Analisi Matematica 2

Enrico Favretto

28/02/2022

Contents

Chapter 1

Funzioni a più variabili

1.1 Lez - 01

Studieremo funzioni a più variabili reali a valori scalari e vettoriali, cioè $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ con $n, k \in InsN$ e $n \geq 1, k \geq 1$.
Se $k = 1, n \geq 2$, f si dice funzione di più variabili a valori scalari;
Se $k \geq 1, n \geq 1$, f si dice funzione di più variabili a valori vettoriali.

Incominciamo a trattare il caso in cui $n = 2, 3$ e $k = 1$.

MOTIVAZIONE: I fenomenti in Fisica/Ingegneria sono modelizzati da funzioni che dipendono da due/tre variabili.

Esempio 1 1. *La funzione temperatura di una piastra piana $A \subseteq \mathbb{R}^2$.*
La funzione temperatura della piastra A può essere modelizzata da una funzione

$$T : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty] \subseteq \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

2. *La funzione distanza dall'origine in $\mathbb{R}^3$,*

$$f : \mathbb{R}^3 \to [0, +\infty]$$

$$f(p) := d(O, p) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

1.1.1 Grafico di una funzione scalare di più variabili

Ricordiamo che nel caso di una funzione scalare da una variabile $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($y = f(x)$, $x \in A$), A intervallo di $\mathbb{R}$.

$$G_f := \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Se $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ($z = f(x,y)$, $(x,y) \in A$)

$$G_f := \{(x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ($t = f(x,y,z)$, $(x,y,z) \in A$)

$$G_f := \{(x,y,z,f(x,y,z)) \mid (x,y,z) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

Disegnare G_f in $\mathbb{R}^4$? Non può essere facilmente studiato, il grafico è una ipersuperficie di $\mathbb{R}^4$

1.1.2 Curve di livello di una funzione di più variabili

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, fissato $t \in \mathbb{R}$,

$$C_t := \{(x,y) \in A \mid f(x,y) = t\}$$

(è un insieme di tipo "curva" contenuto in A)

Esempio 2 *$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x - y$, (z = x-y) $x - y - z = 0$,*

$$((1,-1,-1),(x,y,z)) = 0$$

$$C_t := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = t\}$$

fascio di rette parallele al variare di t

$$G_f := \{(x,y,x-y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$$

piano di $\mathbb{R}^3$ contenente la retta r e ortogonale al vettore (1,-1,-1)

$$r := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$$

Più in generale se $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $C_t := \{(x,y,z) \in A \mid f(x,y,z) = t\}$ è un insieme di tipo "superficie".

Esercizio 1 *Studiare le curve di livello della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$.*

$$C_t := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = t\}$$

- *C_t è la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{t}$, se $t \geq 0$*
- *C_t è vuoto ($\varnothing$), se $t < 0$*

1.1.3 Limiti e continuità per funzioni di più variabili

Problema: Data $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, fissato $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ introdurre la definizione

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

Ricordiamo la definizione di limite per funzioni reali di una variabile, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in [a, b]$ $lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \iff (def.)$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = d(x_0, \varepsilon) > 0 \mid |f(x) - L| < \varepsilon$$

$\forall x \in (a, b) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0$, $lim_{x \to a^+} f(x) = L, lim_{x \to b^-} f(x) = L$

$$B(x_0, \delta) := (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \delta\}$$

intorno sferico di centro x_0 *e reaggio* $\delta > 0$

Idea per l'introduzione di limite per funzioni di $n = 2$ varaibili

Generalizzazione:

1. La definizione di intorno di centro x_0 e raggio $r > 0$ a $\mathbb{R}^2$
2. La nozione di intervallo apero e chiuso a $\mathbb{R}^2$, come pure la nozione di punto estremo di un intervallo.

