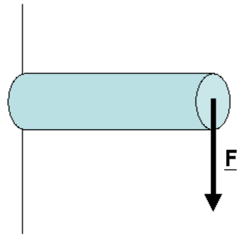
EXTENSOMETRIE ELECTRIQUE PAR JAUGES DE DEFORMATION FLEXION - TORSION

CORRIGE

3.1. Proposer un montage expérimental qui n'induise que de la flexion (démontrer en calculant le torseur global en x=L que le montage proposé n'induit que de la flexion). Mêmes questions pour la torsion.

0,25

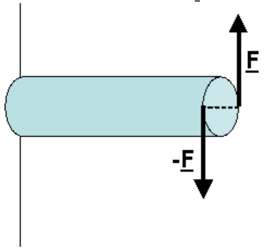
Pour n'imposer que de la flexion, il suffit tout simplement de suspendre un poids au bout de la barre :



$$\underline{R}(\tau)=-F\,\underline{j} \quad \text{et} \quad \underline{M}(\tau,B)=\underline{0}$$

0,5

Pour n'imposer que de la torsion, il suffit par exemple d'imposer deux forces opposées orientées selon j qui induiront une résultante nulle et un moment selon $\underline{i}$



$$\underline{R}(\tau)=\underline{0} \quad \text{et} \quad \underline{M}(\tau,B)=2FR\underline{i}$$

3.2. Déterminer les expressions théoriques des déformations aux points 1, 3 et 4 en fonction de E, n, R, l, l_0, l_1 et F. Puis faites l'application numérique en vous fixant une longueur de bras de levier l_0 comprise entre 50 et 450 mm et une masse comprise entre 5 et 15 kg. Déterminer alors toutes les déformations et les directions principales associées au point 3.

Pour déterminer les déformations aux 4 points particuliers, il suffit d'appliquer la loi de Hooke (matériau élastique linéaire)

$$\underline{\underline{E}}=\frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\Sigma}}-\frac{\nu}{E}\,\mathrm{trace}\left(\underline{\underline{\Sigma}}\right)\underline{\underline{1}}$$

à partir des expressions théoriques des matrices des contraintes en ces points

On obtient ainsi :

- Point 2 (l_1, -R, 0) :

$$\varepsilon_{xx}=\frac{1}{E}\sigma_{xx},\ \varepsilon_{yy}=\varepsilon_{zz}=-\nu\varepsilon_{xx},\ \varepsilon_{xz}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{xz} \ \text{et}\ \varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yz}=0$$

soit :

0,25

$$\underline{\underline{E}}^2=\underline{\underline{E}}^2(l_1,-R,0)=\frac{F}{E\pi R^3}\begin{bmatrix}-4(l-l_1) & 0 & -(1+\nu)2l_0\\ 0 & 4\nu(l-l_1) & 0\\ -(1+\nu)2l_0 & 0 & 4\nu(l-l_1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varepsilon^2_{xx} & 0 & \varepsilon^2_{xz}\\ 0 & \varepsilon^2_{yy} & 0\\ \varepsilon^2_{xz} & 0 & \varepsilon^2_{zz}\end{bmatrix}$$

- Point 3 (l_1, 0, R):

$$\boldsymbol{\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{yy}=\varepsilon_{zz}=0}\ ,\ \varepsilon_{xy}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy}\ \text{et}\ \varepsilon_{xz}=\varepsilon_{yz}=0$$

soit :

0,25

$$\underline{\underline{E}}^3=\underline{\underline{E}}(l_1,0,R)=-\frac{(1+\nu)F}{E\pi R^2}\begin{bmatrix}0 & \left(\frac{1+2\nu}{1+\nu}\right)+\frac{2l_0}{R} & 0\\ \left(\frac{1+2\nu}{1+\nu}\right)+\frac{2l_0}{R} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \varepsilon^3_{xy} & 0\\ \varepsilon^3_{xy} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Pour déterminer les déformations et les directions principales, deux méthodes sont possibles :

- détermination mathématique
- détermination graphique (méthode de Mohr)

