

TUTORIAT LFA 3: PROPRIETĂȚI ALE LIMBAJELOR. DECIDABILITATE ÎN REG.

RADU COSTACHE, MARIA PREDA

1. BREVIAR TEORETIC

1.1. Proprietăți.

Propoziție 1.1. Fie L un limbaj. Avem următoarele proprietăți:

- $L \cup L = L$
- $L \cap L = L$
- Dacă $L \subset L'$, avem că $L \cap L' = L$ și $L \cup L' = L'$
- $L \cap \Sigma^* = L$ și $L \cup \Sigma^* = \Sigma^*$
- Dacă $\lambda \in L$, atunci avem că $L \cdot \Sigma^* = \Sigma^*$ și $\Sigma^* \cdot L = \Sigma^*$
- $L \setminus \Sigma^* = \emptyset$
- Dacă $L \notin \text{REG}$, atunci avem că $\bar{L} \notin \text{REG}$

Demonstrație. Să presupunem prin reducere la absurd că $\bar{L} \in \text{REG}$.

Familia limbajelor regulate este închisă la complement, deci și $\bar{\bar{L}} = L \in \text{REG}$. Contradicție \square

Observație 1.2. Familia REG este închisă la următoarele operații:

- Reuniune
- Intersecție
- Diferență
- Complementare
- Concatenare
- Stelare
- Plus

1.2. Decidabilitate.

Definiție 1.3. Se numește problemă decidabilă, o problemă pentru care există un algoritm care să furnizeze răspunsul la aceasta.

Propoziție 1.4. Fie M, M_1, M_2 DFA-uri și w un cuvânt. Următoarele probleme sunt decidabile:

- Apartenența cuvântului w la DFA-ul m i.e. $w \in L(M)?$.

Algoritm:

Putem folosi algoritmul de verificare a acceptării din Tutoriatul 1.

- Dacă DFA-ul M este gol i.e. $L(M) = \emptyset?$.

Algoritm:

Verificăm dacă toate stările finale sunt neaccesibile i.e. nu există niciun lanț care începe în starea inițială și ajunge într-o stare finală.

- Universalitatea DFA-ului M i.e. $L(M) = \Sigma^*$?

Algoritm:

(1) Determinăm automatul complementar, pentru $\overline{L(M)}$

(2) Determinăm utilizând proprietatea de emptiness dacă DFA-ul obținut este gol.

- Incluziunea DFA i.e. $L(M_1) \subset L(M_2)?$

Algoritm:

(1) Determinăm automatul complementar $\overline{L(M_2)}$, folosind algoritmul din Tutoriatul 2.

(2) Determinăm automatul de intersecție $L(M_1) \cap \overline{L(M_2)}$, folosind algoritmul din Tutoriatul 2.

(3) Putem folosi algoritmul de emptiness prezentat mai sus (intuitiv, dacă există cuvinte în $L(M_1)$, care nu sunt în $L(M_2)$, atunci nu avem incluziunea $L(M_1) \subset L(M_2)$).

- Egalitatea i.e. $L(M_1) = L(M_2)$?

Algoritm:

Vom testa dubla incluziune ($L(M_1) \subset L(M_2)$ și $L(M_2) \subset L(M_1)$) cu algoritmul anterior. Dacă le obținem pe amândouă, avem automate echivalente.

2. EXERCITII

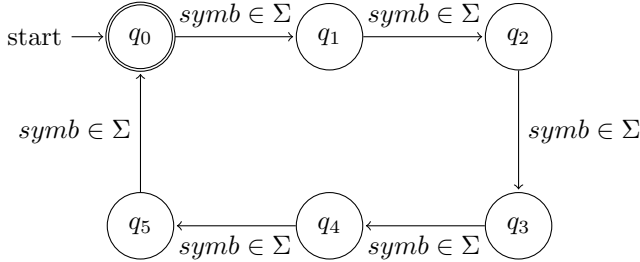
- (1) Este limbajul $L = \{ww^R\}$ regulat?

Soluție:

NU, nu este regulat. Intuitiv, nu avem cum să reținem ce caractere au fost puse în w ca să le repetăm în invers. Se va demonstra în tutoriatul următor cu lema de pompare.