1.2 Lez - 02

Definizione 1.2.1 (Distanza Euclidea in $\mathbb{R}^2$) *Si chiama distanza euclidea di $\mathbb{R}^2$ (o nel piano) la funzione, $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty)$:*

$$d(p, q) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$p = (x_1, y_1)$, $q = (x_2, y_2)$

Definizione 1.2.2 *Si chiama intorno (sferico) di centro $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e raggio $r > 0$ (o anche palla aperta di centro p_0 e raggio $r > 0$), l'insieme:*

$$B_r(p_0) = B(p_0, r) := \{p \in \mathbb{R}^2 \mid d(p, p_0) < r\} =$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$$

Definizione 1.2.3 *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$*

1. *Un punto $p_0 \in \mathbb{R}^2$ si dice punto di frontiera di A se*

   $$B(p_0, r) \cap A \neq \varnothing \text{ e } B(p_0, r) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus A) \neq \varnothing, \forall r > 0$$

   L'insieme di tutti i punti di frontiera di A è detto frontiera di A e di denota ∂A

2. *L'insieme A è detto chiuso se ogni punto di frontiera di A appartiene ad A*

3. *L'insieme A è detto aperto se non contiene alcun punto della sua frontiera*

4. *L'insieme di tutti i punti di A che non sono di frontiera si chiama parte interna di A e si denota con $\mathring{A}$*

5. *L'insieme A è detto limitato se $\exists R_0 > 0$ t.c. $A \subseteq B(O, R_0)$*

Esempio 3

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, *allora*
   - $\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
   - $\mathring{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$

2. $A = \mathbb{R}^2$, $\partial A = \varnothing$, $\mathring{A} = A = \mathbb{R}^2$

Definizione 1.2.4 *Dato $A \subseteq \mathbb{R}^2$*

1. *$p_0 \in \mathbb{R}^2$ si dice punto di accomulazione per A se*

   $$B(p_0, r) \cap (A \setminus \{p_0\}) \neq \varnothing, \forall r > 0$$

2. *$p_0 \in A$ si dice punto isolato di A se p_0 non è un punto di accomulazione, cioè se:*

   $$\exists r_0 > 0 \mid B(p_0, r_0) \cap A = \{p_0\}$$

Definizione 1.2.5 (Limite di funzioni di due variabili) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e sia $p_0 \in \mathbb{R}^2$ punto di accomulazione per A. Si dice che:*

$$\exists lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \in \mathbb{R}$$

oppure $\exists \lim_{p\to p_0} f(p) = L$ se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = d(p_0, \varepsilon) > 0 \mid |f(x,y) - L| < \varepsilon, \forall (x,y) \in B(p,\delta) \cap (A \setminus \{p_0\})$$

Osservazione 1.2.1 *Tenendo presente il caso di funzioni di una variabile, si può enunciare anche la definizione nel caso in cui $L = \pm\infty$*

1.2.1 Calcolo dei limiti

Proposizione 1.2.1 (Unicità del limite) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e sia $p_0 \in \mathbb{R}^2$ punto di accomulazione per A. Supponiamo che $\exists lim_{p\to p_0} f(p) = L \in \mathbb{R}$. Allora L è unico.*

Teorema 1.2.2 (Tecniche per il calcolo dei limiti) *Siano $g, f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p_0 \in \mathbb{R}^2$ punto di accomulazione per A. Supponiamo che $\exists \lim_{p\to p_0} f(p) = L \in \mathbb{R}$ e $\exists \lim_{p\to p_0} g(p) = M \in \mathbb{R}$, allora:*

1. $\exists \lim_{p\to p_0} f(p) + g(p) = L + M$
2. $\exists \lim_{p\to p_0} f(p) \cdot g(p) = L \cdot M$
3. *Se $g(p) \neq 0, \forall p \in A \setminus \{p_0\}$ e $M \neq 0$, allora $\exists \lim_{p\to p_0} \frac{f(p)}{g(p)} = \frac{L}{M}$*
4. *Sia $F : \mathbb{R} to \mathbb{R}$ continua e sia $h(p) = F(f(p))$, allora $\exists \lim_{p\to p_0} h(p) = F(L)$*
5. ***Teorema del confronto**: Sia $h, g, f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, supponiamo che:*

