

Analisi Matematica 2

Enrico Favretto

28/02/2022

Contents

1	Funzioni a più variabili	2
1.1	Lez - 01	2
1.1.1	Grafico di una funzione scalare di più variabili	2
1.1.2	Curve di livello di una funzione di più variabili	3
1.1.3	Limiti e continuità per funzioni di più variabili	3
1.2	Lez - 02	5
1.2.1	Calcolo dei limiti	6
1.2.2	Esempi calcolo limiti	7
1.3	Lez - 03	9
1.3.1	Definizioni limiti e continuità per \mathbb{R}^n	9
1.3.2	Calcolo differenziale per funzioni a più variabili	10
1.3.3	Piano tangente al grafico	11
1.4	Lez - 04	13
1.4.1	Differenziabilità in $n \geq 3$	14
1.5	Lez - 05	18
1.5.1	Condizioni sulle derivate parziali che assicurino la differenziabilità	18
1.5.2	Derivate direzionali	19
1.5.3	Teo: Diff. vs. Deriv. direz.	20
1.5.4	Teorema del valore medio	21
2	Esercitazioni	22
2.1	Lezione 1 - 09/03/2022	22
2.2	Esercitazione 2 - 23/03/2022	26

Chapter 1

Funzioni a più variabili

1.1 Lez - 01

Studieremo funzioni a più variabili reali a valori scalari e vettoriali, cioè $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ con $n, k \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1, k \geq 1$.

Se $k = 1, n \geq 2$, f si dice funzione di più variabili a valori scalari;

Se $k \geq 1, n \geq 1$, f si dice funzione di più variabili a valori vettoriali.

Incominciamo a trattare il caso in cui $n = 2, 3$ e $k = 1$.

MOTIVAZIONE: I fenomeni in Fisica/Ingegneria sono modellizzati da funzioni che dipendono da due/tre variabili.

Esempio 1 1. La funzione temperatura di una piastra piana $A \subseteq \mathbb{R}^2$.

La funzione temperatura della piastra A può essere modellizzata da una funzione

$$T : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, +\infty] \subseteq \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

2. La funzione distanza dall'origine in \mathbb{R}^3 ,

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, +\infty]$$

$$f(p) := d(O, p) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

1.1.1 Grafico di una funzione scalare di più variabili

Ricordiamo che nel caso di una funzione scalare da una variabile $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($y = f(x), x \in A$), A intervallo di \mathbb{R} .

$$G_f := \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Se $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($z = f(x, y)$, $(x, y) \in A$)

$$G_f := \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ($t = f(x, y, z)$, $(x, y, z) \in A$)

$$G_f := \{(x, y, z, f(x, y, z)) \mid (x, y, z) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

Disegnare G_f in \mathbb{R}^4 ? Non può essere facilmente studiato, il grafico è una iper-superficie di \mathbb{R}^4

1.1.2 Curve di livello di una funzione di più variabili

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, fissato $t \in \mathbb{R}$,

$$C_t := \{(x, y) \in A \mid f(x, y) = t\}$$

(è un insieme di tipo "curva" contenuto in A)

Esempio 2 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) := x - y$, ($z = x - y$) $x - y - z = 0$,

$$((1, -1, -1), (x, y, z)) = 0$$

$$C_t := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = t\}$$

fascio di rette parallele al variare di t

$$G_f := \{(x, y, x - y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

piano di \mathbb{R}^3 contenente la retta r e ortogonale al vettore $(1, -1, -1)$

$$r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$$

Più in generale se $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $C_t := \{(x, y, z) \in A \mid f(x, y, z) = t\}$ è un insieme di tipo "superficie".

Esercizio 1 Studiare le curve di livello della funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$.

$$C_t := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = t\}$$

- C_t è la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio \sqrt{t} , se $t \geq 0$
- C_t è vuoto (\emptyset), se $t < 0$

1.1.3 Limiti e continuità per funzioni di più variabili

Problema: Data $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, fissato $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ introdurre la definizione

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L$$

Ricordiamo la definizione di limite per funzioni reali di una variabile, $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in [a, b]$ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \iff (def.)$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0 \mid |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\forall x \in (a, b) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = L$$

$$B(x_0, \delta) := (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \delta\}$$

intorno sferico di centro x_0 e raggio $\delta > 0$

Idea per l'introduzione di limite per funzioni di $n = 2$ variabili

Generalizzazione:

1. La definizione di intorno di centro x_0 e raggio $r > 0$ a \mathbb{R}^2
2. La nozione di intervallo aperto e chiuso a \mathbb{R}^2 , come pure la nozione di punto estremo di un intervallo.

1.2 Lez - 02

Definizione 1.2.1 (Distanza Euclidea in \mathbb{R}^2) Si chiama distanza euclidea di \mathbb{R}^2 (o nel piano) la funzione, $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, +\infty)$:

$$d(p, q) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$p = (x_1, y_1), q = (x_2, y_2)$$

Definizione 1.2.2 Si chiama intorno (sferico) di centro $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e raggio $r > 0$ (o anche palla aperta di centro p_0 e raggio $r > 0$), l'insieme:

$$\begin{aligned} B_r(p_0) = B(p_0, r) &:= \{p \in \mathbb{R}^2 \mid d(p, p_0) < r\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\} \end{aligned}$$

Definizione 1.2.3 Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$

1. Un punto $p_0 \in \mathbb{R}^2$ si dice punto di frontiera di A se

$$B(p_0, r) \cap A \neq \emptyset \text{ e } B(p_0, r) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus A) \neq \emptyset, \forall r > 0$$

L'insieme di tutti i punti di frontiera di A è detto frontiera di A e si denota ∂A

2. L'insieme A è detto chiuso se ogni punto di frontiera di A appartiene ad A
3. L'insieme A è detto aperto se non contiene alcun punto della sua frontiera
4. L'insieme di tutti i punti di A che non sono di frontiera si chiama parte interna di A e si denota con \mathring{A}
5. L'insieme A è detto limitato se $\exists R_0 > 0$ t.c. $A \subseteq B(O, R_0)$

Esempio 3 1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, allora

- $\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
- $\mathring{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$

