

# Appunti di modelli probabilistici

Lezioni di Massimo Campanino

Univ. Bologna, a.a. 2020-2021

Simone Fabbri

Aggiornato al August 30, 2022

## Disclaimer

Potrebbero esserci inesattezze o errori dei contenuti. Se ne trovaste, se volete potete contribuire a migliorare questi appunti tramite la pagina del repository [https://github.com/fabbrus97/mod\\_prob](https://github.com/fabbrus97/mod_prob).

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1	Notazione . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Passeggiate aleatorie</b>	<b>3</b>
2.1	Schema di Bernoulli . . . . .	3
2.2	Passeggiata aleatoria . . . . .	3
2.3	Problema del ballottaggio . . . . .	6
2.4	Problema della rovina del giocatore (gambler's ruin) . . . . .	18
2.5	Processi di diramazione di Galton-Watson (branching processes)	22
2.6	Simulatori . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Catene di Markov</b>	<b>29</b>
3.1	Catene di Markov omogenee . . . . .	29
3.1.1	Proprietà di Markov . . . . .	30
3.1.2	Modello di Ehrenfest . . . . .	33
3.1.3	Modello di Bernoulli-Laplace . . . . .	33
3.2	Classificazione degli stati . . . . .	33
3.2.1	Ricorrenza . . . . .	37
3.2.2	Verificare se uno stato è transiente o ricorrente . . . . .	38
3.3	Teorema ergodico per catene di Markov . . . . .	41
3.4	Modello di coda . . . . .	49
3.5	Reversibilità . . . . .	53
3.6	Metodo Montecarlo basato sulle catene di Markov (MCMC) . . . . .	58
3.6.1	Algoritmo di Metropolis-Hastings . . . . .	60
3.6.2	Campionatore di Gibbs (Gibbs sampler) . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Catene di Markov con tempo continuo</b>	<b>65</b>
4.1	Distribuzione esponenziale . . . . .	65
4.1.1	Assenza di memoria . . . . .	67
4.1.2	Tasso di rischio (hazard rate) . . . . .	69
4.1.3	Distribuzione iperesponenziale . . . . .	70

4.1.4	Distribuzione della somma di due variabili aleatorie indipendenti con distribuzione esponenziale . . . . .	72
4.1.5	Distribuzione di Eerlang . . . . .	74
4.1.6	Distribuzione ipoesponenziale . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Processo di Poisson</b>	<b>77</b>
5.0.1	Salti nel processo di Poisson . . . . .	81
5.1	Decomposizione di un processo di Poisson . . . . .	82
5.1.1	"Ricomposizione" di processi di Poisson . . . . .	83
5.2	Definizione equivalente di processo di Poisson . . . . .	83
5.3	Distribuzione condizionata dei punti di salto . . . . .	86
5.4	Processo di Poisson non omogeneo . . . . .	88
5.4.1	Caratterizzazione infinitesimale . . . . .	89
5.4.2	Definizione alternativa . . . . .	90
5.4.3	Generazione di un processo di Poisson non omogeneo . . . . .	91
5.4.4	Somma di processi di Poisson non omogenei . . . . .	93
5.5	Processi di Poisson composti (compound Poisson process) . . . . .	96
5.5.1	Esempi . . . . .	98
5.6	Processi di pura nascita (pure birth processes) . . . . .	103
<b>6</b>	<b>Catene di Markov con tempo continuo</b>	<b>109</b>
6.1	Processi di tipo esponenziale . . . . .	112
6.1.1	Modello di crescita lineare con immigrazione . . . . .	116
6.1.2	Modello di pura nascita . . . . .	119
6.2	Equazioni di Kolmogorov . . . . .	120
6.2.1	Equazioni all'indietro di Kolmogorov (Kolmogorov backward equation) . . . . .	121
6.2.2	Equazioni in avanti di Kolmogorov (Kolmogorov forward equations) . . . . .	125
6.2.3	Processi di nascita e morte (con catene di Markov con tempo continuo) . . . . .	140
6.2.4	Condizione per la reversibilità . . . . .	146
6.2.5	Reversibilità dei processi di nascita e morte . . . . .	146
<b>7</b>	<b>Processi di rinnovamento</b>	<b>149</b>
7.0.1	Proprietà dei processi di rinnovamento . . . . .	150
7.0.2	Comportamento asintotico . . . . .	151
7.1	Processi di rinnovamento con ricompensa . . . . .	152
7.1.1	Comportamento asintotico . . . . .	153
7.1.2	Applicazione . . . . .	154
7.2	Processi di rinnovamento alternati . . . . .	156

# Chapter 1

## Introduzione

### 1.1 Notazione

**Evento** quantità che vale 1 se si verifica, 0 se non si verifica.

Data questa premessa, possiamo far corrispondere le operazioni insiemistiche sugli eventi a operazioni sui numeri  $E$  ed  $F$ ; possiamo associare a questi eventi una variabile aleatoria (che può assumere valori compresi tra 0 e 1):

<b>Unione</b> $E \cup F$	massimo tra E ed F, vale 1 se almeno un evento di verifica; somma logica
<b>Intersezione</b> $E \cap F$	è il minimo tra i due eventi; è detto anche prodotto logico
<b>Complementazione</b> $\tilde{E} = 1 - E$	si verifica se E non si verifica

**Attesa (expectation)** concetto associato ai fenomeni aleatori.

Indicheremo con lo stesso simbolo sia l'attesa, sia la probabilità:

$$P(E) \qquad P(X)$$

con  $E$  un evento,  $X$  indica una variabile aleatoria.

Possiamo considerare un evento come una variabile aleatoria che può assumere solo i valori 0 e 1.



# Chapter 2

## Passeggiate aleatorie

### 2.1 Schema di Bernoulli

Effettuiamo prove indipendenti che possono dare due risultati sempre nelle stesse condizioni e che non si influenzano tra loro.

Supponiamo di avere una successione di eventi infiniti (**nota bene** negli esempi useremo un numero finito). Tutti gli eventi hanno la stessa probabilità:

$$P(E_i) = p$$

Quando si parla di schema di Bernoulli, bisogna specificare  $p$ .

Come formalizziamo l'altra ipotesi, ovvero che gli eventi siano indipendenti?

$$P(F_1, \dots, F_n) = p^k (1 - p)^{n-k}$$

con  $F_i = E_i$  oppure  $F_i = \tilde{E}_i$ ,  $p$  la costante associata allo schema di Bernoulli,  $k$  numero di volte in cui appare l'evento: in alcuni  $F_i$  infatti apparirà l'evento, in altri il complementare;  $n - k$  quindi è il numero di volte in cui appare l'evento complementare.

### 2.2 Passeggiata aleatoria

È il primo esempio che incontriamo di un **processo stocastico**.

Un processo stocastico è una successione di variabili aleatorie che dipende da un parametro, tipicamente il tempo. Il tempo nello specifico viene considerato a valori discreti.

Esempio: una particella che a  $t=0$  si trova nel punto 0, ad ogni istante fa un passo a destra con probabilità  $p$  oppure a sinistra con probabilità  $1 - p$ .

La probabilità di andare a destra (sinistra) è costante, e le probabilità di girare in una direzione sono indipendenti.

Dati  $E_1, E_2, E_3 \dots$  definiamo

$$x_i = 2E_i - 1$$

$$\text{se } E_i = 1 \Rightarrow x = 1,$$

$$\text{se } E_i = 0 \Rightarrow x = -1$$

1, -1 rappresentano lo spostamento nella nostra passeggiata aleatoria.

Chiamiamo  $S_n$  lo spostamento, che rappresenta la posizione al tempo  $n$ :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n x_i \\ &= 2\left(\sum_{i=1}^n E_i\right) - n \quad \text{detto } z_n = \sum_{i=1}^n E_i \\ &= 2z_n - n \end{aligned}$$

Qual è la probabilità che ci può interessare? Dato un istante  $n$ , possiamo ad esempio chiederci la probabilità che la particella si trovi in una certa posizione (ovvero  $S_n = x$ ):

$$P(S_n = x)$$

Che possiamo riscrivere come:

$$P(2z_n - n = x) = P\left(z_n = \frac{n+x}{2}\right)$$

**Distribuzione binomiale** distribuzione del numero di successi, quando facciamo delle prove indipendenti.

Distribuzione binomiale di parametri  $n$  e  $p$ :

$$P(n, k) = \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$

con  $n$  il numero delle prove e  $p$  la probabilità di successo.



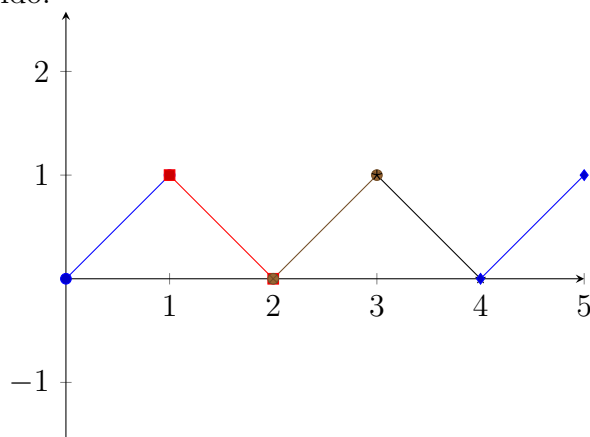
$\frac{n+x}{2}$  deve essere un numero intero, quindi  $n+x$  deve essere pari; quindi se  $n$  è pari (il tempo è pari)  $x$  deve essere pari, la particella cioè deve essere in una posizione pari (se  $n$  è il numero di passi che facciamo e  $x$  il punto dove ci fermiamo, la somma deve essere pari. ad es. non è possibile fare 10 passi e fermarci nel punto 9, mentre fare 7 passi e fermarsi su 5 è possibile perché  $7+5 = 12$ ):

$$\Rightarrow P(z_n = \frac{n+x}{2}) = \binom{n}{\frac{n+x}{2}} 2^{-n}$$

La passeggiata aleatoria è definita su numeri interi, sarebbe graficamente cioè una successione di punti, ma si può visualizzare come una linea spezzata unendo i punti.

**Passeggiata aleatoria simmetrica** è un caso interessante di passeggiata aleatoria, dove  $p = \frac{1}{2}$ : la probabilità di andare a sinistra o a destra è uguale.

Nel grafico, quando aumento di 1 la linea sale di 1; quando  $x$  vale -1, scendo.



Vogliamo calcolare la probabilità di un evento che si riferisce al cammino. Dobbiamo fare la somma di tutti i casi elementari dell'evento. Sia  $A$  un evento:

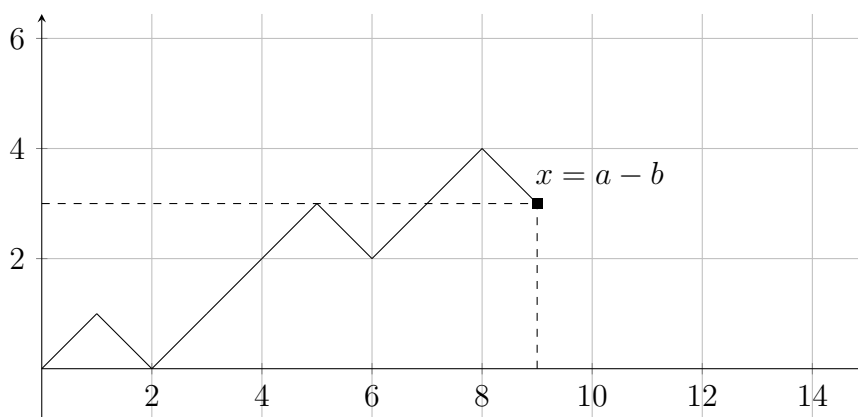
$$A = \frac{\text{numero dei casi elementari}}{2^n}$$

In questo caso quindi ci riduciamo ad un *problema combinatorio* (contare i casi elementari). Possiamo quindi calcolare la probabilità in modo combinatorio.

## 2.3 Problema del ballottaggio

Supponiamo che ci sia un'elezione con 2 candidati. L'urna dei voti conterrà voti a favore del candidato A oppure del candidato B; Sia  $n$  il numero dei voti, e sia  $a$  il numero dei voti per A e  $b$  il numero dei voti per B. Supponiamo ancora  $a > b$ .

Mentre estraiamo le varie schede, possiamo disegnare una passeggiata aleatoria: estraendo un voto per A facciamo un passo a destra, per B a sinistra:



Dove sarà la linea spezzata quando avremo estratto tutte le schede? Quando avremo fatto  $a$  passi a destra e  $b$  a sinistra, la posizione sarà  $a - b$ .

Ci chiediamo ora: qual è la probabilità che **A** sia sempre in vantaggio?

In questo caso non abbiamo tutti i cammini con probabilità uguale, perché alla fine andremo nel punto  $(n, x)$ . Quanti sono i cammini che finiscono nel punto  $x$ ?

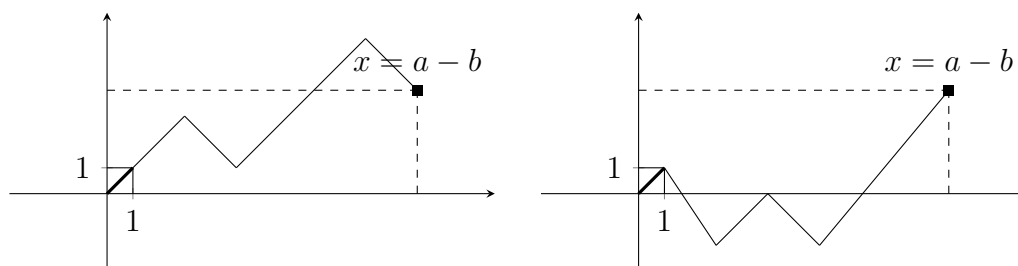
Abbiamo  $n$  estrazioni e dobbiamo scegliere un sottoinsieme di  $a$  elementi. Questo è quello che si chiama una combinazione. Le possibili combinazioni (i cammini possibili) sono:

$$\begin{aligned} \binom{n}{a} &= \frac{n!}{a!(n-a)!} \\ &= \binom{n}{b} = \frac{n!}{b!(n-b)!} \quad (n-b=a) \end{aligned}$$

Dobbiamo contare i cammini che sono sempre sopra l'asse delle  $x$ , che non toccano mai quest'asse.

**Principio di riflessione** com'è fatto un cammino che non tocca mai l'asse delle  $x$ ? Il primo passo sarà positivo. Il principio di riflessione dice che i

numero dei cammini che partono da  $(1,1)$  è uguale al numero dei cammini che partono da  $(1,-1)$  [e arrivano a  $x$ ]; voglio allora contare, anziché i cammini che non passano per  $x$ , quelli che toccano l'asse:



L'idea è di riflettere specularmente ogni cammino che parte da  $(1,1)$  e tocca l'asse delle  $x$  (ovvero quando si raggiunge un pareggio contando i voti; questo è permesso dal principio di riflessione).

C'è una corrispondenza biunivoca tra i cammini che raggiungono il pareggio - toccano l'asse delle  $x$  - partendo da  $(1,1)$  e quelli che partono da  $(1,-1)$ . Notare che non tutte le sequenze che partono da  $(1,1)$  raggiungono un pareggio, mentre tutte le sequenze che partono da  $(1,-1)$  sì (perché  $a \geq b$ ).

Ci sono  $n - 1$  passi per partire da  $(1,1)$  e arrivare a  $x$ . Ci sono  $a - 1$  passi a destra negli  $n - 1$  cammini da  $(1,1)$ ; ci sono  $a$  passi a destra partendo invece da  $(-1,1)$ .

Il numero dei cammini che toccano l'asse delle  $x$  è  $\binom{n-1}{a}$

Quanti sono i cammini che non toccano? Togliamo da tutti i cammini quelli che toccano:

$$\binom{n-1}{a-1} - \binom{n-1}{a}$$

Per calcolare la probabilità, dividiamo la quantità appena calcolata per

il numero totale dei cammini:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\binom{n-1}{a-1} - \binom{n-1}{a}}{\binom{n}{a}} = \\
 & = \frac{\frac{(n-1)!}{(a-1)!(n-a)!} - \frac{(n-1)!}{a!(n-a-1)!}}{\frac{(n)!}{a!(n-a)!}} = \\
 & = \frac{1}{n}(a-b) = \\
 & = \frac{a-b}{a+b}
 \end{aligned}$$

E questa è la probabilità che il candidato A sia sempre in vantaggio su B.

Applichiamo questo risultato alla passeggiata aleatoria simmetrica. Supponiamo  $S_0, S_1, \dots, S_{2n}$ :

$$u_{2n} = P(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}$$

è la probabilità di ritrovarsi all'origine (ovvero, di fare lo stesso numero di passi sia a destra che a sinistra).  $2^{2n}$  è il numero totale delle passeggiate possibili.

Cosa succede quando  $n$  cresce?

#### Formula di Stirling

$$n! = \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n} \cdot e^{\theta n} \quad |\Theta_n| < \frac{1}{12n}$$

Fornisce un'approssimazione per il fattoriale;  $\Theta_n$  è un errore che tende a 0.

Se  $n$  tende a  $\infty$ ,  $\Theta_n \rightarrow 0$  e quindi  $e^{\theta n} \rightarrow 1$ .

Usando la formula di Stirling:

$$\begin{aligned}
 \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} &= \frac{2n!}{(n!)^2} \frac{1}{2^{2n}} = \\
 &= \frac{\sqrt{2\pi}(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n} e^{\theta_{2n}}}{(2\pi)n^{2n+1} e^{-2n} e^{2\theta_n}} \cdot \frac{1}{2^{2n}} =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cdot e^{\theta_{2n}-2\theta_n}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{\theta_{2n}-2\theta_n}$$

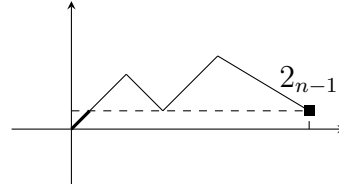
$e^{\theta_{2n}-2\theta_n}$  tende a 1. Il tutto tende a 0, ma abbastanza lentamente.

Chiediamoci ora qual è la probabilità che la passeggiata aleatoria torni a 0 nel tempo  $2n$  e sia sempre positiva prima di  $2n$ :

$$P(S_1 > 0, \dots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 0)$$

Perché si verifichi occorre che  $S_{2n-1} = 1$ .

Possiamo contare i cammini che partono da 0 e al tempo  $2n - 1$  sono a 1, rimanendo sempre positivi. Lo abbiamo visto per il teorema del ballottaggio.



È come avere  $2n - 1$  schede e  $n$  voti per A, e  $n - 1$  voti per B. Quindi, sapendo che la formula è  $\frac{a-b}{a+b}$  e che  $a$  corrisponde a  $n$  e  $b$  corrisponde a  $n - 1$ , per ottenere il numero dei cammini che partono dall'origine e ritornano a 0 in  $2n$  passi e sono sempre positivi possiamo calcolare:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n-1} \cdot \binom{2n-1}{n} &= \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!(2n-1)} = \\ &= \frac{(2n-2)!}{n(n-1)!^2} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \end{aligned}$$

Per calcolare la probabilità dobbiamo dividere questa quantità per il numero dei cammini totali:

$$\begin{aligned} P(S_1 > 0, \dots, S_{n-1} > 0, S_n = 0) &= \\ &= \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \frac{1}{2^{2n-2}} \frac{1}{4} = \\ &= \frac{1}{4n} u_{2n-2} \end{aligned}$$

Quindi nella passeggiata aleatoria per calcolare la probabilità di un evento che si riferisce ai primi  $2n$  passi, siccome i cammini hanno la stessa probabilità  $p$ , si riduce a contare quanti sono i cammini. Abbiamo visto che

$$P(S_1 > 0, \dots, S_{n-1} > 0, S_n = 0) = \frac{1}{n} u_{2n-2} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \frac{1}{2^{2n-2}}$$

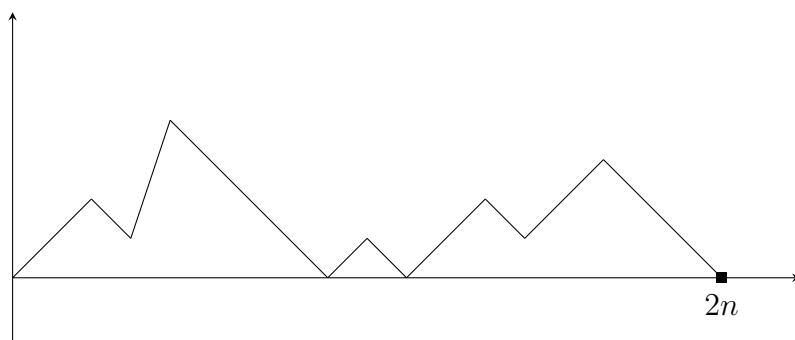
Definiamo  $L_{2n} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ ; allora possiamo riscrivere l'equazione sopra come

$$P(\dots) = L_{2n-2} \frac{1}{2^{2n-2}}$$

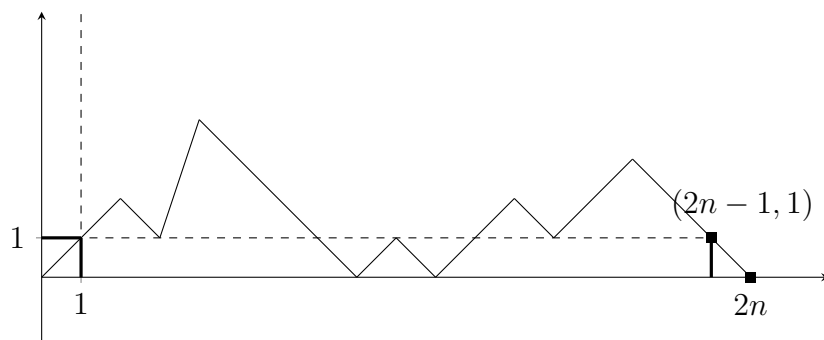
Vogliamo ora calcolare la probabilità di questo evento:

$$P(S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, \dots, S_{2n-1} \geq 0, S_{2n} = 0)$$

Dobbiamo calcolare i cammini che rimangono maggiori o uguali a 0; la nostra passeggiata sarà di questo tipo:



Ma possiamo ridurci al problema precedente, spostando l'origine nel punto  $(1, 1)$ :



Il cammino spostato sarà  $\geq 0$ . Possiamo fare una corrispondenza tra i cammini compresi tra 0 e  $2n$  di lunghezza  $2n$ , e i cammini compresi tra  $(1, 1)$  e  $(2n-1, 1)$  di lunghezza  $2n-2$ .

Il numero di cammini tra 0 e  $2n$  sempre positivi era dato da  $\frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} = L_{2n-2}$ ; quindi la probabilità sarà:

$$P(S_1 \geq 0, S_{2n} = 0) = L_{2n} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{u_{2n}}{n+1}$$

**Teorema** Dato  $u_{2n} = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}$ , allora:

1.  $u_{2n} = P(S_{2n} = 0)$
2.  $u_{2n} = P(S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} \neq 0)$
3.  $u_{2n} = P(S_1 \geq 0, \dots, S_{2n} \geq 0)$

Siccome abbiamo già visto 1, vogliamo dimostrare 2 e 3.

Dimostriamo **2**; definiamo

$$f_{2n} = P(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0)$$

Avevamo precedentemente trovato la probabilità che il cammino fosse sempre positivo; per simmetria, è uguale alla probabilità che sia sempre negativo. Allora

$$f_{2n} = 2P(S_1 > 0, \dots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 0) = 2 \frac{u_{2n-2}}{4n}$$

Consideriamo l'evento complementare di  $S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} \neq 0$ ; è l'evento che qualche volta tra 0 e  $2n$ ,  $S_i$  valga 0:

$$P(S_1 \neq 0, \dots) = 1 - f_2 - f_4 - \dots - f_{2n}$$

con  $f_n$  la probabilità che  $S$  sia tornato a 0 nel tempo  $n$ .

**Osservazione:**

$$\overbrace{\binom{2n-2}{n-1} \frac{1}{2^{2n-2}} - \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}}^{u_{2n-2} - u_{2n}} = f_{2n}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f_{2n} &= P(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0) = \\
&= u_{2n-2} \left( 1 - \frac{1}{4} \frac{(2n)(2n-1)}{n^2} \right) = \\
&= u_{2n-2} \left( \frac{2n-2n+1}{2n} \right) = \\
&= \frac{u_{2n-2}}{2n} = f_{2n}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1 - f_2 - f_4 - \dots - f_{2n} = 1 - (u_0 - u_2) - (u_2 - u_4) - \dots - (u_{2n-2} - u_{2n}) = u_{2n}. \quad \square \text{ QED}$$

$u_0$  per definizione è 1;  $u_2$  si cancella con  $u_2$  (gli  $u_i$  si cancellano due alla volta).

Interpretazione: sappiamo, per Stirling, che possiamo approssimare  $u_{2n} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ . Se prendiamo  $n$  grande, la probabilità che non si torni mai a 0 tende a 0. Ad esempio, se prendiamo 2 giocatori A, B che tirano una moneta, e se esce testa A vince 1 euro (e B perde), mentre se esce croce A perde un euro (e B vince), la probabilità che il gioco non termini mai e che i giocatori vanno avanti all'infinito tende a 0.

Dimostriamo **3**; vogliamo dimostrare che  $u_{2n} = P(S_1 \geq 0, \dots, S_{2n} \geq 0)$ , che rappresenta l'evento che il primo giocatore (sempre nell'esempio dei due giocatori che tirano una moneta) sia sempre in vantaggio o in parità.

Definiamo

$$f_{2n} = P(S_1 \geq 0, \dots, S_{2n-2} \geq 0, S_{2n-1} < 0)$$

in base al conteggio fatto precedentemente sul numero dei cammini  $\geq 0$  fino a  $2n-2$ , questa quantità è pari a:

$$f_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} u_{2n-2} \frac{1}{2n}$$

Consideriamo l'evento complementare di  $f_{2n}$ , cioè che ci sia stato un punto negativo. I punti negativi possono essere solo nei punti dispari:

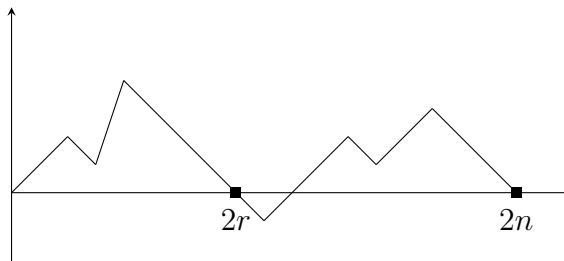
$$\begin{aligned}
P(S_1 \geq 0, \dots, S_{2n-2} \geq 0, S_{2n-1} < 0) &= \\
&= 1 - f_2 - \dots - f_{2n} = 1 - (u_0 - u_2) - \dots - (u_{2n-2} - u_{2n}) \\
&= u_{2n} \quad \square \text{ QED}
\end{aligned}$$



**Equazione del rinnovamento** c'è una relazione che collega  $u_{2n}$  e  $f_{2n}$ , si chiama *equazione del rinnovamento* (renewal equation):

$$u_{2n} = \sum_{r=1}^n f_{2r} u_{2n-2r}$$

Se abbiamo un cammino che va da 0 a  $2n$ , si può decomporre in due parti: quella che va da 0 a 0 per la prima volta, e da lì a  $2n$ . Chiamiamo il primo tempo  $2r$ .

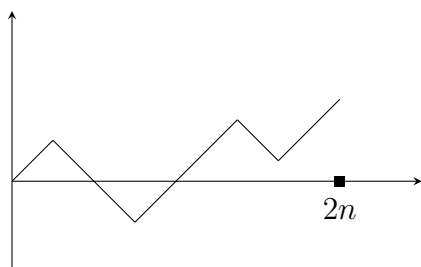


Il numero totale dei cammini è  $\binom{2n}{n}$

$$u_{2n} 2^{2n} \binom{2n}{n} = \sum_{r=1}^n f_{2r} 2^{2r} u_{2n-2r} 2^{2n-2r}$$

se dividiamo a sinistra e a destra per  $2^{2n}$  otteniamo l'equazione di rinnovamento.

Abbiamo due giocatori, A e B, che tirano una moneta: se esce testa, A vince un euro (e B perde), viceversa A perde un euro (e B vince); ci chiediamo qual è la percentuale di tempo in cui uno dei due è in vantaggio. Si potrebbe pensare che sia A che B rimangano in vantaggio per circa il 50% del tempo. In realtà, quando  $N$  (numero di lanci) è grande, è più probabile che un solo giocatore rimanga in vantaggio tutto il tempo.



Come definiamo il tempo in cui un giocatore è in vantaggio sull'altro? Se rappresentiamo nel grafico la passeggiata aleatoria, essa sarà una linea spezzata; ma invece di considerare i tempi discreti, immaginiamo che la linea sia il grafico di una funzione.

Consideriamo la lunghezza dell'intervallo in cui la funzione è positiva. Definiamo

$$P_{2k,2n} = \begin{array}{l} \text{probabilità che il primo giocatore sia in} \\ \text{vantaggio per un tempo } 2k \end{array}$$

È stato dimostrato (Fenner) che  $P_{2k,2n} = u_{2k}u_{2n-2k}$ . Si dimostra per induzione su  $n$ :

**Caso base:**  $p_{0,2n}$  = probabilità che il primo giocatore sia sempre in vantaggio o pari ( $S \geq 0$ )

$$p_{0,2n} = P(S_1 \geq 0, \dots, S_{2n} \geq 0) = u_{2n} \quad \square$$

**Caso induttivo:** supponiamo che l'uguaglianza valga per  $n-1$ ; dimostriamo che vale per  $n$ .

Sia  $1 \leq k \leq n-1$ . Ci sarà un intervallo in cui il grafico è sopra e uno in cui il grafico della passeggiata aleatoria è sotto l'asse  $x$ ; ad un certo punto quindi passerà per l'asse  $x$  ( $y=0$ ). Quindi, il primo intervallo può essere positivo o negativo; il secondo sarà l'opposto.

$$\begin{aligned} p_{2k,2n} &= \underbrace{\sum_{r=1}^k \frac{1}{2} f_{2r} p_{2k-2r,2n-2r}}_{\substack{\text{probabilità di tornare a 0 per} \\ \text{la prima volta al tempo } 2r; \text{ il} \\ \text{cammino può essere positivo} \\ \text{o negativo, per questo} \\ \text{moltiplichiamo per } \frac{1}{2}}} + \sum_{r=1}^{n-k} \frac{1}{2} f_{2r} p_{2k,2n-2r} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^k f_{2r} u_{2k-2r} u_{2n-2k} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-k} f_{2r} u_{2k} u_{(2n-2k)-2r} \end{aligned}$$

Applichiamo la formula del rinnovamento:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} u_{2n-2} + \sum_{r=1}^k f_{2n} u_{2k-2r} + \frac{1}{2} u_{2k} \sum_{r=1}^{n-k} f_{2r} u_{2(n-k)-2r} \\ &= \frac{1}{2} u_{2n-2k} u_{2k} + \frac{1}{2} u_{2k} u_{2n-2k} \\ &= u_{2k} u_{2n-2k} \quad \square \end{aligned}$$

**Esempio** consideriamo i soliti 2 giocatori che scommettono su testa o croce; supponiamo 20 lanci di moneta.

$p_{2k,20}$  è la probabilità che il primo giocatore sia in vantaggio esattamente un tempo  $2k$ .

$P_{2k,20}$  è la probabilità che il primo giocatore sia in vantaggio almeno un tempo  $2k$ .

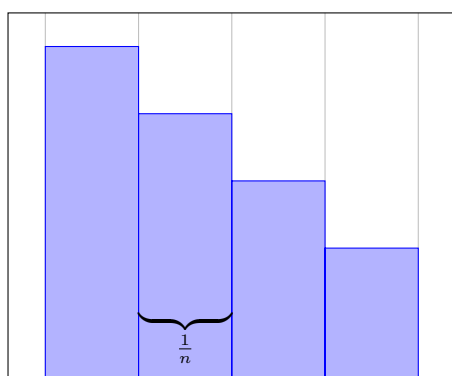
	$k = 0, k = 10$	$k = 1, k = 9$	$k = 2, k = 8$	$k = 3, k = 7$	$k = 4, k = 6$	$k = 5$
p	0,1702	0,0927	0.0736	0.0655	0.0617	0.064
P	0.3504	0.5379	0.6851	0.8160	0.9394	1

Possiamo ricavare una legge generale, facendo tendere  $n$  all'infinito e osservando come si comporta la quantità  $p_{2k,2n}$ .

Anziché  $k$  consideriamo  $\frac{k}{n} = x$ , cioè consideriamo la percentuale del tempo in cui il primo giocatore è in vantaggio.  $x$  assume valori discreti:

$$x = 0, \frac{1}{n}, \dots, 1$$

Un modo per rappresentare la distribuzione di probabilità è attraverso l'istogramma:



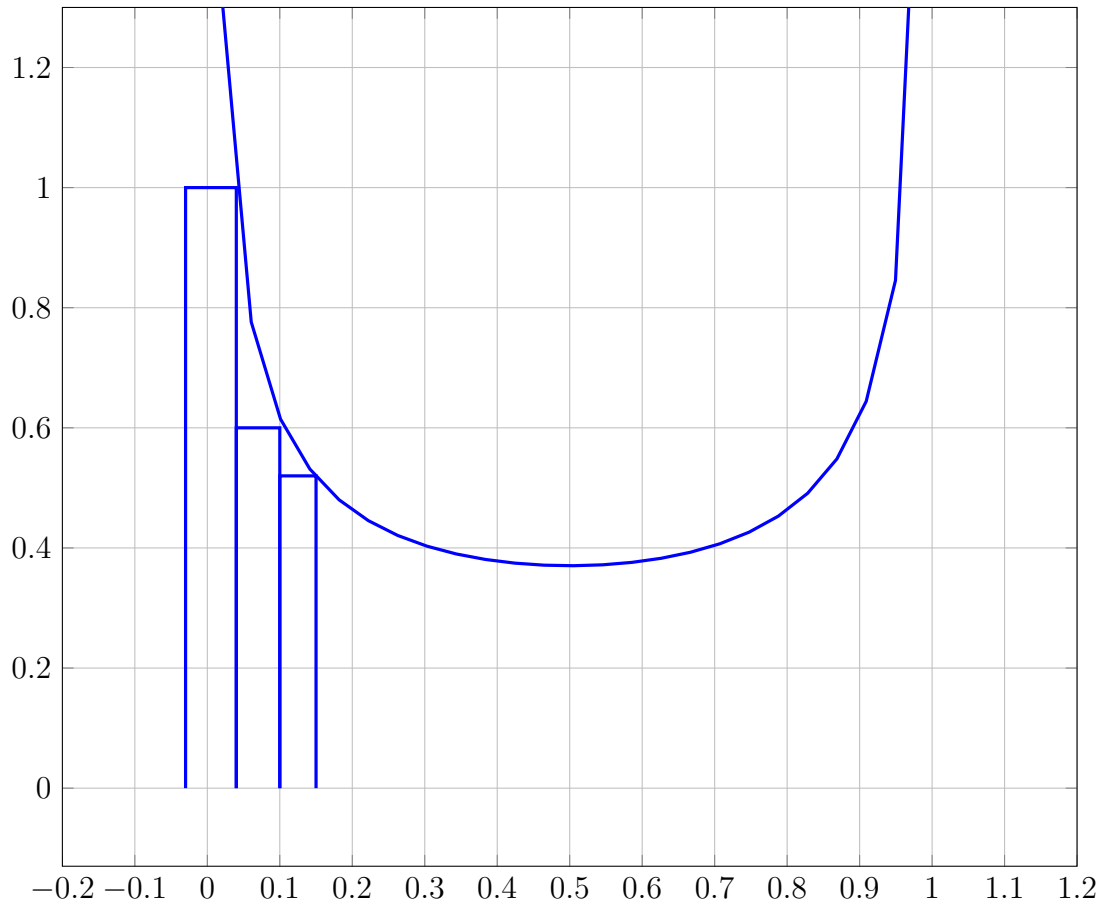
L'area del rettangolo è uguale alla probabilità che assuma un certo valore. Abbiamo visto per Stirling che  $u_{2n} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ . Supponiamo  $n$  grande e  $0 \leq k \leq n$ ; allora possiamo scrivere:

$$u_{2k}u_{2n-2k} \approx \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$$

Riscriviamo la funzione in termini di  $x$  e chiamiamola  $g$ :

$$g(x) \approx \frac{1}{n2\pi} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

Da questa formula si vede che l'istogramma è vicino alla funzione  $\frac{1}{2\pi\sqrt{x(1-x)}}$ :



Dobbiamo fare la somma di tutti i rettangoli sotto la funzione  $\frac{1}{2\pi\sqrt{x(1-x)}}$ . Questa è la somma di Riemann, un'approssimazione dell'integrale:

$$\approx \sum_{\frac{1}{2} < x < z} \frac{1}{n2\pi} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{2}}^z \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} dx$$

Con riferimento al grafico precedente, si vede che quando  $x$  tende a 0 oppure a 1, la probabilità tende all'infinito, mentre a  $\frac{1}{2}$  è nel punto più basso.

Questa è detta **prima legge dell'arcoseno** perché la primitiva dell'integrale è uguale a:

$$\int \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} dx = 2\pi^{-1} \arcsin \sqrt{x} + c$$

La prima legge dell'arcoseno è un'approssimazione della probabilità che

uno dei due giocatori sia in vantaggio una certa percentuale di volte, per un  $n$  grande.

Questo vale per la passeggiata aleatoria asimmetrica libera.

Vediamo un caso simile: consideriamo la probabilità che il primo giocatore sia in vantaggio per un tempo  $2k$  e che a  $2n$  la passeggiata sia 0, ovvero i due giocatori siano in pareggio; definiamo

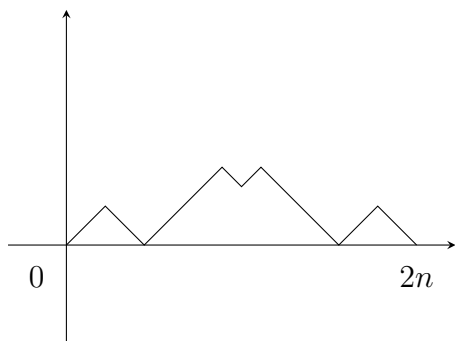
$$\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)(L_{2k,2n}) = \begin{array}{l} \text{probabilità che il primo giocatore sia in} \\ \text{vantaggio per un tempo } 2k \text{ e che } S_{2n} = 0 \end{array}$$

$L_{2k,2n}$  è il numero dei cammini; dividendolo per il numero totale dei cammini  $2^{2n}$  dà la probabilità.

Allora  $L_{2k,2n} = L_{2n}$ , e avevamo definito  $L_{2n} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ .

È possibile dimostrare che il numero dei cammini non dipende da  $k$ , ma è lo stesso per tutti i valori di  $k$ ; qualsiasi percentuale ha la stessa probabilità.

**Dimostrazione** per induzione su  $n$ :



Supponiamo sia vero per  $n-1$ ; vogliamo vedere che la proprietà vale anche per  $n$ . Supponiamo  $k=n$ . Dobbiamo contare i cammini che tornano a 0 e sono sempre  $\geq 0$ ; ma lo abbiamo già visto: i cammini sono  $L_{2n,2n} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ .

Anche il caso  $k=0$  lo abbiamo già visto.

Supponiamo  $1 \leq k \leq n-1$ . Questo cammino deve passare per forza per 0, perché una parte del tempo è in vantaggio il primo giocatore, l'altra il secondo. Sia  $2r$  il primo istante in cui la passeggiata passa per lo 0. Fino al tempo  $2r$ , il cammino può essere positivo o negativo.

$$L_{2k,2n} = \sum_{r=1}^k L_{2r-2} L_{2n-2r} + \sum_{r=1}^{n-k} L_{2r-2} L_{2n-2r}$$

Modifichiamo la variabile  $r$  al secondo membro, con  $\rho = n - r + 1$ . Quindi

$$\begin{array}{ll} \text{per } r = n - k, & \rho = k + 1 \\ \text{per } r = 1, & \rho = n \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{r=1}^k L_{2n-2} L_{2n-2r} + \sum_{\rho=k+1}^n L_{2\rho-2} L_{2n-2\rho} \\ &= \sum_{r=1}^n L_{2r-2} L_{2n-2r} \quad \square \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato che  $L_{2k,2n}$  non dipende da  $k$ , ma è uguale per tutti i valori. Ma quanto vale effettivamente?

$$L_{0,2n} = L_{2n,2n} = L_{2n}$$

$L_{k,2n}$  per  $k = 1, n = 1$  sono uguali

Supponiamo che:

$$\sum_{k=0}^n L_{2k,2n} = \binom{2n}{n}$$

facendo variare  $k$  da 0 a  $n$  otteniamo tutti i cammini di lunghezza  $2n$

Supponiamo  $1 \leq k \leq n - 1$ :

$$\begin{aligned} L_{2k,2n} &= \frac{\binom{2n}{n} - 2L_{2n}}{n - 1} = \\ &= \frac{\binom{2n}{n} - \frac{2\binom{2n}{n}}{n+1}}{n - 1} = \binom{2n}{n} \frac{1 - \frac{2}{n+1}}{n - 1} \\ &= \binom{2n}{n} \frac{\frac{n+1-2}{n+1}}{n - 1} = \frac{\frac{2n}{n}}{n + 1} \\ &= L_{2n} \end{aligned}$$

## 2.4 Problema della rovina del giocatore (gambler's ruin)

Consideriamo un altro problema, la rovina del giocatore. È sempre basato su una passeggiata aleatoria. Consideriamo 2 giocatori A e B che tirano una moneta; se esce testa, A vince 1 euro; se esce croce, perde 1 euro (e lo vince B). Ci chiediamo quale sia il capitale del primo giocatore dopo un certo numero di giocate.

## 2.4. PROBLEMA DELLA ROVINA DEL GIOCATORE (GAMBLER'S RUIN) 19

Supponiamo che al tempo 0 il capitale iniziale di A sia  $x$ , mentre il capitale di B ammonti a  $N - x$ . Il capitale totale (capitale di A + capitale di B) ammonta quindi a  $N$ . Se il capitale di uno dei due giocatori arriva a 0, il gioco si ferma (e si ha la rovina del giocatore).

Considereremo anche il caso della **moneta non simmetrica**, dove cioè la probabilità  $p$  che esca testa è  $0 < p < 1$ . I lanci sono indipendenti tra loro.

Ci chiediamo qual è la probabilità che dopo un certo numero di giocate A oppure B sia rovinato. Non supponiamo ci sia un numero finito di lanci, il gioco potrebbe teoricamente continuare all'infinito.