   5.1 $f(p) \leq g(p) \leq h(p)$, $\forall p \in A \setminus \{p_0\}$

   5.2 $\exists \lim_{p\to p_0} f(p) = \lim_{p\to p\to p_0} h(p) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

   allora $\exists \lim_{p\to p_0} g(p) = L$

***Dim.* 1.2.1** *Le dimostrazioni di 1-4 sono lasciate al lettore :)*

5 *Supponiamo che $L \in \mathbb{R}$, dobbiamo provare che $\exists \lim_{p\to p_0} g(p) = L$, cioè per definizione:*

1* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta\,(= \delta(p_0, \varepsilon)) > 0$ *t.c.* $|g(p) - L| < \varepsilon\ \forall p \in B(p_0, \delta) \cap (A \setminus \{p_0\})$. *Per ipotesi sappiamo che*

$$\lim_{p\to p_0} f(p) = L, \lim_{p\to p_0} h(p) = L$$

cioè :

2* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1\,(= \delta_1(p_0, \varepsilon)) > 0$ *t.c.* $|f(p) - L| < \varepsilon$ *o equivalentemente* $L - \varepsilon < f(p) < L + \varepsilon\ \forall p \in B(p_0, \delta_1) \cap (A \setminus \{p_0\})$, *e:*

*3** $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_2 (= \delta_2(p_0, \varepsilon)) > 0$ *t.c.* $|h(p) - L| < \varepsilon$ *o equivalentemente* $L - \varepsilon < h(p) < L + \varepsilon$ $\forall p \in B(p_0, \delta_2) \cap (A \setminus \{p_0\})$

Da (5.1),(2),(3*) segue che* $\forall \varepsilon > 0$, *scegliendo* $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ *vale che*

$$L - \varepsilon < f(p) \leq g(p) \leq h(p) < L + \varepsilon$$

$\forall p \in B(p_0, \delta) \cap (A \setminus \{p_0\})$ *e dunque vale la (1*).*

Introduciamo un altro strumento importante per il calcolo dei limiti per funzioni di due variabili.
Ricordiamo che data $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $B \subseteq A$ si chiama funzione restrizione $f|_B \colon B \to \mathbb{R}$, $f|_B(x) := f(x)$ se $x \in B$.

Teorema 1.2.3 (Limite lungo direzioni) *Siano* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $p_0 \in \mathbb{R}^2$ *punto di accomulazione, allora sono equivalenti*

1. $\exists \lim_{p \to p_0} f(p) = L$
2. *Per ogni sottoinsieme* $B \subseteq A$, *per cui* p_0 *è un punto di accomulazione per* B, $\exists \lim_{p \to p_0} f|_B(p) = L$

Un insieme $B \subseteq A$ può essere visto come una direzione lungo cui $p \to p_0$.

Osservazione 1.2.4 *Il teorema precedente risulta efficace solo per provare che il limite non esiste.*

1.2.2 Esempi calcolo limiti

Esercizio 2 1. *Calcola, se esiste,* $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$

Dim. 1.2.2 *Nel calcolo del limite bisogna valutare:*

- *Esistenza (il limite può non esistere)*
- *Tecninche appropriate per il calcolo*

Utilizziamo il punto (4) del primo teorema.
Ricordiamo anche il limite notevole $\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$
Denotiamo:

- $h(x, y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ *se* $(x, y) \in A = (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$
- $t = x^2 + y^2$
- *Sia* $p_0 = (0, 0)$ *punto di accomulazione per* A.

