

Analisi Matematica 2

Enrico Favretto

28/02/2022

Contents

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Funzioni a più variabili, [BDPG, 10] | 3 |
| 1.1 | Lez - 01 | 3 |
| 1.1.1 | Grafico di una funzione scalare di più variabili | 4 |
| 1.1.2 | Curve di livello di una funzione di più variabili | 4 |
| 1.1.3 | Limiti e continuità per funzioni di più variabili | 5 |
| 1.2 | Lez - 02 | 6 |
| 1.2.1 | Calcolo dei limiti | 7 |
| 1.2.2 | Esempi calcolo limiti | 8 |
| 1.3 | Lez - 03 | 10 |
| 1.3.1 | Definizioni limiti e continuità per \mathbb{R}^n | 10 |
| 1.3.2 | Calcolo differenziale per funzioni a più variabili | 11 |
| 1.3.3 | Piano tangente al grafico | 12 |
| 1.4 | Lez - 04 | 14 |
| 1.4.1 | Differenziabilità in $n \geq 3$ | 15 |
| 1.5 | Lez - 05 | 19 |
| 1.5.1 | Condizioni sulle derivate parziali che assicurino la differenziabilità | 19 |
| 1.5.2 | Derivate direzionali | 20 |
| 1.5.3 | Teo: Diff. vs. Deriv. direz. | 21 |
| 1.5.4 | Teorema del valore medio | 22 |
| 1.6 | Lez - 06 | 23 |
| 1.6.1 | Derivate parziali di una f composta di più variabili | 23 |
| 1.6.2 | I caso particolare | 23 |
| 1.6.3 | II caso particolare | 25 |
| 1.6.4 | Caso generale di RDC | 26 |
| 1.6.5 | Teorema RDC | 27 |
| 1.7 | Lez - 07 | 28 |
| 1.7.1 | Derivate parziali di ordine superiore | 28 |
| 1.7.2 | Teo: Inversione dell'ordine di derivazione | 28 |
| 1.7.3 | Taylor per funzioni di più variabili | 29 |
| 1.7.4 | Taylor del II ordine + resto di Peano | 30 |
| 1.8 | Lez - 08 | 32 |
| 1.8.1 | Massimi e minimi per funzioni a più variabili | 32 |
| 1.8.2 | Estremi liberi di una funzione (min/max relativi) | 32 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1.8.3 | Matrice Hessiana | 33 |
| 1.8.4 | Teorema: Criterio per il segno di una matrice | 34 |
| 1.8.5 | Esempi | 35 |
| 1.9 | Lez - 09 | 37 |
| 1.9.1 | Ricerca del max e min (assoluto) su insieme limitato e chiuso | 37 |
| 1.9.2 | Frontiera attraverso parametrizzazione | 38 |
| 1.9.3 | Metodo dei moltiplicatori di Lagrange, TML | 40 |
| 2 | Integrale per funzioni a più variabili, [BDPG, 14] | 43 |
| 2.1 | Lez - 10, Integrale doppio su un rettangolo | 43 |
| 2.1.1 | Proprietà importanti delle somme sup. ed inf. | 44 |
| 2.1.2 | Teoremi: Esistenza & Proprietà integrale | 45 |
| 2.1.3 | Formula di riduzione sui rettangoli | 46 |
| 2.1.4 | Esempio | 46 |
| 2.2 | Lez 11 - Integrale doppio su insiemi generali | 48 |
| 2.2.1 | Insiemi numerabili e loro area | 49 |
| 2.2.2 | Integrali doppi su insiemi misurabili | 50 |
| 2.2.3 | Teo.: Integrale doppio su insieme di misura nulla | 50 |
| 2.3 | Integrali doppi su domini semplici e formule di riduzione | 50 |
| 2.3.1 | Teorema: Formula di riduzione su domini semplici | 51 |
| 3 | Esercitazioni | 53 |
| 3.1 | Lezione 1 - 09/03/2022 | 53 |
| 3.2 | Esercitazione 2 - 23/03/2022 | 57 |
| 3.3 | Lezione 3 - 06/04/2022 | 62 |

Chapter 1

Funzioni a più variabili, [BDPG, 10]

1.1 Lez - 01

Studieremo funzioni a più variabili reali a valori scalari e vettoriali, cioè $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ con $n, k \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1, k \geq 1$.

Se $k = 1, n \geq 2$, f si dice funzione di più variabili a valori scalari;

Se $k \geq 1, n \geq 1$, f si dice funzione di più variabili a valori vettoriali.

Incominciamo a trattare il caso in cui $n = 2, 3$ e $k = 1$.

MOTIVAZIONE: I fenomeni in Fisica/Ingegneria sono modellizzati da funzioni che dipendono da due/tre variabili.

Esempio 1 1. La funzione temperatura di una piastra piana $A \subseteq \mathbb{R}^2$.

La funzione temperatura della piastra A può essere modellizzata da una funzione

$$T : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, +\infty] \subseteq \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

2. La funzione distanza dall'origine in \mathbb{R}^3 ,

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, +\infty]$$

$$f(p) := d(O, p) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

1.1.1 Grafico di una funzione scalare di più variabili

Ricordiamo che nel caso di una funzione scalare da una variabile $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($y = f(x)$, $x \in A$), A intervallo di \mathbb{R} .

$$G_f := \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Se $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($z = f(x, y)$, $(x, y) \in A$)

$$G_f := \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ($t = f(x, y, z)$, $(x, y, z) \in A$)

$$G_f := \{(x, y, z, f(x, y, z)) \mid (x, y, z) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

Disegnare G_f in \mathbb{R}^4 ? Non può essere facilmente studiato, il grafico è una iper-superficie di \mathbb{R}^4

1.1.2 Curve di livello di una funzione di più variabili

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, fissato $t \in \mathbb{R}$,

$$C_t := \{(x, y) \in A \mid f(x, y) = t\}$$

(è un insieme di tipo "curva" contenuto in A)

Esempio 2 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) := x - y$, ($z = x - y$) $x - y - z = 0$,

$$((1, -1, -1), (x, y, z)) = 0$$

$$C_t := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = t\}$$

fascio di rette parallele al variare di t

$$G_f := \{(x, y, x - y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

piano di \mathbb{R}^3 contenente la retta r e ortogonale al vettore $(1, -1, -1)$

$$r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$$

Più in generale se $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $C_t := \{(x, y, z) \in A \mid f(x, y, z) = t\}$ è un insieme di tipo "superficie".

Esercizio 1 Studiare le curve di livello della funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$.

$$C_t := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = t\}$$

- C_t è la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio \sqrt{t} , se $t \geq 0$
- C_t è vuoto (\emptyset), se $t < 0$

1.1.3 Limiti e continuità per funzioni di più variabili

Problema: Data $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, fissato $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ introdurre la definizione

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

Ricordiamo la definizione di limite per funzioni reali di una variabile, $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in [a, b]$ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \iff (def.)$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0 \mid |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\forall x \in (a, b) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = L$$

$$B(x_0, \delta) := (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \delta\}$$

intorno sferico di centro x_0 e raggio $\delta > 0$

Idea per l'introduzione di limite per funzioni di $n = 2$ variabili

Generalizzazione:

1. La definizione di intorno di centro x_0 e raggio $r > 0$ a \mathbb{R}^2
2. La nozione di intervallo aperto e chiuso a \mathbb{R}^2 , come pure la nozione di punto estremo di un intervallo.

1.2 Lez - 02

Definizione 1.2.1 (Distanza Euclidea in \mathbb{R}^2) Si chiama distanza euclidea di \mathbb{R}^2 (o nel piano) la funzione, $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, +\infty)$:

$$d(p, q) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$p = (x_1, y_1), q = (x_2, y_2)$$

Definizione 1.2.2 Si chiama intorno (sferico) di centro $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e raggio $r > 0$ (o anche palla aperta di centro p_0 e raggio $r > 0$), l'insieme:

$$\begin{aligned} B_r(p_0) = B(p_0, r) &:= \{p \in \mathbb{R}^2 \mid d(p, p_0) < r\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\} \end{aligned}$$

Definizione 1.2.3 Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$

1. Un punto $p_0 \in \mathbb{R}^2$ si dice punto di frontiera di A se

$$B(p_0, r) \cap A \neq \emptyset \text{ e } B(p_0, r) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus A) \neq \emptyset, \forall r > 0$$

L'insieme di tutti i punti di frontiera di A è detto frontiera di A e si denota ∂A

2. L'insieme A è detto chiuso se ogni punto di frontiera di A appartiene ad A
3. L'insieme A è detto aperto se non contiene alcun punto della sua frontiera
4. L'insieme di tutti i punti di A che non sono di frontiera si chiama parte interna di A e si denota con \mathring{A}
5. L'insieme A è detto limitato se $\exists R_0 > 0$ t.c. $A \subseteq B(O, R_0)$

Esempio 3 1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, allora

- $\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
- $\mathring{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$

2. $A = \mathbb{R}^2, \partial A = \emptyset, \mathring{A} = A = \mathbb{R}^2$

Definizione 1.2.4 Dato $A \subseteq \mathbb{R}^2$

1. $p_0 \in \mathbb{R}^2$ si dice punto di accumulazione per A se

$$B(p_0, r) \cap (A \setminus \{p_0\}) \neq \emptyset, \forall r > 0$$

2. $p_0 \in A$ si dice punto isolato di A se p_0 non è un punto di accumulazione, cioè se:

$$\exists r_0 > 0 \mid B(p_0, r_0) \cap A = \{p_0\}$$

Definizione 1.2.5 (Limite di funzioni di due variabili) Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $p_0 \in \mathbb{R}^2$ punto di accumulazione per A . Si dice che:

$$\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L \in \mathbb{R}$$

oppure $\exists \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = L$ se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = d(p_0, \varepsilon) > 0 \mid |f(x,y) - L| < \varepsilon, \forall (x,y) \in B(p, \delta) \cap (A \setminus \{p_0\})$$

Osservazione 1.2.1 Tenendo presente il caso di funzioni di una variabile, si può enunciare anche la definizione nel caso in cui $L = \pm\infty$

1.2.1 Calcolo dei limiti

Proposizione 1.2.1 (Unicità del limite) Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $p_0 \in \mathbb{R}^2$ punto di accumulazione per A . Supponiamo che $\exists \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = L \in \mathbb{R}$. Allora L è unico.

Teorema 1.2.2 (Tecniche per il calcolo dei limiti) Siano $g, f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $p_0 \in \mathbb{R}^2$ punto di accumulazione per A . Supponiamo che $\exists \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = L \in \mathbb{R}$ e $\exists \lim_{p \rightarrow p_0} g(p) = M \in \mathbb{R}$, allora:

1. $\exists \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) + g(p) = L + M$
2. $\exists \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) \cdot g(p) = L \cdot M$
3. Se $g(p) \neq 0, \forall p \in A \setminus \{p_0\}$ e $M \neq 0$, allora $\exists \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{f(p)}{g(p)} = \frac{L}{M}$
4. Sia $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e sia $h(p) = F(f(p))$, allora $\exists \lim_{p \rightarrow p_0} h(p) = F(L)$
5. **Teorema del confronto:** Sia $h, g, f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, supponiamo che:

$$5.1 \quad f(p) \leq g(p) \leq h(p), \quad \forall p \in A \setminus \{p_0\}$$

$$5.2 \quad \exists \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = \lim_{p \rightarrow p_0} h(p) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

$$\text{allora } \exists \lim_{p \rightarrow p_0} g(p) = L$$

Dim. 1 Le dimostrazioni di 1-4 sono lasciate al lettore :)

5 Supponiamo che $L \in \mathbb{R}$, dobbiamo provare che $\exists \lim_{p \rightarrow p_0} g(p) = L$, cioè per definizione:

$$1^* \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta (= \delta(p_0, \varepsilon)) > 0 \text{ t.c. } |g(p) - L| < \varepsilon \quad \forall p \in B(p_0, \delta) \cap (A \setminus \{p_0\}). \text{ Per ipotesi sappiamo che}$$

$$\lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = L, \quad \lim_{p \rightarrow p_0} h(p) = L$$

cioè :

$$2^* \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 (= \delta_1(p_0, \varepsilon)) > 0 \text{ t.c. } |f(p) - L| < \varepsilon \text{ o equivalentemente } L - \varepsilon < f(p) < L + \varepsilon \quad \forall p \in B(p_0, \delta_1) \cap (A \setminus \{p_0\}), \text{ e:}$$

$3^* \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 (= \delta_2(p_0, \varepsilon)) > 0$ t.c. $|h(p) - L| < \varepsilon$ o equivalentemente $L - \varepsilon < h(p) < L + \varepsilon \forall p \in B(p_0, \delta_2) \cap (A \setminus \{p_0\})$

Da (5.1), (2*), (3*) segue che $\forall \varepsilon > 0$, scegliendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ vale che

$$L - \varepsilon < f(p) \leq g(p) \leq h(p) < L + \varepsilon$$

$\forall p \in B(p_0, \delta) \cap (A \setminus \{p_0\})$ e dunque vale la (1*).

Introduciamo un altro strumento importante per il calcolo dei limiti per funzioni di due variabili.

Ricordiamo che data $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $B \subseteq A$ si chiama funzione restrizione $f|_B : B \rightarrow \mathbb{R}$, $f|_B(x) := f(x)$ se $x \in B$.

Teorema 1.2.3 (Limite lungo direzioni) Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $p_0 \in \mathbb{R}^2$ punto di accumulazione, allora sono equivalenti

1. $\exists \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = L$
2. Per ogni sottoinsieme $B \subseteq A$, per cui p_0 è un punto di accumulazione per B , $\exists \lim_{p \rightarrow p_0} f|_B(p) = L$

Un insieme $B \subseteq A$ può essere visto come una direzione lungo cui $p \rightarrow p_0$.

Osservazione 1.2.4 Il teorema precedente risulta efficace solo per provare che il limite non esiste.

1.2.2 Esempi calcolo limiti

Esercizio 2 1. Calcola, se esiste, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$

Dim. 2 Nel calcolo del limite bisogna valutare:

- Esistenza (il limite può non esistere)
- Tecniche appropriate per il calcolo

Utilizziamo il punto (4) del primo teorema.

Ricordiamo anche il limite notevole $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

Denotiamo:

- $h(x, y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ se $(x, y) \in A = (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$
- $t = x^2 + y^2$
- Sia $p_0 = (0, 0)$ punto di accumulazione per A .

Osserviamo che $h(x, y) = F(f(x, y))$, dove $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$F := \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

è continua, e $f(x, y) = x^2 + y^2$ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Poichè $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$, dal punto (4)

$$\exists \lim_{p \rightarrow p_0} h(p) = \lim_{p \rightarrow p_0} F(f(p)) = F(0) = 1$$

2. Calcola se esiste $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

Dim. 3 Sia

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$\forall (x, y) \in A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e $p_0 = (0, 0)$.