Definiamo le seguenti quantità:

$E_i =$  i-esimo lancio è testa (evento)

$$P(E_1^*, \dots, E_n^*) = p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$E_i^* = \begin{cases} E_i, & \text{se l'evento è verificato} \\ \tilde{E}_i, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.1)$$

Con  $k$  numero degli eventi  $E_i$  e  $n - k$  numero degli eventi  $\tilde{E}_i$ .

Questo schema di Bernoulli formalizza il fatto che i lanci siano indipendenti.

Definiamo

$u_x =$  probabilità di rovina del giocatore A con capitale iniziale  $x$ , contro B con capitale iniziale  $N - x$

**Caso simmetrico**  $p = \frac{1}{2}$

Supponiamo  $0 < x < N$ . Osserviamo in generale che  $u_0 = 1$  e  $u_N = 0$ .

Possiamo scrivere  $u_x$  come la probabilità di rovina del giocatore sapendo che il primo lancio ha dato testa sommata alla probabilità di rovina del

giocatore sapendo che il primo lancio ha dato croce:

$$\begin{aligned} u_x &= p \cdot u_{x+1} + (1-p) \cdot u_{x-1} \\ &= \frac{1}{2}u_{x-1} + \frac{1}{2}u_{x+1} = \frac{1}{2}(u_{x+1} - u_x) = \frac{1}{2}(u_x - u_{x-1}) \\ u_{x+1} - u_x &= c \quad (\text{la differenza tra due valori successivi è sempre uguale, la chiamiamo } c) \end{aligned}$$

$$0 = u_n = u_0 + \sum_{x=0}^{N-1} (u_{x+1} - u_x)$$

$$0 = u_n = 1 + Nc \Rightarrow c = -\frac{1}{N}$$

$$u_x = u_0 + \sum_{y=0}^{x-1} (u_{y+1} - u_y) = 1 - \frac{x}{N}$$

Ed è la probabilità di rovina di A partendo da  $x$ . La probabilità di rovina di B è data da  $1 - \frac{N-x}{N}$ . Quindi se  $x \rightarrow N$ , la probabilità che A si rovini tende a 0. Cosa succede se  $N$  tende all'infinito? A parte da  $x$ , e B da  $N - x$ . La probabilità di rovina in questo caso tende a 1.

La probabilità che il gioco continui all'infinito è 0.

**Caso non simmetrico**  $0 < p < 1$  Nel caso  $p = \frac{1}{2}$  le differenze erano uguali (al valore  $c$ ). Nel caso non simmetrico questo non vale. Occorre introdurre la **somma geometrica**:

supponiamo  $\alpha \neq 1$ :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^n \alpha^k = \frac{\alpha^{n+1} - 1}{\alpha - 1} \\ \alpha S &= S - 1 + \alpha^{N+1} - 1 \\ (\alpha - 1)S &= \alpha^{N+1} - 1 \\ S &= \frac{\alpha^{N+1} - 1}{\alpha - 1} \quad \begin{cases} \alpha < 1, & \text{la serie è convergente} \\ \alpha > 1, & \text{la serie va avanti all'infinito} \end{cases} \end{aligned}$$

Tornando a noi, abbiamo detto che nel caso simmetrico  $0 < p < 1$ ; se  $p > \frac{1}{2}$  A è favorito, altrimenti è favorito B. Sia ancora  $u_x$  la probabilità di rovina di A, e scriviamola ancora come la somma delle probabilità della rovina del giocatore se il primo lancio è testa oppure è croce:

$$0 < x < N \quad u_x = p \cdot u_{x+1} + q \cdot u_{x-1}$$



## 2.4. PROBLEMA DELLA ROVINA DEL GIOCATORE (GAMBLER'S RUIN) 21

Con  $q = 1 - p$ .

$$\begin{aligned}(p + q)u_x &= pu_x + qu_x = pu_{x+1} + qu_{x-1} \\ q(u_x - u_{x-1}) &= p(u_{x+1} - u_x) \\ u_{x+1} - u_x &= \frac{q}{p}(u_x - u_{x-1}) \\ u_{k+1} - u_k &= \left(\frac{q}{p}\right)^k(u_1 - u_0) \quad u_0 = 1 \text{ (rovina all'istante iniziale), } u_N = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_k &= u_0 + \sum_{j=0}^{k-1} (u_{j+1} - u_j) \\ &= 1 + \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{q}{p}\right)^j (u_1 - u_0) \\ &= 1 + (u_1 - u_0) \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{q}{p}\right)^j\end{aligned}$$

possiamo applicare la formula della somma geometrica ( $p \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{q}{p} \neq 1$ ):

$$u_k = 1 + (u_1 - u_0) \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k - 1}{\frac{q}{p} - 1}$$

Applichiamo la formula per  $k = N$ , sapendo che  $u_N = 0$ :

$$\begin{aligned}0 &= 1 + (u_1 - u_0) \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}{\frac{q}{p} - 1} \\ u_1 - u_0 &= - \frac{\frac{q}{p} - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}\end{aligned}$$

Possiamo calcolare  $u_k$  in generale:

$$u_k = 1 - \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}$$

che è la probabilità di rovina di A che parte con capitale iniziale pari a  $k$ .

Consideriamo ora  $v_k$  la probabilità di rovina di B; in questo caso B vince con probabilità  $q$ .

$$v_k = 1 - \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{N-k} - 1}{\left(\frac{p}{q}\right)^N - 1}$$

Come nel caso simmetrico,  $v_k + u_k = 1$ . La probabilità che il gioco continui all'infinito è 0 (uno dei due giocatori va in rovina prima o poi). Cosa succede se  $N \rightarrow \infty$  (con  $p \neq \frac{1}{2}$ )? Supponiamo  $p > \frac{1}{2}$ .

$$\text{Se } \frac{q}{p} < 1 \text{ allora } u_k \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \left(\frac{q}{p}\right)^k < 1 \quad (\text{perché } \left(\frac{q}{p}\right)^N \rightarrow 0, \text{ perché } \frac{q}{p} < 1)$$

Quindi se A è favorito, la sua probabilità di rovina è minore di 1, e più è grande  $k$  e più si abbassa.

Se  $p < \frac{1}{2}$ :  $\frac{q}{p} > 1$  e  $u_k \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$ .

## 2.5 Processi di diramazione di Galton-Watson (branching processes)

Sono esempi particolari delle catene di Markov, un modello più generale. Servono per studiare l'evoluzione di una popolazione. È un modello molto semplificato; partiamo supponendo di avere un solo individuo che avrà un certo numero di figli.

Supponiamo che ogni individuo abbia le stesse probabilità di avere figli, indipendentemente dagli altri individui, e gli intervalli (numero di figli) siano regolari. Consideriamo una successione di variabili aleatorie, e vogliamo vedere quanti figli ci sono nelle varie generazioni.

Definiamo:

$x_i =$  numero di individui della generazione  $i$ -esima

$p_k =$  probabilità di avere  $k$  figli per ogni individuo;  $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$  (sono eventi incompatibili, è una partizione).

Supponiamo che la previsione del numero dei figli di un individuo sia finita; la indichiamo con  $\mu$ :

$$\mu = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k < +\infty$$

Quindi abbiamo supposto  $x_0 = 1$ . Qual è l'attesa della  $k$ -esima generazione?

**Formula delle probabilità totali** date due variabili aleatorie  $A$  e  $B$ , possiamo chiederci quanto vale l'*attesa condizionata*, ovvero la probabilità che si verifichi  $A$  sapendo che  $B$  assume un certo valore  $x$ :

$$P(A|B = x)$$

Possiamo conoscere l'attesa non condizionata con la formula delle probabilità totali:

$$P(X) = \sum_{x=0}^{\infty} P(A|B = x)P(B = x)$$

Siano  $x$  e  $y$  due variabili aleatorie a valori interi. Ci possiamo chiedere l'attesa di  $x$  quando  $y$  assume certi valori:  $P(x|y = j)$ ; usando la formula delle probabilità totali:

$$P(x) = \sum_{j=0}^{\infty} P(x|y = j)P(y = j)$$

Vogliamo calcolare l'attesa di  $k$ :

$$\begin{aligned} P(x_k) &= \sum_{j=0}^{\infty} P(x_k|x_1 = j)P(x_1 = j) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} j p_j P(x_{k-1}) \\ &= \mu P(x_{k-1}) \end{aligned}$$

Possiamo dividere la  $j$ -esima generazione nei figli dell'individuo 0; possiamo suddividerla in  $j$  sottoinsiemi e calcolare l'attesa dei sottoinsiemi:

$$P(x_k) = \mu P(x_{k-1}); \quad P(x_0) = 1 \text{ (per ipotesi);} \quad P(x_k) = \mu^k$$

Se  $\mu < 1$ , avremo l'estinzione:

$E_k(x_k = 0)$       evento che al tempo  $k$ ,  $x_k = 0$

$E_k \subset E_{k+1}$        $A$  è contenuto in  $B$  se quando si verifica il primo, allora si verifica anche il secondo

$E = \bigvee_{k=1}^{\infty} E_k$       si verifica almeno uno degli eventi

(Nota:  $\bigvee$  indica la somma logica, si può usare anche  $\bigcup$ ).

Se abbiamo una successione di eventi crescenti ( $E_k \subset E_{k+1}$ ), allora

$$P(E) = \sup_k P(E_k)$$

Vogliamo mostrare che se  $\mu < 1$ , allora  $P(E) = 1$ :

$$\begin{aligned} P(E_k) &= 1 - P(\tilde{E}_k) \\ &= 1 - \sum_{j=1}^{\infty} P(x_k = j) \geq 1 - \sum_{j=1}^{\infty} j P(x_k = j) \\ &= 1 - P(x_k) \\ &= 1 - \mu^k \rightarrow 1 \end{aligned} \quad \text{perché abbiamo supposto } \mu < 1 \Rightarrow \mu^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$$P(E) = 1$$

Se invece  $\mu = 1$ , l'attesa di  $x_k$  rimane 1.

Vediamo infine il caso generale: non facciamo ipotesi su  $\mu$ , ma può assumere qualsiasi valore.

Sia  $\Pi^k = P(x_k = 0)$ .

Possiamo usare la formula delle probabilità condizionate:

$$\begin{aligned} \Pi^k = P(x_k = 0) &= \sum_{j=0}^{\infty} P(x_k = 0 | x_1 = j) P(x_1 = j) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} p_j \Pi^{(k-1)j} \end{aligned}$$

Affinché nella  $k$ -esima generazione non ci siano più individui, in tutti i rami ci deve essere l'estinzione.

## 2.5. PROCESSI DI DIRAMAZIONE DI GALTON-WATSON (BRANCHING PROCESSES) 25

Definiamo una funzione  $f$ :

$$f(s) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j s^j$$

$$\pi^k = f(\pi^{k-1})$$

$$\pi^k \geq \pi^{k-1} \qquad \pi^k \leq 1$$

Abbiamo una successione non decrescente:

$$\pi = P(E) = \sup_k \pi^k$$

Ipotizziamo che  $p_0 + p_1 < 1$  e  $p_0 > 0$ .

Se  $p_0 = 0$ , vorrebbe dire che la  $p$  che un individuo non abbia figli sia 0. Allora la  $P(E)$  (probabilità di estinzione) sarebbe 0.

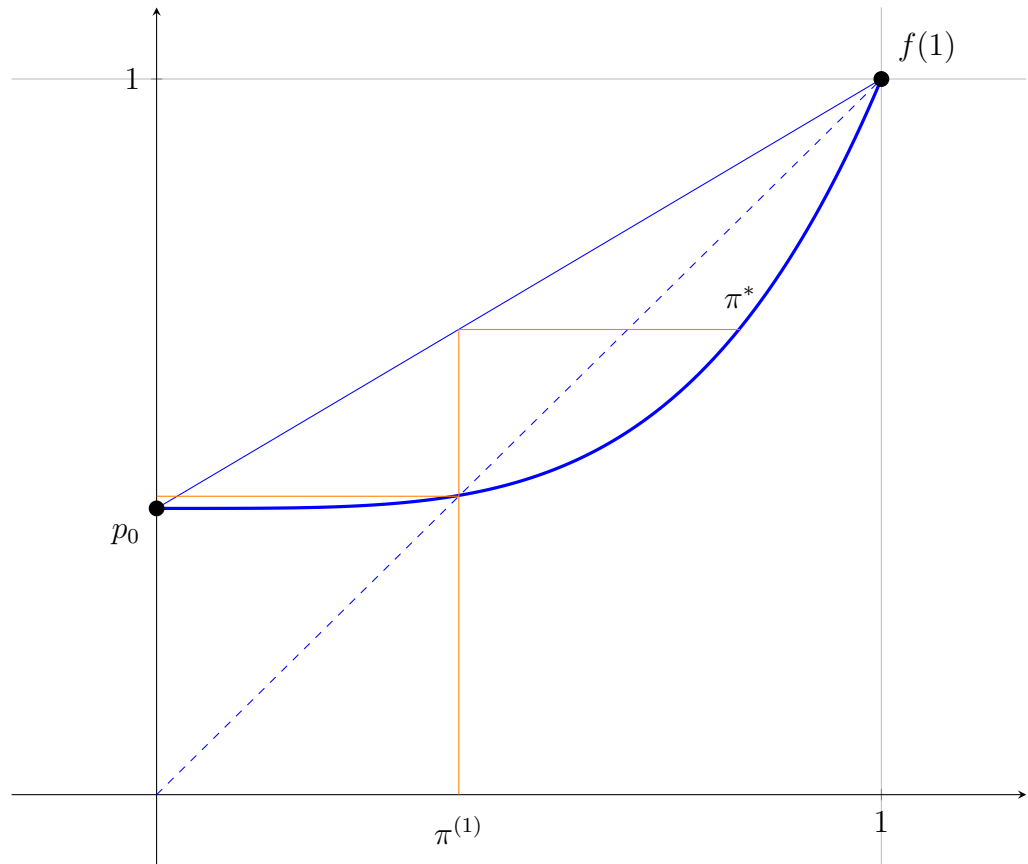
Supponiamo ora  $p_0 + p_1 = 1$  e  $p_0 > 0$ , ovvero ogni individuo non ha figli, oppure ha un solo figlio: allora  $P(E) = 1$  (si ha estinzione).

Studiamo com'è fatta  $f(s)$ :

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 & f'(s) &= \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot p_j \cdot s^{j-1} \\ f(0) &= p_0 > 0 & f'(1) &= \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot p_j = \mu \end{aligned}$$

$$f''(s) = \sum_{j=2}^{\infty} p_j \cdot j \cdot (j-1) s^{j-2} > 0, \quad 0 < s < 1$$

La derivata seconda è positiva, quindi la funzione è strettamente convessa.



Consideriamo il caso di  $\mu > 1$ , ricordando che  $\mu = f'(1)$ . Qual è la probabilità di estinzione?  $\pi = f(\pi)$ ; la probabilità di estinzione è una soluzione di una delle funzioni sottostanti:

$$\pi^{(1)} = p_0 \text{ (prima generazione)}$$

$$\pi^{(2)} = f(\pi^{(1)})$$

$$\pi^{(3)} = f(\pi^{(2)})$$

$$\pi^{(k+1)} = f(\pi^{(k)})$$

Chiamiamo  $\pi^*$  la soluzione. Siccome  $f$  è crescente, se applichiamo da entrambe le parti:

$$p_0 < \pi^*$$

$$\pi^{(1)} < \pi^*$$

...

$$\pi^t < \pi^*$$

Questa successione rimane sempre più piccola di  $\pi^*$ , quindi il limite tenderà a  $\pi^*$ , che è minore di 1.

Quindi se  $\mu > 1$ , c'è una probabilità positiva che non ci sia estinzione.

**Esempi** vediamo alcuni esempi:

- $p_0 = \frac{1}{2}, p_1 = \frac{1}{4}, p_2 = 0, p_3 = \frac{1}{4}$   
 $\mu = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow \pi = 1$
- $p_0 = \frac{1}{3}, p_1 = \frac{1}{3}, p_2 = 0, p_3 = \frac{1}{3}$   
 $\mu = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3} > 1$

Per calcolare  $\pi$  dobbiamo risolvere:

$$\begin{aligned} f(s) - s = 0 &\Rightarrow f(s) = \frac{1}{3} + \frac{s}{3} + \frac{s^3}{3} \\ \frac{s^3}{3} + \frac{s}{3} + \frac{1}{3} - s &= 0 \\ \frac{s^3}{3} - \frac{2}{3}s + \frac{1}{3} &= 0 \\ s^3 - 2s + 1 = 0 &\Rightarrow (s-1)(s^2 - As + C) = 0 \end{aligned}$$

Quindi  $s = 1$  è una soluzione; risolvendo il secondo elemento dell'equazione otterremo 2 radici, una di queste comprese tra 0 e 1, che è quella che ci interessa.

- $p_0 = \frac{1}{4}, p_1 = \frac{1}{4}, p_2 = \frac{1}{4}, p_3 = \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{1}{4}(s^3 + s^2 + s + 1) \\ \frac{1}{4}s^3 + \frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{4}s + \frac{1}{4} &= 0 \\ s^3 + s^2 - 3s + 1 &= 0 \\ (s-1)(s^2 + As + B) &= 0 \end{aligned}$$

Soluzione come nel caso precedente.

## 2.6 Simulatori

Supponiamo di voler generare una passeggiata aleatoria simmetrica tra 0 e  $2n$ . Prendiamo una successione  $x_1, \dots, x_{2n}$ . Definiamo una nuova variabile  $z_i$ :

$$z_i = \begin{cases} 1, & \text{per } x_i > \frac{1}{2} \\ -1, & \text{per } x_i \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Definiamo  $S_k = z_1 + \dots + z_k$ .

Facciamo tante prove e vediamo quante passeggiate sono positive: la percentuale del numero di passeggiate aleatorie sempre positive dovrebbe tendere al valore delle probabilità che una passeggiata sia sempre positiva per la legge dei grandi numeri.

Si può mostrare un altro esempio per la rovina del giocatore: questo problema si può vedere una passeggiata aleatoria in generale non simmetrica. In questo caso, a differenza di prima, teoricamente potremmo continuare all'infinito. Prendiamo la successione  $x_1, x_2, \dots$  e definiamo:

$$z_i = \begin{cases} 1, & \text{per } 0 < x_i \leq p \\ -1, & \text{per } p < x_i < 1 \end{cases} \quad s_n = x + z_1 + \dots + z_n$$

Con  $0 < x < n$ . Quindi la passeggiata parte da un certo  $0 < x < N$  e ogni volta che genero  $z_n$  vado avanti. Se  $z_n = 0$  ho la rovina del giocatore A, se  $z_n = N$  ho la rovina di B, altrimenti genero un altro numero. Sappiamo che con  $p = 1$  prima o poi ci fermeremo.

Se facciamo il rapporto tra il numero di volte che A si è rovinato e le passeggiate totali, facendo infinite prove, il valore dovrebbe tendere alla probabilità di rovina di A.

Si può vedere anche per i processi di diramazione. Supponiamo di essere nell'intervallo  $[0, 1]$  e di dividerlo in tanti intervalli più piccoli, supponendo che un individuo possa avere  $k$  figli:  $p_0, p_1, \dots, p_k \in [0, 1]$ . I  $k + 1$  intervalli hanno lunghezza pari alla loro probabilità.

Scegliamo, per il primo individuo, un intervallo a caso; diciamo che esca  $p_i$ : il primo individuo avrà  $i$  figli. Ripetiamo per ogni individuo della seconda generazione, e così via. Tipicamente la probabilità di estinzione è minore di 1; l'estinzione avviene nelle prime generazioni (perché la prole cresce esponenzialmente ed è più difficile che avvenga).

Questi tre esempi appena illustrati (random walk, gambling ruin, branching processes) sono un caso particolare di un modello più generale detto **catene di Markov**.



# Chapter 3

## Catene di Markov

### 3.1 Catene di Markov omogenee

Se ripensiamo ai problemi e ai modelli visti precedentemente, la caratteristica comune è che se sappiamo la posizione in un certo istante, possiamo calcolare la probabilità di andare nello stato successivo, poiché questa probabilità è appunto indipendente dalle misurazioni precedenti. Questa proprietà è chiamata **proprietà di Markov**.

Studieremo le **catene di Markov omogenee con numero finito o numerabile di stati**.

L'attributo "omogeneo" indica che la probabilità di passare da uno stato all'altro non dipende dal tempo. Esistono anche fenomeni dipendenti dal tempo (es. se studiamo la temperatura, bisogna tenere conto di in quale giorno dell'anno si stanno effettuando le misurazioni, e non è quindi un fenomeno omogeneo nel tempo).

Lo "stato", nel caso della probabilità aleatoria, è il punto in cui ci troviamo. Possiamo rappresentare lo stato con un numero intero, che quindi può assumere infiniti valori numerabili. Nel caso dei processi di diramazione, ad esempio, lo stato può essere il numero degli individui (un intero non negativo).

Per **definire** una catena di Markov occorre quindi indicare:

1.  $S$ : spazio degli stati, finito o numerabile;
2. **distribuzione iniziale**  $u_s$ : valori compresi tra 0 e 1 tali che la loro somma è 1. La distribuzione iniziale ci dice al tempo 0, supponendo che il tempo sia discreto, qual è la probabilità di trovarci in un certo stato. Possiamo prendere come stato iniziale qualsiasi stato oltre a 0;

$$0 \leq u_s \leq 1 \qquad \sum u_s = 1 \qquad s \in S$$

3. **probabilità di transizione:** è una matrice; siccome  $S$  può essere infinito, anche questa matrice può avere infinite righe e colonne. Indica la probabilità di passare da uno stato  $s$  di partenza ad uno stato  $s'$  d'arrivo:

$$s, s' \in S \quad \forall s \sum_{s' \in S} p_{s,s'} = 1$$

Possiamo definire una successione  $x_0, x_1, x_2, \dots$  e, dopo aver definito anche i 3 parametri sopra descritti, possiamo dare una distribuzione delle variabili aleatorie. Dato  $n$  finito, e  $p$ , possiamo definire la distribuzione di  $x_0, x_1, \dots$ :

$$\begin{aligned} P(x_0 = s_0, x_1 = s_1, \dots, x_n = s_n) \\ = u_{s_0} \cdot p_{s_0, s_1} \cdot p_{s_1, s_2} \cdot \dots \cdot p_{s_{n-1}, s_n} \end{aligned}$$

C'è un problema di compatibilità: se assegno la distribuzione dei primi  $n + 1$ , posso sapere la distribuzione dei primi  $n$ .

**Distribuzione marginale** (dei primi  $n$ ): si calcola facendo la somma dei primi  $n + 1$  valori.

Devo verificare quindi che l'equazione sopra sia valida. Queste assegnazioni delle probabilità sono compatibili, è coerente.

### 3.1.1 Proprietà di Markov

Supponiamo di avere una successione  $s_0, \dots, s_{n-1}, s$  e che  $u_{s_0} \cdot p_{s_0, s_1} \cdot p_{s_1, s_2} \cdot \dots \cdot p_{s_{n-1}, s} > 0$  (se il prodotto fosse 0, la probabilità che si verifichi la successione sarebbe 0). Ci chiediamo quanto vale la seguente probabilità:

$$P(x_{n+1} = s' | x_0 = s_0, x_1 = s_1, \dots, x_{n-1} = s_{n-1}, x_n = s)$$

Usiamo la formula della probabilità condizionata (richiamo: dati due eventi  $A, B$ :  $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ , con  $P(B) > 0$ ):

$$\begin{aligned} &= \frac{P(x_0 = s_0, \dots, x_{n-1} = s_{n-1}, x_n = s, x_{n+1} = s')}{P(x_0 = s_0, \dots, x_{n-1} = s_{n-1}, x_n = s)} \\ &= \frac{u_{s_0} \cdot p_{s_0, s_1} \cdot \dots \cdot p_{s_{n-1}, s} \cdot p_{s, s'}}{u_{s_0} \cdot p_{s_0, s_1} \cdot \dots \cdot p_{s_{n-1}, s} \cdot p_{s_{n-1}, s}} \\ &= p_{s, s'} \end{aligned}$$

Quindi, se voglio calcolare la probabilità di andare da  $s$  a  $s'$  mi basta conoscere l'ultimo stato, sapere tutto quello che è successo prima è irrilevante.

Qual è la probabilità di transizione in più passi, ad esempio in due passi?

$$\begin{aligned}
 & P(x_2 = s' | x_0 = s) \\
 &= \frac{P(x_0 = s, x_2 = s')}{P(\underbrace{x_0 = s}_{\substack{=u_s \\ \text{distribuzione} \\ \text{iniziale}}})} \\
 &= \frac{\sum_{s'' \in S} P(x_0 = s, x_1 = s'', x_2 = s')}{P(x_0 = s)} \\
 &= \frac{\sum_{s'' \in S} u_s p_{s,s''} p_{s'',s'}}{u_s} \\
 &= \sum_{s'' \in S} p_{s,s''} p_{s'',s'} \\
 &= p_{s,s'}^{(2)} \quad (\text{probabilità di transizione in 2 passi})
 \end{aligned}$$

Supponendo di partire in un tempo arbitrario  $\neq 0$ , la notazione diventa:

$$p_{s,s'}^{(2)} = P(x_{k+2} = s' | x_k = s)$$

Se immaginiamo di rappresentare  $p_{s,s'}$  come una matrice,  $p^{(2)}$  è il prodotto riga colonna della matrice per se stessa:

$$p_{s,s'}^{(2)} = (\Pi^2)_{s,s'}$$

Generalizzando:

$$P(x_{k+n} = s' | x_k = s) = (\Pi^n)_{s,s'}$$

Quindi mi basta moltiplicare la matrice  $n$  volte e il risultato corrisponderà all'elemento corrispondente alla riga  $s$  e alla colonna  $s'$ .

**Esempio 1** Vediamo un esempio di matrice. Supponiamo di avere due stati; la matrice avrà dimensione  $2 \times 2$ ; la somma degli elementi sulla matrice deve dare 1:

$$\begin{aligned}
 & S = 0, 1 \\
 & 0 < p < 1
 \end{aligned}
 \quad
 \Pi = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

$p$  è la probabilità di passare dallo stato 0 allo stato 0;  $1-p$  è la probabilità di passare dallo stato 0 allo stato 1.

Possiamo finalmente calcolare le probabilità di passare da uno stato all'altro in  $n$  passi:

$$\begin{aligned}
 p_{0,0}^{(n)} \quad \quad \quad \Pi^{n+1} &= \Pi^n \Pi \\
 p_{0,0}^{(n+1)} &= p_{0,0}^{(n)} p + p_{0,1}^{(n)} (1-p) \\
 &= p_{0,0}^{(n)} p + (1 - p_{0,0}^{(n)}) (1-p) \\
 p_{0,0}^{(n+1)} &= p_{0,0}^{(n)} (p - 1 - q) + (1 - q) \\
 p_{0,0}^{(2)} &= p(p + q - 1) + (1 - q)
 \end{aligned}$$

Il calcolo è lasciato per esercizio (è una somma geometrica nota,  $p_{0,1}^{(n)} = 1 - p_{0,0}^{(n)}$ )

**Esempio 2** Consideriamo una passeggiata aleatoria nel caso generale (non simmetrico). Sia  $0 < p < 1$  la probabilità di fare un passo a destra.

$$\begin{aligned}
 S = Z \quad \quad u_0 = 1, u_s = 0 \\
 \text{per } s \neq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{s,s+1} &= p & p_{s,s-1} &= 1-p \\
 p_{s,s'} &= 0 & s' &\neq s+1, s-1
 \end{aligned}$$

Esempio:

$$p_{s,s}^{(2)} = p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p)$$

Ci sono solo 2 possibilità: faccio prima un passo a sinistra e poi a destra, oppure il contrario.

$$p_{s,s+2}^{(2)} = p^2$$

$$p_{s,s-2}^{(2)} = (1-p)^2$$

$$p_{s,s'}^{(2)} = 0 \quad \text{per } s \neq s', s+2, s-2$$

Anziché considerare la passeggiata aleatoria su  $\mathbb{Z}$ , posso considerare un intervallo finito  $[a, b] \subset \mathbb{Z}$ ; devo però definire cosa succede agli estremi dell'intervallo.

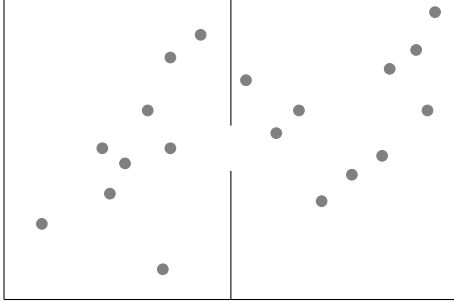
**Condizioni periodiche:** danno un senso orario o antiorario. Se sono in  $a$  e faccio un passo a sinistra, vado in  $b$ :

$$a < s < b, \quad p_{s,s+1} = p, \quad p_{s,s-1} = 1-p$$

$$\begin{aligned}
 p_{a,b} &= 1-p & p_{a,a+1} &= p \\
 p_{b,a} &= p & p_{b,b-1} &= 1-p
 \end{aligned}$$

### 3.1.2 Modello di Ehrenfest

Descrive la componente di un gas. Supponiamo di avere  $n$  particelle; gli stati saranno  $S = \{0, 1, \dots, N\}$ .



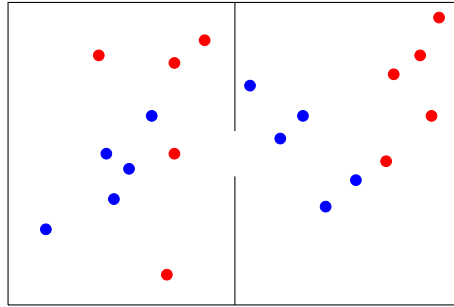
Le probabilità che una particella vada a destra o a sinistra sono rispettivamente:

$$p_{s,s+1} = \frac{N-s}{N}$$

$$p_{s,s-1} = \frac{s}{N}$$

### 3.1.3 Modello di Bernoulli-Laplace

Descrive l'evoluzione di un gas; in questo caso abbiamo 2 gas diversi, A e B, ed  $N$  particelle del gas A e altrettante del gas B.



Supponiamo che in ogni istante sia scelta a caso una particella nel contenitore sinistro, una a caso nel contenitore destro e vengano scambiate.

Lo stato  $S = \{0, 1, \dots, N\}$  rappresenta il numero di palline di gas A a sinistra.

$p_{s,s}$  è la probabilità che ci siano  $s$  particelle A a sinistra e che dopo lo scambio questo valore rimanga invariato; questo può capitare se scambiamo una particella di A a sinistra con un'altra particella, sempre di A, a destra (oppure se scegliamo due particelle di tipo B).

$$p_{s,s} = \frac{s}{N} \cdot \frac{N-s}{N} + \frac{N-s}{N} \cdot \frac{s}{N} \quad p_{s,s+1} = \frac{N-s}{N} \cdot \frac{N-s}{N} \quad p_{s,s-1} = \frac{s}{N} \cdot \frac{s}{N} = \frac{s^2}{N^2}$$

## 3.2 Classificazione degli stati

Due stati  $s$  e  $s'$  si dicono **comunicanti** quando  $s$  comunica con  $s'$ , ovvero la probabilità di andare da  $s$  a  $s'$  è positiva:

$$p_{s,s'}^n > 0, \quad n \geq 0$$

$$p_{s,s'}^0 = 0, \text{ con } s' \neq s$$

Uno stato comunica con sè stesso.

**Definizione** (più precisa) Uno stato  $s$  comunica con uno stato  $s'$  se esiste  $n$  tale che la successione da  $s$  a  $s'$  in  $n$  passi  $s_0 = s, s_1, \dots, s_{n-1}, s' = s_n$  è sempre positiva, ovvero tale che  $p_{s_0,s_1} > 0, \dots, p_{s_{n-1},s_n} > 0$ .

**Proprietà** Siano  $s$  e  $s'$  due stati comunicanti:  $s \prec s'$

Se  $s \prec s'$  e  $s' \prec s''$ , allora  $s \prec s''$

In generale, se ho due cammini:

$$s, s_1, \dots, s_{n-1}, s'$$

$$s', \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_{m-1}, s''$$

Allora possiamo metterli insieme e fare un cammino che colleghi  $s, s''$ .

Partendo dalla nozione di comunicazione possiamo definire una **relazione di equivalenza**. Nota: la comunicazione non è simmetrica.

$$s \simeq s' \text{ se } s \prec s' \text{ e } s' \prec s$$

$s \prec s$  perché lo stato comunica sempre con sè stesso.

Proprietà transitiva: se  $s \simeq s'$  e  $s' \simeq s''$ , allora  $s \simeq s''$

Proprietà simmetrica:  $s \simeq s'$  e  $s' \simeq s$

Abbiamo una relazione di equivalenza, possiamo definire una classe di equivalenza:

$$[s] = \{s' | s' \simeq s\}$$

La nozione di comunicazione si può estendere alle classi di equivalenza:

$$[s] \prec [s'] \text{ se } s \prec s'$$

Una classe equivalente ad  $s$  si dice **massimale** se non comunica con un'altra classe di equivalenza.

Quando la catena di Markov arriva in uno stato che appartiene ad una classe massimale, rimane "bloccata" sempre dentro stati di quella classe.

Una catena di Markov si dice **irriducibile** se ha una sola classe di equivalenza, cioè  $S$  (spazio degli stati) è una classe di equivalenza. Se abbiamo una classe massimale, possiamo considerare una restrizione della catena di Markov: se le transizioni rimangono solo nella classe, possiamo ignorare gli altri stati.

cioè lo spazio degli eventi  $S$  è una sola classe di equivalenza.

Consideriamo la passeggiata aleatoria su  $[a, b] \subset \mathbb{Z}$  con condizioni assorbenti:

$$a < s < b \quad \begin{aligned} p_{s,s+1} &= p \\ p_{s,s-1} &= 1 - p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{a,a} &= 1 & p_{a,s} &= 0 \\ p_{b,b} &= 1 & p_{b,s} &= 0 \end{aligned}$$

Ovvero, se partiamo da uno stato interno lo spostamento è "normale", mentre se siamo in  $a$  o  $b$  rimaniamo sempre in quello stato (come ad esempio nella rovina dei giocatori).

**Esempio** Definiamo ora 3 classi di equivalenza:

$$c_1 = \{a\} \quad c_2 = \{a+1, \dots, b-1\} \quad c_3 = \{b\}, \quad c_2 \prec c_1, c_2 \prec c_3$$

$c_1$  e  $c_3$  sono massimali. In questo caso la catena di Markov non è irriducibile (il modello di Bernoulli-Laplace è un esempio di catena irriducibile).

**Periodo** Dato uno stato  $s \in S$ :

$$A_s^+ = \{n > 0 \mid p_{s,s}^{(n)} > 0\}$$

$$A_s^+ \neq 0$$

Se  $n_1 \in A_s^+$  e  $n_2 \in A_s^+$ , allora  $n_1 + n_2 \in A_s^+$  (ovvero la probabilità di andare dallo stato  $s$  allo stato  $s$  in  $n_1 + n_2$  passi è positiva).

Il **periodo** di  $s$  (con  $A_s^+ \neq 0$ ) è:

$$q = \text{MCD}(A_s^+)$$

In una **passeggiata aleatoria con condizioni periodiche**, immaginando gli stati disposti come un cerchio, possiamo fare un movimento in senso orario o antiorario (dallo stato  $b$  torniamo ad  $a$ ). Non è detto che tutti gli  $A^+$  siano divisibili per 2: il numero degli stati può essere dispari.

Se  $q = 1$ ,  $s$  si dice aperiodico.

**Osservazione** due stati equivalenti hanno lo stesso periodo.

Se  $s \simeq s'$ , allora  $s \prec s'$ ; infatti,

$$\exists n_1 : p_{s,s'}^{(n_1)} > 0$$

$$\exists n_2 : p_{s',s}^{(n_2)} > 0$$

Supponiamo  $q$  periodo di  $s$  e  $q'$  periodo di  $s'$ . Vogliamo mostrare che  $q = q'$

Osserviamo che  $n_1 + n_2$  è divisibile sia per  $q$ , sia per  $q'$ :

$$p_{s,s}^{(n_1+n_2)} > 0 \qquad p_{s',s'}^{(n_1+n_2)} > 0$$

Prendiamo un  $n \in A_s^+$ :

$$n + n_1 + n_2 \in A_s^+$$

$n + n_1 + n_2$  è divisibile per  $q' \Rightarrow n$  è divisibile per  $q'$ .

Viceversa, preso  $n' \in A_{s'}^+$ ,  $n'$  è divisibile per  $q$ .

Quindi  $q$  e  $q'$  sono divisore comune di  $A_s^+$ , quindi siccome  $q$  è il massimo comune divisore, allora  $q'$  dev'essere multiplo di  $q$  e viceversa; allora  $q$  e  $q'$  devono necessariamente essere uguali.

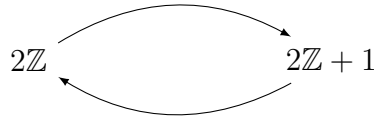
Il periodo è una caratteristica delle classi di equivalenza.

Supponiamo di avere una passeggiata aleatoria su  $\mathbb{Z}$  (che è una catena di Markov irriducibile). Il periodo di ogni stato è 2:

$$\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} \dot{\cup} 2\mathbb{Z} + 1$$

(dove  $\dot{\cup}$  è l'unione disgiunta).

La passeggiata aleatoria passa da un elemento di  $2\mathbb{Z}$  ad un elemento di  $2\mathbb{Z} + 1$ :



In generale, una classe di equivalenza  $C$  con periodo  $q > 1$  può essere suddivisa in  $q$  sottoinsiemi:

$$C = C_0 \dot{\cup} C_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} C_{q-1}$$

$$C_0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow C_{q-2} \longrightarrow C_{q-1}$$

E la catena di Markov percorre in maniera ciclica le classi.



### 3.2.1 Ricorrenza

Vediamo ora un altro tipo di classificazione, detto appunto **ricorrenza**: questa è la proprietà di uno stato di ritornare (infinite) volte nella catena di Markov.

Definiamo, dati due stati  $s$  e  $s'$  e dato  $n > 0$ :

$$f_{s,s'}^{(n)} = P(x_n = s', x_{n-1} \neq s', \dots, 0 \neq s' | x_0 = s)$$

Questa è la probabilità di passare da  $s$  a  $s'$  per la prima volta in un tempo  $n$ .

Osserviamo che se consideriamo questi eventi per un dato  $n$  e per un  $n' \neq n$ , questi eventi sono incompatibili: se partendo da  $s$  arriviamo per la prima volta a  $s'$  in un tempo  $n$ , ovviamente è impossibile che succeda la stessa cosa per un tempo  $n' \neq n$ . In particolare, se facciamo la somma di queste probabilità, troveremo che questa è pari alla probabilità di uno di questi eventi:

$$\sum_n f_{s,s'}^{(n)} = f_{s,s'}$$

è appunto la probabilità che si verifichi uno di quegli eventi, o in altre parole che arriveremo in uno stato  $s'$  partendo da uno stato  $s$  in un certo tempo.

Consideriamo il caso  $s' = s$ ; in questo caso scriveremo per semplicità  $f_{s,s} = f_s$  e indica la probabilità di tornare, nel futuro, a  $s$ .

$s$  è uno stato **ricorrente** se  $f_s = 1$  (torniamo almeno una volta - in realtà infinite);

$s$  è uno stato **transiente** se  $f_s < 1$ .

La probabilità di tornare infinite volte in uno stato ricorrente è 1. La probabilità di tornare almeno 2 volte in uno transiente è  $f_s^2$ ; la probabilità di tornare almeno  $n$  volte è  $f_s^n$ .

Negli stati transienti, la probabilità di tornare infinite volte invece è 0. La catena di Markov passa per gli stati transienti con probabilità 1 un numero finito di volte.

**Esempio: passeggiata aleatoria simmetrica** La probabilità di tornare a 0 dopo  $2n$  passi, oppure la probabilità che la passeggiata sia diversa da 0 per  $2n$  passi si indica con la stessa quantità:

$$P(x_{2n} \neq 0, x_{2n-1} \neq 0, \dots, x_1 \neq 0 | x_0 = 0) = u_{2n} = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}$$

$$u_{2n} \stackrel{\text{per Stirling}}{\simeq} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

0 quindi è uno stato ricorrente per la passeggiata aleatoria simmetrica.

Ad esempio, se consideriamo i soliti due giocatori che usano una moneta simmetrica, la probabilità che il guadagno non arrivi mai al pareggio è pari a 0.

### 3.2.2 Verificare se uno stato è transiente o ricorrente

C'è una proprietà che semplifica il verificare se uno stato è transiente o ricorrente:

$s$  è ricorrente se e solo se:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{s,s}^n = \infty$$

$s$  è transiente se e solo se:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{s,s}^n < \infty \quad (\text{la serie è convergente})$$

**Esempio** Applichiamo il metodo appena esposto considerando per esempio una passeggiata aleatoria su  $\mathbb{Z}$ .

$$p = \frac{1}{2} \quad p_{0,0}^{(2n)} = u_{2n} = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{0,0}^{(n)} = +\infty$$

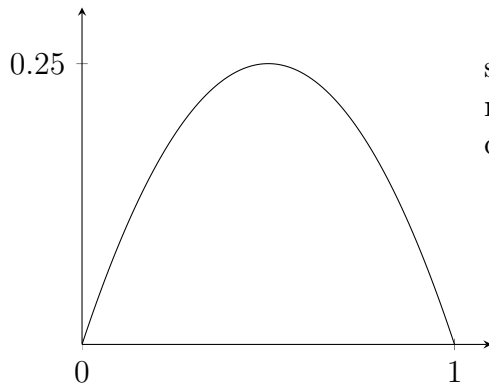
Dobbiamo considerare la serie  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  che è divergente per  $n \geq \frac{1}{2}$  e converge per  $n < \frac{1}{2}$ . In questo caso è divergente.

$$\begin{aligned} p \neq \frac{1}{2} \quad p_{0,0}^{(2n)} &= \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n = \underbrace{\binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}}_{= u_{2n} \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi n}}} \cdot \underbrace{2^{2n} p^n (1-p)^n}_{= 4p(1-p)^n} \\ &= u_{2n} \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \end{aligned}$$

Consideriamo la funzione  $p(1-p)$ :

$$\frac{\partial}{\partial p} p(1-p) = 1-p-p = 1-2p$$

È positiva per  $p < \frac{1}{2}$  e negativa per  $p > \frac{1}{2}$ .



Questa quantità:  $(4p(1-p))^n$  è sempre minore di 1. È una serie geometrica convergente; allora, in questo caso lo stato 0 è transiente.

Quindi nel caso di passeggiata aleatoria non simmetrica i due giocatori andranno in pareggio solo un numero finito di volte.