Osserviamo che $h(x, y) = F(f(x, y))$, *dove* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F := \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

è continua, e $f(x, y) = x^2 + y^2$ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Poichè $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0$, *dal punto (4)*

$$\exists \lim_{p \to p_0} h(p) = \lim_{p \to p_0} F(f(p)) = F(0) = 1$$

2. *Calcola se esite* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

   Dim. 1.2.3 *Sia*
$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$
   $\forall (x,y) \in A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *e* $p_0 = (0,0)$.
   Utilizziamo il teorema per provare che il limite non esiste.
   Infatti se
$$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$$
   allora
   (1)* $\exists \lim_{x\to 0} f(x,mx) = L$, $\forall m \in R$
   dove $y = mx$, $B = \{y = mx\}$*(direzionale) e* m *è finito.*
   Osserviamo che $f(x,mx) = \frac{mx^2}{(m^2+1)x^2} = \frac{m}{m^2+1}$ *se* $x \neq 0$*, quindi*
$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \frac{m}{m^2+1}$$
   ma se $m = 0, 1$ *il limite prende valore* $0, \frac{1}{2}$ $(0 \neq \frac{1}{2})$,
   dunque non può valere (1), quindi il limite non esiste*

Dalla definizione di limite per funzioni di due variabili segue subito la nozione di continuità .

Esercizio 3 *Calcolare se esiste*
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$$
Sugg: Provare che $\nexists$

1.3 Lez - 03

1.3.1 Definizioni limiti e continuità per $\mathbb{R}^n$

Definizione 1.3.1 *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

1. *f si dice continua in $p_0 \in A$ se*
   (a) *p_0 è un punto isolato di A, oppure*
   (b) *p_0 è un punto di accomulazione ed $\exists \lim_{p \to p_0} f(p) = f(p_0)$*
2. *f si dice continua su A se f è continua in ogni punto $p_0 \in A$*

Le nozioni di limite e continuità , introdotte per funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, si possono estendere al caso di funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $n \geq 3$.
Più precisamente su $\mathbb{R}^n$ possiamo definire la distanza Euclidea:

$$d(p, q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$$

se $p = (x_1, ..., x_n)$ e $q = (y_1, ..., y_n)$.

Intorno di centro $p_0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ e $r > 0$ è l'insieme:

$$B(p_0, r) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid d(p, p_0) < r\}$$

$$= \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1 - x_1^0)^2 + ... + (x_n - x_n^0)^2 < r^2\}$$

Tramite la nozione di intorni, si possono estendere a $\mathbb{R}^n$ la nozione di:

- frontiera di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- insieme aperto/chiuso $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- insieme limitato $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- punto di accomulazione/isolato di $A \subseteq \mathbb{R}^n$

Pertanto:

Definizione 1.3.2 *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e sia $p_0 \in \mathbb{R}^n$ punto di accomulazione di A. Allora si dice che:*

$$\exists \lim_{p \to p_0} f(p) = L \in \mathbb{R}$$

se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(p, \varepsilon) > 0 \text{ t.c. } |f(p) - L| < \varepsilon, \forall p \in B(p_0, \delta) \cap (A \setminus \{p_0\})$$

In modo simile si può introdurre la nozione di continuità per funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

1.3.2 Calcolo differenziale per funzioni a più variabili

Derivate parziali

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto, $p_0 = (x_0, y_0) \in A$, essendo A aperto, $\exists \delta_0 > 0$ t.c.

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta] \subset A$$

In particolare i segmenti:

- $(x, y_0) \in A \ \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$
- $(x_0, y) \in A \ \forall y \in [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$

Pertanto son ben definiti i rapporti incrementali

- $((x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\}) \ni x \to \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$
- $((y_d0 - \delta_0, y_0 + \delta_0) \setminus \{y_0\}) \ni y \to \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$

Definizione 1.3.3 *1. Si dice che f è derivabile(parzialmente) rispetto alla variabile x nel punto $p_0 = (x_0, y_0)$ se*

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} := \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$$

2. Si dice che f è derivabile(parzialmente) rispetto alla variabile y nel punto $p_0 = (x_0, y_0)$ se

$$\exists \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} := \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = D_2 f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$$

