TD 2: Matrice de Déformations

Objectif: Calculer la matrice

1 Exercice 1

2 Exercice 2

Soit un matériau homogène et isotrope subissant une sollicitation dont le champ de déplacement $\underline{U}$ en tout point du solide s'ecrit:

$$\underline{U}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x^2 + 3xy \\ y \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4} m \tag{1}$$

1. Exprimer la matrice de déformation en tout point du solide à partir du vecteur de déplacement.
2. Determiner la déformation d'une fibre infinitésimale placée avant déformation au point M de coordonnées (x_m, ym, z_m) et dirigé selon j?
3. Calculer la dilatiation linéaire relative d'une fibre orientée selon $\underline{n} = (1,1,0)$ au point B de coordonnées $(0,0,0)$

2.1 Solution 2.1: Exprimer la matrice de déformation

Par definition, la formule generale de de déformations s'ecrit:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i}\right) \tag{2}$$

En developpant cette expression comme:

$$\underline{\underline{E}}(M) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) \\ ... & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}) \\ ... & ... & \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Donc, on peut faire les differents dérives partiels:

$$\underline{\underline{E}}(M) = \begin{pmatrix} 4x + 3y & \frac{3}{2}x & 0 \\ \frac{3}{2}x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2 Solution 2.2: Determiner l'allongement d'une fibre infinitesimale

Le vecteur déformation $d(M, i)$ en direction i est:

$$d(M, i) = \underline{\underline{E}}(M) \cdot \underline{i} = \varepsilon_{xx}\underline{i} + \varepsilon_{yx}\underline{j} + \varepsilon_{zx}\underline{k}$$

Le coordonnées du point M après la déformation s'ecrit:

$$\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_m^2 + 3x_m y_m \\ y_m \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4} m \tag{4}$$

Donc, le vecteur déplacement $\underline{\text{d}}$, de l'extremité de $\underline{j}$ ou le vecteur déformation associé à $\underline{j}$ est directement la deuxième colonne de la matrice des déformation:

$$d(M, j) = \underline{\underline{E}}(M) \cdot \underline{j} = \varepsilon_{xy}\underline{i} + \varepsilon_{yy}\underline{j} + \varepsilon_{zy}\underline{k}$$

$$\underline{\underline{E}}(M) \cdot j = \begin{pmatrix} 4x_m + 3y_m & \frac{3}{2}x_m & 0 \\ \frac{3}{2}x_m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4} m \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

finalement

$$\underline{\underline{E}}(M) \cdot j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La fibre s'allonge $10^{-4}m$ dans la direction j. Et elle va se devier de l'axe $\underline{\text{j}}$ vers l'axe $\underline{\text{i}}$ de $\frac{3}{2}x_m \cdot 10^{-4}m \quad [radianes]$

2.2.1 Solution 2.3: Calculer la dilatiation linéaire

La dilatation lineaire correspond à un allongement relatif (ou encore une projection du vecteur deformation $\underline{d(n)}$) sur l'axe $\underline{n}$. La projection du vecteur de deformation est la definition la plus simple à appliquer.

$$d(M, j) = \underline{\underline{E}}(M) \cdot \underline{n}$$

Donc,

$$d(M, j) = \begin{pmatrix} 4x + 3y & \frac{3}{2}x & 0 \\ \frac{3}{2}x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}m \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$d(M, j) = \begin{pmatrix} 4(0) + 3(0) & \frac{3}{2}(0) & 0 \\ \frac{3}{2}(0) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}m \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$d(M, j) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}m$$

La projection du vecteur $\underline{d(n, B)}$ sur $\underline{n}$ d'après le cours:

$$\varepsilon = (n)^{\top} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot n$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}m = 1 \cdot 10^{-4}m$$

3 Exercice 3

Soit le vecteur déplacement $\underline{U} = (u, v, w)^\top$ en tout point du solide de dimension caractéristique L, dans le repère cartésien :

$$\underline{U}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{L} + 2y \\ \frac{xy}{2L} \\ -4z \end{pmatrix} \tag{5}$$

1. Calculer la matrice de déformation $\underline{\underline{E}}$ associé au vecteur de déformation.

3.0.1 Solution: Calculer la Matrice de Déformations

Le lien mathémathique entre déplacement et déformation est:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i}\right) \tag{6}$$

$$\underline{\underline{E}}(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) \\ ... & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}) \\ ... & ... & \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{7}$$

Donc, on peut faire les differents dérives pour le vecteur $\underline{U}$

$$\underline{\underline{E}}(M) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{L} & \frac{1}{2}(\frac{y}{2L} + 2) & 0 \\ \frac{1}{2}(\frac{y}{2L} + 2) & \frac{x}{2L} & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Voilà la matrice de déformation pour cette exercice.