La deuxième solution est sans doute la plus rapide.
Pour le point 3, la direction **$\underline{j}$** est une direction principale évidente. La déformation associée est :

$$\varepsilon_Y=-\frac{4\nu F(l-l_1)}{E\pi R^3}$$

Pour déterminer les deux autres directions, on travaille alors sur la matrice 2D associé au plan (**$\underline{i}$**, **$\underline{k}$**) :

$$\underline{\underline{E}}^1=\underline{\underline{E}}(l_1,R,0)=\frac{F}{E\pi R^3}\begin{bmatrix}4(l-l_1) & (1+\nu)2l_0\\ (1+\nu)2l_0 & -4\nu(l-l_1)\end{bmatrix}_{i,k}$$

Le vecteur déformation associé à la direction **$\underline{i}$** s'écrit :

$$\underline{d}(\underline{i})=\underline{\underline{E}}.\underline{i}=\frac{F}{E\pi R^3}\begin{pmatrix}4(l-l_1)\\ (1+\nu)2l_0\end{pmatrix}_{i,k}=\frac{F}{E\pi R^3}\begin{pmatrix}4(l-l_1)\\ (1+\nu)2l_0\end{pmatrix}_{n,t}$$

Le vecteur déformation associé à la direction **$\underline{k}$** s'écrit :

$$\underline{d}(\underline{k})=\underline{\underline{E}}.\underline{k}=\frac{F}{E\pi R^3}\begin{pmatrix}(1+\nu)2l_0\\ -4\nu(l-l_1)\end{pmatrix}_{i,k}=\frac{F}{E\pi R^3}\begin{pmatrix}-4\nu(l-l_1)\\ -(1+\nu)2l_0\end{pmatrix}_{n,t}$$

On peut ainsi tracer d(i) et d(k) dans le plan $\underline{n},\underline{t}$ et en déduire les déformations et directions principales :

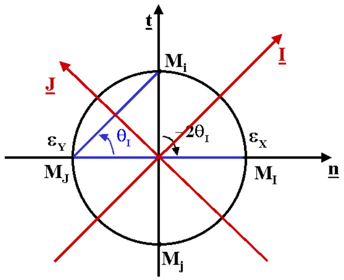
Remarque : il faut se fixer l_0 pour pouvoir tracer correctement le cercle de Mohr. Prenons l_0=0.35 m. La force F peut etre mis en facteur. Du coup, on peut tracer le cercle de Mohr normé par F pour déterminer les directions principales.

On obtient :

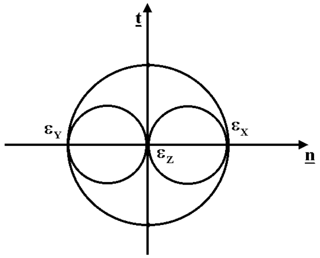
$$\underline{d}(\underline{i}) = \begin{pmatrix} 151{,}12 \\ 71{,}24 \end{pmatrix}_{n,t} * 10^{-6}$$

$$\underline{d}(\underline{k}) = \begin{pmatrix} -48{,}36 \\ -71{,}24 \end{pmatrix}_{n,t} * 10^{-6}$$

0,5



et



Pour le point 3, la direction **k** est une direction principales évidente ; la déformation principale associée est $\varepsilon_Z = 0$.

Les directions principales sont ainsi par exemple $\underline{I} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\underline{J} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Les déformations principales associées valent alors :

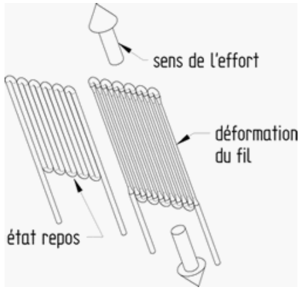
$$\varepsilon_X = \frac{1+\nu}{E}\frac{F}{\pi R^2}\left[1+\frac{2l_0}{R}\right] \text{ et } \varepsilon_Y = -\frac{1+\nu}{E}\frac{F}{\pi R^2}\left[1+\frac{2l_0}{R}\right]$$

3.3. Rappeler le principe d'une jauge de déformation. Rappeler le principe d'un pont de Wheastone et son intérêt. Quels sont les avantages et inconvénients des montages ¼ de pont, ½ pont et pont complet ?