3. Se f è derivabile (parzialmente) sia rispetto ad x ed y nel punto $p_0 = (x_0, y_0)$, si chiama (vettore)gradiente di f in p_0 il vettore:

$$\nabla f(p_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \right) \in \mathbb{R}^2$$

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A insieme aperto. Supponiamo che:

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \to \mathbb{R}$$

allora è ben definito il campo dei vettori gradiente:

$$\nabla f : \mathbb{R}^2 \supseteq A \ni p \to \nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p) \right) \in \mathbb{R}^2$$

Applicazione: Sia $V : A \to \mathbb{R}$ il potenziale di una carica elettrica in un insieme A del piano. Allora vale la realzione $\nabla V = \underline{E}$, dove $\underline{E} := (E_1(x, y), E_2(x, y)) \to$ vettore campo elettrico.

Problema: $\exists \nabla f(p_0)$ è la nozione corretta di derivabilità per funzioni di due variabili? Per esempio se $\exists \nabla f(p_0) \Rightarrow$ f è continua in p_0?

Esempio 4 *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p_0 = (0, 0)$ *e*

$$f(x, y) := \begin{cases} 0 & se\ (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & se\ (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

Abbiamo visto che: $\nexists \lim_{p \to p_0} f(p) \Rightarrow f$ *non è continua in* p_0.
D'altra parte:

$$\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$$

se $x \neq 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$

$$\frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0$$

se $y \neq 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.
Pertanto $\exists \nabla f(0, 0) = (0, 0)$ *ma f non è continua nel punto (0,0).*

1.3.3 Piano tangente al grafico

Approssimazione lineare e nozione di differenziabilità per funzioni di più variabili.

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $z = f(x, y)$.

Problema: Definire il "piano tangente" alla "superficie" G_f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ se esiste.
Ricordiamo che l'equazione di un piano π di $\mathbb{R}^3$, non parallelo all'asse z, passante per il punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è del tipo

$$\pi : z = a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$.
Ricordiamo inoltre che per funzioni di $n = 1$ variabile, se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, la retta tangente r a G_f nel punto $(x_0, f(x_0))$ ha equazione:

$$r : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

ed è caratterizzata dalla proprietà di essere l'unica retta del fascio di rette $y = m(x - x_0) + f(x_0)$, $m \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\text{(D)}\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [m(x - x_0) + f(x_0)]}{|x - x_0|} = 0$$

(miglior approssimazione lineare al primo ordine) Infatti: $n = 1$, $L(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$ sono le applicazioni lineari di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$

Esercizio 4 $\exists f'(x_0) \in \mathbb{R} \iff \exists m \in \mathbb{R}$ *t.c. vale (D), inoltre* $m = f'(x_0)$.
Sugg: Utilizzare (D) nel caso di funzioni di due variabili per definire il paino tangente.
Più precisamente, data $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *con* A *aperto, sia* $p_0 = (x_0, y_0) \in A$. *Suppponimao che esistono* $a, b \in \mathbb{R}$ *t.c.*

$$(D)\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x) - [a(x - x_0) + b(y - y_0 + f(x_0)]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

Allora se vale (D:)

Definizione 1.3.4 1. *il piano* $\pi : z = a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0, y_0)$ *si dice piano tangente al grafico* G_f *nel punto* $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

2. f *si dice differenziabile nel punto* $p_0 = (x_0, y_0)$ *proveremo che:*

   (a) *Se* f *è differenziabile in* $p_0 \in A \Rightarrow f$ *è continua*

   (b) *Se* f *è differenziale in* $p_0 \in A$, *allora*

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \exists \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$$