- (2) E decidabil dacă un DFA acceptă toate cuvintele de lungime multiplu de 6? (Justificați răspunsul)

Demonstrație. DA, este decidabil. Putem construi limbajul $\{w \mid |w| \equiv 0(\text{mod}6)\}$. Acest limbaj este regulat, deoarece putem construi următorul automat:



Și DFA-ul pentru care trebuie să verificăm dacă acceptă cuvintele din L modelează tot un limbaj regulat. Trebuie să verificăm dacă L este inclus în limbajul celui DFA. Știm că problema incluziunii este decidabilă, astfel fiind decidabil dacă un automat acceptă toate cuvintele de lungime 6. \square

- (3) Fie $L \in \text{REG}$ și w un cuvânt. Este decidabil dacă $\exists k > 0$ astfel încât $w^k \in L$.

Demonstrație. DA, este decidabil. Construim limbajul $L_w = \{w^+ \mid w \text{ este cuvântul din enunț}\}$. Acest limbaj este regulat (am arătat deja cum se poate construi un automat finit pentru un astfel de limbaj).

Dacă există k cu proprietatea din enunț, atunci $L_w \cap L \neq \emptyset$. Limbajele regulate sunt închise la intersecție, deci se poate construi DFA-ul de intersecție. Problema *DFA emptiness* este decidabilă, deci putem decide dacă există k . \square

- (4) Este decidabil dacă limbajele acceptate de două automate finite nedeterministe cu lambda miscari sunt egale sau nu.

Demonstrație. Automatele finite cu λ -mişcări modelează limbaje regulate. Vom converti ambele automate la câte un DFA echivalent. Problema egalității este decidabilă (dublă) incluziune. \square

- (5) Există limbaje finite care nu sunt regulate?

Demonstrație. NU, orice limbaj finit este regulat. Putem lua fiecare cuvânt (sunt în număr finit, deci și stările sunt tot în număr finit) și să construim câte un lanț de NFA pentru succesiunea sa de litere. \square

- (6) Fie limbajele L_1, L_2, L_3, L_4 cu proprietatea că $L_1 \cdot L_2 = L_3 \cdot L_4$ și $L_2, L_3, L_4 \in \text{REG}$ Avem așadar că $L_1 \in \text{REG}$?

Demonstrație. NU, nu este obligatoriu ca $L_1 \in \text{REG}$. Putem considera:

- $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \notin \text{REG}$
- $L_2 = \Sigma^* \in \text{REG}$
- $L_3 = \Sigma^* \in \text{REG}$
- $L_4 = \Sigma^* \in \text{REG}$

$$\lambda = a^0 b^0 \in L_1 \Rightarrow L_1 \cdot L_2 = \Sigma^* = \Sigma^* \cdot \Sigma^* = L_3 \cdot L_4. \quad \square$$

- (7) Fie limbajele L_1, L_2, L_3 cu proprietatea că $L_1 \cap \overline{L_2} = L_3$ și $L_2, L_3 \in \text{REG}$. Avem așadar că $L_1 \in \text{REG}$? (Justificați)

Demonstrație. NU, L_1 , poate să nu fie regulat. Considerăm:

- $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \notin \text{REG}$

- $\overline{L_2} = \{aabb\} \in \text{REG}$ (limbaj finit), deci și $\overline{\overline{L_2}} = L_2 \in \text{REG}$ (limbajele regulate sunt închise la complement).
- $L_3 = \{aabb\} \in \text{REG}$

Avem că: $L_1 \cap L_2 = \{aabb\} = L_3$. □

- (8) Fie limbajele L_1, L_2, L_3 cu proprietatea că $L_1 \setminus L_2 = L_3$ și $L_1, L_3 \in \text{REG}$. Avem așadar că $L_2 \in \text{REG}$? (Justificați)

Demonstrație. NU, L_2 poate să nu fie regulat. Considerăm:

- $L_1 = \{a\} \in \text{REG}$
- $L_2 = \{a^n \cdot b^n \mid n \geq 0\} \notin \text{REG}$
- $L_3 = \{a\} \in \text{REG}$

$L_1 \setminus L_2 = L_1 = L_3$, deoarece $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. □

- (9) Fie limbajele L_1, L_2, L_3, L_4 cu proprietatea că $L_1 \cup \overline{L_2} = L_3 \cap L_4$ și $L_2, L_3, L_4 \in \text{REG}$. Avem așadar că $L_1 \in \text{REG}$? (Justificați).

