TUTORIAT LFA 7: AUTOMATE PUSH-DOWN. LIMBAJE INDEPENDENTE DE CONTEXT

RADU COSTACHE, MARIA PREDA

1. Breviar teoretic

1.1. **Clasa limbajelor independente de context.** În cursurile/seminarele/tutoriatele anterioare am observat faptul că există anumite limbaje care nu se pot modela prin intermediul automatelor finite adică nu erau *limbaje regulate*.

Exemplu 1.1. *Următoarele limbaje nu sunt regulate:*

- $L_1 = \{a^n b^n \mid n \leq 0\}$
- $L_2 = \{ww^R \mid w \in \Sigma^*\}$

O parte dintre limbajele care nu fac parte din clasa *limbajelor regulate* fac parte dintr-o clasă numită **limbaje independente de context**. Cele două limbaje din *Exemplul* 1.1 vor face parte din această familie.

Teoremă 1.2. *Fie* CFL *familia limbajelor independente de context. Atunci:*

$$\text{REG} \subset \text{CFL}$$

.

Observaţie 1.3. *Există mai multe familii de limbaje definite conform ierarhiei lui Chomsky:*

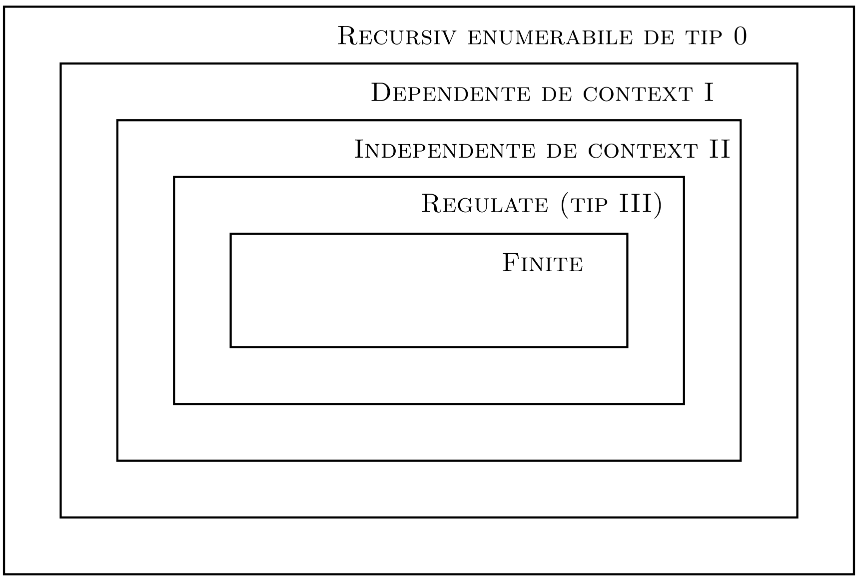


Figura 1. Ierarhia lui Chomsky. Sursa: *A. Păun 2023, Curs 12: Decidabilitate. Limbaje Formale şi Automate*

Pentru a defini clasa limbajelor regulate ne-am folosit de automate finite, considerând că un limbaj este regulat dacă şi numai dacă se poate construi un automat care să accepte toate cuvintele din acesta, şi numai pe acestea. Vom încerca să definim astfel şi clasa limbajelor independente de context.

Definiţie 1.4. *Un limbaj independent de context este un limbaj acceptat de un automat push-down.*

Această definiţie este într-o oarecare măsură circulară, pe viitor vom da o definiţie mai riguros, utilizând gramatici.

1.2. **Automate push-down (PDA).** Spre deosebire de automatele cu care am lucrat până acum, automatele push-down vin in plus cu o stivă de caractere, în care se scot şi se adaugă anumite simboluri auxiliare la fiecare tranziţie.

