous forme de colonnes :

$$\left\{ \mathcal{F}_{(\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2)} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} X \cdot \vec{x} + Y \cdot \vec{y} + Z \cdot \vec{z} \\ L \cdot \vec{x} + M \cdot \vec{y} + N \cdot \vec{z} \end{array} \right\}_M = \left\{ \begin{array}{ll} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad (4.10)$$

REMARQUE 33 Du fait du Principe des actions réciproques, le torseur des actions mécaniques intérieures au système Σ est constamment nul.

$$\forall M \quad \left\{ \mathcal{F}_{(\Sigma \rightarrow \Sigma)} \right\} = \left\{ 0 \right\}_M \quad (4.11)$$

Cette remarque a toute son importance lors du choix du système à isoler. En effet, en choisissant telle ou telle limite pour le système Σ étudié, nous plaçons certains efforts à l'intérieur ou à l'extérieur de la frontière du système et donc nous les faisons apparaître ou pas dans les équations issues de l'application du Principe Fondamental de la Statique ou de la Dynamique.

4.6.3 Cas des actions mécaniques élémentaires

Dans le cas des actions mécaniques élémentaires de densité surfacique ou volumique, il existe une infinité de ces actions mécaniques élémentaires.

Nous ne pouvons donc plus utiliser la somme discrète pour regrouper ces différentes actions mécaniques, mais nous utiliserons une somme continue définie sur le domaine considéré (surface ou volume), c'est à dire, une intégration.

Dans le cas d'une action mécanique de densité surfacique (action de contact), le domaine considéré est la surface de contact de Σ_1 sur Σ_2 , on effectue alors une intégrale double sur la surface S :

$$\left\{ \mathcal{F}_{(\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2)} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\mathcal{R}_{(\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2)}} = \iint_S f_{s(M)} \cdot dS \cdot \vec{u} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{(O, \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2)}} = \iint_S \overrightarrow{OM} \wedge f_{s(M)} \cdot dS \cdot \vec{u} \end{array} \right\}_O \quad (4.12)$$

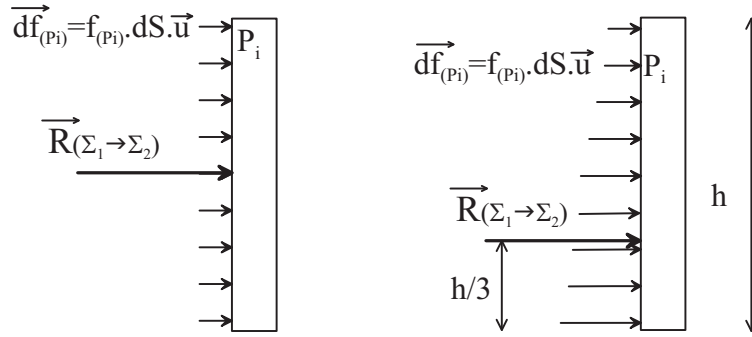


FIG. 4.6 – Modélisation globale/modélisation locale dans le cas d'un contact surfacique

Dans le cas d'une action mécanique de densité volumique (action à distance), le domaine considéré est le volume de Σ_2 , on effectue alors une intégrale triple sur le volume V_2 :

$$\left\{ \mathcal{F}_{(\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2)} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\mathcal{R}_{(\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2)}} = \iiint f_{v(M)} \cdot dV \cdot \vec{u} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{(O, \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2)}} = \iiint_{V_2} \overrightarrow{OM} \wedge f_{v(M)} \cdot dV \cdot \vec{u} \end{array} \right\} \quad (4.13)$$

4.7 Les lois de Coulomb

Lorsqu'un corps est en mouvement, il est toujours soumis à des frottements (résistance de l'air ou de l'eau, frottement de la route sur le pneu, frottement d'une bille sur sa bague dans un roulement, etc.). Ces derniers exercent sur le corps une action mécanique qui s'oppose à sa vitesse.

Souvent, pour simplifier, on considère ces frottements négligeables, on simplifie alors la modélisation mais on s'éloigne de la réalité et les résultats obtenus peuvent s'en trouver faussés⁵. Dans le cas contraire, il faut alors tenir compte de l'effet de ce frottement (ou de l'adhérence) dans nos études.

On classe les actions mécaniques de frottements en deux groupes :

- les frottements solides,
- les frottements visqueux.

Lorsqu'il s'agit d'un frottement solide, on peut considérer l'action mécanique de frottements comme pratiquement indépendante de la vitesse du corps. Si le corps est soumis à des frottements visqueux, l'action mécanique de frottements est alors proportionnelle à la vitesse du corps.

Les lois sur le frottement solide ont été introduites dès le XV^e siècle par **Léonard de Vinci**. Les lois utilisées assez couramment actuellement ont été développée par le physicien

5. Pour s'en convaincre, il suffit de tenter de réaliser un système avec un mouvement perpétuel, saint graal des mécaniciens et des concepteurs, si simple à définir de manière théorique, mais bête noire des fabricants car impossible à réaliser.

Charles Augustin de Coulomb (1736-1806) à la fin du 18^e siècle. Elles permettent de caractériser assez simplement les contacts entre solides avec du frottement ou de l'adhérence⁶.

DÉFINITION 6 *Tribologie*

Le mot tribologie est construit à partir des racines grecques tribein (frotter) et logos (discours, étude), il a été proposé en 1968 par G. Salomon pour désigner la science qui étudie les phénomènes susceptibles de se produire lorsque deux corps en contact sont animés d'un mouvement relatif. Elle recouvre entre autres tous les domaines du frottement, de l'usure et de la lubrification.

4.7.1 Modélisation locale des actions mécaniques

On considère deux solides S_1 et S_2 en contact. Ce contact est caractérisé par la surface de contact \mathcal{S} .

On se place en un point P quelconque de \mathcal{S} et on exprime l'action mécanique élémentaire de contact de S_1 sur S_2 .

$$d\vec{f}_{(P)} = f_{(P)} \cdot dS \cdot \vec{u} \quad (4.14)$$

Il est toujours possible de définir un plan, nommé π , tangent à la surface de contact \mathcal{S} de S_2 sur S_1 , au point P considéré. On appellera ce plan π , le *plan tangent au contact*. Ce plan peut être défini par sa normale, notée $\vec{n}_{(P)}$, cette normale étant définie, par convention, sortante par rapport à S_2 (orientée vers l'extérieur de S_2).

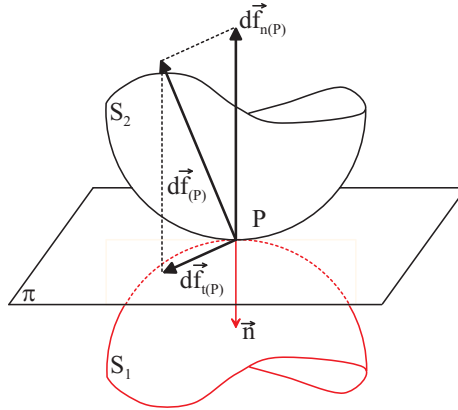


FIG. 4.7 – Modélisation du contact entre deux corps S_1 et S_2

Nous pouvons alors projeter l'action mécanique élémentaire au point P suivant la normale à la surface de contact \mathcal{S} au point P et dans le plan tangent au contact au point P .

$$d\vec{f}_{(P)} = d\vec{f}_{n(P)} + d\vec{f}_{t(P)} \quad (4.15)$$

6. Attention, c'est à nouveau une modélisation parmi tant d'autres, elle admet un certain nombre de limites.

On peut alors écrire :

$$d\vec{f}_{(P)} = f_{n(P)} \cdot dS \cdot \vec{n}_{(P)} + d\vec{f}_{t(P)} \quad (4.16)$$

L'action mécanique normale de S_1 sur S_2 s'exerce toujours vers l'intérieur de S_2 ⁷, elle est caractérisée par une *pression de contact*, notée $p_{(P)}$, toujours positive. On peut alors écrire :

$$d\vec{f}_{(P)} = -p_{(P)} \cdot dS \cdot \vec{n}_{(P)} + d\vec{f}_{t(P)} \quad (4.17)$$

REMARQUE 34 Les lois de Coulomb tel que nous les développons ici pour le modèle local peuvent très bien être généralisées à un modèle global d'actions mécaniques.

REMARQUE 35 Nous verrons un peu plus tard dans le cours de statique et dans le cours de dynamique que la norme de l'action mécanique normale, ou réaction normale, dépend des autres actions mécaniques appliquées au corps S_2 ainsi que des conditions de mouvement ou d'équilibre du corps S_2 . En conséquence, lorsque $d\vec{f}_{n(P)} = \vec{0}$, le contact cesse.

Pour la détermination de l'action mécanique élémentaire tangentielle $d\vec{f}_{t(P)}$, il faut tenir compte du mouvement ou du non-mouvement du solide S_1 par rapport au solide S_2 . Nous avons donc deux cas à étudier, avec ou sans mouvement relatif.

4.7.2 Cas du contact avec frottement

Dans le cas où il y a un mouvement relatif entre S_1 et S_2 , on peut spécifier ce mouvement par une vitesse de glissement non nulle au point P considéré.

$$\overrightarrow{Vg_{(P \in S_2/S_1)}} \neq \vec{0} \quad (4.18)$$

Dans ce cas, il y a apparition de frottements entre les solides S_1 et S_2 . Physiquement, nous ressentons que ces frottements s'opposent au mouvement relatif de S_2 par rapport à S_1 . Coulomb a montré, qu'en première approximation, on peut considérer que :

1° loi : $d\vec{f}_{t(P)}$ qu'exerce S_1 sur S_2 est portée par le même support que $\overrightarrow{Vg_{(P \in S_2/S_1)}}$.

2° loi : $d\vec{f}_{t(P)}$ est de sens opposé à $\overrightarrow{Vg_{(P \in S_2/S_1)}}$.

3° loi : $\|d\vec{f}_{t(P)}\|$ est proportionnelle à l'action élémentaire normale $\|d\vec{f}_{n(P)}\|$.

$$\|d\vec{f}_{t(P)}\| = f \cdot \|d\vec{f}_{n(P)}\|$$

Les trois lois ci-dessus peuvent être réunies dans une relation générale :

$$d\vec{f}_{t(P)} = -f \cdot \|d\vec{f}_{n(P)}\| \cdot \frac{\overrightarrow{Vg_{(P \in S_2/S_1)}}}{\|\overrightarrow{Vg_{(P \in S_2/S_1)}}\|} \quad (4.19)$$

7. En fait, elle s'oppose à la pénétration du corps S_2 dans le corps S_1 . C'est une force répulsive...

f est donc un facteur de proportionnalité entre $d\vec{f}_{t(P)}$ et $d\vec{f}_{n(P)}$, il est appelé coefficient de frottement.

f n'est fonction ni de la vitesse de glissement, ni de la réaction normale, ni de la surface de contact, il ne dépend que :

- du couple de matériau de S_1 et S_2 ,
- de l'état de surface,
- d'une éventuelle lubrification.

On peut imaginer le coefficient de frottement grâce à la notion de cône de frottement de demi-angle d'ouverture φ , appelé angle de frottement, tel que $f = \tan \varphi$.

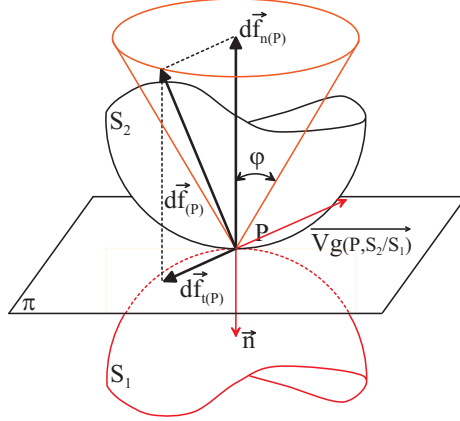


FIG. 4.8 – Notion de cône de frottement

Si $\overrightarrow{Vg_{(P \in S_2/S_1)}} \neq \vec{0}$, alors l'action mécanique élémentaire de contact du solide S_1 sur le solide S_2 au point P , $d\vec{f}_{(P)} = d\vec{f}_{n(P)} + d\vec{f}_{t(P)}$, se situe sur le cône de frottement.

4.7.3 Cas du contact avec adhérence

Par définition, on dit qu'il y a adhérence entre deux solides si au point de contact P , on peut dire que la vitesse de glissement est nulle.

$$\overrightarrow{Vg_{(P \in S_2/S_1)}} = \vec{0} \quad (4.20)$$

L'expérience montre que $\overrightarrow{Vg_{(P \in S_2/S_1)}}$ reste nulle tant que $\|d\vec{f}_{t(P)}\|$ n'atteint pas la valeur $\|d\vec{f}_{t(P)}\| = f_0 \cdot \|d\vec{f}_{n(P)}\|$. Donc, lorsque la vitesse de glissement est nulle, $\|d\vec{f}_{t(P)}\|$ reste inférieure à $f_0 \cdot \|d\vec{f}_{n(P)}\|$ et $d\vec{f}_{t(P)}$ est quelconque dans le plan tangent au contact π .

Le paramètre f_0 est appelé coefficient d'adhérence, il est supérieur au coefficient de frottement f pour un contact donné.

Si $\overrightarrow{Vg_{(P \in S_2/S_1)}} = \vec{0}$, alors la résultante des actions mécaniques de contact du solide S_1 sur le solide S_2 $d\vec{f}_{(P)} = d\vec{f}_{n(P)} + d\vec{f}_{t(P)}$ est à l'intérieur du cône d'adhérence de demi-angle d'ouverture φ_0 tel que $f_0 = \tan \varphi_0$.

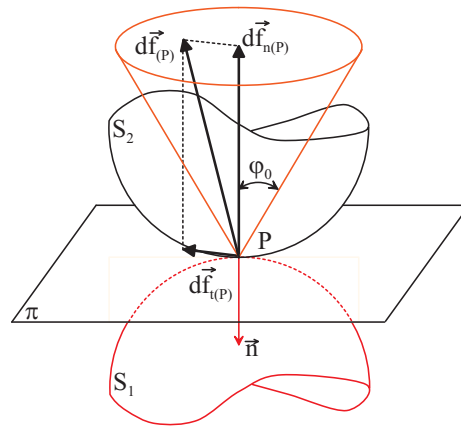


FIG. 4.9 – Notion de cône d'adhérence

REMARQUE 36 (Notion de frottement et d'adhérence)

En réalité, le coefficient de frottement n'est pas indépendant de la vitesse de glissement, son évolution peut être décrite par la courbe ci-dessous.