Esercizio 5 $!\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 0$? *NO.*

Piano tangente al grafico G_f in un punto $(x_0, y_o, f(x_0, y_0))$, per una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è un piano π di equazione $z = a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0, y_0)$ dove $p_0 = (x_0, y_0) \in A$, verificante la seguente equazione:

$$\text{(D)}\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x) - [a(x - x_0) + b(y - y_0 + f(x_0)]}{d(p, p_0)}$$

dove $d(p, p_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

Definizione 1.3.5 *Datp* $A subseteq \mathbb{R}^2$ *aperto e dato* $p_0 = (x_0, y_0) \in A$, *la funzione* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *si dice differenziabile nel punto* p_0 *se vale (D), per* $a, b \in \mathbb{R}$ *opportuni.*

Proposizione 1.3.1 *Se* f *è differenziabile nel punto* $p_0 = (x_0, y_0)$, *allora*

$$\exists \nabla f(p_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \right)$$

e

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0), b = \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$$

Dim. 1.3.1 *Supponiamo che f sia differenziabile in p_0, cioè che valga (D). Ponendo nella (D), $y = y_0$ otteniamo che:*

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0)\,[a(x - x_0) + f(x_0, y_0)]}{|x - x_0|} = 0$$

$$\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) = a$$

procediamo allo stesso modo, ponendo $x = x_0$ nella (D) e otteniamo $\frac{\partial f}{\partial y}(p_0) = b$

Definizione 1.3.6 *L'applcazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(x, y) := \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)y$ si chima <u>differenziale</u> di f in p_0, si denota con:*

$$L = df(p_0) := \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)dy$$

Chapter 2

Esercitazioni

2.1 Lezione 1 - 09/03/2022

Esercizio 2.1.1 *Determinare e disegnare nel piano xy il dominio delle seguenti funzioni,* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, dove A: dominio che dobbiamo determinare.*

$$f(x,y) = \log(4(x^2+y^2)-1)$$

Soluzione:

$$4(x^2+y^2)-1>0 \iff x^2+y^2>\frac{1}{4}$$

Studiamo quindi: $x^2+y^2=\frac{1}{4}$ *la circonferenza di centro* $c=(0,0)$ *e raggio* $r=\frac{1}{2}$,

$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2>\frac{1}{4}\} = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B((0,0),\frac{1}{2})}$$

dove:

- $\overline{B((0,0),\frac{1}{2})} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2}\le\frac{1}{2}\}$
- $B((0,0),\frac{1}{2}) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2}<\frac{1}{2}\}$

Insiemi aperti e chiusi
$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy\ge 0\}$, *A è chiuso* $\iff$ A^c *è aperto.*
Definiamo $\bar{A}=A$, $xy\ge 0 \iff \begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0\end{cases} \vee \begin{cases} x\le 0 \\ y\le 0\end{cases}$ *Disegnando gli assi:*
$A^c=\mathbb{R}^2\setminus A$ *è aperto. Fisso ora* $(x_0,y_0)\in A^c$, $r=d(\partial A,(x_0,y_0))=\min|x_0|,|y_0|$.
La palla $B((x_0,y_0),\frac{r}{2})\subset A^c \Rightarrow A^c$ *è aperto* $\Rightarrow A$ *è chiuso.*

Esercizio 2.1.2 $f(x,y)=\sqrt{y^2-x^4}$, $y^2\ge x^4$.

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y^2\ge x^4\}$$

Proviamo a scrivere $y^2 - x^4$ come

$$y^2 - x^4 = (y - x^2)(y + x^2) \geq 0$$

Due casi:

- $y \geq x^2$
- $y \geq -x^2$

(Dal grafico otteniamo)

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 \vee y \leq -x^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq -x^2\}$

Esercizio 2.1.3 *Disegnare l'insieme di livello delle seguenti funzioni*

$$C_t = \{(x, y \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = t)\}$$

con $t \in \mathbb{R}$.
$f(x, y) = x^2 y$*, fissiamo $t \in \mathbb{R}$, $t = x^2 y$*