Definiţie 1.5. *Un automat push-down (PDA) este un tuplu* $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ *cu următoarea semnificaţie:*

- Q*: Mulţimea de stări*
- Σ*: Alfabetul de input*
- Γ*: Alfabetul stivei*
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \times Q \times \Gamma^*$*, relaţie de tranziţie.*
- $q_0 \in Q$*: starea iniţială.*
- $Z_0 \in \Gamma$*: Simbolul de la capătul stivei.*
- $F \subset Q$*: mulţimea stărilor finale.*

Sistemul de tranziţie: Fie $(s, \sigma, \gamma, t, \tau) \in \delta$ o tranziţie intr-un automat push-down. Pornim dintr-o stare $s \in Q$ şi vrem să consumăm din cuvânt un simbol $\sigma \in \Sigma \cup \{\lambda\}$, doar dacă la vârful stivei se regăseşte simbolul auxiliar γ, astfel ajungând la starea t, după ce am scos de la vârful stivei simbolul γ (pop) şi am adău gat (push) simbolul τ.

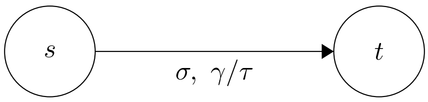


FIGURA 2. Tranziţie într-un automat push-down

Observaţie 1.6. *Pentru a simplifica notaţiile, vom utiliza litere mici şi cifre ca alfabet de input şi majuscule pentru alfabetul stivei.*

Observaţie 1.7. *Simbolul* Z_0 *(uneori notat \$), se află mereu in stivă la început. Mereu va trebui să citim* Z_0 *de pe stivă la început şi nu avem voie să nu îl punem la loc, decât când am finalizat de parcurs cuvântul.*

Observaţie 1.8 (Instantanee)**.** *Pentru a descrie o etapă din parcurgerea unui cuvânt de către automat vom avea nevoie de un tuplu din* $Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$*, astfel memorând starea la care ne aflăm, simbolurile din cuvânt care mai trebuie consumate şi configuraţia curentă a stivei.*

Definiţie 1.9 (Acceptarea cuvintelor)**.** *Automatele push-down au trei tipuri de acceptare:*

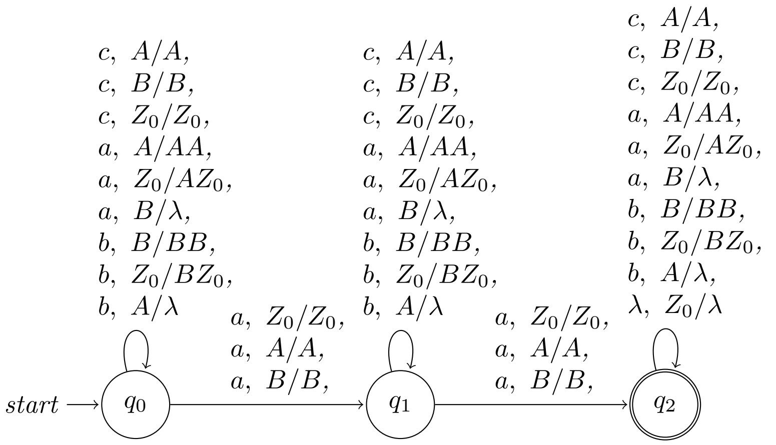
(1) *Prin stări finale*
$T(A) = \{w \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q_f, \lambda, \alpha), q_f \in F\}$
(2) *Prin stiva vidă*
$N(A) = \{w \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \lambda, \lambda)\}$
(3) *Prin stări finale şi stiva vidă*
$L(A) = \{w \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q_f, \lambda, \lambda), q_f \in F\}$

Teoremă 1.10. *Fie* $\mathcal{T}_{PDA}, \mathcal{N}_{PDA}$ *şi* $\mathcal{L}_{PDA}$ *familiile limbajelor acceptate de atuomate pushdown cu stări finale, stiva vidă, respectiv stiva vidă şi stări finale. Atunci:*

$$\mathcal{N}_{PDA} = \mathcal{L}_{PDA} = \mathcal{T}_{PDA}$$

Exemplu 1.11. *Automat push-down cu acceptare cu stări finale şi stivă vidă pentru limbajul:*