Verifichiamo ora che la seconda proprietà, quella che ci permette di determinare se uno stato è transiente, sia equivalente alla prima. Introduciamo la **funzione generatrice**. È uno strumento che si usa in molti casi, quando abbiamo una successione.

$$\begin{aligned}
 & f_{s,s}^{(0)} \\
 U(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{s,s}^{(n)} z^n \\
 & |z| < 1 \\
 F(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{s,s}^{(n)} z^n
 \end{aligned}$$

Osserviamo che  $U(z) = 1 + F(z) \cdot U(z)$ . Si vede dall'equazione del rinnovamento.

La probabilità di tornare a  $s$  dopo  $n$  passi è:

$$p_{s,s}^{(n)} = \sum_{k=1}^n f_{s,s}^{(k)} p_{s,s}^{(n-k)} \quad \text{con } n \geq 1$$

C'è quindi una prima volta dove arriviamo a  $s$  ( $f_{s,s}^{(k)}$ ) e poi ci torniamo una seconda volta (al tempo  $n - k$ ).

Per Markov è come se la catena ripartisse dall'inizio.

$$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{s,s}^{(n)} z^n$$

Per  $n = 0, p_{s,s}^0 = 1$  quindi

$$U(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^n f_{s,s}^{(k)} p_{s,s}^{(n-k)} \right) z^n$$

Introduciamo  $m = n - k \Rightarrow n = m + k$

$$\begin{aligned} U(z) &= 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} f_{s,s}^{(k)} p_{s,s}^{(m)} z^{m+k} \\ &\quad \parallel \\ &\quad z^m \cdot z^k \\ &= 1 + \left( \sum_{m=0}^{\infty} p_{s,s}^{(m)} z^m \right) \left( \sum_{k=1}^{\infty} f_{s,s}^{(k)} z^k \right) \\ &= 1 + F(z) \cdot U(z) \\ \lim_{z \uparrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} f_{s,s}^{(n)} z^n &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{s,s}^{(n)} = f_s \\ \lim_{z \uparrow 1} U(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{s,s}^{(n)} \\ U(z) &= \frac{1}{1 - F(z)} \end{aligned}$$

Nel caso del periodo abbiamo che due stati con la stessa classe di equivalenza hanno lo stesso periodo. Anche la ricorrenza/transienza hanno la stessa proprietà (ovvero, due classi di equivalenza hanno la stessa ricorrenza/transienza).

**Lemma** Dato uno stato  $s$  ricorrente, se  $s \prec s'$  allora  $s' \prec s$ .

Supponiamo per assurdo  $s' \not\prec s$ .

$$\exists n_1 : p_{s,s'}^{(n_1)} > 0.$$

Quindi posso tornare un numero finito di volte su  $s$ . Ma se uno stato è ricorrente, posso tornare infinite volte in uno stato. ASSURDO Quindi  $s' \approx s$

**Lemma** Se  $s \approx s'$  e  $s$  è ricorrente, allora  $s'$  è ricorrente.

Questo lemma ci dice che una classe di equivalenza ha tutti stati ricorrenti, oppure tutti stati transienti.

Supponiamo  $s$  ricorrente; supponiamo  $s \approx s'$ . Quindi  $s \prec s'$  e  $s' \prec s$ .

$$\Rightarrow \exists n_1 : p_{s,s'}^{(n_1)} > 0 \wedge \exists n_2 : p_{s,s'}^{(n_2)} > 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{s',s'}^{(n)} \geq \sum_{n=n_1+n_2}^{\infty} p_{s',s'}^{(n)}$$

Se invece di partire da  $n = 0$  partiamo da  $n = n_1 + n_2$ , come facciamo ad andare da  $s'$  a  $s'$ ? Andiamo in  $n_2$  da  $s'$  a  $s$ , e in  $n - n_1 - n_2$  possiamo andare a  $s$ , e infine in  $n_1$  da  $s$  a  $s'$ :

$$\geq \sum_{n=n_1+n_2}^{\infty} p_{s',s}^{(n_2)} p_{s,s}^{(n-n_1-n_2)} p_{s,s'}^{(n_1)}$$

Sia  $k = n - n_1 - n_2$ :

$$= p_{s',s}^{n_2} p_{s,s'}^{(n_1)} \sum_{k=0}^{\infty} p_{s,s}^{(k)} = +\infty$$

$\Rightarrow s'$  è ricorrente.  $\square$

### 3.3 Teorema ergodico per catene di Markov

Questo risultato riguarda le catene di Markov con una sola classe di equivalenza con stati ricorrenti e aperiodica. Possiamo dimostrare il teorema ergodico per catene di Markov.

Formalmente,

$$\begin{array}{ll} s \in S & v_s = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{s,s}^{(n)} \text{ (attesa del tempo di ritorno)} \\ s \text{ ricorrente} & f_s = \sum_{n=1}^{\infty} f_{s,s}^{(n)} = 1 \end{array}$$

$$p_{s',s}^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{v_s}$$

$$\text{se } v_s = +\infty, \quad \frac{1}{v_s} = 0$$

Se  $v_s = +\infty$  allora non è necessario che sia aperiodica.

Questo teorema (che non dimostreremo) è interessante perché ci dice che quando abbiamo una sola classe di equivalenza aperiodica con gli stati ricorrenti, è come se la catena di Markov si dimenticasse del punto di partenza: quando faccio tendere  $n$  all'infinito, la probabilità di andare da uno stato qualunque a  $s$  tende ad un limite che non dipende dal punto di partenza.

Si può anche vedere che facendo andare avanti la catena di Markov e contando quante volte passa per  $s$ , la frequenza/percentuale di tempo tende a questo limite.

È come nel caso dello schema di Bernoulli; per la legge dei grandi numeri, se contiamo quante volte otteniamo il successo, questa quantità tende alla probabilità. La probabilità ha il significato di frequenza.

Anche nelle catene di Markov che sono dipendenti, nel caso ergodico la probabilità di andare da uno stato ad un altro tende ad un certo limite che è anche la frequenza con cui la catena di Markov passa per quello stato.

Questo valore è l'attesa del tempo di ritorno; c'è però un metodo più semplice per calcolarlo.

Supponiamo nel caso finito che uno stato sia ricorrente, ci sia una sola classe di di equivalenza (e quindi tutti gli stati sono ricorrenti) e aperiodici.

Sappiamo che  $p_{s',s}^{(n)} \rightarrow v_s^{-1} = u_s$ .

Osservazione:  $p_{s',s}^{(n+1)} = \sum_{s''} p_{s',s''}^{(n)} p_{s'',s}$

$$u_s = \sum_{s''} u_{s''} p_{s'',s} \quad \sum_{s \in S} u_s = 1$$

$u_s$  è una distribuzione di probabilità sugli stati;

$$\sum_{s \in S} p_{s'',s}^{(n)} = 1 \quad \forall s \in S$$

$$u_s = \sum_{s''} u_{s''} p_{s'',s}$$

Ho un sistema di equazioni lineari: abbiamo  $k$  incognite (gli stati) e  $k + 1$  equazioni. Ma le equazioni  $\sum_{s''} p_{s'',s} \forall s \in S$  non sono linearmente indipendenti, quindi ne posso prendere solo una. Il mio sistema diventa:

$$\begin{cases} \sum u_s = 1 \\ u_s = \sum_{s''} u_{s''} p_{s'',s} \forall s \in S \end{cases}$$

Supponiamo ora:

$$\sum_{s \in S} v_s = 1 \quad v_s = \sum_{s''} v_{s''} p_{s'',s}$$

Con  $S$  finito. C'è un'unica soluzione:

$$v_s = \sum_{s''} v_{s''} p_{s'',s}^{(n)}$$

Faccio tendere  $n$  all'infinito:

$$= \sum_{s''} v_{s''} u_s = u_s$$

Nell'equazione  $\sum_{s''} v_{s''} u_s$  posso portare fuori  $u_s$  perché non dipende dalla sommatoria; ma la sommatoria è uguale a 1, quindi ottengo proprio  $u_s$ .

---

Ripetiamo l'enunciato del teorema ergodico per le catene di Markov: supponiamo di avere una catena di Markov con spazio degli stati  $S$ , con una sola classe di equivalenza e stati ricorrenti. La proprietà di ricorrenza sappiamo valere per tutti gli elementi di una classe di equivalenza. Siano inoltre gli stati aperiodici (e anche questa è una proprietà che vale per tutti gli stati di una classe di equivalenza).

Dato uno stato  $s$ , definiamo:

$$\mu_s = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_s^{(n)}$$

Come interpretiamo  $\mu_s$ ? Siccome gli stati sono ricorrenti, sappiamo che partendo da uno stato, ci ritorniamo con probabilità 1; possiamo allora considerare il tempo di ritorno come una variabile aleatoria detta, appunto, *tempo di ritorno*.  $\mu_s$  è l'attesa del tempo di ritorno.

Allora

$$p_{s,s'}^{(n)} \rightarrow \frac{1}{\mu_s}$$

Questa quantità è uguale a 0 se  $\mu = +\infty$ . Se  $\mu = +\infty$ , non è necessaria aperiodicità.

Nel caso  $S$  finito, detto  $u_s = \frac{1}{\mu_s}$

$$\sum_{s \in S} u_s = 1$$

e

$$\forall s' \quad \sum_s u_s p_{s,s'} = u_{s'}$$

Queste relazioni ci dicono che  $u_s$  è una distribuzione invariante o stazionaria, ovvero se  $u_s$  soddisfa le due equazioni e mettiamo  $u_s$  come distribuzione iniziale in una catena di Markov, vediamo che nei tempi successivi rimane invariante (ovvero la distribuzione rimane  $u_s$ ). Se  $u_s$  è la distribuzione iniziale, da  $\sum_s u_s p_{s,s'} = u_{s'}$  segue che  $u_s$  è anche la distribuzione al tempo 1. Ripetendo questo ragionamento si può vedere che vale anche al tempo 2, 3, etc. È anche stazionaria perché non cambia nel tempo.

Vogliamo verificare se la proprietà sia vera anche nel caso  $S$  infinito.

Dato  $\bar{s} \in S$ ,

$$p_{\bar{s},s'}^{(n+1)} = \sum_{s \in S} p_{\bar{s},s}^{(n)} p_{s,s'}$$

Questa è una serie, dobbiamo passare al limite. Nel caso infinito però non è sempre vero che il limite della serie è uguale alla serie dei limiti. Consideriamo  $\bar{S} \subset S$  finito anziché  $S$ :

$$\begin{aligned} p_{\bar{s},s'}^{(n+1)} &\geq \sum_{s \in \bar{S}} p_{\bar{s},s}^{(n)} p_{s,s'} && \text{per il teorema ergodico} \\ u_{s'} &\geq \sum_{s \in \bar{S}} u_s p_{s,s'} \\ \text{se } \bar{S} \rightarrow S, \quad u_{s'} &\geq \sum_{s \in S} u_s p_{s,s'} \quad (\text{I}) \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato una disuguaglianza. Definiamo

$$0 < \alpha = \sum_{s \in S} u_s \leq 1 \quad (\text{II})$$

$\alpha > 0$  perché gli  $u_s > 0$ , ma  $\alpha \leq 1$  perché  $\sum_{s' \in S} p_{s,s'}^{(n)} = 1$

Dobbiamo dimostrare che in (I) c'è uguaglianza, e in (II) che la somma è pari a 1.

Supponiamo per assurdo che non ci sia uguaglianza in (I) per un particolare stato  $\bar{s}'$ :

$$u_{\bar{s}'} > \sum_{s \in S} u_s p_{s,\bar{s}'}$$

Allora quando sommiamo tutti gli stati, avremo la disuguaglianza stretta:

$$\begin{aligned} \sum_{s'} u_{s'} &> \sum_{s'} \sum_s u_s p_{s,s'} \\ \alpha &= \sum_{s'} u_{s'} > \sum_{s'} \sum_s u_s p_{s,s'} \\ \alpha &> \alpha \quad \text{ASSURDO} \end{aligned}$$

Quindi anche nel caso infinito,  $u_s$  è una distribuzione di probabilità, cioè la somma è pari a 1:



$$u_{s'} = \sum_s u_s p_{s,s'}^{(2)}$$

$$u_{s'} = \sum_s u_s p_{s,s'}^{(n)}$$

Questo si ottiene mettendo la stessa relazione  $u'_s$  al posto di  $u_s$ , e otteniamo  $p_{s,s'}^{(2)}$ ; ripetendo otteniamo  $p_{s,s'}^{(n)}$ .

Per  $n \rightarrow \infty$ ,  $u_{s'} = \sum_s u_s u_{s'}$

$$u_{s'} = \alpha u_{s'} \quad u_{s'} > 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 1 \quad \square$$

Quindi anche nel caso infinito,  $u_s$  è la distribuzione invariante della catena di Markov.

Abbiamo ipotizzato finora l'attesa di ritorno  $\mu_s < +\infty$  (cioè  $\mu_s$  finito).

Nel caso  $\mu_s = +\infty$ , allora  $p_{s,s'} \rightarrow 0$ . Lo abbiamo visto nel caso aperiodico, ma questa proprietà è vera anche nel caso generale. Questo ci porta a fare una classificazione degli stati ricorrenti in 2 categorie:

$$\text{supponiamo } s \text{ ricorrente: } \begin{cases} \mu_s < +\infty, & s \text{ ricorrente positivo} \\ \mu_s = +\infty, & s \text{ ricorrente nullo} \end{cases}$$

Nel primo caso quindi l'attesa del tempo di ritorno è finita, nel secondo infinita.

Supponiamo di avere una classe di equivalenza  $S$  irriducibile, aperiodica e ricorrente. Vogliamo mostrare che non è possibile che ci sia uno stato ricorrente positivo e uno stato ricorrente nullo. Supponendo quindi che  $s_1$  sia positivo, vogliamo mostrare che  $s_2$  non può essere ricorrente nullo.

Dato un  $s$ ,

$$p_{s,s_1}^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u_{s_1} > 0$$

per teorema ergodico

$$\exists n_1 : p_{s_1,s_2}^{(n_1)} > 0 \quad \text{perché } s_1, s_2 \in S$$

$$\text{Ma } p_{s,s_2}^{(n)} > p_{s,s_1}^{(n-n_1)} p_{s_1,s_2}^{(n_1)}$$

$p_{s_1,s_2}^{(n)}$  non tende a 0 (per  $n \rightarrow \infty$ )

$$\Rightarrow s_2 \text{ è ricorrente positivo} \quad \square$$

Se  $s_2$  fosse stato ricorrente nullo, quella quantità avrebbe teso a 0.

Una conseguenza è che se  $S$  è finito, non ci sono stati ricorrenti nulli, perché abbiamo che  $\sum_{s' \in S} p_{s,s'}^{(n)} = 1$ .

Essendo  $S$  finito, possiamo passare al limite della somma. Se gli stati fossero ricorrenti nulli, il limite tenderebbe a 0, e siccome è una somma finita, anche la somma tenderebbe a 0. Ma la sommatoria è pari a 1, quindi dev'esserci almeno uno stato ricorrente positivo. E abbiamo appena visto che se abbiamo una sola classe di equivalenza e uno stato è ricorrente positivo, allora sono tutti ricorrenti positivi - anche se la dimostrazione appena vista funziona solo nel caso aperiodico.

Quindi in una tale catena di Markov (sola classe di equivalenza, irriducibile, stati ricorrenti positivi, aperiodica) abbiamo una distribuzione invariante, e le probabilità tendono a  $u_s$ : ma come si fa a calcolare questo limite? La cosa più semplice è provare a risolvere il sistema d'equazioni.

Vediamo il caso più semplice di catena di Markov con spazio degli stati finiti, che è una catena di Markov con due stati:  $S = \{0, 1\}$ . La matrice di transizione è:

$$\Pi = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 0 < p < 1 \\ 0 < q < 1 \end{matrix}$$

$$1. \quad u_0 + u_1 = 1 \quad (\text{perché è una distribuzione di probabilità})$$

$$2. \quad u_0 \cdot p + u_1 \cdot (1-q) = u_0$$

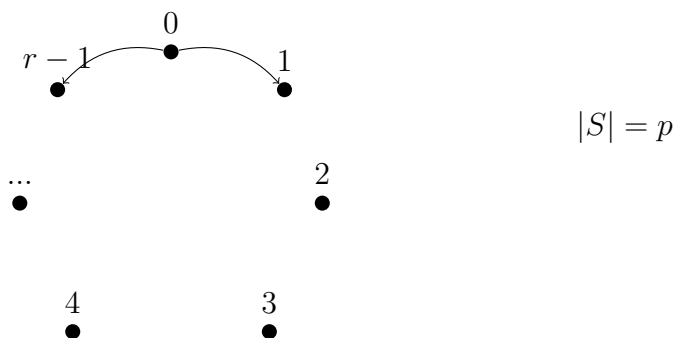
$$3. \quad u_1 \cdot q + u_0 \cdot (1-p) = u_1$$

2. e 3. sono uguali, possiamo usare 1. e 2.

$$\begin{cases} u_0 = u_1 \left( \frac{1-q}{1-p} \right) \\ u_1 \frac{1-q}{1-p} + u_1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 \frac{(1-q) + (1-p)}{1-p} = 1 \\ u_0 = u_1 \left( \frac{1-q}{1-p} \right) \end{cases} \quad \begin{cases} u_0 = \frac{1-q}{2-p-q} \\ u_1 = \frac{1-p}{2-p-q} \end{cases}$$

Possiamo rappresentare la passeggiata aleatoria con un cerchio:



Se  $r$  è dispari, la catena è aperiodica.

$$\begin{aligned}
 u_0 + u_1 + \dots + u_{r-1} &= 1 \\
 1 \leq s &\leq r-2 \\
 u_s &= u_{s-1}p + u_{s+1}(1-p) \\
 u_0 &= u_{r-1}p + u_1(1-p) \\
 u_{r-1} &= u_{r-2}p + u_0(1-p)
 \end{aligned}$$

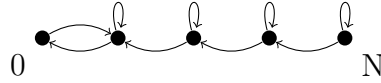
Abbiamo  $r + 1$  equazioni e  $r$  incognite. Possiamo però intuitivamente provare a vedere quale sarà la distribuzione invariante anche senza risolvere le equazioni: immaginiamo di fare andare avanti la passeggiata aleatoria per molto tempo, è naturale pensare che alla fine la distribuzione sia uniforme: se giriamo tanto a caso, la probabilità di trovarci in un qualsiasi punto sia uguale. Ipotizziamo quindi che  $u_s = \frac{1}{r}$ . Sostituendolo nelle equazioni, in effetti vengono risolte.

Questa è in realtà una distribuzione invariante anche nel caso pari, ma nel caso pari non è aperiodico, quindi non è vero che la distribuzione tende alla distribuzione uguale per tutti gli stati: se noi partiamo da 0, per tornare a 0, sia che facciamo lo stesso numero di passi orari e antiorari, oppure facciamo un certo numero di giri attorno, il tempo che impieghiamo è sempre pari, e quindi la probabilità di tornare a 0 dopo un tempo dispari è 0.

Altri modelli che abbiamo visto sono i modelli di estrazione dall'urna: abbiamo visto il modello di Ehrenfest e di Laplace-Bernoulli. In entrambi i modelli abbiamo due urne. Nel primo scegliamo a caso una pallina e la spostiamo da un'urna all'altra; nel secondo, abbiamo  $n$  palline bianche e  $n$  palline nere. Di queste  $2n$  palline, metà stanno nell'urna A e metà nell'urna B. Possiamo prendere come stato il numero delle palline bianche in A. Quello che osserviamo è che il modello di Ehrenfest non è aperiodico: come nel caso della passeggiata aleatoria ha periodo 2.

Rappresentiamo gli stati come punti, mettendo una freccia per indicare le transizioni possibili. Il numero delle palline nell'urna A può aumentare o diminuire, ovvero possiamo fare un passo a destra o un passo a sinistra. Possiamo tornare solo nei tempi pari (per tornare allo stato 0, dobbiamo fare lo stesso numero di passi a destra o sinistra), e quindi in questo caso - siccome il periodo è 2 - non possiamo applicare direttamente il teorema ergodico.

Nel modello di Laplace-Bernoulli il numero di palline bianche può anche rimanere invariato:



se scambiamo 2 palline bianche tra le urne A e B, il numero delle palline bianche in A è invariato. Se la probabilità di rimanere nello stato è positiva, allora il periodo deve essere 1 e possiamo usare il teorema ergodico. Intuitivamente, comunque, possiamo affermare che

$$u_s < \frac{\binom{N}{s} \binom{N}{N-s}}{\binom{2N}{N}}$$

e questa disuguaglianza dovrà soddisfare le equazioni.

**Teorema** Quando abbiamo uno spazio degli stati infinito, come facciamo a vedere se gli stati sono ricorrenti positivi, nulli, transienti...? Supponiamo S infinito, una sola classe di equivalenza aperiodica irriducibile. Supponiamo ci sia una distribuzione invariante  $u_s$ , con  $0 \leq u_s \leq 1$ :

$$\sum_s u_s = 1 \quad \forall s', u_{s'} = \sum_s u_s p_{s,s'}$$

Allora gli stati sono ricorrenti positivi.

Dobbiamo far vedere che non sono ricorrenti nulli o transienti. Supponiamo per assurdo siano transienti.

La proprietà equivalente a essere transienti è la seguente:

$$\sum_n p_{s,s}^{(n)} < +\infty$$

Questo implica in particolare che anche la probabilità di andare da uno stato qualunque, es. da  $s'$  a  $s$  con  $s' \neq s$  tende a 0:

$$p_{s,s'} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Possiamo scrivere l'equazione del rinnovamento; questa equazione deve tendere a 0::

$$f_{s',s}^{(k)} = \sum_{k=1}^n p_{s',s}^{(k)} p_{s,s}^{(n-k)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Si può dividere in due parti:

$$= \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} + \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n$$

Si vede che non è possibile che esista una distribuzione invariante: se  $u_s$  è una distribuzione invariante, allora

$$u_s = \sum_{s'} u_{s'} p_{s',s}$$

Ma questa si può iterare:

$$= \sum_{s'} u_{s'} p_{s',s}^{(n)}$$

Se noi facciamo tendere  $n$  all'infinito, se  $s$  fosse uno stato transiente, la probabilità tenderebbe a 0; di conseguenza  $u_s = 0$ , e quindi  $u_s$  non sarebbe una distribuzione di probabilità.

Se gli stati fossero ricorrenti nulli, dal teorema ergodico abbiamo che  $p_{s',s}^{(n)} \rightarrow 1$ . Potremo usare lo stesso argomento.

Quindi gli stati non possono essere né transienti né ricorrenti nulli: devono essere ricorrenti positivi. Se esiste una distribuzione invariante, gli stati devono essere necessariamente ricorrenti positivi.

## 3.4 Modello di coda

In questo modello abbiamo dei clienti, che arrivano e vanno dagli sportelli dove vengono serviti. Il tempo che passano agli sportelli è aleatorio. Supponiamo che il tempo sia discreto.

Uno sportello può contenere un cliente, gli altri clienti sono in coda.

Definiamo  $p$  la **probabilità di arrivo di un cliente**, mentre  $q$  la probabilità di **fine del servizio**,  $0 \leq p \leq 1$  e  $0 \leq q \leq 1$ . Gli arrivi dei clienti e la fine del servizio sono indipendenti.

Questo è descritto da una catena di Markov in cui lo spazio degli stati è  $\mathbb{N}$ :  $S = \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ , e ha una sola classe di equivalenza di periodo 1.

Ci chiediamo ora qual è la probabilità, partendo da 0, di rimanere nello stato 0 (ovvero che non ci sia nessun cliente e che non arrivi nessun cliente), e altre probabilità, con  $S = \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} p_{0,0} &= 1 - p & p_{1,1} &= p \cdot q + (1 - p)(1 - q) & p_{1,2} &= p(1 - q) \\ p_{0,1} &= p & p_{1,0} &= (1 - p)q \end{aligned}$$

$p_{1,1}$  indica la probabilità che, dopo aver finito di servire un cliente ne arrivi uno nuovo; oppure di non finire di servire un cliente, e che non arrivi nessun nuovo cliente.

In generale, per  $s \geq 1$ :

$$\begin{aligned} p_{s,s} &= p \cdot q + (1 - p)(1 - q) & &= r \\ p_{s,s+1} &= p(1 - q) & &= d \\ p_{s,s-1} &= q(1 - p) & &= l \end{aligned}$$

Questa passeggiata è ricorrente positiva? Se esiste una distribuzione invariante sì, se non esiste o gli stati sono ricorrenti nulli oppure transienti.

Vogliamo quindi vedere se gli stati sono ricorrenti o transienti, e nel primo caso se sono ricorrenti positivi o ricorrenti nulli.

Vogliamo scrivere le equazioni per la distribuzione invariante. Definiamo  $u_i$  la distribuzione invariante, con  $i \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} u_i &= 1 \\ u_0 &= u_0(1 - p) + u_1 l \\ u_1 &= u_0 p + u_1 r + u_2 l \\ u_s &= u_{s-1} d + u_s r + u_{s+1} l, & s \geq 2 \\ u_1 l &= u_0 p \\ u_1(1 - r - l) &= u_2 l \\ u_1 d &= u_2 l \end{aligned}$$

ripetendo questo argomento si vede che:

$$u_s d = u_{s+1} l$$

Mettiamo insieme le equazioni:

$$u_1 = u_0 \frac{p}{l} \quad u_2 = u_1 \frac{d}{l} \quad u_{s+1} = u_s \frac{d}{l}$$

Riscritte in termini di  $u_0$ :

$$u_2 = u_0 \frac{p}{l} \frac{d}{l} \quad u_s = u_0 \frac{p}{l} \left( \frac{d}{l} \right)^{s-1}$$

Sapendo che  $\sum_{i=0}^{\infty} u_i = 1$ :

$$u_0 \left( 1 + \frac{p}{l} + \frac{p}{l} \frac{d}{l} + \frac{p}{l} \left( \frac{d}{l} \right)^2 + \dots \right) = 1$$

L'equazione è possibile solo se questa serie:

$$u_0 \left( 1 + \frac{p}{l} \left( \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{d}{l} \right)^j \right) \right)$$

è convergente; ma questa è una serie geometrica, ed è convergente per  $\frac{d}{l} < 1$ .

Andiamo a ricordare che cos'era  $d$ :

$$d = p(1 - q) \quad l = q(1 - p)$$

$$\frac{d}{l} < 1 \Rightarrow d < l \tag{3.1}$$

$$\Rightarrow p(1 - q) < q(1 - p) \Rightarrow \frac{p}{1 - p} < \frac{q}{1 - q} \tag{3.2}$$

Consideriamo ora la funzione  $\frac{x}{1-x}$ ; è una funzione strettamente crescente, quindi l'ultima disequazione scritta sopra è equivalente a

$$p < q$$

Quindi la conclusione perché esista la distribuzione invariante è proprio  $p < q$ . Se esiste la distribuzione invariante, gli stati sono **ricorrenti positivi**.

Intuitivamente, essendo  $p$  è la probabilità di arrivo di un cliente e  $q$  la probabilità che un cliente vada via, se  $p < q$  l'afflusso dei clienti è minore della tendenza dei clienti a lasciare il sistema; questo fa sì che non si formi una coda lunga, perché il flusso degli arrivi è più piccolo del flusso delle partenze, e gli stati sono appunto ricorrenti positivi.

Rimane da vedere il caso  $p \geq q$ ; ci sono due possibilità: gli stati sono **ricorrenti nulli** oppure **transienti**.

Ci possiamo ricondurre al problema della rovina del giocatore: in quel caso è una passeggiata aleatoria in cui possiamo aumentare o diminuire di 1. Qui però c'è anche la possibilità di rimanere nello stesso stato all'istante successivo. Ma possiamo trascurare questi tempi e considerare solo quelli in cui c'è un cambiamento di stato per ricondurci al problema della rovina del giocatore. Partendo da uno stato, vogliamo calcolare la probabilità di

andare a destra o a sinistra nel caso non rimaniamo nello stesso stato. Nel caso  $s \geq 1$ , definiamo  $\bar{p}$  la probabilità di andare nello stato successivo se non rimaniamo nello stesso stato:

$$\bar{p} = \bar{p}_{s,s+1} = \frac{d}{1-r}$$

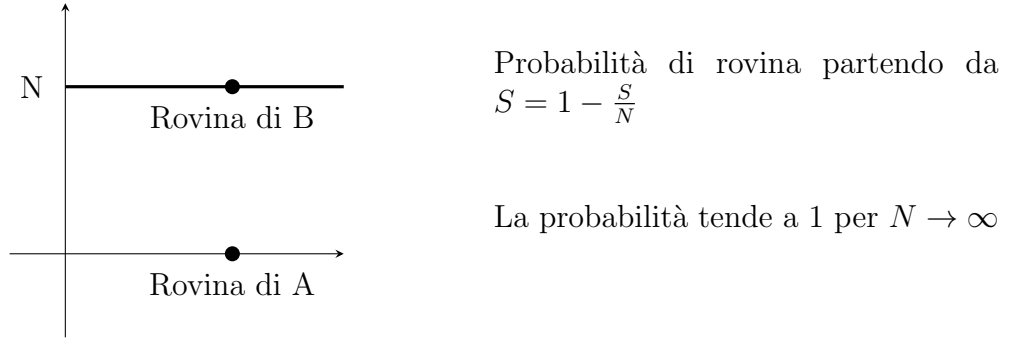
nel modello di coda questa probabilità è uguale a  $d$ , ma condizioniamo al fatto di non rimanere nello stesso stato. Analogamente:

$$1 - \bar{p} = \frac{l}{1-r} = \bar{p}_{s,s-1}$$

E nel caso dello zero:

$$\bar{p}_{0,1} = 1$$

Perché se partiamo dallo stato 0 e sappiamo che non rimaniamo nello stato, con probabilità 1 andiamo nello stato 1.



Quindi, se  $S = 1$ , siccome andremo a 0, dovremo per forza ripassar e per 1; gli stati sono ricorrenti. Inoltre sono ricorrenti nulli perché non c'è distribuzione di probabilità invariante.

L'interpretazione è che la coda è lunga, ma ogni tanto si svuota.

Abbiamo appena visto  $p < q$ . Un altro caso possibile è  $p = q$ ; in questo caso  $d = l$  e si ha che  $\bar{p} = \frac{1}{2}$ . Nel caso della rovina del giocatore, quando le due probabilità sono uguali, la rovina del primo giocatore si ha quando si torna allo stato 0; questo implica che lo stato 0 è ricorrente. Sappiamo già però che non può essere ricorrente positivo (lo è nel caso  $p < q$ ); gli stati allora devono essere necessariamente ricorrenti nulli.

Se  $p > q$ , è come la passeggiata asimmetrica:  $d = \frac{p}{1-p} > l = \frac{q}{1-q}$  e  $\bar{p} > \frac{1}{2}$ : la probabilità di andare a destra è maggiore della probabilità di andare a sinistra. C'è una probabilità positiva che il primo giocatore non si rovini,



quindi che non torni a 0. Quindi in questo caso gli stati sono transienti. L'interpretazione quindi è che lo sportello si può vuotare un numero finito di volte, prima di allungarsi e non riuscire più a svuotarsi.

### 3.5 Reversibilità

È una proprietà che possono possedere le catene di Markov.

Supponiamo di avere una catena irriducibile ergodica aperiodica. Sia  $S$  il suo spazio degli stati; abbiamo una distribuzione invariante  $u_s$ . Nella catena di Markov, la distribuzione di probabilità è  $X_0, X_1, X_2, \dots$

Se come distribuzione iniziale diamo  $u_s$ , ai tempi successivi la distribuzione di  $X_1, X_2, \dots$  è sempre uguale a  $u_s$ .

Possiamo pensare la catena di Markov, anziché su  $\mathbb{N}$ , sui numeri interi:

$$\dots, X_{-n}, X_{-n+1}, \dots, X_{-1}, X_0, X_1, X_2, \dots$$

Possiamo poi considerare un processo stocastico in cui scambiamo la direzione del tempo:  $Y_n = X_{-n}$ .

Quello che si vede è che anche  $Y_n$  è una catena di Markov.

Per vederlo, dobbiamo dimostrare che soddisfa le proprietà di Markov:

$$P(Y_{n+1} = s' | Y_n = s, Y_{n-1} = s_{n-1}, \dots, Y_0 = s_0)$$

Possiamo scriverlo usando la formula delle probabilità subordinate:

$$\begin{aligned} &= \frac{P(Y_{n+1} = s', Y_n = s, \dots, Y_0 = s_0)}{P(Y_n = s, Y_{n-1} = s_{n-1}, \dots, Y_0 = s_0)} \\ &= \frac{P(X_0 = s_0, X_{-1} = s_1, \dots, X_{-n} = s, X_{-n-1} = s')}{P(X_0 = s_0, X_{-1} = s_1, \dots, X_{-n} = s)} \\ &= \frac{u_{s'} p_{s',s} p_{s,s_n} \dots p_{s_1,s_0}}{u_s p_{s,s_n} \dots p_{s_1,s_0}} \\ &= \frac{u_{s'} p_{s',s}}{u_s} \quad \begin{array}{l} \text{Questa probabilità non dipende da tutti gli stati} \\ \text{precedenti, ma solo da quello immediatamente precedente} \end{array} \\ &= q_{s,s'} \end{aligned}$$

**Proprietà di reversibilità:** la catena di Markov si dice reversibile se  $p_{s,s'} = q_{s,s'}$ .

Quindi se guardiamo la catena all'indietro è la stessa originaria in senso contrario. Equivalentemente:

$$u_{s'} \cdot p_{s',s} = u_s \cdot q_{s,s'}$$

Vediamo una condizione per mostrare che una catena di Markov è reversibile; questa tecnica dà anche un metodo per calcolare la distribuzione invariante (nel caso sia reversibile).

Supponiamo  $s, s' \in S$ ; supponiamo, per ogni stato  $s$ :

$$\alpha_s > 0 : \sum_{s \in S} \alpha_s < +\infty, \quad \alpha_s p_{s,s'} = \alpha_{s'} p_{s',s}$$

allora  $u_s = \frac{\alpha_s}{\sum_{s'} \alpha_{s'}}$  è una distribuzione invariante e la catena è reversibile.

Dobbiamo far vedere anzitutto che è una distribuzione invariante; la condizione perché ciò avvenga è:

$$\sum_s u_s p_{s,s'} = u_{s'}$$

Sia  $k = \frac{1}{\sum_{s'} \alpha_{s'}}$ ;  $u_s = k \cdot \alpha_s$ .

$$\begin{aligned} \sum_s k \alpha_s p_{s,s'} &= \sum_s k \alpha_{s'} p_{s',s} \\ &= k \alpha_{s'} \\ &= u_{s'} \quad \square \end{aligned}$$

$p_{s',s}$  è una matrice di transizione, quindi la somma su  $s$  è 1.

Quindi questa è una distribuzione invariante, e la catena di Markov è reversibile:

$$\begin{aligned} u_s p_{s,s'} &= k \alpha_s p_{s,s'} \\ &= k \alpha_{s'} p_{s',s} \\ &= u_{s'} p_{s',s} \end{aligned}$$

Quindi un modo per vedere se la catena di Markov è reversibile, e inoltre per calcolare la distribuzione invariante, è cercare una successione di numeri che verifichino la proprietà

$$u_s = \frac{\alpha_s}{\sum_{s'} \alpha_{s'}}$$

**Esempio** Passeggiata aleatoria su intervallo  $[a, b] \subset \mathbb{Z}$  con condizioni simmetriche

$$\begin{aligned}
a+1 &\leq s \leq b-1 \\
p_{s,s+1} &= p & p_{s,s-1} &= 1-p \\
p_{a,a+1} &= p & p_{a,b} &= 1-p \\
p_{b,a} &= p & p_{b,b-1} &= 1-p
\end{aligned}$$

Vogliamo cercare dei numeri tali che:

$$\alpha_s p_{s,s'} = \alpha_{s'} p_{s',s},$$

Supponiamo  $s' = s+1$

$$\begin{aligned}
\alpha_s p &= \alpha_{s+1} (1-p) \\
\alpha_{s+1} &= \frac{p}{1-p} \alpha_s
\end{aligned}$$

Il numero degli stati è  $b-a+1$ ; se itero queste relazioni:

$$\alpha_a = \left( \frac{p}{1-p} \right)^{b-a+1} \alpha_a$$

Quindi  $\left( \frac{p}{1-p} \right)^{b-a+1}$  deve essere uguale a 1; ciò è vero solo se  $p = \frac{1}{2}$ .

Se  $p = \frac{1}{2}$ , allora  $\alpha_s = \alpha_a \forall s$

$$u_s = \frac{1}{b-a+1}$$

La catena è reversibile e ho trovato la distribuzione invariante.

Se  $p \neq \frac{1}{2}$ , la passeggiata andrebbe più in senso orario o antiorario.

Vediamo un criterio generale per la reversibilità. Supponiamo di avere una catena di Markov ergodica e aperiodica:

$$p_{s,s'}^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u_{s'} \quad \text{distribuzione invariante}$$

Allora la catena di Markov è reversibile se e solo se  $\forall s_0, \dots, s_n$ :

$$p_{s_0,s_1} \cdot p_{s_1,s_2} \cdot \dots \cdot p_{s_{n-1},s_n} \cdot p_{s_n,s_0} = p_{s_0,s_n} \cdot p_{s_n,s_{n-1}} \cdot \dots \cdot p_{s_1,s_0}$$

Supponiamo sia reversibile.

$$\begin{aligned}
p_{s,s'} &= \frac{p_{s',s}}{u_s} \cdot u_{s'} \\
&= p_{s_0,s_n} \cdot p_{s_n,s_{n-1}} \cdot \dots \cdot p_{s_1,s_0} \\
&= \left( \frac{p_{s',s}}{u_{s_1}} \cdot u_{s_0} \right) \cdot \left( \frac{p_{s_1,s_2}}{u_{s_2}} \cdot u_{s_1} \right) \cdot \dots
\end{aligned}$$

Gli  $u_{s_i}$  si semplificano. Questa è una condizione necessaria. Dobbiamo ora far vedere che è sufficiente.

Supponiamo che la relazione sia soddisfatta.

$$\begin{aligned}
 u_s p_{s,s'} &= \lim_{n \rightarrow \infty} p_{s,s'} p_{s',s}^{(n)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} p_{s,s'} \sum_{s_1, s_2, \dots, s_{n-1}} p_{s',s_1} p_{s_1,s_2} \cdots p_{s_{n-1},s} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s_1, s_2, \dots, s_{n-1}} p_{s,s_{n-1}} \cdots p_{s_1,s'} p_{s',s} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} p_{s,s'}^{(n)} p_{s',s} \stackrel{\text{per ergodicità}}{=} u_{s'} p_{s',s} \quad \square
 \end{aligned}$$

Un esempio di applicazione di questo è il seguente: supponiamo di avere una catena di Markov irriducibile su un intervallo finito e aperiodica tale che

$$p_{s,s'} = 0 \quad \text{se } |s' - s| \geq 2$$

Allora è reversibile.

Questa catena quindi non può fare dei salti maggiori o uguali a 2; può rimanere ferma, andare a destra oppure a sinistra.

Sappiamo che ci deve essere almeno uno stato ricorrente positivo, perché lo spazio degli stati è finito. Siccome la catena è irriducibile, allora tutti gli stati sono così.

Mostriamo che è reversibile:

$$s_1, \dots, s_{n-1}, s'$$

$$p_{s,s_1} \cdot p_{s_1,s_2} \cdot \dots \cdot p_{s_{n-1},s'} \cdot p_{s',s} \quad (\text{I})$$

$$p_{s,s'} \cdot p_{s',s_{n-1}} \cdot p_{s_{n-1},s_{n-2}} \cdot \dots \cdot p_{s_2,s_1} \cdot p_{s_1,s} \quad (\text{II})$$

Devo vedere se i due prodotti sono uguali.

In (I) ci saranno dei passaggi a destra, a sinistra e dei momenti in cui la catena rimane ferma. Siccome devo tornare allo stato di partenza, il numero dei passi a destra deve essere uguale al numero dei passi a sinistra. Per ogni coppia di stati vicini, alcuni andranno in un senso e altri nel senso contrario, ma il numero di passi in una direzione e nell'altra sarà lo stesso. Quindi la condizione è soddisfatta e (I) = (II).

**Distribuzione invariante per il processo di coda** Dobbiamo cercare dei numeri  $\alpha_s$  tali che

$$\alpha_s p_{s,s'} = \alpha_{s'} p_{s',s}$$

$$s \geq 1 : \begin{cases} \alpha_s d = \alpha_{s+1} l \\ \alpha_{s+1} = \frac{\alpha_s d}{l} \end{cases} \quad s = 0 : \begin{cases} \alpha_0 p = \alpha_1 l \\ \alpha_1 = \alpha_0 \frac{p}{l} \end{cases}$$

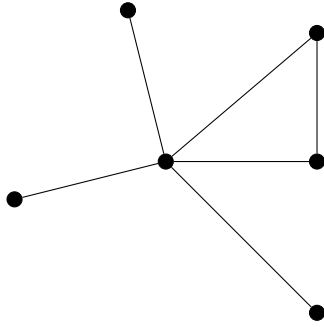
Applichiamo lo stesso criterio per la passeggiata aleatoria (consideriamo solo gli spostamenti):

$$s \geq 1 : \bar{\alpha}_{s+1} = \bar{\alpha}_s \frac{\bar{p}}{1 - \bar{p}} = \bar{\alpha}_s \frac{d}{l} \quad s = 0 : \bar{\alpha}_0 = \bar{\alpha}_1 \frac{l}{1 - r}$$

Le equazioni sono uguali a parte per il primo stato ( $s = 0$ ), quindi la distribuzione invariante non è uguale.

Vediamo un altro esempio con il quale si può ricercare la distribuzione invariante, supponendo sia reversibile.

Abbiamo un grafo:



$S = \{1, \dots, n\}$  (lo spazio degli stati sono i vertici del grafo)

$\forall i, j$  abbiamo una costante positiva  $v_{i,j} = v_{j,i} > 0$ .

$\{i, j\}$  è un arco del grafo.