2. $A = \mathbb{R}^2, \partial A = \emptyset, \mathring{A} = A = \mathbb{R}^2$

Definizione 1.2.4 Dato $A \subseteq \mathbb{R}^2$

1. $p_0 \in \mathbb{R}^2$ si dice punto di accumulazione per A se

$$B(p_0, r) \cap (A \setminus \{p_0\}) \neq \emptyset, \forall r > 0$$

2. $p_0 \in A$ si dice punto isolato di A se p_0 non è un punto di accumulazione, cioè se:

$$\exists r_0 > 0 \mid B(p_0, r_0) \cap A = \{p_0\}$$

Definizione 1.2.5 (Limite di funzioni di due variabili) Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $p_0 \in \mathbb{R}^2$ punto di accumulazione per A . Si dice che:

$$\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L \in \mathbb{R}$$

oppure $\exists \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = L$ se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = d(p_0, \varepsilon) > 0 \mid |f(x,y) - L| < \varepsilon, \forall (x,y) \in B(p, \delta) \cap (A \setminus \{p_0\})$$

Osservazione 1.2.1 Tenendo presente il caso di funzioni di una variabile, si può enunciare anche la definizione nel caso in cui $L = \pm\infty$

1.2.1 Calcolo dei limiti

Proposizione 1.2.1 (Unicità del limite) Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $p_0 \in \mathbb{R}^2$ punto di accumulazione per A . Supponiamo che $\exists \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = L \in \mathbb{R}$. Allora L è unico.

Teorema 1.2.2 (Tecnica per il calcolo dei limiti) Siano $g, f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $p_0 \in \mathbb{R}^2$ punto di accumulazione per A . Supponiamo che $\exists \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = L \in \mathbb{R}$ e $\exists \lim_{p \rightarrow p_0} g(p) = M \in \mathbb{R}$, allora:

1. $\exists \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) + g(p) = L + M$
2. $\exists \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) \cdot g(p) = L \cdot M$
3. Se $g(p) \neq 0, \forall p \in A \setminus \{p_0\}$ e $M \neq 0$, allora $\exists \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{f(p)}{g(p)} = \frac{L}{M}$
4. Sia $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e sia $h(p) = F(f(p))$, allora $\exists \lim_{p \rightarrow p_0} h(p) = F(L)$
5. **Teorema del confronto:** Sia $h, g, f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, supponiamo che:

$$5.1 \quad f(p) \leq g(p) \leq h(p), \quad \forall p \in A \setminus \{p_0\}$$

$$5.2 \quad \exists \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = \lim_{p \rightarrow p_0} h(p) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

$$\text{allora } \exists \lim_{p \rightarrow p_0} g(p) = L$$

Dim. 1.2.1 Le dimostrazioni di 1-4 sono lasciate al lettore :)

5 Supponiamo che $L \in \mathbb{R}$, dobbiamo provare che $\exists \lim_{p \rightarrow p_0} g(p) = L$, cioè per definizione:

$$1^* \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta (= \delta(p_0, \varepsilon)) > 0 \text{ t.c. } |g(p) - L| < \varepsilon \quad \forall p \in B(p_0, \delta) \cap (A \setminus \{p_0\}). \text{ Per ipotesi sappiamo che}$$

$$\lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = L, \quad \lim_{p \rightarrow p_0} h(p) = L$$

cioè :

$$2^* \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 (= \delta_1(p_0, \varepsilon)) > 0 \text{ t.c. } |f(p) - L| < \varepsilon \text{ o equivalentemente } L - \varepsilon < f(p) < L + \varepsilon \quad \forall p \in B(p_0, \delta_1) \cap (A \setminus \{p_0\}), \text{ e:}$$

$3^* \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 (= \delta_2(p_0, \varepsilon)) > 0$ t.c. $|h(p) - L| < \varepsilon$ o equivalentemente $L - \varepsilon < h(p) < L + \varepsilon \forall p \in B(p_0, \delta_2) \cap (A \setminus \{p_0\})$

Da (5.1), (2*), (3*) segue che $\forall \varepsilon > 0$, scegliendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ vale che

$$L - \varepsilon < f(p) \leq g(p) \leq h(p) < L + \varepsilon$$

$\forall p \in B(p_0, \delta) \cap (A \setminus \{p_0\})$ e dunque vale la (1*).

Introduciamo un altro strumento importante per il calcolo dei limiti per funzioni di due variabili.

Ricordiamo che data $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $B \subseteq A$ si chiama funzione restrizione $f|_B : B \rightarrow \mathbb{R}$, $f|_B(x) := f(x)$ se $x \in B$.

Teorema 1.2.3 (Limite lungo direzioni) Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $p_0 \in \mathbb{R}^2$ punto di accumulazione, allora sono equivalenti

1. $\exists \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = L$
2. Per ogni sottoinsieme $B \subseteq A$, per cui p_0 è un punto di accumulazione per B , $\exists \lim_{p \rightarrow p_0} f|_B(p) = L$

Un insieme $B \subseteq A$ può essere visto come una direzione lungo cui $p \rightarrow p_0$.

Osservazione 1.2.4 Il teorema precedente risulta efficace solo per provare che il limite non esiste.

1.2.2 Esempi calcolo limiti

Esercizio 2 1. Calcola, se esiste, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$

Dim. 1.2.2 Nel calcolo del limite bisogna valutare:

- Esistenza (il limite può non esistere)
- Tecniche appropriate per il calcolo

Utilizziamo il punto (4) del primo teorema.

Ricordiamo anche il limite notevole $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

Denotiamo:

- $h(x, y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ se $(x, y) \in A = (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$
- $t = x^2 + y^2$
- Sia $p_0 = (0, 0)$ punto di accumulazione per A .

Osserviamo che $h(x, y) = F(f(x, y))$, dove $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$F := \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

è continua, e $f(x, y) = x^2 + y^2$ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Poichè $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$, dal punto (4)

$$\exists \lim_{p \rightarrow p_0} h(p) = \lim_{p \rightarrow p_0} F(f(p)) = F(0) = 1$$

2. Calcola se esiste $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

Dim. 1.2.3 Sia

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$\forall (x, y) \in A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e $p_0 = (0, 0)$.

Utilizziamo il teorema per provare che il limite non esiste.

Infatti se

$$\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = L$$

allora

$$(1^*) \exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = L, \forall m \in \mathbb{R}$$

dove $y = mx$, $B = \{y = mx\}$ (direzionale) e m è finito.