0,5

Principe d'une jauge de déformation.

La jauge de contrainte repose sur le principe d'un fil que l'on déforme. Le fil, très fin, est placé préférentiellement longitudinalement par rapport à la déformation. En agissant par traction ou compression sur le fil, celui-ci devient plus ou moins long par rapport à son état au repos. Cette variation de longueur modifie la résistance électrique du fil ($R = \rho \frac{l}{S}$). On mesure alors cette variation de résistance entre l'état repos et l'état sous contrainte. Comme la variation de résistance électrique due à la déformation d'un seul fil est très faible, le fil est agencé sous forme sinusoïdale de manière à ce que la déformation intéresse en même temps plusieurs tronçons du fil et amplifie donc proportionnellement la variation de résistance.



La relation entre variation de résistance et déformation s'écrit :

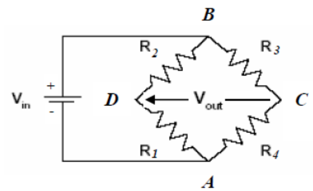
$$\frac{\Delta R}{R} = K\varepsilon_{11}$$

0,75

Principe d'un pont de Wheastone et son intérêt.

Les déformations mesurées sont généralement assez faibles (de l'ordre de 10^{-4} à 10^{-6}).
K est de l'ordre de 2. Les variations de résistances qu'il faut mesurer sont donc assez faibles.
La résistance initiale est de l'ordre de 100Ω. Mesurer une variation de 10^{-5}Ω avec un ohmmètre n'est donc pas adaptée puisque ce dernier mesure la résistance totale (R=100,00003Ω) et la précision associée n'est pas suffisante.

On utilise pour se faire un pont de Wheastone qui a l'avantage de ne mesurer que la variation de résistances et non la résistance totale…
Un pont de Wheastone est constitué de quatre résistances disposées en quadrilatère :



L'une des résistances est remplacée par une jauge de déformation.
On mesure la tension Vout. Le rapport entre Vout/Vin permet de remonter à la variation de résistances de la jauge et donc à la déformation de cette dernière :

$$\mathbf{V_{out} = \frac{V_{in}}{4}\frac{\Delta R}{R}}$$

0,25 **Quels sont les avantages et inconvénients des montages ¼ de pont et ½ pont ?**
Le ¼ de pont : simple d'utilisation mais sensible aux variations de température.
Le ½ pont : permet de s'affranchir de la dilatation grâce à une jauge de compensation

3.4. Justifier l'utilisation d'une rosette triaxiale au point 2. Même question pour la rosette bi-axiale au point 3.

0,25 On a pu voir à la question 3.2. que la connaissance de ε_{xx}, ε_{yy} (ou ε_{zz}) et ε_{xz} permettait de déterminer entièrement la matrice des déformations au point 2. Il nous faut donc trois informations scalaires expérimentales. Une rosette triaxiale est donc nécessaire.

0,25 Pour le point 3, il y a une seule inconnue à déterminer. Une jauge de déformation suffirait donc à déterminer la matrice des déformations en ce point !!

3.5. Déterminer, pour les points 2 et 3, les relations entre les informations expérimentales fournies par les différentes jauges et les composantes de la matrice des déformations en ces points. ***Pour rappel, la dilatation linéique relative associée à une direction $\underline{n}$ en un point M s'écrit:*** $\varepsilon(M,\underline{n}) = {}^t\underline{n}.\underline{\underline{E}}(M).\underline{n}$

Pour la rosette n°2 associée au point 2, on dispose de 3 jauges orientées selon $\underline{a}$, $\underline{b}$ et $\underline{c}$ avec $\mathbf{\underline{a} = -\underline{i}}$, $\mathbf{\underline{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\underline{i} - \underline{k}\right)}$ et $\mathbf{\underline{c} = -\underline{k}}$.