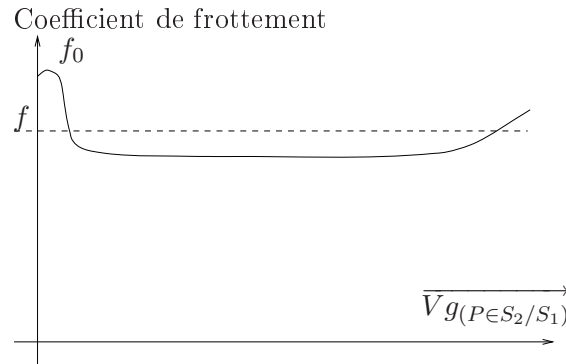


FIG. 4.10 – Evolution du coefficient de frottement

Nous pouvons cependant utiliser la modélisation plus simple suivante :

- pour une vitesse de glissement $\vec{V}g_{(P \in S_2 / S_1)} = \vec{0}$, nous pouvons utiliser le coefficient d'adhérence f_0 ,
- dès qu'il y a une vitesse de glissement $\vec{V}g_{(P \in S_2 / S_1)}$ non nulle alors nous utilisons le coefficient de frottement $f = Cste$.

Matériaux en contact	f_0		f	
	sec	lubrifié	sec	lubrifié
Acier/Acier	0,2 à 0,3	0,15 à 0,2	0,2	0,12
Acier/Bronze	0,2	0,12 à 0,2	0,15	0,08
Acier/Ferodo	0,3 à 0,4		0,25 à 0,35	
Acier/PTFE	0,08 à 0,4		0,02 à 0,08	0,03 à 0,05
Pneu/Route	1		0,5 à 0,6	0,3 à 0,5

4.7.4 Cas du contact parfait

Si, lors du contact entre deux solides, le coefficient de frottement f est nul, alors l'action mécanique de contact n'est portée que par la normale \vec{n} à la surface de contact. La réaction tangentielle $d\vec{f}_{t(P)}$ est alors nulle. Le contact est alors dit “*parfait*”.

4.8 Modélisation globale des actions mécaniques de contact

Un contact entre deux solides peut être ponctuel, linéique ou surfacique. Nous avons vu précédemment (SEC. 3.2.2, p. 45) que dans tous les cas, le contact se fait sur une petite surface (déformation locale des solides au niveau du contact).

Nous pouvons modéliser l'ensemble des actions mécaniques élémentaires de contact entre deux solides S_1 et S_2 à partir d'un torseur d'actions mécaniques (modèle global).

$$\left\{ \mathcal{F}_{(S_1 \rightarrow S_2)} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\mathcal{R}}_{(S_1 \rightarrow S_2)} = \iint_S f_{s(M)} \cdot dS \cdot \vec{u} = \overrightarrow{\mathcal{N}}_{(S_1 \rightarrow S_2)} + \overrightarrow{\mathcal{T}}_{(S_1 \rightarrow S_2)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_{(I, S_1 \rightarrow S_2)} = \iint_S \vec{IM} \wedge f_{s(M)} \cdot dS \cdot \vec{u} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{p(I, S_1 \rightarrow S_2)} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{r(I, S_1 \rightarrow S_2)} \end{array} \right\} \quad (4.21)$$

Dans ce cas, nous voyons apparaître un moment que nous pouvons projeter sur la normale $\vec{n}_{(I)}$ au plan tangent au contact au point I considéré ainsi que sur le plan tangent au contact π .

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{(I, S_1 \rightarrow S_2)} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{p(I, S_1 \rightarrow S_2)} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{r(I, S_1 \rightarrow S_2)} \quad (4.22)$$

On utilise alors une modélisation proche de celle issue des lois de Coulomb pour définir ce moment.

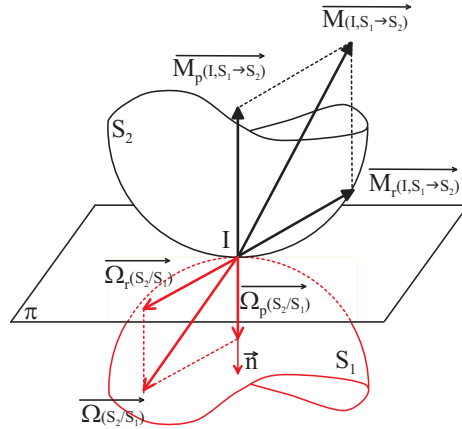


FIG. 4.11 – Notion de résistance au roulement et au pivotement

4.8.1 Résistance au pivotement

La valeur du moment de résistance au pivotement dépend du mouvement de S_2 par rapport à S_1 et plus particulièrement de $\overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}}$, (SEC. 2.7.3, p. 34).

Il existe deux cas :

- Si $\overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}} \neq \vec{0}$, alors :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{p(I, S_1 \rightarrow S_2)}} = -\delta \cdot \|\overrightarrow{\mathcal{N}_{(S_1 \rightarrow S_2)}}\| \cdot \frac{\overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}}}{\|\overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}}\|} \quad (4.23)$$

- Si $\overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}} = \vec{0}$, alors :

$$\|\overrightarrow{\mathcal{M}_{p(I, S_1 \rightarrow S_2)}}\| \leq \delta \cdot \|\overrightarrow{\mathcal{N}_{(S_1 \rightarrow S_2)}}\| \quad (4.24)$$

δ est le paramètre de résistance au pivotement. Il est homogène à des mètres.

4.8.2 Résistance au roulement

La valeur du moment de résistance au roulement dépend aussi du mouvement de S_2 par rapport à S_1 et plus particulièrement de $\overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}}$, (SEC. 2.7.3, p. 34).

Il existe aussi deux cas :

- Si $\overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}} \neq \vec{0}$, alors :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{r(I, S_1 \rightarrow S_2)}} = -\eta \cdot \|\overrightarrow{\mathcal{N}_{(S_1 \rightarrow S_2)}}\| \cdot \frac{\overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}}}{\|\overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}}\|} \quad (4.25)$$

- Si $\overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}} = \vec{0}$, alors :

$$\|\overrightarrow{\mathcal{M}_{r(I, S_1 \rightarrow S_2)}}\| \leq \eta \cdot \|\overrightarrow{\mathcal{N}_{(S_1 \rightarrow S_2)}}\| \quad (4.26)$$

η est le paramètre de résistance au roulement. Il est aussi homogène à des mètres.

L'effet de ces moments reste généralement faible devant celui des actions normales et tangentielles, ils sont donc généralement négligés dans les études⁸.

4.9 Puissance développée par une action mécanique

4.9.1 Puissance développée par une force

Par définition, on appelle puissance de la force \overrightarrow{F} , le scalaire défini par :

$$\mathcal{P}_{(\overrightarrow{F} \rightarrow M/Rg)} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{V_{(M/Rg)}} \quad (4.27)$$

- La puissance dépend du référentiel d'étude.
- La puissance est nulle si le déplacement est perpendiculaire à la force (par exemple : force de pesanteur et déplacement horizontal).
- Si $\mathcal{P} > 0$, alors la puissance est motrice (l'extérieur apporte de l'énergie au système).
- Si $\mathcal{P} < 0$, alors la puissance est résistante (perte d'énergie du système).
- Unité S.I. : Watt (W)

8. Ils sont aussi beaucoup plus difficiles à modéliser finement...

4.9.2 Puissance développée par un système de forces appliquées en des points invariables d'un solide

Soit un solide matériel S en mouvement par rapport au référentiel galiléen $Rg (O, \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g)$.

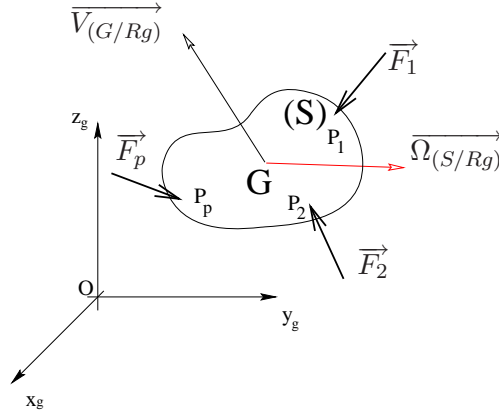


FIG. 4.12 – Solide matériel soumis à un ensemble d'actions mécaniques

Son torseur cinématique est connu en G .

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S/Rg)} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{(S/Rg)} \\ \vec{V}_{(G \in S/Rg)} \end{array} \right\}$$

Ce solide est soumis à un ensemble d'actions mécaniques modélisée par p forces \vec{F}_i de points d'application P_i . On peut caractériser l'ensemble des actions mécaniques appliquées à ce système matériel par le torseur suivant :

$$\left\{ \mathcal{F}_{(\vec{S} \rightarrow S)} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathcal{R}}_{(\vec{S} \rightarrow S)} = \sum_{i=1}^p \vec{F}_i \\ \vec{\mathcal{M}}_{(G, \vec{S} \rightarrow S)} = \sum_{i=1}^p \overrightarrow{GP_i} \wedge \vec{F}_i \end{array} \right\}$$

Nous pouvons à présent calculer la puissance $\mathcal{P}_{(\vec{S} \rightarrow S/Rg)}$ développée par les actions

mécaniques appliquées sur le solide S .

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{(\vec{S} \rightarrow S/Rg)} &= \sum_{i=1}^p \vec{F}_i \cdot \vec{V}_{(P_i/Rg)} \quad \text{or} \quad \vec{V}_{(P_i/Rg)} = \vec{V}_{(G/Rg)} + \vec{\Omega}_{(S/Rg)} \wedge \vec{GP}_i \\
\mathcal{P}_{(\vec{S} \rightarrow S/Rg)} &= \sum_{i=1}^p \vec{F}_i \cdot \left(\vec{V}_{(G/Rg)} + \vec{\Omega}_{(S/Rg)} \wedge \vec{GP}_i \right) \\
\mathcal{P}_{(\vec{S} \rightarrow S/Rg)} &= \sum_{i=1}^p \vec{F}_i \cdot \vec{V}_{(G/Rg)} + \sum_{i=1}^p \vec{F}_i \cdot \left(\vec{\Omega}_{(S/Rg)} \wedge \vec{GP}_i \right) \\
\mathcal{P}_{(\vec{S} \rightarrow S/Rg)} &= \sum_{i=1}^p \vec{F}_i \cdot \vec{V}_{(G/Rg)} + \sum_{i=1}^p \left(\vec{GP}_i \wedge \vec{F}_i \right) \cdot \vec{\Omega}_{(S/Rg)} \\
\mathcal{P}_{(\vec{S} \rightarrow S/Rg)} &= \vec{\mathcal{R}}_{(\vec{S} \rightarrow S)} \cdot \vec{V}_{(G/Rg)} + \vec{\mathcal{M}}_{(G, \vec{S} \rightarrow S)} \cdot \vec{\Omega}_{(S/Rg)}
\end{aligned}$$

On retrouve la définition des éléments de réductions du torseur des efforts extérieurs au solide S et du torseur cinématique de S par rapport à Rg . On peut donc écrire cette relation sous la forme du commoment des torseurs des efforts extérieurs et cinématique.

$$\mathcal{P}_{(\vec{S} \rightarrow S/Rg)} = {}_G \left\{ \mathcal{F}_{(\vec{S} \rightarrow S)} \right\} \otimes {}_G \left\{ \mathcal{V}_{(S/Rg)} \right\} = {}_G \left\{ \frac{\vec{\mathcal{R}}_{(\vec{S} \rightarrow S)}}{\vec{\mathcal{M}}_{(G, \vec{S} \rightarrow S)}} \right\} \otimes {}_G \left\{ \frac{\vec{\Omega}_{(S/Rg)}}{\vec{V}_{(G \in S/Rg)}} \right\} \quad (4.28)$$

On dit que la résultante “travaille à la translation” et que le moment “travaille à la rotation”.

4.9.3 Puissance développée par les inter-efforts

Soit deux solides S_1 et S_2 en mouvement par rapport à Rg ($O, \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g$).

Nous connaissons donc le torseur cinématique de S_1 ainsi que celui de S_2 en un point I de liaison entre les deux solides.

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_1/Rg)} \right\} = {}_I \left\{ \frac{\vec{\Omega}_{(S_1/Rg)}}{\vec{V}_{(I \in S_1/Rg)}} \right\} \quad \left\{ \mathcal{V}_{(S_2/Rg)} \right\} = {}_I \left\{ \frac{\vec{\Omega}_{(S_2/Rg)}}{\vec{V}_{(I \in S_2/Rg)}} \right\}$$

Ces deux solides sont reliés par une liaison telle que nous connaissons le torseur des actions mécaniques de S_1 sur S_2 . De la même façon, celui de S_2 sur S_1 ne nous est pas inconnue grâce à la troisième loi de Newton.

$$\left\{ \mathcal{F}_{(S_1 \rightarrow S_2)} \right\} = {}_I \left\{ \frac{\vec{\mathcal{R}}_{(S_1 \rightarrow S_2)}}{\vec{\mathcal{M}}_{(I, S_1 \rightarrow S_2)}} \right\} \quad \left\{ \mathcal{F}_{(S_2 \rightarrow S_1)} \right\} = {}_I \left\{ \frac{\vec{\mathcal{R}}_{(S_2 \rightarrow S_1)}}{\vec{\mathcal{M}}_{(I, S_2 \rightarrow S_1)}} \right\}$$

La puissance $\mathcal{P}_{(S_2 \leftrightarrow S_1)}$ développée par les inter-efforts entre S_1 et S_2 peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{(S_2 \leftrightarrow S_1)} &= \mathcal{P}_{(S_1 \rightarrow S_2/Rg)} + \mathcal{P}_{(S_2 \rightarrow S_1/Rg)} \\
\mathcal{P}_{(S_2 \leftrightarrow S_1)} &= \left\{ \mathcal{F}_{(S_1 \rightarrow S_2)} \right\}_I \otimes \left\{ \mathcal{V}_{(S_2/Rg)} \right\}_I + \left\{ \mathcal{F}_{(S_2 \rightarrow S_1)} \right\}_I \otimes \left\{ \mathcal{V}_{(S_1/Rg)} \right\}_I \\
\mathcal{P}_{(S_2 \leftrightarrow S_1)} &= \left\{ \mathcal{F}_{(S_1 \rightarrow S_2)} \right\}_I \otimes \left\{ \mathcal{V}_{(S_2/Rg)} \right\}_I - \left\{ \mathcal{F}_{(S_1 \rightarrow S_2)} \right\}_I \otimes \left\{ \mathcal{V}_{(S_1/Rg)} \right\}_I \\
\mathcal{P}_{(S_2 \leftrightarrow S_1)} &= \left\{ \mathcal{F}_{(S_1 \rightarrow S_2)} \right\}_I \otimes \underbrace{\left[\left\{ \mathcal{V}_{(S_2/Rg)} \right\}_I - \left\{ \mathcal{V}_{(S_1/Rg)} \right\}_I \right]}_{\left\{ \mathcal{V}_{(S_2/S_1)} \right\}_I} \\
\mathcal{P}_{(S_2 \leftrightarrow S_1)} &= \left\{ \mathcal{F}_{(S_1 \rightarrow S_2)} \right\}_I \otimes \left\{ \mathcal{V}_{(S_2/S_1)} \right\}_I
\end{aligned}$$