Osserviamo che $f(x, mx) = \frac{mx^2}{(m^2+1)x^2} = \frac{m}{m^2+1}$ se $x \neq 0$, quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \frac{m}{m^2 + 1}$$

ma se $m = 0, 1$ il limite prende valore $0, \frac{1}{2}$ ($0 \neq \frac{1}{2}$),

dunque non può valere (1^*) , quindi il limite non esiste

Dalla definizione di limite per funzioni di due variabili segue subito la nozione di continuità .

Esercizio 3 Calcolare se esiste

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

Sugg: Provare che \nexists

1.3 Lez - 03

1.3.1 Definizioni limiti e continuità per \mathbb{R}^n

Definizione 1.3.1 Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

1. f si dice continua in $p_0 \in A$ se

(a) p_0 è un punto isolato di A , oppure

(b) p_0 è un punto di accumulazione ed $\exists \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = f(p_0)$

2. f si dice continua su A se f è continua in ogni punto $p_0 \in A$

Le nozioni di limite e continuità, introdotte per funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, si possono estendere al caso di funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con $n \geq 3$.

Più precisamente su \mathbb{R}^n possiamo definire la distanza Euclidea:

$$d(p, q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

se $p = (x_1, \dots, x_n)$ e $q = (y_1, \dots, y_n)$.

Intorno di centro $p_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ e $r > 0$ è l'insieme:

$$B(p_0, r) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid d(p, p_0) < r\}$$

$$= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2 < r^2\}$$

Tramite la nozione di intorni, si possono estendere a \mathbb{R}^n la nozione di:

- frontiera di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- insieme aperto/chiuso $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- insieme limitato $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- punto di accumulazione/isolato di $A \subseteq \mathbb{R}^n$

Pertanto:

Definizione 1.3.2 Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $p_0 \in \mathbb{R}^n$ punto di accumulazione di A . Allora si dice che:

$$\exists \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = L \in \mathbb{R}$$

se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(p, \varepsilon) > 0 \text{ t.c. } |f(p) - L| < \varepsilon, \forall p \in B(p_0, \delta) \cap (A \setminus \{p_0\})$$

In modo simile si può introdurre la nozione di continuità per funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

1.3.2 Calcolo differenziale per funzioni a più variabili

Derivate parziali

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, $p_0 = (x_0, y_0) \in A$, essendo A aperto, $\exists \delta_0 > 0$ t.c.

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta] \subset A$$

In particolare i segmenti:

- $(x, y_0) \in A \ \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$
- $(x_0, y) \in A \ \forall y \in [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$

Pertanto son ben definiti i rapporti incrementali

- $((x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\}) \ni x \rightarrow \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$
- $((y_0 - \delta_0, y_0 + \delta_0) \setminus \{y_0\}) \ni y \rightarrow \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$

Definizione 1.3.3 1. Si dice che f è derivabile(parzialmente) rispetto alla variabile x nel punto $p_0 = (x_0, y_0)$ se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} := \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$$

2. Si dice che f è derivabile(parzialmente) rispetto alla variabile y nel punto $p_0 = (x_0, y_0)$ se

$$\exists \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} := \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = D_2 f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$$

3. Se f è derivabile (parzialmente) sia rispetto ad x ed y nel punto $p_0 = (x_0, y_0)$, si chiama (vettore)gradiente di f in p_0 il vettore:

$$\nabla f(p_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \right) \in \mathbb{R}^2$$

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A insieme aperto. Supponiamo che:

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \rightarrow \mathbb{R}$$

allora è ben definito il campo dei vettori gradiente:

$$\nabla f : \mathbb{R}^2 \supseteq A \ni p \rightarrow \nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p) \right) \in \mathbb{R}^2$$

Applicazione: Sia $V : A \rightarrow \mathbb{R}$ il potenziale di una carica elettrica in un insieme A del piano. Allora vale la relazione $\nabla V = \underline{E}$, dove $\underline{E} := (E_1(x, y), E_2(x, y)) \rightarrow$ vettore campo elettrico.

Problema: $\exists \nabla f(p_0)$ è la nozione corretta di derivabilità per funzioni di due variabili? Per esempio se $\exists \nabla f(p_0) \Rightarrow f$ è continua in p_0 ?

Esempio 4 Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $p_0 = (0, 0)$ e

$$f(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

Abbiamo visto che: $\nexists \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) \Rightarrow f$ non è continua in p_0 .

D'altra parte:

$$\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$$

$$\text{se } x \neq 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$$

$$\frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0$$

$$\text{se } y \neq 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Pertanto $\exists \nabla f(0, 0) = (0, 0)$ ma f non è continua nel punto $(0, 0)$.

1.3.3 Piano tangente al grafico

Approssimazione lineare e nozione di differenziabilità per funzioni di più variabili.

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $z = f(x, y)$.

Problema: Definire il "piano tangente" alla "superficie" G_f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ se esiste.

Ricordiamo che l'equazione di un piano π di \mathbb{R}^3 , non parallelo all'asse z , passante per il punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è del tipo

$$\pi : z = a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$.

Ricordiamo inoltre che per funzioni di $n = 1$ variabile, se $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, la retta tangente r a G_f nel punto $(x_0, f(x_0))$ ha equazione:

$$r : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

ed è caratterizzata dalla proprietà di essere l'unica retta del fascio di rette $y = m(x - x_0) + f(x_0)$, $m \in \mathbb{R}$ t.c.

$$(D) \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - [m(x - x_0) + f(x_0)]}{|x - x_0|} = 0$$

(miglior approssimazione lineare al primo ordine) Infatti: $n = 1$, $L(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$ sono le applicazioni lineari di \mathbb{R} in \mathbb{R}

Esercizio 4 $\exists f'(x_0) \in \mathbb{R} \iff \exists m \in \mathbb{R} \text{ t.c. vale (D), inoltre } m = f'(x_0)$.

Sugg: Utilizzare (D) nel caso di funzioni di due variabili per definire il piano tangente.

Più precisamente, data $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con A aperto, sia $p_0 = (x_0, y_0) \in A$. Supponiamo che esistono $a, b \in \mathbb{R}$ t.c.

$$(D) \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x) - [a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0)]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

Allora se vale (D:)

Definizione 1.3.4 1. il piano $\pi : z = a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0, y_0)$ si dice piano tangente al grafico G_f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

2. f si dice differenziabile nel punto $p_0 = (x_0, y_0)$ proveremo che:

- (a) Se f è differenziabile in $p_0 \in A \Rightarrow f$ è continua
- (b) Se f è differenziale in $p_0 \in A$, allora

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \exists \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$$

Esercizio 5 $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 0$? NO.

