TD 3 & 4: Les contraintes

Objectif: Calculer les contraintes

1 Exercice 1: Determination du cisaillement maximal par cercle de Mohr

Soit un solide de section $10 \times 10 \ cm^2$ et de hauteru de 50 mm soumis à un essai de traction. Le matériau est en équilibre statique et la xontrqinte est considérée comm étant bi-axiale.

1. Determiner les contraintes σ_{xx} et σ_{yy} associées.
2. A partir du cercle de Mohr, déduire l'angle de cisaillemen maximale du matériau.

1.1 Solution

1.1.1 Determiner les contraintes σ_{xx} et σ_{yy}

L'equilibre statique permet de considérer un colume élémentaire dans le solide.

Pour σ_{xx}:

$$\sigma_{xx} = \frac{F_{xx}}{A_{xx}} \cdot \left[\frac{N}{m^2}\right] \tag{1}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{1000}{50 \times 10} \times \frac{(1000 \ mm)^2}{1 \ m^2} = 4 \ MPa \tag{2}$$

Pour σ_{yy}:

$$\sigma_{yy} = \frac{F_{yy}}{A_{yy}} \cdot \left[\frac{N}{m^2}\right] \tag{3}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{1000}{10 \times 10} \times \frac{(1000 \ mm)^2}{1 \ m^2} = 10 \ MPa \tag{4}$$

1.2 Déduire l'angle de cisaillement maximale du matériau

σ_{xx} et σ_{yy} sont de contraintes normales et contraintes principales. Donc les points restent sur l'axe des σ.

Le centre est égal à la demi-distance séparant σ_{xx} et σ_{yy}.

$$c = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}$$

$$C = 7\ MPa$$

Donc, les contraintes de cisaillement max sont

$$\tau = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}$$

$$\mathbf{C = 3\ MPa}$$

2 Exercise 2:

Soit la matrice des contraintes $\underline{\underline{\sum}}$ exprimée ci-dessous:

$$\underline{\underline{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} \frac{2\sigma_0 x}{L} - 2\sigma_0 & \frac{-2\sigma_0 y}{L} & 0 \\ \frac{-2\sigma_0 y}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}$$

1. Statuer des équations d'équilibre local.
2. Déterminer le vecteur contrainte d'un point M situé sur la face $x = 2L$.
3. Calculer en G (centre de section) le torseur global équivalent associé à ces densités surfaciques d'efforts sur cette même face.

2.1 Solution

2.1.1 Statuer des équations d'équilibre local

D'après le cours, les équations d'équilibre local s'ecrivent :

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} - \underline{f_v}$$

$$\text{En Cordonées Cartésiennes} = \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0 \end{cases}$$

pour la direction i:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{2\sigma_0 x}{L} - \cancel{2\sigma_0}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\frac{2\sigma_0 y}{L}) + \frac{\partial}{\partial z}\emptyset + f_x = 0$$

$$\cancel{\frac{2\sigma_0}{L}} - \cancel{\frac{2\sigma_0}{L}} + \mathbf{f_x} = \mathbf{0}$$

pour la direction j:

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\cancel{-\frac{2\sigma_0 y}{L}}) + \frac{\partial}{\partial y}(\emptyset) + \frac{\partial}{\partial z}\emptyset + \mathbf{f_y} = \mathbf{0}$$

Pour la direction k:

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\emptyset) + \frac{\partial}{\partial y}(\emptyset) + \frac{\partial}{\partial z}\cancel{\sigma_1} + \mathbf{f_z} = \mathbf{0}$$

2.2 2. Déterminer le vecteur contrainte d'un point M situé sur la face $x = 2L$.

D'après le cours, le vecteur contrainte associé, noté $\underline{C}(M, n)$ est:

$$\underline{C}(M, \underline{n}) = \underline{\underline{\sum}}(M) \cdot \underline{n}$$

Le point M est : $(2L, y, z)$. Donc, notre cas, $\underline{C}(2L, y, Z)$ dans la direction $i = (1, 0, 0)$ car c'est le vecteur que represente la face à $x = 2L$:

$$\underline{C}(M, \underline{n}) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\underline{C}(M, \underline{n}) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yx} \\ \sigma_{zx} \end{pmatrix}$$

En remplaçant les valeurs:

$$\underline{\underline{C}}(M, i) = \begin{pmatrix} \frac{2\sigma_0 x}{L} - 2\sigma_0 & \frac{-2\sigma_0 y}{L} & 0 \\ \frac{-2\sigma_0 y}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{2\sigma_0(2L)}{L} - 2\sigma_0 \\ \frac{-2\sigma_0 y}{L} \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2\sigma_0 \\ \frac{-2\sigma_0 y}{L} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc, la face du solide $x = 2L$ de normale i est soumise à une contrainte normalz $2\sigma_0$ (selon $\underline{i}$) et une contrainte tangentielle $\frac{-2\sigma_0 y}{L}$ selon $\underline{j}$.