Utilizziamo il teorema per provare che il limite non esiste.

Infatti se

$$\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = L$$

allora

(1*) $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = L, \forall m \in \mathbb{R}$

dove $y = mx$, $B = \{y = mx\}$ (direzionale) e m è finito.

Osserviamo che $f(x, mx) = \frac{mx^2}{(m^2+1)x^2} = \frac{m}{m^2+1}$ se $x \neq 0$, quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \frac{m}{m^2 + 1}$$

ma se $m = 0, 1$ il limite prende valore $0, \frac{1}{2}$ ($0 \neq \frac{1}{2}$),

dunque non può valere (1*), quindi il limite non esiste

Dalla definizione di limite per funzioni di due variabili segue subito la nozione di continuità .

Esercizio 3 Calcolare se esiste

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

Sugg: Provare che \nexists

1.3 Lez - 03

1.3.1 Definizioni limiti e continuità per \mathbb{R}^n

Definizione 1.3.1 Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

1. f si dice continua in $p_0 \in A$ se

(a) p_0 è un punto isolato di A , oppure

(b) p_0 è un punto di accumulazione ed $\exists \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = f(p_0)$

2. f si dice continua su A se f è continua in ogni punto $p_0 \in A$

Le nozioni di limite e continuità, introdotte per funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, si possono estendere al caso di funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con $n \geq 3$.

Più precisamente su \mathbb{R}^n possiamo definire la distanza Euclidea:

$$d(p, q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

se $p = (x_1, \dots, x_n)$ e $q = (y_1, \dots, y_n)$.

Intorno di centro $p_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ e $r > 0$ è l'insieme:

$$B(p_0, r) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid d(p, p_0) < r\}$$

$$= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2 < r^2\}$$

Tramite la nozione di intorni, si possono estendere a \mathbb{R}^n la nozione di:

- frontiera di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- insieme aperto/chiuso $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- insieme limitato $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- punto di accumulazione/isolato di $A \subseteq \mathbb{R}^n$

Pertanto:

Definizione 1.3.2 Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $p_0 \in \mathbb{R}^n$ punto di accumulazione di A . Allora si dice che:

$$\exists \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = L \in \mathbb{R}$$

se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(p, \varepsilon) > 0 \text{ t.c. } |f(p) - L| < \varepsilon, \forall p \in B(p_0, \delta) \cap (A \setminus \{p_0\})$$

In modo simile si può introdurre la nozione di continuità per funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

1.3.2 Calcolo differenziale per funzioni a più variabili

Derivate parziali

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, $p_0 = (x_0, y_0) \in A$, essendo A aperto, $\exists \delta_0 > 0$ t.c.

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta] \subset A$$

In particolare i segmenti:

- $(x, y_0) \in A \ \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$
- $(x_0, y) \in A \ \forall y \in [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$

Pertanto son ben definiti i rapporti incrementali

- $((x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\}) \ni x \rightarrow \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$
- $((y_0 - \delta_0, y_0 + \delta_0) \setminus \{y_0\}) \ni y \rightarrow \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$

Definizione 1.3.3 1. Si dice che f è derivabile(parzialmente) rispetto alla variabile x nel punto $p_0 = (x_0, y_0)$ se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} := \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$$

2. Si dice che f è derivabile(parzialmente) rispetto alla variabile y nel punto $p_0 = (x_0, y_0)$ se

$$\exists \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} := \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = D_2 f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$$

3. Se f è derivabile (parzialmente) sia rispetto ad x ed y nel punto $p_0 = (x_0, y_0)$, si chiama (vettore)gradiente di f in p_0 il vettore:

$$\nabla f(p_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \right) \in \mathbb{R}^2$$

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A insieme aperto. Supponiamo che:

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \rightarrow \mathbb{R}$$

allora è ben definito il campo dei vettori gradiente:

$$\nabla f : \mathbb{R}^2 \supseteq A \ni p \rightarrow \nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p) \right) \in \mathbb{R}^2$$

Applicazione: Sia $V : A \rightarrow \mathbb{R}$ il potenziale di una carica elettrica in un insieme A del piano. Allora vale la relazione $\nabla V = \underline{E}$, dove $\underline{E} := (E_1(x, y), E_2(x, y)) \rightarrow$ vettore campo elettrico.

Problema: $\exists \nabla f(p_0)$ è la nozione corretta di derivabilità per funzioni di due variabili? Per esempio se $\exists \nabla f(p_0) \Rightarrow f$ è continua in p_0 ?

Esempio 4 Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $p_0 = (0, 0)$ e

$$f(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

Abbiamo visto che: $\nexists \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) \Rightarrow f$ non è continua in p_0 .

D'altra parte:

$$\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$$

$$\text{se } x \neq 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$$

$$\frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0$$

$$\text{se } y \neq 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Pertanto $\exists \nabla f(0, 0) = (0, 0)$ ma f non è continua nel punto $(0, 0)$.

1.3.3 Piano tangente al grafico

Approssimazione lineare e nozione di differenziabilità per funzioni di più variabili.

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $z = f(x, y)$.

Problema: Definire il "piano tangente" alla "superficie" G_f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ se esiste.

Ricordiamo che l'equazione di un piano π di \mathbb{R}^3 , non parallelo all'asse z , passante per il punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è del tipo

$$\pi : z = a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$.

Ricordiamo inoltre che per funzioni di $n = 1$ variabile, se $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, la retta tangente r a G_f nel punto $(x_0, f(x_0))$ ha equazione:

$$r : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

ed è caratterizzata dalla proprietà di essere l'unica retta del fascio di rette $y = m(x - x_0) + f(x_0)$, $m \in \mathbb{R}$ t.c.

$$(D) \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - [m(x - x_0) + f(x_0)]}{|x - x_0|} = 0$$

(miglior approssimazione lineare al primo ordine) Infatti: $n = 1$, $L(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$ sono le applicazioni lineari di \mathbb{R} in \mathbb{R}

Esercizio 4 $\exists f'(x_0) \in \mathbb{R} \iff \exists m \in \mathbb{R} \text{ t.c. vale (D), inoltre } m = f'(x_0)$.

Sugg: Utilizzare (D) nel caso di funzioni di due variabili per definire il piano tangente.

Più precisamente, data $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con A aperto, sia $p_0 = (x_0, y_0) \in A$. Supponiamo che esistono $a, b \in \mathbb{R}$ t.c.

$$(D) \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x) - [a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0)]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

Allora se vale (D:)

Definizione 1.3.4 1. il piano $\pi : z = a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0, y_0)$ si dice piano tangente al grafico G_f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

2. f si dice differenziabile nel punto $p_0 = (x_0, y_0)$ proveremo che:

- (a) Se f è differenziabile in $p_0 \in A \Rightarrow f$ è continua
- (b) Se f è differenziale in $p_0 \in A$, allora

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \exists \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$$

Esercizio 5 $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 0$? NO.

1.4 Lez - 04

Piano tangente al grafico G_f in un punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, per una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è un piano π di equazione $z = a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0, y_0)$ dove $p_0 = (x_0, y_0) \in A$, verificante la seguente equazione:

$$(D) \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x) - [a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0)]}{d(p, p_0)}$$

dove $d(p, p_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

Definizione 1.4.1 *Dato A subseteq \mathbb{R}^2 aperto e dato $p_0 = (x_0, y_0) \in A$, la funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ si dice differenziabile nel punto p_0 se vale (D), per $a, b \in \mathbb{R}$ opportuni.*

Proposizione 1.4.1 *Se f è differenziabile nel punto $p_0 = (x_0, y_0)$, allora*

$$\exists \nabla f(p_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \right)$$

e

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0), b = \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$$

Dim. 4 *Supponiamo che f sia differenziabile in p_0 , cioè che valga (D). Ponendo nella (D), $y = y_0$ otteniamo che:*

$$\begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) [a(x - x_0) + f(x_0, y_0)]}{|x - x_0|} &= 0 \\ \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) &= a \end{aligned}$$

procediamo allo stesso modo, ponendo $x = x_0$ nella (D) e otteniamo $\frac{\partial f}{\partial y}(p_0) = b$

Definizione 1.4.2 *L'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,*

$$L(x, y) := \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)y$$

si chiama differenziale di f in p_0 , si denota con:

$$L = df(p_0) := \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)dy$$

Definizione 1.4.3 (Piano tangente) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto con f differenziabile in p_0 . Si chiama piano tangente al grafico G_f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ il piano π di equazione:*

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

Teorema 1.4.1 Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, f differenziabile in $p_0 \in A$, allora f è continua in p_0

Dim. 5

$$\begin{aligned} f(p) - f(p_0) &= \frac{f(p) - f(p_0) - df(p_0)(p - p_0)}{d(p, p_0)} \cdot d(p, p_0) + df(p_0)(p - p_0) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)(y - y_0) \end{aligned}$$

Il tutto tende a 0 per $p \rightarrow p_0$.

$$\Rightarrow \exists \lim_{p \rightarrow p_0} (f(p) - f(p_0)) = 0$$

1.4.1 Differenziabilità in $n \geq 3$

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, $p_0 \in A$, $p = (x_1, \dots, x_n)$, $p_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ possiamo definire

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p_0 + h e_i) - f(p_0)}{h}$$

dove $i = 1, \dots, n$, e_i, \dots, e_n denota la base canonica di \mathbb{R}^n , cioè $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1\text{-esimo elemento}, 0, 0, \dots, 0)$
Diremo che

$$\exists \nabla f(p_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_0) \right)$$

gradiente di f in p_0 , se $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)$, $\forall i = 1, \dots, n$

Definizione 1.4.4 f si dice differenziabile in un punto $p_0 \in A$ se esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$(D) \exists \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{f(p) - f(p_0) - L(p - p_0)}{d(p, p_0)} = 0$$

L'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ per cui valga (D) si denota con $L = df(p_0)$

Proposizione 1.4.2 (11.4) Se f è differenziabile nel punto p_0 allora

$$i \quad \exists \nabla df(p_0)$$

ii

$$df(p_0)(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) v_i := \nabla f(p_0) \cdot v$$

$$\text{se } v = (v_1, \dots, v_n)$$

Osservazione 1.4.2 Se $v = e_i$, $\nabla f(p_0) \cdot e_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)$

Notazione 1.4.3 $df(p_0) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) dx_i$

Osservazione 1.4.4 Dalla definizione di differenziabilità nel caso $n = 1$, segue che, se $A = (a, b)$, $x_0 \in A$, allora **Esercizio 1.5, foglio 2**:

$$\exists f'(x_0) \iff f \text{ è differenziabile in } x_0$$

Esercizio 6 (1b, foglio 2) Calcolare se esiste

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - e^{xy^2}}{\sqrt{x^4 + y^4}}$$

Dim. 6 Ricordiamo che (1) $\exists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$.

Utilizzando il precedente limite possiamo eseguire il seguente bilanciamento:

$$\frac{1 - e^{xy^2}}{xy^2} \cdot \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^4}}$$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, con $xy^2 \neq 0$. Osserviamo che:

(2)

$$\frac{1 - e^{xy^2}}{\sqrt{x^4 + y^4}} = 0$$

Se $xy^2 \neq 0$ e $(x, y) \neq (0, 0)$

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - e^{xy^2}}{xy^2} = 1.$$

Rimane da calcolare, se esiste:

$$(4) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^4}}$$

è molto utile, per studiare limite del tipo (4) fare un cambiamento di variabili ed utilizzare le coordinate polari:

Coordinate polari

Consideriamo il seguente cambiamento di variabili $\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}$ con $\rho > 0$ e $0 \leq \vartheta \leq \pi$, quindi:

$$\frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^4}} \rightarrow \frac{\rho \cdot \cos \vartheta \cdot \rho^2 \sin^2 \vartheta}{\sqrt{\rho^4 (\cos^4 \vartheta + \sin^4 \vartheta)}} = \rho \cdot \frac{\cos \vartheta \cdot \sin^2 \vartheta}{\sqrt{(\cos^4 \vartheta + \sin^4 \vartheta)}}$$

Dalla (2) sappiamo che se $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - e^{xy^2}}{\sqrt{x^4 + y^4}} = L \Rightarrow L = 0$.

Idea: Utilizzare la funzione in coordinate polari, per cercare di provare tramite il teorema del confronto che (5) $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^4}}$.

Le coordinate polari risultano molto utili per trovare delle stime per applicare il teorema del confronto:

$$(6) \quad 0 \leq \left| \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^4}} \right| = \left| \rho \cdot \frac{\cos \vartheta \cdot \sin^2 \vartheta}{\sqrt{(\cos^4 \vartheta + \sin^4 \vartheta)}} \right| \leq$$

$$\leq \rho \cdot \frac{|\cos \vartheta \cdot \sin^2 \vartheta|}{\sqrt{(\cos^4 \vartheta + \sin^4 \vartheta)}} \leq \frac{\rho \cdot 1}{\sqrt{\cos^4 \vartheta + \sin^4 \vartheta}}$$

Esercizio 7 $\cos^4 \vartheta + \sin^4 \vartheta \geq \frac{1}{2}, \forall \vartheta \in [0, 2\pi]$

Pertanto da (6) segue che

$$\begin{cases} \vartheta > 0 & \forall \vartheta \in (0, 2\pi) \\ \frac{1}{\vartheta} > 0 & \vartheta \rightarrow 0^+ \end{cases}$$

$$0 \leq \left| \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^4}} \right| \leq \sqrt{2} \cdot \rho = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ se $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ Dunque vale (5) e possiamo concludere che

$$\exists \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{1 - e^{xy^2}}{\sqrt{x^4 + y^4}} = 0$$

$$f(x, y) = \frac{1 - e^{xy^2}}{\sqrt{x^4 + y^4}}$$

se $(x, y) \neq (0, 0)$,

- $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$
- $\exists \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0$

$$\Rightarrow \exists \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = L \Rightarrow L = 0$$

Dim. 7 (1.5, foglio 2) $(\Rightarrow) \exists f'(p_0) \Rightarrow f$ è differenziabile in x_0 .

Ricordiamo che per definizione

$$\exists f'(x_0) \in \mathbb{R} \iff (1) \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

$$\textbf{N.B.:} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$$

Esercizio 8

$$(1) \iff (2) \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$$

Osserviamo che per definizione f è differenziabile in $x_0 \iff$ vale (2).

Mostriamo l'implicazione (\Leftarrow) , Supponiamo che valga (2).

Esercizio 9

$$(2) \iff (3) \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

È chiaro che

$$\begin{aligned} (3) &\iff \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0 \iff \\ &\iff \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \stackrel{def}{\iff} \exists f'(x_0) \end{aligned}$$

1.5 Lez - 05

1.5.1 Condizioni sulle derivate parziali che assicurino la differenziabilità

Osservazione 1.5.1 *La derivabilità parziale non è sufficiente ad assicurare la differenziabilità*

Problema: Data $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto e supponiamo che $\exists \nabla f(p_0)$ con $p_0 \in A$. Quale proprietà ulteriore bisogna aggiungere per ottenere la differenziabilità di f in p_0 ?