Nous trouvons l'expression de la puissance développée par les inter-efforts entre le solide S_1 et S_2 en fonction du torseur des inter-efforts et du torseur cinématique :

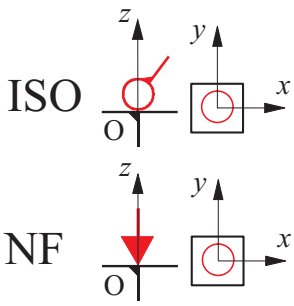
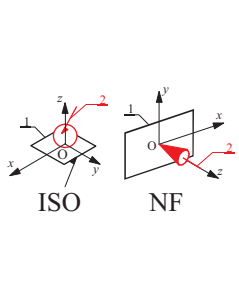
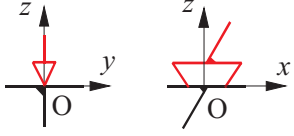
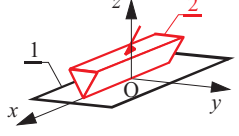
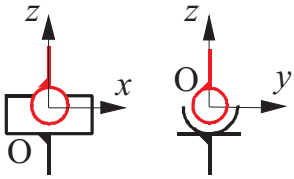
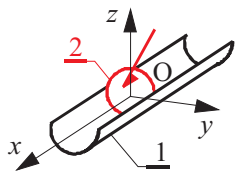
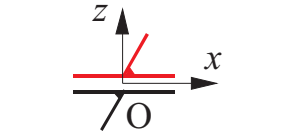
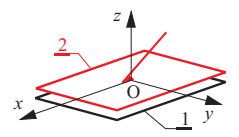
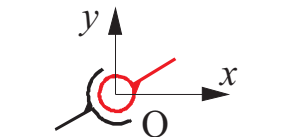
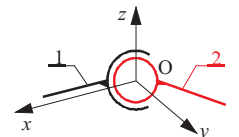
$$\mathcal{P}_{(S_2 \leftrightarrow S_1)} = \left\{ \mathcal{F}_{(S_1 \rightarrow S_2)} \right\}_I \otimes \left\{ \mathcal{V}_{(S_2/S_1)} \right\}_I \quad (4.29)$$

REMARQUE 37 La puissance développée par les inter-efforts au sein d'une liaison est indépendante du référentiel de calcul.

REMARQUE 38 Dans le cas où la liaison est une liaison parfaite (sans frottements), la puissance développée par les inter-efforts de la liaison est obligatoirement nulle. Dans ce cas, le torseur des inter-efforts est le complément du torseur cinématique, le comoment des deux torseurs est automatiquement nul.

4.10 Torseur des actions transmissibles par les liaisons mécaniques usuelles

Nous avons vu dans le chapitre précédent (PART. 3.3, p. 46) qu'il existait des liaisons usuelles définies par une modélisation normalisée. Dans le cas où ces liaisons sont parfaites, nous pouvons aisément définir le torseur des actions transmissibles par ces liaisons à partir de la connaissance de leur torseur cinématique.

Nature de la liaison	Schématisation		Torseur des actions transmissibles $\{\mathcal{F}_{(S_1 \rightarrow S_2)}\}$
	Plane	Spatiale	
Sphère-plan (ponctuelle) de normale (O, \vec{z})	<p>ISO </p> <p>NF</p>		$O \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
Linéaire recti- ligne d'axe (O, \vec{x}) et de normale \vec{z}			$O \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
Sphère-cylindre de centre O et de direction \vec{x}			$O \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
Appui plan de normale \vec{z}			$O \begin{Bmatrix} 0 & L \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
Sphérique de centre O			$O \begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

Nature de la liaison	Schématisation		Torseur des actions transmissibles $\{\mathcal{F}_{(S_1 \rightarrow S_2)}\}$
	Plane	Spatiale	
Sphérique à doigt d'axe de doigt (O, \vec{z}_2) et de plan de rai- nure $(\vec{x}_1, O, \vec{z}_1)$			$O \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
Pivot glissant d'axe (O, \vec{x})	NF ISO		$O \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
Pivot d'axe (O, \vec{x})	NF ISO		$O \begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
Glissière de di- rection \vec{x}			$O \begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
Hélicoïdale d'axe (O, \vec{x})	NF ISO	NF ISO	$O \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$ $L = \pm \frac{p}{2\pi} \cdot X$
Encastrement			$O \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

REMARQUE 39 Pour le cas de la liaison hélicoïdale, il faut tenir compte du sens de l'hélice

pour pouvoir connaître le signe du moment en fonction de la force. Il existe donc deux cas :

- dans le cas d’une hélice à droite :

$$L = -\frac{p}{2\pi}X$$

- dans le cas d’une hélice à gauche :

$$L = \frac{p}{2\pi}X$$

Ce résultat se retrouve aisément par l’utilisation de la puissance développée par les inter-efforts et du torseur cinématique associé.

4.11 Retour sur les associations de liaison

Nous avons vu au chapitre précédent que pour des liaisons en série, nous pouvions trouver aisément le torseur cinématique équivalent et donc la liaison équivalente.

Par contre, dans le cas des liaisons en parallèles, nous avons vu que l’utilisation des torseurs cinématiques était plus délicate. Dans ce cas, il est plus aisé d’utiliser les relations concernant les torseurs des actions mécaniques transmissibles afin de déterminer la liaison équivalente à deux liaisons en parallèles.

Il suffit alors d’exprimer les torseurs des actions mécaniques transmissibles par chaque liaisons en un même point et de déterminer le torseur global de toutes les actions mécaniques transmissibles du premier solide sur l’autre. Il reste enfin à identifier la liaison équivalente à partir de la forme du torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison globale.

EXEMPLE 8 Le retour de la carrellette

Nous allons utiliser la carrellette composée de deux barres cylindriques parallèles (2) liées à un même support (1) afin d’imaginer cette méthode.

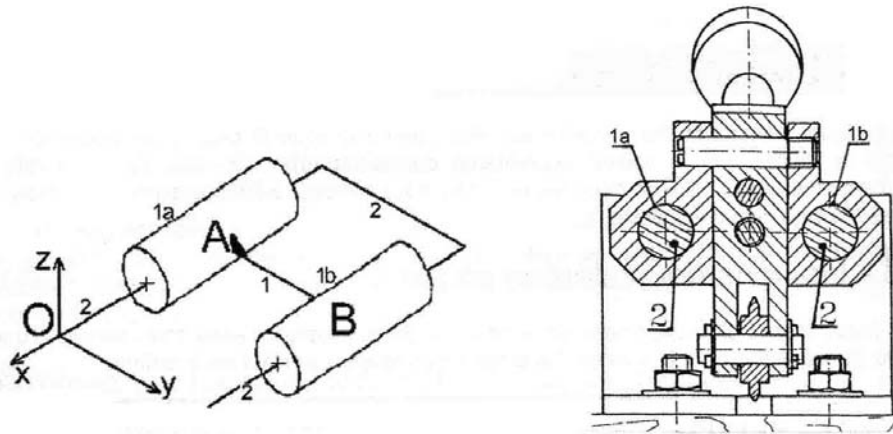


FIG. 4.13 – Mécanisme de guidage de la carrellette

On écrit le torseur des actions mécaniques transmissibles $\{\mathcal{F}_{(1a \rightarrow 2)}\}$ par la liaison de (1a/2) au point A et le torseur des actions mécaniques $\{\mathcal{F}_{(1b \rightarrow 2)}\}$ au point B.

$$\left\{ \mathcal{F}_{(1a \rightarrow 2)} \right\} =$$

$$\left\{ \mathcal{F}_{(1b \rightarrow 2)} \right\} =$$

On utilise alors la relation de champ de moment du torseur $\left\{ \mathcal{F}_{(2 \rightarrow 1b)} \right\}$ pour l'exprimer au point A :

$$\left\{ \mathcal{F}_{(1b \rightarrow 2)} \right\} =$$

On calcule alors le torseur global des actions mécaniques de 2 sur 1 au point A :

$$\left\{ \mathcal{F}_{(1 \rightarrow 2)} \right\} = \left\{ \mathcal{F}_{(1a \rightarrow 2)} \right\}_A + \left\{ \mathcal{F}_{(1b \rightarrow 2)} \right\}_A =$$

La liaison équivalente à ces deux liaisons pivot glissant en parallèle est donc une liaison...

EXEMPLE 9 Cas de l'atterrisseur principal de Mirage 2000

Nous nous intéresserons à la liaison globale reliant le fut de la jambe de train 1 à la cellule 0 de l'avion. Cette liaison globale se décompose en deux liaisons en parallèle : une liaison sphérique de centre B et une liaison sphère cylindre de centre A et de direction \vec{x} .

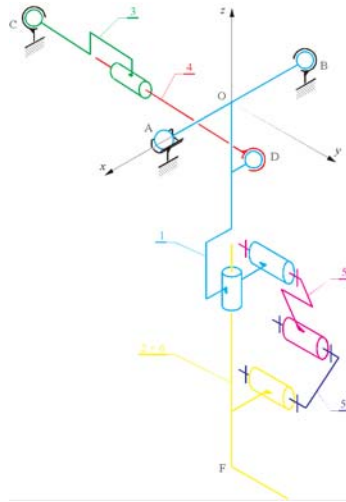


FIG. 4.14 – Schéma cinématique de l'atterrisseur principal du Mirage 2000

On écrit le torseur des actions mécaniques transmissibles $\left\{ \mathcal{F}_{(0 \rightarrow 1a)} \right\}$ par la liaison sphère/cylindre au point A et le torseur des actions mécaniques transmissibles $\left\{ \mathcal{F}_{(0 \rightarrow 1r)} \right\}$ par la liaison sphérique au point B.

$$\left\{ \mathcal{F}_{(0 \rightarrow 1a)} \right\} =$$

$$\left\{ \mathcal{F}_{(0 \rightarrow 1_r)} \right\} =$$

On utilise alors la relation de champ de moment du torseur $\left\{ \mathcal{F}_{(0 \rightarrow 1_r)} \right\}$ pour l'exprimer au point A :

$$\left\{ \mathcal{F}_{(0 \rightarrow 1_r)} \right\} =$$

On calcule alors le torseur global des actions mécaniques de 1 sur 0 au point A :

$$\left\{ \mathcal{F}_{(0 \rightarrow 1)} \right\} = \left\{ \mathcal{F}_{(0 \rightarrow 1_r)} \right\}_A + \left\{ \mathcal{F}_{(0 \rightarrow 1_{la})} \right\}_A =$$

La liaison équivalente à ces deux liaisons en parallèle est donc une liaison...

Chapitre 5

Statique

Nous pouvons définir la statique comme étant la science de l'étude des lois de l'équilibre. Cette discipline étudie la relation de cause à effet entre l'équilibre d'un système matériel Σ et les actions mécaniques auquel il est soumis.

La détermination des actions mécaniques est une étape essentielle dans l'étude d'un système matériel, elle permet le dimensionnement des différents éléments de ce système (roulements, vérins, structure) et prépare l'étude des déformations des différents solides constituant ce système (résistance des matériaux).

Un grand nombre d'actions mécaniques sont connues par des lois de comportement (ressort, amortisseur, action d'un fluide, etc.) ou sont simples à déterminer (action mécanique de la pesanteur). Ces actions mécaniques seront les données de nos problèmes de statique. Les actions mécaniques de contact entre les différents solides constituant le système étudié ne peuvent être obtenues par des lois de comportement, et leur mesure est relativement coûteuse et délicate à mettre en œuvre. L'étude statique d'un système permet de déterminer analytiquement ou graphiquement ces actions mécaniques. Mais, attention, cette étude statique permet de déterminer les actions mécaniques de contact uniquement dans le cas d'un système en équilibre. Dans le cas d'un système en mouvement, il faudra mobiliser les compétences de cinématique, de statique et en introduire de nouvelles en cinétique et dynamique pour déterminer les actions mécaniques et le mouvement d'un système matériel¹.

5.1 Isolement mécanique d'un système

Avant d'étudier l'équilibre statique d'un système matériel, il faut préalablement l'isoler.

Un système mécanique Σ est dit isolé mécaniquement si :

- on a défini la frontière d'isolement et donc le système étudié,
- on a effectué le bilan des actions mécaniques extérieures appliquées au système étudié.

L'extérieur au système Σ est couramment noté $\overline{\Sigma}$, c'est le complémentaire à Σ par rapport à l'univers².

1. Il faudra patienter un peu car ceci correspond à une partie du programme de SII en PT ou en PSI.

2. L'univers dépend de l'étude à mener, la plupart du temps, dans les études de SII habituelles, l'univers se réduit à l'environnement proche du système étudié.

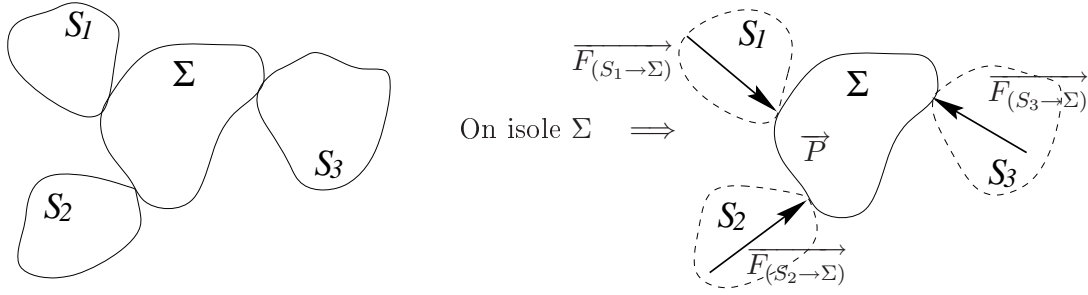


FIG. 5.1 – Isolement d'un système matériel

On appelle actions mécaniques extérieures à Σ , l'ensemble des actions mécaniques exercées par $\overline{\Sigma}$ sur Σ . On peut les modéliser globalement par le torseur suivant :

$$\left\{ \mathcal{F}_{(\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma)} \right\} = {}_M \left\{ \frac{\overrightarrow{\mathcal{R}}_{(\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma)}}{\mathcal{M}_{(M, \overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma)}} \right\} \quad (5.1)$$

La détermination directe de ce torseur d'actions mécaniques est très souvent impossible, pour cela, on utilise la partition physique de $\overline{\Sigma}$ et on décompose les actions mécaniques en fonctions des différents sous-ensembles composants $\overline{\Sigma}$. Pour cela, on est amené à effectuer le *Bilan des actions mécaniques extérieures* à Σ .