1.4 Lez - 04

Piano tangente al grafico G_f in un punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, per una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è un piano π di equazione $z = a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0, y_0)$ dove $p_0 = (x_0, y_0) \in A$, verificante la seguente equazione:

$$(D) \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x) - [a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0)]}{d(p, p_0)}$$

dove $d(p, p_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

Definizione 1.4.1 *Dato A subseteq \mathbb{R}^2 aperto e dato $p_0 = (x_0, y_0) \in A$, la funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ si dice differenziabile nel punto p_0 se vale (D), per $a, b \in \mathbb{R}$ opportuni.*

Proposizione 1.4.1 *Se f è differenziabile nel punto $p_0 = (x_0, y_0)$, allora*

$$\exists \nabla f(p_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \right)$$

e

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0), b = \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$$

Dim. 1.4.1 *Supponiamo che f sia differenziabile in p_0 , cioè che valga (D). Ponendo nella (D), $y = y_0$ otteniamo che:*

$$\begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) [a(x - x_0) + f(x_0, y_0)]}{|x - x_0|} &= 0 \\ \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) &= a \end{aligned}$$

procediamo allo stesso modo, ponendo $x = x_0$ nella (D) e otteniamo $\frac{\partial f}{\partial y}(p_0) = b$

Definizione 1.4.2 *L'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,*

$$L(x, y) := \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)y$$

si chiama differenziale di f in p_0 , si denota con:

$$L = df(p_0) := \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)dy$$

Definizione 1.4.3 (Piano tangente) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto con f differenziabile in p_0 . Si chiama piano tangente al grafico G_f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ il piano π di equazione:*

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

Teorema 1.4.1 Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, f differenziabile in $p_0 \in A$, allora f è continua in p_0

Dim. 1.4.2

$$\begin{aligned} f(p) - f(p_0) &= \frac{f(p) - f(p_0) - df(p_0)(p - p_0)}{d(p, p_0)} \cdot d(p, p_0) + df(p_0)(p - p_0) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)(y - y_0) \end{aligned}$$

Il tutto tende a 0 per $p \rightarrow p_0$.

$$\Rightarrow \exists \lim_{p \rightarrow p_0} (f(p) - f(p_0)) = 0$$

1.4.1 Differenziabilità in $n \geq 3$

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, $p_0 \in A$, $p = (x_1, \dots, x_n)$, $p_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ possiamo definire

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p_0 + he_i) - f(p_0)}{h}$$

dove $i = 1, \dots, n$, e_i, \dots, e_n denota la base canonica di \mathbb{R}^n , cioè $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1_{i\text{-esimo elemento}}, 0, 0, \dots, 0)$
Diremo che

$$\exists \nabla f(p_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_0) \right)$$

gradiente di f in p_0 , se $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)$, $\forall i = 1, \dots, n$

Definizione 1.4.4 f si dice differenziabile in un punto $p_0 \in A$ se esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$(D) \exists \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{f(p) - f(p_0) - L(p - p_0)}{d(p, p_0)} = 0$$

L'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ per cui valga (D) si denota con $L = df(p_0)$

Proposizione 1.4.2 (11.4) Se f è differenziabile nel punto p_0 allora

$$i \quad \exists \nabla df(p_0)$$

ii

$$df(p_0)(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)v_i := \nabla f(p_0) \cdot v$$

$$\text{se } v = (v_1, \dots, v_n)$$

Osservazione 1.4.2 Se $v = e_i$, $\nabla f(p_0) \cdot e_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)$

Notazione 1.4.3 $df(p_0) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)dx_i$

Osservazione 1.4.4 Dalla definizione di differenziabilità nel caso $n = 1$, segue che, se $A = (a, b)$, $x_0 \in A$, allora **Esercizio 1.5, foglio 2**:

$$\exists f'(x_0) \iff f \text{ è differenziabile in } x_0$$

Esercizio 6 (1b, foglio 2) Calcolare se esiste

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - e^{xy^2}}{\sqrt{x^4 + y^4}}$$

Dim. 1.4.3 Ricordiamo che (1) $\exists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$.

Utilizzando il precedente limite possiamo eseguire il seguente bilanciamento:

$$\frac{1 - e^{xy^2}}{xy^2} \cdot \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^4}}$$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, con $xy^2 \neq 0$. Osserviamo che:

(2)

$$\frac{1 - e^{xy^2}}{\sqrt{x^4 + y^4}} = 0$$

Se $xy^2 \neq 0$ e $(x, y) \neq (0, 0)$

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - e^{xy^2}}{xy^2} = 1.$$

Rimane da calcolare, se esiste:

$$(4) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^4}}$$

è molto utile, per studiare limite del tipo (4) fare un cambiamento di variabili ed utilizzare le coordinate polari:

Coordinate polari

Consideriamo il seguente cambiamento di variabili $\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}$ con $\rho > 0$ e $0 \leq \vartheta \leq \pi$, quindi:

$$\frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^4}} \rightarrow \frac{\rho \cdot \cos \vartheta \cdot \rho^2 \sin^2 \vartheta}{\sqrt{\rho^4 (\cos^4 \vartheta + \sin^4 \vartheta)}} = \rho \cdot \frac{\cos \vartheta \cdot \sin^2 \vartheta}{\sqrt{(\cos^4 \vartheta + \sin^4 \vartheta)}}$$

Dalla (2) sappiamo che se $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - e^{xy^2}}{\sqrt{x^4 + y^4}} = L \Rightarrow L = 0$.

Idea: Utilizzare la funzione in coordinate polari, per cercare di provare tramite il teorema del confronto che (5) $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^4}}$.

