Analisi Matematica 2

Enrico Favretto

28/02/2022

Contents

Chapter 1

Funzioni a più variabili, [BDPG, 10]

1.1 Lez - 01

Studieremo funzioni a più variabili reali a valori scalari e vettoriali, cioè $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ con $n, k \in InsN$ e $n \geq 1, k \geq 1$.
Se $k = 1, n \geq 2$, f si dice funzione di più variabili a valori scalari;
Se $k \geq 1, n \geq 1$, f si dice funzione di più variabili a valori vettoriali.

Incominciamo a trattare il caso in cui $n = 2, 3$ e $k = 1$.

MOTIVAZIONE: I fenomenti in Fisica/Ingegneria sono modelizzati da funzioni che dipendono da due/tre variabili.

Esempio 1 1. *La funzione temperatura di una piastra piana $A \subseteq \mathbb{R}^2$. La funzione temperatura della piastra A può essere modelizzata da una funzione*

$$T : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty] \subseteq \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

2. *La funzione distanza dall'origine in $\mathbb{R}^3$,*

$$f : \mathbb{R}^3 \to [0, +\infty]$$

$$f(p) := d(O, p) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

1.1.1 Grafico di una funzione scalare di più variabili

Ricordiamo che nel caso di una funzione scalare da una variabile $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(y = f(x),\ x \in A)$, A intervallo di $\mathbb{R}$.

$$G_f := \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Se $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(z = f(x,y),\ (x,y) \in A)$

$$G_f := \{(x, y, f(x,y)) \mid (x,y) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $(t = f(x,y,z),\ (x,y,z) \in A)$

$$G_f := \{(x, y, z, f(x,y,z)) \mid (x,y,z) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

Disegnare G_f in $\mathbb{R}^4$? Non può essere facilmente studiato, il grafico è una ipersuperficie di $\mathbb{R}^4$

1.1.2 Curve di livello di una funzione di più variabili

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, fissato $t \in \mathbb{R}$,

$$C_t := \{(x,y) \in A \mid f(x,y) = t\}$$

(è un insieme di tipo "curva" contenuto in A)

Esempio 2 *$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x - y$, (z = x-y) $x - y - z = 0$,*

$$((1,-1,-1),(x,y,z)) = 0$$

$$C_t := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = t\}$$

fascio di rette parallele al variare di t

$$G_f := \{(x, y, x - y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

piano di $\mathbb{R}^3$ contenente la retta r e ortogonale al vettore (1,-1,-1)

$$r := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$$

Più in generale se $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $C_t := \{(x,y,z) \in A \mid f(x,y,z) = t\}$ è un insieme di tipo "superficie".

Esercizio 1 *Studiare le curve di livello della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$.*

$$C_t := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = t\}$$

- *C_t è la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{t}$, se $t \geq 0$*
- *C_t è vuoto ($\varnothing$), se $t < 0$*

1.1.3 Limiti e continuità per funzioni di più variabili

Problema: Data $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, fissato $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ introdurre la definizione

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

Ricordiamo la definizione di limite per funzioni reali di una variabile, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in [a,b]$ $lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \iff (def.)$,

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta = d(x_0, \varepsilon) > 0 \mid |f(x) - L| < \varepsilon$$

$\forall x \in (a,b) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0$, $lim_{x\to a^+} f(x) = L, lim_{x\to b^-} f(x) = L$

$$B(x_0, \delta) := (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \delta\}$$

intorno sferico di centro x_0 *e reaggio* $\delta > 0$

Idea per l'introduzione di limite per funzioni di $n = 2$ varaibili

Generalizzazione:

1. La definizione di intorno di centro x_0 e raggio $r > 0$ a $\mathbb{R}^2$
2. La nozione di intervallo apero e chiuso a $\mathbb{R}^2$, come pure la nozione di punto estremo di un intervallo.

1.2 Lez - 02

Definizione 1.2.1 (Distanza Euclidea in $\mathbb{R}^2$) *Si chiama distanza euclidea di $\mathbb{R}^2$ (o nel piano) la funzione, $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty)$:*

$$d(p, q) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$p = (x_1, y_1)$, $q = (x_2, y_2)$

Definizione 1.2.2 *Si chiama intorno (sferico) di centro $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e raggio $r > 0$ (o anche palla aperta di centro p_0 e raggio $r > 0$), l'insieme:*

$$B_r(p_0) = B(p_0, r) := \{p \in \mathbb{R}^2 \mid d(p, p_0) < r\} =$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$$

Definizione 1.2.3 *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$*

1. *Un punto $p_0 \in \mathbb{R}^2$ si dice punto di frontiera di A se*

$$B(p_0, r) \cap A \neq \varnothing \text{ e } B(p_0, r) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus A) \neq \varnothing, \forall r > 0$$

   L'insieme di tutti i punti di frontiera di A è detto frontiera di A e di denota ∂A

2. *L'insieme A è detto chiuso se ogni punto di frontiera di A appartiene ad A*

3. *L'insieme A è detto aperto se non contiene alcun punto della sua frontiera*

4. *L'insieme di tutti i punti di A che non sono di frontiera si chiama parte interna di A e si denota con $\mathring{A}$*

5. *L'insieme A è detto limitato se $\exists R_0 > 0$ t.c. $A \subseteq B(O, R_0)$*

Esempio 3

1. *$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, allora*
   - $\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
   - $\mathring{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$

2. *$A = \mathbb{R}^2$, $\partial A = \varnothing$, $\mathring{A} = A = \mathbb{R}^2$*

Definizione 1.2.4 *Dato $A \subseteq \mathbb{R}^2$*

1. *$p_0 \in \mathbb{R}^2$ si dice punto di accomulazione per A se*

$$B(p_0, r) \cap (A \setminus \{p_0\}) \neq \varnothing, \forall r > 0$$

2. *$p_0 \in A$ si dice punto isolato di A se p_0 non è un punto di accomulazione, cioè se:*

$$\exists r_0 > 0 \mid B(p_0, r_0) \cap A = \{p_0\}$$

Definizione 1.2.5 (Limite di funzioni di due variabili) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e sia $p_0 \in \mathbb{R}^2$ punto di accomulazione per A. Si dice che:*

$$\exists lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \in \mathbb{R}$$

oppure $\exists \lim_{p\to p_0} f(p) = L$ se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = d(p_0, \varepsilon) > 0 \mid |f(x,y) - L| < \varepsilon, \forall (x,y) \in B(p,\delta) \cap (A \setminus \{p_0\})$$

Osservazione 1.2.1 *Tenendo presente il caso di funzioni di una variabile, si può enunciare anche la definizione nel caso in cui $L = \pm\infty$*

1.2.1 Calcolo dei limiti

Proposizione 1.2.1 (Unicità del limite) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e sia $p_0 \in \mathbb{R}^2$ punto di accomulazione per A. Supponiamo che $\exists lim_{p\to p_0} f(p) = L \in \mathbb{R}$. Allora L è unico.*

Teorema 1.2.2 (Tecniche per il calcolo dei limiti) *Siano $g, f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p_0 \in \mathbb{R}^2$ punto di accomulazione per A. Supponiamo che $\exists \lim_{p\to p_0} f(p) = L \in \mathbb{R}$ e $\exists \lim_{p\to p_0} g(p) = M \in \mathbb{R}$, allora:*

1. $\exists \lim_{p\to p_0} f(p) + g(p) = L + M$
2. $\exists \lim_{p\to p_0} f(p) \cdot g(p) = L \cdot M$
3. *Se $g(p) \neq 0, \forall p \in A \setminus \{p_0\}$ e $M \neq 0$, allora $\exists \lim_{p\to p_0} \frac{f(p)}{g(p)} = \frac{L}{M}$*
4. *Sia $F : \mathbb{R}to\mathbb{R}$ continua e sia $h(p) = F(f(p))$, allora $\exists \lim_{p\to p_0} h(p) = F(L)$*
5. ***Teorema del confronto**: Sia $h, g, f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, supponiamo che:*

   5.1 $f(p) \leq g(p) \leq h(p)$, $\forall p \in A \setminus \{p_0\}$
   5.2 $\exists \lim_{p\to p_0} f(p) = \lim_{p\to p\to p_0} h(p) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

   allora $\exists \lim_{p\to p_0} g(p) = L$

***Dim.* 1** *Le dimostrazioni di 1-4 sono lasciate al lettore :)*

5 Supponiamo che $L \in \mathbb{R}$, dobbiamo provare che $\exists \lim_{p\to p_0} g(p) = L$, cioè per definizione:

*1** $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta (= \delta(p_0, \varepsilon)) > 0$ *t.c.* $|g(p) - L| < \varepsilon \ \forall p \in B(p_0, \delta) \cap (A \setminus \{p_0\})$. *Per ipotesi sappiamo che*

$$\lim_{p\to p_0} f(p) = L, \lim_{p\to p_0} h(p) = L$$

cioè :

*2** $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 (= \delta_1(p_0, \varepsilon)) > 0$ *t.c.* $|f(p) - L| < \varepsilon$ *o equivalentemente* $L - \varepsilon < f(p) < L + \varepsilon \ \forall p \in B(p_0, \delta_1) \cap (A \setminus \{p_0\})$, *e:*

3 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta_2\,(=\delta_2(p_0,\varepsilon)) > 0$ t.c. $|h(p) - L| < \varepsilon$ o equivalentemente $L - \varepsilon < h(p) < L + \varepsilon \ \forall p \in B(p_0, \delta_2) \cap (A \setminus \{p_0\})$*

Da (5.1),(2),(3*) segue che $\forall\varepsilon > 0$, scegliendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ vale che*

$$L - \varepsilon < f(p) \leq g(p) \leq h(p) < L + \varepsilon$$

$\forall p \in B(p_0, \delta) \cap (A \setminus \{p_0\})$ e dunque vale la (1).*

Introduciamo un altro strumento importante per il calcolo dei limiti per funzioni di due variabili.
Ricordiamo che data $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $B \subseteq A$ si chiama <u>funzione restrizione</u> $f|_B \colon B \to \mathbb{R}$, $f|_B(x) := f(x)$ se $x \in B$.

Teorema 1.2.3 (Limite lungo direzioni) *Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $p_0 \in \mathbb{R}^2$ punto di accomulazione, allora sono equivalenti*

1. *$\exists \lim_{p\to p_0} f(p) = L$*
2. *Per ogni sottoinsieme $B \subseteq A$, per cui p_0 è un punto di accomulazione per B, $\exists \lim_{p\to p_0} f|_B(p) = L$*

Un insieme $B \subseteq A$ può essere visto come una direzione lungo cui $p \to p_0$.

Osservazione 1.2.4 *Il teorema precedente risulta efficace <u>solo</u> per provare che il limite <u>non</u> esiste.*

1.2.2 Esempi calcolo limiti

Esercizio 2 1. *Calcola, se esiste, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$*

Dim. 2 *Nel calcolo del limite bisogna valutare:*

- *Esistenza (il limite può non esistere)*
- *Tecninche appropriate per il calcolo*

Utilizziamo il punto (4) del primo teorema.
Ricordiamo anche il limite notevole $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$
Denotiamo:

- *$h(x, y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ se $(x, y) \in A = (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$*
- *$t = x^2 + y^2$*
- *Sia $p_0 = (0, 0)$ punto di accomulazione per A.*

Osserviamo che $h(x, y) = F(f(x, y))$, dove $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F := \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

è continua, e $f(x, y) = x^2 + y^2$ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Poichè $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$, dal punto (4)

$$\exists \lim_{p\to p_0} h(p) = \lim_{p\to p_0} F(f(p)) = F(0) = 1$$

2. *Calcola se esite* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

   Dim. 3 *Sia*
$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$
   $\forall (x,y) \in A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *e* $p_0 = (0,0)$.
   Utilizziamo il teorema per provare che il limite non esiste.
   Infatti se
$$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$$
   allora
   (1)* $\exists \lim_{x\to 0} f(x,mx) = L$, $\forall m \in R$
   dove $y = mx$, $B = \{y = mx\}$ *(direzionale) e* m *è finito.*
   <u>Osserviamo</u> che $f(x,mx) = \frac{mx^2}{(m^2+1)x^2} = \frac{m}{m^2+1}$ *se* $x \neq 0$, *quindi*
$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \frac{m}{m^2+1}$$
   ma se $m = 0, 1$ *il limite prende valore* $0, \frac{1}{2}$ $(0 \neq \frac{1}{2})$,
   dunque non può valere (1), quindi il limite <u>non esiste</u>*

Dalla definizione di limite per funzioni di due variabili segue subito la nozione di continuità .

Esercizio 3 *Calcolare se esiste*
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$
Sugg: Provare che $\nexists$

1.3 Lez - 03

1.3.1 Definizioni limiti e continuità per $\mathbb{R}^n$

Definizione 1.3.1 *Sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1. *f si dice continua in $p_0 \in A$ se*
   (a) *p_0 è un punto isolato di A, oppure*
   (b) *p_0 è un punto di accomulazione ed $\exists \lim_{p \to p_0} f(p) = f(p_0)$*
2. *f si dice continua su A se f è continua in ogni punto $p_0 \in A$*

Le nozioni di limite e continuità , introdotte per funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, si possono estendere al caso di funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $n \geq 3$.
Più precisamente su $\mathbb{R}^n$ possiamo definire la distanza Euclidea:

$$d(p, q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$$

se $p = (x_1, ..., x_n)$ e $q = (y_1, ..., y_n)$.

Intorno di centro $p_0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ e $r > 0$ è l'insieme:

$$B(p_0, r) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid d(p, p_0) < r\}$$

$$= \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1 - x_1^0)^2 + ... + (x_n - x_n^0)^2 < r^2\}$$

Tramite la nozione di intorni, si possono estendere a $\mathbb{R}^n$ la nozione di:

- frontiera di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- insieme aperto/chiuso $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- insieme limitato $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- punto di accomulazione/isolato di $A \subseteq \mathbb{R}^n$

Pertanto:

Definizione 1.3.2 *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e sia $p_0 \in \mathbb{R}^n$ punto di accomulazione di A. Allora si dice che:*

$$\exists \lim_{p \to p_0} f(p) = L \in \mathbb{R}$$

se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(p, \varepsilon) > 0 \ t.c. \ |f(p) - L| < \varepsilon, \forall p \in B(p_0, \delta) \cap (A \setminus \{p_0\})$$

In modo simile si può introdurre la nozione di continuità per funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

1.3.2 Calcolo differenziale per funzioni a più variabili

Derivate parziali

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto, $p_0 = (x_0, y_0) \in A$, essendo A aperto, $\exists \delta_0 > 0$ t.c.

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta] \subset A$$

In particolare i segmenti:

- $(x, y_0) \in A \; \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$
- $(x_0, y) \in A \; \forall y \in [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$

Pertanto son ben definiti i rapporti incrementali

- $((x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\}) \ni x \to \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$
- $((y_d0 - \delta_0, y_0 + \delta_0) \setminus \{y_0\}) \ni y \to \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$

Definizione 1.3.3 *1. Si dice che f è derivabile(parzialmente) rispetto alla variabile x nel punto $p_0 = (x_0, y_0)$ se*

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} := \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$$

2. Si dice che f è derivabile(parzialmente) rispetto alla variabile y nel punto $p_0 = (x_0, y_0)$ se

$$\exists \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} := \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = D_2 f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$$

3. Se f è derivabile (parzialmente) sia rispetto ad x ed y nel punto $p_0 = (x_0, y_0)$, si chiama (vettore)gradiente di f in p_0 il vettore:

$$\nabla f(p_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \right) \in \mathbb{R}^2$$

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A insieme aperto. Supponiamo che:

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \to \mathbb{R}$$

allora è ben definito il campo dei vettori gradiente:

$$\nabla f : \mathbb{R}^2 \supseteq A \ni p \to \nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p) \right) \in \mathbb{R}^2$$

Applicazione: Sia $V : A \to \mathbb{R}$ il potenziale di una carica elettrica in un insieme A del piano. Allora vale la realzione $\nabla V = \underline{E}$, dove $\underline{E} := (E_1(x,y), E_2(x,y)) \to$ vettore campo elettrico.

Problema: $\exists \nabla f(p_0)$ è la nozione corretta di derivabilità per funzioni di due variabili? Per esempio se $\exists \nabla f(p_0) \Rightarrow$ f è continua in p_0?

Esempio 4 *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p_0 = (0,0)$ e*

$$f(x,y) := \begin{cases} 0 & se\ (x,y) = (0,0) \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & se\ (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Abbiamo visto che: $\nexists \lim_{p\to p_0} f(p) \Rightarrow f$ non è continua in p_0.
D'altra parte:

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$$

se $x \neq 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

$$\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0$$

se $y \neq 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
Pertanto $\exists \nabla f(0,0) = (0,0)$ ma f non è continua nel punto (0,0).

1.3.3 Piano tangente al grafico

Approssimazione lineare e nozione di differenziabilità per funzioni di più variabili.

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $z = f(x,y)$.

Problema: Definire il "piano tangente" alla "superficie" G_f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ se esiste.
Ricordiamo che l'equazione di un piano π di $\mathbb{R}^3$, non parallelo all'asse z, passante per il punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è del tipo

$$\pi : z = a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$.
Ricordiamo inoltre che per funzioni di $n = 1$ variabile, se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, la retta tangente r a G_f nel punto $(x_0, f(x_0))$ ha equazione:

$$r : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

ed è caratterizzata dalla proprietà di essere l'unica retta del fascio di rette $y = m(x - x_0) + f(x_0)$, $m \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\text{(D)}\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - [m(x - x_0) + f(x_0)]}{|x - x_0|} = 0$$

(miglior approssimazione lineare al primo ordine) Infatti: $n = 1$, $L(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$ sono le applicazioni lineari di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$

Esercizio 4 $\exists f'(x_0) \in \mathbb{R} \iff \exists m \in \mathbb{R}$ *t.c. vale (D), inoltre* $m = f'(x_0)$.
Sugg: Utilizzare (D) nel caso di funzioni di due variabili per definire il paino tangente.
Più precisamente, data $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *con A aperto, sia* $p_0 = (x_0, y_0) \in A$. *Suppponimao che esistono* $a, b \in \mathbb{R}$ *t.c.*

$$\text{(D)}\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x) - [a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0)]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

Allora se vale (D:)

Definizione 1.3.4 1. *il piano* $\pi : z = a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0, y_0)$ *si dice piano tangente al grafico* G_f *nel punto* $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

2. *f si dice differenziabile nel punto* $p_0 = (x_0, y_0)$ *proveremo che:*

   (a) *Se f è differenziabile in* $p_0 \in A \Rightarrow f$ *è continua*

   (b) *Se f è differenziale in* $p_0 \in A$, *allora*

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \exists \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$$

Esercizio 5 $!\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 0$? *NO.*

1.4 Lez - 04

Piano tangente al grafico G_f in un punto $(x_0, y_o, f(x_0, y_0))$, per una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è un piano π di equazione $z = a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0, y_0)$ dove $p_0 = (x_0, y_0) \in A$, verificante la seguente equazione:

$$(\mathrm{D})\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x) - [a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0)]}{d(p, p_0)}$$

dove $d(p, p_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

Definizione 1.4.1 *Dato $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e dato $p_0 = (x_0, y_0) \in A$, la funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si dice <u>differenziabile</u> nel punto p_0 se vale (D), per $a, b \in \mathbb{R}$ opportuni.*

Proposizione 1.4.1 *Se f è differenziabile nel punto $p_0 = (x_0, y_0)$, allora*

$$\exists \nabla f(p_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \right)$$

e

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0), b = \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$$

Dim. 4 *Supponiamo che f sia differenziabile in p_0, cioè che valga (D). Ponendo nella (D), $y = y_0$ otteniamo che:*

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0)\, [a(x - x_0) + f(x_0, y_0)]}{|x - x_0|} = 0$$

$$\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) = a$$

procediamo allo stesso modo, ponendo $x = x_0$ nella (D) e otteniamo $\frac{\partial f}{\partial y}(p_0) = b$

Definizione 1.4.2 *L'applcazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,*

$$L(x, y) := \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)y$$

si chima <u>differenziale</u> di f in p_0, si denota con:

$$L = df(p_0) := \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)dy$$

Definizione 1.4.3 (Piano tangente) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto con f differenziabile in p_0. Si chiama <u>piano tangente</u> al grafico G_f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ il piano π di equazione:*

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

Teorema 1.4.1 *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto, f differenziabile in $p_0 \in A$, allora f è continua in p_0*

Dim. 5

$$f(p) - f(p_0) = \frac{f(p) - f(p_0) - df(p_0)(p - p_0)}{d(p, p_0)} \cdot d(p, p_0) + df(p_0)(p - p_0) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)(y - y_0)$$

Il tutto tende a 0 per $p \to p_0$.

$$\Rightarrow \exists \lim_{p \to p_0} (f(p) - f(p_0)) = 0$$

1.4.1 Differenziabilità in $n \geq 3$

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, $p_0 \in A$, $p = (x_1, ..., x_n)$, $p_0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ possiamo definire

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(p_0 + he_i) - f(p_0)}{h}$$

dove $i = 1, ..., n$, $e_i, ..., e_n$ denota la base canonica di $\mathbb{R}^n$, cioè $e_i = (0, 0, ..., 0, 1_{\text{i-esimo elemento}}, 0, 0, ..., 0)$
Diremo che

$$\exists \nabla f(p_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_0) \right)$$

gradiente di f in p_0, se $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)$, $\forall i = 1, ..., n$

Definizione 1.4.4 *f si dice differenziabile in un punto $p_0 \in A$ se esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ t.c.*

$$(D) \exists \lim_{p \to p_0} \frac{f(p) - f(p_0) - L(p - p_0)}{d(p.p_0)} = 0$$

L'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ per cui valga (D) si denota con $L = df(p_0)$

Proposizione 1.4.2 (11.4) *Se f è differenziabile nel punto p_0 allora*

i $\exists \nabla df(p_0)$

ii

$$df(p_0)(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) v_i := \nabla f(p_0) \cdot v$$

se $v = (v_1, ..., v_n)$

Osservazione 1.4.2 *Se $v = e_i$, $\nabla f(p_0) \cdot e_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)$*

Notazione 1.4.3 $df(p_0) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) dx_i$

Osservazione 1.4.4 *Dalla definizione di differenziabilità nel caso* $n = 1$, *segue che, se* $A = (a, b)$, $x_0 \in A$, *allora* ***Esercizio 1.5, foglio 2:***

$$\exists f'(x_0) \iff f \text{ è differenziabile in } x_0$$

Esercizio 6 (1b, foglio 2) *Calcolare se esiste*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 - e^{xy^2}}{\sqrt{x^4 + y^4}}$$

Dim. 6 *Ricordiamo che (1)* $\exists \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$.
Utilizzando il precedente limite possiamo eseguire il seguente bilanciamento:

$$\frac{1 - e^{xy^2}}{xy^2} \cdot \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^4}}$$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, *con* $xy^2 \neq 0$. *Osserviamo che:*

(2)

$$\frac{1 - e^{xy^2}}{\sqrt{x^4 + y^4}} = 0$$

Se $xy^2 \neq 0$ *e* $(x, y) \neq (0, 0)$

(3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-e^{xy^2}}{xy^2} = 1$.
Rimane da calcolare, se esiste:

(4) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^4}}$

è molto utile, per studiare limite del tipo (4) fare un cambiamento di variabili ed utilizzare le coordinate polari:

Coordinate polari

Consideraimo il seguente cambiameto di variabili $\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}$ *con* $\rho > 0$ *e* $0 \leq \vartheta \leq \pi$, *quindi:*

$$\frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^4}} \to \frac{\rho \cdot \cos \vartheta \cdot \rho^2 \sin^2 \vartheta}{\sqrt{\rho^4 \left(\cos^4 \vartheta + \sin^4 \vartheta\right)}} = \rho \cdot \frac{\cos \vartheta \cdot \sin^2 \vartheta}{\sqrt{\left(\cos^4 \vartheta + \sin^4 \vartheta\right)}}$$

Dalla (2) sappiamo che se $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-e^{xy^2}}{\sqrt{x^4+y^4}} = L \Rightarrow L = 0$.
<u>*Idea*</u>*: Utilizzare la funzione in coordinate polari, per cercare di provare tramite il teorema del confronto che (5)* $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^4}}$.