REMARQUE 40 Afin de faciliter l'étude de statique, il est important de construire le graphe de structure du système étudié et d'y reporter les différentes actions mécaniques appliquées aux différents corps composant le système Σ étudié.

REMARQUE 41 Lors du choix du système à isoler, on n'isole jamais le bâti. En effet, pour le bâti, il est impossible d'effectuer le bilan des actions mécaniques extérieures.

5.2 Principe Fondamental de la Statique

5.2.1 Notion d'équilibre statique

Un système matériel Σ est dit en équilibre par rapport à un référentiel Rg , si à tout instant t , chaque point de Σ garde la même position dans le repère lié à Rg .

$$\Leftrightarrow \forall t, \forall M \in \Sigma \quad \begin{cases} \overrightarrow{V}_{(M/Rg)} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{\Gamma}_{(M/Rg)} = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

REMARQUE 42 Nous voyons dans la définition ci-dessus que la notion d'équilibre est intimement liée au référentiel choisi pour l'étude. Si ce référentiel est galiléen (SEC. 1.1.1, p. 7),

l'équilibre sera qualifié de strict ou d'absolu, dans le cas contraire, on parlera d'équilibre relatif.

D'autre part, si nous prenons l'exemple d'un avion en vol en croisière (altitude et vitesse constante), l'avion est en équilibre par rapport à un référentiel R_b lié à l'avion, la poussée des réacteurs équilibrant la traînée de l'air et la portance équilibrant le poids de l'avion. Pourtant, cet avion n'est pas statique, loin de là, il avance même à quelques 900 km.h^{-1} pour un avion de ligne.

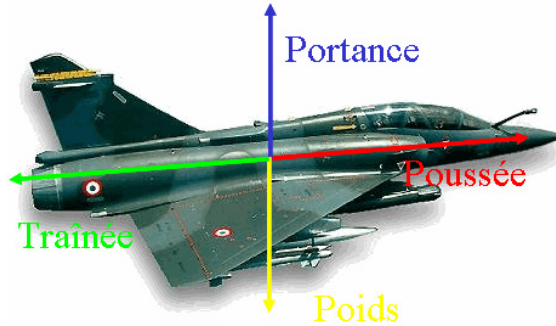


FIG. 5.2 – Équilibre d'un avion en vol en croisière

Il est donc en équilibre statique par rapport au référentiel R_b et en équilibre dynamique par rapport au référentiel R_g supposé galiléen lié à la croûte terrestre. Mais, le référentiel R_b lié à l'avion n'est-il pas galiléen lui aussi?³

5.2.2 Énoncé du principe

RÉSULTAT 7 (Principe fondamental de la statique)

Il existe au moins un référentiel noté R_g et supposé galiléen, dans lequel pour tout système matériel Σ en équilibre, le torseur des actions mécaniques extérieures à Σ est égal au torseur nul.

$$\exists R_g / \forall P \in \Sigma, \quad \left\{ \mathcal{F}_{(\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma)} \right\} = \left\{ 0 \right\} \quad (5.2)$$

REMARQUE 43 Bien que l'équilibre du système soit défini par la relation :

$$\left\{ \mathcal{F}_{(\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma)} \right\} = \left\{ 0 \right\}$$

Cette dernière n'implique pas l'équilibre du système⁴. Il n'y a donc pas de réciprocity pour ce principe.

3. Pour vous aider, allez voir (SEC. 1.1.1, p. 7)...

4. Pensez à ce qui se passe lorsque vous ouvrez une paire de ciseaux avec votre main...

5.3 Théorèmes généraux issus du principe fondamental de la statique

5.3.1 Théorème de la résultante statique

Pour un système matériel Σ en équilibre par rapport à un référentiel supposé galiléen Rg , la résultante des actions mécaniques extérieures appliquées à Σ est nulle :

$$\exists Rg/ \quad \overrightarrow{\mathcal{R}_{(\Sigma \rightarrow \Sigma)}} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum \overrightarrow{F_{ext \rightarrow \Sigma}} = \vec{0} \quad (5.3)$$

5.3.2 Théorème du moment statique

Pour un système matériel Σ en équilibre par rapport à un référentiel supposé galiléen Rg , le moment des actions mécaniques extérieures appliquées à Σ , calculé en tout point P est nul à tout instant :

$$\exists Rg/ \quad \overrightarrow{\mathcal{M}_{(P, \Sigma \rightarrow \Sigma)}} = \vec{0} \quad (5.4)$$

Ce théorème reste vrai quel que soit le point P où l'on exprime le moment résultant.

REMARQUE 44 *L'application du Principe Fondamental de la Statique pour un solide dans l'espace nous donne 6 équations scalaires (3 pour les projections de la résultante, 3 pour les projections du moment). Il semble donc important de cibler son étude avant de commencer les calculs afin de ne poser que les équations intéressantes. Ne pas poser systématiquement toutes les équations, cela ne sert à rien ! Bien choisir le ou les solides à isoler !*

REMARQUE 45 *Dans le cas d'un problème plan, l'application du Principe Fondamental de la Statique sur un système matériel déterminé donne 3 équations, deux à partir du théorème de la résultante (projection suivant deux axes du plan de l'étude), une à partir du théorème du moment résultant (projection suivant l'axe perpendiculaire au plan de l'étude).*

REMARQUE 46 *Si le système étudié est composé de N solides matériels, alors on peut écrire au maximum $6 \times (N - 1)$ équations indépendantes à partir de l'application du PFS.*

REMARQUE 47 *La résolution d'un problème de statique (puis de dynamique) passe par plusieurs phases très importantes :*

1. la modélisation du système réel (elle vous sera très souvent proposée),
2. l'isolement du (ou des) système(s) à étudier,
3. le bilan des actions mécaniques extérieures au système isolé (liste des actions mécaniques et torseurs associés à chacune⁵),
4. l'application du PFS à un ou plusieurs systèmes (et plus particulièrement d'une ou plusieurs équations vectorielles en projection suivant des axes permettant de faire apparaître une ou plusieurs inconnues et des termes fonction des données du problème),
5. la résolution mathématique de l'équation obtenue ou du système d'équations obtenu,
6. la vérification des résultats et de la pertinence du choix de modélisation.

5. Suivant le type de problème à résoudre (écrit ou oral) et suivant votre maîtrise de la statique, vous serez amenés à simplifier ou non cette phase de calcul.

5.4 Exemple de calcul

Nous pouvons reprendre l'exemple simple de la porte que nous avons développé lors du chapitre précédent concernant la modélisation des actions mécaniques (CHAP. 4, p. 71).

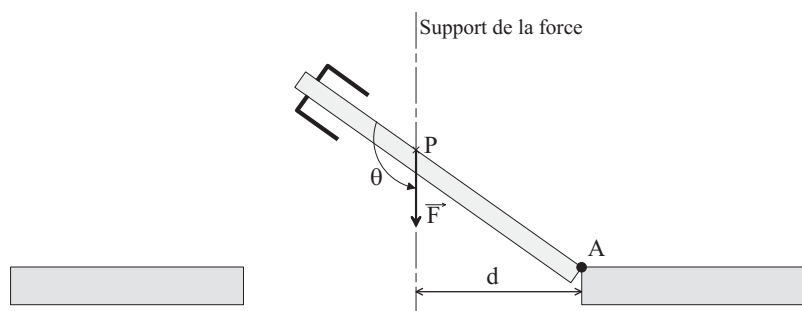


FIG. 5.3 – Modélisation d'une porte...

Si on soumet cette même porte à une force de même intensité, de même direction et de sens opposé. Si on néglige l'action mécanique de la pesanteur, cette porte est soumise à trois actions mécaniques :

- l'action mécanique modélisée par le glisseur (P, \vec{F}) , action mécanique connue,
- le torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison pivot entre la porte et le chambranle, torseur dont la forme est connue au point A,
- l'action mécanique modélisée par le glisseur $(M, -\vec{F})$, action mécanique partiellement inconnue.

De manière physique (“utilisation du bon sens”), nous pouvons alors déterminer trois cas :

-
-
-

En utilisant l'équation vectorielle issue de l'application du théorème de la résultante statique, nous obtenons le résultat suivant :

Nous voyons donc que dans ce cas, le raisonnement sur l'équation du moment est très important puisqu'il nous permet de définir les conditions de l'équilibre.

Si on soumet cette porte à une force \vec{F}_1 d'intensité plus faible que \vec{F} , de sens opposé et de même direction, nous pouvons à nouveau utiliser cette équation du moment statique afin de déterminer la position où l'on doit placer cette force \vec{F}_1 afin d'avoir un équilibre.

Ce raisonnement peut s'effectuer de manière rigoureuse par l'utilisation de torseurs ou de manière plus rapide en utilisant les bras de levier et le ressenti physique.

REMARQUE 48 *A nouveau, nous vous demanderons de vous **adapter** au type de sujet afin de résoudre un problème de statique (cela sera la même chose pour la dynamique). En effet, pour l'écrit, le type de raisonnement à employer et le type de notation à utiliser (vecteur force et/ou moment, torseur des actions mécaniques) sera souvent défini dans le sujet : nous vous demandons donc de suivre les consignes définies par le texte du sujet. Pour l'oral, l'écriture des torseurs complets est à éviter voire à proscrire, le but de l'épreuve orale étant de vérifier votre capacité à prendre du recul par rapport aux outils mathématiques, nous vous conseillons fortement de raisonner simplement grâce aux bras de levier et à votre sens physique.*

REMARQUE 49 *Sauf à répondre à la demande express d'un sujet de concours, il est interdit d'écrire systématiquement les $6 \times n$ équations scalaires issues de l'application du PFS à un système matériel composé de n solide. Il est aussi interdit d'essayer de résoudre ce système d'équations. Le but de la statique aux concours est de vérifier votre capacité à réfléchir, modéliser et simplifier un problème et non de vérifier votre maîtrise (ou non maîtrise) de la résolution des systèmes d'équations...⁶*

5.5 Théorème des actions réciproques

Ce théorème correspond à une version plus actuelle de la troisième loi de Newton (SEC. 4.1, p. 71).

Pour tout système matériel Σ_1 et Σ_2 , à tout instant t , le torseur des actions mécaniques exercées par Σ_1 sur Σ_2 est l'opposé de celui des actions mécaniques exercées par Σ_2 sur Σ_1 .

$$\forall t, \quad \forall \Sigma_1, \Sigma_2, \quad \left\{ \mathcal{F}_{(\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2)} \right\} = - \left\{ \mathcal{F}_{(\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1)} \right\} \quad (5.5)$$

On peut très facilement retrouver ce théorème à partir de l'application du Principe Fondamental de la Statique.

5.6 Notion d'isostatisme et d'hyperstatisme

Pour un système matériel Σ donné, chaque isolement donne au plus 6 équations scalaires indépendantes. Donc pour un système composé d'un bâti et de $(n - 1)$ solides (c'est à dire n solides au total), on peut écrire $6 \cdot (n - 1)$ équations.

Par conséquent, la faisabilité d'un problème de statique dépend du nombre d'inconnues statiques. Il ne doit pas y en avoir plus de $6 \cdot (n - 1)$.

⁶. Cette compétence est validée par les épreuves de mathématiques.

Dans ce cas, le problème est dit isostatique. On peut donc le résoudre en utilisant le Principe Fondamental de la Statique.

Dans le cas contraire, le nombre d'inconnues statiques est supérieur au nombre d'équations scalaires, le problème est dit hyperstatique. On ne peut alors le résoudre qu'en introduisant de nouvelles équations scalaires grâce, par exemple, à la résistance des matériaux.

On peut alors calculer le *degré d'hyperstatisme d'un système* grâce à la relation suivante :

$$h = I_s - r_s \quad \text{avec} \quad r_s \leq 6 \cdot (n - 1) \quad (5.6)$$

Avec :

- I_s : nombre d'inconnues statiques (de liaison).
- r_s : nombre d'équations scalaires indépendantes issues de l'application du PFS.
- h : degré d'hyperstatisme.
- n : nombre de solides composant le système (y compris le bâti).

5.7 Statique graphique

Comme dans le cas de la cinématique, il est possible de résoudre un certain nombre de problèmes de statique grâce à une méthode graphique. En effet, les grandeurs calculées sont toujours homogènes à des vecteurs, donc nous pouvons les représenter sur un schéma à l'échelle.

Malheureusement, comme dans le cas de la statique, ces méthodes graphiques vont être réservées à un certain nombre de cas simples et soumis à des restrictions, la première restriction, la plus importante est directement liée aux problèmes de représentation. Un problème de statique graphique est nécessairement plan ou peut être considéré comme tel.

La statique graphique s'appuie sur les lois de statique analytique et sur les propriétés qui en découlent.

5.7.1 Hypothèse : problème plan en statique

Pour avoir un problème statiquement plan, il suffit que le système étudié soit à l'équilibre sous l'effet d'actions mécaniques dont les résultantes sont coplanaires et les moments éventuels perpendiculaires à ce plan.

Par exemple, si le problème étudié est un problème plan dans le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) , alors les torseurs des actions mécaniques appliqués au système Σ étudié peuvent s'écrire sous la forme :

$$\left\{ \mathcal{F}_{(\Sigma_i \rightarrow \Sigma)} \right\}_{P_i} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\mathcal{R}_{(\Sigma_i \rightarrow \Sigma)}} = X_i \cdot \vec{x} + Y_i \cdot \vec{y} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{(P_i, \Sigma_i \rightarrow \Sigma)}} = N_i \cdot \vec{z} \end{array} \right\}_{P_i} = \left\{ \begin{array}{cc} X_i & 0 \\ Y_i & 0 \\ 0 & N_i \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad (5.7)$$

Les cas d'existence de ce type de problème plan ne sont pas très courants, mais dans le cas de symétrie géométrique et de symétrie de chargement, on remplace assez souvent le modèle spatial par un modèle plan... Même si pour cela, on s'éloigne de la réalité du système (une hypothèse simplificatrice de plus).

Lors de la résolution graphique d'un problème plan, les torseurs d'actions mécaniques utilisés sont toujours des torseurs à résultante (ou glisseur).

5.7.2 Équilibre d'un système soumis à 2 glisseurs

On note Σ_1 , un système matériel soumis uniquement aux actions mécaniques de deux autres systèmes matériels, Σ_2 et Σ_3 .