Teorema 1.5.2 (del differenziale totale) *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $p_0 \in A$. Supponiamo che*

(i)

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \rightarrow \mathbb{R}$$

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ siano continue nel punto p_0 , cioè

$$\exists \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) \text{ e } \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{\partial f}{\partial y}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$$

Allora f è differenziabile nel punto p_0 . [BDPG, 11.5]

Osservazione 1.5.3 *È sufficiente richiedere la (i) e (ii) in un intorno di p_0*

Il teorema del differenziale totale giustifica la seguente definizione:

Definizione 1.5.1 *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$*

(i) *f si dice differenziabile su A se è diff su ogni punto di A .*

(ii) *f si dice di classe C^1 su A se f è continua e*

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ continui}$$

In questo caso scriveremo che $f \in C^1(A)$

Dal teorema del differenziale totale segue anche:

Corollario 1.5.1 *Sia $f \in C^1(A)$ allora f è differenziabile su ogni punto di $p_0 \in A$*

1.5.2 Derivate direzionali

Norma di un vettore di \mathbb{R}^n

Sia $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, si chiama norma di v , e si denota

$$\|v\| := \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} = d(v, \underline{0}) = \sqrt{v \cdot v}$$

Esempio 5 1. $n = 1$, $\|v\| = |v|$ se $v \in \mathbb{R}$

2. $n = 2$. (immaginarsi il piano cartesiano)

Osservazione 1.5.4 Se $p, q \in \mathbb{R}^n \Rightarrow d(p, q) = \|p - q\|$

Esercizio 10 (6, foglio 1) 1. $\|v\| = 0 \iff v = \underline{0} = (0, \dots, 0)$

2. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda v = (\lambda v_1, \dots, \lambda v_n)$ con $v = (v_1, \dots, v_n)$, allora $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$

3. Disuguaglianza triangolare: Se $v, w \in \mathbb{R}^n$, $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Definizione 1.5.2 Un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ si dice direzione (vettore unitario, versore) se $\|v\| = 1$

Esempio 6 $n = 2$, i vettori $e_1 = (1, 0)$ ed $e_2 = (0, 1)$ sono direzioni di \mathbb{R}^2

Sia $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ una direzione, e $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto e $p_0 = (x_0, y_0) \in A$, allora $\exists \delta > 0$ t.c.

$$p_0 + hv = (x_0 + hv_1, y_0 + hv_2) \in A$$

se $|h| \leq \delta$, pertanto è ben definita:

$$(-\delta, \delta) \setminus \{0\} \ni h \rightarrow \frac{f(p_0 + hv) - f(p_0)}{h}$$

Definizione 1.5.3 Si dice che f è derivabile (parzialmente) rispetto alla direzione v nel punto p_0 se

$$\exists \frac{\partial f}{\partial v}(p_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p_0 + hv) - f(p_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

Notazione 1.5.5 Talvolta $\frac{\partial f}{\partial v}(p_0) = D_v f(p_0)$

Osservazione 1.5.6 (i) Sia $F : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$, (funzione di $n = 1$ variabile)

$$F(t) := f(p_0 + tv) \text{ se } t \in (-\delta, \delta)$$

Allora è immediato verificare che

$$\exists \frac{\partial f}{\partial v}(p_0) \iff \exists F'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h) - F(0)}{h}$$

ed in questo case, $\frac{\partial f}{\partial v}(p_0) = F'(0)$

(ii) È immediato verificare che se $v = e_1$ o $v = e_2$, allora

$$\frac{\partial f}{\partial e_1}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial e_2}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$$

1.5.3 Teo: Diff. vs. Deriv. direz.

Teorema 1.5.7 (differenziabilità vs derivabilità direzionale) Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto e sia fissato $p_0 = (x_0, y_0) \in A$. Supponiamo che f sia differenziale in p_0 , allora

$$\exists \frac{\partial f}{\partial v}(p_0) = df(p_0)(v) = \nabla f(p_0) \cdot (v) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)(v_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)(v_2)$$

per ogni direzione $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$

Dim. 8 Consideriamo la funzione $F : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(t) = f(p_0 + tv) = f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)$$

Per ipotesi, f è differenziabile in p_0 , cioè vale:

$$(D) \exists \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{f(p) - f(p_0) - \nabla f(p_0) \cdot (p - p_0)}{d(p, p_0)} = 0$$

la condizione (D) è equivalente a chiedere:

$$(D^*) f(p) = f(p_0) + \nabla f(p_0) \cdot (p - p_0) + o(d(p, p_0)) \quad \forall p \in A$$

dove con $o(d(p, p_0)) \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{o(d(p, p_0))}{d(p, p_0)} = 0$ Scegliendo $p = p_0 + hv$ in (D^*) , otteniamo che:

$$\begin{aligned} F(h) &:= f(p_0 + hv) - f(p_0) - \nabla f(p_0) \cdot (hv) + o(d(p_0 + hv, p_0)) = \\ &= F(0) + h(\nabla f(p_0) \cdot v) + o(|h|) \end{aligned}$$

Infatti ricordiamo che:

$$d(p_0 + hv, p_0) = \|p_0 + hv - p_0\| = \|hv\| = |h| \|v\| = |h|$$

Dall'identità precedente segue che:

$$\exists F'(0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \nabla f(p_0) \cdot v = df(p_0)(v)$$

Per l'osservazione precedente $F'(0) = \frac{\partial f}{\partial v}(p_0)$ da cui segue la tesi.

Dal teorema segue la generalizzazione del teorema del valore medio (G. Lagrange) a funzioni $n = 2$ variabili.

1.5.4 Teorema del valore medio

Teorema 1.5.8 (TdVM, n=1) Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile in (a, b) . Allora $\exists c \in (a, b)$ t.c.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Teorema 1.5.9 (del valore medio, n=2) Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto. Supponiamo che:

- (i) $\exists p, q \in A$ t.c. $[p, q] := \{tq + (1-t)p \mid t \in [0, 1]\} \subset A$
- (ii) f è continua sull'insieme $[p, q]$ e differenziabile su $(p, q) := \{tq + (1-t)p \mid t \in (0, 1)\}$

Allora esiste un punto $\bar{c} \in (p, q)$ t.c. $f(q) - f(p) = \nabla f(\bar{c}) \cdot (q - p)$

Dim. 9 Supponiamo $p \neq q$ altrimenti la tesi è banale e sia

$$v := \frac{q - p}{\|q - p\|}$$

una direzione di \mathbb{R}^2 .

Definiamo la funzione (d $n=1$ variabile) $F(t) := f(p + tv)$ con $t \in [0, \|q - p\|]$ ($\subset \mathbb{R}$) e fissiamo p, q , osserviamo che F è ben definita per la (i) e $F(0) = f(p)$ e $F(\|q - p\|) = f(q)$. Inoltre per la (ii):

1. $F : [0, \|q - p\|] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua;
2. $\exists F'(t) = \frac{\partial f}{\partial v}(p + tv), \forall t \in (0, \|q - p\|)$

Possiamo applicare il teorema del valore medio ($n=1$ variabile) a F e otteniamo che esiste $\bar{t} \in (0, \|q - p\|)$ t.c.

$$\begin{aligned} f(q) - f(p) &= F(\|q - p\|) - F(0) = F(\bar{t}) \|q - p\| = \\ &=_{(2)} \frac{\partial f}{\partial v}(p + \bar{t}v) \|q - p\| = (\nabla f(p + \bar{t}v) \cdot v) \|q - p\| = \\ &= \left(\nabla f(p + \bar{t}v) \cdot \frac{q - p}{\|q - p\|} \right) \cdot \frac{q - p}{\|q - p\|} = \nabla f(p + \bar{t}v)(q - p) \end{aligned}$$

Scegliendo $\bar{c} = p + \bar{t}v \in (p, q)$ otteniamo la tesi

Corollario 1.5.2 Sia $f : B(p_0, r_0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che $\exists \nabla f(p_0) = (0, 0) \forall p \in B(p_0, r_0)$. Allora $f(p) = f(p_0), \forall p \in B(p_0, r_0)$

Dim. 10 per il teorema del diff. tot. f è differenziale su $B(p_0, r_0)$. Possiamo applicare il teorema del valore medio e otteniamo che $\exists \bar{c} \in (p, p_0)$ t.c. $f(p) - f(p_0) = \nabla f(\bar{c})(p - p_0) = 0, \forall p \in B(p_0, r_0)$

1.6 Lez - 06

1.6.1 Derivate parziali di una f composta di più variabili

Problema: Vogliamo determinare una formula generale che ci consente di calcolare le derivate parziali di una (generica) funzione composta di più variabili.

Esercizio 11 (7, foglio 3) Consideriamo la funzione composta $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come $h := f \circ g$, dove $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

se $(x, y) \neq (0, 0)$ e

$$g(t) = (g_1(t), g_2(t)) = (\sin^2(t), \cos^2(t)), t \in \mathbb{R} \text{ Calcolare } h'(t), t \in \mathbb{R}$$

Richiami della RDC

Siano $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ con $g(J) \subseteq I$, I, J intervalli aperti di \mathbb{R} .
 $h := f \circ g$, $h(x) := f(g(x))$, $x \in I$

Proposizione 1.6.1 (Regola della catena, RDC) Se f, g sono derivabili, rispettivamente, in $g(x_0)$ e in x_0 , allora $\exists h'(x) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

Esempio 7 $f(y) = \sin y$, $g(x) = x^2$, $h = f \circ g$, $h(x) = \sin x^2$, $\exists h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \cos x^2 \cdot 2x$

Prima di arrivare alla formula generale di derivazione di una funzione composta, introduciamo alcuni casi particolari

1.6.2 I caso particolare

Consideriamo $g : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, I intervallo aperto di \mathbb{R} , $t_0 \in I$ fissato.

$$I \ni t \rightarrow g(t) = (g_1(t), g_2(t)) = (x(t), y(t))$$

con $g_1, g_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che $\exists g'_1(t_0), g'_2(t_0)$ e $g(I) \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^2$, A aperto.

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che f sia differenziabile in

$$p_0 = (x_0, y_0) = g(t_0) = (g_1(t_0), g_2(t_0))$$

Consideriamo la funzione composta $h : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h := f \circ g$

$$I \ni t \rightarrow h(t) := (f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(g_1(t), g_2(t))$$

Teorema 1.6.1

$$(1) \exists h'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) \cdot g'_1(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \cdot g'_2(t_0)$$

oppure tramite matrici

$$(1bis) \exists h'(t_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g'_1(t_0) \\ g'_2(t_0) \end{bmatrix} =$$

$$= \nabla f(p_0) \cdot g'(t_0), \text{ dove } g'(t_0) = (g'_1(t_0), g'_2(t_0)).$$

Espansione classica di RDC, Leibniz

Se scriviamo g e f , in termini di "variabili dipendenti", cioè

$$g = \begin{cases} x = x(t) = g_1(t) \\ y = y(t) = g_2(t) \end{cases} \quad (\text{curva del piano})$$

$z = z(x, y) = f(x, y)$, allora componendo f con g , la variabile dipendente z dipenderà dalla sola variabile indipendente t per cui, $z = z(t) = z(x(t), y(t))$, $t \in I$.

Quindi in termini di queste variabili (z, x, y, t) si può scrivere la (1) come:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

oppure utilizzando (1bis)

$$\frac{dz}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix}$$

Dim. 11 (Idea!) Proviamo la (1), cioè provare che

$$(2) \exists h'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = \nabla f(p_0) \cdot g'(t_0)$$

Essendo f differenziabile in p_0 vale che:

$$(3) f(p) = f(p_0) + df(p_0) \cdot (p - p_0) + o(\|p - p_0\|)$$

$\forall p \in A$ se $p_0 = g(t_0)$.

Da (3) segue che, se scegliamo $p = g(t)$ otteniamo:

$$f(g(t)) = f(g(t_0)) + df(g(t_0)) \cdot (g(t) - g(t_0)) + o(\|g(t) - g(t_0)\|)$$

$\forall t \in I$, da cui:

$$(4) \frac{f(g(t)) - f(g(t_0))}{t - t_0} = \frac{df(g(t_0)) \cdot (g(t) - g(t_0))}{t - t_0} + \frac{o(\|g(t) - g(t_0)\|)}{t - t_0}$$

$t \in I, t \neq t_0$.

Osserviamo che essendo $df(p_0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lineare allora:

$$(5) \frac{df(p_0)(g(t) - g(t_0))}{t - t_0} = df(p_0) \cdot \left(\frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} \right)$$

Passando al limite nella (5) per $t \rightarrow t_0$, dalla continuità della funzione $df(p_0)$, si ottiene che:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} df(p_0) \left(\frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} \right) = df(p_0) \cdot g'(t_0)$$

$$(6) \exists \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{df(p_0)(g(t) - g(t_0))}{t - t_0} = df(p_0) \cdot g'(t_0) = \nabla f(p_0) \cdot g'(t_0)$$

Si può provare anche (ed è il punto delicato che omettiamo)

$$(7) \exists \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{o(\|g(t) - g(t_0)\|)}{t - t_0} = 0$$

Da (6) e (7), possiamo passare al limite per $t \rightarrow t_0$ nella (4) ed otteniamo la (2) e dunque la tesi.

1.6.3 II caso particolare

$g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, A aperto, e $p_0 = (s_0, t_0) \in A$

$$A \ni (s, t) \rightarrow g(s, t) = (g_1(s, t), g_2(s, t))$$

$g_1, g_2 : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che g_1 e g_2 siano differenziabili in p_0 e $g(A) \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, B aperto.

In particolare:

$$\exists \nabla g_i(p_0) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial s}(p_0), \frac{\partial g_i}{\partial t}(p_0) \right) \quad i = 1, 2$$

Sia $f : B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, B aperto, f differenziabile in $q_0 = (x_0, y_0) = (g_1(p_0), g_2(p_0))$,

$B \ni (x, y) \rightarrow f(x, y) \in \mathbb{R}$.

Supponiamo che f sia differenziabile in q_0 .