Le coordinate polari risulatano molto utili per trovare delle stime per applicare il teorema del confronto:

$$\text{(6) } 0 \leq |\frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^4}}| = |\rho \cdot \frac{\cos\vartheta \cdot \sin^2\vartheta}{\sqrt{\left(\cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta\right)}}| \leq$$

$$\leq \rho \cdot \frac{|\cos\vartheta \cdot \sin^2\vartheta|}{\sqrt{\left(\cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta\right)}} \leq \frac{\rho \cdot 1}{\sqrt{\cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta}}$$

Esercizio 7 $\cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta \geq \frac{1}{2}$, $\forall\vartheta \in [0, 2\pi]$

Pertanto da (6) segue che

$$\begin{cases} \vartheta > 0 & \forall\vartheta \in (0, 2\pi) \\ \\ \frac{1}{\vartheta} > 0 & \vartheta \to 0^+ \end{cases}$$

$$0 \leq |\frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^4}}| \leq \sqrt{2} \cdot \rho = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}$$

$\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ *se* $(x, y) \to (0, 0)$ *Dunque vale (5) e possiamo concludere che*

$$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 - e^{xy^2}}{\sqrt{x^4+y^4}} = 0$$

$$f(x, y) = \frac{1 - e^{xy^2}}{\sqrt{x^4+y^4}}$$

se $(x, y) \neq (0, 0)$,

- $!\exists \lim_{x\to 0} f(x, 0) = 0$
- $!\exists \lim_{y\to 0} f(0, y) = 0$

$\Rightarrow \exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = L \Rightarrow L = 0$

***Dim. 7* (1.5, foglio 2)** $(\Rightarrow)\exists f'(p_0) \Rightarrow f$ *è differenziabile in* x_0.
Ricordiamo che per definizione

$$\exists f'(x_0) \in \mathbb{R} \iff (1)\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

N.B.: $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to x_0}|f(x)| = 0$

Esercizio 8

$$(1) \iff (2)\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$$

Osserviamo che per definizione f è differenziabile in $x_0 \iff$ *vale (2).*
Mostriamo l'implicazione $(\Leftarrow)$*, Supponiamo che valga (2).*

Esercizio 9

$$(2) \iff (3) \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

È chiaro che

$$(3) \iff \exists \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0 \iff$$

$$\iff \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \overset{def}{\iff} \exists f'(x_0)$$

1.5 Lez - 05

1.5.1 Condizioni sulle derivate parziali che assicurino la diffrenenziablità

Osservazione 1.5.1 *La derivabilità parziale non è sufficiente ad assicurare la diffrenenziablità*

Problema: Data $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto e supponiamo che $\exists \nabla f(p_0)$ con $p_0 \in A$. Quale proprietà ulteriore bisogna aggiungere per ottenere la diffrenenziablità di f in p_0?

Teorema 1.5.2 (del differenziale totale) *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $p_0 \in A$. Supponiamo che*

(i)

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \to \mathbb{R}$$

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ *siano continue nel punto p_0, cioè*

$$\exists \lim_{p \to p_0} \frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) \, e \lim_{p \to p_0} \frac{\partial f}{\partial y}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$$

Allora f è differenzibile nel punto p_0. [BDPG, 11.5]

Osservazione 1.5.3 *È sufficiente richiedre la (i) e (ii) in un intorno di p_0*

Il teorema del differenziale totale giustifica la seguente definizione:

Definizione 1.5.1 *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

(i) f si dice differenziabile su A se è diff su ogni punto di A.

(ii) f si dice di classe C^1 su A se f è continua e

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \to \mathbb{R} \text{ continui}$$

In questo caso scriveremo che $f \in C^1(A)$

Dal teorema del differenziale totale segue anche:

Corollario 1.5.1 *Sia $f \in C^1(A)$ allora f è differenziabile su ogni punto di $p_0 \in A$*

1.5.2 Derivate direzionali

Norma di un vettore di $\mathbb{R}^n$

Sia $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, si chiama norma di v, e si denota

$$\|v\| := \sqrt{v_1^2 + ... + v_n^2} = d(v, \underline{O}) = \sqrt{v \cdot v}$$

Esempio 5 *1.* $n = 1$, $\|v\| = |v|$ *se* $v \in \mathbb{R}$

2. $n = 2$. *(immaginarsi il piano cartesiano)*

Osservazione 1.5.4 *Se* $p, q \in \mathbb{R}^n \Rightarrow d(p, q) = \|p - q\|$

Esercizio 10 (6,foglio 1) *1.* $\|v\| = 0 \iff v = \underline{O} = (0, ..., 0)$

2. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $\lambda v = (\lambda v_1, ..., \lambda v_n)$ *con* $v = (v_1, ..., v_n)$*, allora* $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$

3. Disuguaglianza triangolare: Se $v, w \in \mathbb{R}^n$*,* $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Definizione 1.5.2 *Un vettore* $v \in \mathbb{R}^n$ *si dice direzione (vettore unitario, versore) se* $\|v\| = 1$

Esempio 6 $n = 2$*, i vettori* $e_1 = (1, 0)$ *ed* $e_2 = (0, 1)$ *sono direzioni di* $\mathbb{R}^2$

Sia $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ una direzione, e $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto e $p_0 = (x_0, y_0) \in A$, allora $\exists \delta > 0$ t.c.

$$p_0 + hv = (x_0 + hv_1, y_0 + hv_2) \in A$$

se $|h| \leq \delta$, pertanto è ben definita:

$$(-\delta, \delta) \setminus \{0\} \ni h \to \frac{f(p_0 + hv) - f(p_0)}{h}$$

Definizione 1.5.3 *Si dice che f è derivabile (parzialmente) rispetto alla direzione v nel punto* p_0 *se*

$$\exists \frac{\partial f}{\partial v}(p_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(p_0 + hv) - f(p_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

Notazione 1.5.5 *Talvolta* $\frac{\partial f}{\partial v}(p_0) = D_v f(p_0)$

Osservazione 1.5.6 *(i) Sia* $F : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$*, (funzione di* $n = 1$ *variabile)*

$$F(t) := f(p_0 + tv) \;\; \textit{se } t \in (-\delta, \delta)$$

Allora è immediato verificare che

$$\exists \frac{\partial f}{\partial v}(p_0) \iff \exists F'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{F'(h) - F(0)}{h}$$

ed in questo case, $\frac{\partial f}{\partial v}(p_0) = F'(0)$

(ii) È immediato verificare che se $v = e_1$ o $v = e_2$, allora

$$\frac{\partial f}{\partial e_1}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial e_2}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$$

1.5.3 Teo: Diff. vs. Deriv. direz.

Teorema 1.5.7 (diffrenenziablità vs derivabiliità direzionale) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto e sia fissato $p_0 = (x_0, y_0) \in A$. Supponiamo che f sia differenziale in p_0, allora*

$$\exists \frac{\partial f}{\partial v}(p_0) = df(p_0)(v) = \nabla f(p_0) \cdot (v) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)(v_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)(v_2)$$

per ogni direzione $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$

Dim. 8 *Consideriamo la funzione $F : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$,*

$$F(t) = f(p_0 + tv) = f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)$$

Per ipotesi, f è differenziabile in p_0, cioè vale:

$$(D) \exists \lim_{p \to p_0} \frac{f(p) - f(p_0) - \nabla f(p_0) \cdot (p - p_0)}{d(p, p_0)} = 0$$

la condizione (D) è equivalente a chiedere:

$$(D*) f(p) = f(p_0) + \nabla f(p_0) \cdot (p - p_0) + o\,(d(p, p_0)) \; \forall p \in A$$

dove con $o\,(d(p, p_0)) \overset{def.}{\iff} \exists \lim_{p \to p_0} \frac{o(d(p,p_0))}{d(p,p_0)} = 0$ Scegliendo $p = p_0 + hv$ in (D), otteniamo che:*

$$F(h) := f(p_0 + hv) - f(p_0) + \nabla f(p_0) \cdot (hv) + o(d(p_0 + hv, p_0)) =$$

$$= F(0) + h\,(\nabla f(p_0) \cdot v) + o(|h|)$$

Infatti ricordiamo che:

$$d(p_0 + hv, p_0) = \|p_0 + hv - p_0\| = \|hv\| = |h|\,\|v\| = |h|$$

Dall'identità precedente segue che:

$$\exists F'(0) := \lim_{h \to 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \nabla f(p_0) \cdot v = df(p_0)(v)$$

Per l'osservazione precedente $F'(0) = \frac{\partial f}{\partial v}(p_0)$ da cui segue la tesi.

Dal teorema segue la generalizzazione del teorema del valore medio (G. Lagrange) a funzioni $n = 2$ variabili.

1.5.4 Teorema del valore medio

Teorema 1.5.8 (TdVM, n=1) *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continua e derivabile in* (a,b). *Allora* $\exists c \in (a,b)$ *t.c.*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Teorema 1.5.9 (del valore medio, n=2) *Sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*,* A *aperto. Supponiamo che:*

(i) $\exists p, q \in A$ *t.c.* $[p,q] := \{tq + (1-t)p \mid t \in [0,1]\} \subset A$

(ii) f *è continua sull'insieme* $[p,q]$ *e differenziabile su* $(p,q) := \{tq + (1-t)p \mid t \in (0,1)\}$

Allora esiste un punto $\bar{c} \in (p,q)$ *t.c.* $f(q) - f(p) = \nabla f(\bar{c}) \cdot (q-p)$

Dim. 9 *Supponiamo* $p \neq q$ *altrimenti la tesi è banale e sia*

$$v := \frac{q-p}{\|q-p\|}$$

una direzione di $\mathbb{R}^2$.
Definiamo la funzione (d n=1 variabile) $F(t) := f(p+tv)$ *con* $t \in [0, \|q-p\|]$ $(\subset \mathbb{R})$ *e fissiamo* p, q*, osserviamo che* F *è ben definita per la (i) e* $F(0) = f(p)$ *e* $F(\|q-p\|) = f(q)$*. Inoltre per la (ii):*

1. $F : [0, \|q-p\|] \to \mathbb{R}$ *è continua;*
2. $\exists F'(t) = \frac{\partial f}{\partial v}(p+tv)$, $\forall t \in (0, \|q-p\|)$

Possimao applicare il teorema del valore medio (n=1 variabile) a F e otteniamo che esiste $\bar{t} \in (0, \|q-p\|)$ *t.c.*

$$f(q) - f(p) = F(\|q-p\|) - F(0) = F(\bar{t})\,\|q-p\| =$$

$$=_{(2)} \frac{\partial f}{\partial v}(p+\bar{t}v)\,\|q-p\| = (\nabla f(p+\bar{t}v)\cdot v)\,\|q-p\| =$$

$$= \left(\nabla f(p+\bar{t}v)\cdot \frac{q-p}{\|q-p\|}\right)\cdot \frac{q-p}{\|q-p\|} = \nabla f(p+\bar{t}v)(q-p)$$

Scegliendo $\bar{c} = p + \bar{t}v \in (p,q)$ *otteniamo la tesi*

Corollario 1.5.2 *Sia* $f : B(p_0, r_0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*. Supponiamo che* $\exists \nabla f(p_0) = (0,0)\, \forall p \in B(p_0, r_0)$*. Allora* $f(p) = f(p_0)$*,* $\forall p \in B(p_0, r_0)$

Dim. 10 *per il teorema del diff. tot.* f *è differenziale su* $B(p_0, r_0)$*. Possimao applicare il teorema del valore medio e otteniamo che* $\exists \bar{c} \in (p, p_0)$ *t.c.* $f(p) - f(p_0) = \nabla f(\bar{c})(p - p_0) = 0$, $\forall p \in B(p_0, r_0)$

1.6 Lez - 06

1.6.1 Derivate parziali di una f composta di più variabili

Problema: Vogliamo determinare una formula generale che ci consente di calcolare le derivate parziali di una (generica) funzione composta di più variabili.

Esercizio 11 (7, foglio 3) *Consideriamo la funzione composta* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita come* $h := f \circ g$, *dove* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$*:*

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

se $(x,y) \neq (0,0)$ *e*
$g(t) = (g_1(t), g_2(t)) = (\sin^2(t), \cos^2(t))$, $t \in \mathbb{R}$ *Calcolare* $h'(t)$, $t \in \mathbb{R}$

Richiami della RDC

Siano $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ con $g(J) \subseteq I$, I, J intervalli aperti di $\mathbb{R}$.
$h := f \circ g$, $h(x) := f(g(x))$, $x \in I$

Proposizione 1.6.1 (Regola della catena, RDC) *Se* f, g *sono derivabli, rispettivamente, in* $g(x_0)$ *e in* x_0, *allora* $\exists h'(x) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

Esempio 7 $f(y) = \sin y$, $g(x) = x^2$, $h = f \circ g$, $h(x) = \sin x^2$, $\exists h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \cos x^2 \cdot 2x$

Prima di arrivare alla formula generale di derivazione di una funzione composta, introduciamo alcuni casi particolari

1.6.2 I caso particolare

Consideriamo $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, I intervallo aperto di $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ fissato.

$$I \ni t \to g(t) = (g_1(t), g_2(t)) = (x(t), y(t))$$

con $g_1, g_2 : I \to \mathbb{R}$.
Supponiamo che $\exists g_1'(t_0), g_2'(t_0)$ e $g(I) \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^2$, A aperto.
Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e supponiamo che f sia differenziabile in

$$p_0 = (x_0, y_0) = g(t_0) = (g_1(t_0), g_2(t_0))$$

Consideriamo la funzione composta $h : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h := f \circ g$

$$I \ni t \to h(t) := (f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(g_1(t), g_2(t))$$

Teorema 1.6.1

$$(1)\, \exists h'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) \cdot g_1'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \cdot g_2'(t_0)$$

oppure tramite matrici

$$(1bis)\, \exists h'(t_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cg_1'(t_0) \\ g_2'(t_0) \end{bmatrix} =$$

$= \nabla f(p_0) \cdot g'(t_0)$, *dove* $g'(t_0) = (g_1'(t_0), g_2(t_0))$.

Espansione calssica di RDC, Leibniz

Se scriviamo g e f, in termini di "variabili dipendenti", cioè

$$g = \begin{cases} x = x(t) = g_1(t) \\ y = y(t) = g_2(t) \end{cases} \quad \text{(curva del piano)}$$

$z = z(x, y) = f(x, y)$, allora componendo f con g, la variabile dipendente z dipenderà dalla sola variabile indipendente t per cui, $z = z(t) = z(x(t), y(t))$, $t \in I$.
Quindi in termini di queste variabili (z, x, y, t) si può scrivere la (1) come:

$$\frac{dz)}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

oppure utilizzando (1bis)

$$\frac{dz}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix}$$

***Dim.* 11 (Idea!)** *Proviamo la (1), cioè provare che*

$$(2)\, \exists h'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = \nabla f(p_0) \cdot g'(t_0)$$

Essendo f differenziabile in p_0 *vale che:*

$$(3)\, f(p) = f(p_0) + df(p_0) \cdot (p - p_0) + o(\|p - p_0\|)$$

$\forall p \in A$ *se* $p_0 = g(t_0)$.
Da (3) segue che, se scegliamo $p = g(t)$ *otteniamo:*

$$f(g(t)) = f(g(t_0)) + df(g(t_0)) \cdot (g(t) - g(t_0)) + o(\|g(t) - g(t_0)\|)$$

$\forall t \in I$, *da cui:*

$$(4)\, \frac{f(g(t)) - f(g(t_0))}{t - t_0} = \frac{df(g(t_0)) \cdot (g(t) - g(t_0))}{t - t_0} + \frac{o(\|g(t) - g(t_0)\|)}{t - t_0}$$

$t \in I, t \neq t_0$.
Osserviamo che essendo $df(p_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lineare allora:

$$(5)\ \frac{df(p_0)(g(t)-g(t_0))}{t-t_0} = df(p_0)\cdot\left(\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}\right)$$

Passando al limite nella (5) per $t \to t_0$, dalla continuità della funzione $df(p_0)$, si ottiene che:

$$\lim_{t\to t_0} df(p_0)\left(\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}\right) = df(p_0)\cdot g'(t_0)$$

$$(6)\ \exists \lim_{t\to t_0} \frac{df(p_0)(g(t)-g(t_0))}{t-t_0} = df(p_0)\cdot g'(t_0) = \nabla f(p_0)\cdot g'(t_0)$$

Si può provare anche (ed è il punto delicato che omettiamo)

$$(7)\ \exists \lim_{t\to t_0} \frac{o(\|g(t)-g(t_0)\|)}{t-t_0} = 0$$

Da (6) e (7), possiamo passare al limite per $t \to t_0$ nella (4) ed otteniamo la (2) e dunque la tesi.

1.6.3 II caso particolare

$g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, A aperto, e $p_0 = (s_0, t_0) \in A$

$$A \ni (s,t) \to g(s,t) = (g_1(s,t), g_2(s,t))$$

$g_1, g_2 : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Supponiamo che g_1 e g_2 siano differenziabili in p_0 e $g(A) \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, B aperto.
In particolare:

$$\exists \nabla g_i(p_0) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial s}(p_0), \frac{\partial g_i}{\partial t}(p_0)\right)\ i = 1,2$$

Sia $f : B \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, B aperto, f differenziabile in $q_0 = (x_0, y_0) = (g_1(p_0), g_2(p_0))$,
$B \ni (x,y) \to f(x,y) \in \mathbb{R}$.
Supponiamo che f sia differenziabile in q_0.
Consideriamo $h := f \circ g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$A \ni (s,t) \to (f\circ g)(s,t) = f(g(s,t)) = f(g_1(s,t), g_2(s,t))$$

Teorema 1.6.2

$$(1)\ \begin{array}{l} \exists \frac{\partial h}{\partial s}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(p_0))\cdot\frac{\partial g_1}{\partial s}(p_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(p_0))\cdot\frac{\partial g_2}{\partial s}(p_0) \\ \exists \frac{\partial h}{\partial t}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(p_0))\cdot\frac{\partial g_1}{\partial t}(p_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(p_0))\cdot\frac{\partial g_2}{\partial t}(p_0) \end{array}$$

in termini di matrici:

$$(1bis)\ \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial s}(p_0) & \frac{\partial h}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(g(p_0)) & \frac{\partial f}{\partial y}(g(p_0)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial s}(p_0) & \frac{\partial g_1}{\partial t}(p_0) \\ \\ \frac{\partial g_2}{\partial s}(p_0) & \frac{\partial g_2}{\partial t}(p_0) \end{bmatrix}$$

Dove $\frac{\partial g_1}{\partial s}(p_0), \frac{\partial g_1}{\partial t}(p_0) = \nabla g_1(p_0)$ e $\frac{\partial g_2}{\partial s}(p_0), \frac{\partial g_2}{\partial t}(p_0) = \nabla g_2(p_0)$

Esercizio 12 *Utilizzare (1bis) del teorma nel secondo caso e svolgere esercizio 7 foglio 3*

1.6.4 Caso generale di RDC

Vogliamo ora trattare il caso generale della formuala di derivazione per funzioni composte di più variabili.