1. $t = 0$, $x^2 y = 0 \Rightarrow y = 0 \vee x = 0$
2. $t > 0$, $t = x^2 y \iff y = \frac{t}{x^2}$
   - $t = 1$, $y = \frac{1}{x^2}$
   - $t = 2$, $y = \frac{2}{x^2}$
3. $t < 0$, $t = x^2 y \iff y = \frac{t}{x^2}$
   - $t = -1$, $y = -\frac{1}{x^2}$
   - $t = -2$, $y = -\frac{2}{x^2}$

Esercizio 2.1.4 $f(x, y) = ye^{-x}$, $t \in \mathbb{R}$, $t = ye^{-x} \iff e^x t = y$

- $t = 0 \Rightarrow y = 0$
- $t = 1 \Rightarrow y = e^{-x}$
- $t = 2 \Rightarrow y = 2e^{-x}$
- $t = -1 \Rightarrow y = -e^{-x}$
- $t = -2 \Rightarrow y = -2e^{-x}$

Esercizio 2.1.5

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x - y}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} = ?$$

eleviamo x e y al numeratore per $\frac{3}{3}$, otteniamo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(\sqrt[3]{x})^3 - (\sqrt[3]{y})^3}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}$$

Ricordiamo ora la differenza tra cubi $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$, otteniamo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})\left((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + (\sqrt[3]{y})^2\right)}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} =$$

$$= \lim_{(x,y\to(0,0))} (\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + (\sqrt[3]{y})^2 = 0$$

Esercizio 2.1.6

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} =?$$

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \iff$ *per ogni restrizione a un sottoinsieme* B, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f|_B(x,y) = l$

- $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx\}$, $\lim \frac{x^2 y}{x^4+y^2}|_B = \lim \frac{x^2 mx}{x^4+m^2x^2} =$

$$= \frac{x^3 m}{x^2(x^2+m^2)} = x\left(\frac{m}{x^2+m^2}\right) = \lim_{x\to 0} x\left(\frac{m}{x^2+m^2}\right) = 0$$

- $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx^2\}$, $\lim \frac{x^2 y}{x^4+y^2}|_B =$

$$\lim_{x\to 0} \frac{mx^4}{x^4 + m^2 x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+m^2}$$

  Proviamo due valori di m:

  - $m = 1$, $\frac{1}{2}$
  - $m = 2$, $\frac{2}{5}$

  Ho trovato due restrizioni $\{y = x^2\}$ e $\{y = 2x^2\}$ dove il limite assume due valori distinti. Allora per l'unicità del limite, il limite non esiste.

Esercizio 2.1.7

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

Cordinate polari
$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\vartheta = arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

- $x = \rho\cos\vartheta$
- $y = \rho\sin\vartheta$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\rho^2\cos^2\vartheta \cdot \rho\sin\vartheta}{\rho^2\cos^2\vartheta + \rho^2\sin^2\vartheta} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\rho^3\cos^2\vartheta \cdot \sin\vartheta}{\rho^2\left(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\right)}$$

Sappiamo che $\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta = 1$, *quindi il limite rimane:*

$$\lim \rho \cos^2\vartheta \cdot \sin\vartheta$$

$$0 \leq |\rho \cos^2\vartheta \cdot \sin\vartheta| < \rho$$

Da cui se $(x, y) \to (0, 0)$ *allora anche* $\rho \to 0$ *e siccome* $\begin{cases} \cos^2\vartheta < 1 \\ \sin\vartheta < 1 \end{cases}$ *, grazie al* ***teorema del confronto*** *il limite vale 0.*

Esercizio 2.1.8 *Dire quali insiemi sono aperti/chiusi e quali limitati, inoltre determinare la frontiera.*

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (xy)(y - 1) \geq 0\}$$

- $x \geq 0$
- $y \geq 0$
- $y - 1 \geq 0$, $y \geq 1$

Frontiera: $\partial H = \{y = 1\} \cup \{x = 0\} \cup \{y = 0\}$