0,75 La jauge orientée selon $\underline{a}$ nous donne l'information suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon_a^2 = {}^t\underline{a}.\underline{\underline{E}}^2.\underline{a} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{4F(l-l_1)}{E\pi R^3} & 0 & -\frac{1+\nu}{E}\frac{2Fl_0}{\pi R^3} \\ 0 & \frac{4\nu F(l-l_1)}{E\pi R^3} & 0 \\ -\frac{1+\nu}{E}\frac{2Fl_0}{\pi R^3} & 0 & \frac{4\nu F(l-l_1)}{E\pi R^3}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} = \varepsilon_{xx}^2}$$

De même :

$$\boldsymbol{\varepsilon_b^2 = {}^t\underline{b}.\underline{\underline{E}}^2.\underline{b} = \begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}^2 & 0 & \varepsilon_{xz}^2 \\ 0 & \varepsilon_{yy}^2 & 0 \\ \varepsilon_{xz}^2 & 0 & \varepsilon_{zz}^2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{zz}^2 + 2\varepsilon_{xz}^2\right)}$$

et :

$$\boldsymbol{\varepsilon_c^2 = \varepsilon_{zz}^2}$$

0,5 Pour la rosette n°3, $\underline{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\underline{i} + \underline{j}\right)$ et $\underline{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\underline{i} + \underline{j}\right)$:

$$\varepsilon_a^3 = {}^t\underline{a}.\underline{\underline{E}}^3.\underline{a} = \begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}0 & \varepsilon_{xy}^3 & 0 \\ \varepsilon_{xy}^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\end{pmatrix} = -\varepsilon_{xy}^3$$

et $\varepsilon_b^3 = \varepsilon_{xy}^3$

-- Fin des questions à préparer --

3.6. Etude de la linéarité du comportement au point 2 de la jauge orientée selon $\underline{a}$
En vous appuyant sur les résultats des questions 3.5. et 3.2., quelle est la relation théorique exacte attendue entre la réponse en déformation mesurée $\boldsymbol{\varepsilon_a^1}$ et la charge appliquée F ?

1
$$\varepsilon_a^2 = \varepsilon_{xx}^2 = -\left[\frac{4(l-l_1)}{E\pi R^3}\right]F$$

On doit donc s'attendre à une relation linéaire entre déformation mesurée et force appliquée.

Vérifier cette linéarité (montage ¼ de pont) en utilisant Regressi® ou Excel®.

0,5 Graphe sans oublier le point (0,0) !!

1 Pente dans la bonne unité

Calculer l'écart relatif entre pente théorique et pente expérimentale.
Théoriquement, le coefficient de proportionnalité vaut :

$$a = \frac{4(l-l_1)}{E\pi R^3} = 2{,}567 * 1e-6 \quad N^{-1}$$

Remarque : si ε est donnée en 10^{-6} et que l'on trace ε en fonction de la masse M, on doit alors trouver un coefficient :

0,25
$$a = \frac{4(l-l_1)}{E\pi R^3}g = 2{,}567 * 9.81 = 25{,}186 \quad kg^{-1}$$

Ecart relatif

0,25
$$\mathbf{e_{\%} = \left|\frac{a_{exp} - a_{theor}}{a_{theor}}\right|}$$

Faites une liste la plus exhaustive possible des incertitudes associées aux valeurs théorique et expérimentale qui peuvent expliquer cet écart relatif non nul ?

0,75

Incertitude de mesure
- Erreur de lecture ? Sur la déformation : nulle puisque écran digital
- Erreur propre à l'appareillage : 1 unité sur la dernière décimale
- Mauvais collage des jauges (on la suppose coller dans la direction $\underline{i}$. Est on sur qu'il n'y a pas un écart de quelques degré ?)
- La jauge a une surface non négligeable. Elle ne donne donc pas une information purement locale (en un point).
- Erreur sur les poids : perte de matière au fur et à mesure du temps. Il faut les peser avec une balance pour vérifier.
- Résistances des fils reliant la jauge au pont qui peut induire des imprecisions

0,75

Incertitudes théoriques : les résultats théoriques ne sont pas exempts de toute incertitude (module d'Young, coefficient de Poisson, dimension de la structure (R, l, l_1) etc…).