Matrice Jacobiana

Definizione 1.6.1 (Matrice Jacobiana) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A aperto,*

$$A \ni x = (x_1, ..., x_n) \to f(x) = (f(x_1), ..., f(x_n))$$

con $f_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$.
Supponiamo che dato $x_0 = (x_1^0, ..., x_n^0) \in A$,

$$\exists \nabla f_i(x_0) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right)$$

con $i = 1, ..., m$.

Si chiama <u>Matrice Jacobiana</u> di f nel punto x_0 la matrice $m \times n$

$$Df(x_0) = Jf(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix}$$

Osservazione 1.6.3 *(i) La nozione di matrice Jacobiana generalizza la nozione di vettore gradiente per una funzione (scalare) $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.*
Si noti che in questo caso la matrice Jacobiana $1 \times n$ è data da

$$Df_(x_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) \equiv \nabla f(x_0)$$

(ii) La riga i-esima della matrice Jacobiana $Df(x_0)$ coincide con $\nabla f_i(x_0)$

(iii) La (1bis) del precedente teorema, in termini di matrici Jacobiane può scriversi come

$$Dh(p_0) = Df(g(p_0)) \cdot Dg(p_0) \ \textit{(RDC)}$$

1.6.5 Teorema RDC

Teorema 1.6.4 (Regola della catena, RDC) *Siano* $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *e* $f : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, *$A$ e B aperti*

(i) $g(A) \subseteq B$

(ii) *Se* $g = (g_1, \dots, g_m)$, $f = (f_1, \dots, f_k)$

Supponiamo che $\begin{array}{l} g_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,(i = 1, \dots, m) \text{ sia diff. in un dato } x_0 \in A \\ f_i : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}\,(i = 1, \dots, k) \text{ sia diff. in un dato } y_0 = g(x_0) \end{array}$

Consideriamo ora la funzione $h := f \circ g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $h = (h_1, \dots, h_k)$
con $h_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
allora le funzioni $h_i : A \to \mathbb{R}(i = 1, \dots, k)$ *sono diff. in* x_0 *e*

$$Dh(x_0) = Df(g(x_0)) \cdot Dg(x_0)$$

1.7 Lez - 07

1.7.1 Derivate parziali di ordine superiore

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto. Supponiamo che $\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \to \mathbb{R}$ poniamo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &:= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &:= \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \text{Derivate parziali seconde pure}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &:= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &:= \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} \text{Derivate parziali seconde miste}$$

quando tutte le derivate parziali scritte esistono.

Osservazione 1.7.1 *In generale* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

1.7.2 Teo: Inversione dell'ordine di derivazione

Teorema 1.7.2 (sull'inversione dell'ordine di derivazione) *[BDPG, 11.11] Sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *A aperto,* $p_0 = (x_0, y_0) \in A$ *fissato. Supponiamo* $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : A \to \mathbb{R}$ *e siano continue in* p_0, *allora* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0)$

Il teorema precedente può estendersi al caso di funzioni $n \geq 2$ variabili.

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto. Supponimao che esiset $\frac{\partial f}{\partial x_i} : A \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$.
Se $\exists \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x_0)$ in un punto $x_0 \in A$ per $j = 1, \ldots, n$, diciamo che

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) := \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x_0)$$

Nel caso in cui $j = i \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x_0)$.
Con queste notazioni, vale la seguente generalizzazione del teorema sull'inversione dell'ordine di derivazione.

Teorema 1.7.3 *Sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *A aperto. Supponimao che per fissati* $i, j = 1, ..., n$, *con* $i \neq j$, $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : A \to \mathbb{R}$ *e siano continue in* x_0. *Allora:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$$

Definizione 1.7.1 *Sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *A aperto* *(a)* *f si dice di* *<u>classe</u>* $C^2(A)$ *e scriveremo* $f \in C^2(A)$ *se* $f \in C^0(A)$ *ed* $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i} : A \to \mathbb{R}$ *continua* $\forall i = 1, ..., n$, $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : A \to \mathbb{R}$ *continua* $\forall i, j = 1, ..., n$

(b) *f si dice di* *<u>classe</u>* $C^m(A)$ *e scriveremo* $f \in C^m(A), (m \geq 1)$ *se* $f \in C^0(A)$ *e* $\exists \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_k}} : A \to \mathbb{R}$ *continua* $\forall i_1, ..., i_k = 1, ..., n$ *e* $\forall 1 \leq k \leq n$

Osservazione 1.7.4 *Se* $f \in C^m(A)$, *con* $m \geq 2$ *per il teo sull'inversione dell'ordine di derivazione*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

$\forall x \in A$, $\forall i, j = 1, ..., n$

1.7.3 Taylor per funzioni di più variabili

Problema: Data $f : B(p_0, r) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funzione di classe $C^m(B(p_0, r))$, approssimare f con un polinomio di $n = 2$ variabili di ordine m, nel modo "migliore possibile"

Definizione 1.7.2 *Dato* $m \in \mathbb{N}$, $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *fissato, si chiama* *<u>polinomio di ordine m di n = 2 variabili, centrato in</u>* p_0, *una funzione* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *del tipo*

$$T(x, y) = \sum_{h=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} c_{i,h-i}(x - x_0)^i (y - y_0)^{h-i}$$

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *dove* $c_{i,h-i}$ *(i = 0,...,h e h = 0,..., m) sono* $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ *coeff. ass.*

Esempio 8 *(a) Se m = 0,* $T(x, y) = c_{0,0} \in \mathbb{R}\, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

(b) Se m = 1, $T(x, y) = c_{0,0} + c_{1,0}(x - x_0) + c_{0,1}(y - y_0)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

(c) Se m = 2, $T(x, y) = c_{0,0} + c_{1,0}(x - x_0) + c_{0,1}(y - y_0) + c_{2,0}(x - x_0)^2 + c_{1,1}(x - x_0)(y - y_0) + c_{0,2}(y - y_0)^2$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

Problema: Sia $f \in C^2(B(p_0, r))$, determinare se esiste un polinomio $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di ordine 2, centrato in p_0, t.c.

$$f(p) = T(p) + o\left(\|p - p_0\|^2\right)$$

$\forall p = (x, y) \in B(p_0, r)$

Notazione 1.7.5 *Se* $v, w \in \mathbb{R}^n$, $v \cdot w = \langle v, w \rangle$

Definizione 1.7.3 *Data* $f \in C^2(A)$, $A \in \mathbb{R}^2$ *aperto, si chiama,* *<u>matrice hessiana</u>* *di f in un punto* $p \in A$, *la matrice* 2×2

$$D^2 f(p) = H(f)(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

Osservazione 1.7.6 *per il teo. dell'inv. dell'ordine di derivazione* $D^2 f(p)$ *è* *<u>simmetrica</u>*

1.7.4 Taylor del II ordine + resto di Peano

Sia $f \in C^2\left(B(p_0, r)\right)$, $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$ fissato. Allora vale:

$$(FT_2)\, f(p) = T_2(p) + o\left(\|p - p_0\|^2\right)$$

$\forall p = (x, y) \in B(p_0, r)$, dove

$$T_2(p) := f(p_0) + \langle \nabla f(p_0), p - p_0 \rangle + \frac{1}{2}\left\langle D^2 f(p_0) \cdot (p - p_0), p - p_0 \right\rangle$$

se $p \in \mathbb{R}^2$.
(polinomio di taylor del II ordine di f, centrato in p_0)
Ricordiamo che con $o\left(\|p - p_0\|^2\right) \Rightarrow \exists \lim_{p \to p_0} \frac{o\left(\|p-p_0\|^2\right)}{\|p-p_0\|^2} = 0$

***Dim.* 12** *Fissiamo* $p \in B(p_0, r) \setminus \{p_0\}$ *e denotiamo* $v := \frac{p-p_0}{\|p-p_0\|} = (v_1, v_2)$, *(direzione* $p - p_0$*) e definiamo:* $F(t) := f(p_0 + tv)$, *con* $t \in (-r, r)$.
Poichè la funzione $g : (-r, r) \to B(p_0, r) \subseteq \mathbb{R}^2$, $g(t) = p_0 + tv := (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)$ *è una funzione di classe* $C^2\left((-r, r)\right)$, *come pure f, per RDC la funzione composta:* $F(t) = f(g(t))$, $t \in (-r, r)$, *è di classe* $C^2((-r, r))$. *Pertanto possiamo applicare la formula di Taylor del II ordine per una funzione di una variabile per* $t = 0$ *e otteniamo:*

$$(1)\, F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{1}{2}F''(0)t^2 + o(t^2) \ \text{ per } t \to 0$$

Calcoliamo $F(0), F'(0), F''(0)$. *Per RDC:*

- $$F'(t) = \langle \nabla f(p_0 + tv), v \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0 + tv)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0 + tv)v_2$$

- $$F''(t) = v_1 \cdot \left\langle \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(p_0 + tv), v \right\rangle + v_2 \cdot \left\langle \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(p_0 + tv), v \right\rangle =$$

$$= v_1\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0 + tv)v_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0 + tv)v_2\right) + v_2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0 + tv)v_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0 + tv)v_2\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0 + tv)v_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0 + tv)v_1 v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0 + tv)v_2^2$$

Pertanto

(2) $F(0) = f(p_0)$

(3) $F'(0) = \langle \nabla f(p_0), v \rangle$

(4) $F''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0 + tv)v_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0 + tv)v_1 v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0 + tv)v_2^2$

Osserviamo che $F''(0)$ *può essere riscritto mediante hessiana* $D^2f(p_0)$, *come* $(4bis)F''(0) = \langle D^2f(p_0)v, v\rangle$, *pertanto da (1), (2), (3), (4bis) otteniamo:*

$$f(p_0+tv) = F(t) = f(p_0)+\langle\nabla f(p_0), v\rangle\, t+\frac{1}{2}\left\langle D^2f(p_0)v, v\right\rangle t^2+o(t^2),\ \textit{per } t\to 0$$

Scegliendo $t = \|p - p_0\|$, *otteniamo la tesi.*

Osservazione 1.7.7 (BDPG,11.14) *Si può ottenere una formula di taylor con resto di Peano e Lagrange anche per funzioni* $f : B(p_0, r) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *di classe* $C^2(B(p_0, r))$ *con* $n \geq 3$.
Essa è molto più complicata perciò la omettiamo

Esercizio 13

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^2\sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \end{cases}$$

$\exists f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *ma f' non è continua nel punto* $x_0 = 0$

1.8 Lez - 08

1.8.1 Massimi e minimi per funzioni a più variabili

Problema: Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e data $f : A \to \mathbb{R}$, determinare, <u>se esistono</u>, i punti di max e min di f.

Definizione 1.8.1 *Data* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*:*

1. $p_0 \in A$ *si dice, punto di* <u>*massimo*</u> *(= max)* <u>*relativo*</u> *di* f *su* A *se* $\exists r_0 > 0$ *t.c.* $f(p) \leq f(p_0)\, \forall p \in A \cap B(p_0, r_0)$
   Rispettivamente $p_0 \in A$ *si dice, punto di* <u>*minimo*</u> *(= min)* <u>*relativo*</u> *di* f *su* A *se* $\exists r_0 > 0$ *t.c.* $f(p) \geq f(p_0)\, \forall p \in A \cap B(p_0, r_0)$

2. $p_0 \in A$ *si dice punto di* <u>*massimo*</u> *(= MAX)* <u>*assoluto*</u> *se* $\forall p \in A,\ f(p) \leq f(p_0)$
   Rispettivamente $p_0 \in A$ *si dice punto di* <u>*minimo*</u> *(= MIN)* <u>*assoluto*</u> *se* $\forall p \in A,\ f(p) \geq f(p_0)$

Osservazione 1.8.1 *Se* p_0 *è un punto di max (o min) assoluto* $\Rightarrow p_0$ *è punto di max (o min) relativo. Il viceversa non può valere.*

N.B.: 1.8.2 *Non confondere i punti di max e min di una funzione con il suo massimo e minimo.*

- $Min_A f := Minf(p) : p \in A \in \mathbb{R}$*, se esiste è unico*
- $Max_A f := Maxf(p) : p \in A \in \mathbb{R}$*, se esiste è unico*

Consideriamo il seguente esempio:

Esempio 9 $n = 1,\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\, f(x) =:= x(3 - x^2)$

In particolare si può vedere che i punti $x = \pm 1$ *sono rispettivamente max e min relativi, ma* $x = -1$ *non è minimo assoluto e* $x = +1$ *non è massimo assoluto.*
Infatti essendo la funzione non limitata ($\sup_{\mathbb{R}} f = +\infty$ *e* $\inf_{\mathbb{R}} f = -\infty$*) /* $\exists max_{\mathbb{R}} f$ *e* $min_{\mathbb{R}} f$

1.8.2 Estremi liberi di una funzione (min/max relativi)

Problema: Supponiamo che $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sia aperto e $f : A \to \mathbb{R}$, vogliamo determinare se esistono i punti di max e min relativo su A. Questi punti sono detti <u>estremi liberi</u> di f.

Lo strumento principale per la ricerda di estremi liberi è :

Teorema 1.8.3 (Fermat) *Sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, A aperto. Supponiamo che esista* $p_0 \in A$ *t.c.*

(i) f differenziabile in p_0. In particolare $\exists \nabla f(p_0)$

(ii) p_0 sia un estremo libero di f in A

Allora $\nabla f(p_0) = \underline{O}_{\mathbb{R}^n} = (0, ..., 0)$ (n-volte)

Il precedente teorema giustifica la seguente definizione:

Definizione 1.8.2 *Data $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, un punto $p_0 \in A$ si chiama punto stazionario(o critico) di f se f è differenziabile in p_0 e $\nabla f(p_0) = \underline{O}_{\mathbb{R}^n}$*

Dim. 13 *Per semplicità , $n = 2$, $p_0 = (x_0, y_0)$. Essendo A aperto esiste $\delta > 0$ t.c. $p_0 + te_1 \in A$ se $t \in (-\delta, \delta)$.*
Consideriamo $F : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$, $F(t) := f(p_0 + te_1)$, da (i)

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) \iff (1) \begin{cases} F \text{ è derivabile nel punto } t = 0 \\ \text{e } F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) \end{cases}$$

Dall'altra parte, da (ii) p_0 estremo libero di f (2) $t = 0$ è un estremo libero di F. Possiamo applicare il teorema di Fermat di una variabile ed otteniamo $F'(0) = 0 =_{(1)} \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)$.

Analogamente consideriamo $F(t) = f(p_0 + te_2)$ e si prova che $\frac{\partial f}{\partial y}(p_0) = 0$.
Pertanto si prova che $\nabla f(p_0) = (0, 0) = \underline{O}^2_{\mathbb{R}}$

Osservazione 1.8.4 *Non ogni punto stazionario di f è un punto di estremo libero.*

Esempio 10 *$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = y^3$, $p_0 = (x_0, 0)$.*
Poichè $\nabla f(x, y) = (0, 3y^2)$, $\nabla f(p_0) = (0, 0)$. Pertanto ogni punto $p_0 = (x_0, 0)$ (per un fissato $x_0 \in \mathbb{R}$) è un punto stazionario di f, ma p_0 non è un estremo libero, infatti $\forall r > 0$ $f(x_0, 0) = 0\, \forall x_0 \in \mathbb{R}$, quindi $p_0 = (x_0, 0)$ si dice punto di sella.

Definizione 1.8.3 *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto. Un punto $p_0 \in A$ si dice punto di sella se p_0 è un punto stazionario di f e $f(p) - f(p_0)$ amette sia valori positivi che negativi in ogni intorno di p_0*

1.8.3 Matrice Hessiana

Problema: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in C^2(A)$. Supponiamo che $p_0 \in A$ sia un punto stazionario di f.
Come determinare se p_0 sua un estremo libero o un punto di sella?

Definizione 1.8.4 *Sia $f \in C^2(A)$, si chiama, matrice hessiana di f nel punto $p_0 \in A$ la matrice simmetrica $(n \times n)$*

$$D^2 f(p_0) = Hf(p_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(p_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(p_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(p_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1}\right)(p_0) \\ \vdots \\ \nabla \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_n}\right)(p_0) \end{bmatrix}$$

1.8.4 Teorema: Criterio per il segno di una matrice

Richiami di algfebra lineare

Definizione 1.8.5 *Sia H una matrice $n \times n$*

(i) H si dice <u>*definita positiva*</u> *se* $\langle Hv, v\rangle > 0$, $\forall v \in \mathbb{R}^n \times \{\underline{O}\}$

(ii) H si dice <u>*semi-definita positiva*</u> *se* $\langle Hv, v\rangle \geq 0$, $\forall v \in \mathbb{R}^n \times \{\underline{O}\}$

(iii) H si dice <u>*definita negativa*</u> *se* $\langle Hv, v\rangle < 0$, $\forall v \in \mathbb{R}^n \times \{\underline{O}\}$

(iv) H si dice <u>*semi-definita negativa*</u> *se* $\langle Hv, v\rangle \leq 0$, $\forall v \in \mathbb{R}^n \times \{\underline{O}\}$

Un criterio semplice per verificare il segno di una matrice H $n \times n$:

Teorema 1.8.5 (criterio per il segno di una matrice) *Sia*

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{n1} & \dots & h_{nn} \end{bmatrix} \text{ una matrice } n \times n$$

Definiamo

$$D_i = det \begin{matrix} h_{11} & \dots & h_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{i1} & \dots & h_{ii} \end{matrix} \text{ con } 1 \leq i \leq n$$

Allora

(a) H è definita positiva $\iff D_i > 0 \, \forall i = 1, ..., n$

(b) H è definita negativa $\iff \begin{cases} D_i > 0 \text{ per i valori pari di } i \\ D_i < 0 \text{ per i valori dispari di } i \end{cases}$

(c) Se $detH = Dn \neq 0$ e nessuna delle condizioni precedenti fosse soddisfatta, allora H non è semi-definita positiva nè semi-definita negativa

Corollario 1.8.1 *Se H (2×2) matrice simmetrica* $H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$ *con* $h_{12} = h_{21}$

(a) H è definita positiva $\iff h_{11} > 0$ *e* $detH > 0$

(b) H è definita negativa $\iff h_{11} < 0$ *e* $detH > 0$

(c) Se $detH < 0$, allora H non è semi-def. pos. nè semi.def. neg.

Teorema 1.8.6 (BDPG,11.25) *Sia A aperto di $\mathbb{R}^n$, $f \in C^2(A)$ e sia $p_0 \in A$ un punto stazionario di f*

(i) Se $D^2 f(p_0)$ fosse def. pos. $\Rightarrow p_0$ è un punto di <u>*minimo relativo*</u> *di f su A*

(ii) *Se $D^2 f(p_0)$ fosse def. neg. $\Rightarrow p_0$ è un punto di massimo relativo di f su A*

(iii) *Se $D^2 f(p_0)$ non fosse semi-def. pos. nè semi-def. neg. $\Rightarrow p_0$ è un punto di sella di f su A*

(iv) *Se $D^2 f(p_0)$ fosse semi-def. pos. o semi-def. neg. $\Rightarrow p_0$ può essere un punto di massimo o minimo relativo o un punto di sella di f su A*

1.8.5 Esempi

Esempio 11 (1a,foglio 5) *Data $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + +2kxy + y^2$. Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$, i punti di max e min relativo di f.*

Soluzione 1. ***Punti stazionari di f su*** $\mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2ky = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2kx + 2y = 0 \end{cases}$$

- ***Esercizio 14*** *Se $k \neq 1 \Rightarrow (0,0)$ è l'unico punto stazionario*
- *Se $k = 1 \Rightarrow$ I punti della retta $x + y = 0$ sono tutti e soli i punti stazionari*
- *Se $k = -1 \Rightarrow$ I punti della retta $x - y = 0$ sono tutti e soli i punti stazionari*

Soluzione 2. ***Studio del segno della matrice Hessiana***

$$D^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} (x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 2k \\ 2k & 2 \end{bmatrix}$$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ *e* $det D^2 f(x,y) = 4 - 4k^2 = 4(1 - k^2)$

- ***Esercizio 15*** *Se $k^2 < 1 \Rightarrow D^2 f(0,0)$ è def. positiva $\Rightarrow$ (0,0) è un punto di minimo relativo*
- *Se $k = 1$, $det D^2 f(x_0, -x_0) = 0 \Rightarrow D^2 f(x_0, -x_0)$ non è def-neg. nè def-pos. $\Rightarrow$ nulla si può dire*
  * *Se $k = 1$, $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 \Rightarrow (x_0, -x_0)$ è un punto di minimo assoluto*
  * *Se $k = -1$, $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \Rightarrow (x_0, -x_0)$ è un punto di minimo assoluto*

Appendice:

1. Se f è differenziabile in p_0 e $\nabla f(p_0) = (0,0) \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial v}(p_0) = 0 \forall v \in \mathbb{R}^2$, $\|v\| = 1$.
   Infatti poichè $\frac{\partial f}{\partial v}(p_0) = \nabla f(p_0 = \underline{O}_{\mathbb{R}^2}) \cdot v = 0$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$, il punto di $x_0 = 0$ è un punto di minimo assoluto per f.