Le coordinate polari risultano molto utili per trovare delle stime per applicare il teorema del confronto:

$$(6) \quad 0 \leq \left| \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^4}} \right| = \left| \rho \cdot \frac{\cos \vartheta \cdot \sin^2 \vartheta}{\sqrt{(\cos^4 \vartheta + \sin^4 \vartheta)}} \right| \leq$$

$$\leq \rho \cdot \frac{|\cos \vartheta \cdot \sin^2 \vartheta|}{\sqrt{(\cos^4 \vartheta + \sin^4 \vartheta)}} \leq \frac{\rho \cdot 1}{\sqrt{\cos^4 \vartheta + \sin^4 \vartheta}}$$

Esercizio 7 $\cos^4 \vartheta + \sin^4 \vartheta \geq \frac{1}{2}, \forall \vartheta \in [0, 2\pi]$

Pertanto da (6) segue che

$$\begin{cases} \vartheta > 0 & \forall \vartheta \in (0, 2\pi) \\ \frac{1}{\vartheta} > 0 & \vartheta \rightarrow 0^+ \end{cases}$$

$$0 \leq \left| \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^4}} \right| \leq \sqrt{2} \cdot \rho = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ se $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ Dunque vale (5) e possiamo concludere che

$$\exists \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{1 - e^{xy^2}}{\sqrt{x^4 + y^4}} = 0$$

$$f(x, y) = \frac{1 - e^{xy^2}}{\sqrt{x^4 + y^4}}$$

se $(x, y) \neq (0, 0)$,

- $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$
- $\exists \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0$

$$\Rightarrow \exists \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = L \Rightarrow L = 0$$

Dim. 1.4.4 (1.5, foglio 2) $(\Rightarrow) \exists f'(p_0) \Rightarrow f$ è differenziabile in x_0 .
Ricordiamo che per definizione

$$\exists f'(x_0) \in \mathbb{R} \iff (1) \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{N.B.}: \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$$

Esercizio 8

$$(1) \iff (2) \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$$

Osserviamo che per definizione f è differenziabile in $x_0 \iff$ vale (2).
Mostriamo l'implicazione (\Leftarrow) , Supponiamo che valga (2).

Esercizio 9

$$(2) \iff (3) \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

È chiaro che

$$\begin{aligned} (3) &\iff \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0 \iff \\ &\iff \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \stackrel{def}{\iff} \exists f'(x_0) \end{aligned}$$

1.5 Lez - 05

1.5.1 Condizioni sulle derivate parziali che assicurino la differenziabilità

Osservazione 1.5.1 *La derivabilità parziale non è sufficiente ad assicurare la differenziabilità*

Problema: Data $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto e supponiamo che $\exists \nabla f(p_0)$ con $p_0 \in A$. Quale proprietà ulteriore bisogna aggiungere per ottenere la differenziabilità di f in p_0 ?

Teorema 1.5.2 (del differenziale totale) *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $p_0 \in A$. Supponiamo che*

(i)

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \rightarrow \mathbb{R}$$

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ siano continue nel punto p_0 , cioè

$$\exists \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) \text{ e } \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{\partial f}{\partial y}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$$

Allora f è differenziabile nel punto p_0 . [BDPG, 11.5]

Osservazione 1.5.3 *È sufficiente richiedere la (i) e (ii) in un intorno di p_0*

Il teorema del differenziale totale giustifica la seguente definizione:

Definizione 1.5.1 *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$*

(i) *f si dice differenziabile su A se è diff su ogni punto di A .*

(ii) *f si dice di classe C^1 su A se f è continua e*

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ continui}$$

In questo caso scriveremo che $f \in C^1(A)$

Dal teorema del differenziale totale segue anche:

Corollario 1.5.1 *Sia $f \in C^1(A)$ allora f è differenziabile su ogni punto di $p_0 \in A$*

1.5.2 Derivate direzionali

Norma di un vettore di \mathbb{R}^n

Sia $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, si chiama norma di v , e si denota

$$\|v\| := \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} = d(v, \underline{0}) = \sqrt{v \cdot v}$$

Esempio 5 1. $n = 1$, $\|v\| = |v|$ se $v \in \mathbb{R}$

2. $n = 2$. (immaginarsi il piano cartesiano)

Osservazione 1.5.4 Se $p, q \in \mathbb{R}^n \Rightarrow d(p, q) = \|p - q\|$

Esercizio 10 (6, foglio 1) 1. $\|v\| = 0 \iff v = \underline{0} = (0, \dots, 0)$

2. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda v = (\lambda v_1, \dots, \lambda v_n)$ con $v = (v_1, \dots, v_n)$, allora $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$

3. Disuguaglianza triangolare: Se $v, w \in \mathbb{R}^n$, $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Definizione 1.5.2 Un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ si dice direzione (vettore unitario, versore) se $\|v\| = 1$

Esempio 6 $n = 2$, i vettori $e_1 = (1, 0)$ ed $e_2 = (0, 1)$ sono direzioni di \mathbb{R}^2

Sia $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ una direzione, e $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto e $p_0 = (x_0, y_0) \in A$, allora $\exists \delta > 0$ t.c.

$$p_0 + hv = (x_0 + hv_1, y_0 + hv_2) \in A$$

se $|h| \leq \delta$, pertanto è ben definita:

$$(-\delta, \delta) \setminus \{0\} \ni h \rightarrow \frac{f(p_0 + hv) - f(p_0)}{h}$$

Definizione 1.5.3 Si dice che f è derivabile (parzialmente) rispetto alla direzione v nel punto p_0 se

$$\exists \frac{\partial f}{\partial v}(p_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p_0 + hv) - f(p_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

Notazione 1.5.5 Talvolta $\frac{\partial f}{\partial v}(p_0) = D_v f(p_0)$

Osservazione 1.5.6 (i) Sia $F : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$, (funzione di $n = 1$ variabile)

$$F(t) := f(p_0 + tv) \text{ se } t \in (-\delta, \delta)$$

Allora è immediato verificare che

$$\exists \frac{\partial f}{\partial v}(p_0) \iff \exists F'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F'(h) - F(0)}{h}$$

ed in questo case, $\frac{\partial f}{\partial v}(p_0) = F'(0)$

(ii) È immediato verificare che se $v = e_1$ o $v = e_2$, allora

$$\frac{\partial f}{\partial e_1}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial e_2}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$$

1.5.3 Teo: Diff. vs. Deriv. direz.

Teorema 1.5.7 (differenziabilità vs derivabilità direzionale) Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto e sia fissato $p_0 = (x_0, y_0) \in A$. Supponiamo che f sia differenziale in p_0 , allora

$$\exists \frac{\partial f}{\partial v}(p_0) = df(p_0)(v) = \nabla f(p_0) \cdot (v) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)(v_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)(v_2)$$

per ogni direzione $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$

Dim. 1.5.1 Consideriamo la funzione $F : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(t) = f(p_0 + tv) = f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)$$

