

TD 3 & 4: Les contraintes

Objectif: Calculer les contraintes

1 Exercice 1: Détermination du cisaillement maximal par cercle de Mohr

Soit un solide de section $10 \times 10 \text{ cm}^2$ et de hauteur de 50 mm soumis à un essai de traction. Le matériau est en équilibre statique et la contrainte est considérée comme étant bi-axiale.

1. Déterminer les contraintes σ_{xx} et σ_{yy} associées.
2. A partir du cercle de Mohr, déduire l'angle de cisaillement maximale du matériau.

1.1 Solution

1.1.1 Déterminer les contraintes σ_{xx} et σ_{yy}

L'équilibre statique permet de considérer un cône élémentaire dans le solide.

Pour σ_{xx} :

$$\sigma_{xx} = \frac{F_{xx}}{A_{xx}} \cdot \left[\frac{N}{m^2} \right] \quad (1)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{1000}{50 \times 10} \times \frac{(1000 \text{ mm})^2}{1 \text{ m}^2} = 4 \text{ MPa} \quad (2)$$

Pour σ_{yy} :

$$\sigma_{yy} = \frac{F_{yy}}{A_{yy}} \cdot \left[\frac{N}{m^2} \right] \quad (3)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{1000}{10 \times 10} \times \frac{(1000 \text{ mm})^2}{1 \text{ m}^2} = 10 \text{ MPa} \quad (4)$$

1.2 Déduire l'angle de cisaillement maximale du matériau

σ_{xx} et σ_{yy} sont des contraintes normales et contraintes principales. Donc les points restent sur l'axe des σ .

Le centre est égal à la demi-distance séparant σ_{xx} et σ_{yy} .

$$c = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}$$

$$C = 7 \text{ MPa}$$

Donc, les contraintes de cisaillement max sont

$$\tau = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}$$

$$C = 3 \text{ MPa}$$

2 Exercice 2:

Soit la matrice des contraintes $\underline{\underline{\Sigma}}$ exprimée ci-dessous:

1. Statuer des équations d'équilibre local.
2. Déterminer le vecteur contrainte d'un point M situé sur la face $x = 2L$.
3. Calculer en G (centre de section) le torseur global équivalent associé à ces densités surfaciques d'efforts sur cette même face.

2.1 Solution

2.1.1 Statuer des équations d'équilibre local

D'après le cours, les équations d'équilibre local s'écrivent :

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} - f_v$$

$$\text{En Cordonées Cartésiennes} = \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0 \end{cases}$$

pour la direction i :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2\sigma_0 x}{L} - 2\sigma_0 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{2\sigma_0 y}{L} \right) + \frac{\partial}{\partial z} 0 + f_x = 0$$

3 Exercice 3

Soit une poutre parallélépipède rectangle de longueur L , de largeur l et d'épaisseur e comme illustré ci-dessous. Elle est soumise à une flexion pure.

L'objectif de cette exercice est de déterminer le champ de déplacement en tout point. La face en $x = 0$ est encastree, le point de coordonnées $(0, 0, 0)$ est fixe, le point du plain (i, j) restent dans ce plain et les points situées en $x = 0$ restent dans le plain (j, k) après deformation.

A l'opposée de l'encastrement, un couple est imposé sur la face $x = L$ avec au point M le torseur global équivalent τ_M s'écrivant:

$$\tau_M = \begin{cases} \underline{R}(\tau_M) = 0 \\ \underline{M}(\tau_M, M) = M_0 \underline{k} \end{cases}$$

La sollicitation sur la poutre engendre en tout point du solide des déformations notées dans la matrice de déformation $\underline{\underline{E}}$

$$\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{yx} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{zx} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La déformation ε_{xx} est de la forme $\varepsilon_{xx} = -\frac{y \cdot M_0}{E \cdot I_z}$.

Cette dernière dépend du coefficient de Poisson (ν), du module de Young E , du moment M_0 et du moment quadratique I_z par rapport à \underline{k} de la section droite de la poutre.

Dans le cas d'une section rectangulaire comme la poutre étudiée ici, I_z s'écrit:

$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

Le lien entre $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ est : $-\nu\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz}$

1. Rappeler l'unité de M_0 ?
2. Quel montage expérimental permettrait par le biais de deux uniques forces d'obtenir le couple τ_M sur la surface $x = L$?
3. Déterminer l'expression du torseur global équivalent au point O .
4. Statuer des équations de compatibilité.
5. Déterminer alors l'expression de vecteur déplacement.
6. Déterminer complètement ce déplacement sachant qu'un déplacement nul et une rotation nulle sont imposés au point O .
7. Représenter l'allure de la fibre moyenne déformée.