3. Se $k = 1$ i punti della retta di eq: $x + y = 0$ sono tutti e soli i punti stazionari di f.

4. $k = 1$, $f(x, y) = (x + y)^2 \geq 0 \, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x_0, -x_0) = 0$

1.9 Lez - 09

Problema: Condizioni che assicurino l'esistenza di $\min_A f$ e $\max_A f$ e come determinarli

Teorema 1.9.1 (Weirestrass) *[BDPG,10.10] Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, Supponiamo che:*

(i) A sia limitato e chiuso, (in $n = 1$, $A = [a, b], \partial A = \{a, b\}, \mathring{A} = (a, b)$)

(ii) f sia continua su A

Allora esiste $\min_A f$ *e* $\max_A f$

1.9.1 Ricerca del max e min (assoluto) su insieme limitato e chiuso

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato e chiuso e $f : A \to \mathbb{R}$. Allora per il Teorema di Weirestrass $\exists \min_A f = f(p_1)$ e $\exists \max_A f = f(p_2)$.
Vi sono le seguenti possibilità se $i = 1, 2$

(i) $p_i \in \mathring{A}$ e $\exists \nabla f(p_i) = (0, 0)$

(ii) $p_i \in \mathring{A}$ ma $\nexists \nabla f(p_i)$, diremo in questo caso che p_i è <u>punto singolare</u>

(iii) $\partial_i \in \partial A$

Problema: *[BDPG,13.2]* Ricerca dei punti di max e min nei punti della frontiera di A, dettoi anche estremi vincolati

- $max, min \in \mathring{A} \Rightarrow$ estremi liberi
- $max, min \in \partial A \Rightarrow$ estremi vincolati

Esempio 12 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $f(x, y) = x^2 + 2y^2$

- $\mathring{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$
- $\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
- $\nabla f(x, y) = (2x, 4y)$ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

*$f(p_2) = \exists max_A f$ e $f(p_1) = \exists min_A f$, $\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff x = y = 0$
$f(0, 0) = 0$ e $p_1 = (0, 0)$ è un punto di minimo assoluto di f.
È chiaro che $p_2 \in \partial A$ e dunque vale che $max_A f = max_{\partial A} f$
quindi ci poniamo il problema di come determinare $max_{\partial A} f$*

Osservazione 1.9.2 $\nabla f(x, y) = (2x, 4y) \neq (0, 0)$ $\forall (x, y) \in \partial A$

1.9.2 Frontiera attraverso parametrizzazione

Caso $n = 2$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato e chiuso.
Si chiama parametrizzazione di ∂A una funzione $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ (detta curva)

- (P1) $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$
- (P2) con $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ di classe C^1
- (P3) e $\gamma([a, b]) = \partial A$

Supponiamo che $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e vogliamo minimizzare/massimizzare f su ∂A
Definiamo $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, $F(t) = f(\gamma(t))$.
Si può provare tramite RDC che $F \in C^1([a, b])$. Inoltre è immediato verificare $min_{\partial A} f = min_{[a,b]} F$ e $max_{\partial A} f = max_{[a,b]} F$
Pertanto la ricerca di $min_{\partial A} f$ e $max_{\partial A} f$ si riduce a $min_{[a,b]} F$ e $max_{[a,b]} F$

Ritorniamo all'esempio 12:
Una parametrizzazione di $\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ è data da

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)\, t \in [0, 2\pi]\, \gamma([0, 2\pi]) = \partial A$$

$F(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + 2sin^2 t = 1 + sen^2(t)$, allora è facile verificare che

$$max_{[0,2\pi]} F = 2 = F\left(\frac{\pi}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}\pi\right)$$

Pertanto i punti di ∂A dove è raggiunto il massimo sono dati da:

$$\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1) \text{ e } \gamma\left(\frac{3}{2}\pi\right) = (0, -1)$$

Infatti $f(0, 1) = f(0, -1) = 2$

Caso $n = 3$

Sia $A \subseteq 3$ chiuso e limitato. Si chiama parametrizzazione di ∂A una funzione $\gamma : B \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$\gamma(s, t) = (\gamma_1(s, t), \gamma_2(s, t), \gamma_3(s, t))$$

Con $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : B \to \mathbb{R}$ t.c.

(P1) B chiuso e limitato

(P2) $\gamma(B) = \partial A$

(P3) $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in C^1(\mathring{B}) \cap C^0(B)$

∂A è detta superficie.

Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ si vuole determinare $max_{\partial A} f$ e $min_{\partial A} f$.
Definiamo $F : B \to \mathbb{R}$, $F(s,t) := f(\gamma(s,t))$ con $(s,t) \in B$, allora

$$min_{\partial A} f = min_B f \text{ e } max_{\partial A} f = max_B f$$

Osservazione 1.9.3 *Pertanto il $min_{\partial A} f$ e il $max_{\partial A} f$ (di una funzione di 3 variabili sul bordo di A) viene riportato al $min_B f$ e $max_B f$ (di una funzione di 2 variabili) su un insieme $B \subseteq \mathbb{R}^2$*

Esempio 13 *Sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, $f(x,y,z) = x + y - z$ Determinare $min_A f$ e $max_A f$.*

Soluzione:

1. ***Punti stazionari di*** $\mathring{A}$
   Osserviamo che $f \in C^\infty(\mathring{A})$.

   Esercizio 16 *Non ci sono punti stazionari in $\mathring{A}$*

   Dal'altra parte $f \in C^0(A)$ ed $A \subseteq \mathbb{R}^3$ è chiuso e limitato. Pertanto per il teorema di Weirestrass

   $$\exists min_A f = min_{\partial A} f \text{ e } max_A f = max_{\partial A} f$$

2. ***Max e min su*** ∂A
   $\partial A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $B = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \subseteq \mathbb{R}^2 \ni (\vartheta, \varphi)$

   $$\gamma(\vartheta, \varphi) = (\cos\vartheta \sin\varphi, \sin\vartheta \sin\varphi, \cos\varphi)$$

   γ è una parametrizzazione di ∂A (cambiamento di coordinate sferiche)
   $F(\vartheta, \varphi) := f(\gamma(\vartheta, \varphi)) = \cos\vartheta \sin\varphi + \sin\vartheta \sin\varphi - \cos\varphi = \sin\varphi \cdot (\cos\vartheta + \sin\vartheta) - \cos\varphi$

   Per proseguire nella nostra strategia dovremmo determinare $min_B F$ e $min_B F$ con $F : B = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}$.

   Ci rendiamo conto subito che questa ricerca non è semplice.

Osservazione 1.9.4 *In effetti il metodo di ricerca dei max e min di una funzione su un bordo dato come parametrizzazione, diventa complesso, e dunque inefficace per funzioni di variabili $n \geq 3$*

1.9.3 Metodo dei moltiplicatori di Lagrange, TML

Caso $n = 2$

Supponiamo che l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) \leq 0\}$ dove $\partial A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$.
Un insieme del piano $\mathsf{V} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ è detto <u>vincolo</u> (è una curva del piano)

Teorema 1.9.5 (Teorema dei moltiplicatori di Lagrange, TML) *Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e $\mathsf{V} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ dove $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Supponiamo che:*

(i) $\exists \min_{\mathsf{V}} f = f(p_0)$ *(o* $\exists \max_{\mathsf{V}} f = f(p_0)$*) con* $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathsf{V}$

(ii) $\exists \nabla g(p_0) \neq (0, 0)$

Allora esiste $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ (detto <u>moltiplicatore</u>) t.c. $(x_0, y_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^3$ è un punto stazionario della funzione.
Equivalentemente:

$$\exists \lambda_0 \in \mathbb{R} \ t.c. \begin{cases} g(p_0) = 0 \\ \\ \nabla f(p_0) + \lambda_0 \nabla g(p_0) = (0, 0) \end{cases} \qquad (*)$$

Definizione 1.9.1 *Un punto $p_0 \in \mathsf{V}$ verificante 7.2.3 (*) su opportuno $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ si dice **punto stazionario vincolato alla funzione** f **relativamente al vincolo** V*

Esempio 14 *Trovare $max_{\partial A} f$ se $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ e $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.*
Sia $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Allora:
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0\}$, $\nabla g(x, y) = (2x + 2y) \neq (0, 0)$ $\forall (x, y) \in \partial A$.
Pertanto possiamo applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange:
Sia $L(x, y, \lambda) := x^2 + 2y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$,

$$\nabla L(x, y, \lambda) = (0, 0, 0) \iff \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 0 \\ \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 4y + 2\lambda y = 0 \\ \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \iff$$

$\iff (x, y, \lambda) = (\pm 1, 0, -1), (0, \pm 1, -2),$

$$min_{\partial A} f = f(\pm 1, 0) = 1 \ e \ max_{\partial A} f = (0, \pm 1) = 2$$

Teorema della funzione implicita, U. Dini

Prima della dimostrazione del metodo dei moltiplicatori di Lagrange, premettiamo il seguente teorema:

Teorema 1.9.6 (della funzione implicita, U. Dini) *[BDPG, 13.3] Supponiamo che, per esempio,* $g(p_0) = 0$ *e* $\frac{\partial g}{\partial y}(p_0) \neq 0$.
Allora V *è localmente grafico di una funzione* $y = \varphi(x)$, *cioè* $\exists \delta_0 > 0$ *ed è un'unica funzione* $\varphi : (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \to \mathbb{R}$, $\exists r_0 > 0$ *t.c.*

(D_1) $\mathsf{V} \cap B(p_0, r_0) = \{(x, \varphi(x)) : x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)\}$ *e* $\varphi(x_0) = y_0$

(D_2) φ *è derivabile e*

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

$\forall x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$

***Dim.* 14 (TML, 7.2.3)** *Supponiamo per esempio che* $\frac{\partial g}{\partial y}(p_0) \neq 0$.
Possiamo applicare il teorema della funzione implicita 1.9.6: per D_1, *possiamo definire* $h(x) := f(x, \varphi(x))$ $x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$
Essendo $p_0 \in \mathsf{V}$ *un punto di minimo (da ipotesi) di* f *su* $\mathsf{V} \Rightarrow (1) x_0$ *è un punto di minimo di* h *si* $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$.
D'altra parte, per RDC, $h \in C^1\left((x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)\right)$.
Per il teorema di Fermat, per funzioni di 1 variabile,

$$0 = h'(x_0) =_{(RDC)} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \varphi(x_0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0) =$$

$$=_{(D_2)} \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \cdot \left(-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x))} \right) \iff$$

$$\iff det \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \\ \\ \frac{\partial g}{\partial x}(p_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(p_0) \end{bmatrix} = 0 \iff \exists \lambda_0 \in R \ t.c. \ \nabla f(p_0) = -\lambda_0 \nabla g(p_0)$$

Caso $n = 3$

Il teorema dei moltiplicatori di Lagrange su può estendere a funzioni di $n = 3$ variabili

Teorema 1.9.7 (TML con $n = 3$**)** *Sia* $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ *e* $\mathsf{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$ *dove* $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$. *Supponiamo che:*

(i) $\exists \min_{\mathsf{V}} f = f(p_0) (o\ \exists \max_{\mathsf{V}} f = f(p_0))$ *con* $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathsf{V}$

(ii) $\exists \nabla g(p_0) \neq (0, 0, 0)$

Allora

$$\exists \lambda_0 \in \mathbb{R} \ t.c. \ \begin{cases} g(p_0) = 0 \\ \\ \nabla f(p_0) + \lambda_0 \nabla g(p_0) = (0, 0, 0) \end{cases} \quad (*)$$

Osservazione 1.9.8 *Il vincolo* V *in questo caso è una superficie di* $\mathbb{R}^3$

Esempio 15 *Trovare* $max_{\partial A} f$, $f(x,y,z) = x + y - z$ *e* $\partial A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ***Soluzione:***
Applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per funzioni di $n = 3$ *variabili*

$$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) = x + y - z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

se $(x,y,z,\lambda) \in \mathbb{R}^4$, *in quanto* $\partial A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = 0\}$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2x\lambda & = & 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2y\lambda & = & 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 1 + 2z\lambda & = & 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 & = & 0 \end{cases} \iff (x,y,z,\lambda) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \mp\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow max_{\partial A} f = max\left\{f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \mp\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\} = \sqrt{3} \ e$$

$$min_{\partial A} f = min\left\{f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \mp\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\} = -\sqrt{3}$$

Chapter 2

Integrale per funzioni a più variabili, [BDPG, 14]

Vogilamo introdurre la nozione di integrale per una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}(n = 2, 3)$, detto anche integrale multiplo

2.1 Lez - 10, Integrale doppio su un rettangolo

Caso $n = 2$

$A = Q = [a, b] \times [c, d]$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ limitata, cioè $\exists M > 0$ t.c. $|f(p)| \leq M \,\forall p \in A$

Idea:(Interpretazione geometrica dell'integrale)

Supponiamo $f(p) \geq 0 \,\forall p \in A$, definiamo

$$\mathsf{T}_f(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq f(x, y), (x, y) \in A\}$$

(trapezioidale indotta da $f : A \to \mathbb{R}$).
$\mathsf{T}_f(A) \equiv$ solido di $\mathbb{R}^3$ sotteso dal grafico di f, G_f.
Vogliamo definire un numero reale non negativo:

$$L = \iint_A f(x, y)\, dx\, dy \text{ (integrale doppio di f su A)}$$

t.c. $L = volume(\mathsf{T}_f(A))$

Definizione 2.1.1 *(i) Si chiama suddivisione dell'intervallo* $[a, b]$ *un insieme finito (detto retta reale)* $\{x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n\}$ *t.c.* $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$

(ii) Si chiama sudddivisione dell'insieme $Q = [a,b]\times[c,d]$ l'insieme (del piano) $\mathcal{D} := \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 = \{(x_i, y_j) : i = 0, ..., n, j = 0, ..., m\}$, dove:

$$\mathcal{D}_1 = \{x_0, ..., x_n\} \textit{ suddivisione di [a,b]}$$

$$\mathcal{D}_2 = \{y_0, ..., y_n\} \textit{ suddivisione di [c,d]}$$

Dato $\mathcal{D}$ una suddivisione di Q, Q resta suddiviso in $n \times m$ rettangoli

$$Q_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

con $i = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., m$
Definiamo $area(Q_{ij}) := (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$

Definizione 2.1.2 *Si chiama somme superiore (risp. somme inferiore) di f rispetto alla suddivisione $\mathcal{D}$ di Q, fissata una funzione $f : Q \to \mathbb{R}$, il numero reale*

$$S(f, \mathcal{D}) := \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} M_{ij} area(Q_{ij})\, M_{ij} := sup_{Q_{ij}} f$$

rispettivamente il numero reale

$$s(f, \mathcal{D}) := \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} m_{ij} area(Q_{ij})\, m_{ij} := inf_{Q_{ij}} f$$

Osservazione 2.1.1 *Essendo f limitata, $i = 1, ..., n$ $j = 1, ..., m$*

$$M_{ij} := sup_{Q_{ij}} f := sup\{f(p) : p \in Q_{ij}\}$$

$$m_{ij} := inf_{Q_{ij}} f := inf\{f(p) : p \in Q_{ij}\}$$

2.1.1 Proprietà importanti delle somme sup. ed inf.

(PS1) Se $f \geq 0$ su Q, allora $M_{ij} area(Q_{ij})$ e $m_{ij} area(Q_{ij})$ rappresentano il volume di un parallelepipedo di base Q_{ij} ed altezza M_{ij} o m_{ij}

(PS2) Per ogni suddivisione $\mathcal{D}$ di Q

$$area(Q) \cdot inf_Q f \leq s(f, \mathcal{D}) \leq S(f, \mathcal{D}) \leq area(Q) \cdot \sup_Q f$$

(PS3) Si potrebbe provare (ma lo omettiamo) che, prese $\mathcal{D}'$ e $\mathcal{D}''$ due suddivisioni di Q, allora $s(f, \mathcal{D}') \leq S(f, \mathcal{D}'')$

Definizione 2.1.3 *Siano $Q = [a,b] \times [c,d]$ e $f : Q \to \mathbb{R}$ limitata. La funzione si dice integrabile (secondo Reimann) su Q, e scriveremo $f \in \mathcal{R}(Q)$, se*

$$L = sups(f, \mathcal{D}) : \mathcal{D} \textit{ sudd. di } Q = inf\{S(f, \mathcal{D}), \mathcal{D} \textit{ sudd. di } Q\}$$

Il numero reale L si chiama <u>*integrale*</u>*(doppio) e si denota*

$$L = \iint_Q f(x,y)\,dx\,dy = \iint_Q f = \int_Q f$$

Nel caso in cui $f \geq 0$ ed $f \in \mathcal{R}(Q)$, definiamo il <u>*volume del solido $\mathsf{T}_f(Q)$*</u>

$$vol\,(\mathsf{T}_f(Q)) := \iint_Q f$$

2.1.2 Teoremi: Esistenza & Proprietà integrale

Problema: Condizioni che assicurano $f \in \mathcal{R}(Q)$?

Richiami per funzioni di $n = 1$ variabili $Q = [a,b]$

Teorema 2.1.2 *$f \in C^0([a,b])$, allora $f \in \mathcal{R}([a,b])$,*
$f \geq 0, f \in C^0([a,b])$, $area(\mathsf{T}_f([a,b])) := \int_a^b f(x)\,dx$

Teorema 2.1.3 *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è non decrescete (cioè $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$), allora $f \in \mathcal{R}([a,b])$*

Teorema 2.1.4 (Esistenza dell'integrale) *[BDPG,14.4] Sia $f \in C^0(Q)$ allora $f \in \mathcal{R}(Q)$*

Teorema 2.1.5 (Proprietà dell'integrale) *[BDPG, 14.5] Siano $f, g \in \mathcal{R}(Q)$ con $Q = [a,b] \times [c,d]$*

(i) ***Linearità*** *: $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(Q)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e*

$$\iint_Q (\alpha f + \beta g) = \alpha \iint_Q f + \beta \iint_Q g$$

(ii) ***Monotonia****: Se $g \leq f$ su Q, allora*

$$\iint_Q g \leq \iint_Q f$$

(iii) ***Valore assoluto****: $|f| \in \mathcal{R}(Q)$ e*

$$\left| \iint_Q f \right| \leq \iint_Q |f|$$

(iv) ***Teorema della media interale***

$$inf_Q f \leq \frac{1}{area(Q)} \iint_Q f \leq sup_Q f$$

e il valore $\frac{1}{area(Q)} \iint_Q f \equiv$ media integrale di f su Q.
Se $f \in C^0(Q)$, allora esiste $p_0 = (x_0, y_0) \in Q$ t.c.

$$f(p_0) = \frac{1}{area(Q)} \iint_Q f$$

2.1.3 Formula di riduzione sui rettangoli

Problema: Sia $f \in \mathcal{R}(Q)$, come calcolare $\iint_Q f$?

Teorema 2.1.6 (Formula di riduzione sui rettangoli) *[BDPG, 14.6] Siano $Q = [a,b] \times [c,d]$ e $f \in \mathcal{R}(Q)$*

(i) Supponiamo che, $\forall y \in [c,d]$, la funzione $[a,b] \ni x \to f(x,y)$ sia integrabile (come funzione di una variabile), allora la funzione $[c,d] \ni y \to \int_a^b f(x,y)\,dx$ è integrabile su [c,d] e

$$(1) \iint_Q f = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

(ii) Supponiamo che, $\forall x \in [a,b]$, la funzione $[c,d] \ni y \to f(x,y)$ sia integrabile (come funzione di una variabile), allora

$$(2) \iint_Q f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

In particolare se $f \in C^0(Q)$, valgono (i) e (ii) e

$$(3) \iint_Q f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

Osservazione 2.1.7 (Principio di Cavalieri) *La formula (2) può essere interpretata geometricamente nel modo seguente:*
sia $f \geq 0$, definimao la regione piana $\mathsf{T}_f^x(Q) := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq f(x,y)\}$ per $x \in [a,b]$ fissato. Allora

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy = area\left(\mathsf{T}_f^x(Q)\right)$$

Pertanto la (2) si può interpretare come

$$volume(\mathsf{T}_f(Q)) := \iint_Q f =_{(2)} \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_a^b area(\mathsf{T}_f^x(Q))\,dx \text{ somma di volumi infinitesimi}$$

2.1.4 Esempio

Esempio 16 *Calcolare $\iint_Q f$ dove $Q = [0,1] \times [0,\pi]$, $f(x,y) := x \cdot \sin(xy)$*

Soluzione:

È facile verificare che $f \in C^0(Q)$, quindi possiamo utilizzare la formula (3), però osserviamo che, ai fini del caolcolo, utilizzare (1) o (2) può essere differente.

$$\iint_Q f = \int_0^1 \left(\int_0^\pi x \cdot \sin(xy)\, dy \right) dx$$

Fissiamo $0 \leq x \leq 1$

$$\int_0^\pi x \cdot \sin(xy) = x \int_0^\pi \sin(xy)\, dy = x \left(-\frac{\cos(xy)}{x} \right) \Big|_0^\pi = -cos(\pi x) + 1$$

Quindi

$$\int_0^1 \left(\int_0^\pi x \cdot \sin(xy)\, dy \right) dx = \int_0^1 (-cos(\pi x) + 1)\ dx =$$

$$= -\frac{\sin(\pi x)}{\pi} + x \Big|_0^1 = -\frac{\sin \pi}{\pi} + 1 + \frac{\sin 0}{\pi} - 0 = 1$$

Esercizio 17 *Verificare che l'integrlae iterato*

$$1 = \iint_Q f = \int_0^\pi \left(\int_0^1 x \cdot \sin(xy)\, dx \right) dy = \int_0^\pi \frac{\sin(y) - y\cos(y)}{y^2}\, dy$$

L'ultimo integrale, esiste, ma la funzione integranda non ammettec ome primitivva rappresentabile come funzioni elementari, come, per esempio $\int \frac{\sin x}{x}\, dx$, $\int e^{-x^2}\, dx$, $[0,1] \ni x \to \frac{\sin(x)}{x}$ è continua, dunque $\exists \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\, dx \in \mathbb{R}$

2.2 Lez 11 - Integrale doppio su insiemi generali

Vogliamo defnire la nozione di integrale per una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ limitata, dove A è un dominioi più generale di uun rettangolo.