Per ipotesi, f è differenziabile in p_0 , cioè vale:

$$(D) \exists \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{f(p) - f(p_0) - \nabla f(p_0) \cdot (p - p_0)}{d(p, p_0)} = 0$$

la condizione (D) è equivalente a chiedere:

$$(D^*) f(p) = f(p_0) + \nabla f(p_0) \cdot (p - p_0) + o(d(p, p_0)) \quad \forall p \in A$$

dove con $o(d(p, p_0)) \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{o(d(p, p_0))}{d(p, p_0)} = 0$ Scegliendo $p = p_0 + hv$ in (D^*) , otteniamo che:

$$\begin{aligned} F(h) &:= f(p_0 + hv) - f(p_0) - \nabla f(p_0) \cdot (hv) + o(d(p_0 + hv, p_0)) = \\ &= F(0) + h(\nabla f(p_0) \cdot v) + o(|h|) \end{aligned}$$

Infatti ricordiamo che:

$$d(p_0 + hv, p_0) = \|p_0 + hv - p_0\| = \|hv\| = |h| \|v\| = |h|$$

Dall'identità precedente segue che:

$$\exists F'(0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \nabla f(p_0) \cdot v = df(p_0)(v)$$

Per l'osservazione precedente $F'(0) = \frac{\partial f}{\partial v}(p_0)$ da cui segue la tesi.

Dal teorema segue la generalizzazione del teorema del valore medio (G. Lagrange) a funzioni $n = 2$ variabili.

1.5.4 Teorema del valore medio

Teorema 1.5.8 (TdVM, n=1) Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile in (a, b) . Allora $\exists c \in (a, b)$ t.c.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Teorema 1.5.9 (del valore medio, n=2) Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto. Supponiamo che:

- (i) $\exists p, q \in A$ t.c. $[p, q] := \{tq + (1-t)p \mid t \in [0, 1]\} \subset A$
- (ii) f è continua sull'insieme $[p, q]$ e differenziabile su $(p, q) := \{tq + (1-t)p \mid t \in (0, 1)\}$

Allora esiste un punto $\bar{c} \in (p, q)$ t.c. $f(q) - f(p) = \nabla f(\bar{c}) \cdot (q - p)$

Dim. 1.5.2 Supponiamo $p \neq q$ altrimenti la tesi è banale e sia

$$v := \frac{q - p}{\|q - p\|}$$

una direzione di \mathbb{R}^2 .

Definiamo la funzione (d $n=1$ variabile) $F(t) := f(p + tv)$ con $t \in [0, \|q - p\|]$ ($\subset \mathbb{R}$) e fissiamo p, q , osserviamo che F è ben definita per la (i) e $F(0) = f(p)$ e $F(\|q - p\|) = f(q)$. Inoltre per la (ii):

1. $F : [0, \|q - p\|] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua;
2. $\exists F'(t) = \frac{\partial f}{\partial v}(p + tv)$, $\forall t \in (0, \|q - p\|)$

Possiamo applicare il teorema del valore medio ($n=1$ variabile) a F e otteniamo che esiste $\bar{t} \in (0, \|q - p\|)$ t.c.

$$\begin{aligned} f(q) - f(p) &= F(\|q - p\|) - F(0) = F(\bar{t}) \|q - p\| = \\ &=_{(2)} \frac{\partial f}{\partial v}(p + \bar{t}v) \|q - p\| = (\nabla f(p + \bar{t}v) \cdot v) \|q - p\| = \\ &= \left(\nabla f(p + \bar{t}v) \cdot \frac{q - p}{\|q - p\|} \right) \cdot \frac{q - p}{\|q - p\|} = \nabla f(p + \bar{t}v)(q - p) \end{aligned}$$

Scegliendo $\bar{c} = p + \bar{t}v \in (p, q)$ otteniamo la tesi

Corollario 1.5.2 Sia $f : B(p_0, r_0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che $\exists \nabla f(p_0) = (0, 0) \forall p \in B(p_0, r_0)$. Allora $f(p) = f(p_0)$, $\forall p \in B(p_0, r_0)$

Dim. 1.5.3 per il teorema del diff. tot. f è differenziale su $B(p_0, r_0)$. Possiamo applicare il teorema del valore medio e otteniamo che $\exists \bar{c} \in (p, p_0)$ t.c. $f(p) - f(p_0) = \nabla f(\bar{c})(p - p_0) = 0$, $\forall p \in B(p_0, r_0)$

Chapter 2

Esercitazioni

2.1 Lezione 1 - 09/03/2022

Esercizio 2.1.1 Determinare e disegnare nel piano xy il dominio delle seguenti funzioni, $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dove A : dominio che dobbiamo determinare.

$$f(x, y) = \log(4(x^2 + y^2) - 1)$$

Soluzione:

$$4(x^2 + y^2) - 1 > 0 \iff x^2 + y^2 > \frac{1}{4}$$

Studiamo quindi: $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ la circonferenza di centro $c = (0, 0)$ e raggio $r = \frac{1}{2}$,

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > \frac{1}{4}\} = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B((0, 0), \frac{1}{2})}$$

dove:

- $\overline{B((0, 0), \frac{1}{2})} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}\}$
- $B((0, 0), \frac{1}{2}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{1}{2}\}$

Insiemi aperti e chiusi

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}$, A è chiuso $\iff A^c$ è aperto.

Definiamo $\bar{A} = A$, $xy \geq 0 \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$ Disegnando gli assi:

$A^c = \mathbb{R}^2 \setminus A$ è aperto. Fisso ora $(x_0, y_0) \in A^c$, $r = d(\partial A, (x_0, y_0)) = \min |x_0|, |y_0|$.
La palla $B((x_0, y_0), \frac{r}{2}) \subset A^c \Rightarrow A^c$ è aperto $\Rightarrow A$ è chiuso.