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_a = |w|_b + 2\}$$



Definiţie 1.12. *Un automat push-down este determinist (DPDA) dacă şi numai dacă respectă următoarele proprietăţi Pentru orice $q \in Q, a \in \Sigma$ şi $X \in \Sigma$:*

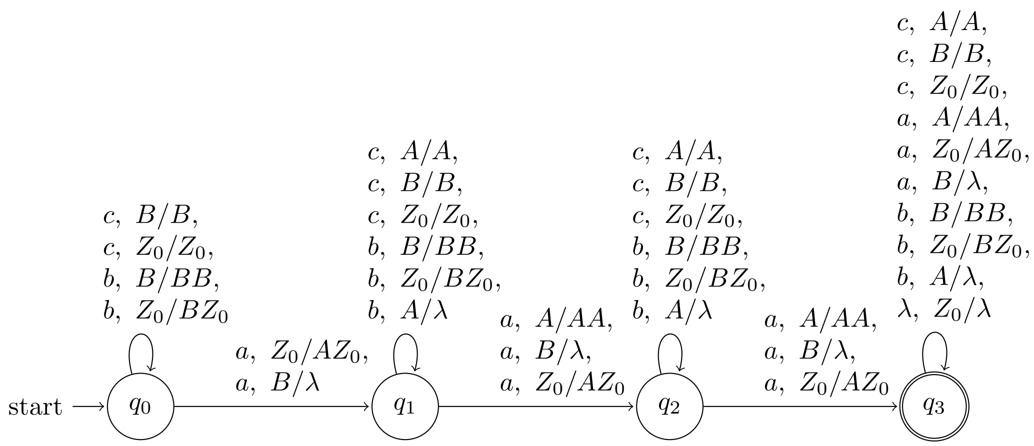
(1) *$\delta(q, a, X)$ are cel mult un element*
(2) *Dacă $\exists\delta(q, a, X)$, atunci $\nexists\delta(q, \lambda, X)$.*

Teoremă 1.13. *Fie $\mathcal{T}_{DPDA}$,$\mathcal{N}_{DPDA}$ şi $\mathcal{L}_{DPDA}$ familiile limbajelor acceptate de atuomate pushdown deterministe cu stări finale, stiva vidă, respectiv stiva vidă şi stări finale. Atunci:*

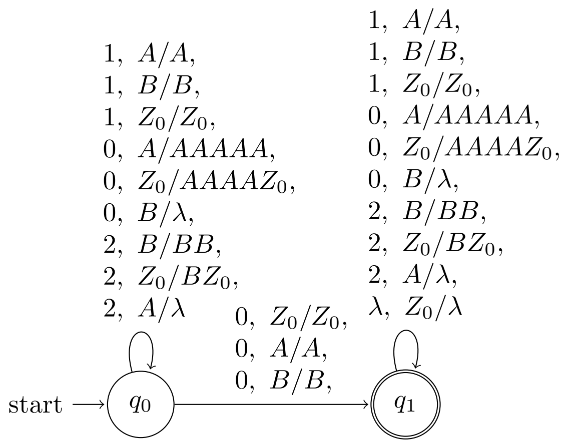
$$\mathcal{N}_{DPDA} = \mathcal{L}_{DPDA} \subset \mathcal{T}_{DPDA}$$