Definizione 2.2.1 *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ limitata e A limitato e sia $Q = [a,b] \times [c,d] \supset A$. Definiamo*

$$\widetilde{f} : Q \to \mathbb{R}, \widetilde{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & se \quad (x,y) \in A \\ 0 & se \quad (x,y) \in Q \setminus A \end{cases}$$

Si dice che f è <u>integrabile</u> su A, e scriveremo $f \in \mathcal{R}(A)$, se $\widetilde{f} \in \mathcal{R}(Q)$. In questo caso:

$$\iint_A f = \iint_Q \widetilde{f} \text{ (integrale doppio di f su A)}$$

Osservazione 2.2.1 *(i) Si può verificare (ma omettiamo) che l'integrbilità di f su A non dipende dalla scelta del rettangolo Q, come pure il valore $\iint_Q \widetilde{f}$*

(ii) La funzione $\widetilde{f}$, tipicamente, non sarà continua nei punti di frontiera ∂A

Esempio 17 *$A =$ cerchio del piano, $f = 1$ su A.*

$$G_{\widetilde{f}} := \{(x,y,1) : (x,y) \in A\} \cup \{(x,y,0) : (x,y) \in Q \setminus A\}$$

Se Q è un retta contenente A, allora $\widetilde{f} : Q \to \mathbb{R}$, come definita in 2.2.1, è discontinua in tutti i punti di ∂A.
In accordo con la nostra definizione precedente e tenendo conto della nostra idea geometrica di integrale doppio

$$\iint_Q \widetilde{f} := volume(\mathsf{T}_{\widetilde{f}}(Q))$$

dove $\mathsf{T}_{\widetilde{f}}(Q) := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \widetilde{f}(x,y)\} = \{(x,y,0) : (x,y) \in Q \setminus A\} \cup \{(x,y,z) : (x,y) \in A, 0 \leq z \leq 1\} = P \cup \mathsf{T}_f(A)$, essendo P una parte limitata di un piano, $volume(P) = 0$, mentre $volume(\mathsf{T}_f(A)) = volume(A \times [0,1]) = area(A)$.
Quindi questo ragionamento ci porta a concludere:

$$\iint_A f := \iint_Q \widetilde{f} = volume(\mathsf{T}_{\widetilde{f}(Q)}) = area(A)$$

Pertanto, da questo ragionamento, risulta evidente che, se per l'insieme A non fosse defnita una nozione di area non sapremmo come calolcare $\iint_A f$

2.2.1 Insiemi numerabili e loro area

Definizione 2.2.2 *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita come $f(x) := 1$ se $x \in A$, con A limitato. L'insieme A si dice misurabile (secondo Peano-Jordan) se $f \in \mathscr{R}(A)$. In questo caso il valore dell'integrale si chiama misura (o area) di A e si denota*

$$|A|_2 := \iint_A 1\, dx\, dy$$

Osservazione 2.2.2 *Se $A = Q = [a,b] \times [c,d]$, allora è facile verificare che Q è misurabile e*

$$|Q|_2 = area(Q) = (b-a)(d-c)$$

Teorema: Caraterizzazione degli insiemi misurabili

Teorema 2.2.3 (Caraterizzazione degli insiemi misurabili) *[BDPG,14.9] Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato. Allora*

$$A \text{ è misurabile} \iff \partial A \text{è misurabile e } |\partial A|_2 = 0$$

Teorema 2.2.4 (BDPG, 14.11) *Sia $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile (come funzione di n=1 variabile). Allora $G_g := \{(x, g(x)) : x \in [a,b]\}$ è misurabile e $|G_g|_2 = 0$*

Tramite i teoremi 2.2.3, 2.2.4 si può provare il seguente corollario.

Corollario 2.2.1 *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato. Supponiamo che*

$$\partial A = \bigcup_{i=1}^{k} G_{g_i}$$

dove $g_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}$ continue $\forall i = 1, ..., k$
Allora A è misurabile.

Esempio 18 (Misurabilità insiemi semplici del piano) *Siano $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue e supponiamo che $g_1(x) \le g_2(x)\, \forall x \in [a,b]$. Sia*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

insieme semplice rispetto all'asse y.

Esercizio 18 *A è limitato e chiuso.*

$$\partial A = G_{g_1} \cup \{(b,y) : g_1(b) \le y \le g_2(b)\} G_{g_2} \cup \{(a,y) : g_1(a) \le y \le g_2(a)\}$$

Pertanto $|\partial A|_2 = 0$ e, per il corollario 2.2.1, A è misurabile.

2.2.2 Integrali doppi su insiemi misurabili

Teorema: Esistenza integrale doppio su insiemi misurabili

Teorema 2.2.5 (Esistenza integrale doppio su insiemi misurabili) *[BDPG, 14.13] Sia $f : A \to \mathbb{R}$. Supponiamo che:*

- *A sia limitato e misurabile*
- *f sia limitato e $f \in C^0(A)$*

Allora $f \in \mathcal{R}(A)$

Osservazione 2.2.6
- *Dal 2.2.5, segue che, se A è limitato, chiuso e misurabile e e $f \in C^0(A)$, allora $f \in \mathcal{R}(A)$*
- *Continuano a valere le proprietà di linearità , monotonia e il teorema della media integrale, che abbiamo visto per l'integrale doppio di una funzione defnita su un rettangolo*

Infine vale il seguente risultato, molto utili nel calcolo di integrali.

2.2.3 Teo.: Integrale doppio su insieme di misura nulla

Teorema 2.2.7 (Integrale doppio su insieme di misura nulla) *[BDPG,14.15] Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme limitato e misurabile, sia $f \in \mathcal{R}(A)$. Supponamo che $A = B \cup C$, con B e C misurabli e $|C|_2 = 0$. Allora:*

$$\iint_A f = \iint_B f$$

Osservazione 2.2.8 *Una immediata conseguenza di 2.2.3 e 2.2.7 è la seguente: sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato e misurabile e sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \in \mathcal{R}(A)$, allora*

$$\iint_A f = \iint_{\mathring{A}} f$$

2.3 Integrali doppi su domini semplici e formule di riduzione

Definizione 2.3.1 *Un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^2$ si dice*

- *Dominio semplice (o normale) rispetto all'asse y se esistono $g_1, g_2 \in C^0([a, b])$ t.c. $g_1 \leq g_2$ su $[a, b]$ e*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

- *Dominio semplice (o normale) rispetto all'asse x se esistono $h_1, h_2 \in C^0([c, d])$ t.c. $h_1 \leq h_2$ su $[c, d]$ e*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

Osservazione 2.3.1 *Ricordiamo che, per quanto visto prima, un dominio semplice è limitato e misurabile. Inoltre, per il 2.2.5, se A è semplice ed $f \in C^0(A)$, allora $f \in \mathcal{R}(A)$*

Vogliamo ora introdurre una formila per il calcolo di integrali doppi su domini semplici.

2.3.1 Teorema: Forumla di riduzione su domini semplici

Teorema 2.3.2 (Forumla di riduzione su domini semplici) *[BDPG,14.17] Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio semplice rispetto ad uno degli assi. Supponiamo che $f \in C^0(A)$, allora $f \in \mathcal{R}(A)$ e valgono le seguenti formule:*

1. *Se $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ con $g_1, g_2 \in C^0([a, b])$, allora*
$$(1) \iint_A f = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$
In particoalre A è misurabile e $|A|_2 = \iint_A 1 = \int_a^b (g_2(x) - g_1(x))\, dx$

2. *Se $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$ con $h_1, h_2 \in C^0([c, d])$, allora*
$$(2) \iint_A f = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx \right) dy$$
In particoalre A è misurabile e $|A|_2 = \iint_A 1 = \int_c^d (h_2(y) - h_1(y))\, dy$

Osservazione 2.3.3 *Le proprietà di linearità , monotonia e il teorema della media integrale, continuano a valere per integrali doppi su domini semplici.*

Esempio 19 *Calcolare $\iint_A f(x, y)\, dx\, dy$ nei seguenti casi:*

1. *$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$, $f(x, y) = x$*

   Soluzione:
   A è un dominio semplice rispetto all'asse y ed $f \in C^0(A)$, possiamo applicare la 2.3.2 (1), ottendo che
$$\iint_A f = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} x\, dy \right) dx$$
   Fissato $x \in [0, 1]$,
$$\int_0^{x^2} x\, dy = x \int_0^{x^2} 1\, dy = xy|_0^{x^2} = x^3$$
   Pertanto
$$\iint_A x\, dx\, dy = \int_0^1 x^3\, dx = \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^1 = \frac{1}{4}$$

2. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$, $f(x, y) = \frac{\sin(x)}{x}$

Soluzione:
A è un dominio semplice rispetto all'asse x ed $f \in C^0(A)$, possiamo applicare la 2.3.2 (2), ottendo che

$$\iint_A \frac{\sin(x)}{x}\, dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_y^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x}\, dx \right) dy$$

Fissiamo $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\exists \int_y^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x}\, dx, \textit{ ma non si può calolcare}$$

Osserviamo che A è un dominio semplice anche rispetto all'asse y, infatti:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq x\}$$

possiamo quindi applicare 2.3.2 (1) ed otteniamo

$$\iint_A \frac{\sin(x)}{x}\, dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^x \frac{\sin x}{x}\, dy \right) dx$$

Fissiamo $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$

$$\int_0^x \frac{\sin(x)}{x}\, dy = \frac{\sin(x)}{x} \int_0^y dy = \frac{\sin(x)}{x} \cdot x = \sin(x)$$

Pertanto

$$\iint_A \frac{\sin(x)}{x}\, dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\, dx = -\cos(x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

2.4 Lez - 12

2.4.1 Applicazione della formula di riduzione su domini semplici al calcolo di volumi di solidi

Definizione 2.4.1 *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato e misurabile e $f \in \mathcal{R}(A)$, con $f \geq 0$ su A. Denotiamo*

$$\mathsf{T}_f(A) := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq f(x,y), (x,y) \in A\}$$

Si chiama volume del solido $\mathsf{T}_f(A)$ il numero

$$volume\,(\mathsf{T}_f(A)) := \iint_A f$$

Tramite la formula (1) e (2) del precedente teorema 2.3.2 si possono calcolare i volumi di diversi solidi.

Esempio 20 *Sappiamo che $A \subseteq \mathbb{R}^2$ sia un dominio semplice rispetto a y, allora dalla (1) si ottiene:*

$$(*)\ volume(\mathsf{T}_f(A)) = \iint_A f = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Esercizio 19 *Calcolare il volume del solido di $\mathbb{R}^3$,*

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq y^2, (x,y) \in [0,1] \times [0,1]\}$$

Soluzione:

È facile verificare che $S = \mathsf{T}_f(A)$ con $A = [0,1] \times [0,1]$ dominio semplice sia rispetto y che x, ed $f(x,y) := y^2$, $f \in C^0(A)$. Pertanto possiamo applicare (*) e otteniamo

$$volume(S) = volume(\mathsf{T}_f(A)) = \iint_A f = \int_0^1 \left(\int_0^1 y^2\,dy \right) dx$$

se rappresentiamo

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

Fissato $x \in [0,1]$,

$$\int_0^1 y^2\,dy = \frac{1}{3}y^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Pertanto

$$volume(S) = \int_0^1 \frac{1}{3}\,dx = \frac{1}{3}$$

Infine vale la seguente proprietà , molto utili nel calcolo di integrali doppi

2.4.2 Teorema: Additività dell'integrale doppio

Teorema 2.4.1 (Additività dell'integrale doppio) *[BDPG,14.18]*
Siano $A_1, ..., A_m \subseteq \mathbb{R}^2$ insiemi semplici t.c.

$$A_i \cap A_j \subseteq \partial A_i \cap \partial A_j$$

se $i \neq j, i, j = 1, ..., m$.
Sia $f : A_1 \cup ... \cup A_m \to \mathbb{R}$ e supponiamo che $f \in \mathcal{R}(A_i) \forall i = 1, ..., m$.
Allora f è integrabile su $A_1 \cup ... \cup A_m$, cioè $f \in \mathcal{R}(A_1 \cup ... \cup A_m)$ e

$$\iint_{A_1 \cup ... \cup A_m} f = \sum_{i=1}^{m} \iint_{A_i} f$$

2.5 Cambiamento di var. per gli integrali doppi

2.5.1 Caso particolare: coordinate polari

Problema: Calcolare il volume della semisfera di centro $(0, 0, 0)$ e raggio $r > 0$ in $\mathbb{R}^3$.
È facile verificare che, se denotiamo S la semisfera di centro $(0, 0, 0)$ e raggio $r > 0$,

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, z \geq 0\}$$

$z^2 \leq r^2 - (x^2 + y^2)$, $0 \leq z \leq \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}$

Inotre, se denotiamo $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ allora S può essere anche rappresentato nella forma

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}\right\} = \mathsf{T}_f(D)$$

dove $f(x, y) := \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}$,$(x, y) \in D$.
Utilizzando la nostra definizione di volume $\mathsf{T}_f(D)$, otteniamo che

$$volume(S) = volume(\mathsf{T}_f(D)) := \iint_D f(x, y)\, dx\, dy$$

Esercizio 20 *Calcolare $\iint_D \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}\, dx\, dy$*

Soluzione:

- **Primo modo**
  Osserviamo che l'insieme D può essere rappresentato come un dominio semplcei rispetto all'asse y. Infatti

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -r \leq x \leq r, -\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}\}$$

Utilizzando la formula di riduzione per integrali doppi su domini semplici, otteniamo

$$\iint_D \sqrt{r^2-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_{-r}^{r}\left(\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2-(x^2+y^2)}\,dy\right)dx$$

Notiamo che il calcolo dell'integrare iterato risulta abbastanza complicato.

- **Secondo modo**
  Utilizziamo le coordinate polari, cioè consideriamo l'applicazione $\psi:(0,+\infty)\times(0,2\pi)\to\mathbb{R}^2$, $\rho,\vartheta\to(\rho\cos\vartheta,\rho\sin\vartheta)$

$$\begin{cases} x = x(\rho,\vartheta) = \rho\cos\vartheta \\ y = y(\rho,\vartheta) = \rho\sin\vartheta \end{cases}$$

È facile verificare che $\psi:(0,+\infty)\times(0,2\pi)\to\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0):x\geq 0\}$ è bigettiva e se $D^*:=(0,r)\times(0,2\pi)$

$$\psi(D^*) = \mathring{D}\setminus\{(x,0):0\leq x\leq r\}$$

Poichè

$$area(D) = area\left(\mathring{D}\setminus\{(x,0):0\leq x\leq r\}\right)$$

e

$$area(\partial D) = area\left(\{(x,0):0\leq x\leq r\}\right) = 0$$

per la proprietà degli integrali doppi sugli insiemi di misura nulla, segue che

$$\iint_D \sqrt{r^2-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \iint_{\mathring{D}\setminus\{(x,0):0\leq x\leq r\}} \sqrt{r^2-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

$$= \iint_{\mathring{D}\setminus\{(x,0):0\leq x\leq r\}} \sqrt{r^2-\rho^2}\,dx\,dy$$

Idea: Vogliamo cambiare le variabili di integrazione nell'integrale doppio da $(x,y)\to$ a (ρ,ϑ).
Il problema è capire come si trasforma l'elemento infinitesimo di area $dA = dxdy$ in funzione dell'elemento infinitesimo $dA^* = d\rho d\vartheta$

Più precisamente capire quale sia il coefficiente di trasformazione $k = k(\rho,\vartheta)$ per cui $dA = dxdy = k(\rho,\vartheta)\,d\rho\,d\vartheta = k(\rho,\vartheta)dA^*$
Utilizziamo un ragionamento intuitivo: il rettangolo $Q^* = [\rho,\rho+d\rho]\times[\vartheta,\vartheta+d\vartheta]$, sarà trasportato nella regione piana $Q=\psi(Q^*)$ delimitata da:

- $L_1 =$ il segmento che congiunge i punti $\psi(\rho,\vartheta)$ e $\psi(\rho+d\rho,\vartheta)$
- $L_2 =$ l'arco di cerchio che congiunge i punti $\psi(\rho+d\rho,\vartheta)$ e $\psi(\rho+d\rho,\vartheta+d\vartheta)$
- $L_3 =$ il segmento che congiunge i punti $\psi(\rho+d\rho,\vartheta+d\vartheta)$ e $\psi(\rho,\vartheta+d\vartheta)$

- L_4 = l'arco di cerchio che congiunge i punti $\psi(\rho,\vartheta+d\vartheta)$ e $\psi(\rho,\vartheta)$

Se $d\rho$ e $d\vartheta$ sono "molto piccoli", $dA = dxdy \cong area(Q) \cong lunghezza(L_4)d\rho = \rho d\vartheta d\rho = \rho dA^*$ con $A = [x, x+dx] \times [y, y+dy]$.
Si può provare rigorosamente che $dA = \rho dA^*$.
Ritornando al calcolo dell'integrale doppio

$$\iint_D \sqrt{r^2-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \iint_{\mathring{D}\setminus\{(x,0):0\le x\le r\}} \sqrt{r^2-\rho^2}dA =$$

$$= \iint_{(0,r)\times(0,2\pi)} \sqrt{r^2-\rho^2}\rho dA^* = \iint_{(0,r)\times(0,2\pi)} \sqrt{r^2-\rho^2}\rho d\rho d\vartheta =$$

$$= \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{r^2-\rho^2}\rho\,d\vartheta\right) d\rho = 2\pi \int_0^r \sqrt{r^2-\rho^2}\rho\,d\rho$$

Esercizio 21 $\int_0^r \sqrt{r^2-\rho^2}\rho\,d\rho = \frac{r^3}{3}$

In conclusione

$$volume(S) = \iint_D \sqrt{r^2-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \frac{2}{3}\pi r^3$$

2.5.2 Caso generale

Siano $D, D^* \subseteq \mathbb{R}^2$ aperti limitati e misurabili e sia

$$\psi : D^* \to D, \psi(u,v) = (\psi_1(u,v), \psi_2(u,v)) = (x(u,v), y(u,v))$$

$\psi_1, \psi_2 : D^* \to \mathbb{R}$

Definizione 2.5.1 *La mappa ψ si dice un cambiamento di variabili se*

- *ψ è bigettiva*
- *$\psi_i \in C^1(D^*)$, ψ_i, $\frac{\partial \psi_i}{\partial u}$, $\frac{\partial \psi_i}{\partial v}$: $D^* \to \mathbb{R}$ limitate (i=1,2)*
- $\det D\psi(u,v) \neq 0$ *, $\forall (u,v) \in D^*$, dove*

$$D\psi(u,v) := \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \psi_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \psi_2}{\partial v}(u,v) \end{bmatrix} \text{ (Matrice Jacobiana)}$$

Denotiamo $dA^* = du\,dv$ e $dA = dx\,dy$

Problema: Legame tra dA e dA^*?

Si può provare che $dA = |[|\, det D\psi(u,v)]dA^*$.
Più precisamente vale:

2.5.3 Teorema: Cambiamento di variabili negli integrali doppi

Teorema 2.5.1 (Cambiamento di variabili negli integrali doppi) *[BDPG,14.19]* *Siano $D, D^* \subseteq \mathbb{R}^2$ aperti limitati e misurabili, sia $\psi : D^* \to D$ un cambiamento di variabili e sia $f : D \to \mathbb{R}$ continua e limitata.*
Allora vale la formula

$$(FCV)_2 \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(\psi(u,v))\,|\det D\psi(u,v)|\;du\,dv$$

Esercizio 22 *(i) Calcolare l'area dell'insieme*

$$D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$$

dove $a > 0, b > 0$ fissati.