Definiamo la catena di Markov in questo modo:

$$p_{i,j} = \frac{v_{i,j}}{\sum_{j'} v_{i,j'}}$$

Ci sono degli archi che attirano più di altri il passaggio. Cerchiamo una distribuzione invariante in modo che la catena di Markov sia reversibile:

$$\alpha_i p_{i,j} = \alpha_j p_{j,i}$$

$$\alpha_i \frac{v_{i,j}}{\sum_{j'} v_{i,j'}} = \alpha_j \frac{v_{j,i}}{\sum_{i'} v_{j,i'}}$$

$$\frac{\alpha_j}{\alpha_i} = \frac{\sum_{i'} v_{j,i'}}{\sum_{j'} v_{i,j'}}$$

Devo scegliere  $k$  in modo che la somma faccia 1:

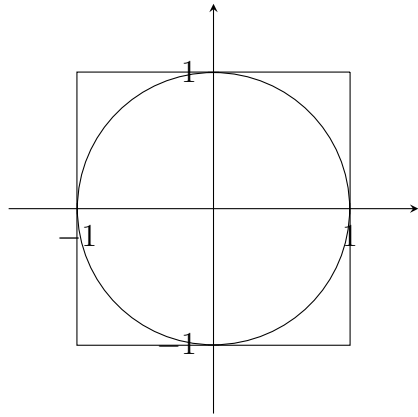
$$\sum_i \alpha_i = k \sum_i \sum_{j'} v_{i,j'} = 1$$

$$k = \frac{1}{\sum_i \sum_{j'} v_{i,j'}}$$

In questo modo ho trovato la distribuzione invariante e ho dimostrato che è una catena di Markov reversibile. Se non riesco a risolvere l'equazione non è detto che non ci sia la distribuzione inversa, ma la catena di Markov non è reversibile.

### 3.6 Metodo Montecarlo basato sulle catene di Markov (MCMC)

Il metodo Montecarlo è un metodo numerico usato per approssimare usando generatori di numeri casuali. Vediamo un esempio del metodo standard dove si vuole approssimare  $\pi$ :



L'area del cerchio è data da:

$$A = r^2 \cdot \pi = \pi$$

L'area del quadrato è data da:

$$B = (2r)^2 = 4$$

$$\frac{A}{B} = \frac{\pi}{4}$$

Se scegliamo un punto a caso la probabilità che cada dentro al cerchio è  $\frac{\pi}{4}$ . Consideriamo una serie di eventi  $E_1, E_2, \dots$  (punti scelti a caso nel quadrato):

$$E_i = (p_i \text{ appartiene al cerchio})$$

Per la legge dei grandi numeri

$$\frac{\sum_{i=1}^N E_i}{N} \simeq \frac{\pi}{4}$$

### 3.6. METODO MONTECARLO BASATO SULLE CATENE DI MARKOV (MCMC) 59

Per  $N$  molto grande.

Nel metodo Montecarlo basato su catene di Markov non abbiamo una successione indipendente, ma appunto una catena di Markov.

Vediamo ora il metodo Montecarlo basato su catene di Markov. Supponiamo di avere un insieme  $S$  finito e una misura di probabilità

$$u_s = k\pi_s$$

$k$  è la costante di normalizzazione. Se  $S$  è molto grande, calcolare  $k$  può essere quasi impossibile. Vogliamo approssimarlo in modo numerico. Per farlo, possiamo generare una catena di Markov ergodica reversibile con  $u_s$  come distribuzione invariante.

Partiamo da una catena di Markov su  $S$  con probabilità di transizione  $q_{s,s'}$  irriducibile e tale che se  $q_{s,s'} > 0$  anche  $q_{s',s} > 0$ :

$$\begin{aligned} p_{s,s'} &= \alpha_{s,s'} q_{s,s'} & \text{per } s' \neq s & \quad 0 \leq \alpha_{s,s'} \leq 1 \\ p_{s,s} &= q_{s,s} + \sum_{s'} (1 - \alpha_{s,s'}) q_{s,s'} \\ \sum_{s'} p_{s,s'} &= 1 \end{aligned}$$

Ora voglio scegliere  $\alpha_{s,s'}$  in modo tale che la catena abbia come distribuzione invariante  $u_s$ :

$$\begin{aligned} u_s p_{s,s'} &= u_{s'} p_{s',s} & s' \neq s & \text{ altrimenti la condizione è banalmente verificata} \\ \pi_s p_{s,s'} &= \pi_{s'} p_{s',s} & u_s &= k\pi_s \\ \pi_s \alpha_{s,s'} q_{s,s'} &= \pi_{s'} \alpha_{s',s} q_{s',s} \\ \frac{\alpha_{s,s'}}{\alpha_{s',s}} &= \frac{\pi_{s'} q_{s',s}}{\pi_s q_{s,s'}} & \alpha_{s,s'} \leq 1, \quad \alpha_{s',s} \leq 1 \end{aligned}$$

Definiamo una funzione, di questa quantità:

$$\begin{aligned} \alpha_{s,s'} &= \phi \left( \frac{\pi_{s'} q_{s',s}}{\pi_s q_{s,s'}} \right) \\ \alpha_{s',s} &= \phi \left( \frac{\pi_s q_{s,s'}}{\pi_{s'} q_{s',s}} \right) \end{aligned}$$

Che proprietà deve avere questa funzione?

1.  $0 \leq \phi(x) \leq 1$

$$2. \frac{\phi(x)}{\phi\left(\frac{1}{x}\right)} = x$$

Se io prendo una certa funzione  $\phi$  che ha queste proprietà e definisco delle quantità  $\alpha_{s,s'}, \alpha_{s',s}$  sulla quale la funzione è calcolata, allora la proprietà è soddisfatta.

Esistono infinite scelte, ma una possibile scelta per  $\phi$  è:

$$\phi(x) = \min(1, x)$$

Supponiamo  $0 < x \leq 1$ ; allora  $\phi(x) = x$  e  $\phi(\frac{1}{x}) = 1$ .

Se invece  $x > 1$ :

$$\begin{aligned}\phi(x) &= 1 \\ \phi\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{x}\end{aligned}$$

Definiamo

$$\alpha_{s,s'} = \min\left(\frac{\pi_s q_{s,s'}}{\pi_{s'} q_{s',s}}, 1\right)$$

**Nota** Abbiamo definito  $\phi$  in un certo modo, ma non è l'unico: un'altra possibile funzione è  $\phi(x) = \frac{x}{1+x}$ .

Vediamo ora un esempio di applicazione di questo metodo.

### 3.6.1 Algoritmo di Metropolis-Hastings

**Modello di Ising** È usato per la meccanica statica, ma può essere applicato al riconoscimento delle immagini.

$$S = \{-1, 1\}^\Lambda \quad \Lambda \subset \mathbb{Z}^2$$

Ho un sottoinsieme di  $\mathbb{Z}^2$  che posso vedere come un quadrato:

$$\begin{array}{ccc} -1 & -1 & 1 \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ 1 & -1 & 1 \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ 1 & 1 & -1 \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

Se per ognuno di questi punti assegno una quantità, ottengo una configurazione.

Definisco una misura:

$$u_s = k \exp \left[ -j \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j \right] \quad i \in \Lambda$$



### 3.6. METODO MONTECARLO BASATO SULLE CATENE DI MARKOV (MCMC) 61

$< i, j >$ :  $i, j$  sono vicini, considero solo coppie di  $i, j$  vicini orizzontalmente o verticalmente.

Per calcolare  $k$  (la costante di normalizzazione) devo fare la somma di tutti i possibili  $s$ , che sono:  $|s| = 2^{|\Lambda|}$

Se prendo un quadrato di lato 10, il numero di possibili configurazioni è  $2^{100}$ .

Quindi il problema risiede nel fatto che anche conoscendo il valore della probabilità, è difficile calcolare la costante di normalizzazione; in realtà abbiamo visto nel metodo Montecarlo con le catene di Markov che la costante non ci serve.

Che funzione posso prendere per  $q_{s,s'}$ ? Una scelta potrebbe essere scegliere a caso un punto; se è uguale a 1, lo faccio diventare -1 e viceversa.

Questa  $q$  verifica le proprietà che voglio: se la probabilità di andare da una configurazione all'altra è positiva, ovvero la configurazione si ottiene cambiando in un punto il valore da 1 a -1 o viceversa, è chiaro che anche quella in senso opposto è positiva: se da  $s$  potevo andare in  $s'$ , da  $s'$  potevo andare a  $s$ . Inoltre questa catena di Markov è irriducibile: se cambio uno alla volta i valori della configurazione posso passare da una configurazione all'altra.

$$\pi_s = \exp\left(j \sum_{<i,j>} s_i s_j\right)$$

$$\alpha_{s,s'} = \min\left(\frac{\pi_s q_{s,s'}}{\pi_{s'} q_{s',s}}, 1\right)$$

$\alpha_{s,s'}$  è diverso da 0 solo se  $q_{s,s'} > 0$ .

$$\frac{\pi_s}{\pi_{s'}} = \frac{u_s}{u_{s'}} = \frac{\exp\left[-J \sum_{<i,j>} s_i s_j\right]}{\exp\left[-J \sum_{<i,j>} s'_i s'_j\right]}$$

So che  $s, s'$  sono uguali tranne in un punto. Quindi, tranne che per quel punto, tutte le coppie si cancellano.

I vicini di un punto in 2 dimensioni sono 4, quindi rimane una somma di 4 termini.

Supponiamo ora di voler calcolare rispetto alla distribuzione invariante qual è la probabilità che un certo punto sia uguale a 1. Bisogna fare la somma delle probabilità di tutte le configurazioni tali che nel punto che sto considerando siano uguali a 1. Come posso approssimarlo usando il metodo

Montecarlo? Faccio evolvere le configurazioni nella catena di Markov nel tempo e conto, come nel caso del cerchio, quante volte  $s_p = 1$  (il mio punto valga 1). Quindi se faccio il rapporto tra quante volte il punto è stato uguale a 1 e il numero di volte che la catena di Markov è evoluta, questo rapporto tende con grande probabilità, per il tempo che tende all'infinito, al valore della probabilità che il punto sia uguale a 1.

L'algoritmo che abbiamo visto si chiama alg. di Metropolis-Hastings ed è appunto basato sul metodo di Monte Carlo basati sulle catene di Markov. Abbiamo visto anche il modello di Ising, dove possiamo applicare appunto l'algoritmo sopra citato.

### 3.6.2 Campionatore di Gibbs (Gibbs sampler)

È un altro algoritmo basato sulle catene di Markov Monte Carlo. È una versione dell'algoritmo di Metropolis-Hastings. Supponiamo che l'insieme degli stati sia un prodotto cartesiano di  $n$  spazi:

$$S = X_1 \times \dots \times X_n$$

$$\underline{s} \in S \quad \underline{s} = (x_1, \dots, x_n)$$

Gibbs sampler è un caso particolare dell'algoritmo di Metropolis-Hastings; anche qui scegliamo a caso uno dei punti da 1 a  $n$  e ne cambiamo il valore; scegliamo un punto a caso:  $\underline{s}$ ; lo possiamo scrivere come una coppia  $\underline{s} = (\underline{s}_1, s_2)$ , dove  $\underline{s}_1$  è la configurazione in tutti gli altri punti,  $s_2$  è la configurazione in quel punto.

Da questa configurazione possiamo passare ad un'altra configurazione  $\underline{s}' = (\underline{s}_1, s'_2)$  che è uguale in tutti gli altri punti, ma differisce solo nel punto scelto sopra.

Qual è la probabilità di passare da  $s$  a  $s'$ ?

$$q_{\underline{s}, \underline{s}'} = \frac{1}{n} P(s'_2 | \underline{s}_1)$$

Quindi vogliamo ottenere una catena di Markov che ha come distribuzione invariante  $k\pi(s)$ . Partiamo dalla catena di Markov di riferimento che ha come probabilità di transizione  $q_{\underline{s}, \underline{s}'}$ . Quando andiamo a fare il calcolo di  $\alpha_{s, s'}$ :

$$\alpha_{s, s'} = \min \left( \frac{\pi(\underline{s}') q_{\underline{s}', \underline{s}}}{\pi(\underline{s}) q_{\underline{s}, \underline{s}'}} , 1 \right)$$

osserviamo che

$$k\pi(\underline{s}') q_{\underline{s}', \underline{s}} = k\pi(\underline{s}) q_{\underline{s}, \underline{s}'}$$

Questo perché

$$k\pi(s) = k\pi(\underline{s}_1)P(s_2|\underline{s}_1)$$

e quindi

$$\alpha_{s,s'} = \min \left( \frac{\pi(s_1)P(s'_2|\underline{s}_1)}{\pi(s_1)P(s'_2|\underline{s}_1)}, 1 \right)$$

$q_{\underline{s}',s}$  a meno di un fattore è data da  $P(s_2|\underline{s}_1)$  (e allo stesso modo, nel denominatore al posto di  $q_{s,s'}$  posso scrivere  $P(s'_2|\underline{s}_1)$ ); quindi  $\alpha_{\underline{s},\underline{s}'} = 1$ .

In cosa consiste quindi il campionatore di Gibbs? Anzitutto si applica quando lo spazio  $S$  è uno spazio prodotto, e quindi in ogni punto ho una variabile che può assumere vari valori. Io voglio produrre una catena di Markov che abbia una certa misura di probabilità come misura invariante. Il campionatore consiste nello scegliere a caso uno dei punti e poi cambiare il valore in quel punto in base alla probabilità condizionata di passare da una configurazione  $\underline{s}$  ad una configurazione  $\underline{s}'$ .

Consideriamo due stati  $\underline{s}, \underline{s}'$  con  $\underline{s} = (s_1, s_2)$  e  $\underline{s}' = (\underline{s}_1, s'_2)$ ; la probabilità di passare da uno stato all'altro è

$$p_{\underline{s},\underline{s}'} = P(s'_2|\underline{s}_1)$$

che è appunto la probabilità condizionata della misura che voglio riprodurre, ovvero  $k\pi(\underline{s})$ .

Nel caso del modello di Ising calcolare questa probabilità condizionata è molto semplice, perché è

$$k\pi(s) = K \exp[-J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i, s_j]$$

Se adesso condiziono tutti tranne un punto, supponiamo sia  $\underline{i}$ , posso riscrivere la sommatoria:

$\sum s_i, s_j = s_{\underline{i}} \sum_{\langle j,i \rangle} s_j + \sum$  Solo la prima sommatoria dipende da  $\underline{i}$ , l'altra sommatoria (di tutti gli altri valori) non mi interessa per calcolare la probabilità condizionata.



# Chapter 4

## Catene di Markov con tempo continuo

### 4.1 Distribuzione esponenziale

Nelle catene di Markov con tempo continuo assume importanza la **distribuzione esponenziale**.

Questa distribuzione ha un parametro  $\lambda > 0, \lambda \in \mathbb{R}$ .

Consideriamo una variabile aleatoria  $X$  con distribuzione esponenziale di parametro  $\lambda$ . La funzione di ripartizione ci dà la probabilità che  $X < x$ :

$$F_{\lambda}(X) = P(X < x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

La distribuzione esponenziale è assolutamente continua. Dal punto di vista probabilistico, vuol dire che la probabilità che  $X$  sia esattamente uguale a un certo valore è 0. Questo perché data la funzione di ripartizione, la probabilità che assuma un certo valore in un punto è data dal salto che la funzione fa (assumendo ci sia una discontinuità in quel punto); ma se la funzione è continua, non ci sono salti nella funzione di ripartizione.

La funzione esponenziale è assolutamente continua, ovvero possiamo avere una **densità di probabilità**  $f_{\lambda}$ :

$$F_{\lambda}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\lambda}(y) dy$$

Quando posso scrivere la funzione di ripartizione come l'integrale di un'altra

funzione, si dice appunto che è assolutamente continua. Nel caso della funzione di ripartizione la densità è:

$$f_{\lambda}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

La densità non è univocamente definita, potremmo cambiare un punto della funzione e l'integrale non cambierebbe.

Se abbiamo una variabile aleatoria, possiamo calcolare l'attesa e la varianza.

Supponiamo di avere  $X$  con distribuzione esponenziale di parametro  $\lambda$ . L'attesa è data da

$$\begin{aligned} P(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[ -x e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx \\ &= 0 + \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \left[ -e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

La varianza è:

$$\text{var}(X) = P(X^2) - P(X)^2$$

$$\begin{aligned} P(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{\lambda}(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[ -x^2 e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx \\ &= 0 + \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{var}(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Lo **scarto quadratico medio** è  $\sigma(X) = \sqrt{\text{var}(X)} = \frac{1}{\lambda}$ . Questa quantità è la grandezza con cui  $X$  si allontana dalla sua attesa.

#### 4.1.1 Assenza di memoria

La variabile aleatoria esprime un tempo aleatorio. In questo caso la distribuzione ha una proprietà detta **assenza di memoria**, collegata alla proprietà di Markov.

Supponiamo di avere  $X$  con distribuzione esponenziale di parametro  $\lambda$ . Supponiamo  $x > 0, y > 0$ .

$$P(X > x + y | X > x)$$

L'interpretazione della probabilità appena enunciata è la seguente: sapendo che  $X > x$ , ovvero: sapendo che al tempo  $x$  il fatto  $X$  non si è ancora verificato, ci chiediamo quale sia la probabilità che non si verifichi al tempo  $x + y$ :

$$P(X > x + y | X > x) = \frac{P(X > x + y)}{P(X > x)}$$

perché dobbiamo fare l'intersezione di due eventi, ma  $P(X > x + y) < P(X > x)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 - F_\lambda(x+y)}{1 - F_\lambda(x)} \\
&= \frac{1 - (1 - e^{-\lambda(x+y)})}{1 - (1 - e^{-\lambda x})} \\
&= \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda x}} \\
&= e^{-\lambda y} \\
&= P(X > y)
\end{aligned}$$

Interpretazione: se al tempo  $x$  non si è ancora verificato l'evento, qual è la probabilità che si verifichi dopo un ulteriore tempo  $y$ ? È la stessa cosa che chiedersi direttamente se l'evento si verifica dopo il tempo  $y$ , come se ripartisse dall'inizio.

Vediamo altre proprietà. Supponiamo di avere due tempi indipendenti  $X, Y$  con distribuzioni esponenziali di parametri rispettivamente  $\lambda_1, \lambda_2$ . Consideriamo

$$Z = \min(X, Y)$$

Qual è la distribuzione di  $Z$ ?  $Z$  avrà ancora distribuzione esponenziale di parametro  $\lambda_1 + \lambda_2$ . Consideriamo un  $x > 0$ . Calcoliamo

$$\begin{aligned}
P(Z \leq x) &= 1 - P(Z > x) \\
&= 1 - P(\min(X, Y) > x) \\
&= 1 - P((X > x)(Y > x)) \\
&= 1 - P(e^{-\lambda_1 x} e^{-\lambda_2 x}) \\
&= 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x}
\end{aligned}$$

Chiediamoci ora  $P(X < Y)$  (nota: possiamo chiederci anche  $P(X > Y)$ , ma  $P(X = Y)$  è 0 perché essendo la distribuzione continua la probabilità che assuma un certo valore è 0):



$$\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda_1 y}) \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dy \\
&= \int_0^{+\infty} \lambda_2 e^{-\lambda_1 y} dy - \lambda_2 \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)y} dy \\
&= 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \\
&= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \qquad \Rightarrow P(Y < x) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}
\end{aligned}$$

$$P(Y < X) + P(X < Y) = 1$$

Possiamo estenderlo al caso di  $n$  variabili aleatorie indipendenti  $X_1, X_2, \dots, X_n$  di parametri  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ :

$$Z = \min(X_1 + \dots + X_n)$$

Possiamo fare il minimo tra  $X_1$  e  $X_2$ , poi il minimo con  $X_3$  etc.  $Z$  ha una distribuzione esponenziale di parametro  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$  e

$$\begin{aligned}
P(Z = X_i) &= P(X_i < \min(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n)) \\
&= \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}
\end{aligned}$$

#### 4.1.2 Tasso di rischio (hazard rate)

Quando abbiamo una variabile aleatoria con una distribuzione esponenziale si considera una funzione detta **tasso di rischio**, detta anche *hazard rate* o *failure rate*.

Sia  $X$  una variabile aleatoria con densità  $f(x)$ ,  $x \geq 0$  e  $f(x) = 0$  per  $x < 0$ .

$X$  rappresenta un tempo aleatorio, ovvero un tempo in cui succede un certo fatto.

Consideriamo  $P(t \leq X \leq t + 1 | X > t)$ ; il tasso di rischio  $r(t)$  è:

$$r(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{P(t \leq X \leq t + 1 | X > t)}{\Delta}$$

Quindi noi sappiamo che questo fatto  $X$  non si è ancora verificato fino al tempo  $t$  e ci chiediamo qual è la probabilità che si verifichi in un intervallo compreso tra  $t$  e  $t + \Delta$ .

Che relazione c'è tra la densità di probabilità e il tasso di rischio?

$$r(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\int_t^{t+\Delta} f(x) dx}{(1 - F(t))\Delta}$$

Siccome  $\Delta$  tende a 0, l'integrale è calcolato nel punto  $t$ :

$$= \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

Osservazione:

$$\begin{aligned} r(t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \log(1 - F(t)) \\ &= -\frac{-f(t)}{1 - F(t)} \\ &= \frac{f(t)}{1 - F(t)} \end{aligned}$$

Siccome  $F(0) = 0$  e  $\log(1 - F(0)) = 0$  possiamo scrivere che

$$\begin{aligned} \log(1 - F(t)) &= -\int_0^t r(s) ds \\ 1 - F(t) &= \exp\left(-\int_0^t r(s) ds\right) \\ F(t) &= 1 - \exp\left(-\int_0^t r(s) ds\right) \end{aligned}$$

Questa è la formula che ci permette di calcolare la funzione di ripartizione per una variabile aleatoria sapendo il tasso di rischio. Se il tasso di rischio è pari a  $\lambda$ :

$$r(s) = \lambda \qquad F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

### 4.1.3 Distribuzione iperesponenziale

Partendo dalla distribuzione esponenziale possiamo ottenere un'altra distribuzione che si ottiene facendo una combinazione convessa, cioè una somma di tante distribuzioni esponenziali: supponiamo di avere  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variabili aleatorie indipendenti con distribuzione esponenziale di parametri  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  rispettivamente.

Supponiamo di avere una variabile aleatoria  $X$  indipendente da  $X_1, \dots, X_n$ .

$$P(X = j) = P_j \qquad j = 1, \dots, n$$

Consideriamo una variabile  $X_T$ : è aleatoria per due motivi, perché l'indice  $T$  è aleatorio e perché le  $X$  sono aleatorie. Viene detta **iperesponenziale**.

Ci chiediamo ora quanto vale  $P(X_T > t)$ ; possiamo usare la formula delle probabilità totali:

$$\begin{aligned} P(X_T > t) &= \sum_{j=1}^n P(X_T > t | T = j) P(T = j) \\ &= \sum_{j=1}^n e^{-\lambda_j t} P_j \end{aligned}$$

Quando  $T = j$ ,  $X_T$  è esponenziale con parametro  $\lambda_j$ .

Questa non ha la proprietà di assenza di memoria e non è una distribuzione esponenziale, si può vedere come una combinazione di varie distribuzioni esponenziali.

Vediamo un esempio di come si può ottenere una variabile aleatoria di tipo iperesponenziale. Consideriamo le lampadine: sono prodotte da  $n$  fabbriche diverse. La durata delle lampadine ha una distribuzione esponenziale di parametro  $\lambda_i$ , ovvero ogni lampadina di ogni fabbrica  $i$  ha una durata con una distribuzione diversa; supponiamo di avere un insieme di lampadine, provenienti da fabbriche diverse.  $P_i$  rappresenta una percentuale (quante di queste lampadine vengono dalla fabbrica  $i$ ).  $X_T$  rappresenta la durata di una lampadina scelta a caso dall'insieme. Ci chiediamo qual è la probabilità che  $P(X_T \leq t), t > 0$ : possiamo usare la formula delle probabilità totali e scrivere quindi:

$$P(X_T \leq t) = \sum_{i=1}^n P(X_T \leq t | T = i) P(T = i)$$

Quando  $T = i$ ,  $X_T$  non è altro che  $X_i$ , che è una variabile aleatoria con distribuzione esponenziale di parametro  $\lambda_i$ :

$$= \sum_{i=1}^n (1 - e^{-\lambda_i t}) P_i$$

$P(X_T < t)$  è la funzione di ripartizione; da questa possiamo ottenere la densità di  $X_T$ :

$$\text{densità di } X_T = \sum_{i=1}^n P_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}$$

Abbiamo visto che la distribuzione esponenziale ha un tasso di rischio costante, e ha la proprietà di assenza di memoria. Qual è il tasso di rischio della densità di  $X_T$ ?

$$r(t) = \frac{\sum_{i=1}^n P_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}}{\sum_{i=1}^n P_i e^{-\lambda_i t}}$$

In questo caso vediamo che il tasso di rischio non è costante. Vogliamo inoltre vedere cosa succede al limite, per  $t$  che tende all'infinito.

Supponiamo che  $\lambda_1$  sia il minimo dei  $\lambda_i$ ,  $\lambda_i = \lambda_1 + \dots + i + 1$

$$r(t) = \frac{\sum_{i=1}^n P_i (\lambda_i e^{(-\lambda_i - \lambda_1)t})}{\sum_{i=1}^n P_i e^{(-\lambda_i - \lambda_1)t}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \lambda_1$$

Come interpretiamo questo risultato? Se abbiamo questo insieme di lampadine con diverse distribuzioni esponenziali, quella che ha il  $\lambda_i$  più piccolo (che noi abbiamo supposto essere  $\lambda_1$ , quelle della prima fabbrica) è quella che tipicamente dura di più, quindi decade più lentamente degli altri. Quindi se prendiamo un tempo molto grande, e prendiamo a caso una lampadina ancora funzionante, la cosa più probabile è che sia una del gruppo appartenente a  $\lambda_1$ .

Comunque non è costante, dipende dal tempo.

#### 4.1.4 Distribuzione della somma di due variabili aleatorie indipendenti con distribuzione esponenziale

Vediamo qual è la somma di due variabili indipendenti con distribuzione esponenziale. Presentiamo prima un esempio nel caso discreto. Supponiamo di avere due variabili  $X, Y$  indipendenti con distribuzione di Poisson di parametri rispettivamente  $\lambda_1, \lambda_2$ . Sia  $Z = X + Y$ . Qual è la distribuzione di  $Z$ ? Dobbiamo vedere qual è la probabilità che  $Z$  sia uguale ad un certo

valore.

$$\begin{aligned}
 P(Z = u) &= \sum_{k=0}^n P(X = k)P(Y = n - k) & n \geq 0 \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_1^k e^{-\lambda_1}}{k!} \frac{\lambda_2^{n-k} e^{-\lambda_2}}{(n-k)!} \\
 &= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^n \underbrace{\binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}_{\text{binomio di Newton}} \\
 &= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}
 \end{aligned}$$

In conclusione, la somma di due variabili aleatorie indipendenti, con distribuzione di Poisson di parametro  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  è ancora una distribuzione di Poisson di parametro  $\lambda_1 + \lambda_2$ . Questo in realtà vale anche per la somma di due variabili aleatorie con distribuzione binomiale, o distribuzione esponenziale.

Vediamo ora il caso continuo.  $X$  e  $Y$  sono due variabili aleatorie indipendenti con densità  $f(t)$ ,  $g(t)$  rispettivamente. Vogliamo analizzare  $Z = X + Y$ . Sia  $h$  la densità di  $Z$ .

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \int f(u)g(t-u)du \\
 &= f * g(t) & \text{convoluzione di } f \text{ e } g
 \end{aligned}$$

La **convoluzione** è un'operazione che si può fare in generale e che date due funzioni ne restituisce una. In questo caso specifico, date due densità otteniamo una densità.

Proprietà della convoluzione:

1. proprietà commutativa:  $f * g = g * f$

Il significato nel campo della probabilità è immediato: la convoluzione è la densità della somma di  $X$  e  $Y$  indipendenti; ma se considero la somma  $Y + X$  naturalmente è uguale.

2. bilinearità:  $f * (ag + bh) = af * g + bf * h$

Vogliamo applicare la convoluzione per studiare la somma di due variabili indipendenti con distribuzione esponenziale di parametro  $\lambda$ :  $Z = X + Y$ . La

densità di  $X$  e  $Y$  è  $g_\lambda$ . Calcoliamo la densità di  $Z$ :

$$\begin{aligned} h(t) &= g_\lambda * q_\lambda(t) \\ &= \int g_\lambda(u) g_\lambda(t-u) du \end{aligned}$$

La densità esponenziale è diversa da 0 solo se la variabile è positiva, quindi se  $u$  è negativa  $g_\lambda(u)$  vale 0 e se  $t-u$  è negativa  $g_\lambda(t-u)$  è pari a 0. Quindi l'integrale sarebbe tra  $-\infty$  e  $+\infty$ , ma  $u$  deve essere compreso tra 0 e  $t$ :

$$\begin{aligned} &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda u} \lambda e^{-\lambda(t-u)} du \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda t} \int_0^t du \\ &= \lambda^2 t e^{-\lambda t} \qquad t \geq 0 \end{aligned}$$

#### 4.1.5 Distribuzione di Eerlang

In generale cosa succede se facciamo la somma di  $n$  variabili aleatorie  $X_1, \dots, X_n$  indipendenti, con distribuzioni esponenziali tutte con lo stesso parametro  $\lambda$ ?

Supponiamo  $Z = X_1 + \dots + X_n$ ;  $Z$  ha densità  $h(t)$  con  $t > 0$ :

$$h(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}$$

Questa è chiamata distribuzione di Erlang di parametri  $(\lambda, n)$ .

È possibile dimostrare l'uguaglianza soprastante per induzione.

Supponiamo sia vera fino a  $n-1$ . Sappiamo che  $Z = X_1 + \dots + X_n$ ; possiamo riscriverla come  $Z = (X_1 + \dots + X_{n-1}) + X_n$

Siccome  $X_1, \dots, X_n$  sono indipendenti, anche la somma evidenziata dalle parentesi tonde è indipendente da  $n$  e possiamo usare la convoluzione:

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^t \frac{\lambda^{n-1} u^{n-2}}{(n-2)!} e^{-\lambda u} \lambda e^{-\lambda(t-u)} du \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-2)!} e^{-\lambda t} \int_0^t u^{n-2} du \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-2)!} e^{-\lambda t} \frac{t^{n-1}}{n-1} \\ &= \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

È la distribuzione di Erlang di parametri  $\lambda$  e  $n$ .

La distribuzione di Erlang, a differenza della distribuzione esponenziale, non ha la proprietà di assenza di memoria. Però posso rappresentarla come una somma di variabili aleatorie indipendenti.

Vediamo ora il caso di  $n$  variabili aleatorie indipendenti con parametri  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tutti diversi tra loro. Iniziamo studiando la somma tra due variabili  $X$  e  $Y$ .

Sia  $Z = X + Y$  e  $h(t)$  la densità di  $Z$ :

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \int g_{\lambda_1}(u)g_{\lambda_2}(t-u)du \\
 &= \int_0^t \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} \lambda_2 e^{-\lambda_2(t-u)} du \\
 &= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \int_0^t e^{-u(\lambda_1 - \lambda_2)} du \\
 &= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \left[ \frac{e^{-u(\lambda_1 - \lambda_2)}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right]_0^t \\
 &= \frac{\lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)t} + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t} \\
 &= \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \\
 \Rightarrow g_{\lambda_1} * g_{\lambda_2} &= \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} g_{\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} g_{\lambda_2}
 \end{aligned}$$

#### 4.1.6 Distribuzione ipoesponenziale

Cosa succede nel caso della somma di  $n$  distribuzioni esponenziali indipendenti  $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ? Le distribuzioni sono di parametri rispettivamente  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  diversi tra loro.

In questo caso si può usare la bilinearità. Siccome la convoluzione è simmetrica, posso farla nell'ordine che preferisco. Siccome quando faccio la convoluzione vengono combinazioni di distribuzioni esponenziali, è chiaro che alla fine facendo la convoluzione di tutti verrà una combinazione di tutte le densità esponenziali di parametro  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Per ottenere il risultato quindi basta vedere quale sarà il coefficiente di una di queste distribuzioni: prendiamo per esempio  $g_{\lambda_i}$ ; siccome non importa l'ordine, posso vedere la con-

voluzione di  $g_{\lambda_i}$ , poi posso vedere  $g_{\lambda_1}, g_{\lambda_2}, \dots, g_{\lambda_{i-1}}, g_{\lambda_{i+1}}, \dots, g_{\lambda_n}$ . Adesso mi interessa solo il coefficiente di  $g_{\lambda_i}$ :

$$\begin{aligned} \text{Convoluzione con } g_{\lambda_1} &: \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_i} \\ g_{\lambda_2} &: \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ &\dots \\ g_{\lambda_n} &: \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_i} \end{aligned}$$

Quindi quando faccio la convoluzione per tutti gli  $n$  (saltando  $i$ ) mi verrà

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_i} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_i} \cdot g_{\lambda_i}$$

e la stessa cosa posso farla per tutti gli altri, quindi alla fine la densità di  $X_1 + \dots + X_n$  è:

$$h(t) = \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i}^n \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i} g_{\lambda_i}$$

Sembra analoga alla distribuzione iperesponenziale, ma non è così perché i coefficienti non sono necessariamente tutti positivi. Infatti il denominatore ha la differenza  $\lambda_j - \lambda_i$ , quindi può assumere valori negativi. Questa distribuzione si chiama **ipoesponenziale**.

Possiamo anche qui vedere che il fattore di rischio non è costante. Cosa succede mandando il tempo all'infinito? Supponiamo  $\lambda_1$  sia il più piccolo di tutti:  $\lambda_1 = \min(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$\prod_{j \neq i, j=1}^n \left( \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_1} \right) g_{\lambda_1}$$

Tasso di rischio:

$$r(t) = \frac{\sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i, j=1}^n \left( \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i} \right) g_{\lambda_i}(t)}{\sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i, j=1}^n \left( \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i} \right) e^{-\lambda_i t}}$$

$$\lambda_1 = \min(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$r(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \lambda_1$$



# Chapter 5

## Processo di Poisson

Fa parte di una famiglia di processi detti processi di conteggio, un tipo di processo che descrive il numero di volte in cui si verifica un certo fatto al variare del tempo:  $N_t, t \geq 0$  indica quante volte si è verificato un fatto (es. decadimento radioattivo, arrivo di un cliente allo sportello...) dal tempo 0 al tempo  $t$ .

### Proprietà dei processi di conteggio

1.  $N_0 = 0$ ;
2.  $N_t$  ha valori naturali;
3.  $N_t$  è non decrescente (quindi può rimanere uguale).

Il processo di Poisson con parametro  $\lambda$  è un processo di conteggio  $N_t$  con in più le seguenti proprietà:

1. per  $0 \leq t_1 \leq t_2$ ,  $N_{t_2} - N_{t_1}$  (numero di fatti verificatisi tra  $t_1$  e  $t_2$ ) ha distribuzione di Poisson di parametro  $\lambda(t_2 - t_1)$ ;
2. ha incrementi indipendenti.

L'ultimo punto vuol dire che se si prendono tanti intervalli disgiunti  $(0, t_1], (t_1, t_2], \dots, (t_{n-1}, t_n]$  con  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , allora  $N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$  sono indipendenti.

Osservazione di compatibilità: se prendo  $(0, t_1], (t_1, t_2], \dots, (0, t_2]$ :

$$N_{t_2} - N_0 = (N_{t_2} - N_{t_1}) + (N_{t_1} - N_0)$$

Queste distribuzioni (di parametri rispettivamente  $\lambda(t_2-0), \lambda(t_2-t_1), \lambda(t_1-0)$ ) sono indipendenti.

Supponiamo di prendere  $u_1, \dots, u_n$  indipendenti con distribuzioni esponenziali di parametro  $\lambda$ . Immaginiamo che  $u_1, \dots, u_n$  descrivano il tempo d'arrivo di clienti ad uno sportello. Allora

$$T_k = u_1 + \dots + u_n$$

ovvero  $T_k$  è il tempo dell'arrivo del cliente  $k$ -esimo. Posso descrivere un processo di conteggio (quanti clienti sono arrivati entro il tempo  $t$ ?)

$$N_t = \max\{k | T_k \leq t\}, \quad T_k \leq t \leq T_{k+1}$$

Allora  $N_t$  è un processo di Poisson di parametro  $\lambda$ .  
Quanto vale quindi  $P(N_t = k)$ ?

$$\begin{aligned} P(N_t = k) &= P(T_k \leq t < T_{k+1}) \\ &= P((T_k \leq t) \cap (T_{k+1} > t)) \\ &= P(T_k \leq t) - P(T_{k+1} \leq t) \end{aligned}$$

Vediamo ora come il processo di Poisson è collegato con la distribuzione esponenziale. Consideriamo una successione di variabili aleatorie indipendenti con distribuzione esponenziale di parametro  $\lambda$ . Definiamo

$$X_1 = U_1, \quad X_2 = U_1 + U_2, \quad \dots$$

$U_1$  e  $U_2$  possono rappresentare l'arrivo dei clienti in un processo dove abbiamo dei clienti che giungono con tempi aleatori. Questi vengono detti *interarrival times*, cioè **tempi tra gli arrivi**. Possiamo costruire un processo di conteggio definendo

$$N_t = \max k | X_k \leq t$$

Quindi se l'evento  $N_t$  è pari ad un certo valore  $k$  equivale a dire:

$$(N_t = k) = (X_k \leq t, X_{k+1} > t) \tag{5.1}$$

$$= (X_k \leq t) \setminus (X_{k+1} \leq t) \tag{5.2}$$

$$P(N_t = k) = P(X_k \leq t) - P(X_{k+1} \leq t) \tag{5.3}$$

(Abbiamo riscritto  $N_t = k$  come una differenza di eventi). Siccome un evento è contenuto nell'altro (ovvero  $(X_{k+1} \leq t)$  è contenuto in  $(X_k \leq t)$ ), la probabilità che  $N_t = k$  è pari alla differenza delle probabilità.

Ma noi abbiamo calcolato la distribuzione di probabilità di  $X_k$ :  $X_k$  è la somma di  $k$  variabili aleatorie indipendenti con distribuzione esponenziale di parametro  $\lambda$ ; e abbiamo visto che questa ha una distribuzione detta di Eerlang di parametri  $k$  e  $\lambda$ , quindi possiamo dire che

$$P(X_k \leq t) - P(X_{k+1} \leq t) = \int_0^t \frac{\lambda^k s^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda s} ds - \int_0^t \frac{\lambda^{k+1} s^k}{k!} e^{-\lambda s} ds$$

Integro per parti:

$$\begin{aligned} &= \lambda^k \left[ \frac{s^k}{k!} e^{-\lambda s} \right]_0^t + \int_0^t \frac{\lambda^{k+1} s^k}{k!} e^{-\lambda s} ds - \int_0^t \frac{\lambda^{k+1} s^k}{k!} e^{-\lambda s} ds \\ &= \frac{\lambda^k t^k}{k!} e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Ma questa è la probabilità del processo di Poisson di essere uguale a  $k$  al tempo  $t$ . Così abbiamo verificato che la probabilità che  $N_t = k$  è uguale a quella del processo di Poisson al tempo  $t$ .

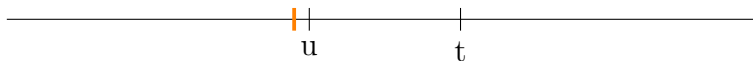
Adesso devo verificare l'indipendenza: cioè il processo di Poisson è caratterizzato dal fatto che l'incremento in un intervallo di lunghezza  $t$  ha distribuzione di Poisson di parametro  $\lambda t$ , cosa che abbiamo appena verificato, ma dobbiamo verificare che incrementi di intervalli separati sono indipendenti.

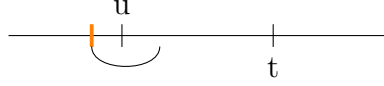


Prendiamo l'intervallo tra 0 e  $u$ ; ci chiediamo quanto vale

$$P(N_t - N_u = k | N_s, s \leq u)$$

sapendo tutto quello che c'era prima. A questo punto usiamo la proprietà dell'assenza di memoria della distribuzione esponenziale. Se noi sappiamo tutto questo valore  $(N_s, s \leq u)$  dobbiamo sapere quali sono tutti i salti che ci sono stati fino all'ultimo prima di  $u$ , ovvero sappiamo il valore degli arrivi fino a  $u$ . Quindi ci sarà un ultimo salto prima di  $u$  (colorato in arancione), e tra questo e  $u$  sappiamo non ci sarà nessun salto.





Ma sappiamo anche che la distribuzione esponenziale ha la proprietà di assenza di memoria: se invece l'ultimo salto è più grande di  $u$ , la posizione del salto successivo a causa dell'assenza di memoria è come se ripartissimo da 0, quindi possiamo ripetere l'argomento:

$$\frac{\lambda(t-u)^k}{k!} e^{-\lambda(t-u)}$$

Questo rapporto tra distribuzione esponenziale e processo di Poisson ci permette di trovare un metodo per simulare il processo di Poisson.

Consideriamo una successione di variabili aleatorie indipendenti con distribuzione esponenziale di parametro  $\lambda$ .

Come si fa a generare una successione di variabili aleatorie con distribuzione esponenziale? Si usa questo fatto: sia  $Z$  una variabile con distribuzione uniforme in  $[0, 1]$  e sia  $F$  la funzione di ripartizione dell'esponenziale:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$F$  è una funzione strettamente crescente. Posso considerare la funzione inversa  $F^{-1}$ , e quello che si vede è che  $F^{-1}(Z) = W$  è una variabile aleatoria con distribuzione esponenziale di parametro  $\lambda$ .

Esempio:

$$\begin{aligned} P(W \leq x = F^{-1})(Z \leq x) \\ &= P(Z \leq F(x)) \\ &= F(x) \end{aligned}$$

In questo caso è facile anche calcolare l'inversa:

$$\begin{aligned} x &= F^{-1}(y) \\ F(x) &= y \\ y &= 1 - e^{-\lambda x} \\ e^{-\lambda x} &= 1 - y \\ -\lambda x &= \log(1 - y) \\ x &= -\frac{1}{\lambda} \log(1 - y) \end{aligned}$$

Se prendo una variabile aleatoria  $U$  con distribuzione uniforme su  $[0, 1]$  e definisco  $W$ :

$$W = -\frac{1}{\lambda} \log(1 - U)$$

$W$  è una distribuzione esponenziale di parametro  $\lambda$ .

Abbiamo visto il caso di una sola variabile; se vogliamo generare una successione di variabili  $U_1, U_2, \dots$  indipendenti con distribuzioni uniformi in  $[0, 1]$  definisco  $W_1, W_2, \dots$  nel seguente modo:

$$W_i = -\frac{1}{\lambda} \log(1 - U_i)$$

Questo mi permette di generare un processo di Poisson di parametro  $\lambda$  usando la definizione nei termini dei tempi di arrivo.

**Osservazione** anziché scrivere  $(1 - U_i)$  è possibile anche scrivere solo  $U_i$ : se una variabile aleatoria ha distribuzione uniforme nell'intervallo  $[0, 1]$ , allora anche  $1 - U_i$  ha distribuzione uniforme in  $[0, 1]$ .

### 5.0.1 Salti nel processo di Poisson

Ora, osserviamo che in base alla definizione di processo di Poisson questo è un processo di conteggio a valori interi non decrescenti.