FIG. 5.4 – Équilibre d'un système soumis à deux forces

On isole le système Σ_1 et on effectue le bilan des actions mécaniques extérieures, il se réduit aux deux glisseurs donnés ci-dessous :

$$\left\{ \mathcal{F}_{(\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1)} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\mathcal{R}_{(\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1)}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A \quad \left\{ \mathcal{F}_{(\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_1)} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\mathcal{R}_{(\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_1)}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B \quad (5.8)$$

On désire appliquer le Principe Fondamental de la Statique à Σ_1 au point A , il faut préalablement écrire tous les torseurs en A :

$$\left\{ \mathcal{F}_{(\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_1)} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\mathcal{R}_{(\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_1)}} \\ \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\mathcal{R}_{(\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_1)}} \end{array} \right\}_A$$

On obtient alors les deux équations vectorielles suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\mathcal{R}_{(\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1)}} = -\overrightarrow{\mathcal{R}_{(\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_1)}} \\ \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\mathcal{R}_{(\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_1)}} = \vec{0} \end{array} \right. \quad (5.9)$$

On voit alors que $\overrightarrow{\mathcal{R}_{(\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1)}}$ et $\overrightarrow{\mathcal{R}_{(\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_1)}}$ sont de sens opposé et de norme identique, le support est le même pour les deux forces et il est obligatoirement porté par \overrightarrow{AB} .

RÉSULTAT 8 *Si un système matériel Σ est soumis uniquement à deux forces, et que ces deux forces le mettent en équilibre par rapport à un référentiel supposé galiléen, noté Rg , alors ces deux forces sont nécessairement égales et opposées.*

5.7.3 Équilibre d'un système soumis à 3 glisseurs

Il existe deux cas possibles pour cet équilibre :

- soit les trois forces représentées par les trois glisseurs sont parallèles,
- soit les trois forces sont concourantes.

Ces deux cas ne peuvent pas être résolus suivant la même méthode.

On note Σ_1 , un système matériel soumis uniquement aux actions mécaniques de trois autres systèmes matériels, Σ_2 , Σ_3 et Σ_4 .

On isole le système Σ_1 et on effectue le bilan des actions mécaniques extérieures, il se réduit aux trois glisseurs donnés ci-dessous :

$$\left\{ \mathcal{F}_{(\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1)} \right\} = {}_A \left\{ \overrightarrow{\mathcal{R}_{(\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1)}} \right\} \quad (5.10)$$

$$\left\{ \mathcal{F}_{(\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_1)} \right\} = {}_B \left\{ \overrightarrow{\mathcal{R}_{(\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_1)}} \right\} \quad (5.11)$$

$$\left\{ \mathcal{F}_{(\Sigma_4 \rightarrow \Sigma_1)} \right\} = {}_C \left\{ \overrightarrow{\mathcal{R}_{(\Sigma_4 \rightarrow \Sigma_1)}} \right\} \quad (5.12)$$

5.7.3.1 Forces concourantes

On suppose que l'action mécanique $\overrightarrow{\mathcal{R}_{(\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1)}}$ de Σ_2 sur Σ_1 est parfaitement connue et que l'on connaît aussi le support de $\overrightarrow{\mathcal{R}_{(\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_1)}}$.

Les supports de ces deux forces se coupent en un point P du plan de construction.

On désire appliquer le Principe Fondamental de la Statique à Σ_1 au point P , il faut préalablement écrire tous les torseurs en P :

$$\left\{ \mathcal{F}_{(\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1)} \right\} = {}_P \left\{ \overrightarrow{\mathcal{R}_{(\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1)}} \right\} \quad (5.13)$$

$$\left\{ \mathcal{F}_{(\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_1)} \right\} = {}_P \left\{ \overrightarrow{\mathcal{R}_{(\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_1)}} \right\} \quad (5.14)$$

$$\left\{ \mathcal{F}_{(\Sigma_4 \rightarrow \Sigma_1)} \right\} = {}_P \left\{ \overrightarrow{\mathcal{R}_{(\Sigma_4 \rightarrow \Sigma_1)}} \right\} \quad (5.15)$$

On obtient alors les deux équations vectorielles suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\mathcal{R}_{(\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1)}} + \overrightarrow{\mathcal{R}_{(\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_1)}} + \overrightarrow{\mathcal{R}_{(\Sigma_4 \rightarrow \Sigma_1)}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{PC} \wedge \overrightarrow{\mathcal{R}_{(\Sigma_4 \rightarrow \Sigma_1)}} = \vec{0} \end{array} \right. \quad (5.16)$$

On voit alors que $\overrightarrow{\mathcal{R}_{(\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1)}}$, $\overrightarrow{\mathcal{R}_{(\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_1)}}$ et $\overrightarrow{\mathcal{R}_{(\Sigma_4 \rightarrow \Sigma_1)}}$ forment un triangle des forces car la somme vectorielle des trois est nulle, le support de $\overrightarrow{\mathcal{R}_{(\Sigma_4 \rightarrow \Sigma_1)}}$ est nécessairement concourant aux deux autres au point P .

RÉSULTAT 9 *Si un système matériel soumis à trois forces non parallèles est à l'équilibre par rapport à un référentiel supposé galiléen, alors ces trois forces sont nécessairement concourantes et leur somme vectorielle est nulle (triangle des forces ou dynamique).*

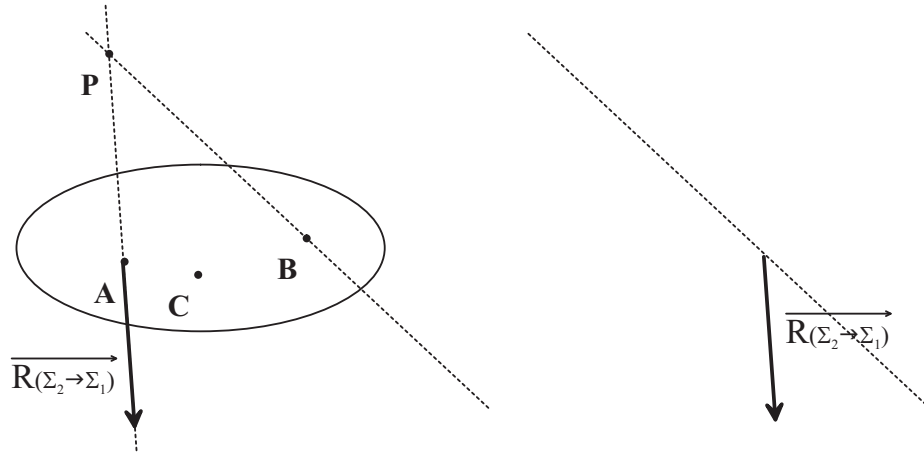


FIG. 5.5 – Équilibre d'un système soumis à trois forces

5.7.3.2 Forces parallèles

On suppose que l'action mécanique $\overrightarrow{\mathcal{R}}_{(\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1)}$ de Σ_2 sur Σ_1 est parfaitement connue et que l'on connaît aussi le support de $\overrightarrow{\mathcal{R}}_{(\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_1)}$. On suppose les trois points A , B et C alignés.

Les supports de ces deux forces sont parallèles, le troisième support est nécessairement parallèle aux deux autres (d'après le théorème de la résultante) et si on applique le Principe Fondamental de la statique en C :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathcal{R}}_{(\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1)} + \overrightarrow{\mathcal{R}}_{(\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_1)} + \overrightarrow{\mathcal{R}}_{(\Sigma_4 \rightarrow \Sigma_1)} = \vec{0} \\ C\vec{A} \wedge \overrightarrow{\mathcal{R}}_{(\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1)} = -C\vec{B} \wedge \overrightarrow{\mathcal{R}}_{(\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_1)} \end{cases} \quad (5.17)$$

On ne peut pas alors définir de méthode générale de résolution graphique dans ce cas là.

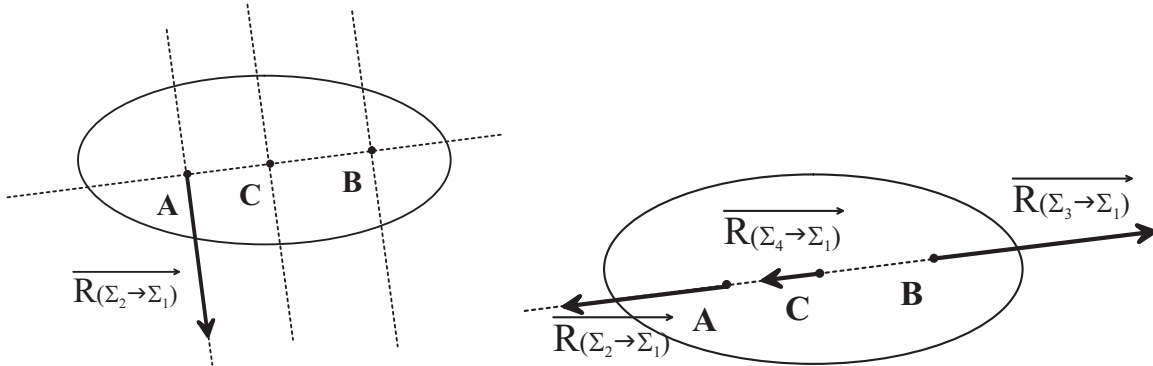


FIG. 5.6 – Cas des forces de supports parallèles ou confondus

REMARQUE 50 Les trois supports des trois forces peuvent aussi être confondus. Dans ce cas, les supports sont nécessairement portés par la droite (AB) . L'application du Principe Fondamental de la Statique ne donne alors qu'une équation indépendante pour deux inconnues, il faut appliquer le PFS aux solides autour de Σ_1 afin d'obtenir une équation supplémentaire.

5.8 Arc-boutement

L'arc-boutement est un comportement dû à l'adhérence entre solides. Lorsque des actions de contact sont situées dans le cône d'adhérence (ou cône de frottement pour simplifier), il ne peut y avoir de glissement, et on parle alors de coincement ou d'arc-boutement. Dans certains cas ce phénomène est recherché (serre-joints, roue libre, pistolet à colle...), et dans d'autres, il doit être évité (liaison glissière...). Dans l'hypothèse du solide indéformable, la condition d'arc-boutement est une condition géométrique.

L'arc-boutement est un phénomène pour lequel l'équilibre (et par conséquent, le mouvement) est indépendant de l'intensité des actions mécaniques en jeu.

EXEMPLE 10 Roue libre

Le système défini ci-dessous permet au moyeu 1 de ne tourner que dans un sens par rapport au tambour 0. Le rayon du tambour est noté R , le rayon d'un rouleau 2, r . Le coefficient de frottement au contact 1/2 et 2/0 est $f = \tan \varphi$.

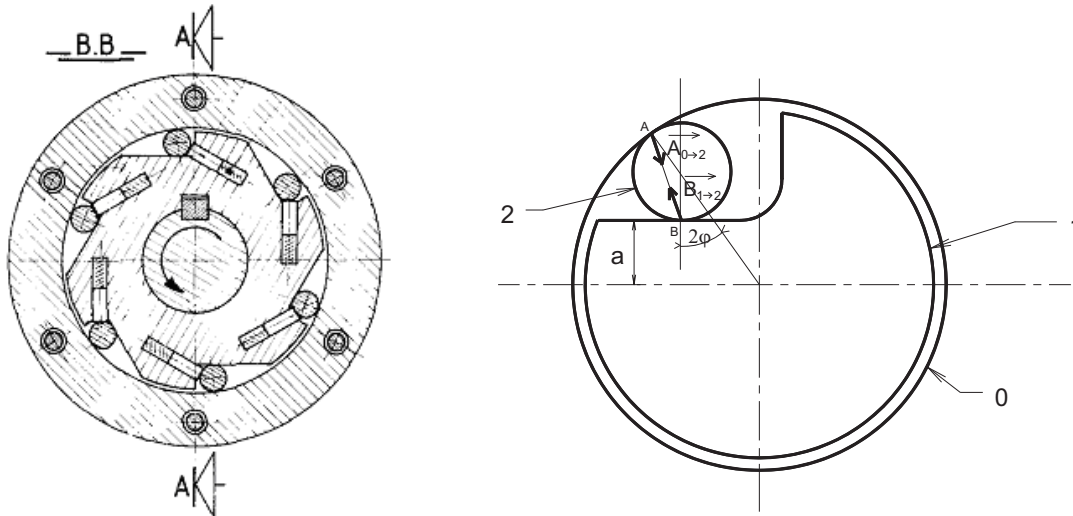


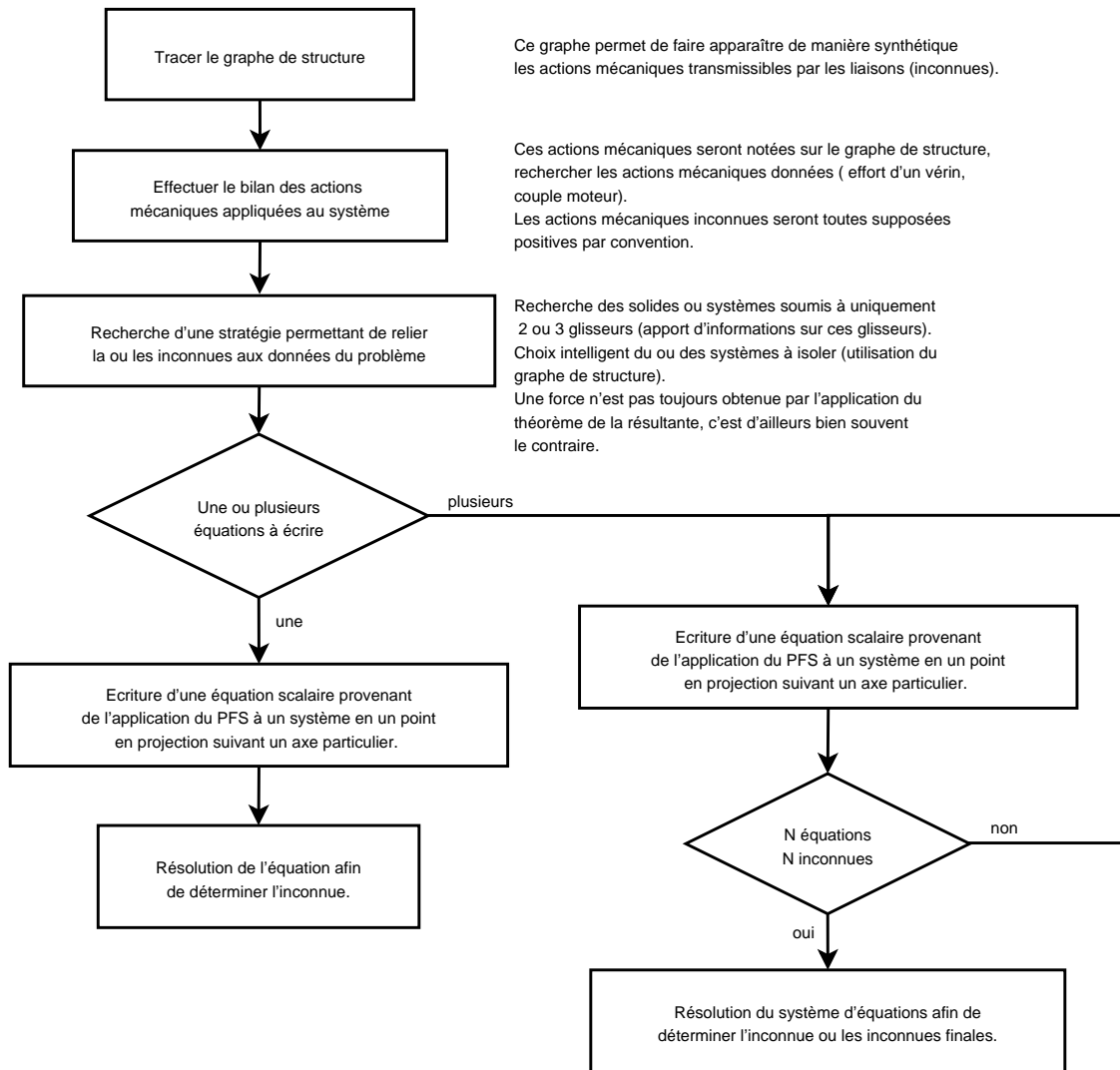
FIG. 5.7 – Arc-boutement dans une roue libre