Consideriamo $h := f \circ g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$A \ni (s, t) \rightarrow (f \circ g)(s, t) = f(g(s, t)) = f(g_1(s, t), g_2(s, t))$$

Teorema 1.6.2

$$(1) \quad \begin{aligned} \exists \frac{\partial h}{\partial s}(p_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(g(p_0)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial s}(p_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(p_0)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial s}(p_0) \\ \exists \frac{\partial h}{\partial t}(p_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(g(p_0)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial t}(p_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(p_0)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial t}(p_0) \end{aligned}$$

in termini di matrici:

$$(1bis) \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial s}(p_0) & \frac{\partial h}{\partial t}(p_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(g(p_0)) & \frac{\partial f}{\partial y}(g(p_0)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial s}(p_0) & \frac{\partial g_1}{\partial t}(p_0) \\ \frac{\partial g_2}{\partial s}(p_0) & \frac{\partial g_2}{\partial t}(p_0) \end{bmatrix}$$

Dove $\frac{\partial g_1}{\partial s}(p_0), \frac{\partial g_1}{\partial t}(p_0) = \nabla g_1(p_0)$ e $\frac{\partial g_2}{\partial s}(p_0), \frac{\partial g_2}{\partial t}(p_0) = \nabla g_2(p_0)$

Esercizio 12 Utilizzare (1bis) del teorema nel secondo caso e svolgere esercizio 7 foglio 3

1.6.4 Caso generale di RDC

Vogliamo ora trattare il caso generale della formula di derivazione per funzioni composte di più variabili.

Matrice Jacobiana

Definizione 1.6.1 (Matrice Jacobiana) Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, A aperto,

$$A \ni x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$$

con $f_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$.

Supponiamo che dato $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in A$,

$$\exists \nabla f_i(x_0) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

con $i = 1, \dots, m$.

Si chiama Matrice Jacobiana di f nel punto x_0 la matrice $m \times n$

$$Df(x_0) = Jf(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix}$$

Osservazione 1.6.3 (i) La nozione di matrice Jacobiana generalizza la nozione di vettore gradiente per una funzione (scalare) $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Si noti che in questo caso la matrice Jacobiana $1 \times n$ è data da

$$Df(x_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) \equiv \nabla f(x_0)$$

(ii) La riga i -esima della matrice Jacobiana $Df(x_0)$ coincide con $\nabla f_i(x_0)$

(iii) La (1bis) del precedente teorema, in termini di matrici Jacobiane può scriversi come

$$Dh(p_0) = Df(g(p_0)) \cdot Dg(p_0) \text{ (RDC)}$$

1.6.5 Teorema RDC

Teorema 1.6.4 (Regola della catena, RDC) Siano $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $f : B \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$, A e B aperti

(i) $g(A) \subseteq B$

(ii) Se $g = (g_1, \dots, g_m)$, $f = (f_1, \dots, f_k)$

Supponiamo che $g_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \ (i = 1, \dots, m)$ sia diff. in un dato $x_0 \in A$
 $f_i : B \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \ (i = 1, \dots, k)$ sia diff. in un dato $y_0 = g(x_0)$

Consideriamo ora la funzione $h := f \circ g : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $h = (h_1, \dots, h_k)$

con $h_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

allora le funzioni $h_i : A \rightarrow \mathbb{R} \ (i = 1, \dots, k)$ sono diff. in x_0 e

$$Dh(x_0) = Df(g(x_0)) \cdot Dg(x_0)$$

1.7 Lez - 07

1.7.1 Derivate parziali di ordine superiore

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto. Supponiamo che $\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \rightarrow \mathbb{R}$ poniamo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &:= \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &:= \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \text{Derivate parziali seconde pure}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &:= \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &:= \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \text{Derivate parziali seconde miste}$$

quando tutte le derivate parziali scritte esistono.

Osservazione 1.7.1 In generale $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

1.7.2 Teo: Inversione dell'ordine di derivazione

Teorema 1.7.2 (sull'inversione dell'ordine di derivazione) [BDPG, 11.11]

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, $p_0 = (x_0, y_0) \in A$ fissato. Supponiamo $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : A \rightarrow \mathbb{R}$ e siano continue in p_0 , allora $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0)$

Il teorema precedente può estendersi al caso di funzioni $n \geq 2$ variabili.

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto. Supponiamo che esista $\frac{\partial f}{\partial x_i} : A \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, n$).

Se $\exists \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (x_0)$ in un punto $x_0 \in A$ per $j = 1, \dots, n$, diciamo che

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (x_0) := \frac{\partial f}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (x_0)$$

Nel caso in cui $j = i \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} (x_0)$.

Con queste notazioni, vale la seguente generalizzazione del teorema sull'inversione dell'ordine di derivazione.

Teorema 1.7.3 Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto. Supponiamo che per fissati $i, j = 1, \dots, n$, con $i \neq j$, $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : A \rightarrow \mathbb{R}$ e siano continue in x_0 . Allora:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (x_0)$$

Definizione 1.7.1 Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto

- (a) f si dice di classe $C^2(A)$ e scriveremo $f \in C^2(A)$ se $f \in C^0(A)$ ed $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i} : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua $\forall i = 1, \dots, n$, $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua $\forall i, j = 1, \dots, n$
- (b) f si dice di classe $C^m(A)$ e scriveremo $f \in C^m(A)$, ($m \geq 1$) se $f \in C^0(A)$ e $\exists \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua $\forall i_1, \dots, i_k = 1, \dots, n$ e $\forall 1 \leq k \leq m$

Osservazione 1.7.4 Se $f \in C^m(A)$, con $m \geq 2$ per il teo sull'inversione dell'ordine di derivazione

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

$\forall x \in A, \forall i, j = 1, \dots, n$

1.7.3 Taylor per funzioni di più variabili

Problema: Data $f : B(p_0, r) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funzione di classe $C^m(B(p_0, r))$, approssimare f con un polinomio di $n = 2$ variabili di ordine m , nel modo "migliore possibile"

Definizione 1.7.2 Dato $m \in \mathbb{N}$, $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ fissato, si chiama polinomio di ordine m di $n = 2$ variabili, centrato in p_0 , una funzione $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ del tipo

$$T(x, y) = \sum_{h=0}^m \sum_{i=0}^n c_{i, h-i} (x - x_0)^i (y - y_0)^{h-i}$$

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dove $c_{i, h-i}$ ($i = 0, \dots, h$ e $h = 0, \dots, m$) sono $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ coeff. ass.

Esempio 8 (a) Se $m = 0$, $T(x, y) = c_{0,0} \in \mathbb{R} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

(b) Se $m = 1$, $T(x, y) = c_{0,0} + c_{1,0}(x - x_0) + c_{0,1}(y - y_0)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

(c) Se $m = 2$, $T(x, y) = c_{0,0} + c_{1,0}(x - x_0) + c_{0,1}(y - y_0) + c_{2,0}(x - x_0)^2 + c_{1,1}(x - x_0)(y - y_0) + c_{0,2}(y - y_0)^2$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

Problema: Sia $f \in C^2(B(p_0, r))$, determinare se esiste un polinomio $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ di ordine 2, centrato in p_0 , t.c.

$$f(p) = T(p) + o(\|p - p_0\|^2)$$

$\forall p = (x, y) \in B(p_0, r)$

Notazione 1.7.5 Se $v, w \in \mathbb{R}^n$, $v \cdot w = \langle v, w \rangle$

Definizione 1.7.3 Data $f \in C^2(A)$, $A \in \mathbb{R}^2$ aperto, si chiama, matrice hessiana di f in un punto $p \in A$, la matrice 2×2

$$D^2 f(p) = H(f)(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

Osservazione 1.7.6 per il teo. dell'inv. dell'ordine di derivazione $D^2 f(p)$ è simmetrica

1.7.4 Taylor del II ordine + resto di Peano

Sia $f \in C^2(B(p_0, r))$, $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$ fissato. Allora vale:

$$(FT_2) f(p) = T_2(p) + o(\|p - p_0\|^2)$$

$\forall p = (x, y) \in B(p_0, r)$, dove

$$T_2(p) := f(p_0) + \langle \nabla f(p_0), p - p_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle D^2 f(p_0) \cdot (p - p_0), p - p_0 \rangle$$

se $p \in \mathbb{R}^2$.

(polinomio di Taylor del II ordine di f , centrato in p_0)

Ricordiamo che con $o(\|p - p_0\|^2) \Rightarrow \exists \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{o(\|p - p_0\|^2)}{\|p - p_0\|^2} = 0$

Dim. 12 Fissiamo $p \in B(p_0, r) \setminus \{p_0\}$ e denotiamo $v := \frac{p - p_0}{\|p - p_0\|} = (v_1, v_2)$, (direzione $p - p_0$) e definiamo: $F(t) := f(p_0 + tv)$, con $t \in (-r, r)$. Poichè la funzione $g : (-r, r) \rightarrow B(p_0, r) \subseteq \mathbb{R}^2$, $g(t) = p_0 + tv := (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)$ è una funzione di classe $C^2((-r, r))$, come pure f , per RDC la funzione composta: $F(t) = f(g(t))$, $t \in (-r, r)$, è di classe $C^2((-r, r))$. Pertanto possiamo applicare la formula di Taylor del II ordine per una funzione di una variabile per $t = 0$ e otteniamo:

$$(1) F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{1}{2}F''(0)t^2 + o(t^2) \text{ per } t \rightarrow 0$$

Calcoliamo $F(0), F'(0), F''(0)$. Per RDC:

•

$$F'(t) = \langle \nabla f(p_0 + tv), v \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0 + tv)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0 + tv)v_2$$

•

$$\begin{aligned} F''(t) &= v_1 \cdot \left\langle \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (p_0 + tv), v \right\rangle + v_2 \cdot \left\langle \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (p_0 + tv), v \right\rangle = \\ &= v_1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0 + tv)v_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0 + tv)v_2 \right) + v_2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0 + tv)v_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0 + tv)v_2 \right) = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0 + tv)v_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0 + tv)v_1v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0 + tv)v_2^2 \end{aligned}$$

Pertanto

$$(2) F(0) = f(p_0)$$

$$(3) F'(0) = \langle \nabla f(p_0), v \rangle$$

$$(4) F''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0 + tv)v_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0 + tv)v_1v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0 + tv)v_2^2$$

Osserviamo che $F''(0)$ può essere riscritto mediante hessiana $D^2f(p_0)$, come (4bis) $F''(0) = \langle D^2f(p_0)v, v \rangle$, pertanto da (1), (2), (3), (4bis) otteniamo:

$$f(p_0 + tv) = F(t) = f(p_0) + \langle \nabla f(p_0), v \rangle t + \frac{1}{2} \langle D^2f(p_0)v, v \rangle t^2 + o(t^2), \text{ per } t \rightarrow 0$$

Scegliendo $t = \|p - p_0\|$, otteniamo la tesi.

Osservazione 1.7.7 (BDPG, 11.14) Si può ottenere una formula di Taylor con resto di Peano e Lagrange anche per funzioni $f : B(p_0, r) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^2(B(p_0, r))$ con $n \geq 3$.

Essa è molto più complicata perciò la omettiamo

Esercizio 13

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \end{cases}$$

$\exists f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ma f' non è continua nel punto $x_0 = 0$

1.8 Lez - 08

1.8.1 Massimi e minimi per funzioni a più variabili

Problema: Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e data $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, determinare, se esistono, i punti di max e min di f .

Definizione 1.8.1 Data $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

1. $p_0 \in A$ si dice, punto di massimo ($= \max$) relativo di f su A se $\exists r_0 > 0$ t.c. $f(p) \leq f(p_0) \forall p \in A \cap B(p_0, r_0)$
Rispettivamente $p_0 \in A$ si dice, punto di minimo ($= \min$) relativo di f su A se $\exists r_0 > 0$ t.c. $f(p) \geq f(p_0) \forall p \in A \cap B(p_0, r_0)$
2. $p_0 \in A$ si dice punto di massimo ($= \max$) assoluto se $\forall p \in A, f(p) \leq f(p_0)$
Rispettivamente $p_0 \in A$ si dice punto di minimo ($= \min$) assoluto se $\forall p \in A, f(p) \geq f(p_0)$

Osservazione 1.8.1 Se p_0 è un punto di \max (o \min) assoluto $\Rightarrow p_0$ è punto di \max (o \min) relativo. Il viceversa non può valere.

N.B.: 1.8.2 Non confondere i punti di \max e \min di una funzione con il suo massimo e minimo.

- $\min_A f := \min\{f(p) : p \in A\}$, se esiste è unico
- $\max_A f := \max\{f(p) : p \in A\}$, se esiste è unico

Consideriamo il seguente esempio:

Esempio 9 $n = 1, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} f(x) = x(3 - x^2)$

In particolare si può vedere che i punti $x = \pm 1$ sono rispettivamente \max e \min relativi, ma $x = -1$ non è minimo assoluto e $x = +1$ non è massimo assoluto.

Infatti essendo la funzione non limitata ($\sup_{\mathbb{R}} f = +\infty$ e $\inf_{\mathbb{R}} f = -\infty$) / $\exists \max_{\mathbb{R}} f$ e $\min_{\mathbb{R}} f$

1.8.2 Estremi liberi di una funzione (min/max relativi)

Problema: Supponiamo che $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sia aperto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, vogliamo determinare se esistono i punti di \max e \min relativo su A . Questi punti sono detti estremi liberi di f .

Lo strumento principale per la ricerca di estremi liberi è :

Teorema 1.8.3 (Fermat) Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto. Supponiamo che esista $p_0 \in A$ t.c.

(i) f differenziabile in p_0 . In particolare $\exists \nabla f(p_0)$

(ii) p_0 sia un estremo libero di f in A

Allora $\nabla f(p_0) = \underline{0}_{\mathbb{R}^n} = (0, \dots, 0)$ (n -volte)

Il precedente teorema giustifica la seguente definizione:

Definizione 1.8.2 Data $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, un punto $p_0 \in A$ si chiama punto stazionario (o critico) di f se f è differenziabile in p_0 e $\nabla f(p_0) = \underline{0}_{\mathbb{R}^n}$

Dim. 13 Per semplicità, $n = 2$, $p_0 = (x_0, y_0)$. Essendo A aperto esiste $\delta > 0$ t.c. $p_0 + te_1 \in A$ se $t \in (-\delta, \delta)$.

Consideriamo $F : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(t) := f(p_0 + te_1)$, da (i)

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) \iff (1) \begin{cases} F \text{ è derivabile nel punto } t = 0 \\ e F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) \end{cases}$$

Dall'altra parte, da (ii) p_0 estremo libero di f (2) $t = 0$ è un estremo libero di F . Possiamo applicare il teorema di Fermat di una variabile ed otteniamo $F'(0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)$.

Analogamente consideriamo $F(t) = f(p_0 + te_2)$ e si prova che $\frac{\partial f}{\partial y}(p_0) = 0$.

Pertanto si prova che $\nabla f(p_0) = (0, 0) = \underline{0}_{\mathbb{R}^2}$

Osservazione 1.8.4 Non ogni punto stazionario di f è un punto di estremo libero.

Esempio 10 $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = y^3$, $p_0 = (x_0, 0)$.