In linea di principio un processo di Poisson potrebbe fare salti interi maggiori di 1, in realtà la probabilità che accada è 0.

Consideriamo un intervallo  $[0, t]$  e dividiamolo in intervalli di lunghezza  $\frac{1}{2^N}$ .

Qual è la probabilità che in uno di questi intervalli il processo di Poisson faccia un salto più grande di 1? Siccome gli incrementi di intervalli disgiunti sono indipendenti, questo lo posso vedere come la probabilità che non faccia salti, che siano sempre minori o uguali a 1; siccome gli incrementi sono indipendenti, questo è uguale alla probabilità che nel primo salto non faccia salti più grandi di 1, elevato al numero degli intervalli:

$$\begin{aligned} (P(N_{\frac{1}{2}N} \leq 1))^{2^N} &= (P(N_{\frac{1}{2}N} = 0) + P(N_{\frac{1}{2}N} = 1))^{2^N} \\ &= (e^{-\frac{\lambda}{2^N}} + \frac{\lambda}{2^N} e^{-\frac{\lambda}{2^N}})^{2^N} \\ &= e^{-\lambda} (1 + \frac{\lambda}{2^N})^{2^N} \end{aligned}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} e^{-\lambda} (1 + \frac{\lambda}{2^N})^{2^N} = 1$$

Se il processo di Poisson facesse un salto più grande di 1, allora per qualche  $N$  anche nell'intervallo corrispondente ci sarebbe un salto più grande di 1. Ma guardando il limite si vede che la probabilità che questo non succeda tende a 1; quindi con probabilità 1 non ci sono salti più grandi di 1, perché se tutti i salti sono più piccoli di 1, posso trovare un  $N$  abbastanza grande per cui in tutti gli intervallini i salti sono minori di 1.

Quindi questo è un modo per vedere che il processo di Poisson o non ha salti oppure ha tutti salti di grandezza 1. Un altro modo è usare la rappresentazione vista precedentemente, ovvero in termini di successione indipendente di variabili aleatorie con distribuzione esponenziale.

## 5.1 Decomposizione di un processo di Poisson

È un'altra proprietà dei processi di Poisson. Supponiamo di avere un processo di Poisson di parametro  $\lambda$  che descrive gli arrivi dei clienti ad un supermercato (quanti clienti sono arrivati prima di un tempo  $t$ ). Dividiamo i clienti in due categorie, ad esempio maschi e femmine. Il cliente è in una certa categoria, ad esempio "maschi", con probabilità  $p$  ed è nell'altra categoria con probabilità  $1 - p$ . È come se ogni volta che arriva un cliente tirassimo una moneta, se esce testa finisce nella prima categoria, se esce croce nella seconda.

Possiamo allora scrivere il nostro processo di Poisson  $N_t$  come due processi di conteggio:

$$N_t = N_t^{(1)} + N_t^{(2)}$$

Una proprietà importante del processo di Poisson è che per poter fare questa decomposizione allora  $N_t^{(1)}$  e  $N_t^{(2)}$  devono essere due processi di Poisson indipendenti.

Vogliamo calcolare ora:

$$\begin{aligned} P(N_t^{(1)} = k_1, N_t^{(2)} = k_2) &= P(N_t^{(1)} = k_1, N_t^{(2)} = k_2 | N_t = k_1 + k_2) P(N_t = k_1 + k_2) \\ &= p \binom{k_1 + k_2}{k_1} p^{k_1} (1-p)^{k_2} - \frac{(\lambda t)^{k_1 + k_2}}{(k_1 + k_2)!} e^{-\lambda t} \\ &= \frac{(\lambda p t)^{k_1}}{k_1!} \frac{[\lambda(1-p)t]^{k_2}}{k_2!} e^{-\lambda p t} e^{-\lambda(1-p)t} \\ &= \frac{(\lambda p t)^{k_1}}{k_1!} e^{-\lambda p t} \frac{[\lambda(1-p)t]^{k_2}}{k_2!} e^{-\lambda(1-p)t} \end{aligned}$$

Da questo calcolo vedo che  $N_t^{(1)}$  è processo di Poisson di parametro  $\lambda p$  e  $N_t^{(2)}$  è processo di Poisson di parametro  $\lambda(1 - p)$

In questo modo abbiamo mostrato che sono indipendenti, ma solamente per un intervallo; dobbiamo ancora verificare che gli incrementi su intervalli separati siano indipendenti, per dimostrare che i due processi siano indipendenti.

Ma noi siamo partiti già da un processo di Poisson di parametro  $\lambda$ , e quindi sappiamo già che le distribuzioni in intervalli disgiunti sono indipendenti; quindi quando facciamo questa decomposizione partiamo già da variabili aleatorie indipendenti, e quindi otterremo ancora variabili aleatorie indipendenti.

Questo si può generalizzare nella decomposizione in  $n$  processi di Poisson: consideriamo

$$P_1, P_2, \dots, P_n \quad P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1 \quad 0 \leq p_i \leq 1$$

$$N_t = N_t^{(1)} + \dots + N_t^{(n)}$$

I processi  $N_t^{(1)}, \dots, N_t^{(n)}$  sono anche loro di Poisson indipendenti di parametri rispettivamente  $\lambda p_1, \dots, \lambda p_n$ .

### 5.1.1 "Ricomposizione" di processi di Poisson

Lo stesso argomento si può mostrare al contrario: supponiamo di avere  $N_t^{(1)}, \dots, N_t^{(n)}$  processi di Poisson indipendenti di parametri  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Definiamo:

$$N_t = N_t^{(1)} + \dots + N_t^{(n)}$$

Allora  $N_t$  è processo di Poisson di parametro  $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ .

Infatti, supponiamo  $N_t$  sia un processo di Poisson di parametro  $\lambda$ ; definiamo

$$p_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}, \dots, p_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}$$

Allora  $N_t^{(1)}, \dots, N_t^{(n)}$  sono indipendenti di parametro  $\lambda p_i = \lambda_i$

## 5.2 Definizione equivalente di processo di Poisson

Abbiamo visto una definizione di Processo di Poisson; abbiamo successivamente visto come si possa ottenere anche dalla distribuzione esponenziale

(ovvero prendendo una successione di tempi indipendenti con distribuzione esponenziale); adesso vediamo un'altra definizione equivalente.

Processo di conteggio con incrementi indipendenti  $\forall h > 0$ :

$$P(N_{t+h} = N_t) = 1 - \lambda h + o(h)$$

$$P(N_{t+h} = N_t + 1) = \lambda h + o(h)$$

Cioè in questo caso anziché dire già qual è la distribuzione dell'incremento, diciamo qual è la probabilità che rimanga uguale in un piccolo intervallino oppure che faccia un salto di 1, a meno di infinitesimi di ordine superiore.

Da questo seguirà che le probabilità di trovarmi nei vari valori devono soddisfare delle equazioni differenziali.

$o(h)$ : infinitesimo di ordine superiore ad  $h$ , ovvero quantità tale che quando  $h$  diventa piccola, va a 0 più rapidamente di  $h$ :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$$

Vogliamo ora mostrare che le due definizioni sono equivalenti, quindi un processo di Poisson definito in base alla prima definizione deve soddisfare queste due condizioni.

Qual è la probabilità di nessun incremento?

$$\begin{aligned} P(N_{t+h} = N_t) &= e^{-\lambda h} \\ &= 1 - \lambda h + o(h) \end{aligned}$$

Vediamo l'altra condizione: incremento di 1?

$$\begin{aligned} P(N_{t+h} = N_t + 1) &= \lambda h e^{-\lambda h} \\ &= \lambda h (1 - \lambda h + o(h)) \\ &= \lambda h - \lambda^2 h^2 + o(h^2) \\ &= \lambda h + o(h) \end{aligned}$$

Il processo di Poisson soddisfa queste proprietà. Possiamo fare un'ulteriore osservazione:

Incremento  $k \geq 2$ ?

$$\begin{aligned} P(N_{t+h} = N_t + k) &\leq 1 - P(N_{t+h} = N_t) - P(N_{t+h} = N_t + 1) \\ &= 1 - (1 - \lambda h - o(h)) - \lambda h - o(h) \\ &= o(h) \end{aligned}$$



Quindi la probabilità di fare un salto più grande di 2 è un infinitesimo di ordine superiore a  $h$ .

Il processo di Poisson soddisfa queste condizioni. Per concludere la dimostrazione che le due definizioni sono equivalenti, dobbiamo mostrare anche l'altro verso dell'implicazione, cioè supponiamo di avere un processo con incrementi indipendenti tali che uniformemente in  $t$  siano verificate le 2 condizioni scritte all'inizio; dobbiamo far vedere che questo è un processo di Poisson.

$$P(N_{t+h} = 0) = P(N_t = 0)P(N_{t+h} - N_t = 0)$$

$$P(N_{t+h} = 0) - P(N_t = 0) = (P(N_{t+h} - N_t = 0) - 1)P(N_t = 0)$$

$$u_t = P(N_t = 0)$$

$$u_{t+h} - u_t = ((1 - \lambda h + o(h)) - 1)u_t$$

$$\frac{u_{t+h} - u_t}{h} = \lambda u_t + \frac{o(h)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} u'_t = \lambda u_t$$

L'argomento del limite è un'equazione differenziale; la soluzione dell'equazione è

$$ke^{-\lambda t}$$

Se al posto di  $t$  metto 0, ovvero  $u_0 = 1$ , questo implica che  $k = 1$ .

Così ottengo che

$$u_t = e^{-\lambda t} \quad P(N_t = 0)e^{-\lambda t}$$

Questo corrisponde al processo di Poisson. Devo farlo vedere anche per valori diversi.

Consideriamo  $P(N_{t+h} = k), k \geq 1$ .

Si può verificare in due modi:

$$P(N_{t+h} = k) = P(N_t = k)P(N_{t+h} - N_t = 0) + P(N_t = k-1)P(N_{t+h} - N_t = 1) + o(h)$$

Ci sarebbero altre possibilità, per esempio  $P(N_t = k-2)$ , ma dall'ipotesi che abbiamo fatto questi sono infinitesimi di ordine superiore ad  $h$ .

$$P(N_{t+h} = k) - P(N_t = k) = -(\lambda h + o(h))P(N_t = k) + P(t = k-1)(\lambda h + o(h)) + o(h)$$

Definiamo  $U_k^{(t)} = P(N_t = k)$

$$\begin{aligned} \frac{u_{t+h}^{(k)} - u_t^{(k)}}{h} &= -\lambda u_{k_t}^{(k)} + \frac{o(h)}{h} + \lambda_{u_t}(k-1) + o(h) \\ u_t'^{(k)} &= -\lambda_{u_t}^{(k)} + \lambda_{u_t}^{(k-1)} \end{aligned} \quad u_t^{(0)} = e^{-\lambda t}$$

Otengo un'equazione differenziale ( $u_t'^{(k)}$ ) con un termine noto (perché ho  $u_t^{(0)}$ ), e posso andare avanti un valore alla volta.

Facendo al contrario, verifico:

$$u_t^{(k)} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

cioè se faccio la derivata di questo viene la somma di due termini:

$$u_t'^{(k)} = \frac{\lambda k (\lambda t)^{(k-1)}}{k!} e^{-\lambda t} - \lambda \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

La soluzione di queste equazioni differenziali è quella data dalla soluzione del processo di Poisson.

### 5.3 Distribuzione condizionata dei punti di salto

Sia  $T$  il primo punto di salto. Vogliamo calcolare  $P(a < T \leq b | N_u = 1)$ , con  $0 \leq a < b \leq u$ . Sapendo che al tempo  $u$  c'è stato un solo salto (il processo di Poisson è uguale a 1), qual è la probabilità che ci sia un salto in  $(a, b]$ ?

Vogliamo mostrare che  $P(a < T \leq b | N_u = 1) = \frac{b-a}{u}$ .

Sia  $N_T$  un processo di Poisson con parametro  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} P(a < T \leq b | N_u = 1) &= \frac{P(a < T \leq b | N_u = 1)}{P(N_u = 1)} \\ &= \frac{P(N_a = 0, N_b - N_a = 1, N_u - N_b = 0)}{P(N_u = 1)} \\ &= \frac{e^{-\lambda a} (\lambda(b-a)) e^{-\lambda(b-a)} e^{-\lambda(u-b)}}{(\lambda u) e^{-\lambda u}} \\ &= \frac{b-a}{u} \end{aligned}$$

La stessa cosa è dimostrabile nel caso di  $n$  salti. Vediamo per esempio il caso  $n = 2$ .

Siano  $T_1, T_2$  i primi due salti. Consideriamo due intervalli  $(a, b]$  e  $(c, d]$  con  $0 \leq a < b < c < d \leq u$ .

Vogliamo calcolare:

$$P(a < T_1 \leq b, c < T_2 \leq d | N_u = 2)$$

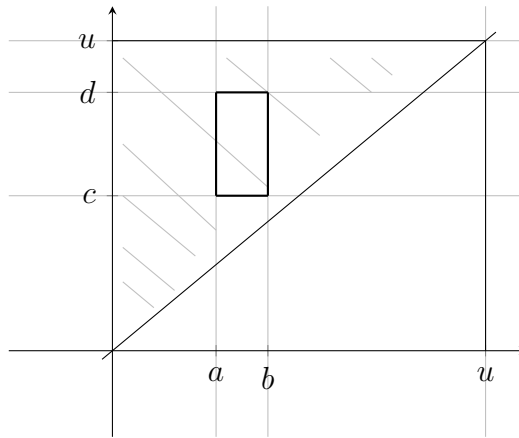
Ovvero qual è la probabilità che ci siano due salti, che permette di calcolare qual è la distribuzione condizionata di  $T_1$  e  $T_2$ :

$$\begin{aligned} &= \frac{P(N_a = 0, N_b - N_a = 1, N_c - N_b = 0, N_d - N_c = 1, N_u - N_d = 0)}{P(N_u = 2)} \\ &= \frac{e^{-\lambda a} (\lambda(b-a)) e^{-\lambda(b-a)} e^{-\lambda(c-b)} (\lambda(d-c)) e^{-\lambda(d-c)} e^{-\lambda(u-d)}}{\frac{(\lambda u)^2}{2} e^{-\lambda u}} \\ &= 2 \frac{(b-a)(d-c)}{u^2} \end{aligned}$$

Possiamo visualizzare  $T_1$  e  $T_2$  come punti del piano. Anzitutto, sto considerando la distribuzione condizionata, quindi i punti saranno all'interno di un quadrato di lato  $u$ .

Inoltre, so che  $T_1 < T_2$ , quindi rimarrò all'interno del triangolo tratteggiato. Infine, sto calcolando la probabilità che il punto si trovi nel rettangolo  $a, b, c, d$  e per le ipotesi fatte il rettangolo si trova nel quadrato  $u$ . La formula  $2 \frac{(b-a)(d-c)}{u^2}$  mi dice che l'area del rettangolo è proporzionale all'area del quadrato.

Questa è la distribuzione uniforme, perché la probabilità che si trovi nel rettangolino è proporzionale all'area del rettangolino diviso l'area totale.



In generale, siano  $T_1, T_2, \dots, T_n$  i primi  $n$  salti di un processo di Poisson  $N_T$  di parametro  $\lambda$ . Dati  $0 \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots < b_{n-1} \leq a_n < b_n \leq u$  allora

$$P(a_1 < T_1 \leq b_1, \dots, a_n < T_n \leq b_n | N_u = n) = \frac{\prod_{i=1}^n (b_i - a_i)}{\frac{u^n}{n!}}$$

La produttoria sarebbe il volume di un semplice in  $n$  dimensioni. Se non condizioniamo, abbiamo che gli incrementi hanno distribuzione esponenziale, la differenza tra due tempi successivi è indipendente; invece se io condiziono al fatto che in un intervallo ci sono  $n$  salti, la distribuzione negli  $n$  salti è uniforme nella regione in cui  $0 \leq T_1 < T_2 < \dots < T_n \leq u$ .

## 5.4 Processo di Poisson non omogeneo

È una generalizzazione del processo di Poisson. Le ipotesi del processo di Poisson erano che:

1. è un processo di conteggio, con intervalli indipendenti;
2. gli intervalli hanno una distribuzione di Poisson, con il parametro che è dato da  $\lambda \cdot \text{lunghezza dell'intervallo}$ .

Un'altra definizione vista è quella "infinitesimale".

Una generalizzazione è considerare il processo di Poisson **non omogeneo** rispetto al tempo: nel caso omogeneo, la distribuzione di un incremento dipende solo dalla lunghezza dell'intervallo, e non a che tempo si verifica. Spesso però abbiamo a che fare con processi di conteggio che non sono omogenei: per esempio, l'afflusso dei clienti in un negozio non è omogeneo, solitamente non c'è lo stesso numero dei clienti in ogni fascia oraria. Usando un processo omogeneo di Poisson avremmo che la distribuzione dell'arrivo dei clienti è la stessa in qualsiasi intervallo di tempo considerato nell'arco della giornata.

Il parametro quindi non è più *costante*  $\lambda$ , ma è una **funzione**  $\lambda(t)$ . Assumiamo che  $\lambda(t)$  sia una funzione continua e illimitata.  $\lambda(t)$  è detta *intensità*. Se prendiamo  $\lambda(t)$  costante, questo corrisponderà al processo di Poisson omogeneo.

Per caratterizzare il processo di Poisson non omogeneo, vediamo intanto la caratterizzazione infinitesimale.

### 5.4.1 Caratterizzazione infinitesimale

$N_t$

1. è un processo di conteggio
2. incrementi indipendenti
3.  $P(N_{(t+h)} - N_{(t)} = 1) = \lambda(t)h + o(h)$
4.  $P(N_{(t+h)} - N_{(t)} = 0) = 1 - \lambda(t)h + o(h)$

$o(h)$  indica una qualsiasi quantità tale che  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$ , ovvero una quantità che tende a 0 più rapidamente di  $h$ , per  $h$  che tende a 0.

Partendo dalla caratterizzazione infinitesimale, possiamo ottenere delle equazioni differenziali come nel caso omogeneo:

$$\begin{aligned} u_t^{(k)} &= P(N_t = k) \\ \text{derivate prime: } \begin{cases} u_t'^{(0)} &= -\lambda_t u_t^{(0)} \\ u_t'^{(k)} &= -\lambda_t u_t^{(k-1)} - \lambda_t u_t^{(k)}, \end{cases} \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

Risolviamo le equazioni. Sia  $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda_s ds$ ; allora:

$$\begin{aligned} u_t^{(0)} &= e^{-\Lambda(t)} \\ u_t^{(k)} &= \frac{(\Lambda(t))^k}{k!} e^{-\Lambda(t)} \end{aligned}$$

Infatti

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u_t^{(0)} &= -e^{-\Lambda(t)} \lambda_t \\ &= -\lambda_t u_t^{(0)} \\ P(N_t = k) &= \frac{(\Lambda(t))^k}{k!} e^{-\Lambda(t)} \end{aligned}$$

Nel caso particolare del processo omogeneo  $\Lambda(t) = \lambda t$ .

Ora, supponiamo di partire da un tempo  $t_1$ , con  $t \geq t_1$ :

$$P(N_t - N_{t_1} = k) = \frac{(\Lambda(t) - \Lambda(t_1))^k}{k!} e^{-(\Lambda(t) - \Lambda(t_1))}$$

Anche qui nel caso  $\lambda_t \equiv \lambda$  (caso omogeneo)  $\Lambda(t) - \Lambda(t_1) = \lambda(t - t_1)$

### 5.4.2 Definizione alternativa

Vediamo ora una definizione equivalente di un processo di Poisson non omogeneo:

1. è un processo di conteggio
2. incrementi indipendenti
3.  $P(N_{t_2} - N_{t_1} = k)$ , con  $t_1 < t_2$ , è Poisson di parametro  $\Lambda(t_2) - \Lambda(t_1)$

Se  $\lambda_t \equiv \lambda$ , allora  $\Lambda(t) = \lambda t$

È facile verificare che questa definizione soddisfa le condizioni infinitesimali:

$$\begin{aligned} P(N_{t+h} - N_t = 0) &= e^{-\Lambda(t+h) - \Lambda(t)} \\ &= e^{-\int_t^{t+h} \lambda_s ds} \\ &= e^{-\lambda_t h + o(h)} \end{aligned}$$

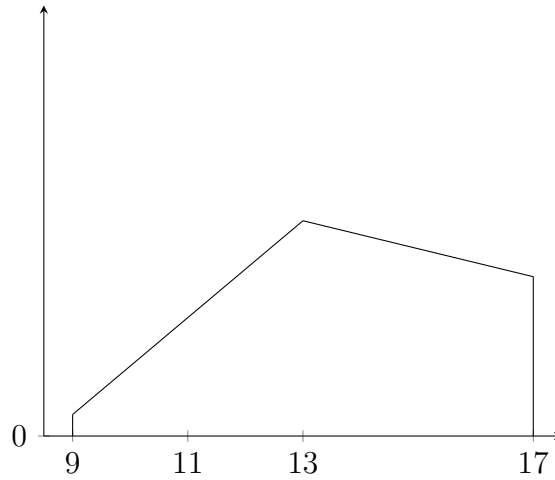
$$\begin{aligned} P(N_{t+h} - N_t = 1) &= \Lambda(t+h) - \Lambda(t) e^{-\Lambda(t+h) - \Lambda(t)} \\ &= \lambda_t h + o(h) \end{aligned}$$

Quindi le due definizioni sono equivalenti.

**Esempio** Supponiamo di avere un negozio aperto 9 ore, dalle 8 alle 17. Modelliamo l'apertura come un processo non omogeneo.

$$\begin{aligned} \lambda_t &= 5 + 5t & 0 \leq t \leq 3 \\ \lambda_t &= 20 & 3 \leq t \leq 5 \\ \lambda_t &= 20 - 2(t - 5) & 5 \leq t \leq 9 \end{aligned}$$

Intensità del flusso di clienti al negozio:



Supponiamo di voler calcolare l'attesa del numero dei clienti dalle 10 alle 12. Siccome calcoliamo il tempo a partire dalle 8, questo corrisponde a  $N_4 - N_2$ , distribuzione di Poisson di parametro  $\Lambda(4) - \Lambda(2)$ :

$$\begin{aligned}\Lambda(4) - \Lambda(2) &= \int_2^4 \lambda t dt \\ &= \int_2^3 (5 + 5t) dt + \int_3^4 2 dt\end{aligned}$$

$\Lambda(4) - \Lambda(2)$  dà non solo l'attesa, ma anche la varianza.

### 5.4.3 Generazione di un processo di Poisson non omogeneo

Un modo particolare di generare un processo di Poisson non omogeneo è a partire da un processo di Poisson omogeneo: supponiamo di avere  $N_t$  omogeneo di parametro  $\lambda$ . Supponiamo che  $p(t)$  sia una funzione continua, con  $0 \leq p(t) \leq 1$ .

Allora possiamo generare un processo di Poisson non omogeneo  $\bar{N}_t$  con intensità  $\lambda_t = \lambda p(t)$ .

Quando si verifica un arrivo nel processo di Poisson  $N_t$ , con probabilità  $p(t)$  lo accettiamo per  $\bar{N}_t$  - ovvero lo consideriamo un salto in  $\bar{N}_t$  -, e lo rifiutiamo con probabilità  $1 - p(t)$ ; quindi  $\bar{N}_t$  prende solamente una parte dei salti di  $N_t$ .

Si vede facilmente che questo ha le proprietà di un processo di Poisson non omogeneo.

**Esempio: processo di coda**  $M/G/\infty$ 

Abbiamo dei clienti che arrivano secondo un processo di Poisson e vengono serviti per un tempo di servizio che ha una certa distribuzione, sulla quale non facciamo nessuna ipotesi tranne che abbia una certa densità e tale per cui l'attesa del tempo di servizio sia finita; supponiamo che ci siano infiniti sportelli. Tutti i clienti di arrivo vengono quindi serviti.

Sia  $N_t$  il numero dei clienti presenti nel sistema al tempo  $t$ . Se un cliente arriva al tempo  $s < t$ , qual è la probabilità che sia ancora nel sistema al tempo  $t$ ? Il cliente sarà ancora allo sportello se il tempo di servizio è maggiore di  $t - s$ .

$\bar{N}_s$  sarà un processo di Poisson non omogeneo di intensità  $\lambda_s = \lambda p(s)$ , dove  $p(s) = 1 - G(t - s)$ ;  $G$  è la ripartizione del tempo di servizio.

$1 - G(t - s)$  è la probabilità che il tempo di servizio sia maggiore di  $t - s$ :

$$1 - G(t - s) = \int_{t-s}^{\infty} g(z) dz$$

Qual è la distribuzione del numero dei clienti  $\bar{N}_t$  che sono ancor presenti al tempo  $t$ ?

$\bar{N}_t$  è una distribuzione di Poisson non omogeneo di parametro  $\Lambda(t)$ :

$$\begin{aligned} \Lambda(t) &= \int_0^t \lambda_s ds \\ &= \lambda \int_0^t (1 - G(t - s)) ds \end{aligned}$$

Facciamo un cambio di variabile:  $u = t - s$

$$= \lambda \int_0^t (1 - G(u)) du$$

Cosa succede se  $t$  tende infinito? L'integrale tende a

$$\lambda \int_0^{\infty} (1 - G(u)) du$$

Ma questa è l'attesa del tempo di servizio (moltiplicato per  $\lambda$ ):

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} (1 - G(u)) du &= \left[ \cancel{u(1 - G(u))} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} u g(u) du \\ &= \mu \end{aligned}$$

Intuitivamente, il parametro del processo di Poisson (che è anche uguale all'attesa del numero dei clienti) è tanto più grande sia se faccio crescere  $\lambda$  (arrivano più clienti), oppure se l'attesa del tempo di servizio è grande (i clienti) rimangono più tempo).



### 5.4.4 Somma di processi di Poisson non omogenei

Vediamo un'altra proprietà dei processi di Poisson non omogenei: siano  $N_t^{(1)}$  e  $N_t^{(2)}$  due processi di Poisson non omogenei di intensità  $\lambda_t^{(1)}$  e  $\lambda_t^{(2)}$  rispettivamente, e indipendenti. Allora

$$N_t = N_t^{(1)} + N_t^{(2)}$$

è un processo di Poisson non omogeneo di intensità  $\lambda_t = \lambda_t^{(1)} + \lambda_t^{(2)}$ .

Si può dimostrare usando una delle due caratterizzazioni del processo di Poisson, in questo caso useremo la seconda.

Consideriamo  $t_1 < t_2$  e consideriamo l'incremento  $N_{t_2} - N_{t_1}$ :

$$N_{t_2} - N_{t_1} = (N_{t_2}^{(1)} - N_{t_1}^{(1)}) + (N_{t_2}^{(2)} - N_{t_1}^{(2)})$$

Il primo membro dell'addizione è Poisson di parametro  $\Lambda_2(t_2) - \Lambda_1(t_1)$ , il secondo è Poisson di parametro  $\Lambda_1(t_2) - \Lambda_1(t_1)$

$$\Lambda_1(t) = \int_0^t \lambda_s^{(1)} ds \quad \Lambda_2(t) = \int_0^t \lambda_s^{(2)} ds$$

Anche  $N_{t_2}^{(2)} - N_{t_1}^{(2)}$  è processo di Poisson di parametro  $\Lambda_2(t_2) - \Lambda_2(t_1)$ .

I due processi di Poisson sono indipendenti;  $N_{t_1} - N_{t_2}$  essendo somma di Processi di Poisson indipendenti è Poisson di parametro  $\Lambda(t_2) - \Lambda(t_1)$

$$\Lambda_t = \int_0^t \lambda_s ds \quad \lambda_s = \lambda_s^{(1)} + \lambda_s^{(2)} \quad \square$$

La stessa cosa si può dimostrare al contrario: sia  $N_t$  un processo di Poisson con densità  $\lambda_t$  continua e limitata. Se  $\lambda_t = \lambda_t^{(1)} + \lambda_t^{(2)}$ , allora  $N_t = N_t^{(1)} + N_t^{(2)}$ , dove  $N_t^{(1)}, N_t^{(2)}$  sono processi di Poisson indipendenti con intensità  $\lambda_t^{(1)}, \lambda_t^{(2)}$  rispettivamente e  $0 \leq \lambda_t^{(1)}, 0 \leq \lambda_t^{(2)}$  continui.

Come costruisco  $N_t^{(1)}$  e  $N_t^{(2)}$ ? Prendiamo l'intervallo  $(t, t+h]$  e chiediamoci quanto vale

$$P(N_{t+h}^{(1)} - N_t^{(1)} = 1 | N_{t+h} - N_t = 1)$$

Ovvero sapendo che c'è un salto nel processo  $N_t$  qual è la probabilità che ci sia anche in  $N_t^{(1)}$ ?

$$\begin{aligned}
P(N_{t+h}^{(1)} - N_t^{(1)} = 1 | N_{t+h} - N_t = 1) &= \frac{P(N_{t+h}^{(1)} - N_t^{(1)} = 1)P(N_{t+h} - N_t = 1)}{P(N_{t+h} - N_t = 1)} \\
&= \frac{(\Lambda_1(t+h) - \Lambda_1(t))e^{-(\Lambda_1(t+h) - \Lambda_1(t))}e^{-(\Lambda_2(t+h) - \Lambda_2(t))}}{(\Lambda(t+h) - \Lambda(t))e^{-(\Lambda(t+h) - \Lambda(t))}} \\
&= \frac{(\lambda_t^{(1)}h + o(h))\cancel{e^{-(\lambda_t^{(1)}h + o(h))}}\cancel{e^{-(\lambda_t^{(2)}h + o(h))}}}{(\lambda_t^{(1)} + \lambda_t^{(2)}) \cdot h \cdot o(h) \cdot \cancel{e^{-(\lambda_t^{(1)}h + o(h))}}} \\
&\quad \uparrow h \rightarrow 0 \quad \frac{\lambda_t^{(1)}}{\lambda_t^{(1)} + \lambda_t^{(2)}}
\end{aligned}$$

Quindi quando nel processo  $N_t$  ho un salto, lo posso attribuire a  $N_t^{(1)}$  con probabilità  $\frac{\lambda_t^{(1)}}{\lambda_t^{(1)} + \lambda_t^{(2)}}$ , oppure lo attribuisco a  $N_t^{(2)}$  con probabilità  $\frac{\lambda_t^{(2)}}{\lambda_t^{(1)} + \lambda_t^{(2)}}$ .

Si può generalizzare al caso di  $n$  processi di processi non omogenei indipendenti: se faccio la somma sarà un processo di Poisson non omogeneo, con intensità pari alla somma delle intensità.

Invece, partendo da un processo di Poisson  $\lambda_t$  lo posso decomporre come la somma di  $n$  processi di Poisson indipendenti con somma delle intensità pari a  $\lambda_t$ . Il modo di decomporlo è il seguente: quando ho un salto nel processo di Poisson, lo posso attribuire a uno di questi con probabilità che son date dal rapporto:

$$\frac{\lambda_k^{(n)}}{\lambda_t^{(1)} + \dots + \lambda_t^{(n)}}$$

Torniamo al processo di coda  $M/G/\infty$ . Sia  $\bar{N}_t$  il processo di conteggio delle uscite dal sistema. Vogliamo mostrare che questo è un processo di Poisson non omogeneo. Per fare questo possiamo mostrare che verifica gli assiomi della seconda definizione del processo di Poisson non omogeneo.

Consideriamo un incremento  $\bar{N}_{t_2} - \bar{N}_{t_1}$ , con  $t_1 < t_2$ .

$\bar{N}_{t_2} - \bar{N}_{t_1}$  è il numero dei clienti usciti dal sistema nell'intervallo di tempo  $(t_1, t_2]$ . Affinché un cliente esca in questo intervallo, occorre che sia arrivato in un certo istante  $s$ , con  $s \leq t_2$  e il suo tempo di servizio deve essere compreso tra  $t_2 - s$  e  $t_1 - s$ .

La probabilità che il tempo di servizio sia compreso in quell'intervallo è dato da  $[G(t_2 - s) - G(t_1 - s)]$ .

Quindi posso contare i clienti andati in quell'intervallo con

$$\lambda[G(t_2 - s) - G(t_1 - s)]$$

$\bar{N}_{t_2} - \bar{N}_{t_1}$  ha distribuzione di Poisson di parametro  $\lambda \int_0^\infty (G(t_2 - s) - G(t_1 - s)) ds$

In questo modo ho verificato che se io conto i clienti che escono dal sistema in un certo intervallo di tempo, questo ha distribuzione di Poisson con parametro scritto sopra.

L'altra cosa che devo verificare è che gli incrementi su intervalli disgiunti siano indipendenti. Questo si può vedere come una decomposizione: considero  $k$  intervalli  $I_1, \dots, I_k$ . Qual è la probabilità che un cliente esca in uno di questi  $k$  intervalli? Il suo tempo di uscita deve corrispondere ad uno degli intervalli. Siccome, come detto in precedenza, è possibile decomporre un processo di Poisson come somma di processi di Poisson indipendenti, anche in questo caso, posso decomporre il processo come l'uscita da uno dei  $k$  intervalli. Da questo si vede che gli incrementi in intervalli disgiunti sono indipendenti, perché corrispondono a processi di Poisson omogenei indipendenti.

Da questo si vede che il processo di conteggio dell'uscita dalla coda è un processo di Poisson.

Qual è l'intensità di questo processo di Poisson?  $\bar{N}_{t+h} - \bar{N}_t$  è Poisson con parametro:

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^{+\infty} (G(t - s + h) - G(t - s)) ds \\ &= \frac{\lambda \int_0^{+\infty} (g(t - s)h + o(h)) ds}{h} \\ &= \Lambda(t + h) - \Lambda(t) \\ &\text{quando } h \rightarrow 0: \\ \lambda \int_0^t g(t - s) ds &= \lambda \int_0^t g(u) du \\ &= \lambda G(t) \end{aligned}$$

Quindi il processo di conteggio che descrive le entrate è un processo di Poisson omogeneo, mentre quello che descrive le uscite è un processo di Poisson non omogeneo di parametro  $\lambda \cdot G(t)$ , dove  $G(t) = \int_0^t g(s) ds$  è la funzione di ripartizione del tempo di servizio.

Se  $t \rightarrow \infty$ ,  $G(t) \rightarrow 1$

e quindi

$$\lambda_t = \lambda G(t) \rightarrow \lambda$$

Per  $t$  grande il processo di Poisson per le uscite è pari a quello delle entrate. Intuitivamente ha senso, perché tutti i clienti che entrano poi escono, quindi le uscite devono corrispondere alle entrate.

## 5.5 Processi di Poisson composti (compound Poisson process)

Supponiamo di avere  $N_t$  processo di Poisson di parametro  $\lambda$ . Supponiamo di avere una successione di variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite  $X_1, X_2, \dots$  con attesa  $P(X_i) = \mu$ .

Le  $X_i$  possono essere positive o negative.

Allora definiamo

$$Y_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

$Y_t$  è aleatorio in 2 punti: sommiamo un numero aleatorio di elementi, che sono a loro volta variabili aleatorie. Se  $N_t = 0, Y_t = 0$ .

Un esempio di processi di questo tipo è il seguente: consideriamo una polizza di assicurazione;  $N_t$  è un processo di conteggio che conta il numero di incidenti verificatisi fino al tempo  $t$ .  $X_i$  rappresenta il premio che deve pagare la compagnia per l'incidente  $i$ . Qual è l'attesa di  $Y_t$ ?

$$P(Y_t) = P(P(Y_t|N_t))$$

$$\begin{aligned} P(Y_t|N_t) &= \mu N_t \\ P(P(Y_t|N_t)) &= P(\mu N_t) \\ &= \mu P(N_t) \\ &= \mu \lambda t \end{aligned}$$

Quando ho un processo di Poisson composto, l'attesa è pari all'attesa di ogni singolo  $X_i$  moltiplicata per  $\lambda \cdot t$ .

Qual è la **varianza** di  $Y_t$ ? C'è una formula analoga che dice che

$$\text{var}(Y_t) = P(\text{var}(Y_t|N_t)) + \text{var}((P(Y_t|N_t)))$$

Quanto vale  $P(Y_t|N_t)$ ? è  $N_t \mu$

## 5.5. PROCESSI DI POISSON COMPOSTI (COMPOUND POISSON PROCESS) 97

Quanto vale  $\text{var}(Y_t|N_t)$ ? Supponiamo che  $\text{var}(X_i) = \sigma^2$

$$\text{var}(Y_t|N_t) = N_t\sigma^2$$

Allora

$$\text{var}(Y_t) = \lambda t\sigma^2 + \lambda t\mu^2 = \lambda t(\sigma^2 + \mu^2)$$

### Varianza

Vogliamo calcolare la varianza in termini della varianza condizionata.

Supponiamo di avere due variabili aleatorie a valori interi  $X$  e  $Y$ . Scriviamo  $P(Y|X)$  per indicare una variabile aleatoria che assume il valore  $P(Y|X = k)$ , se  $X = k$  ovvero la variabile condizionata al fatto che  $X$  assuma un certo valore.

La formula che si riferisce all'attesa è la seguente:

$$P(Y) = P(P(Y|X))$$

Questo è un modo "abbreviato" per scrivere la formula delle probabilità totali:

$$\begin{aligned} P(Y) &= P(P(Y|X)) \\ &= \sum_k P(Y|X = k)P(X = k) \end{aligned}$$

In generale se abbiamo una qualsiasi funzione  $P(\phi(Y))$ , questa può essere scritta così:

$$P(\phi(Y)) = P(P(\phi(Y)|X))$$

Vediamo ora la varianza.

$$\begin{aligned} \text{var}(Y) &= P((Y - P(Y))^2) \\ &= P(P((Y - P(Y))^2|X)) \\ &= P(P(((Y - P(Y|X)) + (P(Y|X) - P(X)))^2|X)) \\ &= P(((Y - P(Y|X))^2|X) + P((Y|X) - P(X))^2) + \text{DP} \\ &= P(\text{var}(Y|X)) + \text{var}(P(Y|X)) \end{aligned}$$

Mostriamo che l'attesa del DP è 0

$$\begin{aligned} \text{DP} &= 2P(P((Y - P(Y - X))(P(Y|X) - P(X)|X)) \\ &= 2P((P(Y|X) - P(X))P((Y - P(Y|X))(X))) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$P(Y|X)$  dipende solo da  $X$ , se conosco  $X$  lo posso portare fuori.

Dove DP è il doppio prodotto. Quindi abbiamo ottenuto che la varianza si può descrivere come la somma di due termini:

$$\text{var}(Y) = \text{var}(P(Y|X)) + P(\text{var}(Y|X))$$

Vogliamo applicare questa formula al processo di Poisson composto:

$$Y_t = \sum_{k=1}^{N_t} X_k$$

Detta  $\mu = P(X_1)$  (ricordando che le variabili sono identicamente distribuite, quindi  $\mu$  è l'attesa di tutte le  $X_i$ ), riscriviamo:

$$\begin{aligned} \text{var}(Y_t) &= P(P(Y_t|N_t)) \\ &= P(N_t\mu) \\ &= \mu P(N_t) \\ &= \lambda t\mu \end{aligned}$$

con  $N_t$  processo di Poisson di parametro  $\lambda$ .

Quindi usando la formula precedente:

$$\begin{aligned} \text{var}(Y_t) &= P(\text{var}(Y_t|N_t)) + \text{var}(P(Y_t|N_t)) \\ &= P(N_t\sigma^2) + \text{var}(N_t\mu) & \sigma^2 = \text{var}(X_1) \\ &= \lambda t\sigma^2 + \mu^2\lambda t \\ &= \lambda t(\sigma^2 + \mu^2) \\ \text{var}(X_1) &= P((X_1)^2) - \mu^2 \\ \sigma^2 &= P((X_1)^2) - \mu^2 \\ P((X_1)^2) &= \mu^2 + \sigma^2 \end{aligned}$$

$\lambda t\sigma^2 + \mu^2\lambda t$  è la formula della varianza nel processo di Poisson composto.

### 5.5.1 Esempi

Vediamo alcuni esempi di processi di Poisson composti.

- **Evento sportivo** Ci sono dei pullman che contengono un certo numero di tifosi. Supponiamo che questi pullman arrivino con un certo tasso di Poisson e che il numero di clienti in un pullman siano variabili aleatorie indipendenti con una certa distribuzione. Questo è un processo di Poisson composto.

- **Supermercato** In questo esempio arrivano dei clienti con un processo di Poisson; ogni cliente fa una certa spesa, che può essere una variabile aleatoria con una certa distribuzione.

Il valore dell'importo dei clienti da 0 a  $t$  si può vedere come un processo di Poisson composto.

Vediamo ora un esercizio d'esempio.<sup>1</sup>

Supponiamo ci sia una migrazione di famiglie che arrivano da una certa area. Le famiglie arrivano con un tasso  $\lambda = 2$  (ovvero, in media arrivano 2 famiglie alla settimana). Le famiglie possono avere dimensioni (e rispettive probabilità di avere quella dimensione):

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Qual è l'attesa e la varianza del numero di individui  $Y$  che arrivano in 5 settimane?

Sia  $X_1$  la variabile aleatoria che rappresenta il numero di individui della prima famiglia che arriva.

$$P(X_1) = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3} + \frac{4}{6} = \frac{15}{6}$$

$$\begin{aligned} P(Y) &= \lambda t P(X_1) \\ &= 2 \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P((X_1)^2) &= \frac{1}{6} + \frac{4}{3} + \frac{9}{3} + \frac{16}{6} = \frac{48}{6} = 8 \\ \text{var}(Y) &= \lambda t P((X_1)^2) \\ &= 2 \cdot 5 \cdot 8 \end{aligned}$$

L'esempio appena visto era una coda di tipo  $M/G/\infty$ .

Vediamo ora un esempio con un solo sportello; consideriamo un sistema di coda  $M/G/1$ , ovvero gli arrivi sono un processo di Poisson, abbiamo una distribuzione  $G$  per il tempo di servizio e abbiamo appunto un solo sportello.

Cosa succede in questo caso? Quando arriva un cliente, se lo sportello è libero allora viene servito e il suo tempo di servizio ha una certa distribuzione che supponiamo abbia media e varianza finite. Altrimenti si mette in coda.

---

<sup>1</sup>Esempio presente sul Ross.

Il problema che ci poniamo è: qual è l'attesa del tempo  $B$  in cui lo sportello rimane occupato? Sia  $S$  il tempo di servizio del primo cliente se  $N(S) = 1$ , dove  $N(S)$  è il numero dei clienti che arrivano durante il tempo  $S$ .

Se  $N(S) = 1$  (ovvero, se durante il tempo di servizio del primo cliente arriva un solo cliente), possiamo scrivere il tempo di occupazione come

$$B = S + B_1$$

Dove  $B_1$  è il tempo di occupazione partendo dal cliente che è arrivato.