4 Exercice 4

Soit la matrice des déformation $\underline{\underline{E}}$, dans le repère x, y, z connue en tout point d'un solide:

$$\underline{\underline{E}}(M) = \begin{pmatrix} 2x+1 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \times 10^{-5} \tag{9}$$

1. Vérifier les équations de compatibilité
2. Calculer le vecteur déplacement $\underline{U}(M)$

4.1 Solution

4.1.1 Equations de compatibilité

Il y a 6 équation de compatibilité. Elles concernent les dérivés secondes de composants de la matrice de déformation. Les composants de la matrice de déformation sont des fonctiones lineaires d'ordre.

Composants Normal ε_{xx}:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x}\right)$$

4.1.2 Calculer le vecteur déplacement $\underline{U}(M)$

Les composants **normales** de la matrice :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x+1 \xRightarrow{\int} u(x,y,z) = x^2 + x + C_1(y,z)$$
$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \xRightarrow{\int} v(x,y,z) = C_2(x,z)$$
$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = z \xRightarrow{\int} w(x,y,z) = \frac{z^2}{2} + C_3(x,y)$$

Les composants **tangentielles** de la matrice :

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right] = 8$$
$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(C_2(x,z)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\cancel{x^2 + x} + C_1(y,z)\right)\right] = 8$$

On mets la constante $C_1(y,z)$ en fonctions de $C_2(x,z)$:

$$\frac{\partial C_1(y,z)}{\partial y} = 16 - \frac{\partial C_2(x,z)}{\partial x} \Longrightarrow A \tag{10}$$

Donc,

$$\frac{\partial C_1(y,z)}{\partial y} = A$$
$$\frac{\partial C_2(x,z)}{\partial x} = 16 - A$$

A est une constante même si en toute rigeur cette dernière devrait dépendre de z : $A(z)$. On va supposer ici pour simplifier les calculs que $A(z)$ est une constante.

Pour calculer ε_{xz}, considerons

$$C_1(y,z) = Ay + C_{11}(z) \tag{11}$$
$$C_2(x,z) = (16 - A)x + C_{22}(z) \tag{12}$$

Donc, nous avons pour ε_{xz}:

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right] = 0 \tag{13}$$
$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\cancel{x^2} + \cancel{x} + C_1(y,z)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cancel{z^2}}{\cancel{2}} + C_3(x,y)\right)\right] = 0 \tag{14}$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(C_3(x,y)\right) = -\frac{\partial}{\partial z}\left(C_1(y,z)\right) \tag{15}$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(C_3(x,y)\right) = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\cancel{Ay} + C_{11}(z)\right) \tag{16}$$

Donc, on arrive au meme cas:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(C_3(x,y)\right) = -\frac{\partial}{\partial z}\left(C_{11}(z)\right) \Longrightarrow B \tag{17}$$

Donc,

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial z}\left(C_3(x,y)\right) = B \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(C_{11}(z)\right) = -B\end{gathered}$$

Donc,

$$C_3(x,y) = Bx + C_{33}(y) \tag{18}$$

$$C_{11}(x,z) = -Bz + \alpha \tag{19}$$

Mantenant,pour ε_{yz}, considerons

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right] = 0 \tag{20}$$

$$0 = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\cancelto{C_2(x,z)}{(16-A)x} + C_{22}(z)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\cancelto{\frac{z^2}{2}+C_3(x,y)}{Bx} + C_{33}(y)\right)\right] \tag{21}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(C_{22}(z)\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(C_{33}(y)\right) \Longrightarrow C \tag{22}$$

On peut en deduire:

$$C_{22}(z) = Cz + \beta \tag{23}$$

$$C_{33}(y) = -Cy + \gamma \tag{24}$$

Au final,

$$u(x, y, z) = x^2 + x + Ay + -Bz + \alpha$$
$$v(x, y, z) = (16 - A)x + Cz + \beta$$
$$w(x, y, z) = \frac{z^2}{2} + Bx + -Cy + \gamma$$

5 Exercice 5

Soit une rosette delta en forme de triangle équilateral, permettant de mesurer les dilatations logitudinales selon les trois directions parallèles aux trois côtés du triangle.