Demonstrație. NU, L_1 poate să nu fie regulat. Considerăm:

- $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \notin \text{REG}$
 - $L_2 = \Sigma^* \in \text{REG}$
 - $L_3 = \Sigma^* \in \text{REG}$
 - $L_4 = \Sigma^* \in \text{REG}$
-

- (10) Fie limbajele L_1, L_2, L_3, L_4 cu proprietatea că $L_2 \setminus L_1 = L_4 \setminus L_3$ și $L_2, L_3, L_4 \in \text{REG}$ Avem așadar că $L_1 \in \text{REG}$? (Justificați)

Demonstrație. NU, L_1 poate să nu fie regulat. Considerăm:

- $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \notin \text{REG}$
 - $L_2 = \{b^n \mid n \geq 0\} \in \text{REG}$
 - $L_3 = \emptyset$
 - $L_4 = \{b^n \mid n \geq 0\} \in \text{REG}$
-

- (11) Fie limbajele L_1, L_2, L_3, L_4 cu proprietatea că $L_1 \cap \overline{L_2} = L_3 \cup L_4$ cu $L_2, L_3, L_4 \in \text{REG}$. Avem așadar că $L_1 \in \text{REG}$? (Justificați)

Demonstrație. NU, considerăm:

- $L_1 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \notin \text{REG}$
 - $\overline{L_2} = \{aabb\} \in \text{REG} \Rightarrow L_2 \in \text{REG}$
 - $L_3 = L_4 = \{aabb\} \in \text{REG}$
-

- (12) Fie limbajele L_1, L_2, L_3, L_4 cu proprietatea că $L_1 \setminus L_2 = L_3 \setminus L_4$ și $L_2, L_3, L_4 \in \text{REG}$. Avem așadar că $L_1 \in \text{REG}$? (Justificați)

Demonstrație. NU, considerăm:

- $L_1 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \notin \text{REG}$
 - $L_2 = \Sigma^* \in \text{REG}$
 - $L_3 = L_4 = \Sigma^* \in \text{REG}$
-

- (13) Fie limbajele L_1, L_2, L_3 cu proprietatea că $L_1 \setminus L_2 = L_3$ și $L_2, L_3 \in \text{REG}$. Avem așadar că $L_1 \in \text{REG}$? (Justificați)

Demonstrație. NU. Considerăm:

- $L_1 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \notin \text{REG}$
 - $L_2 = \Sigma^* \in \text{REG}$
 - $L_3 = \emptyset \in \text{REG}$
-

- (14) Fie limbajele L_1, L_2, L_3 cu proprietatea că $L_1 \cup L_2 = L_3$ și $L_2, L_3 \in \text{REG}$. Avem așadar că $L_1 \in \text{REG}$? (Justificați)

- (15) Fie limbajele L_1, L_2 cu proprietatea că $L_1 \subset L_2$ și $L_2 \in \text{REG}$. Atunci $L_1 \in \text{REG}$?

Demonstrație. NU. Spre exemplu $\{a^n b^n \mid n \geq 0\} \subset \Sigma^*$, iar Σ^* este regulat, pe când $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ nu este regulat. \square

- (16) Fie L_1, L_2 cu proprietatea că $L_1 \subset L_2$ și $L_2 \in \text{REG}$. Avem așadar că $L_2 \setminus L_1 \in \text{REG}$? (Justificați)

Demonstrație. NU. Considerăm:

- $L_2 = \Sigma^* \in \text{REG}$
- $L_1 = \{ww^R \mid w \in \text{Sigma}^*\} \notin \text{REG}$

Evident, $L_1 \subset \Sigma^*$

Săpresupunem prin reducere la absurd că $L_2 \setminus L_1 \in \text{REG}$. Cum $L_2 = \Sigma^* \Rightarrow L_2 \setminus L_1 = \overline{L_1}$.

Dacă $\overline{L_1} \in \text{REG}$, atunci $\overline{\overline{L_1}} = L_1 \in \text{REG}$, deoarece limbajele regulate sunt închise la complement.

Dar $L_1 \notin \text{REG}$. Contradicție.

\square