Poichè $\nabla f(x, y) = (0, 3y^2)$, $\nabla f(p_0) = (0, 0)$. Pertanto ogni punto $p_0 = (x_0, 0)$ (per un fissato $x_0 \in \mathbb{R}$) è un punto stazionario di f , ma p_0 non è un estremo libero, infatti $\forall r > 0$ $f(x_0, 0) = 0 \forall x_0 \in \mathbb{R}$, quindi $p_0 = (x_0, 0)$ si dice punto di sella.

Definizione 1.8.3 Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto. Un punto $p_0 \in A$ si dice punto di sella se p_0 è un punto stazionario di f e $f(p) - f(p_0)$ ammette sia valori positivi che negativi in ogni intorno di p_0

1.8.3 Matrice Hessiana

Problema: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in C^2(A)$. Supponiamo che $p_0 \in A$ sia un punto stazionario di f .

Come determinare se p_0 sia un estremo libero o un punto di sella?

Definizione 1.8.4 Sia $f \in C^2(A)$, si chiama, matrice hessiana di f nel punto $p_0 \in A$ la matrice simmetrica ($n \times n$)

$$D^2 f(p_0) = Hf(p_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(p_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(p_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(p_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)(p_0) \\ \vdots \\ \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)(p_0) \end{bmatrix}$$

1.8.4 Teorema: Criterio per il segno di una matrice

Richiami di algebra lineare

Definizione 1.8.5 Sia H una matrice $n \times n$

- (i) H si dice definita positiva se $\langle Hv, v \rangle > 0, \forall v \in \mathbb{R}^n \times \{\underline{0}\}$
- (ii) H si dice semi-definita positiva se $\langle Hv, v \rangle \geq 0, \forall v \in \mathbb{R}^n \times \{\underline{0}\}$
- (iii) H si dice definita negativa se $\langle Hv, v \rangle < 0, \forall v \in \mathbb{R}^n \times \{\underline{0}\}$
- (iv) H si dice semi-definita negativa se $\langle Hv, v \rangle \leq 0, \forall v \in \mathbb{R}^n \times \{\underline{0}\}$

Un criterio semplice per verificare il segno di una matrice H $n \times n$:

Teorema 1.8.5 (criterio per il segno di una matrice) Sia

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{n1} & \dots & h_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{una matrice } n \times n$$

Definiamo

$$D_i = \det \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{i1} & \dots & h_{ii} \end{bmatrix} \quad \text{con } 1 \leq i \leq n$$

Allora

- (a) H è definita positiva $\iff D_i > 0 \forall i = 1, \dots, n$
- (b) H è definita negativa $\iff \begin{cases} D_i > 0 \text{ per } i \text{ valori pari di } i \\ D_i < 0 \text{ per } i \text{ valori dispari di } i \end{cases}$
- (c) Se $\det H = D_n \neq 0$ e nessuna delle condizioni precedenti fosse soddisfatta, allora H non è semi-definita positiva nè semi-definita negativa

Corollario 1.8.1 Se H (2×2) matrice simmetrica $H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$ con $h_{12} = h_{21}$

- (a) H è definita positiva $\iff h_{11} > 0$ e $\det H > 0$
- (b) H è definita negativa $\iff h_{11} < 0$ e $\det H > 0$
- (c) Se $\det H < 0$, allora H non è semi-def. pos. nè semi-def. neg.

Teorema 1.8.6 (BDPG, 11.25) Sia A aperto di \mathbb{R}^n , $f \in C^2(A)$ e sia $p_0 \in A$ un punto stazionario di f

- (i) Se $D^2 f(p_0)$ fosse def. pos. $\Rightarrow p_0$ è un punto di minimo relativo di f su A

- (ii) Se $D^2f(p_0)$ fosse def. neg. $\Rightarrow p_0$ è un punto di massimo relativo di f su A
- (iii) Se $D^2f(p_0)$ non fosse semi-def. pos. nè semi-def. neg. $\Rightarrow p_0$ è un punto di sella di f su A
- (iv) Se $D^2f(p_0)$ fosse semi-def. pos. o semi-def. neg. $\Rightarrow p_0$ può essere un punto di massimo o minimo relativo o un punto di sella di f su A

1.8.5 Esempi

Esempio 11 (1a, foglio 5) Data $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + 2kxy + y^2$.
Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$, i punti di max e min relativo di f .

Soluzione 1. Punti stazionari di f su \mathbb{R}^2

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 2ky = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2kx + 2y = 0 \end{cases}$$

- **Esercizio 14** Se $k \neq 1 \Rightarrow (0, 0)$ è l'unico punto stazionario
- Se $k = 1 \Rightarrow I$ punti della retta $x + y = 0$ sono tutti e soli i punti stazionari
- Se $k = -1 \Rightarrow I$ punti della retta $x - y = 0$ sono tutti e soli i punti stazionari

Soluzione 2. Studio del segno della matrice Hessiana

$$D^2f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} (x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 2k \\ 2k & 2 \end{bmatrix}$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ e } \det D^2f(x, y) = 4 - 4k^2 = 4(1 - k^2)$$

- **Esercizio 15** Se $k^2 < 1 \Rightarrow D^2f(0, 0)$ è def. positiva $\Rightarrow (0, 0)$ è un punto di minimo relativo
- Se $k = 1$, $\det D^2f(x_0, -x_0) = 0 \Rightarrow D^2f(x_0, -x_0)$ non è def-neg. nè def-pos. \Rightarrow nulla si può dire
 - * Se $k = 1$, $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 \Rightarrow (x_0, -x_0)$ è un punto di minimo assoluto
 - * Se $k = -1$, $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \Rightarrow (x_0, -x_0)$ è un punto di minimo assoluto

Appendice:

1. Se f è differenziabile in p_0 e $\nabla f(p_0) = (0, 0) \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial v}(p_0) = 0 \forall v \in \mathbb{R}^2$, $\|v\| = 1$.
Infatti poichè $\frac{\partial f}{\partial v}(p_0) = \nabla f(p_0) \cdot \underline{Q}_{\mathbb{R}^2} \cdot v = 0$

2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$, il punto di $x_0 = 0$ è un punto di minimo assoluto per f .
3. Se $k = 1$ i punti della retta di eq: $x + y = 0$ sono tutti e soli i punti stazionari di f .
4. $k = 1$, $f(x, y) = (x + y)^2 \geq 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x_0, -x_0) = 0$

1.9 Lez - 09

Problema: Condizioni che assicurino l'esistenza di $\min_A f$ e $\max_A f$ e come determinarli

Teorema 1.9.1 (Weirestrass) [BDPG,10.10] Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, Supponiamo che:

(i) A sia limitato e chiuso, (in $n = 1$, $A = [a, b]$, $\partial A = \{a, b\}$, $\mathring{A} = (a, b)$)

(ii) f sia continua su A

Allora esiste $\min_A f$ e $\max_A f$

1.9.1 Ricerca del max e min (assoluto) su insieme limitato e chiuso

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato e chiuso e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Allora per il Teorema di Weirestrass $\exists \min_A f = f(p_1)$ e $\exists \max_A f = f(p_2)$.

Vi sono le seguenti possibilità se $i = 1, 2$

(i) $p_i \in \mathring{A}$ e $\exists \nabla f(p_i) = (0, 0)$

(ii) $p_i \in \mathring{A}$ ma $\nexists \nabla f(p_i)$, diremo in questo caso che p_i è punto singolare

(iii) $\partial_i \in \partial A$

Problema:[BDPG,13.2] Ricerca dei punti di max e min nei punti della frontiera di A , detti anche estremi vincolati

- $\max, \min \in \mathring{A} \Rightarrow$ estremi liberi
- $\max, \min \in \partial A \Rightarrow$ estremi vincolati

Esempio 12 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $f(x, y) = x^2 + 2y^2$

- $\mathring{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$
- $\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
- $\nabla f(x, y) = (2x, 4y) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$f(p_2) = \exists \max_A f$ e $f(p_1) = \exists \min_A f$, $\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff x = y = 0$

$f(0, 0) = 0$ e $p_1 = (0, 0)$ è un punto di minimo assoluto di f .

È chiaro che $p_2 \in \partial A$ e dunque vale che $\max_A f = \max_{\partial A} f$
quindi ci poniamo il problema di come determinare $\max_{\partial A} f$

Osservazione 1.9.2 $\nabla f(x, y) = (2x, 4y) \neq (0, 0) \quad \forall (x, y) \in \partial A$

1.9.2 Frontiera attraverso parametrizzazione

Caso $n = 2$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato e chiuso.

Si chiama parametrizzazione di ∂A una funzione $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ (detta curva)

- (P1) $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$
- (P2) con $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1
- (P3) e $\gamma([a, b]) = \partial A$

Supponiamo che $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e vogliamo minimizzare/massimizzare f su ∂A

Definiamo $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(t) = f(\gamma(t))$.

Si può provare tramite RDC che $F \in C^1([a, b])$. Inoltre è immediato verificare

$\min_{\partial A} f = \min_{[a, b]} F$ e $\max_{\partial A} f = \max_{[a, b]} F$

Pertanto la ricerca di $\min_{\partial A} f$ e $\max_{\partial A} f$ si riduce a $\min_{[a, b]} F$ e $\max_{[a, b]} F$

Ritorniamo all'esempio 12:

Una parametrizzazione di $\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ è data da

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi] \quad \gamma([0, 2\pi]) = \partial A$$

$F(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + 2\sin^2 t = 1 + \sin^2(t)$, allora è facile verificare che

$$\max_{[0, 2\pi]} F = 2 = F\left(\frac{\pi}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}\pi\right)$$

Pertanto i punti di ∂A dove è raggiunto il massimo sono dati da:

$$\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1) \text{ e } \gamma\left(\frac{3}{2}\pi\right) = (0, -1)$$

Infatti $f(0, 1) = f(0, -1) = 2$

Caso $n = 3$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ chiuso e limitato. Si chiama parametrizzazione di ∂A una funzione

$\gamma : B \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\gamma(s, t) = (\gamma_1(s, t), \gamma_2(s, t), \gamma_3(s, t))$$

Con $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : B \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

(P1) B chiuso e limitato

(P2) $\gamma(B) = \partial A$

(P3) $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in C^1(\overset{\circ}{B}) \cap C^0(B)$

∂A è detta superficie.

Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ si vuole determinare $\max_{\partial A} f$ e $\min_{\partial A} f$.
Definiamo $F : B \rightarrow \mathbb{R}$, $F(s, t) := f(\gamma(s, t))$ con $(s, t) \in B$, allora

$$\min_{\partial A} f = \min_B F \text{ e } \max_{\partial A} f = \max_B F$$

Osservazione 1.9.3 *Pertanto il $\min_{\partial A} f$ e il $\max_{\partial A} f$ (di una funzione di 3 variabili sul bordo di A) viene riportato al $\min_B F$ e $\max_B F$ (di una funzione di 2 variabili) su un insieme $B \subseteq \mathbb{R}^2$*

Esempio 13 *Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, $f(x, y, z) = x + y - z$. Determinare $\min_A f$ e $\max_A f$.*

Soluzione:

1. **Punti stazionari di \mathring{A}**
Osserviamo che $f \in C^\infty(\mathring{A})$.

Esercizio 16 *Non ci sono punti stazionari in \mathring{A}*

Dal'altra parte $f \in C^0(A)$ ed $A \subseteq \mathbb{R}^3$ è chiuso e limitato. Pertanto per il teorema di Weirestrass

$$\exists \min_A f = \min_{\partial A} f \text{ e } \max_A f = \max_{\partial A} f$$

2. **Max e min su ∂A**
 $\partial A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $B = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \subseteq \mathbb{R}^2 \ni (\vartheta, \varphi)$

$$\gamma(\vartheta, \varphi) = (\cos \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \varphi)$$

γ è una parametrizzazione di ∂A (cambiamento di coordinate sferiche)
 $F(\vartheta, \varphi) := f(\gamma(\vartheta, \varphi)) = \cos \vartheta \sin \varphi + \sin \vartheta \sin \varphi - \cos \varphi = \sin \varphi \cdot (\cos \vartheta + \sin \vartheta) - \cos \varphi$

Per proseguire nella nostra strategia dovremmo determinare $\min_B F$ e $\max_B F$ con $F : B = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$.

Ci rendiamo conto subito che questa ricerca non è semplice.

Osservazione 1.9.4 *In effetti il metodo di ricerca dei max e min di una funzione su un bordo dato come parametrizzazione, diventa complesso, e dunque inefficace per funzioni di variabili $n \geq 3$*

1.9.3 Metodo dei moltiplicatori di Lagrange, TML

Caso $n = 2$

Supponiamo che l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) \leq 0\}$ dove $\partial A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$.

Un insieme del piano $V := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ è detto vincolo (è una curva del piano)

Teorema 1.9.5 (Teorema dei moltiplicatori di Lagrange, TML) Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ dove $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Supponiamo che:

(i) $\exists \min_V f = f(p_0)$ (o $\exists \max_V f = f(p_0)$) con $p_0 = (x_0, y_0) \in V$

(ii) $\exists \nabla g(p_0) \neq (0, 0)$

Allora esiste $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ (detto moltiplicatore) t.c. $(x_0, y_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^3$ è un punto stazionario della funzione.

Equivalentemente:

$$\exists \lambda_0 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \begin{cases} g(p_0) = 0 \\ \nabla f(p_0) + \lambda_0 \nabla g(p_0) = (0, 0) \end{cases} \quad (*)$$

Definizione 1.9.1 Un punto $p_0 \in V$ verificante 1.9.5 (*) su opportuno $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ si dice **punto stazionario vincolato alla funzione f relativamente al vincolo V**

Esempio 14 Trovare $\max_{\partial A} f$ se $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ e $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Sia $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Allora:

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0\}$, $\nabla g(x, y) = (2x, 2y) \neq (0, 0) \forall (x, y) \in \partial A$.

Pertanto possiamo applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

Sia $L(x, y, \lambda) := x^2 + 2y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$,

$$\nabla L(x, y, \lambda) = (0, 0, 0) \iff \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 4y + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff (x, y, \lambda) = (\pm 1, 0, -1), (0, \pm 1, -2),$$

$$\min_{\partial A} f = f(\pm 1, 0) = 1 \text{ e } \max_{\partial A} f = f(0, \pm 1) = 2$$

Teorema della funzione implicita, U. Dini

Prima della dimostrazione del metodo dei moltiplicatori di Lagrange, premettiamo il seguente teorema:

Teorema 1.9.6 (della funzione implicita, U. Dini) [BDPG, 13.3] Supponiamo che, per esempio, $g(p_0) = 0$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(p_0) \neq 0$.

Allora V è localmente grafico di una funzione $y = \varphi(x)$, cioè $\exists \delta_0 > 0$ ed è un'unica funzione $\varphi : (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \rightarrow \mathbb{R}$, $\exists r_0 > 0$ t.c.

