

## TD 2: Matrice de Déformations

Objectif: Calculer la matrice

### 1 Exercice 1

### 2 Exercice 2

Soit un matériau homogène et isotrope subissant une sollicitation dont le champ de déplacement  $\underline{U}$  en tout point du solide s'écrit:

$$\underline{U}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x^2 + 3xy \\ y \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}m \quad (1)$$

1. Exprimer la matrice de déformation en tout point du solide à partir du vecteur de déplacement.
2. Déterminer la déformation d'une fibre infinitésimale placée avant déformation au point  $M$  de coordonnées  $(x_m, y_m, z_m)$  et dirigé selon  $j$ ?
3. Calculer la dilatation linéaire relative d'une fibre orientée selon  $\underline{n} = (1, 1, 0)$  au point B de coordonnées  $(0, 0, 0)$

### 2.1 Solution 2.1: Exprimer la matrice de déformation

Par définition, la formule générale de déformations s'écrit:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \quad (2)$$

En développant cette expression comme:

$$\underline{\underline{E}}(M) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) \\ \dots & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}) \\ \dots & \dots & \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Donc, on peut faire les différents dérivés partiels:

$$\underline{\underline{E}}(M) = \begin{pmatrix} 4x + 3y & \frac{3}{2}x & 0 \\ \frac{3}{2}x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 2.2 Solution 2.2: Déterminer l'allongement d'une fibre infinitésimale

Le vecteur déformation  $d(M, i)$  en direction  $i$  est:

$$d(M, i) = \underline{\underline{E}}(M) \cdot \underline{i} = \varepsilon_{xx}\underline{i} + \varepsilon_{yx}\underline{j} + \varepsilon_{zx}\underline{k}$$

Le coordonnées du point M après la déformation s'écrit:

$$\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_m^2 + 3x_my_m \\ y_m \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}m \quad (4)$$

Donc, le vecteur déplacement  $\underline{d}$ , de l'extrémité de  $\underline{j}$  ou le vecteur déformation associé à  $\underline{j}$  est directement la deuxième colonne de la matrice des déformation:

$$d(M, j) = \underline{\underline{E}}(M) \cdot \underline{j} = \varepsilon_{xy}\underline{i} + \varepsilon_{yy}\underline{j} + \varepsilon_{zy}\underline{k}$$

$$\underline{\underline{E}}(M) \cdot \underline{j} = \begin{pmatrix} 4x_m + 3y_m & \frac{3}{2}x_m & 0 \\ \frac{3}{2}x_m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}m \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

finalement

$$\underline{\underline{E}}(M) \cdot \underline{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La fibre s'allonge  $10^{-4}m$  dans la direction  $j$ . Et elle va se devier de l'axe  $\underline{j}$  vers l'axe  $\underline{i}$  de  $\frac{3}{2}x_m \cdot 10^{-4}m$  [radianes]

### 2.2.1 Solution 2.3: Calculer la dilatiatiion linéaire

La dilatation lineaire correspond à un allongement relatif (ou encore une projection du vecteur deformation  $\underline{d(n)}$ ) sur l'axe  $\underline{n}$ . La projection du vecteur de deformation est la definition la plus simple à appliquer.

$$d(M, j) = \underline{\underline{E}}(M) \cdot \underline{n}$$

Donc,

$$d(M, j) = \begin{pmatrix} 4x + 3y & \frac{3}{2}x & 0 \\ \frac{3}{2}x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}m \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$d(M, j) = \begin{pmatrix} 4(0) + 3(0) & \frac{3}{2}(0) & 0 \\ \frac{3}{2}(0) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}m \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$d(M, j) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}m$$

La projection du vecteur  $\underline{d(n, B)}$  sur  $\underline{n}$  d'après le cours:

$$\varepsilon = (n)^\top \cdot \underline{\underline{E}} \cdot n$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}m = 1 \cdot 10^{-4}m$$

### 3 Exercice 3

Soit le vecteur déplacement  $\underline{U} = (u, v, w)^\top$  en tout point du solide de dimension caractéristique  $L$ , dans le repère cartésien :

$$\underline{U}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{L} + 2y \\ \frac{xy}{2L} \\ -4z \end{pmatrix} \quad (5)$$

1. Calculer la matrice de déformation  $\underline{\underline{E}}$  associé au vecteur de déformation.

#### 3.0.1 Solution: Calculer la Matrice de Déformations

Le lien mathématique entre déplacement et déformation est:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \quad (6)$$

$$\underline{\underline{E}}(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \dots & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \dots & \dots & \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Donc, on peut faire les différents dérivés pour le vecteur  $\underline{U}$

$$\underline{\underline{E}}(M) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{L} & \frac{1}{2}\left(\frac{y}{2L} + 2\right) & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{y}{2L} + 2\right) & \frac{x}{2L} & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Voilà la matrice de déformation pour cette exercice.