Esercizio 2.1.2 $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^4}$, $y^2 \geq x^4$.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \geq x^4\}$$

Proviamo a scrivere $y^2 - x^4$ come

$$y^2 - x^4 = (y - x^2)(y + x^2) \geq 0$$

Due casi:

- $y \geq x^2$
- $y \geq -x^2$

(Dal grafico otteniamo)

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 \vee y \leq -x^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq -x^2\}$$

Esercizio 2.1.3 Disegnare l'insieme di livello delle seguenti funzioni

$$C_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = t\}$$

con $t \in \mathbb{R}$.

$$f(x, y) = x^2y, \text{ fissiamo } t \in \mathbb{R}, t = x^2y$$

$$1. t = 0, x^2y = 0 \Rightarrow y = 0 \vee x = 0$$

$$2. t > 0, t = x^2y \iff y = \frac{t}{x^2}$$

- $t = 1, y = \frac{1}{x^2}$
- $t = 2, y = \frac{2}{x^2}$

$$3. t < 0, t = x^2y \iff y = \frac{t}{x^2}$$

- $t = -1, y = -\frac{1}{x^2}$
- $t = -2, y = -\frac{2}{x^2}$

Esercizio 2.1.4 $f(x, y) = ye^{-x}, t \in \mathbb{R}, t = ye^{-x} \iff e^x t = y$

- $t = 0 \Rightarrow y = 0$
- $t = 1 \Rightarrow y = e^{-x}$
- $t = 2 \Rightarrow y = 2e^{-x}$
- $t = -1 \Rightarrow y = -e^{-x}$
- $t = -2 \Rightarrow y = -2e^{-x}$

Esercizio 2.1.5

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} = ?$$

eleviamo x e y al numeratore per $\frac{3}{3}$, otteniamo:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(\sqrt[3]{x})^3 - (\sqrt[3]{y})^3}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}$$

Ricordiamo ora la differenza tra cubi $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$, otteniamo:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + (\sqrt[3]{y})^2)}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} &= \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + (\sqrt[3]{y})^2 = 0 \end{aligned}$$

Esercizio 2.1.6

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = ?$$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = l \iff$ per ogni restrizione a un sottoinsieme B ,
 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f|_B(x, y) = l$

- $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx\}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}|_B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 mx}{x^4 + m^2 x^2} =$

$$= \frac{x^3 m}{x^2(x^2 + m^2)} = x \left(\frac{m}{x^2 + m^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} x \left(\frac{m}{x^2 + m^2} \right) = 0$$

- $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx^2\}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}|_B =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^4}{x^4 + m^2 x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m}{1 + m^2}$$

Proviamo due valori di m :

- $m = 1, \frac{1}{2}$
- $m = 2, \frac{2}{5}$

Ho trovato due restrizioni $\{y = x^2\}$ e $\{y = 2x^2\}$ dove il limite assume due valori distinti. Allora per l'unicità del limite, il limite non esiste.

Esercizio 2.1.7

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

Coordinate polari

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \vartheta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

- $x = \rho \cos \vartheta$
- $y = \rho \sin \vartheta$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\rho^2 \cos^2 \vartheta \cdot \rho \sin \vartheta}{\rho^2 \cos^2 \vartheta + \rho^2 \sin^2 \vartheta} = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\rho^3 \cos^2 \vartheta \cdot \sin \vartheta}{\rho^2 (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta)} \end{aligned}$$

Sappiamo che $\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta = 1$, quindi il limite rimane:

$$\lim \rho \cos^2 \vartheta \cdot \sin \vartheta$$

$$0 \leq |\rho \cos^2 \vartheta \cdot \sin \vartheta| < \rho$$

Da cui se $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ allora anche $\rho \rightarrow 0$ e siccome $\begin{cases} \cos^2 \vartheta < 1 \\ \sin \vartheta < 1 \end{cases}$, grazie al **teorema del confronto** il limite vale 0.

Esercizio 2.1.8 Dire quali insiemi sono aperti/chiusi e quali limitati, inoltre determinare la frontiera.

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (xy)(y - 1) \geq 0\}$$

- $x \geq 0$
- $y \geq 0$
- $y - 1 \geq 0, y \geq 1$

Frontiera: $\partial H = \{y = 1\} \cup \{x = 0\} \cup \{y = 0\}$

2.2 Esercitazione 2 - 23/03/2022

Esercizio 2.2.1 (a)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(e^{xy^2} - 1) \log(1 + x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2) \sin(xy)}$$

Ricordiamo che:

- $\frac{\log(1+t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$
- $\frac{e^t - 1}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$
- $\frac{\sin(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$

Grazie a ciò il nostro limite diventa:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy^2} - 1}{xy^2} \cdot \frac{\log(1 + x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \cdot \frac{xy}{\sin(xy)} \cdot y$$

(i) Definiamo $t = x^2 + y^2 \rightarrow 0$ per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$,

$$\frac{\log(1 + x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \frac{\log(1 + t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$$

(ii) Definiamo $t = xy \rightarrow 0$ per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$,

$$\frac{xy}{\sin(xy)} = \frac{t}{\sin(t)} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$$

(iii) Definiamo $t = xy^2 \rightarrow 0$ per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$,

$$\frac{e^{xy^2} - 1}{xy^2} = \frac{e^t - 1}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$$

$$= 1 \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y = 0$$

(c)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(xy)}{\log(1 + x^2 + y^2)}$$

Ricordiamo che:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$$

Allora il limite diventa:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(xy)}{(xy)^2} \cdot \frac{x^2 + y^2}{\log(1 + x^2 + y^2)} \cdot \frac{(xy)^2}{x^2 + y^2}$$

(i) $t = xy \rightarrow 0$ per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

$$\frac{1 - \cos(xy)}{(xy)^2} = \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2}$$

(ii) Per (i) dell'esercizio (a) si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\log(1 + x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} &= 1 \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} = ? \end{aligned}$$

Passiamo alle coordinate polari: $\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}$

$$0 \leq \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2 + y^2} = \frac{\rho^4 \cdot \cos^2 \vartheta \cdot \sin^2 \vartheta}{\rho^2 (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta)} \leq \rho^2$$

Per $\rho \rightarrow 0$ tutto $0 \rightarrow 0$ e $\rho^2 \rightarrow 0$, quindi anche il limite tende a zero per il teorema del confronto.