(D_1) $V \cap B(p_0, r_0) = \{(x, \varphi(x)) : x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)\}$ e $\varphi(x_0) = y_0$

(D_2) φ è derivabile e

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

$$\forall x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$$

Dim. 14 (TML, 1.9.5) Supponiamo per esempio che $\frac{\partial g}{\partial y}(p_0) \neq 0$.

Possiamo applicare il teorema della funzione implicita 1.9.6: per D_1 , possiamo definire $h(x) := f(x, \varphi(x))$ $x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$

Essendo $p_0 \in V$ un punto di minimo (da ipotesi) di f su $V \Rightarrow (1)x_0$ è un punto di minimo di h si $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$.

D'altra parte, per RDC, $h \in C^1((x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0))$.

Per il teorema di Fermat, per funzioni di 1 variabile,

$$\begin{aligned} 0 = h'(x_0) &=_{(RDC)} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \varphi(x_0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0) = \\ &=_{(D_2)} \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \cdot \left(-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x))} \right) \iff \\ \iff \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(p_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(p_0) \end{bmatrix} &= 0 \iff \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \nabla f(p_0) = -\lambda_0 \nabla g(p_0) \end{aligned}$$

Caso $n = 3$

Il teorema dei moltiplicatori di Lagrange su può estendere a funzioni di $n = 3$ variabili

Teorema 1.9.7 (TML con $n = 3$) Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ e $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$ dove $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Supponiamo che:

(i) $\exists \min_V f = f(p_0)$ (o $\exists \max_V f = f(p_0)$) con $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in V$

(ii) $\nabla g(p_0) \neq (0, 0, 0)$

Allora

$$\exists \lambda_0 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \begin{cases} g(p_0) = 0 \\ \nabla f(p_0) + \lambda_0 \nabla g(p_0) = (0, 0, 0) \end{cases} \quad (*)$$

Osservazione 1.9.8 Il vincolo V in questo caso è una superficie di \mathbb{R}^3

Esempio 15 Trovare $\max_{\partial A} f$, $f(x, y, z) = x + y - z$ e $\partial A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ **Soluzione:**

Applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per funzioni di $n = 3$ variabili

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) = x + y - z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

se $(x, y, z, \lambda) \in \mathbb{R}^4$, in quanto $\partial A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2x\lambda & = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 1 + 2y\lambda & = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = -1 + 2z\lambda & = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 & = 0 \end{cases} \iff (x, y, z, \lambda) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \mp \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \max_{\partial A} f = \max \left\{ f \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \mp \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\} = \sqrt{3} \text{ e}$$

$$\min_{\partial A} f = \min \left\{ f \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \mp \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\} = -\sqrt{3}$$

Chapter 2

Integrale per funzioni a più variabili, [BDPG, 14]

Vogliamo introdurre la nozione di integrale per una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($n = 2, 3$), detto anche integrale multiplo

2.1 Lez - 10, Integrale doppio su un rettangolo

Caso $n = 2$

$A = Q = [a, b] \times [c, d]$ e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ limitata, cioè $\exists M > 0$ t.c. $|f(p)| \leq M \forall p \in A$

Idea:(Interpretazione geometrica dell'integrale)

Supponiamo $f(p) \geq 0 \forall p \in A$, definiamo

$$\mathbb{T}_f(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq f(x, y), (x, y) \in A\}$$

(trapezoidale indotta da $f : A \rightarrow \mathbb{R}$).

$\mathbb{T}_f(A) \equiv$ solido di \mathbb{R}^3 sotteso dal grafico di f , G_f .

Vogliamo definire un numero reale non negativo:

$$L = \iint_A f(x, y) dx dy \text{ (integrale doppio di } f \text{ su } A)$$

t.c. $L = \text{volume}(\mathbb{T}_f(A))$

Definizione 2.1.1 (i) Si chiama suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ un insieme finito (detto retta reale) $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ t.c. $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

(ii) Si chiama *suddivisione dell'insieme* $Q = [a, b] \times [c, d]$ l'insieme (del piano)
 $\mathcal{D} := \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 = \{(x_i, y_j) : i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m\}$, dove:

$$\mathcal{D}_1 = \{x_0, \dots, x_n\} \text{ suddivisione di } [a, b]$$

$$\mathcal{D}_2 = \{y_0, \dots, y_m\} \text{ suddivisione di } [c, d]$$

Dato \mathcal{D} una suddivisione di Q , Q resta suddiviso in $n \times m$ rettangoli

$$Q_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

con $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$

$$\text{Definiamo } \text{area}(Q_{ij}) := (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

Definizione 2.1.2 Si chiama *somme superiore* (risp. *somme inferiore*) di f rispetto alla suddivisione \mathcal{D} di Q , fissata una funzione $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$, il numero reale

$$S(f, \mathcal{D}) := \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n M_{ij} \text{area}(Q_{ij}) \quad M_{ij} := \sup_{Q_{ij}} f$$

rispettivamente il numero reale

$$s(f, \mathcal{D}) := \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n m_{ij} \text{area}(Q_{ij}) \quad m_{ij} := \inf_{Q_{ij}} f$$

Osservazione 2.1.1 Essendo f limitata, $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$

$$M_{ij} := \sup_{Q_{ij}} f := \sup\{f(p) : p \in Q_{ij}\}$$

$$m_{ij} := \inf_{Q_{ij}} f := \inf\{f(p) : p \in Q_{ij}\}$$

2.1.1 Proprietà importanti delle somme sup. ed inf.

(PS1) Se $f \geq 0$ su Q , allora $M_{ij} \text{area}(Q_{ij})$ e $m_{ij} \text{area}(Q_{ij})$ rappresentano il volume di un parallelepipedo di base Q_{ij} ed altezza M_{ij} o m_{ij}

(PS2) Per ogni suddivisione \mathcal{D} di Q

$$\text{area}(Q) \cdot \inf_Q f \leq s(f, \mathcal{D}) \leq S(f, \mathcal{D}) \leq \text{area}(Q) \cdot \sup_Q f$$

(PS3) Si potrebbe provare (ma lo omettiamo) che, prese \mathcal{D}' e \mathcal{D}'' due suddivisioni di Q , allora $s(f, \mathcal{D}') \leq S(f, \mathcal{D}'')$

Definizione 2.1.3 Siano $Q = [a, b] \times [c, d]$ e $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ limitata. La funzione si dice *integrabile* (secondo Reimann) su Q , e scriveremo $f \in \mathcal{R}(Q)$, se

$$L = \sup\{s(f, \mathcal{D}) : \mathcal{D} \text{ sudd. di } Q\} = \inf\{S(f, \mathcal{D}) : \mathcal{D} \text{ sudd. di } Q\}$$

Il numero reale L si chiama integrale(doppio) e si denota

$$L = \iint_Q f(x, y) dx dy = \iint_Q f = \int_Q f$$

Nel caso in cui $f \geq 0$ ed $f \in \mathcal{R}(Q)$, definiamo il volume del solido $\mathbb{T}_f(Q)$

$$\text{vol}(\mathbb{T}_f(Q)) := \iint_Q f$$

2.1.2 Teoremi: Esistenza & Proprietà integrale

Problema: Condizioni che assicurano $f \in \mathcal{R}(Q)$?

Richiami per funzioni di $n = 1$ variabili $Q = [a, b]$

Teorema 2.1.2 $f \in C^0([a, b])$, allora $f \in \mathcal{R}([a, b])$,
 $f \geq 0, f \in C^0([a, b])$, $\text{area}(\mathbb{T}_f([a, b])) := \int_a^b f(x) dx$

Teorema 2.1.3 Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è non decrescente (cioè $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$), allora $f \in \mathcal{R}([a, b])$

Teorema 2.1.4 (Esistenza dell'integrale) [BDPG, 14.4] Sia $f \in C^0(Q)$ allora $f \in \mathcal{R}(Q)$

Teorema 2.1.5 (Proprietà dell'integrale) [BDPG, 14.5] Siano $f, g \in \mathcal{R}(Q)$ con $Q = [a, b] \times [c, d]$

(i) **Linearità** : $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(Q)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e

$$\iint_Q (\alpha f + \beta g) = \alpha \iint_Q f + \beta \iint_Q g$$

(ii) **Monotonia**: Se $g \leq f$ su Q , allora

$$\iint_Q g \leq \iint_Q f$$

(iii) **Valore assoluto**: $|f| \in \mathcal{R}(Q)$ e

$$\left| \iint_Q f \right| \leq \iint_Q |f|$$

(iv) **Teorema della media interale**

$$\inf_Q f \leq \frac{1}{\text{area}(Q)} \iint_Q f \leq \sup_Q f$$

e il valore $\frac{1}{\text{area}(Q)} \iint_Q f \equiv \text{media integrale di } f \text{ su } Q$.
 Se $f \in C^0(Q)$, allora esiste $p_0 = (x_0, y_0) \in Q$ t.c.

$$f(p_0) = \frac{1}{\text{area}(Q)} \iint_Q f$$

2.1.3 Formula di riduzione sui rettangoli

Problema: Sia $f \in \mathcal{R}(Q)$, come calcolare $\iint_Q f$?

Teorema 2.1.6 (Formula di riduzione sui rettangoli) [BDPG, 14.6] Siano $Q = [a, b] \times [c, d]$ e $f \in \mathcal{R}(Q)$

- (i) Supponiamo che, $\forall y \in [c, d]$, la funzione $[a, b] \ni x \rightarrow f(x, y)$ sia integrabile (come funzione di una variabile), allora la funzione $[c, d] \ni y \rightarrow \int_a^b f(x, y) dx$ è integrabile su $[c, d]$ e

$$(1) \iint_Q f = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

- (ii) Supponiamo che, $\forall x \in [a, b]$, la funzione $[c, d] \ni y \rightarrow f(x, y)$ sia integrabile (come funzione di una variabile), allora

$$(2) \iint_Q f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

In particolare se $f \in C^0(Q)$, valgono (i) e (ii) e

$$(3) \iint_Q f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Osservazione 2.1.7 (Prinzipio di Cavalieri) La formula (2) può essere interpretata geometricamente nel modo seguente:

sia $f \geq 0$, definiamo la regione piana $\mathbb{T}_f^x(Q) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq f(x, y)\}$ per $x \in [a, b]$ fissato. Allora

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy = \text{area}(\mathbb{T}_f^x(Q))$$

Pertanto la (2) si può interpretare come

$$\begin{aligned} \text{volume}(\mathbb{T}_f(Q)) &:= \iint_Q f =_{(2)} \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \\ &= \int_a^b \text{area}(\mathbb{T}_f^x(Q)) dx \text{ somma di volumi infinitesimi} \end{aligned}$$

2.1.4 Esempio

Esempio 16 Calcolare $\iint_Q f$ dove $Q = [0, 1] \times [0, \pi]$, $f(x, y) := x \cdot \sin(xy)$

Soluzione:

È facile verificare che $f \in C^0(Q)$, quindi possiamo utilizzare la formula (3), però osserviamo che, ai fini del calcolo, utilizzare (1) o (2) può essere differente.

$$\iint_Q f = \int_0^1 \left(\int_0^\pi x \cdot \sin(xy) dy \right) dx$$

Fissiamo $0 \leq x \leq 1$

$$\int_0^\pi x \cdot \sin(xy) dy = x \int_0^\pi \sin(xy) dy = x \left(-\frac{\cos(xy)}{x} \right) \Big|_0^\pi = -\cos(\pi x) + 1$$

Quindi

$$\int_0^1 \left(\int_0^\pi x \cdot \sin(xy) dy \right) dx = \int_0^1 (-\cos(\pi x) + 1) dx = -\frac{\sin(\pi x)}{\pi} + x \Big|_0^1 = -\frac{\sin \pi}{\pi} + 1 + \frac{\sin 0}{\pi} - 0 = 1$$

Esercizio 17 Verificare che l'integrale iterato

$$1 = \iint_Q f = \int_0^\pi \left(\int_0^1 x \cdot \sin(xy) dx \right) dy = \int_0^\pi \frac{\sin(y) - y \cos(y)}{y^2} dy$$

L'ultimo integrale, esiste, ma la funzione integranda non ammette come primitiva rappresentabile come funzioni elementari, come, per esempio $\int \frac{\sin x}{x} dx$, $\int e^{-x^2} dx$, $[0, 1] \ni x \rightarrow \frac{\sin(x)}{x}$ è continua, dunque $\exists \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx \in \mathbb{R}$

2.2 Lez 11 - Integrale doppio su insiemi generali

Vogliamo definire la nozione di integrale per una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ limitata, dove A è un dominio più generale di un rettangolo.

Definizione 2.2.1 Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e A limitato e sia $Q = [a, b] \times [c, d] \supset A$. Definiamo

$$\tilde{f} : Q \rightarrow \mathbb{R}, \tilde{f}(x, y) := \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in A \\ 0 & \text{se } (x, y) \in Q \setminus A \end{cases}$$

Si dice che f è integrabile su A , e scriveremo $f \in \mathcal{R}(A)$, se $\tilde{f} \in \mathcal{R}(Q)$. In questo caso:

$$\iint_A f = \iint_Q \tilde{f} \text{ (integrale doppio di } f \text{ su } A)$$

Osservazione 2.2.1 (i) Si può verificare (ma omettiamo) che l'integrabilità di f su A non dipende dalla scelta del rettangolo Q , come pure il valore $\iint_Q \tilde{f}$

(ii) La funzione \tilde{f} , tipicamente, non sarà continua nei punti di frontiera ∂A

Esempio 17 $A =$ cerchio del piano, $f = 1$ su A .

$$G_{\tilde{f}} := \{(x, y, 1) : (x, y) \in A\} \cup \{(x, y, 0) : (x, y) \in Q \setminus A\}$$

Se Q è un rettangolo contenente A , allora $\tilde{f} : Q \rightarrow \mathbb{R}$, come definita in 2.2.1, è discontinua in tutti i punti di ∂A .

In accordo con la nostra definizione precedente e tenendo conto della nostra idea geometrica di integrale doppio

$$\iint_Q \tilde{f} := \text{volume}(\mathcal{T}_{\tilde{f}}(Q))$$

dove $\mathcal{T}_{\tilde{f}}(Q) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \tilde{f}(x, y)\} = \{(x, y, 0) : (x, y) \in Q \setminus A\} \cup \{(x, y, z) : (x, y) \in A, 0 \leq z \leq 1\} = P \cup \mathcal{T}_f(A)$, essendo P una parte limitata di un piano, $\text{volume}(P) = 0$, mentre $\text{volume}(\mathcal{T}_f(A)) = \text{volume}(A \times [0, 1]) = \text{area}(A)$.