2. Exerciţii

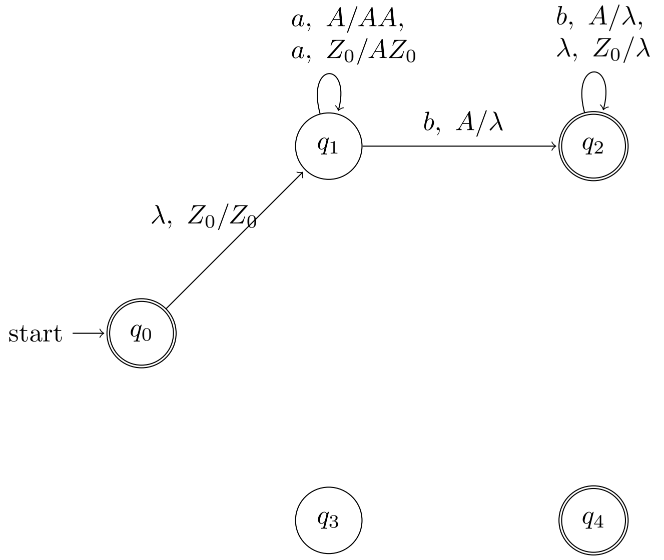
(1) Construiţi automate push-down pentru limbajele:
   (a) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, |w|_a = |w|_b > 2\} \cup \{aaab, bbba\}$
   Soluţie:



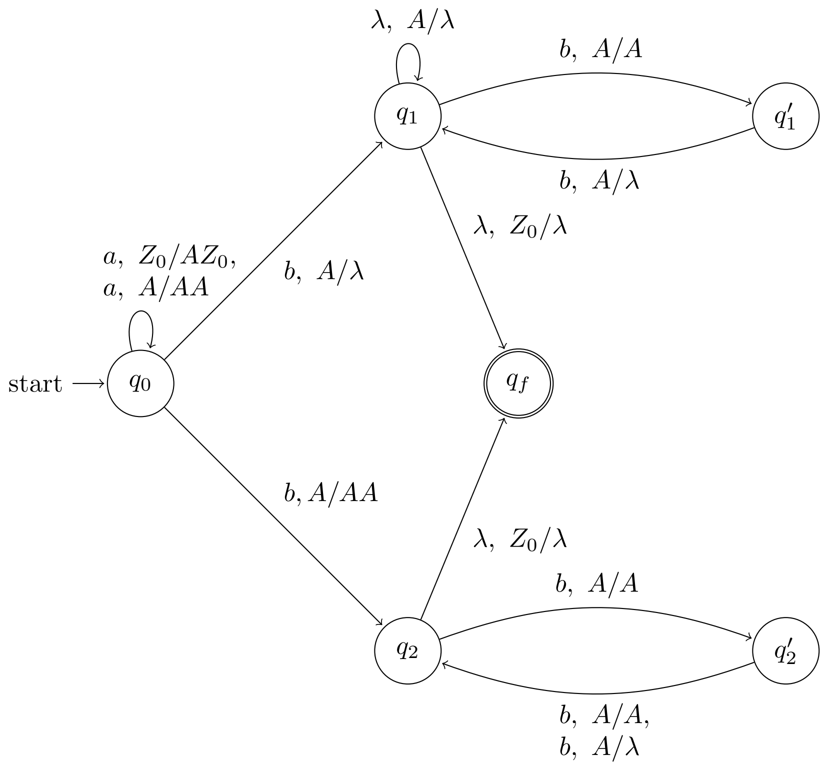
   (b) $L = \{w \in \{0, 1, 2\}^* \mid 4|w|_0 + 1 = |w|_2\}$
   Soluţie:



(c) $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \cup \{a^n b^{3n} \mid n \geq 0\}$
Soluţie:



(d) $L = \{0^{2n} b^n \mid n \geq 0\} \cup \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$
(e) $L = \{a^n b^{2m+1} \mid m \neq n, n, m \neq 0\}$ *Soluţie:*



(f) $L = \{ww^r c^i \mid w \in \{a,b\}^*, i \geq 2\} \cup \{abca, ccba, cabc\}$
(g) L $= \{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\} \cup \{a^{3n} b^n \mid n \geq 0\} \cdot \{a^3 b, a^6 b^2, ab^2, a^2 b^3, a^2 b^4, a^2 b^5\}$
(h) $L = \{wc^i w^r \mid w \in \{a,b\}^*, i \geq 3\} \cup \{abcba, abccba, abcabc\}$