TD 2: Matrice de Déformations

Objectif: Calculer la matrice

1 Exercice 3

Soit le vecteur déplacement $\underline{U} = (u, v, w)^\top$ en tout point du solide de dimension caractéristique L, dans le repère cartésien:

$$\underline{U}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{L} + 2y \\ \frac{xy}{2L} \\ -4z \end{pmatrix} \tag{1}$$

1. Calculer la matrice de déformation $\underline{E}$ associé su vecteur de déformation.

1.1 Solution

1.1.1 Calculer la Matrice de Déformations

La matrice est définie comme:

$$\underline{\underline{E}}(M) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

Donc, on peut exprimer cette tenseur comme suit:

$$\underline{\underline{E}}(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) \\ ... & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}) \\ ... & ... & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Donc, on peut faire les differents dérives pour le vecteur $\underline{U}$

$$\underline{\underline{E}}(M) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{L} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) \\ ... & \frac{x}{2L} & \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}) \\ ... & ... & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Voilà la matrice de Déformation pour cette exercice.

2 Exercise 4

Soit un matériau sollicité dont la matrice des déformations $\underline{\underline{E}}$ dans le repère x, y, z connue en tout point d'un solide noté M

$$\underline{\underline{E}}(M) = \begin{pmatrix} 2x+1 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \times 10^{-5}$$

1. Vérifier les équations de compatibilité
2. Calculer le vecteur déplacement $\underline{U}(M)$

2.1 Solution

2.1.1 Equations de compatibilité

Il y a 6 équation de compatibilité. Elles concernent les dérivés secondes de composants de la matrice de déformation. Les composants de la matrice de déformation sont des fonctiones linaires d'ordre.

Les composants **normales** de la matrice :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1 \rightarrow u(x, y, z) = x^2 + x + C_1(y, z)$$
$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow v(x, y, z) = C_2(x, z)$$
$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \rightarrow w(x, y, z) = \frac{z^2}{2} + C_3(x, y)$$

Les composants **tangentielles** de la matrice :

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) = 8$$
$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}(\frac{C_2(x,z)}{\partial x} + \frac{\partial C_1(y,z)}{\partial y}) = 8$$

On mets la constante $C_1(y,z)$ en fonctions de $C_2(x,z)$:

$$\frac{\partial C_1(y,z)}{\partial y} = 16 - \frac{C_2(x,z)}{\partial x} \tag{2}$$

A est une constante même si en toute rigeur cette dernière devrait dépendre de z : $A(z)$. On va supposer ici pour simplifier les calculs que $A(z)$ est une constante.

Pour calculer ε_{xz}, considerons

$$C_1(y,z) = Ay + C_{11}(z)C_2(x,z) = (16 - A)x + C_{22}(z) \tag{3}$$

Donc, nous avons pour ε_{xz}:

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right] = 0 \tag{4}$$
$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial z}(x^2 + x + C_1(y,z))\right) + \left(\frac{\partial(\frac{z^2}{2} + C_3(x,y))}{\partial z}\right)\right] = 0 \tag{5}$$
$$c = d + e \tag{6}$$