La distribuzione di  $B_1$  è uguale a quella di  $B$ . Il tempo in cui lo sportello rimane occupato partendo dal primo cliente, ha la stessa distribuzione del tempo di occupazione del primo cliente. In generale, se  $N(S) = n$ :

$$B = S + \sum_{i=1}^n B_i$$

$$P(B|S) = S + P\left(\sum_{i=1}^{N(S)} B_i | S\right)$$

$B_i$  è il tempo di occupazione dello sportello dovuto al cliente  $i$ -esimo. I  $B_i$  sono indipendenti tra loro.

$\sum_{i=1}^{N(S)} B_i$  è un processo di Poisson composto.

$$P(B|S) = S + P\left(\sum_{i=1}^{N(S)} B_i(S)\right)$$

$N(S)$  è un processo di Poisson di parametro  $\lambda$  (è il processo degli arrivi dei clienti).

Supponiamo che  $P(B)$  sia finita.



$$\begin{aligned}
\text{var}(B|S) &= \text{var}\left(\sum_{i=1}^{N(S)} B_i|S\right) \\
P(B|S) &= S + \lambda S P(B) \\
&= (1 + \lambda P(B))S \\
\text{var}(B|S) &= \lambda S P(B^2) \\
P(B) &= P(P(B|S)) \\
&= (1 + \lambda P(B))P(S) \\
P(B) &= \frac{P(S)}{1 - \lambda P(S)} \quad \text{con } \lambda P(S) < 1 \text{ è la condizione perché } P(B) \text{ sia finito}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{var}(B) &= \text{var}(P(B|S)) + P(\text{var}(B|S)) \\
&= (1 + \lambda P(B))^2 \text{var}(S) + \lambda P(S) P(B^2) \\
&= (1 + \lambda P(B))^2 \text{var}(S) + \lambda P(S) \text{var}(B) + \lambda P(S) P(B)^2
\end{aligned}$$

Sostituendo all'ultima formula  $P(B)$  precedentemente calcolato:

$$\text{var}(B) = \frac{\text{var}(S) + \lambda P(S)}{(1 - \lambda P(S))^2} \quad \text{con } \lambda P(S) < 1$$

Nel caso di variabili aleatorie che assumono un'infinità numerabile di valori, possiamo decomporre un processo di Poisson composto in una somma di processi di Poisson.

Sia  $Y_t = \sum_{i=1}^{n_t} X_i$ . Supponiamo che i valori possibili degli  $X_i$  siano una successione finita o un'infinità numerabile  $\alpha_i, i \in \{1, \dots, n\}$  oppure  $i \in \mathbb{N}$ .

Supponiamo  $P(X_1 = \alpha_j) = p_j$  (questo è vero per tutte le  $X_i$  perché hanno la stessa distribuzione per ipotesi).

Possiamo decomporre i tempi degli arrivi in base al valore della corrispondente variabile aleatoria: diciamo che si ha un arrivo di tipo  $j$  quando la corrispondente variabile aleatoria vale  $\alpha_j$ .

Sia  $N_t^{(j)}$  il processo di conteggio che conta gli arrivi di tipo  $j$ . Allora possiamo scrivere:

$$Y_t = \sum_j \alpha_j N_t^{(j)}$$

$N_t^{(j)}$  è un processo di Poisson con intensità  $\lambda p_j$  (perché quando si ha un arrivo, la probabilità che sia di tipo  $j$  è data appunto da  $p_j$ ).

Ci chiediamo: quanto vale  $P(Y_t)$ ?

$$P(Y_t) = \sum_j \alpha_j p_j \lambda t$$

$\alpha_j p_j$  è l'attesa di una delle variabili aleatorie (perché hanno tutte la stessa attesa), diciamo  $X_1$ :

$$= \lambda t P(X_1)$$

Invece, siccome  $Y_t = \sum_j \alpha_j N_t^{(j)}$ , gli  $N_t^{(j)}$  sono indipendenti, quindi:

$$\begin{aligned} \text{var}(Y_t) &= \sum_j \alpha_j^2 \text{var}(N_t^{(j)}) \\ &= \sum_j \alpha_j^2 \lambda t p_j \\ &= \lambda t \sum_j \alpha_j^2 p_j \\ &= \lambda t P((X_1)^2) \end{aligned}$$

Abbiamo quindi ottenuto che  $Y_t$  si può scrivere come

$$Y_t = \sum_j \alpha_j N_t^{(j)}$$

Dove  $N_t^{(j)}$  sono processi di Poisson indipendenti con intensità  $\lambda p_j$ .

Rimane un'ultima nozione da dare sui processi di Poisson composti: la somma di due processi di Poisson composti indipendenti è ancora un processo di Poisson composto. Supponiamo di avere  $X_t, Y_t$  composti indipendenti, con intensità  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  e funzioni di ripartizione delle variabili aleatorie  $F_1$  e  $F_2$ , rispettivamente.

Sia  $Z_t = X_t + Y_t$ .  $Z_t$  è un processo di Poisson composto con tasso  $\lambda_1 + \lambda_2$  e funzione di ripartizione  $F$  data da:

$$F(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} F_1(x) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} F_2(x)$$

Quindi se noi sommiamo due processi di Poisson composti, avremo un arrivo quando ci sarà un arrivo del primo processo, oppure un arrivo del secondo. Quindi i due processi di Poisson sottostanti si sommano.

Questa formula indica la probabilità che l'arrivo sia del primo processo, più la probabilità che l'arrivo sia del secondo processo di Poisson; possiamo vederla come, usando la formula delle probabilità totali, la composizione delle due funzioni di ripartizione con pesi  $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$  e  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ . Questa formula si può estendere al caso di  $n$  processi di Poisson composti.

## 5.6 Processi di pura nascita (pure birth processes)

Abbiamo visto che un modo per caratterizzare il processo di Poisson è dire che il tempo tra gli arrivi è dato da  $T_1 = U_1, T_2 = U_2, \dots$  con  $U_1, U_2, \dots$  una successione di variabili aleatorie indipendenti con distribuzione esponenziale di parametro  $\lambda$ , e  $\lambda$  il parametro del processo di Poisson.

Supponiamo ora che le variabili  $U_i$  abbiano parametri non necessariamente uguali. Queste variabili rappresentano sempre il numero di arrivi, ma si possono interpretare anche in termini ad esempio di crescita di una popolazione di cellule, dove contiamo quante sono le cellule che si duplicano in un tempo  $t$ ; si vede che i tempi tra due duplicazioni hanno distribuzione esponenziale, ma il parametro dell'esponenziale dipende da  $i$ : ovvero più è grande la popolazione, più il tempo è grande. Questi processi si chiamano **processi di pura nascita**.

---

I processi di pura nascita sono una generalizzazione dei processi di Poisson; invece di avere un unico parametro  $\lambda$ , abbiamo una successione di parametri  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_i > 0$  e una successione di variabili aleatorie  $U_0, U_1, U_2, \dots$  dove  $U_i$  sono indipendenti, esponenziali, di parametro  $\lambda_i$ .

Detto  $V_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ , il processo è quindi definito:

$$N_t = \max k | V_k \leq t$$

Il processo di Poisson è un caso particolare di processo di pura nascita dove i  $\lambda$  sono tutti uguali.

$$P_k(t) = P(N_t = k)$$

**Esplosione** Se i  $\lambda_i$  crescono troppo velocemente, la popolazione può crescere all'infinito in un tempo finito.

Se ora consideriamo  $P_0(t+h)$ :

$$\begin{aligned}
 P_0(t+h) &= P(U_0 > t+h) \\
 &= P(U_0 > t)P(U_0 > t+h|U_0 > t) \\
 &= -e^{-\lambda_0 h} \\
 &= 1 - \lambda_0 h + o(h) \\
 P_0(t+h) - P_0(t) &= P_0(t)(1 - \lambda_0 h - 1 + o(h)) \\
 &= -P_0(t)\lambda_0 h \\
 \frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} &= -\lambda_0 P_0(t) + \frac{o(h)}{h}
 \end{aligned}$$

Se mandiamo  $h$  a 0, il rapporto incrementale tende alla derivata:

$$P'_0(t) = -\lambda_0 P_0(t)$$

La stessa cosa possiamo farla in generale:

$$\begin{aligned}
 P_k(t+h) &= P \\
 &= P(N_{t+h} = k) =
 \end{aligned}$$

Può succedere in due modi:

- $P_k(t)$  è la probabilità che, al tempo  $t$ ,  $N_t = k$ ; bisogna che  $U_k > h$ , e quindi scriveremo nell'equazione  $P_k(t)(1 - e^{-\lambda_k h})$
- oppure al tempo  $t$  eravamo in  $k-1$  e la variabile  $U_{k-1} < h$ , che ci dà il membro  $-P_{k-1}(t)(\lambda_{k-1}h + o(h))$

Mettendo tutto insieme:

$$\begin{aligned}
 &= P_k(t)(1 - e^{-\lambda_k h}) + P_{k-1}(t)(\lambda_{k-1}h + o(h)) + o(h) \\
 \frac{P_k(t+h) - P_k(t)}{h} &= -\lambda_k P_k(t) + \frac{o(h)}{h} + \lambda_{k-1} P_{k-1}(t) + \frac{o(h)}{h} \quad k \geq 1
 \end{aligned}$$

Facendo tendere  $h$  a 0 otteniamo la derivata:

$$P'_k(t) = -\lambda_k P_k(t) + \lambda_{k-1} P_{k-1}(t)$$

Abbiamo una successione di equazioni; la prima è  $P'_0(t) = -\lambda_0 P_0(t)$ , per  $k \geq 1$  usiamo quella sopra.

$$\begin{aligned}
P_0(0) &= 1 \\
P_0(t) &= e^{-\lambda_0 t} \\
&\dots
\end{aligned}$$

Vediamo ora il fenomeno dell'esplosione:

$$\begin{aligned}
S_n(t) &= P_0(t) + \dots + P_n(t) \\
&= P(N_t \leq n)
\end{aligned}$$

Sia  $\mu_n(t) = 1 - S_n(t)$ ; allora  $\mu_n(t) = P(N_t > n)$  e sia  $\mu(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(t)$ ; quando  $n$  cresce, la probabilità  $\mu_n$  decresce:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_n(t) = \inf_n \mu_n(t)$$

Questa è la probabilità che ci sia stata un'esplosione: infatti,  $\mu_n(t)$  è la probabilità che  $N_t > n$ , quindi se si fa tendere  $n$  all'infinito, questa è la probabilità che  $N_t$  sia andato all'infinito, perché è più grande di tutti gli  $n$ .

Usiamo le equazioni scritte in precedenza per calcolare la derivata di  $S_n(t)$ :

$$\begin{aligned}
S'_n(t) &= P'_0(t) + P'_1(t) + \dots + P'_n(t) \\
&= -\lambda_0 P_0(t) + (\lambda_0 P_0(t) - \lambda_1 P_1(t)) + \dots + (\lambda_{n-1} P_{n-1}(t) - \lambda_n P_n(t)) \\
&= -\lambda_n P_n(t)
\end{aligned}$$

Ricordando che  $\mu_n(t) = 1 - S_n(t)$ :

$$\begin{aligned}
S'_n(t) &= -\mu'_n(t) \\
\mu'_n(t) &= -\lambda_n P_n(t)
\end{aligned}$$

Siccome  $\mu_n(0) = 0$ , posso dire che:

$$\mu_n(t) = \lambda_n \int_0^t p_n(s) ds \quad \text{oppure} \quad \int_0^t P_n(s) ds = \frac{\mu_n(t)}{\lambda_n}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^t S_n(s) ds &= \int_0^t P_0(s) + \dots + P_n(s) ds \\
&= \frac{\mu_0(t)}{\lambda_0} + \dots + \frac{\mu_n(t)}{\lambda_n}
\end{aligned}$$

Supponiamo che  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = +\infty$ :

$$\frac{\mu_0(t)}{\lambda_0} + \dots + \frac{\mu_n(t)}{\lambda_n} > \mu(t) \left( \frac{1}{\lambda_0 + \dots + \frac{1}{\lambda_n}} \right)$$

Ricordando che  $S_n(t) = 1 - \mu_n(t)$ , se facciamo tendere  $n$  all'infinito nell'integrale precedente, otteniamo che

$$\sum_0^t (1 - \mu(t)) dt > \mu(t) \left( \frac{1}{\lambda_0 + \dots + \frac{1}{\lambda_n}} \right)$$

Se  $\mu(t)$  fosse maggiore di 0, facendo tendere  $n$  all'infinito  $\mu(t)$  tenderebbe all'infinito; ma la disuguaglianza non sarebbe possibile. Questo implica che  $\mu(t) = 0 \Rightarrow \mu(t) = 0$

In questo modo abbiamo dimostrato che se la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}$  tende all'infinito, allora la probabilità che ci sia stata un'esplosione prima di  $t$  è 0; questo si ha se i  $\lambda_k$  non crescono troppo, ad esempio se sono costanti come nel processo di Poisson.

Consideriamo ora un altro caso. Supponiamo che  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} < \infty$

Se guardiamo la disuguaglianza precedente, al numeratore ci sono delle probabilità; quindi può essere maggiorata a 1:

$$\frac{\mu_0(t)}{\lambda_0} + \dots + \frac{\mu_n(t)}{\lambda_n} \leq \frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} + \dots + \frac{1}{\lambda_n}$$

L'integrale precedente lo posso ora riscrivere come  $\int_0^t 1 - \mu_0(t) dt$

Se faccio tendere  $n$  all'infinito, ottengo che

$$\sum_0^t (1 - \mu(s)) d(s) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} < \infty$$

Ma dev'essere vero per ogni tempo  $t$ ; quindi  $\mu_s > 0$ , per qualche  $s$ . Perché se  $\mu_s = 0$  per ogni  $s$ , allora  $\int_0^t (1 - \mu_s d(s)) = t$ , quindi  $t \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}$ . Ma questo non è vero, perché ho supposto che la serie è finita, quindi potrei prendere un  $t$  abbastanza grande per cui la disuguaglianza non vale.

Quindi se la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}$  è finita, allora con probabilità 1 per qualche valore  $s$  dobbiamo avere esplosione. Ma quando è finita? Quando i  $\lambda_k$  crescono abbastanza rapidamente.

Quando i  $\lambda_k$  crescono abbastanza rapidamente allora abbiamo l'esplosione. Nel caso del processo di Poisson, i  $\lambda_i$  sono tutti uguali a  $\lambda$ :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = +\infty$$

Ad esempio, nel processo di Yule  $\lambda_i = i \cdot \lambda$ ,  $i \geq 1$ , ovvero non partiamo da 0.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \frac{i=1}{\infty} \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = +\infty$$

I  $\lambda_i$  crescono, mentre nel caso precedente erano costanti; ma comunque non crescono abbastanza per provocare un'esplosione. Per quella dovremmo avere ad esempio  $\lambda_i = i^{1+\epsilon}$ ,  $\epsilon > 0$ ; facendo la somma:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i)^{1+\epsilon}} < \infty$$

In questo caso la serie è convergente, e i  $\lambda_i$  crescono abbastanza rapidamente per provocare esplosione.

Quando abbiamo esplosione il processo non è definito, perché se si fa la somma delle probabilità di trovarsi nei vari stati, questa è minore di 1.





## Chapter 6

# Catene di Markov con tempo continuo

Supponiamo di avere un numero finito o un'infinità numerabile di stati e omogenei - ovvero, omogenei nel tempo.

Cosa occorre per definire una catena di Markov con tempo continuo? Dobbiamo anzitutto definire  $S$ , spazio degli stati, finito o numerabile.

$\rho_s$  è la distribuzione iniziale:

$$s \in S \quad 0 \leq \rho_s \leq 1 \quad \sum_s \rho_s = 1$$

Probabilità di transizione in un tempo  $t$ ,  $P$ :

$$\forall t > 0, \quad P_{s,s'}(t)$$

Nel caso delle catene a tempo discreto, assegnavamo la probabilità di transizione in un passo; la probabilità di transizione in più passi si calcolava facendo la moltiplicazione riga colonna della matrice delle probabilità di transizioni. Invece, nel caso del tempo continuo, essendo il tempo continuo, il tempo  $t$  può essere arbitrariamente piccolo; in teoria dovremmo definire la probabilità  $P$  per tutti i tempi  $t$ .

Che condizioni deve soddisfare  $P_{s,s'}(t)$ ?

1.  $0 \leq P_{s,s'}(t) = 1$
2.  $\forall s \sum_{s'} P_{s,s'}(t) = 1$
3. Equazioni di Chapman-Kolmogorov:  
Se  $t_1 > 0, t_2 > 0$ :

$$P_{s,s'}(t_1 + t_2) = \sum_{s''}^{s,s''} (t_1) P_{s'',s'}(t_2)$$

Posso ora definire una catena di Markov. Sia  $X_t$  la catena di Markov,  $\forall t > 0$  variabili aleatorie a valori in  $S$

Se assegno  $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$  allora

$$\begin{aligned} P(X_0 = S_0, X_{t_1} = S_1, \dots, X_{t_n} = S_n) &= \rho_{s_0} P_{s_0,s_1}(t_1) P_{s_1,s_2}(t_2 - t_1) \dots P_{s_{n-1},s_n}(t_n - t_{n-1}) \\ P(X_0 = S_0, X_{t_1} = S_1, \dots, X_{t_{n-1}} = S_{n-1}) &= \rho_{s_0} P_{s_0,s_1}(t_1) \dots P_{s_{n-2},s_{n-1}}(t_{n-1} - t_{n-2}) \end{aligned}$$

D'altra parte se volessi calcolare

$$P(X_0 = S_0, X_{t_2} = S_2, \dots, X_{t_{n-1}} = S_{n-1}) = \rho_{s_0} P_{s_0,s_2}(t_2) \dots P_{s_{n-1},s_n}(t_n - t_{n-1})$$

Questa probabilità posso ottenerla sommando su tutti gli stati  $S_1$ :

$$\sum_s p_{s_0,s_1}(t_1) p_{s_1,s_2}(t_2 - t_1) = p_{s_0,s_2}(t_2)$$

applicando le equazioni di Chapman-Kolmogorov.

Le due condizioni servono a far sì che queste probabilità siano coerenti tra loro.

Come nel caso del tempo discreto, queste catene di Markov con tempo continuo soddisfano **la proprietà di Markov**: ovvero, se calcolo la probabilità di trovarmi al tempo  $t_n$  sono in uno stato  $s'$ , sapendo che al tempo precedente mi trovavo in questi stati:

$$P(X_{t_n} = s' | X_0 = s_0, X_{t_1} = s_1, \dots, X_{t_{n-1}} = s)$$

Questa probabilità dipende solo dall'ultimo stato in cui mi trovo, e non da tutti quelli precedenti. Per calcolarla occorre usare la formula delle probabilità condizionate:

$$\begin{aligned} &= \frac{P(X_0 = s_0, X_{t_1} = s_1, \dots, X_{t_{n-1}} = s, X_{t_n} = s')}{P(X_0 = s_0, X_{t_1} = s_1, \dots, X_{t_{n-1}} = s)} \\ &= \frac{\rho_{s_0} P_{s_0,s_1}(t_1) \cdot \dots \cdot P_{s,s'}(t_n - t_{n-1})}{\rho_{s_0} P_{s_0,s_1}(t_1) \cdot \dots \cdot P_{s_{n-2},s}(t_{n-1} - t_{n-2})} \\ &= P_{s,s'}(t_n - t_{n-1}) \end{aligned}$$

La probabilità dipende solo dall'ultimo stato e dalla differenza dei tempi.

**Esempio** Processo di Poisson di parametro  $\lambda > 0$

Sia  $S = \mathbb{N}$  e la distribuzione iniziale  $\rho_0 = 1, \rho_s = 0$  per  $s \geq 1$ .

$$P_{s,s'}(t) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{s'-s}}{(s'-s)!} \cdot e^{-\lambda t}, & s' \geq 0 \\ 0, & s' < 0 \end{cases}$$

Questo vuol dire che la probabilità di andare da uno stato  $s$  a uno stato  $s'$  è tale che la distribuzione della differenza ha una distribuzione di Poisson con parametro  $\lambda(t)$ .

Questa è la probabilità degli incrementi; la probabilità di avere un incremento ha la distribuzione di Poisson di parametro  $\lambda(t)$ , dove  $t$  è la lunghezza dell'intervallo.

Devo verificare che queste probabilità di transizioni verifichino le condizioni.

La prima è verificata.

Devo verificare poi le equazioni di Chapman-Kolmogorov:

$t_1 > 0, t_2 > 0$

$$\sum_{s'' \in \mathbb{N}} p_{s,s''}(t_1) p_{s'',s'}(t_2)$$

Se  $s' < s$ , la sommatoria è pari a 0.

Se  $s' \geq s$ , la sommatoria è pari a

$$\sum_{s \leq s'' \leq s'} p_{s,s''}(t_1) p_{s'',s'}(t_2)$$

Facciamo un cambio di variabile:  $k_1 = s'' - s, k_2 = s' - s''$

$$\begin{aligned} \sum_{k_1=0}^{s'-s} \frac{(\lambda t_1)^{k_1}}{k_1!} e^{-\lambda t_1} \frac{(\lambda t_2)^{s'-s-k_1}}{(s'-s-k_1)!} e^{-\lambda(t_2-t_1)} &= \frac{\lambda(t_2+t_1)^{s'-s}}{(s'-s)!} e^{-\lambda(t_1+t_2)} \\ &= P_{s,s'}(t_1+t_2) \end{aligned}$$

Queste probabilità di transizioni verificano le equazioni di Chapman-Kolmogorov.

Nel caso del processo di Poisson possiamo esprimere esplicitamente le probabilità di transizione da uno stato all'altro; in generale, quando abbiamo un tempo continuo, è però più difficile farlo. È importante avere un modo alternativo per definire le catene di Markov con tempo continuo. Questo si fa con i cosiddetti processi di tipo esponenziale.

## 6.1 Processi di tipo esponenziale

Vogliamo introdurre in generale i processi di Markov con tempo continuo. In generale, è difficile specificare la probabilità di transizione (perché dovremo specificarla per tutti i tempi positivi); c'è un modo equivalente però. In questa formulazione si chiama **processo di tipo esponenziale**. Sono basati sul fatto che nelle catene di Markov con tempo continuo il tempo che rimaniamo in uno stato è una distribuzione esponenziale.

Sia  $S$  lo spazio degli stati,  $\rho_s$  la distribuzione iniziale:  $\sum \rho_s = 1$

$$\forall s \in S, v_s > 0$$

$$\forall s, s' \quad s' \neq s \quad \exists a_{s,s'} \quad (\text{nota: nel Ross è } p_{s,s'})$$

$$a_{s,s'} \geq 0 \quad \sum_{s'} a_{s,s'} = 1$$

Quindi è una probabilità di transizione, ma è definita quando  $s' \neq s$ . L'interpretazione è la seguente: nel processo di tipo esponenziale,  $v_s$  è il parametro della distribuzione esponenziale del tempo in cui rimaniamo nello stato  $s$ . Partiamo quindi dallo stato iniziale  $s$  con distribuzione  $\rho_s$ ; poi rimaniamo nello stato con distribuzione che dipende dal parametro  $v_s$ . Quando scade il tempo, passiamo dallo stato  $s$  allo stato  $s'$  con probabilità  $a_{s,s'}$ . Poi rimaniamo nello stato  $s'$  con tempo esponenziale di parametro  $v_{s'}$  e così via.

I casi che abbiamo già visto, ovvero il processo di Poisson e i processi di pura nascita, sono casi particolari: nel processo di Poisson,  $v_s \equiv \lambda_i$  (i  $v_s$  sono tutti uguali ai  $\lambda_i$ ) e la matrice  $a_{s,s'}$  è definita così:

$$a_{s,s+1} = 1 \quad a_{s,s'} = 0, \quad s' = s$$

E la distribuzione iniziale è:

$$\rho_s = 1 \quad \rho_s = 0, \quad s \neq 0$$

Nei processi di pura nascita invece abbiamo che  $v_s = \lambda_s$  (per ogni stato  $s$  abbiamo un  $\lambda_s$  diverso); la matrice di transizione è la stessa:

$$a_{s,s+1} = 1 \quad a_{s,s'} = 0, \quad s' \neq s + 1$$

In generale, quando abbiamo un processo di tipo esponenziale se  $v_s \leq C \forall s$ , allora non si può verificare l'esplosione.

**Esempio** Vediamo il modello esponenziale più semplice possibile, quello con spazio degli stati di dimensione 2:  $S = \{0, 1\}$ ; avremo due costanti  $v_0$  e  $v_1$ .

$$a_{0,1} = 1 \quad a_{1,0} = 0$$

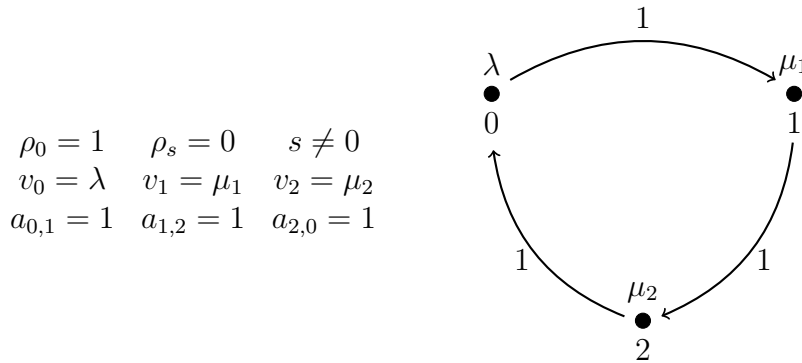
Supponiamo di partire dallo stato 0:

$$\rho_0 = 1 \quad \rho_1 = 0$$

Questa potrebbe essere ad esempio la descrizione di un macchinario: per un certo periodo è nello stato di funzionamento (stato 0), poi passa in uno stato di inattività per riparazione (stato 1), poi torna nello stato di funzionamento etc.

**Esempio** Nota: nel Ross è l'esempio del negozio del lustrascarpe.

Sia  $S = \{0, 1, 2\}$ . Immaginatoci un negozio di un lustrascarpe dove inizialmente non ci sono clienti (stato 0); i clienti arrivano con una distribuzione di Poisson di parametro  $\lambda$ , si passa poi nello stato in cui le scarpe vengono pulite (stato 1) e infine in quello in cui vengono lucidate (stato 2):



Quello che è interessante chiedersi è, se facciamo passare molto tempo, qual è la percentuale di tempo in cui nel negozio c'è un cliente e quella in cui non c'è nessun cliente (nel negozio può rimanere al massimo un cliente alla volta).

Torniamo ai processi di pura nascita. Sia  $S$  lo spazio degli stati:

$$\forall s \in S, \quad v_s > 0$$

$$\forall s, s' \in S \quad s' \neq s \quad a_{s,s'} = 0$$

$$\sum_{\substack{s' \in S \\ s' \neq s}} a_{s,s'} = 1$$

Sia  $\rho_s$  la distribuzione iniziale. Possiamo far vedere che un processo di tipo esponenziale corrisponde ad una catena di Markov omogenea continua. Il motivo di questa corrispondenza risiede nella proprietà dell'assenza di memoria della distribuzione esponenziale.

Gli esempi visti fin'ora fanno parte di una classe di processi esponenziali detti **processi di nascita e morte** dove  $S = \mathbb{N}$  oppure  $S = [O, M] \in \mathbb{N}$ . Per i processi di pura nascita, per ogni stato abbiamo due parametri:  $\lambda_0, \forall s \geq 1 \lambda_s, \mu_s$

I processi di pura nascita sono un caso particolare dove  $\mu_s = 0$ .

Per ogni stato abbiamo due tempi esponenziali, uno di parametro  $\lambda_s$  e uno di parametro  $\mu_s$ . Consideriamo il più piccolo tra  $\lambda_s$  e  $\mu_s$ ; se è  $\lambda_s$ , andremo nello stato  $s + 1$ , altrimenti  $s - 1$ . Nel caso dello stato 0 abbiamo solo  $\lambda_0$ , perché non ci sono stati con indice negativo.

Se voglio descriverlo come processo esponenziale, avremo che  $v_0 = \lambda_0$ ,  $s > 1$  e  $v_s = \lambda_s + \mu_s$  perché se ci troviamo nello stato 0, il tempo che rimaniamo nello stato sarà  $\lambda_0$ ; altrimenti, il tempo esponenziale che rimaniamo nello stato sarà il minimo tra  $\lambda_s$  e  $\mu_s$ . Ma noi abbiamo visto che se abbiamo due variabili con distribuzione esponenziale indipendente, il più piccolo dei due ha una distribuzione esponenziale che è pari alla somma dei parametri ( $\lambda_s + \mu_s$ ).

Infine, la probabilità che tra i due il minimo sia  $\lambda_s$  è dato da  $\frac{\lambda_s}{\lambda_s + \mu_s}$ ; questo caso e il caso in cui  $\mu_s$  sia il minimo tra i due sono riassunti nelle formule sottostanti:

$$a_{s,s+1} = \frac{\lambda_s}{\lambda_s + \mu_s} \quad a_{s,s-1} = \frac{\mu_s}{\lambda_s + \mu_s} \quad a_{0,1} = 1$$

Anche nei processi di nascita e morte si può verificare esplosione. Se i  $\lambda_s$  sono tutti maggiorati da una costante, non si può avere esplosione, e nemmeno se i  $\lambda_i$  crescono come  $s$ , ovvero  $\lambda_s = s \cdot \lambda$  (quindi crescono linearmente con una qualche costante  $s$ ).

Vediamo qual è l'attesa del tempo con cui possiamo andare da uno stato all'altro. Sia  $T_s$  il tempo per andare da  $s$  a  $s + 1$ .

Consideriamo l'attesa di  $T_s$ ,  $P(T_s)$ :

$$P(T_0) = \frac{1}{\lambda_0}$$

Consideriamo il caso generale  $s \geq 1$ ; definiamo  $I_s$ :

$$I_s = \begin{cases} 0, & \text{se da } s \text{ passiamo a } s-1 \\ 1, & \text{se da } s \text{ passiamo a } s+1 \end{cases}$$

$$P(T_s | I_s = 1) = \frac{1}{\lambda_s + \mu_s}$$

$$P(T_s | I_s = 0) = \frac{1}{\lambda_s + \mu_s} + P(T_{s-1}) + P(T_s)$$

Se  $I_s = 1$ , allora passiamo allo stato  $s+1$ .

Se invece  $I_s = 0$ , vuol dire che passiamo allo stato  $s-1$ ; per tornare allo stato  $s+1$ , siccome possiamo fare solo salti di 1, dovremo prima tornare allo stato  $s$  e poi andare allo stato  $s+1$ .

Il tempo per andare dallo stato  $s$  allo stato  $s'$ , con  $s' > s$ :

$$T_s + T_{s+1} + \dots + T_{s'+1}$$

Quindi possiamo scrivere infine l'attesa di  $T_s$ :

$$\begin{aligned} P(T_s) &= P(T_s | I_s = 0)P(I_s = 0) + P(T_s | I_s = 1)P(I_s = 1) \\ &= \frac{\lambda_s}{\lambda_s + \mu_s} \frac{1}{\lambda_s + \mu_s} + \frac{\mu_s}{\lambda_s + \mu_s} \left( -\frac{1}{\lambda_s + \mu_s} P(T_{s-1}) + P(T_s) \right) \\ &= \frac{1}{\lambda_s + \mu_s} + \frac{\mu_s}{\lambda_s + \mu_s} (P(T_{s-1}) + P(T_s)) \\ P(T_s) \left( 1 - \frac{\lambda_s}{\lambda_s + \mu_s} \right) &= \frac{1}{\lambda_s + \mu_s} + \frac{\mu_s}{\lambda_s + \mu_s} P(T_{s-1}) \\ P(T_s) &= \frac{1}{\lambda_s} + \frac{\mu_s}{\lambda_s} P(T_{s-1}) \end{aligned}$$

Siccome  $P(T_0) = \frac{1}{\lambda_0}$ , posso calcolare induttivamente (grazie alla formula sopra) tutte le attese di  $T_s$

**Esempio** Vediamo un processo di nascita e morte con  $\lambda_s = \lambda$  e  $\mu_s = \mu$ ; questo corrisponde ad un processo di coda  $M/M/1$ , dove  $\lambda$  è il parametro di Poisson degli arrivi e  $\mu$  è il parametro del tempo di servizio. Supponiamo  $\mu \neq \lambda$ :

$$P(T_0) = \frac{1}{\lambda} \quad P(T_s) = \frac{1}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda} P(T_{s-1})$$

$$\begin{aligned}
P(T_1) &= \frac{1}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda} \frac{1}{\lambda} \\
P(T_2) &= \frac{1}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda} \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda} \frac{1}{\lambda} \right) \\
P(T_1) &= \frac{1}{\lambda} \left( 1 + \frac{\mu}{\lambda} \right) \\
P(T_2) &= \frac{1}{\lambda} \left( 1 + \frac{\mu}{\lambda} + \left( \frac{\mu}{\lambda} \right)^2 \right) \\
&\dots \\
P(T_s) &= \frac{1}{\lambda} \left( \frac{1 - \left( \frac{\mu}{\lambda} \right)^{s+1}}{1 - \frac{\mu}{\lambda}} \right) \\
&= \frac{1 - \left( \frac{\mu}{\lambda} \right)^{s+1}}{\lambda - \mu}
\end{aligned}$$

Se  $\lambda = \mu$ :

$$P(T_s) = \frac{1}{\lambda} (s + 1)$$

Per andare da  $s$  a  $s'$ , l'attesa sarà

$$T_s + T_{s+1} + T_{s'-1}$$

L'esempio del lustrascarpe non è un processo di nascita e morte, perché si può passare solo da uno stato a quello accanto, come se gli stati fossero in sequenza, mentre nell'esempio visto ci sono altri tipi di passaggi possibili che non rispettano questo fatto.

Vediamo un processo di nascita e morte che modella la crescita (e decrescita) di una popolazione.

### 6.1.1 Modello di crescita lineare con immigrazione

In questo modello gli individui possono replicarsi: da un individuo se ne genera un altro, oppure morire. Il tempo dello sdoppiamento è un esponenziale di parametro  $\lambda$ , il tempo di morte è un esponenziale di parametro  $\mu$ .

Ci interessa il numero totale della popolazione.

C'è però anche un afflusso di individui dall'esterno (dati dall'immigrazione);  $\theta$  è il tempo associato con l'immigrazione.



Sia lo spazio degli stati  $S = \mathbb{N}$ .

Sia  $\mu_n = n \cdot \mu$  e  $\lambda_n = n \cdot \lambda + \theta$ .

Nel caso della morte, se abbiamo  $n$  individui, a ogni individuo sarà associato un tempo esponenziale (il tempo della morte). Quando un individuo muore, la popolazione diminuirà di 1 al minimo dei tempi associato agli individui. Il minimo tra  $n$  variabili aleatorie con distribuzione esponenziale - che supponiamo indipendenti - è una distribuzione esponenziale con la somma dei parametri, ovvero  $n\mu$  (perché tutti i  $n$  parametri sono pari a  $\mu$ ).

Analogo per  $\lambda n$ , dove però abbiamo un altro parametro  $\theta$ , pure questo esponenziale.

Definiamo  $X_t$  la variabile aleatoria che descrive il numero totale degli individui. Sia  $M(t)$  l'attesa di  $X_t$ :  $M(t) = P(X_t)$ .

Fissato un certo  $i \in \mathbb{N}$ , la distribuzione iniziale sarà  $\rho_i = 1, \rho_s = 0, s \neq i$ : all'inizio la popolazione comprende  $i$  individui.

Vogliamo vedere come si evolve  $M(t)$ .

Per calcolare  $M(t)$  usiamo un'equazione differenziale:

$$M(t+h) = P(X_{t+h}) = P(P(X_{t+h}|X_t))$$

$$X_{t+h} = \begin{cases} X_t + 1, & \text{con probabilità } (\theta + \lambda X_t)h + o(h) \\ X_t - 1, & \text{con probabilità } (\mu X_t)h + o(h) \\ X_t, & \text{con probabilità } 1 - (\theta + X_t(\lambda + \mu)) + o(h) \end{cases}$$

Nel primo caso, aumentiamo di 1 quando la variabile  $(\theta + \lambda X_t)$  è più piccola di  $h$ ; la probabilità che una variabile esponenziale sia più piccola di  $h$  è  $1 - e^{-(\theta + \lambda X_t)h}$ .

Ci sarebbero altri casi, ma la probabilità di passare in uno stato che differisce più di 1 è un infinitesimo di ordine superiore.

$$\begin{aligned} M(t+h) - M(t) &= P(P(X_{t+h}|X_t)) - M(t) \\ &= P(\bar{X}_t) + (\theta + (\lambda - \mu)P(X_t)) + o(h) - P(\bar{X}_t) \\ &= \theta + (\lambda - \mu)M(t) + \frac{o(h)}{h} \end{aligned}$$

Facendo tendere  $h$  a 0 calcoliamo la derivata:

$$M'(t) = (\lambda - \mu)M(t) + \theta$$

La condizione iniziale è  $M(0) = i$ ; per risolvere l'equazione differenziale introduciamo una funzione  $h$ :

$$\begin{aligned}
h(t) &= (\lambda - \mu)M(t) + \theta \\
h'(t) &= (\lambda - \mu)M'(t) \\
&= (\lambda - \mu)^2 M(t) + (\lambda - \mu)\theta \\
&= (\lambda - \mu)((\lambda - \mu)M(t) + \theta) \\
&= (\lambda - \mu)h(t) \\
\frac{h'(t)}{h(t)} &= \lambda - \mu \\
\Rightarrow \frac{\partial \log(h(t))}{\partial t} &= \lambda - \mu
\end{aligned}$$

Supponiamo  $\lambda \neq \mu$ :

$$\log(h(t)) = (\lambda - \mu)t + c$$

Sia  $e^c = k$ :

$$\begin{aligned}
h(t) &= Ke^{(\lambda - \mu)t} \\
\Rightarrow (\lambda - \mu)M(t) + \theta &= Ke^{(\lambda - \mu)t}
\end{aligned}$$

Mi rimane da calcolare  $K$ ; sapendo che  $M(0) = i$ :

$$\begin{aligned}
(\lambda - \mu)i + \theta &= k \\
\Rightarrow M(t) &= \frac{(\lambda - \mu)i + \theta}{\lambda - \mu} \cdot e^{(\lambda - \mu)t} - \frac{\theta}{\lambda - \mu}
\end{aligned}$$

Se  $\lambda = \mu$ :

$$h'(t) = (\lambda - \mu)h(t) = 0$$

Se la derivata di  $h$  è 0, allora  $h$  sarà pari a una costante più un'altra costante:

$$\begin{aligned}
h(t) &= ct + d \\
\Rightarrow M(t) &= \theta t + i
\end{aligned}$$

Nel caso  $\mu = \lambda$  quindi la popolazione cresce linearmente con l'immigrazione. Nell'altro caso cresce se  $\lambda > \mu$  e la crescita è esponenziale, altrimenti si stabilizza e cresce grazie all'immigrazione. Può avvenire l'esplosione? No, perché in questo caso le costanti crescono linearmente, come  $n\lambda + \theta$ . In questo caso a maggior ragione, perché abbiamo anche le costanti  $\mu n$ . Per ogni tempo finito, la popolazione rimane finita con probabilità 1.

Abbiamo calcolato solo l'attesa del numero di individui; possiamo calcolare esplicitamente però le probabilità di transizione, ritornando ai modelli di pura nascita.

### 6.1.2 Modello di pura nascita

Posso considerare i processi di pura nascita come un caso particolare dei processi di nascita e morte dove tutti i  $\mu_n$  sono pari a 0:  $S = \mathbb{N}$ ,  $\mu_0 = \mu_1 = \dots = \mu_n = 0$

Sia  $s \in \mathbb{N}$ ; sia  $T_s$  il tempo di permanenza nello stato  $s$ .  $T_0, T_1, \dots$  sono esponenziali di parametro  $\lambda_s$  e sono indipendenti.

Vogliamo calcolare  $P_{i,j}(T)$  :

$$P_{i,j}(T) = (X_t = j | X_0 = i) \quad j \geq i$$

Nel caso dei processi di pura nascita lo stato può solo crescere, quindi la probabilità di andare da  $j$  a  $i$  con  $i < j$  è 0.

$$P_{i,j}(t) = P(T_i > t) = e^{-\lambda_i t}$$

Se  $i < j$ :

$$\begin{aligned} P_{i,j}(t) &= P(T_i + Y_{i+1} + \dots + T_j > t, T_i + \dots + T_{j-1} \leq t) \\ &= P((T_i + T_{i+1} + \dots + T_j > t) - (T_i + T_{i+1} + \dots + T_{j-1} > t)) \end{aligned}$$

Il secondo evento è più piccolo del primo, è contenuto nel primo

$$= P(T_i + T_{i+1} + \dots + T_j > t) - P(T_i + T_{i+1} + \dots + T_{j-1} > t)$$

Supponiamo  $\lambda_s \neq \lambda_{s'}$ , per  $s \neq s'$

$$= \sum_{k=1}^j e^{-\lambda_k t} \prod_{\substack{r \neq k \\ r = i}}^j \frac{\lambda_r}{\lambda_r - \lambda_k} - \sum_{k=1}^{j-1} e^{-\lambda_k t} \prod_{\substack{r \neq k \\ r = i}}^{j-1} \frac{\lambda_r}{\lambda_r - \lambda_k}$$

In questo caso c'è la possibilità che ci sia esplosione:

$$\sum_j P_{i,j}(t) < 1$$

Quando abbiamo esplosione,  $P_{i,j}$  non si possono vedere come probabilità di transizione proprie, in quanto la somma su tutti i  $j$  deve fare 1; ma se abbiamo l'esplosione, significa che in un tempo finito possiamo fare infiniti passaggi, quindi è come se uscissimo dallo spazio degli stati; dovremmo aggiungere un altro stato, che potremmo chiamare *infinito*, in cui potremmo andare.

**Processo di Yule** Un caso particolare è il processo di Yule, in cui  $\lambda_j = j\lambda$  con  $\lambda > 0$ .

Lo spazio degli stati non parte da 0:  $S = \{1, 2, 3, \dots\}$

In questo caso non c'è esplosione: se i  $\lambda_j$  crescono linearmente,

$$\sum_j \frac{1}{\lambda_j} = 1$$

Questa serie è infinita; infatti, la condizione per cui non ci sia esplosione è che la serie di  $\frac{1}{\lambda_j}$  sia divergente.

Quindi nel processo di Yule con probabilità 1 non abbiamo esplosione.

## 6.2 Equazioni di Kolmogorov

Vediamo ora come si può impostare in generale il calcolo della probabilità di transizione per le catene di Markov con tempo continuo. Nel caso del processo di Poisson, le probabilità di transizione si possono scrivere esplicitamente. Ma in generale, questo può non succedere oppure è molto complicato.