Consideriamo il caso in cui $x = 0$ o $y = 0$

- Vediamo $x = 0$,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(0)}{\log(1 + y^2)} = \left[\frac{0}{0} \right]_{F.I.N.D.} = \lim_{y \rightarrow 0} 1 - \cos(0) \cdot \frac{y^2}{\log(1 + y^2)} \cdot \frac{1}{y^2} = 0$$

- Vediamo $y = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(0)}{\log(1 + x^2)} = \left[\frac{0}{0} \right]_{F.I.N.D.} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \cos(0) \cdot \frac{x^2}{\log(1 + x^2)} \cdot \frac{1}{x^2} = 0$$

(e)

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,1)} \frac{xy(z-1)}{x^2 + y^2 + (z-1)^2}$$

- **Primo metodo**

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \\ t = z - 1 \xrightarrow{z \rightarrow 1} t \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$0 \leq \left| \frac{\rho \cos \vartheta \cdot \rho \sin \vartheta \cdot t}{\rho^2 (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) + t^2} \right| \leq \left| \frac{\rho^2 \cdot t}{\rho^2 + t^2} \right| \leq 1 \cdot t$$

$$\left(\frac{\rho^2}{\rho^2 + t^2} \leq 1 \iff \rho^2 \leq \rho^2 + t^2 \iff t^2 \geq 0 \Rightarrow \text{sempre} \right)$$

Quindi per $t \rightarrow 0$, $0 \rightarrow 0$ e $t \rightarrow 0$, quindi per il teorema del confronto il limite

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,1)} \frac{xy(z-1)}{x^2 + y^2 + (z-1)^2} = 0$$

- **Secondo metodo:** $t = z - 1 \xrightarrow{z \rightarrow 1} 0$
 $\lim_{(x,y,t) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyt}{x^2+y^2+t^2}$

$$0 \leq \left| \frac{xyt}{x^2+y^2+t^2} \right| \leq? \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2+t^2} \right)^3}{x^2+y^2+t^2} = \sqrt{x^2+y^2+t^2}$$

In particolare si ha $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2+t^2} \Rightarrow x^2 \leq x^2+y^2+t^2 \iff y^2+t^2 \geq 0$, lo stesso vale per $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2+t^2}$ e $|t| \leq \sqrt{x^2+y^2+t^2}$, quindi otteniamo:

$$0 \leq \left| \frac{xyt}{x^2+y^2+t^2} \right| \leq \sqrt{x^2+y^2+t^2}$$

Che tende a 0 per $(x,y,t) \rightarrow (0,0,0)$, quindi grazie al teorema del confronto il limite vale 0

Esercizio 2.2.2 Data $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} g(x,y) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a)

$$g(x,y) = \frac{x \sin(x^2 y)}{x^2 + y^2} \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

La funzione f , che coincide con $g \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$, è **continua** $\forall (x,y) \neq (0,0)$ perchè è **composizione** e **prodotto** di funzioni continue (Teorema). Dobbiamo quindi vedere il comportamento della funzione in $(0,0)$,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$$

cioè

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin(x^2 y)}{x^2 + y^2} \cdot \frac{x^2 y}{x^2 y}$$

per $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

$$(i) \quad t = x^2 y \rightarrow 0 \text{ per } (x,y) \rightarrow (0,0), \quad \frac{\sin(t)}{t} \rightarrow 1$$

$$= 1 \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} = 1 \cdot 0 = 0$$

Verifichiamolo tramite le coordinate polari.

$$x = \rho \cos \vartheta$$

$$y = \rho \sin \vartheta$$

$$0 \leq \left| \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{\rho^4 \cdot \cos^3 \vartheta \sin \vartheta}{\rho^2 (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta)} \right| \leq \rho^2$$

Quindi per $\rho \rightarrow 0$ anche il limite vale 0 grazie al teorema del confronto.
Abbiamo verificato che il limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, quindi la funzione f è continua.

Controlliamo ora:

- $y = 0$ e $x \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 0}{x^2} = 0$
- $y \neq 0$ e $x = 0$, $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = 0$

b)

$$g(x,y) = \frac{\sin(2xy)}{e^{x^2+y^2} - 1}$$

Dobbiamo studiarne il comportamento in $(0,0)$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 2 \cdot \frac{\sin(2xy)}{2xy} \cdot \frac{xy}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{e^{x^2+y^2} - 1}$$

$$(i) \quad t = 2xy, \quad \frac{\sin(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1 \quad \text{per } (x,y) \rightarrow (0,0)$$

$$(ii) \quad t = x^2 + y^2 \rightarrow 0 \quad \text{per } (x,y) \rightarrow (0,0), \quad \frac{t}{e^t - 1} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$$

- Proviamo con le coordinate polari: $\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{\rho^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{\rho^2} \Rightarrow \sin \vartheta \cos \vartheta$$

Quindi non va bene, allora proviamo a prendere una restrizione del dominio.

- $y = mx$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 m}{x^2(m^2 + 1)} \rightarrow \frac{m}{m^2 + 1}$$

Otteniamo due risultati diversi, $((m = 1, \lim = \frac{1}{2}), (m = 2, \lim = \frac{2}{5}))$, quindi ho trovato due restrizioni dove il limite è diverso, perciò $\nexists \lim$.

Esercizio 2.2.3 Calcolare il gradiente delle seguenti funzioni:

$$1. \quad f(x,y) = \sin(xy), \quad \nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \right)$$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(xy) \cdot \frac{\partial(xy)}{\partial x} = \cos(xy) \cdot y$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(xy) \cdot \frac{\partial(xy)}{\partial y} = \cos(xy) \cdot x$

$$\nabla f(x,y) = (y \cos(xy), x \cos(xy)) = \cos(xy) \cdot (y, x).$$

Calcolare la derivata direzionale rispetto al vettore $v = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) = \langle \nabla f(x,y), v \rangle = \frac{\cos(xy)}{\sqrt{3}} \left\langle (y, x), \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \right\rangle =$$

$$= \frac{\cos(xy)}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{y}{2} + \frac{3x}{2} \right) = \frac{\cos(xy)}{2\sqrt{3}}(3x - y)$$

Calcoliamo il piano tangente nei punti $(0, 0, f(0, 0))$ e $(1, 2, f(1, 2))$, ricrediamo la formula del piano:

$$z = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x, y) - (x_0, y_0) \rangle$$

Cerchiamo ora i valori:

- $f(x, y) = \sin(xy)$, $f(0, 0) = 0$
- $\nabla f(x, y) = \cos(xy)(y, x)$, $\nabla f(0, 0) = 1 \cdot (0, 0) = 0$

Quindi $z = 0 + 0 \Rightarrow$ il piano tangente è $z = 0$.

Chi è il normale?

$$n = (0, 0, 1), (x_0, y_0) = (1, 2)$$

- $f(x, y) = \sin(xy)$, $f(1, 2) = \sin(2)$
- $\nabla f(x, y) = \cos(xy)(y, x)$, $\nabla f(1, 2) = \cos(2) \cdot (2, 1)$

$$z = \sin(2) + \langle \cos(2) \cdot (2, 1), (x - 1, y - 2) \rangle = \sin(2) + \cos(2) \cdot (2x + y - 4)$$