2.3 3. Calculer en G (centre de section) le torseur global équivalent associé à ces densités surfaciques d'efforts *sur cette même face (i).*

Le torseur global associé à la contrainte déterminée précédemment au point G s'ecrit:

$$\underline{\tau} = \begin{cases} \underline{R}(\tau_M) \\ \underline{M}(\tau_M, G) \end{cases}$$

Par definition,

$$\underline{R}(\tau_M) = \iint_S \underline{C}(M, i) dS$$

Donc,

$$\underline{R}(\tau_M) = \int_{\frac{-L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{\frac{-e}{2}}^{\frac{e}{2}} \underline{C}(M, i) dz dy$$

$$\underline{R}(\tau_M) = \int_{\frac{-L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{\frac{-e}{2}}^{\frac{e}{2}} \begin{pmatrix} 2\sigma_0 \\ \frac{-2\sigma_0 y}{L} \\ 0 \end{pmatrix} dz dy$$

En intégrant par rapport à dz:

$$\underline{R}(\tau_M) = \int_{\frac{-L}{2}}^{\frac{L}{2}} \begin{pmatrix} 2\sigma_0 z\Big|_{\frac{-e}{2}}^{\frac{e}{2}} \\ \frac{-\sigma_0 \cdot y \cdot z\Big|_{\frac{-e}{2}}^{\frac{e}{2}}}{L} \\ 0 \end{pmatrix} dy \Longrightarrow \int_{\frac{-L}{2}}^{\frac{L}{2}} \begin{pmatrix} 2\sigma_0 e \\ \frac{-\sigma_0 \cdot y \cdot e}{L} \\ 0 \end{pmatrix} dy$$

En intégrant par rapport à dy:

$$\int_{\frac{-L}{2}}^{\frac{L}{2}} \begin{pmatrix} 2\sigma_0 e \cdot y\Big|_{\frac{-L}{2}}^{\frac{L}{2}} \\ \frac{-\sigma_0 \cdot e(\cdot \frac{y^2}{2})\Big|_{\frac{-L}{2}}^{\frac{L}{2}}}{L} \\ 0 \end{pmatrix} dy \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2\sigma_0 e \cdot L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3 Exercice 3

Soit une poutre parallélépipède rectangle de longeur L, de largeur l et d'épaisseur e comme illustré ci-dessous. Elle est soumise à une flexion pure.

L'objectif de cette exercice est de déterminer le chap de déplacement en tout point. La face en $x = 0$ est encstrée, le point de coordonnées $(0, 0, 0)$ est fixe, le point du plain (i, j) restent dans ce plain et les points situées en $x = 0$ resten dans le plain (j, k) après deformation.

A l'opposée de l'encastrement, un couple est imposé sur la face $x = L$ avec au point M le torseur global équivalent τ_M s'écrivant:

$$\tau_M = \begin{cases} \underline{R}(\tau_M) = 0 \\ \underline{M}(\tau_M, M) = M_0 \underline{k} \end{cases}$$

La sollicitation sur la poutre engendre en tout point du solide des déformations notées dans la materice de déformation $\underline{\underline{E}}$

$$\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{yx} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{zx} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La déformation ε_{xx} est de la forme $\varepsilon_{xx} = -\frac{y \cdot M_0}{E \cdot I_z}$.

Cette dernière dépend du coefficient de Poisson (ν), du module de Young E, du moment M_0 et du moment quadratique I_z par rapport à $\underline{k}$ de la section droite de la poutre.

Dans le cas d'une section rectangulaire comme la poutre étudiée ici, I_z s'écrit:

$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

Le lien entre $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz}$ est : $-\nu \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz}$

1. Rappeler l'unité de M_0?
2. Quel montage expérimental permettrait par le bias de deux uniques forces d'obtenir le couple τ_M sur la surface $x = L$?
3. Determiner l'expression du torseur global équivalent au point O.
4. Statuer des équations de compatibilité.
5. Déterminer alors l'expression de vecteur déplacement.
6. Déterminer complètement ce déplacement sachant qu'un déplacement nul et une rotation nulle sont imposés au point O.
7. Représenter l'allure de la fibre moyenne déformée.