## 4 Exercice 4

Soit la matrice des déformation  $\underline{\underline{E}}$ , dans le repère  $x, y, z$  connue en tout point d'un solide:

$$\underline{\underline{E}}(M) = \begin{pmatrix} 2x + 1 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \times 10^{-5} \quad (9)$$

1. Vérifier les équations de compatibilité
2. Calculer le vecteur déplacement  $\underline{U}(M)$

### 4.1 Solution

#### 4.1.1 Equations de compatibilité

Il y a 6 équation de compatibilité. Elles concernent les dérivés secondes de composants de la matrice de déformation. Les composants de la matrice de déformation sont des fonctions linéaires d'ordre.

Composants Normal  $\varepsilon_{xx}$ :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right)$$

#### 4.1.2 Calculer le vecteur déplacement $\underline{U}(M)$

Les composants **normales** de la matrice :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1 &\xRightarrow{f} u(x, y, z) = x^2 + x + C_1(y, z) \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 &\xRightarrow{f} v(x, y, z) = C_2(x, z) \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = z &\xRightarrow{f} w(x, y, z) = \frac{z^2}{2} + C_3(x, y) \end{aligned}$$

Les composants **tangentiels** de la matrice :

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] = 8$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (C_2(x, z)) + \frac{\partial}{\partial y} (\cancel{x^2} + C_1(y, z)) \right] = 8$$

On mets la constante  $C_1(y, z)$  en fonctions de  $C_2(x, z)$ :

$$\frac{\partial C_1(y, z)}{\partial y} = 16 - \frac{\partial C_2(x, z)}{\partial x} \implies A \quad (10)$$

Donc,

$$\frac{\partial C_1(y, z)}{\partial y} = A$$

$$\frac{\partial C_2(x, z)}{\partial x} = 16 - A$$

$A$  est une constante même si en toute rigueur cette dernière devrait dépendre de  $z : A(z)$ . On va supposer ici pour simplifier les calculs que  $A(z)$  est une constante.

Donc, on peut faire l'intégral primitif de ces deux fonctions pour calculer  $C_1(y, z)$  et  $C_2(x, z)$

$$C_1(y, z) = Ay + C_{11}(z) \quad (11)$$

$$C_2(x, z) = (16 - A)x + C_{22}(z) \quad (12)$$

Maintenant, nous identifions l'équation pour pour  $\varepsilon_{xz}$ :

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] = 0 \quad (13)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial z} (\cancel{x^2} + \cancel{x} + C_1(y, z)) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\cancel{z^2}}{2} + C_3(x, y) \right) \right] = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (C_3(x, y)) = -\frac{\partial}{\partial z} (C_1(y, z)) \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (C_3(x, y)) = -\frac{\partial}{\partial z} (\cancel{Ay} + C_{11}(z)) \quad (16)$$

Donc, on arrive au meme cas:

$$\frac{\partial}{\partial z} (C_3(x, y)) = -\frac{\partial}{\partial z} (C_{11}(z)) \implies B \quad (17)$$

Donc,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} (C_3(x, y)) &= B \\ \frac{\partial}{\partial z} (C_{11}(z)) &= -B \end{aligned}$$

Donc, on fait l'intégration primitif:

$$C_3(x, y) = Bx + C_{33}(y) \quad (18)$$

$$C_{11}(x, z) = -Bz + \alpha \quad (19)$$

Maintenant, pour  $\varepsilon_{yz}$ , considérons

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] = 0 \quad (20)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial z} (C_2(x, z)) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{z}{2} + C_3(x, y) \right) \quad (21)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial z} ((16-A)x + C_{22}(z)) + \frac{\partial}{\partial y} (Bx + C_{33}(y)) \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (C_{22}(z)) = -\frac{\partial}{\partial y} (C_{33}(y)) \implies C \quad (23)$$