Quindi questo ragionamento ci porta a concludere:

$$\iint_A f := \iint_Q \tilde{f} = \text{volume}(\mathcal{T}_{\tilde{f}}(Q)) = \text{area}(A)$$

Pertanto, da questo ragionamento, risulta evidente che, se per l'insieme A non fosse definita una nozione di area non sapremmo come calcolare $\iint_A f$

2.2.1 Insiemi numerabili e loro area

Definizione 2.2.2 Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definita come $f(x) := 1$ se $x \in A$, con A limitato. L'insieme A si dice misurabile (secondo Peano-Jordan) se $f \in \mathcal{R}(A)$. In questo caso il valore dell'integrale si chiama misura (o area) di A e si denota

$$|A|_2 := \iint_A 1 \, dx \, dy$$

Osservazione 2.2.2 Se $A = Q = [a, b] \times [c, d]$, allora è facile verificare che Q è misurabile e

$$|Q|_2 = \text{area}(Q) = (b - a)(d - c)$$

Teorema: Caratterizzazione degli insiemi misurabili

Teorema 2.2.3 (Caratterizzazione degli insiemi misurabili) [BDPG, 14.9]
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato. Allora

$$A \text{ è misurabile} \iff \partial A \text{ è misurabile e } |\partial A|_2 = 0$$

Teorema 2.2.4 (BDPG, 14.11) Sia $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile (come funzione di $n=1$ variabile). Allora $G_g := \{(x, g(x)) : x \in [a, b]\}$ è misurabile e $|G_g|_2 = 0$

Tramite i teoremi 2.2.3, 2.2.4 si può provare il seguente corollario.

Corollario 2.2.1 Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato. Supponiamo che

$$\partial A = \bigcup_{i=1}^k G_{g_i}$$

dove $g_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}$ continue $\forall i = 1, \dots, k$
Allora A è misurabile.

Esempio 18 (Misurabilità insiemi semplici del piano) Siano $g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue e supponiamo che $g_1(x) \leq g_2(x) \forall x \in [a, b]$. Sia

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

insieme semplice rispetto all'asse y .

Esercizio 18 A è limitato e chiuso.

$$\partial A = G_{g_1} \cup \{(b, y) : g_1(b) \leq y \leq g_2(b)\} \cup G_{g_2} \cup \{(a, y) : g_1(a) \leq y \leq g_2(a)\}$$

Pertanto $|\partial A|_2 = 0$ e, per il corollario 2.2.1, A è misurabile.

2.2.2 Integrali doppi su insiemi misurabili

Teorema: Esistenza integrale doppio su insiemi misurabili

Teorema 2.2.5 (Esistenza integrale doppio su insiemi misurabili) [BDPG, 14.13] Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che:

- A sia limitato e misurabile
- f sia limitato e $f \in C^0(A)$

Allora $f \in \mathcal{R}(A)$

Osservazione 2.2.6 • Dal 2.2.5, segue che, se A è limitato, chiuso e misurabile e $f \in C^0(A)$, allora $f \in \mathcal{R}(A)$

- Continuano a valere le proprietà di linearità, monotonia e il teorema della media integrale, che abbiamo visto per l'integrale doppio di una funzione definita su un rettangolo

Infine vale il seguente risultato, molto utili nel calcolo di integrali.

2.2.3 Teo.: Integrale doppio su insieme di misura nulla

Teorema 2.2.7 (Integrale doppio su insieme di misura nulla) [BDPG, 14.15]

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme limitato e misurabile, sia $f \in \mathcal{R}(A)$. Supponiamo che $A = B \cup C$, con B e C misurabili e $|C|_2 = 0$. Allora:

$$\iint_A f = \iint_B f$$

Osservazione 2.2.8 Una immediata conseguenza di 2.2.3 e 2.2.7 è la seguente: sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato e misurabile e sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{R}(A)$, allora

$$\iint_A f = \iint_{\dot{A}} f$$

2.3 Integrali doppi su domini semplici e formule di riduzione

Definizione 2.3.1 Un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^2$ si dice

- Dominio semplice (o normale) rispetto all'asse y se esistono $g_1, g_2 \in C^0([a, b])$ t.c. $g_1 \leq g_2$ su $[a, b]$ e

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

- Dominio semplice (o normale) rispetto all'asse x se esistono $h_1, h_2 \in C^0([c, d])$ t.c. $h_1 \leq h_2$ su $[c, d]$ e

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

Osservazione 2.3.1 Ricordiamo che, per quanto visto prima, un dominio semplice è limitato e misurabile. Inoltre, per il 2.2.5, se A è semplice ed $f \in C^0(A)$, allora $f \in \mathcal{R}(A)$

Vogliamo ora introdurre una formula per il calcolo di integrali doppi su domini semplici.

2.3.1 Teorema: Formula di riduzione su domini semplici

Teorema 2.3.2 (Formula di riduzione su domini semplici) [BDPG, 14.17]

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio semplice rispetto ad uno degli assi. Supponiamo che $f \in C^0(A)$, allora $f \in \mathcal{R}(A)$ e valgono le seguenti formule:

1. Se $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ con $g_1, g_2 \in C^0([a, b])$, allora

$$(1) \iint_A f = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

In particolare A è misurabile e $|A|_2 = \iint_A 1 = \int_a^b (g_2(x) - g_1(x)) dx$

2. Se $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$ con $h_1, h_2 \in C^0([c, d])$, allora

$$(2) \iint_A f = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

In particolare A è misurabile e $|A|_2 = \iint_A 1 = \int_c^d (h_2(y) - h_1(y)) dy$

Osservazione 2.3.3 Le proprietà di linearità, monotonia e il teorema della media integrale, continuano a valere per integrali doppi su domini semplici.

Esempio 19 Calcolare $\iint_A f(x, y) dx dy$ nei seguenti casi:

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$, $f(x, y) = x$

Soluzione:

A è un dominio semplice rispetto all'asse y ed $f \in C^0(A)$, possiamo applicare la 2.3.2 (1), ottenendo che

$$\iint_A f = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} x dy \right) dx$$

Fissato $x \in [0, 1]$,

$$\int_0^{x^2} x dy = x \int_0^{x^2} 1 dy = xy \Big|_0^{x^2} = x^3$$

Pertanto

$$\iint_A x dx dy = \int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

2. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$, $f(x, y) = \frac{\sin(x)}{x}$

Soluzione:

A è un dominio semplice rispetto all'asse x ed $f \in C^0(A)$, possiamo applicare la 2.3.2 (2), ottenendo che

$$\iint_A \frac{\sin(x)}{x} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_y^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x} dx \right) dy$$

Fissiamo $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\exists \int_y^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x} dx, \text{ ma non si può calcolare}$$

Osserviamo che A è un dominio semplice anche rispetto all'asse y , infatti:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq x\}$$

possiamo quindi applicare 2.3.2 (1) ed otteniamo

$$\iint_A \frac{\sin(x)}{x} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^x \frac{\sin x}{x} dy \right) dx$$

Fissiamo $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$

$$\int_0^x \frac{\sin(x)}{x} dy = \frac{\sin(x)}{x} \int_0^y dy = \frac{\sin(x)}{x} \cdot x = \sin(x)$$

Pertanto

$$\iint_A \frac{\sin(x)}{x} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx = -\cos(x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Chapter 3

Esercitazioni

3.1 Lezione 1 - 09/03/2022

Esercizio 3.1.1 Determinare e disegnare nel piano xy il dominio delle seguenti funzioni, $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dove A : dominio che dobbiamo determinare.

$$f(x, y) = \log(4(x^2 + y^2) - 1)$$

Soluzione:

$$4(x^2 + y^2) - 1 > 0 \iff x^2 + y^2 > \frac{1}{4}$$

Studiamo quindi: $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ la circonferenza di centro $c = (0, 0)$ e raggio $r = \frac{1}{2}$,

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > \frac{1}{4}\} = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B((0, 0), \frac{1}{2})}$$

dove:

- $\overline{B((0, 0), \frac{1}{2})} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}\}$
- $B((0, 0), \frac{1}{2}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{1}{2}\}$

Insiemi aperti e chiusi

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}$, A è chiuso $\iff A^c$ è aperto.

Definiamo $\bar{A} = A$, $xy \geq 0 \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$ Disegnando gli assi:

$A^c = \mathbb{R}^2 \setminus A$ è aperto. Fisso ora $(x_0, y_0) \in A^c$, $r = d(\partial A, (x_0, y_0)) = \min |x_0|, |y_0|$.
La palla $B((x_0, y_0), \frac{r}{2}) \subset A^c \Rightarrow A^c$ è aperto $\Rightarrow A$ è chiuso.

Esercizio 3.1.2 $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^4}$, $y^2 \geq x^4$.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \geq x^4\}$$

Proviamo a scrivere $y^2 - x^4$ come

$$y^2 - x^4 = (y - x^2)(y + x^2) \geq 0$$

Due casi:

- $y \geq x^2$
- $y \geq -x^2$

(Dal grafico otteniamo)

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 \vee y \leq -x^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq -x^2\}$$

Esercizio 3.1.3 Disegnare l'insieme di livello delle seguenti funzioni

$$C_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = t\}$$

con $t \in \mathbb{R}$.

$$f(x, y) = x^2y, \text{ fissiamo } t \in \mathbb{R}, t = x^2y$$

$$1. \ t = 0, x^2y = 0 \Rightarrow y = 0 \vee x = 0$$

$$2. \ t > 0, t = x^2y \iff y = \frac{t}{x^2}$$

- $t = 1, y = \frac{1}{x^2}$
- $t = 2, y = \frac{2}{x^2}$

$$3. \ t < 0, t = x^2y \iff y = \frac{t}{x^2}$$

- $t = -1, y = -\frac{1}{x^2}$
- $t = -2, y = -\frac{2}{x^2}$

Esercizio 3.1.4 $f(x, y) = ye^{-x}, t \in \mathbb{R}, t = ye^{-x} \iff e^x t = y$

- $t = 0 \Rightarrow y = 0$
- $t = 1 \Rightarrow y = e^{-x}$
- $t = 2 \Rightarrow y = 2e^{-x}$
- $t = -1 \Rightarrow y = -e^{-x}$
- $t = -2 \Rightarrow y = -2e^{-x}$

Esercizio 3.1.5

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} = ?$$

eleviamo x e y al numeratore per $\frac{3}{3}$, otteniamo:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(\sqrt[3]{x})^3 - (\sqrt[3]{y})^3}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}$$

Ricordiamo ora la differenza tra cubi $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$, otteniamo:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + (\sqrt[3]{y})^2)}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} &= \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + (\sqrt[3]{y})^2 = 0 \end{aligned}$$

Esercizio 3.1.6

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = ?$$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = l \iff$ per ogni restrizione a un sottoinsieme B ,
 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f|_B(x, y) = l$

- $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx\}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}|_B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 mx}{x^4 + m^2 x^2} =$

$$= \frac{x^3 m}{x^2(x^2 + m^2)} = x \left(\frac{m}{x^2 + m^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} x \left(\frac{m}{x^2 + m^2} \right) = 0$$

- $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx^2\}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}|_B =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^4}{x^4 + m^2 x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m}{1 + m^2}$$

Proviamo due valori di m :

- $m = 1, \frac{1}{2}$
- $m = 2, \frac{2}{5}$

Ho trovato due restrizioni $\{y = x^2\}$ e $\{y = 2x^2\}$ dove il limite assume due valori distinti. Allora per l'unicità del limite, il limite non esiste.

Esercizio 3.1.7

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

Coordinate polari

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \vartheta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

- $x = \rho \cos \vartheta$
- $y = \rho \sin \vartheta$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\rho^2 \cos^2 \vartheta \cdot \rho \sin \vartheta}{\rho^2 \cos^2 \vartheta + \rho^2 \sin^2 \vartheta} = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\rho^3 \cos^2 \vartheta \cdot \sin \vartheta}{\rho^2 (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta)} \end{aligned}$$

Sappiamo che $\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta = 1$, quindi il limite rimane:

$$\lim \rho \cos^2 \vartheta \cdot \sin \vartheta$$

$$0 \leq |\rho \cos^2 \vartheta \cdot \sin \vartheta| < \rho$$

Da cui se $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ allora anche $\rho \rightarrow 0$ e siccome $\begin{cases} \cos^2 \vartheta < 1 \\ \sin \vartheta < 1 \end{cases}$, grazie al **teorema del confronto** il limite vale 0.

Esercizio 3.1.8 Dire quali insiemi sono aperti/chiusi e quali limitati, inoltre determinare la frontiera.

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (xy)(y - 1) \geq 0\}$$

- $x \geq 0$
- $y \geq 0$
- $y - 1 \geq 0, y \geq 1$

Frontiera: $\partial H = \{y = 1\} \cup \{x = 0\} \cup \{y = 0\}$

3.2 Esercitazione 2 - 23/03/2022

Esercizio 3.2.1 (a)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(e^{xy^2} - 1) \log(1 + x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2) \sin(xy)}$$

Ricordiamo che:

- $\frac{\log(1+t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$
- $\frac{e^t - 1}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$
- $\frac{\sin(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$

Grazie a ciò il nostro limite diventa:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy^2} - 1}{xy^2} \cdot \frac{\log(1 + x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \cdot \frac{xy}{\sin(xy)} \cdot y$$

(i) Definiamo $t = x^2 + y^2 \rightarrow 0$ per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$,

$$\frac{\log(1 + x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \frac{\log(1 + t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$$

(ii) Definiamo $t = xy \rightarrow 0$ per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$,

$$\frac{xy}{\sin(xy)} = \frac{t}{\sin(t)} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$$

(iii) Definiamo $t = xy^2 \rightarrow 0$ per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$,

$$\frac{e^{xy^2} - 1}{xy^2} = \frac{e^t - 1}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$$

$$= 1 \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y = 0$$

(c)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(xy)}{\log(1 + x^2 + y^2)}$$

Ricordiamo che:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$$

Allora il limite diventa:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(xy)}{(xy)^2} \cdot \frac{x^2 + y^2}{\log(1 + x^2 + y^2)} \cdot \frac{(xy)^2}{x^2 + y^2}$$

(i) $t = xy \rightarrow 0$ per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

$$\frac{1 - \cos(xy)}{(xy)^2} = \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2}$$

(ii) Per (i) dell'esercizio (a) si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\log(1 + x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} &= 1 \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} = ? \end{aligned}$$

Passiamo alle coordinate polari: $\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}$

$$0 \leq \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2 + y^2} = \frac{\rho^4 \cdot \cos^2 \vartheta \cdot \sin^2 \vartheta}{\rho^2 (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta)} \leq \rho^2$$

Per $\rho \rightarrow 0$ tutto $0 \rightarrow 0$ e $\rho^2 \rightarrow 0$, quindi anche il limite tende a zero per il teorema del confronto.