Soluzione:

L'insieme D rappresenta un'elisse con semiassi di lunghezza a e b. L'insieme D è limitato e misurabile. Infatti:

Esercizio 23 *D è un dominio semplice rispetto all'asse y. Quindi D è misurabile.*

Per definizione

$$area(D) = |D|_2 = \iint_D 1\,dx\,dy$$

Utilizzando il cambiamento di variabili rispetto a coordinate ellittiche, il calcolo dell'integrale doppio diventa abbastanza semplice. Infatti, consideriamo il cambiamento

$$\begin{cases} x(\rho,\vartheta) = \psi_1(\rho,\vartheta) := a\rho\cos\vartheta \\ y(\rho,\vartheta) = \psi_2(\rho,\vartheta) := b\rho\cos\vartheta \end{cases} \quad \rho \geq 0, \vartheta \in [0, 2\pi]$$

e sia $D^* := (0,1) \times (0, 2\pi)$, $\psi : D^* \to \mathbb{R}^2$, $\psi(\rho,\vartheta) := (\psi_1(\rho,\vartheta), \psi_2(\rho,\vartheta))$

Esercizio 24 *Verificare che la mappa $\psi : D^* \to \mathring{D} \setminus \{(x,0) : 0 \leq x \leq a\}$ è un cambiamento di variabili, in accordo con la definizione 7.3.2 prima introdotta. Inoltre $\det D\psi(\rho,\vartheta) = ab\rho$.*

Possiamo applicare $(FCV)_2$ con $f \equiv 1$ su D, ed otteniamo

$$area(D) = \iint_D 1\,dx\,dy = \iint_{\mathring{D}\setminus\{(x,0):0\leq x\leq a\}} 1\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{D^*} 1 \cdot |\det D\psi(\rho,\vartheta)|\;d\rho\,d\vartheta = 2\pi ab \int_0^1 \rho\,d\rho\,d\vartheta = \pi ab$$

(ii) Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D \frac{y^2}{x}\,dx\,dy$$

Dove $D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2x^2, y^2 \leq x \leq 3y^2\right\}$

Soluzione:

L'insieme D può essere viso come $D = D_1 \cap D_2$*, dove*

- $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2x^2\}$
- $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 y^2 \leq x \leq 3y^2\}$

Incominciamo a studiare la geometria di D. È chiaro che $(0,0) \in D$*. Supponiamo che* $(x,y) \in D \setminus \{(0,0)\}$ *allora per definizione di D,* $(x,y) \in (D_1 \setminus \{(0,0)\}) \cap (D_2 \setminus \{(0,0)\})$*. È chiaro che, per come sono definiti* D_1 *e* D_2*, necessariamente*

1. $x > 0$ *e* $y > 0$
2. $x^2 \leq y \leq 2x^2$
3. $y^2 \leq x \leq 3y^2$

Dividendo la disuguaglianza (2) per x^2 *e la (3) per* y^2*, grazie alla condizione (1), si intuisce che un possibile cambiamento di variabili* $x = \psi_1(u,v)$*,* $y = \psi_2(u,v)$ *potrebbe essere quello per cui*

$$\begin{cases} u = \frac{y}{x^2} \\ \\ v = \frac{x}{y^2} \end{cases} \quad con\ 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 3$$

Esercizio 25 *Risolvere il sistema precedente rispetto ad x e y.*

Otteniamo

$$\begin{cases} x = x(u,v) = \psi_1(u,v) = \frac{1}{u^{\frac{2}{3}} v^{\frac{1}{3}}} \\ \\ y = y(u,v) = \psi_2(u,v) = \frac{1}{u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}}} \end{cases}$$

Sia $D^* := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 1 < u < 2, 1 < v < 3\}$ *è chiaro per costruzione che:*

- $\psi : D^* \to \mathring{D}$ *è bigettiva*
- D^* *e* $\mathring{D}$ *sono limitati e misurabili (da 2.2.1)*
- $\psi_i \in C^1(D^*)$*, i =1,2*

– ***Esercizio 26***

$$D\psi(u,v) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}u^{-\frac{5}{3}}v^{-\frac{1}{3}} & -\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{-\frac{4}{3}} \\ -\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}v^{-\frac{2}{3}} & -\frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{5}{3}} \end{bmatrix}$$

$\det D\psi(u,v) = \frac{1}{3}u^{-2}v^{-2}$ *se* $(u,v) \in D^*$ *Possimao applicare l'osservazione (??) e* $(FCV)_2$*, ottenendo che*

$$\iint_D \frac{y^2}{x}\,dx\,dy = \iint_{\mathring{D}} \frac{y^2}{x}\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{D^*} \frac{1}{v}\frac{1}{3}\frac{1}{u^2}\frac{1}{v^2}\,du\,dv = \frac{1}{3}\iint_{D^*} \frac{du\,dv}{u^2v^3}$$

L'ultimo integrale doppio risulta essere un integrale doppo su un rettangolo, applicando la formula di riduzione sui rettangoli otteniamo:

$$\iint_{D^*} \frac{du\,dv}{u^2v^3} = \int_1^2 u^{-2}\,du \cdot \int_1^3 v^{-3}\,dv =$$

$$= -\frac{1}{u}\Big|_1^2 \cdot -2v^{-2}\big|_1^3 = \frac{2}{9}$$

Pertanto

$$\iint_D \frac{y^2}{x} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9} = \frac{2}{27}$$

2.6 Lez - 13, Integrali tripli, [BDPG,14.5]

2.6.1 Integrale triplo su un parallelepipedo

Sia $Q := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subset \mathbb{R}^3$ un parallelepipedo. Siano

- $\mathcal{D}_1 := \{a_1 = x_0 \leq \dots \leq x_i \leq \dots x_{n_1} = b_1\}$ sudd. di $[a_1, b_1]$
- $\mathcal{D}_2 := \{a_2 = y_0 \leq \dots \leq y_j \leq \dots y_{n_2} = b_1\}$ sudd. di $[a_2, b_2]$
- $\mathcal{D}_3 := \{a_3 = z_0 \leq \dots \leq z_k \leq \dots z_{n_3} = b_3\}$ sudd. di $[a_3, b_3]$

Definizione 2.6.1 *Si chiama* <u>*suddivisione* $\mathcal{D}$</u> *del parallelepipedo* $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ *un insieme del tipo*

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \times \mathcal{D}_3 = \{(x_i, y_j, z_k) : i = 0, ..., n_1; j = 0, ..., n_2; k = 0, ..., n_3\}$$

se $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ *sono definiti come sopra.*

Data una suddivisione $\mathcal{D}$ di Q, Q risulta suddiviso in $n_1 \times n_2 \times n_3$ parallelepipedi

$$Q_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

con $i = 1, ..., n_1,\ j = 1, ..., n_2,\ k = 1, ..., n_3$, il cui volume è

$$vol(Q_{ijk}) = |Q_{ijk}|_3 := (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$$

Sia $f : Q \to \mathbb{R}$ limitata e definiamo

$$m_{ijk} = inf_{Q_{ijk}} f \in \mathbb{R} \text{ e } M_{ijk} = sup_{Q_{ijk}} f \in \mathbb{R}$$

con $i = 1, ..., n_1,\ j = 1, ..., n_2,\ k = 1, ..., n_3$ Definiamo

- $S(f, Q) = \sum_{ijk} M_{ijk} \cdot |Q_{ijk}|_3$ (somma superiore di f su Q)
- $s(f, Q) = \sum_{ijk} m_{ijk} \cdot |Q_{ijk}|_3$ (somma inferiore di f su Q)

Definizione 2.6.2 *Si dice che f è integrabile su Q e si scrive* $f \in \mathcal{R}(Q)$ *se*

$$L = sup_{\mathcal{D}} s(f, \mathcal{D}) = inf_{\mathcal{D}} S(f, \mathcal{D}) \in \mathbb{R}$$

Il valore L prende nome di <u>*integrale triplo*</u> *di f su Q e si denota con i simboli*

$$\iiint_Q f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \iiint_Q f, \int_Q f, \int_Q f\, dx\, dy\, dz$$

Continuano a valere i risultati degli interali doppi su rettangoli.

Proprietà

Teorema 2.6.1 (Esistenza dell'integrale) *Sia* $f \in C^0(Q)$ *allora* $f \in \mathcal{R}(Q)$

Teorema 2.6.2 (Proprietà dell'integrale) *Siano* $f, g \in \mathcal{R}(Q)$

(i) ***Linearità*** *:* $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(Q)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *e*

$$\int_Q (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_Q f + \beta \int_Q g$$

(ii) ***Monotonia****: Se* $g \leq f$ *su* Q*, allora*

$$\int_Q g \leq \int_Q f$$

(iii) ***Valore assoluto****:* $|f| \in \mathcal{R}(Q)$ *e*

$$\left| \int_Q f \right| \leq \int_Q |f|$$

(iv) ***Teorema della media interale***

$$inf_Q f \leq \frac{1}{|Q|_3} \int_Q f \leq sup_Q f$$

Se $f \in C^0(Q)$*, allora esiste* $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in Q$ *t.c.*

$$f(p_0) = \frac{1}{|Q|_3} \int_Q f$$

2.6.2 Integrale triplo su insiemi generali

Definizione 2.6.3 *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}^3$ *limitato,* $f : A \to \mathbb{R}$ *limitata. Allora* f *si dice* *integrabile* *su* A*, e si scrive* $f \in \mathcal{R}(A)$ *se la funzione* $\widetilde{f} : Q \to \mathbb{R}$ *definita come*

$$\widetilde{f}(x, y, z) := \begin{cases} f(x, y, z) & se \quad (x, y, z) \in A \\ 0 & se \quad (x, y, z) \in Q \setminus A \end{cases}$$

è integrabile su Q*, dove* Q *è un (qualunque) parallelepipedo contenente* A*.*
Si pone:

$$\int_A f := \int_Q \widetilde{f}$$

Definizione 2.6.4 *Un insieme* $A \subseteq \mathbb{R}^3$ *limitato si dice* *misurabile* *(secondo Peano-Jordan) se la funzione* $\widetilde{f} : Q \to \mathbb{R}$*, definita come*

$$\widetilde{f}(x, y, z) := \begin{cases} 1 & se \quad (x, y, z) \in A \\ 0 & se \quad (x, y, z) \in Q \setminus A \end{cases}$$

è integrabile su Q, per un opportuno parallelepipedo $Q \supseteq A$

$$|A|_3 := \iiint_A 1\, dx\, dy\, dz$$

(misura 3-dimensionale o volume di A)

Continuano a valere

Teorema 2.6.3 (Caraterizzazione degli insiemi misurabili) *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ limitato. Allora*

$$A \text{ è misurabile} \iff \partial A \text{è misurabile e } |\partial A|_3 = 0$$

Teorema 2.6.4 (BDPG, 14.11) *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^3$ limitato e misurabile, sia $g \in \mathcal{R}(E)$. Allora $G_g := \{(x, y, g(x, y)) : (x, y) \in E\} \subseteq \mathbb{R}^3$ è misurabile e $|G_g|_3 = 0$*

Teorema 2.6.5 (Esistenza integrale tripli su insiemi misurabili) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Supponiamo che:*

- *A sia limitato e misurabile*
- *f sia limitato e $f \in C^0(A)$*

Allora $f \in \mathcal{R}(A)$

2.6.3 Formule di riduzione per integrali tripli

Teorema 2.6.6 (Formule di riduzione su parallelepipedi) *[BDPG,14.26] Siano $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$, $f \in C^0(Q)$*

(i) La funzione

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \ni (x, y) \to \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)\, dz$$

è integrabile su $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ e

$$(1) \iiint_Q f = \iint_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)\, dz \right)$$

(ii) La funzione

$$[a_1, b_1] \ni x \to \iint_{[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} f(x, y, z)\, dy\, dz$$

è integrabile su $[a_1, b_1]$ e

$$(2) \iiint_Q f = \int_{a_1}^{b_1} \left(\iint_{[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} f(x, y, z)\, dz \right)$$

La

(1) si chiama formula di riduzione per <u>fili</u>

(2) si chiama formula di riduzione per <u>strati</u>

- *L'insieme* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]\}$ *è uno strato.*
- *L'insieme* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [a_3, b_3]\}$ *è un filo.*

Un'immediata conseguenza della formula di riduzione sui parallelepipedi e di quella per i rettangoli 2.1.6 segue il seguente risultato:

Corollario 2.6.1 *Sia* $f \in C^0(Q)$ *allora*

$$\iiint_Q f = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)\, dz \right) dy \right) dx$$

Definizione 2.6.5 *Un insieme* $A \subseteq \mathbb{R}^3$ *si chiama <u>semplice</u> (o <u>normale</u>) rispetto all'asse z se*

$$(*)\, A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in E, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$$

dove $g_1, g_2 : E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g_1, g_2 \in C^0(E)$

Osservazione 2.6.7 *Definizioni analoghe si possono dare per insiemi semplici rispetto agli assi x ed y.*

Teorema 2.6.8 (Formule di riduzione per integrali tripli rispetto a domini semplici) *[BDPG,14.28] Sia* $A \subseteq \mathbb{R}^3$ *un insieme semplice rispetto all'asse z di tipo* $(*)$ *e sia* $f \in C^0(A)$*. Allora*

$$(3) \iiint_A f = \iint_E \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dx\, dy$$

Osservazione 2.6.9 *La formula (3) è una formula di riduzione per fili che generalizza la formula (1) di quella sui parallelepipedi.*
La formula (2) di riduzione per strati su parallelepipedi può essere estesa ad insiemi più generali. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ *limitato e misurabile e supponiamo che*

$$(**)\, A = A \cap (\mathbb{R} \times [a, b] \times \mathbb{R})$$

e sia tale che, lo strato di A

$(***)\, A_y = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in A\}$ *sia misurabile (come insieme del piano x,z)*

Teorema 2.6.10 (Formula di riduzione per strati) *[BDPG,14.28] Sia* $A \subseteq \mathbb{R}^3$ *verificante* $(**)$ *e* $(***)$ *e sia* $f \in C^0(A)$ *limitata. Allora*

$$(4) \iiint_A f = \int_a^b \left(\iint_{A_y} f(x, y, z)\, dx\, dz \right) dy$$

Applicazione della formula di riduzione per strati: volume di un solido di rotazione

Sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [c,d], x^2+y^2 \leq f(z)^2\}$ dovve $f \in C^0([c,d]),\ f \geq 0$. A può essere visto come il <u>solido di rotazione</u> ottenuto ruotando l'insieme

$$F := \{(y,z) : z \in [c,d], 0 \leq y \leq f(z)\}$$

attorno all'asse z.
Fissato $z \in [c,d]$ lo strato di A

$$A_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq f(z)^2\}$$

rappresenta un cerchio (nel piano x,y) con centro (0,0) e raggio $f(z)$.
Quindi

$$area(A_z) = \pi f(z)^2 \, \forall z \in [c,d]$$

Pertanto applicando la (4), otteniamo

$$|A|_3 = \iiint_A 1\,dx\,dy\,dz = \int_c^d \left(\iint_{A_z} 1\,dx\,dy\,dz \right) =$$

$$= \int_c^d area(A_z)\,dz = \pi \int_c^d f(z)^2\,dz$$

(formula del volume di un solido di rotazione)

2.6.4 Cambiamento di variabili negli integrali tripli

Siano $D^*, D \subseteq \mathbb{R}^3$ aperti limitati e misurabili, e sia $\Psi : D^* \to \mathscr{D}$, $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) = (x,y,z)$, $\Psi_i = \Psi_i(u,v,w) : D^* \to \mathbb{R}$ (i=1,2,3).

Definizione 2.6.6 *La mappa Ψ si dice <u>cambiamento di variabile</u> (in $\mathbb{R}^3$) Se*

(i) Ψ *è bigettiva*

(ii) $\Psi_i \in C^1(D^*)$,

$$\Psi_i, \frac{\partial \Psi_i}{\partial u}, \frac{\partial \Psi_i}{\partial v}, \frac{\partial \Psi_i}{\partial w} : D^* \to \mathbb{R}$$

limitate (i = 1,2,3)

(iii) $\det D\Psi(u,v,w) \neq 0$*, dove*

$$D\Psi(u,v,w) := \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial u} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial v} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial w} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial u} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial v} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial w} \\ \frac{\partial \Psi_3}{\partial u} & \frac{\partial \Psi_3}{\partial v} & \frac{\partial \Psi_3}{\partial w} \end{bmatrix}$$

se $(u,v,w) \in \mathscr{D}^*$

Teorema 2.6.11 (Cambiamento di variabili negli integrali tripli) *Siano $D^*, D \subset \mathbb{R}^3$ aperti limitati e misurabili, sia $\Psi : D^* \to D$ un cambiamento di variabili e sia $f \in C^0(D)$ e limitata. Allora*

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D^*} f(\Psi(u,v,w))\,|\det D\Psi(u,v,w)|\;du\,dv\,dw$$

Definizione 2.6.7 *Coordinate sferiche:*

$$\Psi \equiv \begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\vartheta \\ y = r\sin\varphi\sin\vartheta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

$0 \le \vartheta \le 2\pi, r \ge 0, 0 \le \varphi \le \pi,\ |\det D\Psi(r,\vartheta,\varphi)| = r^2\sin\varphi$

Chapter 3

Curve ed integrali curvilinei, [BDPG, 12]

3.1 Lez - 14, Curve in $\mathbb{R}^n$

Definizione 3.1.1 *(i) Si chiama curva una mappa $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ continua, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t))$ con I intervallo di $\mathbb{R}$*

(ii) Se $I = [a, b]$, i punti $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ di $\mathbb{R}^n$ si chiamano estremi della curva

(iii) Si chiama sostegno (o supporto) della curva γ, l'insieme $\gamma(I) \subseteq \mathbb{R}^n$. Si chiama equazione parametrica di γ l'equazione $x = (x_1, ..., x_n) = \gamma(t)\, t \in I$

(iv) La curva γ si dice chiusa se $I = [a, b]$ e $\gamma(a) = \gamma(b)$

(v) La curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ si dice semplice se γ è iniettiva, o se γ è chiusa e $I = [a, b]$, allora $\gamma : [a, b) \to \mathbb{R}^n$ è iniettiva.

I casi più significativi di curve, interessanti per le applicazioni, sono in $n = 2, 3$.

Esempio 21 *(i) Sia $f \in C^0([a, b])$ e consideriamo le curve $\gamma, \gamma^* : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, f(t))$ e $\gamma^*(t) = (f(t), t)$, $t \in [a, b]$.*
γ, γ^* sono dette curve piane cartesiane.