3.7. Etude du point 2 en ¼ de pont

Déterminer expérimentalement la matrice des déformations au point 2 pour une charge F et une longueur de bras l_0 fixées. Comparer vos résultats expérimentaux aux résultats théoriques déterminés à la question 3.2. Calculez l'écart relatif entre ces différentes valeurs ?

1,5

Erreur classique : les étudiants ne refont pas le zéro sur le pont de Wheastone entre la mesure de ε_a et ε_b…

3.8. Mêmes questions que précédemment mais en utilisant un montage ½ pont. Le montage ½ pont donne-t-il de meilleurs résultats que le ¼ de pont ? Dans quels cas, le montage ½ pont est-il indispensable ?

1,5

On trouve des résultats très similaires à la question précédente. Logique car il n'y a pas de variation de température importante en TP entre les 2 manip' !

0,5

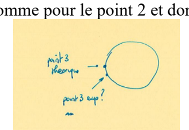
Le montage est indispensable pour le contrôle d'un pont en service par exemple (entre l'hiver et l'été, les résultats d'un quart de pont serait faussé par la dilatation thermique)

3.9. Etude du point 3

Déterminer expérimentalement l'état de déformation associé au point 3 par un montage ½ pont en mesurant ε_a puis ε_b. Comment expliquez-vous les écarts mesurés entre ε_a et ε_b ? Peut-on mettre en cause le positionnement angulaire de la rosette par l'expérimentateur (en supposant les jauges perpendiculaires l'une à l'autre) ? Comparer avec les résultats théoriques (écart relatif).

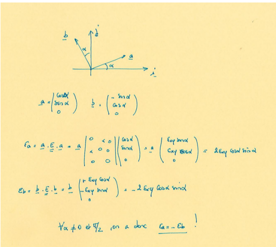
1

En ¼ de pont, on trouve des ε_a et ε_b assez différents. Il y a de fortes chances que cette différence soit due à un mauvais placement géographique de la rosette. Si la rosette a été collée juste en dessous, on aura des composantes de déformation non nul comme pour le point 2 et donc ε_a différent de ε_b.



1,5

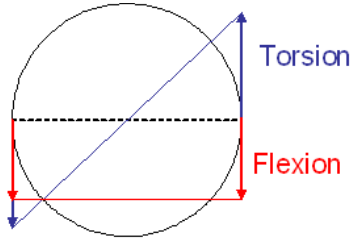
Pour ce qui est du placement angulaire, si on suppose que les jauges sont bien perpendiculaires entre elles, le résultat restera le même :



3.10.

1,5 0,5

On mesure en pont complet : $\varepsilon_b^3 + \varepsilon_b^4 = 2\left(\varepsilon_{xy}^3\right)^{flexion}$ et $\varepsilon_b^3 + \varepsilon_a^4 = 2\left(\varepsilon_{xy}^3\right)^{torsion}$



Remarque : il convient de vérifier que la somme de flexion + torsion conduit à la même valeur de exy trouvée à la question précédente….

Comparer ces valeurs aux valeurs théoriques.

1

Ecart relatif

Théoriquement :

$$\varepsilon_{xy}^{flexion} = -\frac{(1+2\nu)F}{E\pi R^2} = -3.22*10^{-8}*F$$

$$\varepsilon_{xy}^{torsion} = -\frac{(1+\nu)F}{E\pi R^2}\frac{2l_0}{R} = -3.46*10^{-6}*l_0*F$$

Quelle est la part prépondérante : flexion ou torsion ? Discuter …

1

avec $0.05 \le l_0 \le 0.45$ soit $1.73*10^{-7}*F \le \left|\varepsilon_{xy}^{torsion}\right| \le 1.56*10^{-6}*F$

Autrement dit, dans ce TP, la déformation ε_{xy} induite par la flexion est très faible par rapport à celle induite par la torsion (de 2% à 17%)