On néglige l'action de la pesanteur et l'action des poussoirs permettant de maintenir le contact entre les rouleaux et le tambour. Après isolement du rouleau 2 on trouve alors qu'il est soumis à l'action de 2 glisseurs $\vec{R}_{(0 \rightarrow 2)}$ et $\vec{R}_{(1 \rightarrow 2)}$. Ces deux glisseurs sont portés par le même support (AB), sont égaux en intensité et opposés en sens. A la limite du glissement, ils sont sur le cône de frottement défini par la normale au contact, et le $1/2$ angle au sommet φ . La condition d'arc-boutement est donnée par :

$$\cos 2\varphi \geq \frac{a+r}{R-r}$$

5.9 Méthode de résolution d'un problème de statique

Vous trouverez ci-dessous une “méthode” applicable pour la résolution d'un problème de statique. Cette méthode n'est pas infaillible, elle ne représente qu'une schématisation très simple du type de raisonnement que vous devez être amené à produire face à un problème de statique. Avant d'effectuer ce raisonnement, il convient de vérifier l'isostatisme du problème afin de valider la possibilité de résolution de ce problème par l'application simple du principe fondamental de la statique.



Deuxième partie

Annexes

Annexe A

Vecteurs

La mécanique générale est une science expérimentale et appliquée, malheureusement, afin de mettre en place des lois physiques sur les systèmes matériels étudiés, nous sommes obligés d'utiliser certaines notions mathématiques pour modéliser les données expérimentales. La notion de *vecteur* est une des notions mathématiques les plus utilisées en mécanique générale, il est donc bon d'effectuer quelques rappels sur cet outil de base du mécanicien.

A.1 Notion de bipoint

A.1.1 Définition

On appelle *bipoint* \overrightarrow{AB} , l'ensemble ordonné de deux points A et B pris dans cet ordre. On appelle *norme* du bipoint \overrightarrow{AB} , la valeur absolue qui définit la longueur AB et notée $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Un bipoint \overrightarrow{AB} est défini par :

- son origine A ,
- son support, la droite (AB) ,
- son sens, de A vers B ,
- sa norme : $\|\overrightarrow{AB}\|$.

A.1.2 Bipoint équipollent

Deux bipoints \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont dits *équipollents* si et seulement si les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu (FIG. A.1, p. 112).

Ces bipoints équipollents sont :

- de supports parallèles,
- de même sens,
- de même norme.

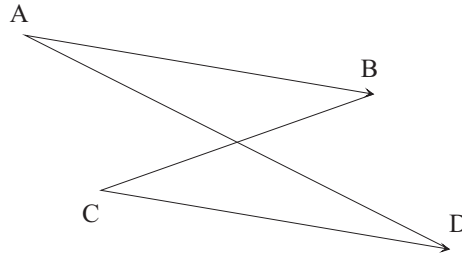


FIG. A.1 – Bipoints équipollents

A.2 Notion de vecteur, définition

On appelle *vecteur* \overrightarrow{AB} , la classe d'équivalence des bipoints équipollents dont le bipoint \overrightarrow{AB} est le représentant. On peut aussi le noter (P, \vec{u}) avec P origine du bipoint \vec{u} .

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont égaux si et seulement si, leurs représentants \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont équipollents.

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si leurs représentants \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} de même origine sont de même support.

A.3 Base, repère, référentiel...

A.3.1 Base

On appelle *base* de l'espace vectoriel E de dimension 3 tout triplet de vecteurs $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ tel que tout vecteur \vec{V} de E peut s'écrire de façon unique :

$$\vec{V} = x \cdot \vec{x} + y \cdot \vec{y} + z \cdot \vec{z}$$

Les réels (x, y, z) sont les trois composantes de \vec{V} dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

A.3.2 Base orthogonale

Une *base orthogonale* est une base dont les vecteurs qui la composent sont orthogonaux deux à deux.

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{z} = \vec{z} \cdot \vec{x} = 0$$

A.3.3 Base orthonormée

Une *base orthonormée* est une base orthogonale dont les vecteurs sont unitaires.

$$\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| = \|\vec{z}\| = 1$$

A.3.4 Base directe

Une *base* est dite *directe* si le passage entre les différents vecteurs $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ composant la base se fait par une rotation dans le sens trigonométrique (Règle des trois doigts de la main droite).

$$\text{Base } (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \text{ directe} \Leftrightarrow \vec{z} = \vec{x} \wedge \vec{y}$$

En mécanique générale, nous n'utiliserons que des bases orthonormées directes. En toute rigueur mathématique, nous devons représenter une base orthonormée directe suivant le modèle de gauche de la figure (FIG. A.2, p. 113), par commodité¹ et aussi par envie de se démarquer des mathématiciens², les mécaniciens utilisent usuellement la représentation de droite de cette même figure.

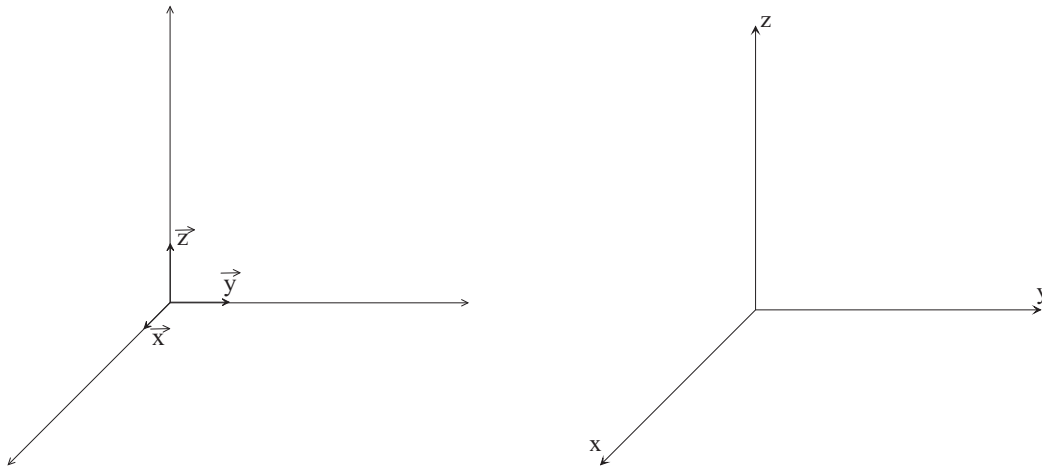


FIG. A.2 – Différentes représentations d'une base orthonormée direct

A.3.5 Repère

Un *repère* est constitué :

- d'une base orthonormée directe $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$,
- d'un point O appelé origine du repère.

On notera ce repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Un repère est purement géométrique, il permet de connaître la position précise d'un point M dans l'espace par l'écriture du vecteur \overrightarrow{OM} .

$$\overrightarrow{OM} = x_M \cdot \vec{x} + y_M \cdot \vec{y} + z_M \cdot \vec{z}$$

x_M , y_M et z_M sont les coordonnées cartésiennes de M dans le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

1. Vous verrez par la suite que nous allons manipuler un grand nombre de repère par système matériels étudiés, le fait de ne pas faire apparaître les vecteurs unitaires de la base allège énormément les écritures.

2. Ce ne sera pas la première ni la dernière fois...

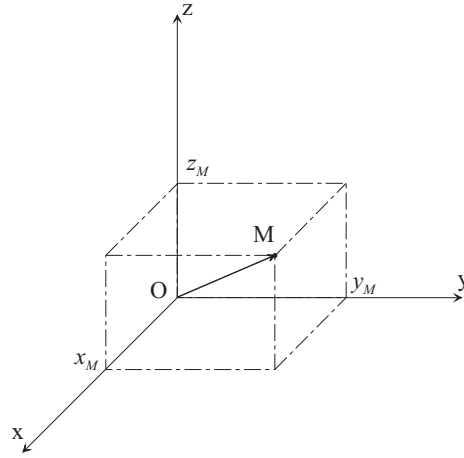


FIG. A.3 – Exemple de repère utilisé en mécanique

A.3.6 Référentiel

Un *référentiel* \mathcal{R} est composé :

- d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$,
- d'un repère de temps avec une origine t_0 et une unité (la seconde (s)).

A.4 Addition vectorielle

A.4.1 Définition

La somme de deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 est un vecteur obtenu géométriquement en portant bout à bout les vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 .

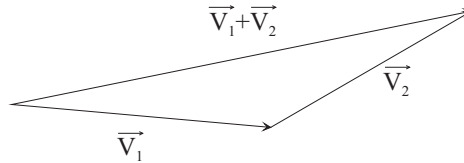


FIG. A.4 – Exemple d'addition vectorielle

A.4.2 Expression analytique

Si \vec{V}_1 et \vec{V}_2 ont respectivement pour composantes (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, alors l'addition vectorielle de \vec{V}_1 et \vec{V}_2 s'écrit :

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (x_1 + x_2) \cdot \vec{x} + (y_1 + y_2) \cdot \vec{y} + (z_1 + z_2) \cdot \vec{z}$$

A.5 Produit scalaire

A.5.1 Définition

Le produit scalaire de deux vecteurs est un **réel** (ou scalaire) noté $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ défini par la relation suivante :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\| \cdot \cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$$

A.5.2 Expression analytique

Si \vec{V}_1 et \vec{V}_2 ont respectivement pour composantes (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, alors le produit scalaire de \vec{V}_1 et \vec{V}_2 s'écrit :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

REMARQUE 51 Attention, ce résultat n'est valable que si les deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 sont exprimés dans la même base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

A.5.3 Propriétés

Symétrie : $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1$

Distributivité : $\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3$

Multiplication par un scalaire : $\lambda_1 \cdot \vec{V}_1 \cdot \lambda_2 \cdot \vec{V}_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$

Carré scalaire : $\vec{V}_1^2 = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1 = \|\vec{V}_1\|^2$

En conséquence, si le vecteur \vec{V}_1 a pour coordonnées (x_1, y_1, z_1) dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, alors :

$$\|\vec{V}_1\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

Produit scalaire nul : $\vec{V}_1 \cdot \vec{0} = 0$ et si $\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2$ alors $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0$

A.5.4 Projection d'un vecteur sur une droite ou un axe

Soit \vec{V} un vecteur quelconque et D une droite de l'espace de vecteur unitaire \vec{u} , alors par définition, la projection orthogonale de sur D s'écrit :

$$\vec{V} \cdot \vec{u} = \|\vec{V}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos(\vec{V}, \vec{u})$$

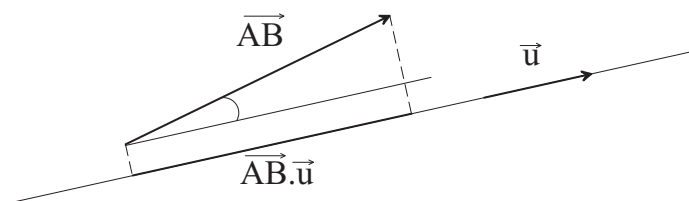
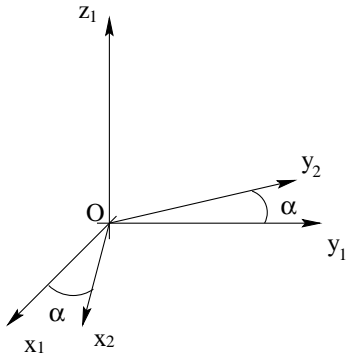


FIG. A.5 – Projection d'un vecteur sur une droite

A.5.5 Changement de base

Une des applications les plus courantes en mécanique du produit scalaire est le changement de base d'un vecteur, c'est à dire lorsque l'on cherche à exprimer les vecteurs d'une base en fonction des vecteurs d'une autre base. Nous nous limiterons au cas où les deux bases ont un vecteur en commun.

Soit $B_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et $B_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$, deux bases orthonormées directes avec le vecteur \vec{z}_1 en commun.



$$\begin{aligned}
 \vec{x}_2 &= (\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_1) \cdot \vec{x}_1 + (\vec{x}_2 \cdot \vec{y}_1) \cdot \vec{y}_1 \\
 \text{or } \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_1 &= \|\vec{x}_2\| \cdot \|\vec{x}_1\| \cdot \cos(\vec{x}_2, \vec{x}_1) = \cos \alpha \\
 \text{et } \vec{x}_2 \cdot \vec{y}_1 &= \|\vec{x}_2\| \cdot \|\vec{y}_1\| \cdot \cos(\vec{x}_2, \vec{y}_1) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\
 \Rightarrow \vec{x}_2 \cdot \vec{y}_1 &= \sin \alpha \\
 \Rightarrow \begin{cases} \vec{x}_2 = \cos \alpha \cdot \vec{x}_1 + \sin \alpha \cdot \vec{y}_1 \\ \vec{y}_2 = -\sin \alpha \cdot \vec{x}_1 + \cos \alpha \cdot \vec{y}_1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

REMARQUE 52 Ce type d'exercice peut paraître relativement long et lourd au niveau mathématique, et pourtant, d'ici quelques jours ou quelques semaines, vous serez tous à même d'effectuer ce changement de base juste en regardant la figure...

A.6 Produit vectoriel

A.6.1 Définition

Le produit vectoriel de deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 est un vecteur, noté $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$, tel que :

- $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ soit orthogonal au plan (\vec{V}_1, \vec{V}_2) ,
- le trièdre $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$ soit direct,
- $\|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\| = \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\| \cdot |\sin(\vec{V}_1, \vec{V}_2)|$.