On peut en déduire:

$$C_{22}(z) = Cz + \beta \quad (24)$$

$$C_{33}(y) = -Cy + \gamma \quad (25)$$

Au final,

### 💡 Réponse finale

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= x^2 + x + Ay + -Bz + \alpha \\v(x, y, z) &= (16 - A)x + Cz + \beta \\w(x, y, z) &= \frac{z^2}{2} + Bx - Cy + \gamma\end{aligned}$$

## 5 Exercice 5

Soit une rosette delta en forme de triangle équilatéral, permettant de mesurer les dilatations longitudinales selon les trois directions parallèles aux trois côtés du triangle.

Ces dernières sont disposées à la surface d'un matériau homogène et isotrope para rapport à un repère  $0, x, y$ .

1. Déterminer le tenseur des déformations planes si les valeurs mesurées sont:  $\varepsilon_a = -0.4; \varepsilon_b = 0.5; \varepsilon_c = 0.2$

### 5.1 Solution

#### 5.1.1 Détermination de la matrice des déformations

$$\underline{\underline{E}}(M) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix} \quad (26)$$

Le vecteur de déformation est donné par:

$$d(M, i) = \underline{\underline{E}}(M) \cdot i$$

On va calculer le vecteur de déformation:

$$\varepsilon = \underline{n}^\top \cdot \underline{\underline{E}}(M) \cdot \underline{n}$$

#### 5.1.2 Déformation dans le $\varepsilon_a$

$$\underline{n}_a = \begin{pmatrix} \cos(0) \\ \sin(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$\underline{n}_a^\top = [1 \quad 0]$$

Donc,

$$\varepsilon_a = [1 \quad 0] \cdot \left[ \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad (28)$$

$$\varepsilon_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yx} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Donc,

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{xx}$$

### 5.1.3 Deformation dans le $\varepsilon_b$

$$\varepsilon_b = \begin{pmatrix} \cos(60) \\ \cos(60) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$\underline{n}_b^\top = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Donc,

$$\varepsilon_b = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (31)$$

$$\varepsilon_b = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (32)$$

$$\varepsilon_b = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} + \sqrt{3}\varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} + \sqrt{3}\varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\varepsilon_b = \frac{1}{4} \cdot [\varepsilon_{xx} + \sqrt{3}\varepsilon_{xy} + \sqrt{3}(\varepsilon_{yx} + \sqrt{3}\varepsilon_{yy})] \quad (34)$$

$$\varepsilon_b = \frac{1}{4} \cdot [\varepsilon_{xx} + \sqrt{3}\varepsilon_{xy} + \sqrt{3}\varepsilon_{yx} + 3\varepsilon_{yy}] \quad (35)$$

$$\varepsilon_b = \frac{1}{4} \cdot [\varepsilon_{xx} + 2\sqrt{3}\varepsilon_{xy} + 3\varepsilon_{yy}] \quad (36)$$

### 5.1.4 Deformation dans le $\varepsilon_c$

Directement

$$\varepsilon_c = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (37)$$

$$\varepsilon_c = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\varepsilon_{xx} & \sqrt{3}\varepsilon_{xy} \\ -\varepsilon_{yx} & \sqrt{3}\varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \quad (38)$$



$$\varepsilon_c = \frac{1}{4} \cdot [\varepsilon_{xx} - \sqrt{3}\varepsilon_{xy} - \sqrt{3}\varepsilon_{yx} + 3\varepsilon_{yy}] \cdot \quad (39)$$

$$\varepsilon_c = \frac{1}{4} \cdot [\varepsilon_{xx} - 2\sqrt{3}\varepsilon_{xy} + 3\varepsilon_{yy}] \quad (40)$$

Finalement, un système de 2 equations avec 2 incognites :

$$4\varepsilon_c - \varepsilon_{xx} = -2\sqrt{3}\varepsilon_{xy} + 3\varepsilon_{yy} \quad (41)$$

$$4\varepsilon_b - \varepsilon_{xx} = 2\sqrt{3}\varepsilon_{xy} + 3\varepsilon_{yy} \quad (42)$$

Pour résoudre,

1. Trouver le determinant de la matrice
2. Trouver les cofacteurs.
3. Determiner la matrice inverse.