- *Gli estremi della curva γ sono i punti: $(a, f(a)), (b, f(b))$*
- *Gli estremi della curva γ^* sono i punti: $(f(a), a), (f(b), b)$*

Il supporto della curva γ, γ^* coincide rispettivamente, con il grafico della funzione f, G_f, vista, nel primo caso, come funzione di y rspetto a x, cioè

$$G_f := \{(t, f(t)) : t \in [a, b]\}$$

e, nel secondo caso, come funzione di x rispetto a y, cioè

$$G_f := \{(f(t), t) : t \in [a, b]\}$$

Osserviamo che le due curve sono semplici e non chiuse.
Le eq. parametriche sono, rispettivamente,

$$- \ (x, y) = \gamma(t) = (t, f(t))\, t \in [a, b] \iff \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}, \ t \in [a, b] \text{ e}$$

$$- \ (x, y) = \gamma(t) = (f(t), t)\, t \in [a, b] \iff \begin{cases} x = f(t) \\ y = t \end{cases}, \ t \in [a, b]$$

(ii) *Sia* $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ *la curva definita da* $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$*,* $t \in [0, 2\pi]$
È facile verificare che γ *è una curva piana chiusa* $(\gamma(0) = (1, 0) = \gamma(2\pi))$ *e semplice.*
Il sostegno di γ*,*$\gamma([0, 2\pi])$ *è dato da*

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

L'equazione parametrica di γ *è data da*

$$(x, y) = \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)), t \in [0, 2\pi] \iff \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases} \ t \in [0, 2\pi]$$

(iii) *Sia* $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$ *la curva definita come nell'esempio (ii), cambaindo il dominio.*
La curva è ancora una curva piana chiusa $(\gamma(0) = (1, 0) = \gamma(4\pi))$ *ma non è semplice. Infatti la funzione* $\gamma[0, 4\pi) \to \mathbb{R}^2$ *non è iniettiva.*
La curva ha come sostego C dell'esempio (ii). Da un punto di vista intuitivo, il sostegno di γ *è percorso due volte.*

N.B.: 3.1.1 *Due curve possono avere lo stesso sostegno ma essere differenti, come gli esempi (ii) e (iii)*

(iv) *Sia* $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *la curva definita da* $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$*,* $t \in \mathbb{R}$ γ *è una curva semplice, on chiusa ed il suo sostegno rappresenta un'elica infinia contenuta nel cilindro* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$.
L'eq. parametrica è data da

$$(x, y, z) = \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = cos(t) \\ y = sin(t) \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

3.1.1 Orientazione di una curva semplice

Sia data una curva semplice $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$. Allora essa induce <u>un'orientazione</u> sul suo sostegno $\gamma(I) \subseteq \mathbb{R}^n$.
Più precisamente

Definizione 3.1.2 *Data $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ curva semplice, si dice che il punto $x_1 = \gamma(t_1)$ precede il punto $x_2 = \gamma(t_2)$ se $t_1 < t_2$. L'orientazione della curva viene detta anche verso della curva.*

Esempio 22 *Le curve degli esempi (i), (ii), (iv), essendo semplici, sono tutte orientabili, mentre la curva (iii) non essendo semplice, non è orientabile.*

3.1.2 Vettore velocità di una curva

Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ una curva. Se le componenti $\gamma_i : I \to \mathbb{R}$ $(i = 1, ..., n)$ sono derivabili in un fissato punto $t_0 \in I$, il vettore

$$\gamma'(t_0) = (\gamma_1'(t_0), ..., \gamma_n')$$

è detto vettore velocità di γ in t_0.
Essendo la funzione γ_i derivabile, sappiamo che

$$(*)\, \gamma_i(t) = \gamma_i(t_0) + \gamma_i'(t_0)(t - t_0) + o(t - t_o)\, (t \to t_0)$$

per $i = 1, ..., n$.
Una forma più compatta per scrivere (*) è

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) + o(t - t_o)\, (t \to t_0)$$

Osservazione 3.1.2 *È immediato verificare che $\gamma'(t_0) = D\gamma(t_0)^T$, dove*

$$D\gamma(t_0) = \begin{bmatrix} \gamma_1'(t_0) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t_0) \end{bmatrix} \text{ matrice Jacobiana } n \times 1$$

Definizione 3.1.3 *Se $\gamma'(t_0) \neq \underline{O}_{\mathbb{R}^n}$, si chiama retta tangente alla curva γ nel punto $x_0 = \gamma(t_0)$ la retta di equazione parametrica*

$$x = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) = \gamma_1(t_0) + \gamma_1'(t_0)(t - t_0) + ... + \gamma_n(t_0) + \gamma_n'(t_0)(t - t_0)$$

se $t \in I$

Osservazione 3.1.3 *(i) Sia $n = 2$, $\gamma(t) = (\gamma_1, (t)\gamma_2(t))$, $t \in I$, $p_0 = \gamma(t_0) = (x_0, y_0)$, $\gamma'(t_0) = (v_1, v_2) \neq (0, 0)$. Supponiamo per esempio, $v_2 \neq 0$.
L'eq. parametrica della retta tangente diventa*

$$\begin{cases} x = v_1(t - t_0) + x_0 \\ y = v_2(t - t_0) + y_0 \end{cases} \iff \begin{cases} t - t_0 = \frac{y - y_0}{v_2} \\ \\ x = v_1(t - t_0) + x_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{v_1}{v_2}(y - y_0) + x_0 \iff$$

$$\iff r : v_2(x - x_0) - v_1(y - y_0) = 0$$

(eq. di una retta nel piano x,y passante per (x_0, y_0) di direzione v)

N.B.: 3.1.4 *Si noti che il vettore* $(v_2, -v_1)$ *è* <u>*ortogonale*</u> *al vettore* (v_1, v_2), *in quanto* $(v_1, v_2) \cdot (v_2, -v_1) = 0$, *e la retta* r *può essere riscritta come:*

$$r : (x - x_0, y - y_0) \cdot (v_2, -v_1)$$

(ii) Se $\gamma'(t_0) = \underline{O}_{\mathbb{R}^n}$, *la retta tangente può non esistere*

Esempio 23 $n = 2$, $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, *definita come* $\gamma(t) = (x_0, y_0)\, \forall t \in \mathbb{R}$.
Il sostegno di γ *è il punto* (x_0, y_0)*: non è una curva regolare.*

Definizione 3.1.4 *Una curva* $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$

(a) si dice di classe C^m *se* $\gamma_i : I \to \mathbb{R}$ *sono di classe* $C^m\, \forall i = 1, ..., n$

(b) si dice <u>*regolare*</u> *se* γ *è di classe* C^1 *e* $\gamma'(t) \neq \underline{O}_{\mathbb{R}^n}$ $\forall t \in I$

Definizione 3.1.5 *Data* $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ *curva regolare, si chiama* <u>*versore*</u> *(o direzione) tangente a* γ *il campo vettore*

$$\mathsf{T}_\gamma(t) := \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\, t \in I$$

Definizione 3.1.6 *Una curva* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *si dice* C^1 *a tratti (o regolare a tratti) se esiste una suddivisione* $a = t_0 < ... < t_n = b$ *di* $[a, b]$ *t.c.*

$$\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]} : [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{R}^n$$

è di classe C^1 *(rispettivamente regolare).*
In tal caso γ *si dice anche uunionce delle* N *curve* $\gamma_i := \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ *e si scrive*

$$\gamma := \bigcup_{i=1}^{N} \gamma_i$$

Esempio 24 *Sia* $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ *la curva* $\gamma(t) = (t, |t|)$, $t \in [-1, 1]$.
Allora è facile verificare che γ *una curva regolare a tratti. Infatti se* $-1 = t_0 < 0 = t_1 < t_2 = 1$, *è facile verificare che*

$$\gamma_i \equiv \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]} : [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{R}^2$$

è <u>*regolare.*</u>
Poichè

- $\gamma_1 := (t, -t)$, $t \in [t_0, t_1]$
- $\gamma_1 := (t, t)$, $t \in [t_1, t_2]$

Si noti che il sostegno di γ *è il grafico della funzione* $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $y = f(x) = |x|$

3.1.3 Cambiamento di parametro di una curva

Definizione 3.1.7 *Due curve $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, $\widetilde{g} : \widetilde{I} \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1 si dicono equivalenti se esiste una funzione bigettiva $\varphi : \widetilde{I} \to I$ t.c.*

$$\varphi \in C^1(\widetilde{I}); \varphi'(\tau) \neq 0 \,\forall \tau \in \widetilde{I}; \widetilde{g}(\tau) = \gamma(\varphi(\tau))\tau \in \widetilde{I};$$

In tal caso $\tau \to t = \varphi(\tau) \in I$ si dice cambiamento di parametrizzazione.
Se $\varphi'(\tau) > 0$, $\forall \tau \in \widetilde{I}$, allora si dice che γ, $\widetilde{g}$ hanno lo stesso verso; Se $\varphi'(\tau) < 0$, $\forall \tau \in \widetilde{I}$, allora si dice che γ, $\widetilde{g}$ hanno verso opposto

Esercizio 27 *Siano*

- $\gamma(t) := (cos(t), sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$
-
- $\widetilde{g}(\tau) := (cos(2\tau), sin(2\tau))$, $\tau \in [0, \pi]$
- $\gamma^*(s) := (cos(s), -sin(s))$, $s \in [0, 2\pi]$

Provare che:

1. *$\gamma, \widetilde{g}, \gamma^*$ sono equivalenti*
2. *$\gamma, \widetilde{g}$ hanno lo stesso verso, mentre γ, γ^* hanno verso opposto*

Soluzione:*(suggerimento)*

1. Per provare che $\gamma, \widetilde{g}$ sono eq. basta considerare il cambiamento di parametrizzazione $\varphi : [0, \pi] \to [0, 2\pi]$, $\varphi(\tau) := 2\tau$ per provare che γ, γ^* sono eq. basta considerare il cambiamento di parametrizzazione $\varphi : [0, 2\pi] \to [0, 2\pi]$, $\varphi(s)2\pi - s$

Osservazione 3.1.5 *Si può che: date due curve equivalenti, allora*

1. *esse hanno lo stesso sostegno*
2. *se una delle due fosse semplice, anche l'altra sarebbe semplice*

3.2 Lez - 15, Lunghezza di una curva

Vogliamo ora definire la nozione di lunghezza di una curva.
Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva e sia $\mathscr{D} := t_0 = a < t_1 < ... < t_N = b$ una suddivisione di $[a,b]$: essa induce una suddivisione del sostegno di γ in $N+1$ parti definite da $\gamma(t_0), \gamma(t_1) \dots \gamma(t_N)$.
Consideriamo i segmenti

$$[\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)] := \{s\gamma(t_i) + (1-t)\gamma(t_{i-1}) : 0 \leq s \leq 1\}$$

$i = 1, ..., N$. La lunghezza della spezzata definita dall'unione $\bigcup_{i=1}^{N}[\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)]$ è data da

$$L(\gamma, \mathscr{D}) := \sum_{i=1}^{N} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \in [0, +\infty)$$

Denotiamo

$$L(\gamma) := sup_{\mathscr{D}} L(\gamma, \mathscr{D}) \in [0, +\infty] =_{def} [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

Definizione 3.2.1 *Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva. Se $L(\gamma) < +\infty$, allora la curva si dice rettificabile e $L(\gamma)$ è detta lunghezza di γ*

Osservazione 3.2.1 *Si può provare che esistono curve per cui $L(\gamma) = +\infty$, vedi esempio [BDPG,12.5].*

Teorema 3.2.2 (Lunghezza di una curva) *[BDPG,12.10] Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1. Allora γ è rettificabile e*

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + ... + \gamma_n'(t)^2} \, dt$$

Corollario 3.2.1 (Lunghezza curve piane cartesiane) *Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una curva piana cartesiana di classe C^1, cioè*

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, f(t)) & t \in [a,b] \\ \text{oppure} & \\ (f(t), t) & t \in [a,b] \end{cases}$$

con $f \in C^1([a,b])$. Allora γ è rettificabile e

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} \, dt$$

Esempio 25 *Sia $f(t) = t^2$, allora $L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} \, dt$*

Teorema 3.2.3 (Indipendenza della lunghezza dalla parametrizzazione) *Siano $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e $\widetilde{g} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ due curve di classe C^1 equivalenti. Allora*

$$L(\gamma) = L(\widetilde{g})$$

Dim. 15 *Sia $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ il cambiamento di parametrizzazione, cioè*

$$\widetilde{g}(\tau) = \gamma(\varphi(\tau))\, \forall \tau \in [\alpha, \beta]$$

$\varphi \in C^1$ e bigettiva.
Supponiamo, per esempio, che $\varphi'(\tau) > 0$ $\forall \tau \in [\alpha, \beta]$. Allora per il Teorema 7.4.1 e (RDC)

$$L(\widetilde{g}) =_{7.4.1} \int_\alpha^\beta \|\widetilde{g}'(\tau)\|\ d\tau =_{(RDC)} \int_\alpha^\beta \|\gamma'(\varphi(\tau)) \cdot \varphi'(\tau)\|\ d\tau =$$

$$= \int_\alpha^\beta \|\gamma'(\varphi(\tau))\|\, \varphi'(\tau)\, d\tau =$$

Poniamo $t = \varphi(\tau)$ e otteniamo

$$= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \|\gamma'(t)\|\ dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\ dt = L(\gamma)$$

Osservazione 3.2.4 *È facile verificare che una curva C^1 a tratti è rettificabile e, se $\gamma = \bigcup_{i=1}^N \gamma_i$, con $\gamma_i : [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1, allora*

$$L(\gamma) = \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma_i'(t)\|\ dt$$

3.3 Integrali curvilinei di I specie

Motivazione fisica: Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una curva di classe C^1 e supponimao che il sostegno di γ, $\Gamma := \gamma([a, b]) \subseteq \mathbb{R}^3$ modelizzi un filo rigiido dello spazio di densità lineare f, ovvero f ha la dimensione di una massa x unità di lunghezza.
Se f fosse costante, M:= massa totale filo, allora

$$M = f \cdot L(\gamma) = \int f\, \|\gamma'(t)\|\ dt := \int_\gamma f\, ds$$

$ds \cong \|\gamma'(t)\|\ dt$ elemento infinetesimale di lunghezza.
In generale, se la densità f non fosse costante, $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ e dunque

$$M = \int_a^b f(\gamma(t))\, \|\gamma'(t)\|\ dt$$

Definizione 3.3.1 *Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1 e sia $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si definisce*

$$\int_\gamma f\, ds = \int_a^b f(\gamma(t))\, \|\gamma'(t)\|\, dt$$

e si chiama Integrale curvilineo di I specie di f lungo γ.

Notazione 3.3.1 *Se γ fosse una crva chiusa e semplice su usa anche il simbolo $\oint_\gamma f\, ds$*

Osservazione 3.3.2

- *L'integrale curvilineo di I specie è lineare.*
- *L'integrale curvilineo di I psecie si estende a curve C^1 a tratti. Infatti $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva C^1 a tratti e $\gamma = \bigcup_{i=1}^N \gamma|_{[t_{i-1},t_i]} : [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, ..., N$ di classe C^1; sia $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ continua. Allora possiamo definire*

$$\int_\gamma f\, ds := \sum_{i=1}^N \int_{\gamma|_{t_{i-1},t_i}} f\, ds$$

Proposizione 3.3.1 *Siano $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\widetilde{g} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ curve di classe C^1 equivalenti e sia $f : \Gamma = \gamma([a,b]) = \widetilde{g}([\alpha,\beta]) \to \mathbb{R}$ continua. Allora*

$$\int_\gamma f\, ds = \int_{\widetilde{g}} f\, ds$$

Esercizio 28 *Dimostrazione.*

3.4 Integrali curvilinei di II specie: campi vettoriali e forme differenziali

3.4.1 Campi vettoriali e forme differenziali

Definizione 3.4.1 *Si chiama campo vettoriale su un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ una mappa $F : E \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = (F_1(x), ..., F_n(x))$ $x \in E$, $F_i : E \to \mathbb{R}$*

Osservazione 3.4.1 *In fisica/ingegneria un campo vettoriale può rappresentare una forza applicata in un punto $x \in E$, dove E è una regione del piano o dello spazio, $E \subseteq \mathbb{R}^2$ o $E \subseteq \mathbb{R}^3$*

Definizione 3.4.2 *Dato un campo vettoriale $F : E \to \mathbb{R}^n$, si chiama forma differenziale (lineare) su E l'espressione formale*

$$\omega = F_1\, dx_1 + ... + F_n\, dx_n = \sum_{i=1}^n F_i\, dx_i = \langle F, dx \rangle$$

Osservazione 3.4.2 *Dalla definizione, si evince che ad ogni*

$$F : E \to \mathbb{R}^n \to \omega := \langle F, dx \rangle$$

Viceversa, data

$$\omega = \langle F, dx \rangle \text{ forma differenziale su } E \to F : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Pertanto si può stabilire una corrispondenza biunivoca tra:

$$\text{campo vettoriale} \iff \text{forma differenziale}$$

Definizione 3.4.3 *Una forma differenziale $\omega = \langle F, dx \rangle$ su un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice di classe C^0(risp C^1) se $F_i \in C^0(E)$ (risp $F_i \in C^1(E)$) $\forall i = 1, ..., n$*

Motivazione fisica:[Lavoro compiuto da una forza lungo un percorso]
Sia $n = 3$, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una forza assegnata,

$$F(x, y, z) := (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

se $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ con $F_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3)$ funzione continua.
Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) = (x(t), y(t), z(t))$ una curva di classe C^1.
La forma diff. ω rappresenta il lavoro compiuto dalla forza F su un punto materiale che si muove di uno spostamento infinitesimo

$$(dx, dy, dz) = (x'(t)\, dt, y'(t)\, dt, z'(t)\, dt)$$

lungo la curva γ.
Più precisamente, se il punto si muovesse lungo la curva γ e all'istante t si trovasse nella posizione $\gamma(t)$, allora il lavoro compiuto dalla forza nell'intervallo infinitesimo ddi tempo dt sarebbe dato da $\langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle\, dt$

Osservazione 3.4.3 *Ricordare che $\langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \|F(\gamma(t))\|\, \|\gamma'(t)\| \cos(\vartheta)$ dove ϑ = angolo formato dai vettori $F(\gamma(t))$ e $\gamma'(t)$*

La motivazione fisica suggerisce la seguente definizione:

Definizione 3.4.4 *Sia $\gamma : [a, b] \to E \subseteq \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1 e sia ω una forma differenziale di classe C^0 su E.*
Si definisce integrale curvilineo di II specie di ω (o del campo F) lungo γ il valore

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle\, dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n F_i(\gamma(t))\gamma_i'(t)\, dt$$

Se γ fosse chiusa il precedente integrale si scrive anche $\oint_\gamma \omega$

Osservazione 3.4.4

1. *L'integrale curvilineo di II specie è lineare*

2. *L'integrale curvilineo di II specie si estende a curve C^1 a tratti. Infatti data $\gamma = \bigcup_{i=1}^N \gamma_i : [a, b] \to E \subseteq \mathbb{R}^n$ una curva C^1 a tratti e ω una forma differenziale continua su E, allora si definisce*

$$\int_\gamma \omega := \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \omega$$

3.4.2 Lez - 16, Teo: Integrale curvilineo di II specie rispetto a curve eq.

Teorema 3.4.5 *Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $\gamma : [a,b] \to E$, $\widetilde{g} : [\alpha, \beta] \to E$ curve C^1 e ω una forma differenziale C^0 su E.*

1. $\int_\gamma \omega = \int_{\widetilde{g}} \omega$ *se $\gamma, \widetilde{g}$ hanno lo stesso verso.*
2. $\int_\gamma \omega = -\int_{\widetilde{g}} \omega$ *se $\gamma, \widetilde{g}$ hanno lo verso opposto.*

Dim. 16 *Siano γ e $\widetilde{g}$ come definite prima e sia $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ il cambiamento di parametrizzazione t.c.*

$$\widetilde{g}(\tau) = \gamma(\varphi(\tau))\, \forall \tau \in [\alpha, \beta]$$

Osserviamo che per RDC,

$$(1)\, \widetilde{g}'(\tau) = \gamma'(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)\, \forall \tau \in [\alpha, \beta]$$

Allora

$$\int_{\widetilde{g}} \omega = \int_\alpha^\beta \langle F(\widetilde{g}(\tau)), \widetilde{g}'(\tau)\rangle \, d\tau =$$

$$=_{(1)} \int_\alpha^\beta \langle F(\gamma(\varphi(\tau))), \gamma'(\varphi(\tau))\rangle \, \varphi'(\tau)\, d\tau$$

Poniamo ora $t = \varphi(\tau)$

$$= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \, dt$$

- *Se $\gamma, \widetilde{g}$ hanno lo stesso verso ($\varphi'(\tau) > 0$), allora $a = \varphi(\alpha)$ e $b = \varphi(\beta)$ e otteniamo la 1.*
- *Se $\gamma, \widetilde{g}$ hanno lo verso opposto ($\varphi'(\tau) < 0$), allora $b = \varphi(\alpha)$ e $a = \varphi(\beta)$ e otteniamo la 2.*

Osservazione 3.4.6 *Le proprietà 1 e 2 sono coerenti con l'interpretazione fisica dell'integrale curvilineo di II sp., come lavoro.*

Esercizio 29 *Sia $\gamma : [a,b] \to E \subseteq \mathbb{R}^n$ regolare e semplice e sia $\omega = \langle F, dx\rangle$ un forma differenziale C^0 su F. Allora*

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \langle F, \mathsf{T}_\gamma \rangle \, ds$$

dove $\mathsf{T}_\gamma(t) := \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$, $t \in [a,b]$

Soluzione:

Ricordiamo che la curva γ si dice regolare se è di classe C^1 e $\gamma'(t) \neq \underline{O}_{\mathbb{R}^n}$, si dice semplice se non è chiusa, oppure è chiusa e $\gamma : [a, b) \to \mathbb{R}^n$ è iniettiva.
Supponiamo che γ non sia chiusa e γ sia iniettiva. È chiaro che se $\Gamma := \gamma([a, b]) \subset E$ sostegno di γ, allora è ben definita la funzione inversa $\gamma^{-1} : \Gamma \to [a, b]$.
Inoltre si può provare che γ^{-1} è continua.
Per definizione di integrale curvilineo di II sp.

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \langle F, dx \rangle = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt =$$

$$= \int_a^b \left\langle F(\gamma(t)), \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right\rangle \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \mathsf{T}_\gamma(t) \rangle \, \|\gamma'(t)\| \, dt =$$

$$= \int_a^b f(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_\gamma f \, ds$$

dove $f(p) = \left\langle F(p), \mathsf{T}_\gamma(\gamma^{-1}(p)) \right\rangle$ se $p \in \Gamma$

Osservazione 3.4.7 *Se F fosse ortogonale a T_γ in ogni punto $\gamma(t)$ allora*

$$\langle F(\gamma(t)), \mathsf{T}_\gamma(t) \rangle = 0 \, \forall t \in [a, b]$$

Dunque

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \langle F, dx \rangle = 0$$

3.4.3 Forme differenziali esatte (o campi vettoriali conservativi)

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $\mathcal{U} \in C^1(E)$. Possiamo associare ad $\mathcal{U}$ la forma diff.

$$d\mathcal{U} = \langle \nabla \mathcal{U}, dx \rangle = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_1} \, dx_1 + \cdots + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_n} \, dx_n$$

che viene anche chiamata differenziale di $\mathcal{U}$ poichè coincide con la notazione con cui indichiamo il differenziale di $\mathcal{U}$

Definizione 3.4.5 *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $\omega = \langle F, dx \rangle$ dove $F : E \to \mathbb{R}^n$ di classe C^0. La forma ω si dice esatta in E se esiste $\mathcal{U} : E \to \mathbb{R}$ di classe C^1 t.c.*

$$\nabla \mathcal{U}(x) = F(x) \, \forall x \in E$$

o, equivalentemente, $d\mathcal{U} = \omega$.
In tal caso $\mathcal{U}$ è detta funzione potenziale (o primitiva) di ω in E.