Si può dimostrare però che la probabilità di transizione deve soddisfare le equazioni in avanti di Kolmogorov e le equazioni all'indietro di Kolmogorov.

Partiamo da un processo di tipo esponenziale: diamo i parametri di questo processo.

$S$  è lo spazio degli stati.

$\mu_s > 0, s \in S$  sono costanti.

$A_{s,s'}, s, s' \in S, s \neq s'$  è la matrice di transizione.

$$q_{s,s'} = v_s a_{s,s'}$$

Osserviamo che  $\sum_{s'} q_{s,s'} = \sum_{s'} v_s a_{s,s'} = v_s \sum_{s'} a_{s,s'} = v_s$ .

$q_{s,s'}$  è detta intensità della transizione da  $s$  a  $s'$ .

Consideriamo la probabilità di passare da uno stato  $s$  a uno stato  $s'$  in un intervallino di tempo  $h$ :

$$P_{s,s'}(h) = q_{s,s'}h + o(h)$$

$1 - e^{-v_s h}$  è la probabilità che il tempo esponenziale sia minore di  $h$ .

Quando scade questo tempo, bisogna che passiamo sullo stato  $s'$ .

Quindi

$$\begin{aligned} (1 - e^{-v_s h})a_{s,s'} + o(h) &= (v_s h + c(h))a_{s,s'} + o(h) \\ &= v_s a_{s,s'} h + o(h) &= q_{s,s'} h + o(h) \end{aligned}$$

Vogliamo ottenere delle equazioni che sono soddisfatte dalle probabilità di transizione.

### 6.2.1 Equazioni all'indietro di Kolmogorov (Kolmogorov backward equation)

Consideriamo un intervallo  $[0, t + h] = [0, h] \cup [h, t + h]$ . Consideriamo la probabilità

$$P_{s,s'}(t + h) = \sum_{s''} P_{s,s''}(h) P_{s'',s'}(t)$$

Possiamo approssimare questa probabilità:

$$\begin{aligned} &= \sum_{s'' \neq s} (q_{s,s''}h + o(h)) P_{s'',s'}(t) + P_{s,s}(h) \\ &= \sum_{s'' \neq s} \dots + \underbrace{e^{-v_s h} + o(h)}_{1 - v_s h + o(h)} \\ &= \sum_{s'' \neq s} \dots + (1 - v_s h + o(h)) P_{s,s'}(t) \end{aligned}$$

Voglio scrivere un'equazione differenziale per la probabilità di andare da  $s$  a  $s'$ .

Considero

$$\frac{P_{s,s'}(t + h) - P_{s,s'}(t)}{h} = \frac{-v_s h + o(h)}{h} P_{s,s'}(t) + \frac{\sum_{s'' \neq s} (q_{s,s''}h + o(h))}{h} P_{s'',s'}(t)$$

Per calcolare la derivata, facciamo tendere  $h$  a 0:

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{h \rightarrow 0} -v_s P_{s,s'}(t) + \sum_{s'' \neq s} (q_{s,s''} - P_{s'',s'}(t)) \\ \frac{\partial}{\partial t} P_{s,s'}(t) &= -v_s P_{s,s'}(t) + \sum_{s'' \neq s} q_{s,s''} P_{s'',s'}(t) \end{aligned}$$

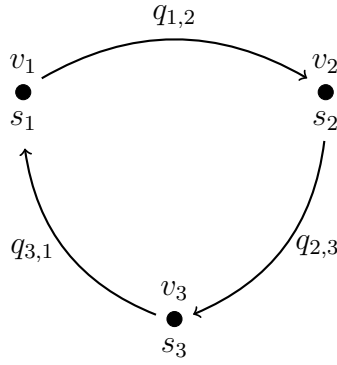
$\frac{\partial}{\partial t} P_{s,s'}(t)$  è l'equazione di Kolmogorov all'indietro. Queste equazioni collegano tra loro le probabilità di transizione con lo stesso punto di arrivo.

**Esempio**  $S = \{0, 1\}$ ; abbiamo  $v_0, v_1$

$$\begin{aligned} q_{0,1} &= v_0 & q_{1,0} &= v_1 \\ a_{0,1} &= 1 & a_{1,0} &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}P_{0,1}(t) &= -v_0P_{0,1}(t) + v_0P_{1,0}(t) \\ \frac{\partial}{\partial t}P_{0,0}(t) &= -v_0P_{0,0}(t) + v_0P_{1,0}(t)\end{aligned}$$

Un modo per vedere le equazioni all'indietro è rappresentando la catena di Markov con un grafico:



Ad ogni stato è associato  $v_i$  che è il parametro della distribuzione esponenziale, e rappresenta il tempo in cui rimaniamo nello stato.

Sopra le frecce, che collegano uno stato all'altro, possiamo scrivere  $q_{i,j}$  che rappresenta l'intensità del passaggio di stato.

Le equazioni all'indietro si ottengono così:

$$P'_{s,s'}(t) = -v_s P_{s,s'} + \sum_{s'' \neq s} q_{s,s''} P_{s'',s'}(t)$$

Vediamo l'esempio più semplice, quello in cui  $S = \{0, 1\}$ ; sia  $s' = 0$ . Abbiamo  $v_0 = \lambda, v_1 = \mu$ . Abbiamo anche che  $q_{0,1} = \lambda, q_{1,0} = \mu$ .

Le equazioni all'indietro sono:

$$\begin{aligned}
 P'_{0,0}(t) &= \lambda[P_{1,0}(t) - P_{0,0}(t)] \\
 P'_{1,0}(t) &= \mu[P_{0,0}(t) - P_{1,0}(t)] \\
 [\mu P'_{0,0}(t) + \lambda P'_{1,0}(t)] &= 0 \\
 \text{Osserviamo che } \frac{\partial}{\partial t}[\mu P_{0,0}(t) + \lambda P_{1,0}(t)] &= [\mu P'_{0,0}(t) + \lambda P'_{1,0}(t)] \\
 \mu P_{0,0}(t) + \lambda P_{1,0}(t) &= c \\
 \text{Abbiamo che } \mu &= c \\
 \lambda P_{1,0}(t) + \mu P_{0,0}(t) &= \mu \\
 \lambda P_{1,0}(t) &= \mu(1 - P_{0,0}(t)) \\
 P'_{0,0}(t) &= \mu[1 - P_{0,0}(t)] - \lambda P_{0,0}(t) \\
 &= \mu - (\mu + \lambda)P_{0,0}(t)
 \end{aligned}$$

Notare che se la derivata è 0, allora la quantità non cambia rispetto nel tempo, e quindi è uguale ad una costante  $c$ . Per vedere quando vale la costante, basta porre il tempo  $t = 0$ .

L'ultima equazione non è omogenea perché abbiamo quel termine  $\mu$ . Per risolverla definiamo una funzione  $h(t)$ :

$$h(t) = P_{0,0}(t) - \frac{\mu}{\mu + \lambda}$$

$$\begin{aligned}
 h'(t) &= \mu - (\mu + \lambda)(h(t) + \frac{\mu}{\mu + \lambda}) \\
 &= -(\mu + \lambda)h(t) \\
 \frac{h'(t)}{h(t)} &= -(\mu + \lambda) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \log(h(t)) \\
 \log h(t) &= -(\mu + \lambda)t + c \\
 h(t) &= Ke^{-(\mu + \lambda)t}
 \end{aligned}$$

Quando vale  $K$ ?

$$\begin{aligned}
h(t) &= P_{0,0}(t) - \frac{\mu}{\mu + \lambda} \\
h(0) &= P_{0,0}(0) - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \\
&= -\frac{\mu}{\mu + \lambda} \\
&= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \\
h(t) &= \frac{\lambda}{\mu + \lambda} e^{-(\mu + \lambda)t} \\
P_{0,0}(t) &= \frac{\lambda}{\mu + \lambda} e^{-(\mu + \lambda)t} + \frac{\mu}{\mu + \lambda} \\
\lambda P_{0,0}(t) &= \mu - (\mu + \lambda)P_{0,0}(t) \\
P_{1,0}(t) &= \frac{\mu}{\lambda} - \frac{(\mu + \lambda)}{\lambda} \left( \frac{\lambda}{\mu + \lambda} e^{-(\mu + \lambda)t} + \frac{\mu}{\mu + \lambda} \right) \\
&= \frac{\mu}{\mu + \lambda} e^{-(\mu + \lambda)t} + \frac{\mu}{\mu + \lambda}
\end{aligned}$$

Facciamo tendere  $t$  all'infinito:

$$P_{0,0}(t) \rightarrow \frac{\mu}{\mu + \lambda} \quad \text{e} \quad P_{1,0}(t) \rightarrow \frac{\mu}{\mu + \lambda}$$

Quindi se facciamo passare molto tempo le probabilità di andare nello stato 0 sia partendo da 0, sia partendo da 1, tendono allo stesso limite.

Per quel che riguarda  $P_{0,1}(t)$  e  $P_{1,1}(t)$  non occorre rifare i calcoli, perché è come se si scambiassero di nome gli stati e quindi basta scambiare  $\mu$  e  $\lambda$ :

$$\begin{aligned}
P_{1,1}(t) &= \frac{\mu}{\mu + \lambda} e^{-(\mu + \lambda)t} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \\
P_{0,1}(t) &= \frac{\lambda}{\mu + \lambda} e^{-(\mu + \lambda)t} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}
\end{aligned}$$

Se  $t \rightarrow \infty$ :

$$P_{0,1}(t) \rightarrow \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \quad \text{e} \quad P_{1,1}(t) \rightarrow \frac{\lambda}{\mu + \lambda}$$

Quindi la probabilità di passare dallo stato 0 allo stato 1, e dallo stato 1 allo stato 1, se facciamo passare molto tempo tendono allo stesso limite, cioè la catena di Markov si "dimentica" dello stato da cui è partita.



Si può vedere che questo valore non solo è il limite per il tempo che tende all'infinito, ma è anche la percentuale di tempo che la catena di Markov si trova nello stato 1 ( $P_{0,1}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty}$ ) e 0. Possiamo pensarla come una macchina che passa tra due stati, uno di funzionamento e uno di riparazione, che supponiamo abbiano una distribuzione esponenziale; questi limiti rispondono alla domanda "quale percentuale di tempo la macchina è in funzione e quale in riparazione".

### 6.2.2 Equazioni in avanti di Kolmogorov (Kolmogorov forward equations)

Consideriamo un intervallo di tempo  $(0, t + h]$ .

Nelle equazioni all'indietro di Kolmogorov abbiamo diviso l'intervallo in due intervalli, da 0 a  $h$  e da  $h$  a  $t + h$ ; qui dividiamo in due intervalli  $(0, t]$  e  $(t, t + h]$ .

$$\begin{aligned}
 P_{s,s'}(t+h) &= P_{s,s'}(t)P_{s',s'}(h) + \sum_{s'' \neq s'} P_{s,s''}(t)P_{s'',s'}(h) \\
 P_{s',s'}(h) &= 1 - v_{s'}h + o(h) \\
 P_{s'',s'}(h) &= q_{s'',s'}h + o(h) \\
 \frac{P_{s,s'}(t+h) - P_{s,s'}(t)}{h} &= \frac{(-v_{s'}h + o(h))}{h}P_{s,s'}(t) + \frac{\sum_{s'' \neq s'} (q_{s'',s'}h + o(h))}{h}P_{s,s''}(t)
 \end{aligned}$$

$s'$  è lo stato di arrivo, lo separo da tutti gli altri stati.

Quando  $h$  è piccolo, le probabilità (e.g.  $P_{s'',s'}(h)$ ) si possono scrivere come un termine di ordine  $h$  più infinitesimi di ordine superiore.

È legittimo passare al limite nella serie? Nei casi che vedremo questo passaggio è sempre legittimo; facciamo tendere  $h$  a 0:

$$P'_{s,s'}(t) = -v_{s'}P_{s,s'}(t) + \sum_{s'' \neq s'} q_{s'',s'}P_{s,s''}(t)$$

Anche di questa equazione si può dare un'interpretazione grafica.

A differenza delle equazioni all'indietro, questa collega tra loro probabilità di transizione in cui teniamo fisso il punto di partenza. Nelle equazioni all'indietro invece tenevamo fermo il punto di d'arrivo.

$$\begin{aligned}
P_s(t) &= P(X_t = s) \\
&= \sum \rho_{s'} P_{s',s}(t) \\
\frac{\partial}{\partial t} P_s(t) &= \sum_{s'} \rho_{s'} \frac{\partial}{\partial t} P_{s',s}(t) \\
P'_s(t) &= -v_s P_s(t) + \sum_{s'} P_{s'}(t) q_{s',s}
\end{aligned}$$

**Esempio** Vediamo ora il caso più semplice in cui  $S = \{0, 1\}$ :

$$\begin{aligned}
v_0 &= \lambda = q_{0,1} \\
v_1 &= \mu = q_{1,0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P'_{0,0}(t) &= -\lambda P_{0,0}(t) + \mu P_{0,1}(t) \\
P'_{0,1}(t) &= -\mu P_{0,1}(t) + \lambda P_{0,0}(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{0,0}(t) + P_{0,1}(t) &= 1 \\
P_{0,1}(t) &= 1 - P_{0,0}(t) \\
P'_{0,0}(t) &= -\lambda P_{0,0}(t) + \mu(1 - P_{0,0}(t)) \\
P'_{0,0}(t) &= -(\lambda + \mu)P_{0,0}(t) + \mu
\end{aligned}$$

Definiamo

$$h(t) = P_{0,0}(t) + \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

$$\begin{aligned}
h'(t) &= -(\lambda + \mu)(h(t) + \frac{\mu}{\lambda + \mu}) + \mu \\
&= -(\lambda + \mu)h(t) \\
h(t) &= Ke^{-(\lambda + \mu)t} \\
h(t) &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}e^{-(\lambda + \mu)t} \\
P_{1,1}(t) &= 1 - P_{0,0}(t) \\
&= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu}e^{-(\lambda + \mu)t} \\
P_{1,1}(t) &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu}e^{-(\lambda + \mu)t} \\
P_{1,0}(t) &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} - \frac{\mu}{\lambda + \mu}e^{-(\lambda + \mu)t} \\
P_{0,0}(t) + P_{0,1}(t) &= 1 \\
P_{1,0}(t) + P_{1,1}(t) &= 1
\end{aligned}$$

**Esempio - Processi di pura nascita**

$$\begin{aligned}
S = \mathbb{N} \quad & v_s = \lambda_s \quad a_{s,s+1} = 1 \\
& q_{s,s+1} = \lambda_s
\end{aligned}$$

Fissiamo  $\bar{s}$  stato di partenza; quali sono le equazioni in avanti?

$$\begin{aligned}
P'_{\bar{s},s}(t) &= -\lambda_s P_{\bar{s},s}(t) + \lambda_{s-1} P_{\bar{s},s-1}(t) \\
P'_{\bar{s},\bar{s}}(t) &= -\lambda_{\bar{s}} P_{\bar{s},\bar{s}}(t) \\
P_{\bar{s},\bar{s}}(t) &= Ke^{-\lambda_{\bar{s}}t} \\
&= e^{-\lambda_{\bar{s}}t}
\end{aligned}$$

Se mettiamo  $t = 0$ , allora  $K$  deve essere uguale a 1.

Da adesso scriviamo per semplicità

$$P_s(t) = P_{\bar{s},s}(t)$$

Supponiamo  $s > \bar{s}$ ; allora:

$$\begin{aligned}
P'_s(t) &= -\lambda_s P_s(t) + \lambda_{s-1} P_{s'-1}(t) \\
P'_s(t) + \lambda_s P_s(t) &= \lambda_{s-1} P_{s-1}(t)
\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(e^{-\lambda_s t} P_s(t)) &= \lambda_s e^{\lambda_s t} P_s(t) + e^{\lambda_s t} P'_s(t) \\
e^{-\lambda_s(t)} \frac{\partial}{\partial t}(e^{\lambda_s t} P_s(t)) &= \lambda_{s-1} P_{s-1}(t) \\
\frac{\partial}{\partial t}(e^{\lambda_s t} P_s(t)) &= \lambda_{s-1} e^{\lambda_s t} P_{s-1}(t) \\
e^{\lambda_s t} P_s(t) &= P_s(0) + \int_0^t \lambda_{s-1} e^{\lambda_s u} P_{s-1}(u) du \\
P_s(t) &= P_s(0) e^{\lambda t} + e^{-\lambda t} \int_0^t \lambda_{s-1} e^{\lambda_s u} P_{s-1}(u) du \\
P_s(t) &= P_{\bar{s}, \bar{s}}(t) \\
&= e^{-\lambda_s t}
\end{aligned}$$

Possiamo ottenere tutti i valori delle probabilità di transizione.

Un caso particolare è il processo di Yule, in questo caso  $S = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ : è sempre un processo di pura nascita ma non consideriamo lo stato 0; partiamo infatti da 1, con  $\lambda_s = s \cdot \lambda$ .

Quindi questo è un caso particolare di processo di pura nascita, in cui l'intensità del passaggio dallo stato  $s$  allo stato  $s+1$  è proporzionale ad  $s$ . Se lo pensiamo come un processo di una popolazione, ad ogni individuo è associato un tempo esponenziale di parametro  $\lambda$  e, allo scadere del tempo, l'individuo si sdoppia. Allo stato  $k$  ci sono  $k$  individui. Se consideriamo un intervallo  $h$  la probabilità che uno di questi individui si divida, è il minimo tra i  $k$  tempi. Quindi l'intensità del passaggio da uno stato  $k$  ad uno stato  $k+1$  è il minimo tra  $k$  variabili aleatorie con distribuzione esponenziale indipendenti di parametro  $\lambda$ . Quindi l'intensità dei passaggi sono  $k\lambda$ .

Si può calcolare qual è la probabilità di transizione; si può dimostrare che

$$p_{1,s}(t) = e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{s-1}$$

La dimostrazione può avvenire in vari modi. Nei modelli di pura nascita avevamo visto un metodo. Ma invece di dimostrarlo, possiamo anche verificare che soddisfi le equazioni di Kolmogorov in avanti:

$$\begin{aligned}
P_{1,1}(0) &= 1 \\
P'_{1,s}(t) &\stackrel{?}{=} -s\lambda P_{1,s}(t) + (s-1)\lambda P_{1,s-1}(t)
\end{aligned}$$

Quindi calcoliamo la derivata:

$$P'_{1,s}(t) = -\lambda e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{s-1} + \lambda e^{-\lambda t}e^{-\lambda t}(s-1)(1 - e^{-\lambda t})^{s-2}$$

Aggiungiamo e togliamo 1:

$$\begin{aligned} P'_{1,s}(t) &= -\lambda e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{s-1} + \lambda e^{-\lambda t}(1 - (1 - e^{-\lambda t}))(s-1)(1 - e^{-\lambda t})^{s-2} \\ &= -\lambda s e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{s-1} + \lambda(s-1)e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{s-2} \end{aligned}$$

Questa è la soluzione partendo da 1; qual è la soluzione partendo da un altro stato? In generale:

$$\begin{aligned} P_{s,s'} &= \binom{s'-1}{s-1} e^{-s\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{s'-s} \\ P_{1,s'}(t) &= e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{s'-1} \end{aligned}$$

L'ultima equazione è la distribuzione geometrica; la distribuzione geometrica infatti è del tipo  $(1-p)^{k-1}$ , con  $p, k = 1, 2, \dots$ . È collegata con lo schema di Bernoulli. Quindi quella soprastante è una distribuzione geometrica con  $p = e^{-\lambda t}$ .

Facciamo ora un'osservazione, collegata all'interpretazione del processo di Yule come processo di popolazione:  $P_{s,s'}(t)$  vuol dire che la popolazione all'inizio ha  $s$  individui, e ci stiamo chiedendo qual è la probabilità che al tempo  $t$  abbia  $s'$  individui. La popolazione al tempo  $t$  si può vedere come la somma del numero di individui che discende dagli  $s$  iniziali, ovvero la somma di  $s$  variabili aleatorie indipendenti con distribuzione geometrica di parametro  $e^{-\lambda t}$ .

La distribuzione della somma di  $n$  variabili con distribuzione geometrica è come la distribuzione dell' $s$ -esimo successo nello schema di Bernoulli; se invece anziché la prima volta in cui otteniamo testa vediamo la  $s$ -esima volta, questo tempo lo possiamo suddividere come la somma di  $s$  variabili aleatorie indipendenti: bisogna vedere qual è il tempo in cui dobbiamo aspettare per la prima volta in cui si ha testa, dopo la prima volta vediamo il tempo in cui dobbiamo aspettare per la seconda volta e così via, fino a vedere quando tempo dobbiamo aspettare per la  $s$ -esima volta; questi tempi sono indipendenti.

Qual è la probabilità che fino al tempo  $s-1$  abbiamo avuto  $s-1$  successi? È la distribuzione binomiale:

$$\binom{s'-1}{s-1} e^{-(s-1)\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{s'-s} e^{-\lambda t} = \binom{s'-1}{s-1} e^{-s\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{s'-s}$$

Questo verifica le equazioni di Kolmogorov in avanti.

Negli esempi in cui abbiamo solo due stati, abbiamo visto che facendo tendere il tempo all'infinito le probabilità di transizione convergono ad un limite. Si può vedere che non solo questo è il limite delle probabilità di transizione, ma se facciamo passare molto tempo possiamo vedere qual è la percentuale del tempo in cui la catena di Markov si trova nei due stati (cfr. esempio della macchina coi due stati - in funzione e in riparazione).

Nell'esempio del processo di pura nascita, in questo caso si vede che le probabilità di transizione tendono a 0 per ogni stato, perché la catena di Markov può solo crescere, quindi con probabilità 1, considerando un qualsiasi stato, a partire da un certo tempo la catena di Markov tenderà ad uno stato più grande. Tuttavia ci dà la percentuale di tempo in cui rimaniamo in ogni stato.

Vediamo ora, partendo dalle equazioni in avanti di Kolmogorov, come si può calcolare il limite delle probabilità: se convergono ad un limite, qual è il limite delle probabilità?

Supponiamo che da  $P_{s,s'}(t)$  converga per  $t \rightarrow \infty$  per tutti gli  $s'$ ;

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim P_{s,s'}(t) = p_{s'}$$

Come calcolo questo limite?

Scriviamo le equazioni in avanti:

$$P'_{s,s'}(t) = -v_{s'}P_{s,s'}(t) + \sum_{s'' \neq s'} q_{s'',s'}P_{s,s''}(t)$$

Supponiamo che le probabilità convergano. Allora

$$\xrightarrow{t \rightarrow \infty} -v_{s'}p_{s'} + \sum_{s'' \neq s} q_{s'',s'}p_{s''}$$

Affinché converga, questa quantità deve essere uguale a 0. Infatti, supponiamo per assurdo che sia un valore diverso da 0. Allora quando il tempo tende all'infinito,  $-v_{s'}P_{s,s'}(t) + \sum_{s'' \neq s'} q_{s'',s'}P_{s,s''}(t)$  potrebbe tendere a un valore positivo; allora anche la derivata  $P'_{s,s'}(t)$  tenderebbe ad un valore positivo costante. Ma questo non è possibile perché è una probabilità, e dev'essere sempre compresa tra 0 e 1; altrimenti tenderebbe a crescere linearmente e non sarebbe compresa tra 0 e 1.

Affinché tenda ad un limite,  $\sum_{s'' \neq s} q_{s'',s'}p_{s''} = 0$ . Questo ci dà un modo per calcolare il limite: in questo modo otteniamo un sistema di equazioni lineari per questa quantità.

Anche nel caso delle catene di Markov, per trovare le distribuzioni stazionarie, occorre risolvere un sistema di equazioni lineari; questo caso è analogo.

Nel caso in cui il limite sia una distribuzione di probabilità, allora corrisponde ad una distribuzione stazionaria.

Nei processi di pura nascita, il limite è sempre uguale a 0, e quindi non è una distribuzione di probabilità.

Quindi non è facile calcolare esplicitamente le probabilità di transizione, però si può calcolare esplicitamente una distribuzione stazionaria: per le probabilità di transizione occorre risolvere diverse equazioni differenziali collegate tra loro, mentre per le distribuzioni stazionarie basta risolvere un sistema di equazioni lineari.

Vediamo il caso più semplice. Sia  $S = \{0, 1\}$ ,  $\bar{s}$  lo stato di partenza; le equazioni in avanti sono:

$$\begin{aligned} P'_{\bar{s},0}(t) &= -\lambda P_{\bar{s},0}(t) + \mu P_{\bar{s},1}(t) \\ P'_{\bar{s},1}(t) &= -\mu P_{\bar{s},1}(t) + \lambda P_{\bar{s},0}(t) \end{aligned}$$

Quindi queste sono le equazioni in avanti di Kolmogorov e le possiamo risolvere esplicitamente; supponiamo però che siamo interessati solo alla distribuzione stazionaria, cioè al limite a cui tendono. Siano i limiti  $p_0$ ,  $p_1$ :

$$\begin{cases} 0 = -\lambda p_0 + \mu p_1 \\ 0 = -\mu p_1 + \lambda p_0 \\ p_0 + p_1 = 1 \end{cases}$$

Se voglio che sia una distribuzione di probabilità stazionaria, devo aggiungere un vincolo:

$$p_0 + p_1 = 1$$

Questo mi dà 3 equazioni:

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 - p_0 \\ 0 &= \lambda p_1 + \mu(1 - p_0) \\ p_0 &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} & p_1 &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \end{aligned} \quad \text{Questa è la distribuzione stazionaria.}$$

Vediamo ora un esempio in cui verifichiamo se esiste una distribuzione stazionaria e dove proviamo a calcolarla. Infatti, mentre nei processi di pura nascita questa distribuzione non può esserci (perché appunto la catena può solo crescere, mentre la distribuzione stazionaria ci rappresenta come uno

stato di equilibrio, che ci dice la percentuale dove rimaniamo in ogni stato - percentuale che tende a zero in una catena che può solo crescere), nei processi di nascita e morte può esserci o meno.

**Esempio - Negozio di pulitura di scarpe** Sia  $S = \{0, 1, 2\}$

$$\begin{array}{lll} v_0 = \lambda & v_1 = \mu_1 & v_2 = \mu_2 \quad ?? \\ a_{0,1} = 1 & a_{1,2} = 1 & a_{2,0} = 1 \\ q_{2,0} = \mu_2 & q_{0,1} = \lambda & q_{1,2} = \mu_1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_{\bar{s},0}(t) &= -\lambda P_{\bar{s},0}(t) + \mu_2 P_{\bar{s},2}(t) \\ P'_{\bar{s},1}(t) &= -\mu_1 P_{\bar{s},1}(t) + \lambda P_{\bar{s},0}(t) \\ P'_{\bar{s},2}(t) &= -\mu_2 P_{\bar{s},2}(t) + \mu_1 P_{\bar{s},1}(t) \end{aligned}$$

Per cercare la distribuzione stazionaria poniamo a 0 le derivate:

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \mu_2 p_2 = 0 \\ -\mu_1 p_1 + \lambda p_0 = 0 \\ -\mu_2 p_2 + \mu_1 p_1 = 1 \\ p_0 + p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

**Esempio** Abbiamo  $M$  macchine e 1 riparatore. Quando una macchina si guasta, viene messa in riparazione. Se c'è già una macchina in riparazione, si forma una coda.

Prendiamo come stato il numero delle macchine in funzione;

Il tempo di funzionamento è un esponenziale di parametro  $\lambda$ , il tempo di riparazione è un esponenziale di parametro  $\mu$ . Lo spazio degli stati è  $\{0, \dots, M\}$ . Supponiamo ci siano  $s$  macchine in funzione; le macchine in riparazione saranno  $M - s$ .

Il tempo della riparazione è  $v_s$ .

$$\begin{aligned} v_s &= s\lambda + \mu, & s &\leq M-1 \\ v_M &= M\lambda, & s &= M \end{aligned}$$

Quando scade  $v_s$ , qual è la probabilità di andare nello stato  $s+1$  e qual è la probabilità di andare nello stato  $s-1$ ?

Sia  $s \leq M-1$ :



$$\begin{aligned}
a_{s,s+1} &= \frac{\mu}{s\lambda + \mu} \\
a_{s,s-1} &= \frac{s\lambda}{s\lambda + \mu} \\
a_{M,M-1} &= 1 \\
q_{s,s+1} &= \mu \\
q_{s,s-1} &= s\lambda
\end{aligned}$$

Sia  $s = M$ :

$$q_{M,M-1} = M\lambda$$

Vediamo ora se esiste una distribuzione stazionaria  $p_0, p_1, \dots, p_m$ .

Se  $s \leq M - 1$ :

$$-p_s(\mu + s\lambda) = \mu p_{s-1} + (s+1)\lambda p_{s+1}$$

$s = M$ :

$$-p_M M\lambda = p_{M-1}\mu$$

$$p_0 + p_1 + \dots + p_M < 1$$

**Esempio** Abbiamo visto esempi con un numero finito di stati; vediamo un esempio con un numero infinito di stati. Supponiamo di avere una coda  $M/M/1$  (si può vedere come un processo di nascita e morte), dove gli arrivi sono un processo di Poisson di parametro  $\lambda$ , il tempo di servizio è un processo di Poisson di parametro  $\mu$  e infine c'è un solo sportello.

Prendiamo come stato il numero totale dei clienti nel sistema; quindi  $S = \mathbb{N}$ .

Prendiamo come distribuzione iniziale

$$\rho_0 = 1$$

ovvero all'inizio non c'è nessun cliente.

Mentre siamo nello stato 0, quando avviene il cambiamento di stato? È possibile solo se arriva un nuovo cliente; i clienti arrivano con processo di Poisson di parametro  $\lambda$ :

$$v_0 = \lambda$$

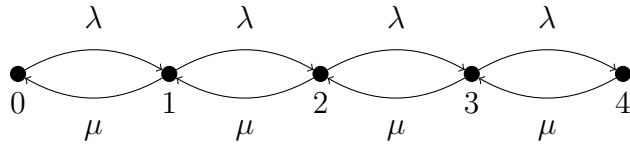
$$a_{0,1} = 1$$

Se invece  $s \geq 1$ , un cambiamento di stato può avvenire in due modi: arriva un nuovo cliente oppure finiamo di servire un cliente. È il minimo tra due variabili esponenziali di parametri  $\lambda$  e  $\mu$ :

$$\begin{aligned} v_s &= \lambda + \mu \\ a_{s,s+1} &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} && \text{il minimo corrisponde a } \lambda \\ a_{s,s-1} &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} && \text{il minimo corrisponde a } \mu \\ q_{0,1} &= \lambda \\ q_{s,s+1} &= \lambda \\ q_{s,s-1} &= \mu \end{aligned}$$

Vogliamo vedere se c'è una distribuzione stazionaria e calcolarla.

Un modo per rappresentarla è fare un grafico: sopra le frecce indichiamo qual'è l'intensità del passaggio. La nostra distribuzione è  $p_0, p_1, p_2$ .



$s = 0$ :

$$-p_0\lambda + p_1\mu = 0$$

$s \geq 1$ :

$$-p_s(\lambda + \mu) + p_{s-1}\lambda + p_{s+1}\mu = 0 \quad v_s = \sum_{s'} q_{s,s'}$$

$-p_s$  va moltiplicato per  $v_s$ .

$$\sum_{s=0}^{\infty} p_s = 1$$

$$p_1 = p_0 \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)$$

$$p_{s+1} = p_s \left( \frac{\lambda}{\mu} \right) \quad \text{dimostriamo per induzione:}$$

Supponiamo vero fino a  $s \leq n-1$  (cioè fino a  $n-1$ ):

$$-p_n(\lambda + \mu) - p_{n-1}\lambda + p_{n+1}\mu = 0$$

$$p_n = p_{n-1} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)$$

$$p_{n-1} = \frac{\mu}{\lambda} p_n$$

$$-p_n(\lambda + \mu) + \frac{\mu}{\lambda} p_n \lambda + p_{n-1}\mu = 0$$

$$p_{n+1}\mu - p_n\lambda = 0$$

$$p_{n+1} = \frac{\lambda}{\mu} p_n$$

$$p_n = \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n p_0$$

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n$$

La serie deve essere convergente, di conseguenza  $\frac{\lambda}{\mu} < 1 \implies \lambda < \mu$ .

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n = \mu_0 \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = 1$$

$$p_n = p_0 \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n = \left( 1 - \frac{\lambda}{\mu} \right) \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n$$

È la distribuzione stazionaria, e sostanzialmente è la distribuzione geometrica. L'unica differenza è che nella distribuzione geometrica  $n$  va da 1 a infinito, mentre qui i valori partono da 0. La condizione perché esista è che  $\lambda < \mu$ .

---

**Esempio** Vediamo un processo  $M/M/\infty$ ; in questo caso non ci forma mai la coda, perché ogni cliente che arriva trova un sportello libero.

Sia  $\lambda$  il parametro del processo di Poisson degli arrivi; sia  $\mu$  il parametro del tempo di servizio. In generale per descrivere questo processo di coda come una catena di Markov con tempo continuo dobbiamo trovare i parametri  $v_s$  (il tempo esponenziale in cui rimaniamo in uno stato), e la matrice di transizione (quando lasciamo lo stato, qual è la probabilità di andare in un altro stato).

$v_0$  lasciamo lo stato 0 solo se c'è un arrivo.  
Il tempo da aspettare per il primo arrivo ha una distribuzione esponenziale di parametro  $\lambda$ .  
Quindi  $v_0 = \lambda$

$s \geq 1, v_s$  per quali motivi lasciamo lo stato  $s$ ? Arriva un nuovo cliente o terminiamo un cliente. Quindi abbiamo  $s$  tempi indipendenti esponenziali di parametro  $\mu$ , e uno di parametro  $\lambda$ . Ci interessa il minimo dei tempi esponenziali:  $v_s = \lambda + s\mu$

Vediamo ora la matrice  $a_{s,s'}$ .

$a_{0,1}$  Partendo da 0, possiamo andare solo in 1, con probabilità 1.  
 $a_{0,1} = 1$

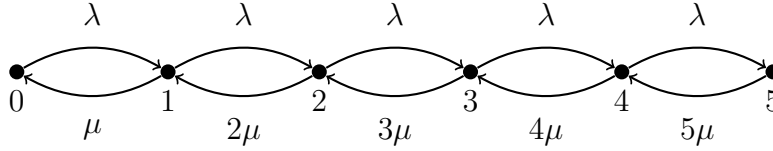
$a_{s,s+1}$  Partendo da  $s$  possiamo andare in  $s+1$  oppure in  $s-1$ . Dobbiamo fare sempre il minimo tra due parametri esponenziali,  $\lambda$  e  $s\mu$ .  
Nel primo caso,  $a_{s,s+1} = \frac{\lambda}{\lambda+s\mu}$

$a_{s,s-1}$  Nel secondo caso, andiamo a  $s-1$  quando il minimo corrisponde ad uno degli  $s$  tempi esponenziali di parametro  $\mu$ :  $a_{s,s-1} = \frac{s\mu}{\lambda+s\mu}$

Vediamo infine  $q$ :

$$\begin{aligned} q_{0,1} &= \lambda \\ q_{s,s+1} &= \lambda \\ q_{s,s-1} &= \frac{s\mu}{\lambda + s\mu} \end{aligned}$$

Possiamo rappresentarlo come un grafico, nelle frecce è indicata l'intensità del passaggio:



Adesso vogliamo vedere se esiste una distribuzione invariante. Scriviamo le equazioni in avanti di Kolmogorov; supponiamo  $s = 0$ :

$$P'_{\bar{s},0} - \lambda P_{\bar{s},0}(t) + \mu P_{s,1}(t)$$

Nel caso  $s \geq 1$ :

$$P'_{\bar{s},s}(t) = -(\lambda + s\mu)P_{\bar{s},s}(t) + P_{\bar{s},s-1}(t) + (s+1)\mu P_{\bar{s},s+1}(t)$$

Per cercare la distribuzione invariante ci serve una funzione costante, chiamiamola  $u_s$ ; mettendo a 0 le derivate abbiamo:

$$s = 0 :$$

$$0 = -\lambda u_0 + \mu u_1$$

$$s \geq 1 :$$

$$0 = -(\lambda + s\mu)u_s + \lambda u_{s-1} + (s+1)\mu u_{s+1}$$

Dalla prima equazione otteniamo che

$$s = 0 : \quad \mu u_1 = \lambda u_0 \Rightarrow u_1 = \frac{\lambda}{\mu} u_0$$

$$s \geq 0 : \quad (s+1) \cdot \mu \cdot u_{s+1} = (\lambda + s\mu)u_s - \lambda u_{s-1}$$

Vogliamo mostrare che

$$u_{n+1} = \frac{\lambda \cdot u_n}{(n+1)\mu}$$

Per  $u_1$  è vero. Supponiamo sia vero per  $s \leq n-1$ ; deve valere per  $s = n$ .

$$\begin{aligned} \text{Supponiamo } u_{s+1} &= \frac{\lambda}{(s+1)\mu} u_s : \\ u_{n-1} &= \frac{n\mu}{\lambda} u_n \\ (n+1)\mu u_{n+1} &= (\lambda + n\mu)u_n - \cancel{\lambda} \frac{n\mu}{\cancel{\lambda}} u_n \\ &= \lambda u_n \\ u_{n+1} &= \frac{\lambda}{(n+1)\mu} u_n \end{aligned}$$

Iterando l'equazione si ottiene che

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\lambda}{n\mu} u_{n-1} = \frac{\lambda}{n\mu} \frac{\lambda}{(n-1)\mu} u_{n-2} = \dots \\ \Rightarrow u_n &= \frac{1}{n!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n u_0 \end{aligned}$$

Siccome dev'essere una distribuzione di probabilità, devo avere che:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} u_s &= 1 \\ 1 &= \sum_{s=0}^{\infty} u_s \\ &= u_0 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^s \\ &= u_0 e^{\frac{\lambda}{\mu}} \\ u_0 &= e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \end{aligned}$$

Da questo ottengo che in generale:

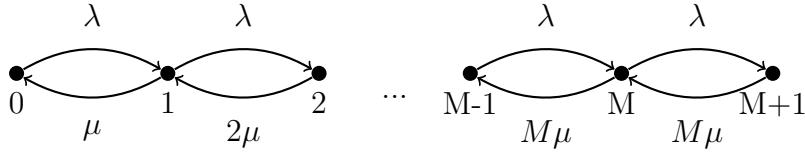
$$u_s = \frac{1}{s!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^s u_0 = \frac{1}{s!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^s e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

Questa è la distribuzione invariante; nel caso di infiniti sportelli, la distribuzione invariante esiste sempre, a differenza nel caso di uno sportello solo, in cui la distribuzione invariante era di tipo geometrico e doveva essere  $\lambda < \mu$ .

Inoltre questa distribuzione invariante è la distribuzione di Poisson.

Quello precedente era un processo ideale: in una situazione concreta abbiamo un numero finito di sportelli; supponiamo di avere un processo in cui gli arrivi sono di Poisson e gli sportelli hanno un tempo di servizio esponenziale di parametro  $\mu$ . Possiamo domandarci: quanti sportelli dobbiamo mettere perché esista la distribuzione invariante?

Indichiamo questo processo di coda come:  $M/M/M$  (la prima  $M$  indica gli arrivi, la seconda il tempo di servizio e la terza il numero di sportelli).



Nel passaggio da  $M+1$  a  $M$ , se ci sono  $M+1$  clienti, non tutti i clienti sono serviti (perché ci sono solo  $M$  sportelli, quindi un cliente viene messo in coda). Quando consideriamo l'intensità dei passaggi, dobbiamo fare il minimo tra i tempi di servizio e le  $M$  variabili esponenziali.

Quindi l'intensità del passaggio dopo  $M$  è sempre  $M\mu$ .

$$\begin{aligned}
 -\lambda u_0 + \mu u_1 &= 0 \\
 -(\lambda + \mu)u_1 + \lambda u_0 + 2\mu u_2 &= 0 \\
 &\dots \\
 -(\lambda + (M-1)\mu)u_{M-1} + \lambda u_{M-2} + M\mu u_M &= 0 \\
 -(\lambda + M\mu)u_M + \lambda u_{M-1} + M\mu u_{M+1} &= 0 \\
 \text{Come prima abbiamo: } u_1 &= \frac{\lambda u_0}{\mu}
 \end{aligned}$$

$1 \leq s \leq M-1$ :

$$u_{s+1} = \frac{\lambda}{(s+1)\mu} u_s$$

$s \geq M$ :

$$u_{s+1} = \frac{\lambda}{M} u_s$$

Iterando questa equazione, otteniamo che per  $s \leq M$ :

$$u_s = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{1}{s!} u_0$$

per  $s > M$ :

$$u_s = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s u_0 \frac{1}{M!} \frac{1}{M^{s-M}} u_s$$

Anche in questo caso abbiamo la condizione che la sommatoria di  $u_s$  dev'essere pari a 1; la somma può essere divisa in due parti:

$$1 = \sum_{s=0}^{\infty} = u_0 \left( \sum_{s=0}^M \frac{\lambda^s}{\mu} \frac{1}{s!} + \sum_{s=M+1}^{\infty} \frac{\lambda^s}{\mu} \frac{1}{M!} \frac{1}{M^{s-M}} \right)$$

Qual è la condizione perché la serie converga? Il primo addendo è una serie finita, quindi non dà problemi; guardiamo la seconda sommatoria:

$$\left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^M \frac{1}{M!} \underbrace{\sum_{s=M+1}^{\infty} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^{s-M} \frac{1}{M^{s-M}}}_{\text{deve convergere}}$$

Riscriviamo la parte sopra la graffa:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^j \frac{1}{M^j}$$

Questa è una serie geometrica; la condizione perché converga è:

$$\frac{\lambda}{\mu} \frac{1}{M} < 1$$

$$\lambda < M\mu$$

Se la condizione è soddisfatta, esiste la distribuzione invariante.

In conclusione, se abbiamo  $M$  sportelli, la condizione perché esista la distribuzione invariante è che il parametro  $\lambda$  degli arrivi sia più piccolo di  $M\mu$ , con  $M$  il numero degli sportelli.

### 6.2.3 Processi di nascita e morte (con catene di Markov con tempo continuo)

Detti anche *Birth and death processes*, in questi processi  $S = \mathbb{N}$ , oppure  $S = [0, M]$ .

Per definirli abbiamo, per  $S = 0$  abbiamo un solo parametro  $\lambda_0$  e, per  $s \geq 1$ ,  $\lambda_s$  e  $\mu_s$ .