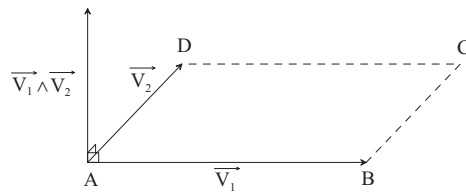


FIG. A.6 – Produit vectoriel

REMARQUE 53 La norme du produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ correspond à l'aire du parallélogramme ABCD.

REMARQUE 54 Afin de déterminer le sens du vecteur résultat du produit vectoriel de manière rapidement et efficace, vous pouvez utiliser deux règles simples :

- la règle du tire-bouchon explicitée sur la figure (FIG. A.7, p. 117),
- la règle des trois doigts de la main droite...

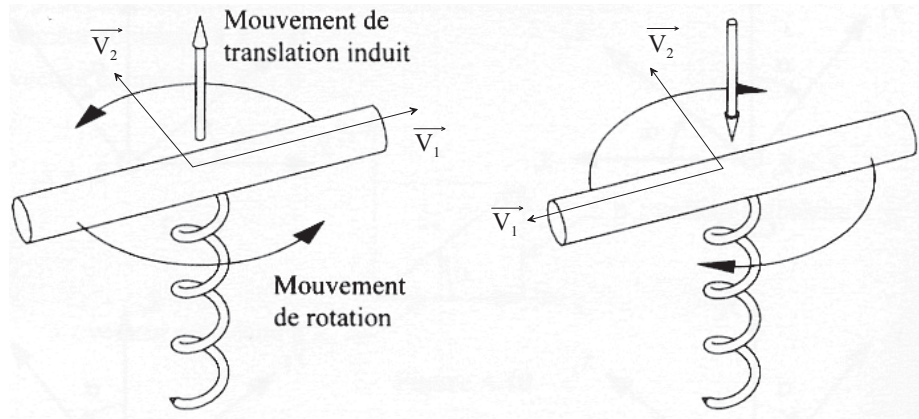


FIG. A.7 – Exemple d'utilisation de la règle du tire-bouchon

A.6.2 Expression analytique

Soit \vec{V}_1 un vecteur de composantes (x_1, y_1, z_1) et \vec{V}_2 de composantes (x_2, y_2, z_2) dans le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Le produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ s'écrit :

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}_R \wedge \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} y_1 \cdot z_2 - y_2 \cdot z_1 \\ z_1 \cdot x_2 - z_2 \cdot x_1 \\ x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 \end{pmatrix}_R$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = (y_1 \cdot z_2 - y_2 \cdot z_1) \cdot \vec{x} + (z_1 \cdot x_2 - z_2 \cdot x_1) \cdot \vec{y} + (x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) \cdot \vec{z}$$

REMARQUE 55 Attention, comme pour le cas du produit scalaire, ce résultat n'est valable que si les deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 sont exprimés dans la même base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Je vous invite donc fortement à spécifier la base d'expression lorsque vous écrivez vos vecteurs sous forme de vecteur colonnes.

Plus tard, pour calculer le produit vectoriel entre deux vecteurs, nous utiliserons indifféremment la définition ou l'expression analytique du produit vectoriel³.

3. En fait, nous utiliserons plus souvent la définition du produit vectoriel, ce qui nous affranchira des problèmes de projection.

A.6.3 Propriétés

Antisymétrie : $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$

Distributivité avec l'addition vectorielle : $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3$

Multiplication par un scalaire : $\lambda_1 \cdot \vec{V}_1 \wedge \lambda_2 \cdot \vec{V}_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$

Cas de nullité : $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ est nul si $\vec{V}_1 = \vec{0}$ ou $\vec{V}_2 = \vec{0}$ ou si \vec{V}_1 et \vec{V}_2 sont colinéaires.

A.6.4 Le double produit vectoriel (Formule de Gibbs)

Pour trois vecteurs \vec{V}_1 , \vec{V}_2 et \vec{V}_3 donnés, on montre que :

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3) \cdot \vec{V}_2 - (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3 \quad (\text{A.1})$$

Il faut cependant utiliser cette relation avec parcimonie, il est souvent plus facile d'effectuer les deux produits vectoriels successifs que d'utiliser cette relation.

A.7 Produit mixte

A.7.1 Définition

Le produit mixte de trois vecteurs \vec{V}_1 , \vec{V}_2 et \vec{V}_3 est le scalaire défini par l'opération suivante :

$$(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$$

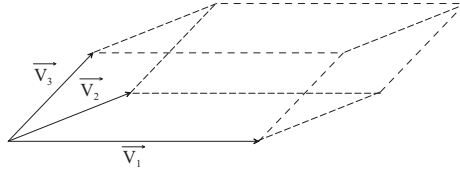


FIG. A.8 – Produit mixte

REMARQUE 56 La valeur absolue du produit mixte $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$ correspond au volume du parallélépipède défini à partir de ces trois vecteurs.

En mécanique générale, nous calculerons assez peu de produits mixtes mais par contre nous utiliserons les propriétés de ce produit pour simplifier des expressions vectorielles.

A.7.2 Expression analytique

Le produit mixte de trois vecteurs \vec{V}_1 , \vec{V}_2 et \vec{V}_3 de composantes respectives (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) et (x_3, y_3, z_3) dans la base orthonormée directe $B(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ se calcule à partir du déterminant (3×3) suivant :

$$(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

Ce qui donne après résolution du déterminant :

$$(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) = x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3$$

A.7.3 Propriétés

Permutation des produits scalaires et vectoriels :

$$(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3$$

Permutation circulaire des vecteurs :

$$(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) = (\vec{V}_3, \vec{V}_1, \vec{V}_2) = (\vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_1) \quad (\text{A.2})$$

Permutation de deux vecteurs : $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) = -(\vec{V}_2, \vec{V}_1, \vec{V}_3)$

A.8 La division vectorielle

La division vectorielle consiste à résoudre une équation du type :

$$\vec{A} \wedge \vec{X} = \vec{B}$$

avec \vec{A} et \vec{B} les vecteurs donnés et \vec{X} le vecteur inconnu.

On montre alors que :

$$\vec{X} = \frac{\vec{B} \wedge \vec{A}}{\vec{A}^2} + \lambda \vec{A} \quad , \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{A.3})$$

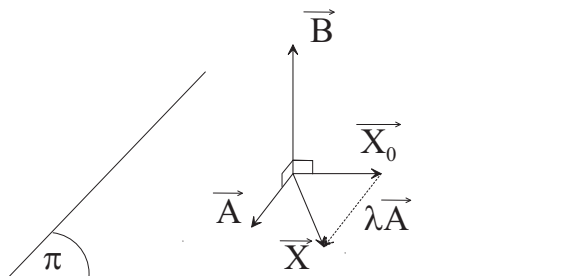


FIG. A.9 – Démonstration de la division vectorielle

DÉMONSTRATION 2 On ne peut résoudre ce problème que si les vecteurs \vec{A} et \vec{B} sont orthogonaux. On appelle (π) , le plan perpendiculaire au vecteur \vec{B} . Par définition du produit vectoriel, le(les) vecteur(s) \vec{X} solutions de l'équation appartient à ce plan, ainsi que le vecteur \vec{A} .

Posons le vecteur \vec{X}_0 tel que le trièdre $(\vec{A}, \vec{X}_0, \vec{B})$ soit orthogonal direct, alors dans ce cas :

$$\vec{A} \wedge \vec{X}_0 = \vec{B}$$

Si on multiplie vectoriellement cette expression par le vecteur \vec{A} et que l'on utilise la relation du double produit vectoriel, on trouve que :

$$\begin{aligned}\vec{A} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{X}_0) &= \vec{A} \wedge \vec{B} \\ \vec{A} \cdot \underbrace{(\vec{A} \cdot \vec{X}_0)}_{=0 \text{ car } \vec{A} \perp \vec{X}_0} - \vec{A}^2 \cdot \vec{X}_0 &= \vec{A} \wedge \vec{B}\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\vec{X}_0 = \frac{\vec{B} \wedge \vec{A}}{\vec{A}^2}$$

D'autre part, nous savons que :

$$\vec{A} \wedge \vec{X} = \vec{B} \quad (\text{A.4})$$

$$\vec{A} \wedge \vec{X}_0 = \vec{B} \quad (\text{A.5})$$

$$\text{A.4} - \text{A.5} = \vec{A} \wedge (\vec{X} - \vec{X}_0) = \vec{0}$$

Ceci n'est possible que si les deux vecteurs sont colinéaires et donc que :

$$(\vec{X} - \vec{X}_0) = \lambda \vec{A} \quad \Rightarrow \quad \vec{X} = \vec{X}_0 + \lambda \vec{A}$$

On retrouve alors la solution générale de l'équation sous forme paramétrique (λ) :

$$\vec{X} = \frac{\vec{B} \wedge \vec{A}}{\vec{A}^2} + \lambda \vec{A}$$

A.9 Moment d'un glisseur par rapport à un point

Un glisseur est un couple constitué d'un point et d'un vecteur, dont le point correspond à l'origine du vecteur.

On appelle moment en A du glisseur (P, \vec{V}) , le vecteur suivant :

$$\overrightarrow{M_{(A, \vec{V})}} = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}$$

Ce moment étant défini par un produit vectoriel, nous pourrions utiliser les propriétés de ce produit pour calculer plus simplement nos moments.

A.9.1 Passage d'un point A à un point B

Nous allons dans cette partie définir une des relations de base utilisée en mécanique pour effectuer des calculs vectoriels.

Soient A et B , deux points distincts de l'espace. Soient $\overrightarrow{M_{(A,\vec{V})}}$ et $\overrightarrow{M_{(B,\vec{V})}}$, les moments en A et B du même glisseur (P, \vec{V}) .

$$\overrightarrow{M_{(A,\vec{V})}} = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}) \wedge \vec{V} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{V} + \underbrace{\overrightarrow{BP} \wedge \vec{V}}_{\overrightarrow{M_{(B,\vec{V})}}} = \overrightarrow{M_{(B,\vec{V})}} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{V}$$

Nous pouvons donc utiliser indifféremment (mais sans se tromper) les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} \overrightarrow{M_{(A,\vec{V})}} = \overrightarrow{M_{(B,\vec{V})}} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{V} \\ \overrightarrow{M_{(A,\vec{V})}} = \overrightarrow{M_{(B,\vec{V})}} + \vec{V} \wedge \overrightarrow{BA} \end{cases}$$

Annexe B

Torseurs

L'utilisation des torseurs permet de clarifier fortement les calculs en mécanique générale et par la même de simplifier ces calculs.

Ils sont donc couramment utilisés pour résoudre des problèmes de mécanique, ils n'apportent pas de relations nouvelles, mais permettent uniquement de mieux "ranger" les différents termes utilisés. Un torseur n'est qu'un outil mathématique! Et nous allons introduire cet outils dans ce chapitre...

B.1 Champ de vecteur

On appelle champ de vecteur, toute application qui, à tout point M de l'espace, fait correspondre un vecteur $\overrightarrow{V}_{(M)}$.

B.1.1 Champ équiprojectif

Un champ de vecteur $\overrightarrow{V}_{(M)}$ est dit équiprojectif si :

$$\forall P, \forall Q, \quad \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{V}_{(Q)} = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{V}_{(P)}$$

L'application de cette propriété est essentiellement liée à la résolution de problèmes de cinématique graphique comme le montre le schéma ci-dessous.

B.1.2 Champ antisymétrique

Un champ de vecteur $\overrightarrow{V}_{(M)}$ est dit antisymétrique si :

$$\exists \vec{U} \in \mathbb{R} / \forall P, \forall Q, \quad \overrightarrow{V}_{(Q)} = \overrightarrow{V}_{(P)} + \vec{U} \wedge \overrightarrow{PQ}$$

Ce champ antisymétrique est aussi appelé champ de moment nous verrons ensuite pourquoi...

Nous pouvons aisément démontrer qu'un champ de vecteur équiprojectif est antisymétrique et réciproquement.

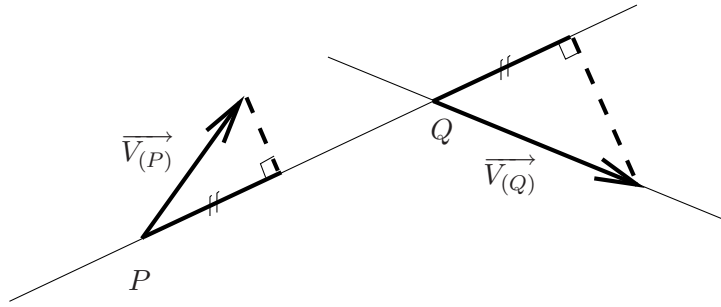


FIG. B.1 – Exemple d'équiprojectivité

Soit $\overrightarrow{V_{(M)}}$, un champ de vecteur antisymétrique :

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{V_{(Q)}} = \overrightarrow{PQ} \cdot \left(\overrightarrow{V_{(P)}} + \underbrace{\vec{U} \wedge \overrightarrow{PQ}}_{\perp \overrightarrow{PQ}} \right) = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{V_{(P)}}$$

Un champ de vecteur antisymétrique est donc équiprojectif.

Choisissons maintenant un champ $\overrightarrow{V_{(M)}}$ équiprojectif.

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{V_{(Q)}} = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{V_{(P)}} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{V_{(Q)}} - \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{V_{(P)}} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot (\overrightarrow{V_{(Q)}} - \overrightarrow{V_{(P)}}) = \vec{0}$$

Les vecteurs $(\overrightarrow{V_{(Q)}} - \overrightarrow{V_{(P)}})$ et \overrightarrow{PQ} sont donc orthogonaux. On peut alors écrire la relation suivante :

$$\exists \vec{U} / \quad (\overrightarrow{V_{(Q)}} - \overrightarrow{V_{(P)}}) = \vec{U} \wedge \overrightarrow{PQ} \Rightarrow \overrightarrow{V_{(Q)}} = \overrightarrow{V_{(P)}} + \vec{U} \wedge \overrightarrow{PQ}$$

Un champ de vecteur équiprojectif est donc antisymétrique.

B.2 Torseur

B.2.1 Définition

On appelle torseur la réunion de deux champs de vecteurs \vec{R} et \vec{M} :

- \vec{R} est appelé la résultante du torseur (c'est un invariant).
- \vec{M} est le moment du torseur, son expression dépend du point où il est exprimé.

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M_{(P)}} \end{array} \right\}$$

\vec{R} et \vec{M} sont appelés les éléments de réduction du torseur. $\vec{M_{(P)}}$ est un champ de vecteurs :

- antisymétrique : $\forall P, \forall Q, \quad \vec{M_{(Q)}} = \vec{M_{(P)}} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{PQ}$
 - équiprojectif : $\forall P, \forall Q, \quad \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{M_{(Q)}} = \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{M_{(P)}}$
- $\vec{M_{(P)}}$ est un champ de moments de torseur.