Consideriamo il caso in cui $x = 0$ o $y = 0$

- Vediamo $x = 0$,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(0)}{\log(1 + y^2)} = \left[\frac{0}{0} \right]_{F.I.N.D.} = \lim_{y \rightarrow 0} 1 - \cos(0) \cdot \frac{y^2}{\log(1 + y^2)} \cdot \frac{1}{y^2} = 0$$

- Vediamo $y = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(0)}{\log(1 + x^2)} = \left[\frac{0}{0} \right]_{F.I.N.D.} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \cos(0) \cdot \frac{x^2}{\log(1 + x^2)} \cdot \frac{1}{x^2} = 0$$

(e)

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,1)} \frac{xy(z-1)}{x^2 + y^2 + (z-1)^2}$$

- **Primo metodo**

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \\ t = z - 1 \xrightarrow{z \rightarrow 1} t \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$0 \leq \left| \frac{\rho \cos \vartheta \cdot \rho \sin \vartheta \cdot t}{\rho^2 (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) + t^2} \right| \leq \left| \frac{\rho^2 \cdot t}{\rho^2 + t^2} \right| \leq 1 \cdot t$$

$$\left(\frac{\rho^2}{\rho^2 + t^2} \leq 1 \iff \rho^2 \leq \rho^2 + t^2 \iff t^2 \geq 0 \Rightarrow \text{sempre} \right)$$

Quindi per $t \rightarrow 0$, $0 \rightarrow 0$ e $t \rightarrow 0$, quindi per il teorema del confronto il limite

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,1)} \frac{xy(z-1)}{x^2 + y^2 + (z-1)^2} = 0$$

- **Secondo metodo:** $t = z - 1 \xrightarrow{z \rightarrow 1} 0$
 $\lim_{(x,y,t) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyt}{x^2+y^2+t^2}$

$$0 \leq \left| \frac{xyt}{x^2+y^2+t^2} \right| \leq? \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2+t^2} \right)^3}{x^2+y^2+t^2} = \sqrt{x^2+y^2+t^2}$$

In particolare si ha $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2+t^2} \Rightarrow x^2 \leq x^2+y^2+t^2 \iff y^2+t^2 \geq 0$, lo stesso vale per $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2+t^2}$ e $|t| \leq \sqrt{x^2+y^2+t^2}$, quindi otteniamo:

$$0 \leq \left| \frac{xyt}{x^2+y^2+t^2} \right| \leq \sqrt{x^2+y^2+t^2}$$

Che tende a 0 per $(x,y,t) \rightarrow (0,0,0)$, quindi grazie al teorema del confronto il limite vale 0

Esercizio 3.2.2 Data $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} g(x,y) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a)

$$g(x,y) = \frac{x \sin(x^2 y)}{x^2 + y^2} \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

La funzione f , che coincide con $g \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$, è **continua** $\forall (x,y) \neq (0,0)$ perchè è **composizione** e **prodotto** di funzioni continue (Teorema).
Dobbiamo quindi vedere il comportamento della funzione in $(0,0)$,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$$

cioè

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin(x^2 y)}{x^2 + y^2} \cdot \frac{x^2 y}{x^2 y}$$

per $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

$$(i) \quad t = x^2 y \rightarrow 0 \text{ per } (x,y) \rightarrow (0,0), \quad \frac{\sin(t)}{t} \rightarrow 1$$

$$= 1 \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} = 1 \cdot 0 = 0$$

Verifichiamolo tramite le coordinate polari.

$$x = \rho \cos \vartheta$$

$$y = \rho \sin \vartheta$$

$$0 \leq \left| \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{\rho^4 \cdot \cos^3 \vartheta \sin \vartheta}{\rho^2 (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta)} \right| \leq \rho^2$$

Quindi per $\rho \rightarrow 0$ anche il limite vale 0 grazie al teorema del confronto. Abbiamo verificato che il limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, quindi la funzione f è continua.

Controlliamo ora:

- $y = 0$ e $x \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 0}{x^2} = 0$
- $y \neq 0$ e $x = 0$, $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = 0$

b)

$$g(x,y) = \frac{\sin(2xy)}{e^{x^2+y^2} - 1}$$

Dobbiamo studiarne il comportamento in $(0,0)$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 2 \cdot \frac{\sin(2xy)}{2xy} \cdot \frac{xy}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{e^{x^2+y^2} - 1}$$

$$(i) \ t = 2xy, \frac{\sin(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1 \text{ per } (x,y) \rightarrow (0,0)$$

$$(ii) \ t = x^2 + y^2 \rightarrow 0 \text{ per } (x,y) \rightarrow (0,0), \frac{t}{e^t - 1} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$$

- Proviamo con le coordinate polari: $\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{\rho^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{\rho^2} \Rightarrow \sin \vartheta \cos \vartheta$$

Quindi non va bene, allora proviamo a prendere una restrizione del dominio.

- $y = mx$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 m}{x^2(m^2 + 1)} \rightarrow \frac{m}{m^2 + 1}$$

Otteniamo due risultati diversi, $((m = 1, \lim = \frac{1}{2}), (m = 2, \lim = \frac{2}{5}))$, quindi ho trovato due restrizioni dove il limite è diverso, perciò $\nexists \lim$.

Esercizio 3.2.3 Calcolare il gradiente delle seguenti funzioni:

$$1. \ f(x,y) = \sin(xy), \ \nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \right)$$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(xy) \cdot \frac{\partial(xy)}{\partial x} = \cos(xy) \cdot y$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(xy) \cdot \frac{\partial(xy)}{\partial y} = \cos(xy) \cdot x$

$$\nabla f(x,y) = (y \cos(xy), x \cos(xy)) = \cos(xy) \cdot (y, x).$$

Calcolare la derivata direzionale rispetto al vettore $v = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) = \langle \nabla f(x,y), v \rangle = \frac{\cos(xy)}{\sqrt{3}} \left\langle (y, x), \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \right\rangle =$$

$$= \frac{\cos(xy)}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{y}{2} + \frac{3x}{2} \right) = \frac{\cos(xy)}{2\sqrt{3}}(3x - y)$$

Calcoliamo il piano tangente nei punti $(0, 0, f(0, 0))$ e $(1, 2, f(1, 2))$, ricorriamo la formula del piano:

$$z = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x, y) - (x_0, y_0) \rangle$$

Cerchiamo ora i valori:

- $f(x, y) = \sin(xy)$, $f(0, 0) = 0$
- $\nabla f(x, y) = \cos(xy)(y, x)$, $\nabla f(0, 0) = 1 \cdot (0, 0) = 0$

Quindi $z = 0 + 0 \Rightarrow$ il piano tangente è $z = 0$.

Chi è il normale?

$$n = (0, 0, 1), (x_0, y_0) = (1, 2)$$

- $f(x, y) = \sin(xy)$, $f(1, 2) = \sin(2)$
- $\nabla f(x, y) = \cos(xy)(y, x)$, $\nabla f(1, 2) = \cos(2) \cdot (2, 1)$

$$z = \sin(2) + \langle \cos(2) \cdot (2, 1), (x - 1, y - 2) \rangle = \sin(2) + \cos(2) \cdot (2x + y - 4)$$

3.3 Lezione 3 - 06/04/2022

Esercizio 3.3.1 (Es 2, Provetta) Siano $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

- $f(t, u, v) = (k(t + v), u^2 + v)$
 $f_1 = k(t + v)$
 $f_2 = u^2 + v$
- $g(x, y) = (\log(1 + x^2 + y^2), \sin(x - y), x - y)$
 $g_1 = \log(1 + x^2 + y^2)$
 $g_2 = \sin(x - y)$
 $g_3 = x - y$

(1) Calcolare $Df(t, u, v) \forall (t, u, v) \in \mathbb{R}^3$ e $Dg(x, y) \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

(2) Calcolare la matrice Jacobiana di h in $(0, 0)$, $Dh(0, 0)$, dove $h = f \circ g$

(1) Iniziamo osservando che le funzioni $f_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) sono C^∞ perchè sono polinomi e $g_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, 3$) sono C^∞ perchè composizione di funzioni C^∞ , $\Rightarrow f$ e g sono differenziabili, per definizione di jacobiana si ha

$$\begin{aligned} Df(t, u, v) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t}(t, u, v) & \frac{\partial f_1}{\partial u}(t, u, v) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(t, u, v) \\ \frac{\partial f_2}{\partial t}(t, u, v) & \frac{\partial f_2}{\partial u}(t, u, v) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(t, u, v) \\ \frac{\partial f_3}{\partial t}(t, u, v) & \frac{\partial f_3}{\partial u}(t, u, v) & \frac{\partial f_3}{\partial v}(t, u, v) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & k \\ 0 & 2u & 1 \end{bmatrix} \\ Dg(x, y) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g_3}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g_3}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2x}{1+x^2+y^2} & \frac{2y}{1+x^2+y^2} \\ \cos(x-y) & -\cos(x-y) \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(2) $h = f \circ g = f(g(x, y)) = h(x, y)$, $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \Rightarrow Dh$ è 2×2 , Essendo f e g differenziabili, segue che la funzione composta $h = f \circ g$ è differenziabile e vale RDC, cioè $Dh(0, 0) = Df(g(0, 0)) \cdot Dg(0, 0)$, poichè $g(0, 0) = (0, 0, 0)$

e

$$Dg(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Df(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} k & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \begin{bmatrix} k & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = k \neq 0, \text{ se } k \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Dh(0,0) = \begin{bmatrix} k & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3.3.2 (Es. 3, Provetta) Consideriamo la funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \arctan(1 + x^3 + \sqrt{(2)}kxy + y^2 - x^2) \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Determinare se esistono punti di massimo e/o minimo relativo o di sella.

$\arctan(t) \Rightarrow (\arctan(t))' = \frac{1}{1+t^2} > 0 \Rightarrow \arctan$ strettamente crescente Siccome \arctan è strettamente crescente i punti di min e max rel. e sella coincidono con i punti di max/min/sella della funzione:

$$g(x, y) = 1 + x^3 + \sqrt{(2)}kxy + y^2 - x^2$$

I punti critici di g sono quelli dove si annulla il gradiente $\nabla g(x, y) = (0, 0) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 + \sqrt{(2)}ky - 2x = 0 \\ \sqrt{(2)}kx + 2y = 0 \end{cases} \iff \\ & \iff \begin{cases} 3x^2 + \sqrt{(2)}k\left(\frac{-kx}{\sqrt{(2)}}\right) - 2x = 0 \\ y = -\frac{kx}{\sqrt{(2)}} \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 - k^2x - 2x = 0 \\ y = -\frac{kx}{\sqrt{(2)}} \end{cases} \iff \\ & \iff \begin{cases} x(3x - (k^2 + 2)) = 0 \\ y = -\frac{kx}{\sqrt{(2)}} \end{cases} \iff \\ & \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{2+k^2}{3} \\ y = \frac{-k(2+k^2)}{3\sqrt{(2)}} \end{cases} \end{aligned}$$

$$p_1 = (0, 0)$$

$$\Rightarrow p_2 = \left(\frac{2+k^2}{3}, \frac{-k(2+k^2)}{3\sqrt{(2)}} \right) \text{ sono punti stazionari}$$

$$\bullet \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + \sqrt{(2)}ky - 2x$$

$$h_{11} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = 6x - 2$$

$$\bullet \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \sqrt{(2)}kx + 2y$$

$$h_{22} = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = 2$$

- $h_{12} = h_{21} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = \sqrt{(2)}k = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$ dal teorema di Schwartz

$$Hg(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x - 2 & \sqrt{(2)}k \\ \sqrt{(2)}k & 2 \end{bmatrix}$$

- Calcoliamo $Hg(p_1)$

$$Hg(p_1) = Hg(0, 0) = \begin{bmatrix} -2 & \sqrt{(2)}k \\ \sqrt{(2)}k & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Autovalori di } Hg(p_1), \det \begin{bmatrix} -2 - \lambda & \sqrt{(2)}k \\ \sqrt{(2)}k & 2 - \lambda \end{bmatrix} = -4 + \lambda^2 - 2k^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = 2k^2 + 4 \iff \lambda \pm \sqrt{4 + 2k^2}$$

$$- \lambda_1 = \sqrt{4 + 2k^2} > 0$$

$$- \lambda_2 = -\sqrt{4 + 2k^2} < 0$$

\Rightarrow la matrice $Hg(0, 0)$ non è definita dal corollario visto a lezione,

$\det H = -4 - 2k^2 < 0 \iff \det H < 0 \Rightarrow$ non definita

\Rightarrow per i teoremi visti a lezione $(0, 0)$ è un punto di sella.

- Calcoliamo $Hg(p_2)$

$$Hg(p_2) = Hg\left(\frac{2 + k^2}{3}, \frac{-k(2 + k^2)}{3\sqrt{(2)}}\right) = \begin{bmatrix} 2 + 2k^2 & \sqrt{(2)}k \\ \sqrt{(2)}k & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 2 + 2k^2 & \sqrt{(2)}k \\ \sqrt{(2)}k & 2 \end{bmatrix} = 4 + 4k^2 - 2k^2 = 4 + 2k^2 > 0$$

Siccome $h_{11} > 0$ e $\det Hg(p_2) > 0$ si ha dal corollario visto a lezione che $Hg(p_2)$ è definita positiva.

Quindi per il teorema visto a lezione p_2 è un punto di minimo relativo.

Esercizio 3.3.3 (Es 1, Provetta) Data $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(1 - \cos x)(\sin(ky))}{kx^2 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Dire se è continua in $(0, 0)$ Per definizione di continuità, f è continua in $(0, 0)$

$$\iff \exists \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0.$$

Ricordiamo i limiti notevoli:

- $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

Osserviamo che $f(x, 0) = 0 \forall x \neq 0$ e $f(0, y) = 0 \forall y \neq 0$ e

$$(*)f(x, y) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \cdot x^2 \cdot \frac{\sin(ky)}{ky} \cdot \frac{ky}{kx^2 + y^4} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{ky}{kx^2 + y^4}$$

Notiamo che:

$$0 \leq \left| \frac{ky}{kx^2 + y^4} \right| \leq \left| \frac{ky}{kx^2} \right| \leq |y|$$

Quindi per $y \rightarrow 0$ e grazie al TDC $\frac{ky}{kx^2 + y^4} \rightarrow 0$, siccome tutti e tre i limiti in (*) esistono e sono finiti si ha:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow f \text{ è continua in } (0,0)$$

2. Dire se $\exists \nabla f(0, 0)$

$$\nabla f(0, 0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right)$$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0$

Quindi $\exists \nabla f(0, 0) = (0, 0)$

3. Dire se f è differenziabile in $(0, 0)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - \langle \nabla f(0, 0), (x, y) \rangle}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

$$\langle \nabla f(0, 0), (x, y) \rangle = \langle (0, 0), (x, y) \rangle = (0, 0),$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - (0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ da svolgimento del primo punto (1)

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{0 - (0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$