Se un parametro  $\lambda_M = 0$  allora  $S = [0, M]$ , perché  $\lambda_M$  sarebbe collegato all'intensità dei passaggi; se  $\lambda_M = 0$ , allora il passaggio da  $M$  a  $M+1$  ha probabilità 0, quindi gli stati possono essere ridotti all'intervallo  $[0, M]$  perché i passaggi da  $M$  a  $M+1$  hanno probabilità 0. Non ci interessano i valori di  $\mu$  per  $s > M$ .

Vediamo alcuni esempi:



- Sia  $S = \{0, 1\}$ ; abbiamo  $\lambda_0, \mu_1$ .
- Modello di  $M$  macchine e un riparatore:  $S = \{0, M\}$ .
- $M/M/1, M/M/\infty, M/M/N, S = \mathbb{N}$ .
- I processi di pura nascita sono un caso particolare in cui  $S = \mathbb{N}$  e i  $\mu_s = 0, \forall s$ .

Vediamo in generale qual è la condizione per cui esista la distribuzione invariante nei processi di nascita e morte.

Scriviamo le equazioni di Kolmogorov in avanti:

$\bar{s} \in S$ :

$$P'_{\bar{s},0}(t) = -\lambda_0 P_{\bar{s},0}(t) + \mu_1 P_{\bar{s},1}(t)$$

$s \geq 1$ :

$$P'_{\bar{s},s}(t) = -(\lambda_s + \mu_s) P_{\bar{s},s}(t) + \lambda_{s-1} P_{\bar{s},s-1}(t) + \mu_{s+1} P_{\bar{s},s+1}(t)$$

Queste equazioni sono tutte collegate tra loro (ad es.  $P'_{\bar{s},0}(t)$  involve  $P'_{\bar{s},1}(t)$ ). Se lo spazio degli stati è finito, abbiamo un numero finito di equazioni. Però non vogliamo risolvere il sistema, ma solo vedere per quali condizioni esiste una distribuzione invariante.

Dobbiamo quindi porre a 0 le derivate:

$s = 0$  :

$$-\lambda_0 u_0 + \mu_1 u_1 = 0$$

$s \geq 1$ :

$$\begin{aligned} & -\lambda_0 u_0 + \mu_1 u_1 = 0 \\ s \geq 1 : & \quad -(\lambda_s + \mu_s) u_s + \lambda_{s-1} u_{s-1} + \mu_{s+1} u_{s+1} = 0 \\ & \quad u_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} u_0 \end{aligned}$$

Possiamo far vedere che in generale:

$$u_{n+1} = \frac{\lambda_n u_n}{\mu_{n+1}}$$

Possiamo dimostrarlo per induzione. Supponiamo vero fino a  $n + 1$ :

$$\begin{aligned}
 \mu_{u+1}u_{n+1} &= (\lambda_n + \mu_n)u_n - \lambda_{n-1}u_{n-1} & u_{n-1} &= \frac{\mu_n}{\lambda_{n-1}}u_n \\
 &= (\lambda_n + u_n)u_n - \cancel{\lambda_{n-1}} \frac{u_n}{\cancel{\lambda_{n-1}}} & & \\
 u_{n+1} &= \frac{\lambda_n u_n}{u_{n+1}} \\
 u_n &= \prod_{k=0}^{n-1} \left( \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} \right) u_0 & \sum_{s=0}^{\infty} u_s &= 1
 \end{aligned}$$

Sostituiamo  $u_s$  nella sommatoria con la produttoria:

$$u_0 \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} \left( \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} \right) \right) = 1$$

In generale, per un processo di nascita e morte, la condizione affinché esista la distribuzione invariante è che questa serie sia convergente.

Nel caso in cui il numero di stati sia finito, ovvero  $S = [0, M]$ ,  $\lambda_s = 0$ ,  $s \geq M$ , allora questa non è una serie infinita: quando  $k > M$  i prodotti vengono 0, la somma è finita e quindi non c'è problema.

Nel caso in cui il numero degli stati sia infinito, possiamo avere o meno la distribuzione invariante.

Quando esiste la distribuzione invariante, si può dimostrare un teorema ergodico: se facciamo tendere il tempo all'infinito, le probabilità di transizione convergono alla distribuzione invariante.

Inoltre, si può anche vedere che la distribuzione invariante ci dice qual è il tempo medio in cui vengono occupati gli stati. Se facciamo passare molto tempo, se contiamo quanta parte del tempo la catena di Markov con tempo continuo passa per uno stato, si può dimostrare che questa percentuale di tempo tende ad essere uguale alla distribuzione invariante. Per esempio, nei sistemi a coda in cui abbiamo dimostrato che esiste la distribuzione invariante, questa ci dice anche quant'è il tempo medio in cui nel sistema ci sono stati  $s$  clienti; possiamo vedere quindi qual è il numero medio dei clienti in coda.

---

Torniamo alle catene di Markov con tempo continuo. Supponiamo che il sistema sia ergodico e che  $u_s$  sia la distribuzione invariante:

$$\sum_{s \in S} u_s P_{s,s'}(t) = u_{s'}$$

$P_{s,s'}(t)$  è la probabilità che ci siano  $s'$  clienti al tempo  $t$ . Se  $u_s$  è la distribuzione invariante, questa è pari a  $u'_s$ .

Inoltre supponiamo che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{\bar{s},s}(t) = u_s \quad \forall \bar{s} \in S$$

Ovvero, se noi partiamo da uno stato arbitrario, e ci chiediamo qual è la probabilità che al tempo  $t$  ci siano  $s$  clienti, è la probabilità di trovarci in uno stato  $s$  che è pari a  $u_s$ .

In questo caso, a differenza del caso delle catene di Markov con tempo discreto, anziché considerare la catena di Markov solo per i tempi positivi, partendo da 0, possiamo considerarla per tutti i tempi da  $-\infty$  a  $+\infty$ .

$$-\infty t < +\infty \quad X_t$$

Consideriamo dei tempi  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ :

Definiamo

$$P(X_{t_0} = s_0, X_{t_1} = s_1, \dots, X_{t_n} = s_n) = u_{s_0} P_{s_0, s_1}(t_1 - t_0) P_{s_1, s_2}(t_2 - t_1) \cdots P_{s_{n-1}, s_n}(t_n - t_{n-1})$$

Se definiamo in questo modo la probabilità di trovarci in questi stati  $X_t$ , si vede che queste definizioni sono compatibili tra loro: come nel caso delle catene di Markov del tempo discreto, se togliamo un tempo intermedio (oppure quello iniziale, o quello finale, ...), otteniamo la stessa formula; ad esempio, togliendo il tempo iniziale:

$$\begin{aligned} P(X_{t_1} = s_1, \dots, X_{t_n} = s_n) &= \sum_{s_0} P(X_{t_1} = s_1, \dots, X_{t_n} = s_n) \\ &= u_{s_0} P_{s_0, s_1}(t_1 - t_0) \cdots P_{s_{n-1}, s_n}(t_n - t_{n-1}) \end{aligned}$$

Non abbiamo usato il fatto che sia ergodico. Quando abbiamo una distribuzione invariante, possiamo definire le probabilità della catena di Markov per tutti i tempi, non solo per quelli non negativi, ma da  $-\infty$  a  $+\infty$ .

Possiamo definire un processo dove scambiamo l'ordine del tempo: definiamo  $Y_t = X_{-t}$ ; dato  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , ci chiediamo quanto vale

$$\begin{aligned} P(Y_{t_0} = s_0, \dots, Y_{t_n} = s_n) &= \\ &= P(X_{-t_n} = s_n, \dots, X_{-t_0} = s_0) \\ &= u_{s_n} P_{s_n, s_{n-1}}(t_n, t_{n-1}) P_{s_{n-1}, s_{n-2}}(t_{n-1} - t_{n-2}) \cdots \end{aligned}$$

Consideriamo un esempio semplice, dove  $n = 2$ :

$$\begin{aligned}
 P(Y_{t_0} = s_0, Y_{t_1} = s_1) &= P(X_{-t_1} = s_1, X_{-t_0} = s_0) \\
 &= u_{s_1} P_{s_1, s_0}(t_1 - t_0) \quad \text{Definiamo } Q_{s, s'}(t) = \frac{P_{s', s}(t)}{u_s} u_{s'} \\
 &= u_{s_1} \frac{Q_{s_0, s_1}}{u_{s_1}} u_{s_0} \\
 &= u_{s_0} \cdot Q_{s_0, s_1}
 \end{aligned}$$

Questa probabilità corrisponde ad una catena di Markov in cui prendo come distribuzione invariante sempre  $u$  e come probabilità di transizione  $\frac{P_{s', s}(t)}{u_s} u_{s'}$ .

Questa soddisfa le condizioni delle probabilità di transizione.

Possiamo definire i cosiddetti **processi reversibili**: una catena di Markov con tempo continuo e distribuzione invariante diciamo che è reversibile se guardando al contrario tutti i tempi da  $-\infty$  a  $+\infty$ , la catena di Markov è la stessa, ovvero la probabilità di transizione è la stessa (vale  $Q_{s, s'}(t) = \frac{P_{s', s}(t)}{u_s} u_{s'}$ ).

A questo punto vogliamo vedere quali sono le proprietà delle catene di Markov con tempo continuo e quali sono le catene di Markov reversibili. Supponiamo di avere una catena di Markov con tempo continuo; lo spazio degli stati è  $S$ , una probabilità di transizione  $P_{s, s'}(t)$  e supponiamo che questa catena di Markov abbia una distribuzione di probabilità invariante  $u_s$ . Allora questa catena di Markov si può definire per tutti i tempi, sia positivi che negativi: dati  $t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$ :

$$P(X_{t_0} = s_0, X_{t_1} = s_1, \dots, X_{t_n} = s_n) = u_{s_0} P_{s_0, s_1}(t_1 - t_0) \cdot \dots \cdot P_{s_{n-1}, s_n}(t_n - t_{n-1})$$

Allora cambiando la direzione del tempo possiamo definire

$$Y_t = X_{-t}$$

Quali sono le probabilità di transizione di questa catena di Markov,  $Y_t$ ? Indichiamo con  $Q_{s, s'}(t)$  le probabilità di transizione, che sono così definite:

$$\begin{aligned}
 u_s Q_{s, s'}(t) &= u_{s'} P_{s', s}(t) \\
 Q_{s, s'} &= \frac{P_{s', s} u_{s'}}{u_s} = P_{s, s'}
 \end{aligned}$$

Questa è la condizione affinché la catena di Markov sia reversibile: la probabilità di transizione all'indietro dev'essere uguale a quella in avanti (cioè a  $P_{s, s'}$ ).

Abbiamo visto che nel caso del tempo continuo non sempre le probabilità di transizione si possono calcolare immediatamente. Abbiamo visto però che soddisfano le equazioni in avanti o all'indietro. Quindi invece di guardare ad una condizione sulle probabilità di transizione è utile vederle come termini di parametri infinitesimali: abbiamo visto che una catena di Markov con tempo continuo si può vedere come un processo esponenziale, per cui noi rimaniamo in ogni stato per un tempo con distribuzione esponenziale di un certo parametro che dipende dallo stato. Al momento della scadenza passiamo in un altro stato. Qual è la condizione su questi parametri perché la catena di Markov sia reversibile?

Ci chiediamo:

$$P(X_u = s, t_1 \leq u \leq t_2 | X_{t_1} = s)$$

Ovvero sapendo che al tempo  $t_1$  siamo nello stato  $s$ , qual è la probabilità di rimanere nello stato  $s$  per tutti i tempi tra  $t_1$  e  $t_2$ ?

Sappiamo che in una catena di Markov rimaniamo in uno stato con una distribuzione esponenziale con un certo parametro che dipende dallo stato, in questo caso  $v_s$ ; quindi la probabilità sarà pari a:

$$= e^{-v_s(t_2-t_1)}$$

Quindi

$$P(X_u = s, t_1 \leq u \leq t_2) = P(X_{t_1} = s)P(X_u = s, t_1 < u \leq t_2) \\ u_s e^{-v_s(t_2-t_1)}$$

Lo stesso discorso è applicabile per  $Y_t$ :

$$P(Y_u = s, -t_2 \leq u \leq -t_1) = u_s e^{-v'_s(t_2-t_1)}$$

$v'_s$  è il parametro della distribuzione esponenziale corrispondente ad  $Y$ .

Le due probabilità son le stesse (perché  $Y_t = -X_t$ ); questo implica che:

$$v'_s = v_s$$

Quindi questa proprietà del parametro esponenziale per cui rimaniamo nello stesso stato è lo stesso, sia nella catena in avanti che all'indietro.

Questo fatto è vero in generale, non solo per le catene di Markov reversibili: se noi prendiamo una catena di Markov con una certa distribuzione invariante e consideriamo la catena di Markov col tempo all'indietro, i parametri corrispondenti alla distribuzione esponenziale dei vari stati sono uguali.

### 6.2.4 Condizione per la reversibilità

Vogliamo ora vedere qual è la condizione per cui la catena di Markov è reversibile, ovvero vogliamo vedere la condizione per la reversibilità sui parametri delle transizioni da uno stato all'altro: abbiamo detto che possiamo definire una catena di Markov dando i parametri  $v_s$  delle distribuzioni esponenziali e le probabilità di transizione (quando lasciamo uno stato, qual è la probabilità di andare in un altro stato?).

Consideriamo un tempo piccolo  $h$ ; dato  $s' \neq s$  ci chiediamo:

$$\begin{aligned} P_{s,s'}(h) &= v_s \cdot h a_{s,s'} + o(h) \\ &= P_{s',s}(h) \frac{u'_s}{u_s} \quad \text{per la condizione di reversibilità} \\ &= v'_s a_{s',s} \frac{u'_s}{u_s} h + o(h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_s a_{s,s'} &= q_{s,s'} \quad \text{intensità del passaggio tra } s, s' \\ v'_s a_{s',s} &= q_{s',s} \end{aligned}$$

Dividiamo per  $h$  e facciamo tendere  $h$  a 0:

$$q_{s,s'} = q_{s',s} \frac{u'_s}{u_s}$$

Quindi nel caso di catene di Markov con tempo continuo e distribuzione invariante, la condizione per cui la catena di Markov sia reversibile è che le intensità dei passaggi da uno stato all'altro soddisfino la relazione, dove  $u$  è la distribuzione invariante.

### 6.2.5 Reversibilità dei processi di nascita e morte

Nel caso delle catene di Markov con tempo discreto, abbiamo visto che una catena di Markov con tempo discreto con distribuzione invariante e un intervallo in cui le probabilità di transizione sono o di rimanere nello stesso stato, o di passare in uno stato vicino (in avanti o all'indietro) - per esempio il modello della rovina del giocatore - allora la catena di Markov è reversibile. Queste probabilità inoltre corrispondono ai processi di nascita e morte. Vogliamo ora vedere che un processo di nascita e morte che abbia una distribuzione invariante è reversibile.

Consideriamo un processo di nascita e morte con distribuzione invariante  $u_s$ . Supponiamo  $S = \mathbb{N}$ . Abbiamo inoltre i parametri

$$\lambda_0, \quad s \geq 1 \quad \lambda_s, \mu_s$$

$$\lambda_0 = q_{0,1}, \quad s \geq 1 \quad \lambda_s = q_{s,s+1}, \mu_s = q_{s,s-1}$$

Vogliamo mostrare che questo processo è reversibile. La condizione di reversibilità è:

$$u_s q_{s,s'} = u'_s q'_{s',s}$$

Consideriamo la differenza tra  $s$  e  $s'$ : se è maggiore o uguale a 2 (gli stati non sono vicini) allora:

$$\|s' - s\| \geq 2 \Rightarrow q_{s,s'} = q'_{s',s} = 0$$

La condizione per l'esistenza di una misura invariante per i processi di nascita e morte è:

$$u_{s+1} = \frac{\lambda_s}{\mu_{s+1}} u_s$$

Questa condizione ci dice che

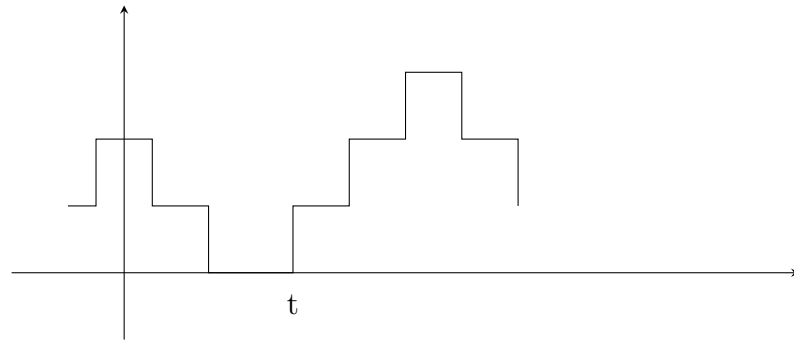
$$\begin{aligned} u_{s+1} \mu_{s+1} &= \lambda_s u_s \\ u_{s+1} &= q_{s+1,s} \\ \lambda_s &= q_{s,s+1} \end{aligned}$$

Da questo vediamo che questi processi di nascita e morte sono reversibili.

**Esempi** Tutti questi processi sono reversibili:

- $M/M/1$  con  $\lambda < \mu$
- $M/M/N$  con  $\lambda < M\mu$
- Se ci sono infiniti sportelli:  $M/M/\infty$ , non abbiamo alcuna condizione affinché esista la distribuzione invariante, esiste sempre.

Cosa significa questo in termini del processo di coda? Nei processi di coda partiamo dal tempo 0, in cui lo sportello è vuoto e non ci sono clienti (quindi in realtà nel processo di coda non consideriamo tutti i tempi - positivi e negativi); supponiamo di aver definito un processo di coda su tutti i tempi (possiamo immaginare di partire da un tempo negativo e far passare molto tempo). La traiettoria del processo al variare del tempo, a volte aumenta di 1 (quando arriva un cliente) oppure diminuisce (quando va via).



La condizione di reversibilità dice che guardando il processo in avanti o all'indietro, stiamo osservando lo stesso processo: la condizione sugli arrivi (gli aumenti di 1) - che sappiamo essere data da un processo di Poisson - è che le entrate/aumenti corrispondano alle uscite; quindi anche le uscite devono essere regolate da un processo di Poisson.

Le uscite dei clienti dal sistema sono quindi anche loro un processo di Poisson, con lo stesso parametro  $\lambda$ .



# Chapter 7

## Processi di rinnovamento

I processi di rinnovamento sono dei processi di conteggio. Abbiamo visto che i processi di Poisson soddisfano delle ipotesi: si parte da 0, è possibile solo aumentare di valori interi non negativi (ipotesi dei processi di conteggio) e gli incrementi sono stazionari ed indipendenti (ipotesi solo dei processi di Poisson). Nei processi di rinnovamento gli incrementi non sono indipendenti.

Nel caso del processo di Poisson, è possibile descriverlo in termini di tempi tra gli arrivi; quindi se abbiamo un processo di Poisson i tempi tra gli arrivi - ovvero quanto occorre aspettare fino al primo arrivo, quanto occorre aspettare tra il primo e il secondo arrivo... - sono indipendenti, identicamente distribuiti e hanno una distribuzione esponenziale di parametro  $\lambda$ , dove  $\lambda$  è il parametro esponenziale del processo di Poisson.

Anche nei processi di rinnovamento gli arrivi tra un cliente e l'altro sono indipendenti e identicamente distribuiti, ma non supponiamo più che siano distribuiti esponenzialmente; perdiamo le proprietà dell'assenza di memoria.

**Definizione** Siano  $U_1, U_2, \dots$  indipendenti e identicamente distribuiti. Questi rappresentano i tempi tra gli arrivi. Supponiamo inoltre  $U_i \geq 0$ . Supponiamo che  $P(U_i = 0) < 1$ . Supponiamo che esista l'attesa:  $P(U_i) < +\infty$ .

Definiamo

$$\begin{aligned}T_1 &= U_1 \\T_2 &= U_1 + U_2 \\&\dots \\T_n &= U_1 + \dots U_n\end{aligned}$$

Quindi i  $T_i$  sono i tempi degli arrivi ( $U_i$  sono i tempi tra gli arrivi). Allora un processo di rinnovamento  $N_t$  è definito come:

$$N_t = \max\{k | T_k \leq t\}$$

Quindi contiamo quanti sono gli arrivi fino al tempo  $t$ . Da questo si evince che un processo di Poisson è un caso particolare di processo di rinnovamento nel caso in cui i tempi tra gli arrivi abbiano distribuzione esponenziale.

### 7.0.1 Proprietà dei processi di rinnovamento

**Legge forte dei grandi numeri:** è un rafforzamento della legge dei grandi numeri. Questa legge ci dice che:

$$P\left(\frac{U_1 + \dots + U_n}{n} \rightarrow \mu\right) = 1$$

Ovvero con probabilità 1 la media dei primi  $n$  tende a  $\mu$ .

Possiamo dire anche che  $\mu > 0$ ; infatti questo segue da:

$$P(U_i = 0) < 1 \quad \text{e} \quad U_i \geq 0$$

Riscriviamo:  $U_1 + \dots + U_n = T_n$ ; allora:

$$\frac{T_n}{n} \rightarrow \mu > 0 \Rightarrow T_n \rightarrow \infty \Rightarrow P(N_t < +\infty) < 1$$

Dove  $N_t$  è il massimo per cui  $T_k < t$ . Siccome  $T_n$  tende all'infinito, ad un certo punto  $T_n$  diventerà più grande di  $t$ , quindi  $N_t$  sarà minore di  $+\infty$ .

Un'altra proprietà è che

$$N_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$$

Questo perché  $N_t$  è non decrescente, per come è definito. Quindi se  $N_t$  non tendesse all'infinito, dovrebbe tendere ad un valore finito:

$$\exists k : N_t \rightarrow k$$

Sappiamo che i  $T_n$  sono finiti:  $T_n < \infty$ ,  $T_n = U_1 + \dots + U_n$ .

Da questo segue che  $T_n \rightarrow \infty$ : perché altrimenti se  $N_t$  tendesse ad un valore  $k$ , allora  $T_{k+1} = \infty$ . Questo implica che  $N_t \rightarrow \infty$ .

La legge dei grandi numeri implica che  $N_t$  è finito, per ogni  $t$ ; però per  $t$  che tende all'infinito, deve tendere all'infinito.

## Calcolo della distribuzione di $N_t$

$$P(N_t = k) \\ (N_t = k) = (T_k \leq t, T_{k+1} > t)$$

Ovvero l'arrivo  $k$ -esimo si è verificato prima di  $t$ , l'arrivo  $k+1$ -esimo si è verificato dopo  $t$ .

Chiamiamo  $F_n$  la funzione di ripartizione di  $T_n$ :

$$F_n(x) = P(T_n \leq x)$$

Siccome  $T_n$  è la somma di  $n$  variabili indipendenti con la stessa distribuzione, questa possiamo calcolarla.

Se  $f(x)$  è la densità di  $U_1$ , allora per esempio la densità di  $T_2$  è al convoluzione  $f * f$ , dove la convoluzione  $f * g(x) = \int f(z)g(x-z)dx$ .

In generale l'integrale andrebbe da  $-\infty$  a  $+\infty$ , ma in questo caso va solo da 0 a  $x$ .

In generale quindi la densità di  $T_n$  si ottiene facendo la convoluzione  $n$  volte:

$$\underbrace{f * f * \dots * f}_{n \text{ volte}}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} (N_t = k) &= (T_k \leq t, T_{k+1} > t) \\ &= P((T_k \leq t)(T_{k+1} > t)) \quad \text{Il primo evento è più piccolo, ed è quindi contenuto nel secondo} \\ &= P(T_k \leq t) - P(T_{k+1} \leq t) \\ &= F_k(t) - F_{k+1}(t) \end{aligned}$$

## 7.0.2 Comportamento asintotico

$$P\left(\frac{N_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\mu}\right) = 1$$

Abbiamo visto che  $N_t$  tende all'infinito con probabilità 1; ma il comportamento asintotico ci dice come. Precisamente, il rapporto tra  $N_t$  e  $t$  tende a  $\mu$ , dove  $\mu = P(U_1)$ .

Questo segue dalla legge forte dei grandi numeri:

$$\begin{aligned}
\frac{T_n}{n} &\rightarrow \mu \\
T_{N_t} &\leq t < T_{N_t+1} \\
\frac{T_{N_t}}{N_t} &\leq \frac{t}{N_t} < \frac{T_{N_t+1}}{N_t} \\
\frac{T_{N_t}}{N_t} &\leq \frac{t}{N_t} < \frac{T_{N_t+1}}{N_t+1} \cdot \frac{N_t+1}{N-t}
\end{aligned}$$

$$P\left(\frac{T_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu\right) = 1$$

$$\mu \leq \frac{t}{N_t} < \mu \cdot 1$$

$$P\left(\frac{t}{N_t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mu\right) = 1$$

$$P\left(\frac{N_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\mu}\right) = 1$$

**Esempio** Processo di Poisson:  $U_1$  esponenziale di parametro  $\lambda$

$$\begin{aligned}
P(U_1) &= \frac{1}{\lambda} \\
P\left(\frac{N_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \lambda\right) &= 1
\end{aligned}$$

Quindi nel caso del processo di Poisson il rapporto tra  $N_t$  e  $t$  tende a  $\lambda$ .

**Esempio**  $U_1$  uniforme in  $[0, 1]$

$$\begin{aligned}
P(U_1) &= \frac{1}{2} \\
P\left(\frac{N_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 2\right) &= 1
\end{aligned}$$

## 7.1 Processi di rinnovamento con ricompensa

È una generalizzazione dei processi di rinnovamento.

Anche in questo caso abbiamo una successione di  $U_i$  indipendenti e identicamente distribuiti,  $U_i \geq 0$ ,  $P(U_i = 0) < 1$ ,  $P(U_i) = \mu < +\infty$ .

Esiste un'altra successione  $X_i$  indipendenti e identicamente distribuiti, ma non supponiamo che siano non negativi:  $P(X_i) = \lambda$ .

Supponiamo che le coppie  $(U_i, X_i)$  siano indipendenti (ovvero,  $U_i$  e  $X_i$  possono essere dipendenti, ma ogni coppia è indipendente da tutte le altre).

Un processo di rinnovamento con ricompensa è definito come:

$$Y_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

Dove  $N_t$  è il processo di rinnovamento corrispondente alle  $U_i$ .

Quindi partendo dalle  $U_i$  definiamo un processo di rinnovamento; definiamo questo processo  $Y_t$ , e lo chiamiamo processo di rinnovamento con ricompensa, la somma da 1 a  $N_t$  degli  $X_i$ .

Se  $N_t = 0$ , allora  $Y_t = 0$ .

Prendiamo una compagnia di assicurazioni: ogni volta che si verifica un incidente deve pagare una certa somma. Supponiamo che questi incidenti avvengano secondo un processo di rinnovamento, e queste somme siano indipendenti e identicamente distribuite (le  $X_i$  sarebbe quello che la compagnia deve pagare se si verifica un incidente). Se guardiamo la somma totale che la compagnia deve pagare fino al tempo  $t$ , è  $Y_t$ .

Se le variabili  $X_i$  fossero tutte uguali a 1, allora  $Y_t = N_t$ .

Il processo di rinnovamento è un caso particolare del processo di rinnovamento con ricompensa, dove tutti gli  $X_i$  sono pari a 1.

### 7.1.1 Comportamento asintotico

Come per il caso dei processi di rinnovamento, anche per i processi di rinnovamento con ricompensa possiamo vedere il comportamento asintotico.

$$\frac{\sum_{i=1}^{N_t} X_i}{t} = \frac{\sum_{i=1}^{N_t} X_i}{N_t} \cdot \frac{N_t}{t}$$

Se facciamo tendere il tempo  $t$  all'infinito, sappiamo che anche  $N_t$  tende all'infinito con probabilità 1. Per la legge dei grandi numeri, questo rapporto tende a  $\lambda$ , che è l'attesa di  $X_1$ , con probabilità 1:

$$\frac{\sum_{i=1}^{N_t} X_i}{N_t} \rightarrow \lambda = P(X_1)$$

Inoltre sappiamo che:

$$\frac{N_t}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}, \quad \mu = P(U_1) \quad \text{con probabilità 1}$$

Quindi

$$P\left(\frac{Y_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{\lambda}{\mu}$$

Nell'esempio sulla compagnia di assicurazione, l'ammontare di premi che deve pagare la compagnia d'assicurazioni è data dal rapporto tra  $\lambda$  e  $\mu$ .  $\lambda$  è la spesa per il singolo incidente, mentre  $\mu$  è l'attesa del tempo tra due incidenti. Quindi quanto più grande è il premio che deve pagare per ogni incidente, questa cresce; se aumenta l'attesa del tempo tra gli incidenti, decresce.

Questa è una proprietà asintotica, quindi bisogna anche tenere conto che ci possono essere fluttuazioni.

### 7.1.2 Applicazione

Vogliamo studiare l'età media di un processo di rinnovamento. L'età è definita nel seguente modo:

$$A(t) = t - T_{N_t}$$

Dove  $N_t$  è il numero di salti che ci sono stati prima di  $t$ . Quindi  $T_{N_t}$  sarebbe il tempo dell'ultimo rinnovamento prima di  $t$ .  $A(t)$  è il tempo passato dall'ultimo rinnovamento.

Che cosa significa età media? Che vogliamo studiare il limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t A(s) ds}{t}$$

Questa è l'età media, perché facciamo la media nel tempo dell'età.

Per studiare questo possiamo usare appunto il modello di rinnovamento con ricompensa: una ricompensa per un ciclo di rinnovamento di lunghezza  $t$  è definita come  $\int_0^t A(s) ds$ .

L'integrale possiamo vederlo come la somma delle ricompense per ogni ciclo di rinnovamento, più un eventuale tempo di resto.



$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t A(s) ds}{t} = \frac{P(\text{ricompensa per un ciclo di rinnovamento})}{P(\text{durata di un ciclo di rinnovamento})}$$

A quanto è uguale la quantità  $\int_0^t A(s) ds$  ?

$$\int_0^t A(s) ds = \int_0^t s \cdot ds = \frac{t^2}{2}$$

Quindi detta  $U$  una variabile aleatoria con distribuzione come quella dei cicli di rinnovamento, il limite precedente sarà pari a:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t A(s) ds}{t} = \frac{P(U^2)}{2P(U)}$$

Inizialmente abbiamo supposto che  $P(U) = \mu$ , ma ora occorre anche una seconda ipotesi:  $P(U^2) = +\infty$ .

Un problema analogo a questo è calcolare il tempo medio di eccesso di un processo di rinnovamento. Cosa si intende per tempo di eccesso? Per l'età intendevamo quanto tempo era passato dall'ultimo rinnovamento; l'eccesso  $Y(t)$  indica quanto tempo manca al prossimo rinnovamento.

$N_t$  è l'ultimo rinnovamento avvenuto  
 $Y(t) = T_{N_t+1} - t$  prima di  $t$ ,  $N_t + 1$  è il prossimo rinnovamento

Anche qui si vuole studiare il limite:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t Y(s) ds}{t}$$

Questo tempo di eccesso posso vederlo come una somma di tante ricompense per ogni ciclo di rinnovamento.

Per calcolarlo, possiamo usare un risultato già visto: calcolare la media di un processo di rinnovamento con ricompensa.

Supponiamo  $U$  sia la lunghezza di un ciclo di rinnovamento. La media dell'eccesso su un intervallo di rinnovamento di lunghezza  $U$  è :

$$\int_0^U (U - s) ds = \left[ \frac{(U - s)^2}{2} \right]_0^U = \frac{U^2}{2}$$

Usando il teorema visto precedentemente:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} T_{N+1} - t &= \frac{P(\frac{U^2}{2})}{P(U)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{P(U^2)}{2}\end{aligned}$$

Facendo l'ulteriore ipotesi  $P(U^2) < +\infty$ .

Quindi l'età media di un processo di rinnovamento e il tempo di eccesso medio di un processo di rinnovamento **sono uguali** e valgono  $\frac{1}{2} \cdot \frac{P(U^2)}{2}$ , ammesso che sia valida l'ipotesi su  $P(U^2)$ .

## 7.2 Processi di rinnovamento alternati

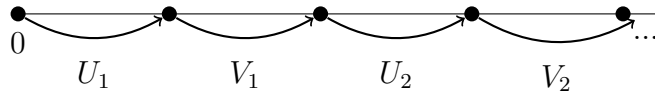
Abbiamo due successioni di tempi  $U_1, U_2, \dots$  indipendenti e identicamente distribuiti e  $V_1, V_2, \dots$  indipendenti e identicamente distribuiti. Facciamo le ipotesi per il processo di rinnovamento:

$$U_i \geq 0, P(U_i = 0) < 1 \qquad V_i \geq 0, P(V_i = 0) < 1$$

Che relazione c'è tra  $U_i$  e  $V_i$ ?

Ipotizziamo che le coppie  $(U_1, V_1), (U_2, V_2), \dots$  sono indipendenti e identicamente distribuite.

Come sono definiti questi processi di rinnovamento alternati? Parto da 0 e considero intervalli di tempo  $U_1$ , poi un intervallo di tempo di lunghezza  $V_1$ , poi  $U_2$ , e così via.



Quindi mentre nel caso dei processi di rinnovamento abbiamo una successione di periodi indipendenti con la stessa distribuzione, in questo caso abbiamo un'alternanza fra periodi che hanno la stessa distribuzione  $U_i$  e periodi che hanno la stessa distribuzione  $V_i$ .

$U_1$  e  $V_1$  possono avere una dipendenza, ma le coppie sono indipendenti tra loro; per esempio si può pensare come una macchina che ha due periodi: uno di funzionamento e uno in cui non funziona. Siamo interessati alla percentuale di tempo in cui funziona: faccio la somma di tutti gli intervalli di tempo corrispondenti alla macchina in funzione,  $U_i$ , e dividendo per il tempo totale.



È possibile ricondursi ad un processo di rinnovamento con ricompensa. Definisco

$$Z_1 = U_1 + V_1, Z_2 = U_2 + V_2, \dots, Z_i = U_i + V_i$$

Le variabili  $Z_i$  sono indipendenti tra loro e hanno la stessa distribuzione.  $N_t$  è il processo di rinnovamento associato alle  $Z_i$ .

Per ogni processo di rinnovamento delle  $Z_i$  posso definire la ricompensa  $i$ -esima  $U_i$ ; posso fare la sommatoria:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{N_t} U_i}{\sum_{i=1}^{N_t} Z_i}$$

Questa sommatoria a meno di una parte di avanzo:



Se noi prendiamo un certo  $t$ , ci sarà un certo numero di rinnovamenti corrispondenti a  $Z_i$  (in verde), poi ci sarà una parte rimanente (in arancione).

Si vede facilmente che la lunghezza della parte rimanente diviso per  $t$  tende a 0, quindi posso considerare:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{N_t} U_i}{\sum_{i=1}^{N_t} Z_i} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{N_t} U_i}{t}$$

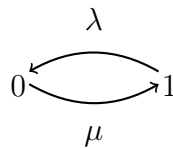
e per il teorema precedente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{N_t} U_i}{t} = \frac{U_1}{P(Z_1)}$$

Nella frazione è stato scelto  $U_1$  perché gli  $U_i$  hanno tutti la stessa attesa. Sapendo inoltre che  $P(Z_1) = P(U_1) + P(V_1)$ :

$$= \frac{P(U_1)}{P(U_1) + P(V_1)}$$

Un esempio lo abbiamo visto nelle catene di Markov con tempo continuo:  $S = [0, 1]$  si può vedere come processo di nascita e morte dove l'intensità del passaggio 0,1 è  $\lambda$ , mentre l'intensità del passaggio tra 1 e 0 è  $\mu$ .



Il tempo in cui rimaniamo nello stato 0 è un esponenziale di parametro  $\lambda$ , il tempo in cui rimaniamo nello stato 1 è un esponenziale di parametro  $\mu$ .

Quindi  $P(U_1) = \frac{1}{\lambda}$ ,  $P(V_1) = \frac{1}{\mu}$ .

Il tempo medio di funzionamento (in cui mi trovo sullo stato 1) è:

$$\frac{\frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}} = \frac{\frac{1}{\mu}}{\frac{\lambda + \mu}{\lambda \cdot \mu}} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

Questo valore è anche la probabilità dello stato 1 rispetto alla misura invariante: quando abbiamo la distribuzione invariante, questa ci dà anche il tempo medio in cui ci troviamo in uno stato.

**Esempio** Abbiamo prima calcolato l'età media di un processo di rinnovamento; vogliamo calcolare ora per quanto tempo in media il processo di rinnovamento ha un'età minore di una costante  $c$ . Possiamo dividere gli istanti di tempo in periodi in cui l'età media è minore di quella costante, e periodi in cui è maggiore.

Dato un ciclo di rinnovamento, possiamo definire una ricompensa associata al periodo in cui l'età è stata minore della costante.

Sia  $U$  la durata di un ciclo di rinnovamento. Il periodo in cui l'età si è mantenuta  $\leq c$  ha una durata pari a  $\min(U, c)$ : perché se il periodo è stato più piccolo di  $c$ , per tutto il periodo  $U$  l'età è stata minore di  $c$ ; altrimenti, il periodo in cui l'età si è mantenuta minore di  $c$  è proprio  $c$ .

Attesa della ricompensa è:

$$P(\min(U, c))$$

La media del periodo in cui l'età è stata  $\leq c$  tenderà a:

$$\frac{P(\min(U, c))}{P(U)}$$

Supponiamo  $F(x)$  sia la funzione di ripartizione di  $U$ ; allora

$$P(\min(U, c)) = \int_0^c (1 - F(x)) dx$$

Questo si può vedere facilmente: supponiamo che  $U$  abbia densità  $f(x)$ ; allora possiamo dire che

$$P(\min(U, c)) = \int_0^c x f(x) dx + c \int_c^{+\infty} f(x) dx$$

perché il minimo si può comporre in due parti, quando  $U$  è più piccolo di  $c$  e quando è maggiore.

Integrando per parti:

$$\begin{aligned} P(\min(U, c)) &= \int_0^c x f(x) dx + c \int_c^{+\infty} f(x) dx \\ &= [-x(1 - F(x))]_0^c + \int_0^c (1 - F(x)) dx + c \int_c^{+\infty} f(x) dx \\ &= \cancel{-c(1 - F(c))} + \int_0^c (1 - F(x)) dx + \cancel{+c(1 - F(c))} \end{aligned}$$

Analogamente, posso domandarmi: se ho un ciclo di rinnovamento, qual è la lunghezza del periodo in cui l'eccesso è minore di  $c$ ?

Supponiamo che  $U$  sia la durata di un ciclo di rinnovamento. Per quanto tempo l'eccesso è minore o uguale di  $c$ ? Se  $U < c$ , allora per un tempo  $U$ , altrimenti  $c$ .

La ricompensa è sempre  $\min(U, c)$ .

**Esempio** Vediamo un'altra applicazione dei processi di rinnovamento alternati.

Consideriamo un processo di coda  $M/G/1$ . Quindi gli arrivi sono un processo di Poisson di parametro  $\lambda$ ; il tempo di servizio ha una distribuzione arbitraria; e c'è un solo sportello.

Sia  $g$  la densità di probabilità del tempo di servizio e

$$\int_0^{+\infty} x g(x) dx = \mu < +\infty$$

Avremo dei periodi in cui lo sportello è vuoto e periodi in cui è pieno. Vogliamo vedere qual è la percentuale di tempo in cui lo sportello è vuoto.

Detto  $U_i$  il periodo in cui lo sportello è vuoto, l'attesa di  $U_i$  è  $\frac{1}{\lambda}$  (perché il primo arrivo è un'esponenziale di parametro  $\lambda$ ):

$$P(U_i) = \frac{1}{\lambda}$$

Sia  $V_i$  l' $i$ -esimo periodo in cui lo sportello è occupato. Supponiamo che il tempo di servizio del primo cliente abbia durata  $t$ . Durante questo periodo arriverà un certo numero di clienti.

Qual è l'attesa del numero dei clienti che arrivano in questo periodo? Siccome i clienti arrivano con un processo di Poisson, il numero degli arrivi

in un periodo di lunghezza  $t$  è pari all'attesa di un processo di Poisson al tempo  $t$ , in questo caso è  $\lambda \cdot t$ .

Questo perché in questo caso abbiamo supposto di sapere la probabilità del tempo di servizio, se non l'avessimo saputo avremmo dovuto fare la probabilità composta, facendo l'integrale su tutti i possibili valori:

$$\int_0^{+\infty} \lambda t g(t) dt = \lambda \int_0^{\infty} t g(t) dt = \lambda \mu$$

con  $\mu$  l'attesa del tempo di servizio.

Per vedere quant'è il tempo totale, posso definire un processo di diramazione (un processo in cui un individuo ha un certo numero di figli con certe probabilità); in questo caso, qual è il numero di figli? Posso definire figli del primo cliente, i clienti che arrivano mentre viene servito il primo cliente. Questo numero ha attesa  $\lambda \mu$ , per ogni cliente.

Ognuno di questi figli a sua volta verrà servito allo sportello, generando a sua volta nuovi (propri) figli.

Questi numeri di figli sono indipendenti e hanno la stessa distribuzione.

Lo sportello tornerà libero quando non ci saranno più clienti, ovvero quando il processo di estingue. Perché il processo si estingua bisogna fare l'ipotesi che  $\lambda \mu < 1$ .

Qual è il periodo in cui lo sportello è occupato? Devo calcolare l'attesa del tempo di occupazione dello sportello. Siccome per ogni individuo, l'attesa del tempo in cui lo sportello è occupato è  $\mu$ , l'attesa del tempo di occupazione dello sportello sarà:

$$\mu \cdot P(\text{somma di tutte le generazioni})$$

Ma in un processo di diramazione, sappiamo qual'è l'attesa di una generazione:

Per calcolare quest'attesa devo fare:

$$\mu \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda \mu)^k = \mu \frac{1}{1 - \lambda \mu}$$

Ho due periodi: il periodo in cui lo sportello è libero, che posso chiamare  $U_1$ , ha un'attesa  $\frac{1}{\lambda}$ , mentre il periodo in cui lo sportello è occupato,  $V_1$ , ha un'attesa pari a  $\frac{\mu}{1 - \lambda \mu}$ :

$$P(U_1) = \frac{1}{\lambda} \qquad P(V_1) = \frac{\mu}{1 - \lambda \mu}$$

Quindi la percentuale del tempo in cui lo sportello è libero sarà data da:

$$\begin{aligned}\frac{P(U_1)}{P(U_1) + P(V_1)} &= \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{\mu}{1-\lambda\mu}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\lambda\mu}{1-\lambda\mu}} \\ &= 1 - \lambda\mu\end{aligned}$$

Sempre sotto l'ipotesi che  $\lambda\mu < 1$ . Altrimenti lo sportello tende a essere sempre occupato: la percentuale del tempo in cui sarebbe libero per  $t \rightarrow \infty$  è 0.