Ces dernières sont disposées à la surface d'un matériau homogène et isotrope para rapport à un repère $0, x, y$.

1. Determiner les tenseur des déformations planes si les valeurs mesurés sont: $\varepsilon_a = -0.4; \varepsilon_b = 0.5; \varepsilon_c = 0.2$

5.1 Solution

5.1.1 Determination de la matrice des déformations

$$\underline{\underline{E}}(M) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix} \tag{25}$$

Le vecteur de déformation est donne par:

$$d(M, i) = \underline{\underline{E}}(M) \cdot i$$

On va calculer le vecteur de deformation:

$$\varepsilon = \underline{n}^\top \cdot \underline{\underline{E}}(M) \cdot \underline{n}$$

5.1.2 Deformation dans le ε_a

$$\underline{n_a} = \begin{pmatrix} \cos(0) \\ \cos(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{26}$$

$$\underline{n_a}^\top = [1 \quad 0]$$

Donc,

$$\varepsilon_a = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}\right] \tag{27}$$

$$\varepsilon_a = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yx}\end{bmatrix} \tag{28}$$

Donc,

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{xx}$$

5.1.3 Deformation dans le ε_b

$$\varepsilon_b = \begin{pmatrix}\cos(60) \\ \cos(60)\end{pmatrix} \begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} \tag{29}$$

$$\underline{n_b}^\top = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

Donc,

$$\varepsilon_b = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix}1 & \sqrt{3}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy}\end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}1 \\ \sqrt{3}\end{pmatrix} \tag{30}$$

$$\varepsilon_b = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix}1 & \sqrt{3}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy}\end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 \\ \sqrt{3}\end{pmatrix} \tag{31}$$

$$\varepsilon_b = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix}1 & \sqrt{3}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} + \sqrt{3}\varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} + \sqrt{3}\varepsilon_{yy}\end{bmatrix} \tag{32}$$

$$\varepsilon_b = \frac{1}{4} \cdot \left[\varepsilon_{xx} + \sqrt{3}\varepsilon_{xy} + \sqrt{3}\left(\varepsilon_{yx} + \sqrt{3}\varepsilon_{yy}\right)\right] \tag{33}$$

$$\varepsilon_b = \frac{1}{4} \cdot \left[\varepsilon_{xx} + \sqrt{3}\varepsilon_{xy} + \sqrt{3}\varepsilon_{yx} + 3\varepsilon_{yy}\right] \tag{34}$$

$$\varepsilon_b = \frac{1}{4} \cdot \left[\varepsilon_{xx} + 2\sqrt{3}\varepsilon_{xy} + 3\varepsilon_{yy}\right] \tag{35}$$

5.1.4 Deformation dans le ε_c

Directement

$$\varepsilon_c = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \tag{36}$$

$$\varepsilon_c = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\varepsilon_{xx} & \sqrt{3}\varepsilon_{xy} \\ -\varepsilon_{yx} & \sqrt{3}\varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \cdot \tag{37}$$

$$\varepsilon_c = \frac{1}{4} \cdot \left[\varepsilon_{xx} - \sqrt{3}\varepsilon_{xy} - \sqrt{3}\varepsilon_{yx} + 3\varepsilon_{yy}\right] \cdot \tag{38}$$

$$\varepsilon_c = \frac{1}{4} \cdot \left[\varepsilon_{xx} - 2\sqrt{3}\varepsilon_{xy} + 3\varepsilon_{yy}\right] \tag{39}$$

Finalement, un système de 2 equations avec 2 incognites :

$$4\varepsilon_c - \varepsilon_{xx} = -2\sqrt{3}\varepsilon_{xy} + 3\varepsilon_{yy} \tag{40}$$
$$4\varepsilon_b - \varepsilon_{xx} = 2\sqrt{3}\varepsilon_{xy} + 3\varepsilon_{yy} \tag{41}$$

Pour résoudre,

1. Trouver le determinant de la matrice
2. Trouver les cofacteurs.
3. Determiner la matrice inverse.