B.2.2 Notation

Un torseur étant constitué de deux éléments, un torseur n'est entièrement défini dans le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ que si l'on connaît explicitement :

- sa résultante : $\vec{R} = R_x \cdot \vec{x} + R_y \cdot \vec{y} + R_z \cdot \vec{z}$,
- le point P en lequel il est exprimé : $\overrightarrow{OP} = x_P \cdot \vec{x} + y_P \cdot \vec{y} + z_P \cdot \vec{z}$,
- son moment en son point d'expression P : $\overrightarrow{M_{(P)}} = M_x \cdot \vec{x} + M_y \cdot \vec{y} + M_z \cdot \vec{z}$.

On peut alors écrire le torseur de deux manières :

- sous forme de vecteurs colonnes

$$\{\tau\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_{(P)}} \end{Bmatrix}_P = \begin{Bmatrix} R_x & M_x \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

avec en bas à gauche le point où est exprimé le torseur et en bas à droite, la base d'expression des vecteurs,

- sous forme de vecteurs lignes

$$\{\tau\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_{(P)}} \end{Bmatrix}_P = \begin{Bmatrix} R_x \cdot \vec{x} + R_y \cdot \vec{y} + R_z \cdot \vec{z} \\ M_x \cdot \vec{x} + M_y \cdot \vec{y} + M_z \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_P$$

avec en bas à droite le point où est exprimé le torseur.

B.3 Invariants d'un torseur

Soit un torseur quelconque $\{\tau\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_{(A)}} \end{Bmatrix}_A$ connu par ses éléments de réduction au point A donné.

Si on transporte ce torseur au point B , il s'écrit alors :

$$\{\tau\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_{(B)}} = \overrightarrow{M_{(A)}} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R} \end{Bmatrix}$$

La résultante n'a pas changée (on le savait déjà), elle correspond au premier invariant du torseur, on l'appelle l'**invariant vectoriel**.

Si on calcule le scalaire $\vec{R} \cdot \overrightarrow{M_{(B)}}$, on trouve :

$$\vec{R} \cdot \overrightarrow{M_{(B)}} = \vec{R} \cdot (\overrightarrow{M_{(A)}} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}) = \vec{R} \cdot \overrightarrow{M_{(A)}} + \underbrace{\vec{R} \cdot (\overrightarrow{BA} \wedge \vec{R})}_{\vec{0}} = \vec{R} \cdot \overrightarrow{M_{(A)}}$$

Le deuxième invariant d'un vecteur s'appelle l'**invariant scalaire**, il correspond au produit scalaire entre sa résultante et son moment. Géométriquement, cela correspond à la projection orthogonale du moment sur la résultante.

B.4 Opérations sur les torseurs

- Transport d'un torseur

Sachant qu'un moment dépend du point où il est exprimé, il en va de même pour un torseur.

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_{(A)}} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_{(B)}} \end{array} \right\} \quad \text{avec } \overrightarrow{M_{(B)}} = \overrightarrow{M_{(A)}} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB}$$

\vec{R} et $\overrightarrow{M_{(A)}}$ sont les éléments de réduction en A du torseur $\{\tau\}$, de même, \vec{R} et $\overrightarrow{M_{(B)}}$ sont les éléments de réduction en B du torseur $\{\tau\}$.

- Egalité entre deux torseurs

Deux torseurs $\{\tau_1\}$ et $\{\tau_2\}$ sont égaux s'ils ont les mêmes éléments de réduction au même point d'expression P .

$$\{\tau_1\} = \{\tau_2\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 = \vec{R}_2 \\ \overrightarrow{M_{1(P)}} = \overrightarrow{M_{2(P)}} \end{array} \right.$$

- Torseur nul

Le torseur nul est un torseur où les deux éléments de réduction sont nuls :

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{(P)}} = \vec{0} \end{array} \right.$$

Il se présente toujours sous cette forme, et ce, quelque soit le point où il est exprimé.

- Addition de deux torseurs

Pour calculer la somme de deux torseurs $\{\tau_1\}$ et $\{\tau_2\}$, il faut préalablement exprimer ces deux torseurs au même point P . Il suffit ensuite de sommer les éléments de réduction des deux torseurs.

$$\{\tau_1\} + \{\tau_2\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 \\ \overrightarrow{M_{1(P)}} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_2 \\ \overrightarrow{M_{2(P)}} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \overrightarrow{M_{1(P)}} + \overrightarrow{M_{2(P)}} \end{array} \right\}$$

- Produit d'un scalaire et d'un torseur

Soit un torseur $\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_{(P)}} \end{array} \right\}$ connu par ces éléments de réduction au point P .

Le produit d'un scalaire λ par ce torseur s'écrit :

$$\lambda \cdot \{\tau\} = \lambda \cdot \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_{(P)}} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \cdot \vec{R} \\ \lambda \cdot \overrightarrow{M_{(P)}} \end{array} \right\}$$

- Comoment de deux torseurs

On appelle comoment de deux torseurs $\{\tau_1\}$ et $\{\tau_2\}$, le scalaire défini ci-dessous :

$$\{\tau_1\} \otimes \{\tau_2\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 \\ \overrightarrow{M_{1(P)}} \end{array} \right\} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_2 \\ \overrightarrow{M_{2(P)}} \end{array} \right\} = \vec{R}_1 \cdot \overrightarrow{M_{2(P)}} + \vec{R}_2 \cdot \overrightarrow{M_{1(P)}}$$

Comme pour les autres opérations, le comoment ne s'effectue qu'entre deux torseurs exprimés au même point.

REMARQUE 57 *En mécanique générale, cette opération est extrêmement utile pour le calcul de puissances, d'énergies et d'autres choses très intéressantes pour la suite de la prépa... Mais nous en reparlerons plus tard.*

B.5 Éléments centraux d'un torseur

Soit un torseur quelconque $\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_{(A)}} \end{array} \right\}$ connu par ses éléments de réduction au point A donné.

B.5.1 Point central

On appelle point central d'un torseur $\{\tau\}$ un point C où le moment du torseur $\overrightarrow{M_{(C)}}$ est colinéaire à sa résultante \vec{R} .

B.5.2 Axe central

Dans la définition du point central, nous pouvons traduire la colinéarité de manière plus mathématique grâce à la relation suivante :

$$\overrightarrow{M_{(C)}} \wedge \vec{R} = \vec{0}$$

En développant cette relation grâce à la relation de champ de moment du torseur et en utilisant la relation de division vectorielle (Éq. A.3, p. 119), nous trouvons la définition de l'axe central :

$$\overrightarrow{AC} = \frac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{M_{(A)}}}{\vec{R}^2} + \lambda \vec{R} \quad , \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{B.1})$$

REMARQUE 58 *Afin de déterminer rapidement l'axe central, on calcule les coordonnées du point C pour une valeur particulière de λ , par exemple $\lambda = 0$. L'axe central est la droite passant par le point C et de vecteur directeur \vec{R} .*

B.5.3 Moment central

On appelle moment central, le moment du torseur en un point de l'axe central du torseur.

Le moment central est le même en tout point de l'axe central.

Soient deux points de l'axe central, C et C' , nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{M_{(C)}} = \overrightarrow{M_{(C')}} + \overrightarrow{CC'} \wedge \vec{R} = \overrightarrow{M_{(C')}}$$

En effet, le vecteur directeur de l'axe central est le vecteur \vec{R} .

B.5.4 Description géométrique

En utilisant la relation de champ de moment d'un torseur, on peut écrire :

$$\overrightarrow{M}_{(A)} = \underbrace{\overrightarrow{M}_{(C)}}_{\text{colinéaire à } \vec{R}} + \underbrace{\overrightarrow{AC} \wedge \vec{R}}_{\substack{\perp \text{ à } \overrightarrow{AC} \text{ et } \vec{R} \\ \text{norme proportionnelle à } AC}}$$

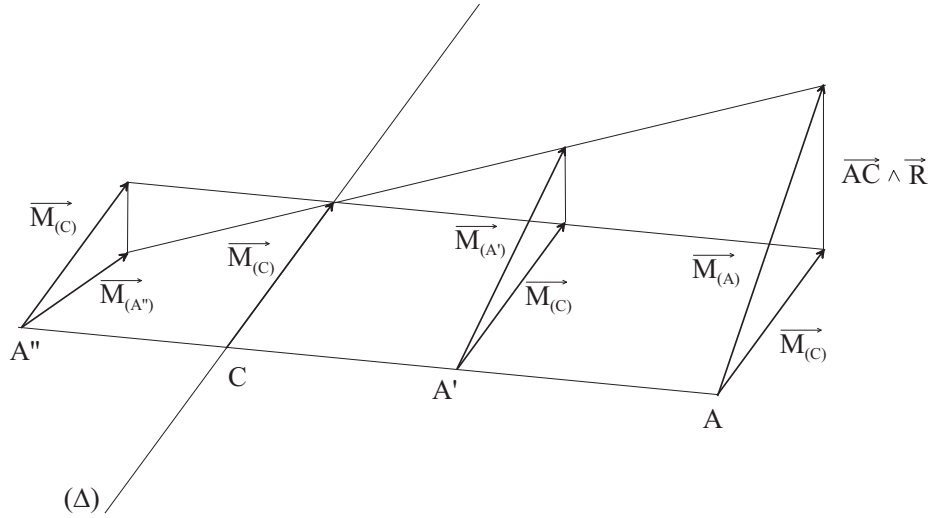


FIG. B.2 – Construction associé au moment central

REMARQUE 59 Nous voyons sur la figure ci-dessus et grâce à la relation définissant l'antisymétrie du champ de moment de torseur que le moment exprimé en un point central C est minimal, le moment central $\overrightarrow{M}_{(C)}$ est donc le moment minimum.

B.5.5 Pas d'un torseur

Le moment central d'un torseur étant constant et colinéaire à la résultante de ce torseur, il existe un scalaire p tel que :

$$\forall C \in (\Delta), \quad \overrightarrow{M}_{(C)} = p \vec{R}$$

On montre que :

$$p = \frac{\vec{R} \cdot \overrightarrow{M}_{(A)}}{\vec{R}^2}$$

B.6 Les torseurs couples

B.6.1 Définition

Un torseur couple est un torseur dont la résultante est nulle.

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{(P)}} \neq \vec{0} \end{array} \right\}$$

B.6.2 Propriétés

- Le moment d'un torseur couple est le même en tout point de l'espace. En conséquence, un torseur est invariant, et ce, quelque soit le point où il est exprimé.

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{(A)}} \neq \vec{0} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{(B)}} = \overrightarrow{M_{(A)}} \end{array} \right\}$$

- Un torseur couple peut être représenté par un ensemble de deux glisseurs de direction parallèle, de même norme et de sens contraire.

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{(A)}} \neq \vec{0} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{l} -\vec{R} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B \quad \text{tel que } \overrightarrow{M_{(A)}} = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}$$

B.7 Les torseurs à résultante (glisseurs)

B.7.1 Définition

Un torseur à résultante est un torseur dont le moment central est nul :

$$\forall C \in (\Delta), \quad \{\tau\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_{(C)}} = \vec{0} \end{array} \right\} \quad (\text{B.2})$$

B.7.2 Propriété

Un torseur $\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \neq \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{(A)}} \neq \vec{0} \end{array} \right\}$ est un torseur à résultante si son invariant scalaire est nul, c'est à dire plus simplement si ces deux éléments de réduction sont orthogonaux.

B.7.3 Somme de glisseurs

Dans le cas d'une somme discrète de n torseurs à résultante $\{\tau_i\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_i \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{C_i}$ avec $C_i \in (\Delta_i)$, le torseur somme s'écrit en un point A quelconque :

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \vec{R}_i \\ \sum_{i=1}^n (\overrightarrow{AC_i} \wedge \vec{R}_i) \end{array} \right\}_A$$

Dans le cas d'une répartition continue (volumique, linéique ou surfacique) de torseurs à résultante caractérisés en un point P d'un domaine E par $\{\tau\} = \underset{P}{\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{(P)}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$, le torseur somme s'écrit en un point A quelconque :

$$\{\tau\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} \int_{P \in E} \overrightarrow{R} \\ \int_{P \in E} (\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{R}) \end{array} \right\}}$$

REMARQUE 60 *Nous verrons plus tard qu'un grand nombre de torseurs utilisés en mécanique générale (actions mécaniques, cinétique, dynamique) correspondent à des sommes de torseurs à résultante, mais c'est à nouveau pour plus tard.*

Bibliographie

- [Aub92] M. Aublin, *Systèmes mécaniques : Théorie et dimensionnement*, Dunod, 1992.
- [Bel88] Didier Bellet, *Cours de mécanique générale*, Cepadues, Septembre 1988.
- [Bon94] J.C. Bône, J. Morel et M. Boucher, *Mécanique générale*, Dunod, Août 1994.
- [Bre95] Y. Bremont, P. Reocreux, *Mécanique 1 : Mécanique du solide indéformable*, Ellipses, 1995.
- [Che96] Luc Chevalier, *Cours de mécanique des solides indéformables*, ENS Cachan, 1996.
- [Che04] Luc Chevalier, *Mécanique des systèmes et des milieux déformables*, Ellipses, 2004.
- [Cho97] Maurice Chossat, *Mathématiques de l'ingénieur*, Dunod, 1997.
- [Col97] G. Colombari, J. Giraud *Sciences Industrielles CPGE 1^o année*, Foucher, 1997.
- [Fey63] R. Feynman, *Cours de physique Tome 1-Mécanique*, Dunod, 1963.
- [Fab03] J. Fabre, Yves Plusquellec et M. Agullo, *Que savez vous de l'outil mathématique? A l'usage des élèves ingénieurs et des étudiants en mécanique*, Fascicules 1-6, Cepadues, 2003.
- [Ger86] P. Germain, *Mécanique, Tome 1 et 2*, Ellipses, 1986.
- [Ger80] P. Germain, *Cours de mécanique*, Ecole Polytechnique, 1980.
- [Gru88] Christian Gruber, *Mécanique générale*, Presses polytechniques romandes, 1988.
- [Las00] Robert Lassia et Christophe Bard, *Cours et exercices corrigés de cinématique*, Ellipses, 2000.
- [Las02] Robert Lassia et Christophe Bard, *Cours et exercices corrigés de dynamique*, Ellipses, 2002.
- [New83] Isaac Newton, *Phylosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Teknea, 1783.
- [Per83] J.P. Perez, *Mécanique du point et des systèmes matériels*, Masson, 1983.
- [Per01] J.P. Perez, *Mécanique, fondements et applications*, Dunod 6^o édition, 2001.
- [Thé00] Alain Théron, *Sciences Industrielles : Mécanique 1^o année*, Ellipses, 2000.