Osservazione 3.4.8
- *Se $n = 1$, allora un campo vettoriale si riduce ad un campo scalare $F : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pertanto se, per esempio, $E = (a, b)$ e $F \in C^0([a, b])$, allora esiste*

$$\mathcal{U}(x) := \int_a^x F(t) \, dt \, x \in [a, b]$$

Per il teorema fondamentale del calcolo e $\mathcal{U}'(x) = F(x)\ \forall x \in [a,b]$.
Dunque se $n = 1$, $E = (a,b)$, $F \in C^0([a,b])$ esiste (almeno) una primitiva $\mathcal{U}$ della forma $\omega = \langle F, dx\rangle$ che coincide con la primitiva di F su E.

- *Se $n \geq 2$, vedremo che, dato un campo vettoriale $F : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, può esiste un potenziale.*

Teorema 3.4.9 (Integrale per forme esatte) *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, ω forma diff. continua ed esatta su E. Allora per ogni curva $\gamma : [a,b] \to E$ C^1 a tratti vale che*

$$(*) \int_\gamma \omega = \mathcal{U}(\gamma(b)) - \mathcal{U}(\gamma(a))$$

dove $\mathcal{U} : E \to \mathbb{R}$ è un qualunque potenziale di ω

Dim. 17 *Per ipotesi, essendo $\omega = \langle F, dx\rangle$ esatta, esiste un potenziale $\mathcal{U} : E \to \mathbb{R}$ di ω su E, cioè $\mathcal{U} \in C^1(E)$ t.c.*

$$(1)\, \nabla\mathcal{U}(x) = F(x)\, \forall x \in E$$

Supponiamo che $\gamma : [a,b] \to E$ sia di classe C^1. Allora per (RDC) e da (1),

$$(2)\, \frac{d}{dt}\left(\mathcal{U}(\gamma(t))\right) = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x_1}(\gamma(t))\gamma_1'(t) + ... + \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x_n}(\gamma(t))\gamma_n'(t) =$$

$$= \langle \nabla\mathcal{U}(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle = \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$$

$\forall t \in [a,b]$.
Dalla (2) e dal teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$(3) \int_\gamma \omega := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\ dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\left(\mathcal{U}(\gamma(t))\right)\ dt = \mathcal{U}(\gamma(b)) - \mathcal{U}(\gamma(a))$$

Si può provare la (3) in modo analogo, assumendo γ sia C^1 a tratti.

Osservazione 3.4.10
1. *Da (*) segue che se ω fosse esatta (o che F ammette una primitiva) su E, allora per ogni curva chiusa $\gamma : [a,b] \to E$ C^1 a tratti $\oint_\gamma \omega = 0$.*
   Si può provare che vale il viceversa, sotto alcune ipotesi. [BDPG,12.17]
2. *In Fisica le forme diff. esatte sono di particolare importanza. Infatti*

$$\langle F, dx\rangle \text{ è esatta} \iff F \text{ è un campo di forze conservativo}$$

Esempio 26 (di forma non esatta) *Sia $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,*

$$F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

Allora

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy$$

non è esatta su E. Infatti, sia $\gamma : [0, 2\pi] \to E$, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Allora γ è una curva chiusa C^1, ma

$$\oint_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sin(t)}{\cos^2(t) + \sin^2(t)}(-\sin(t)) + \frac{\cos(t)}{\cos^2(t) + \sin^2(t)}(\cos(t)) \right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} 1 \, dt \neq 0$$

Per il teorema precedente ω non può essere esatta su E.

3.4.4 Forma differenziali chiuse

Problema: Dato $F : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ campo vettoriale continuo:

1. Come riconoscere se ω sia esatta?
2. Se ω fosse esatta, come determinare un potenziale $\mathcal{U}$ di ω?

Introduciamo ora un criterio per verificare quando una forma differenziale lineare potrebbe essere esatta.

Definizione 3.4.6 *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $\omega = \langle F, dx \rangle$, dove $F : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = (F_1(x), ..., F_n(x))$ con $F_i \in C^1(E)$ $i = 1, ..., n$. Allora la forma ω si dice <u>chiusa</u> in E se*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \textit{ Regola derivate in croce}$$

$\forall i, j = 1, ..., n$

Proposizione 3.4.1 *Sia ω una forma di classe C^1 in $E \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Allora*

$$(**)\, \omega \textit{ esatta su } E \Rightarrow \omega \textit{ chiusa in } E$$

Dim. 18 *Per ipotesi, essendo ω esatta, esite una funzione potenziale $\mathcal{U}$ t.c.*

$$\nabla \mathcal{U}(x) = \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_n}(x) \right) =$$

$$= (F_1(x), ..., F_n(x)) = F(x) \, \forall x \in E$$

o, equivalentemente,

$$(1)\, \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_i}(x) = F_i(x) \forall x \in E, \forall i = 1, ..., n$$

Per il teo. sull'inversione dell'ordine di derivazione, fissato i e derivando rispetto ad un fissato x_j, nella (1), con $j \neq i$, essendo $\mathcal{U} \in C^2(E)$, otteniamo

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \quad \forall x \in E$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \quad \forall x \in E$$

Dalle identità precedenti, segue che F soddisfa la regola delle derivate in croce, e dunque ω è chiusa.

Osservazione 3.4.11 *Non vale l'implicazione inversa di (**), cioè*

$$\omega \text{ esatta su } E \not\Leftarrow \omega \text{ chiusa in } E$$

Esempio 27 *$n = 2$,*

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy$$

in $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Esercizio 30 *Verificare che ω è chiusa, cioè*

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

in E se $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ se $(x,y) \in E$.
D'altra parte, abbiamo visto che, se $\gamma : [0, 2\pi] \to E$, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, allora γ è una curva chiusa di classe C^1 e $\oint_\gamma \omega = 2\pi$.
Dunque ω non è esatta in E.

Una condizione necessaria e sufficiente che garantisce l'esattezza di una forma è data dal seguente teorema.

Teo: Chiusa = Esatta

Teorema 3.4.12 (Chiusa = Esatta) *[BDPG,12.21] Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, convesso, cioè per definizione*

$$\forall p, q \in E\, [p,q] := \{tp + (1-t)q : 0 \leq t \leq 1\} \subset E$$

Sia $\omega = \langle F, dx \rangle$, dove $F = (F_1, ..., F_n)$ con $F_i \in C^1(E)$ $i = 1, ..., n$. Allora

$$\omega \text{ è esatta su } E \iff \omega \text{ è chiusa in } E$$

Esempio 28 *1.*

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy$$

in $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $[p,q] \not\subset E$ se $p = (-1,1)$ e $q = (1,1)$, in quanto $(0,0) \notin E$. Pertanto E non è convesso.
D'altra parte sappiamo che ω non è esatta.

2.

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

in $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$

Esercizio 31 *E è convesso.*

Essendo ω chiusa in E, per il teorema precedente, ω è esatta in E, cioè esiste una funzione potenziale $\mathcal{U} : E \to \mathbb{R}$ di classe C^1 t.c.

$$\nabla\mathcal{U}(x,y) = F(x,t) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \forall (x,y) \in E$$

Il problema che ora rimane è come calcolare la funzione potenziale $\mathcal{U}$

3.4.5 Costruzione di un potenziale per una forma diff. chiusa su aperto conv.

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ un aperto convesso e sia $\omega = \langle F, dx\rangle$ una forma differenziale chiusa su E. Per il teorema 3.4.12 sappiamo che esiste $\mathcal{U} : E \to \mathbb{R}$ di ω, cioè una funzione $\mathcal{U} \in C^2(E)$ t.c. $\nabla\mathcal{U}(x) = F(x)$ $\forall x \in E$, o eq.,

$$(1)\,\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x_i}(x) = F_i(x)$$

$\forall x \in E, i = 1, ..., n.$

Problema: Come determinare, esplicitamente, una funzione $\mathcal{U}$ verificante (1)?

Procedura per la costruzione di $\mathcal{U}$

Passo 1 Consideriamo la (1) nel caso $i = 1$, cioè l'equazione

$$(2)\,\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x_1}(x_1, ..., x_n) = F_1(x_1, ..., x_n)$$

Fissiamo $x_2, ..., x_n$ ed integriamo la (2) rispetto a x_1 ed otteniamo

$$(3)\,\mathcal{U}(x_1, ..., x_n) = \int F_1(x_1, ..., x_n)\,dx_1$$

Osserviamo che

$$\int F_1(x_1, ..., x_n)\,dx_1 = \mathcal{U}_1(x_1, ..., x_n) + c_1(x_2, ..., x_n)$$

Pertanto dalla (3) otteniamo che $\mathcal{U}$ deve essere della forma

$$(4)\mathcal{U}(x_1, ..., x_n) = \mathcal{U}_1(x_1, ..., x_n) + c_1(x_2, ..., x_n)$$

Passo 2 Imponiamo ora che $\mathcal{U}$ del tipo (4) verifichi la (1) nel caso $i = 2$, cioè

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_2}(x_1, ..., x_n) = \frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial x_2}(x_1, ..., x_n) + \frac{\partial c_1}{\partial x_2}(x_2, ..., x_n)$$

$$= F_2(x_1, ..., x_n)$$

Da questa identità si ricava che

$$(5)\ \frac{\partial c_1}{\partial x_2}(x_2, ..., x_n) = F_2(x_1, ..., x_n) - \frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial x_2}(x_1, ..., x_n)$$

Osserviamo ora che fissati, $x_2, ..., x_n$ la funzione (di una variabile)

$$x_1 \to F_2(x_1, ..., x_n) - \frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial x_2}(x_1, ..., x_n)$$

è costante, quando è definita su un certo intervallo.
Infatti la sua derivata

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_1, ..., x_n) - \frac{\partial^2 \mathcal{U}_1}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, ..., x_n) = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_1, ..., x_n) - \frac{\partial^2 \mathcal{U}_1}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, ..., x_n) =$$

$$= \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_1, ..., x_n) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_1, ..., x_n) = 0$$

Pertanto la funzione è indipendente da x_1 e dunque dipende solo da $x_2, ..., x_n$.
Dunque possiamo scrivere che

$$F_2(x_1, ..., x_n) - \frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial x_2}(x_1, ..., x_n) = g(x_2, ..., x_n)$$

Sostituendo nella (5) otteniamo che

$$(6)\ \frac{\partial c_1}{\partial x_2}(x_1, ..., x_n) = g(x_2, ..., x_n)$$

Fissiamo ora $x_3, ..., x_n$ ed integriamo rispetto x_2 nella (6) e otteniamo

$$c_1(x_2, ..., x_n) = \int g(x_2, ..., x_n)\, dx_2 = \mathcal{U}_2(x_2, ..., x_n) + c_2(x_3, ..., x_n)$$

Sostituendo nella (4), otteniamo che la funzione $\mathcal{U}$ sarà della forma

$$(7)\ \mathcal{U}(x_1, ..., x_n) = \mathcal{U}_1(x_1, ..., x_n) + \mathcal{U}_2(x_2, ..., x_n) + c_2(x_3, ..., x_n)$$

Passo 3 Imponiamo ora che una funzione $\mathcal{U}$ del tipo (7) verifichi (1) con $i = 3$. Ragionando come nel Passo 2, otteniamo che la funzione $\mathcal{U}$ sarà della forma

$$\mathcal{U}(x_1, ..., x_n) = \mathcal{U}_1(x_1, .., x_n) + \mathcal{U}(x_2, ..., x_n) + \mathcal{U}(x_3, ..., x_n) + c_3(x_4, ..., x_n)$$

Passo n otteniamo che la funzione $\mathcal{U}$ è della forma

$$\mathcal{U}(x_1,...,x_n) = c_n + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i(x_i,...,x_n)$$

dove $c_n \in \mathbb{R}$.
Questa funzione $\mathcal{U}$ è la funzione potenziale cercata.

Osservazione 3.4.13 *La procedura proposta porterebbe alla stessa conclusione se nel pass 1, si partisse da*

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_j} = F_j(x)$$

con $J02,...,n$ *e si completasse il procedimento fino ad eliminare le n variabili rimanenti*

Esercizio 32 *Data la forma differenziale*

$$\omega(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

su $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$*, determinare se* ω *sia esatta in* E *e calcolare un potenziale* $\mathcal{U}$ *di* ω *in* E.
Soluzione:

Abbiamo già visto che ω *è esatta in E, essendo* ω *chiusa in E ed E un insieme aperto e convesso.*
Applichiamo la procedura proposta.
Sappiamo che esiste una funzione $\mathcal{U} : E \to \mathbb{R}$ *di* C^2 *t.c.* $\forall (x,y) \in E$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x,y) = F_1(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \qquad (*) \\ \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}(x,y) = F_2(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad (**) \end{cases}$$

Fissiamo $x > 0$ *ed integriamo rispetto ad y la (**). otteniamo*

$$\mathcal{U}(x,y) = \int \frac{x}{x^2+y^2}$$

Esercizio 33 *Verificare:*

$$\int \frac{x}{x^2+y^2} = \arctan\frac{y}{x} + c_1(x)$$

Pertanto, dalla (**) segue che $\mathcal{U}$ *sarà della forma*

$$(***)\,\mathcal{U}(x,y) = \arctan\frac{y}{x} + c_1(x)$$

se $(x, y) \in E$ *Da (*) e (***) segue*

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{x}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} + c_1'(x) = F_1(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

Da cui si ricava che $c_1'(x) = 0$ *se* $x > 0$ *e dunque* $c_1(x) \equiv c \in \mathbb{R}$ *(costante). Pertanto una funzione potenziale di* $\mathcal{U}$ *di* ω *in* E *è data da*

$$\mathcal{U}(x, y) = \arctan\frac{y}{x} + c\, c \in \mathbb{R}$$

Chapter 4

Superfici ed integrali di superfici, [BDPG,15]

4.1 Lez - 17, Superfici in $\mathbb{R}^3$

Intuitivamente una superficie nello spazio è un oggetto bidimensionale, senza spessore.
Prima delle definizione intriduciamo due esemi di superfici note.

Esempio 29

1. *Sia* $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ *e sia* $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ *la funzione definita da* $f(x, y) = x^2 + y^2$.
   Il grafico di f,
   $$S_1 = G_f = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \overline{D}\}$$
   (porzione di paraboloide)

   S_1 *può essere vista come l'immagine della mappa (detta* *parametrizzazione)*
   $$\sigma : \overline{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \sigma(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$$

2. *La sfera di raggio 1 e centro (0,0,0) in* $\mathbb{R}^3$ *1ace il sottoinsieme definito da*
   $$S_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$
   È noto che S_2 *non può essere visto come il grafico di una funzione di due variabili, ma può essere visto come immagine di una parametrizzazione. Per esempio, una parametrizzazione di* S_2 *può essere ottenuta tramite le coordinate sferiche:*
   $$\begin{cases} x = \cos\vartheta \sin\varphi \\ y = \sin\vartheta \sin\varphi \\ z = \cos\varphi \end{cases}$$

dove $\vartheta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi]$.
Più precisamente S_2 *è l'immagine della mappa* $\sigma : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\sigma(\vartheta, \varphi) := (\cos\vartheta \sin\varphi, \sin\vartheta \sin\varphi, \cos\varphi)$$

Prima della definizione di superficie, premettiamo la nozione di curva di Jordan nel piano.

Definizione 4.1.1 *Una* <u>*curva di Jordan*</u> *è una curva piana* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ *semplice e chiusa.*

Teorema 4.1.1 (BDPG,p. 359) *Sia* γ *una curva di Jordan. Allora valgono le seguenti prop.*

1. *Il* <u>*sostegno*</u> $\Gamma = \gamma([a, b])$ *divide il piano in due insiemi aperti di cui uno è limitato, e si chiama* <u>*interno della curva*</u> *(*D_{int}*), e l'altro è illimitato, e si chiama* <u>*esterno della curva*</u> *(*D_{est}*)*

2. D_{int}, D_{est} *hanno la stessa frontiera e coincide con* Γ

Definizione 4.1.2 *Un sottoinsieme* $S \subset \mathbb{R}^3$ *si dice* <u>*superficie*</u> *(elementare) se esiste una mappa* $\sigma : \overline{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

verificante

1. D *è un aperto di* $\mathbb{R}^2$*, interno di una curva di Jordan*

2. σ *è continua e* $\sigma : D \to \mathbb{R}^3$ *è iniettiva*

3. $\sigma(\overline{D}) = S$

Una funzione verificante (1.-3.) è detta parametrizzazione di S.

S si dice <u>*superficie cartesiana*</u> *se esiste una parametrizzazione* $\sigma : \overline{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *del tipo*

$$\sigma(u,v) = \begin{array}{lll} (u, v, f(u, v)) & z = f(x, y) & \\ \textit{oppure} & & \\ (f(u, v), u, v) & x = f(y, z) & (u, v) \in \overline{D} \\ \textit{oppure} & & \\ (u, f(u, v), v) & y = f(x, z) & \end{array}$$

dove $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ *continua.*

Osservazione 4.1.2

1. *Si noti che, a differenza della nozione di curva, nella nozione di superficie è all'immagine della parametrizzazione che si assegna il nome "superficie" e non alla parametrizzazione*

2. *Le superifici considerate sono* <u>*limitate*</u>.
Per includere superfici illimitate si necessiterebbe nella definizione di un cambiamento che non è tratto nel corso.

3. *Data una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$, la parametrizzazione di S non è unica.*

Esercizio 34 *Si provvi che la mappa $\sigma^*(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u^2)$, $(u,v) \in [0,1]\times[0,2\pi]$ è un'altra parametrizzazione della superficie S_1, con $D := (0,1)\times(2\pi)$*

4.1.1 Punti interni e bordo di una superficie

Vogliamo ora precisare la nozione di bordo e punti interni per una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ da un punto di vista intrinseco.
Osserivamo che la precisazione "da un punto di vista intrinseco" evidenzia la differenza con le nozioni di frontiera e parte interna di S, visto come sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$.
Infatti, si può provare che, data $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie, allora

$$\partial S = S \text{ e } \mathring{S} = \varnothing$$

D'altra parte è abbastanza intuitivo ritenere che, per esempio, il bordo (intrinseco) della porzione di paraboloide (S_1), sia la circonferenza

$$\{(x,y,1) : x^2+y^2=1\}$$

mentre il bordo (intrinseco) della sfera sia $\varnothing$.

Vogliamo introdurre due nozioni che formalizzino questa intuizione.

Definizione 4.1.3 *Sia S una superficie*

1. *Un puno $p \in S$ si dice <u>interno a S</u> se esiste un $B(p,r)$ ed una parametrizzazione $\sigma^* : \overline{D^*} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ di $\overline{B(p,r)\cap S}$ tale che $p \in \sigma^*(D^*)$.*
L'insime dei punti interni è denotato da: S'

2. *Si chiama <u>bordo di S</u> e si denota $bor(S)$ l'insieme dei punti che non sono interni ad S, cioè $bor(S) = S \setminus S'$*

Esempio 30

1. *Si potrebbe provare che S_1 ha come punti interni l'insieme*

$$S_1' = \{(x,y,x^2+y^2) : x^2+y^2 < 1\}$$

mentre

$$bor(S_1) = \{(x,y,x^2+y^2) : x^2+y^2 = 1\}$$

2. *La superficie S_2 ha come insieme dei punti interni tutti i punti, $S_2' = S_2$ mentre $bor(S_2) = \varnothing$*

4.2 Regolarità della parametrizzazione e piano tangente ad una superficie

Possiamo intuire, tenendo presente il caso delle curve, che la regolarità delle parametrizzazioni di una superficie potrebbe non bastare per l'esistenza del piano tangente ad una superficie.
In effett, come vedremo, si possono costruire superifci che ammettono parametrizzazione di classe C^1 e non ammettono piano tangente in qualche punto.
Quindi necessiterà individuare, come nel caso delle curve, una condizione aggiuntiva alla regolarità C^1 della parametrizzazione di una superficie, per l'esistenza del piano tangente.

Per capire quale sia questa condizione aggiuntiva, ci aiuteremo con un argomento geometrico che utilizza la nozione di tangente di una curva.

Sia S superficie, sia $\sigma : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ una sua parametrizzazione di classe C^1
L'esistenza di un piano tangente π a S in un punto interno $p_0 = \sigma(u_0, v_0)$ con $(u_0, v_0) \in D$ dovrebbe implicare la seguente proprietà : se $\gamma : [a, b] \to D$ curva di classe C^1 con $\gamma'(t_0) \neq (0, 0) \Rightarrow \widetilde{g} = \sigma \circ \gamma : [a, b] \to S$ è ancora di classe C^1 con $\widetilde{g}'(t_0) \neq (0, 0, 0)$ e la retta tangente alla curva $\widetilde{g}$, passante per $\widetilde{g}(t_0)$, deve appartenere a π.
Siano $\gamma : [a, b] \to D$ di classe C^1 con $\gamma'(t_0) \neq (0, 0)$ e $\gamma(t) = (u(t), v(t))$, $t \in [a, b]$, $\gamma(t_0) = (u_0, v_0)$,

$$\sigma(u, v) := (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

con $(u, v) \in \overline{D}$,

$$\widetilde{g}(t) := \sigma(\gamma(t)) = (x(\gamma(t)), y(\gamma(t)), z(\gamma(t)))$$

per RDC.

Esercizio 35 (1) $\gamma'(t_0) = u'(t_0)\sigma_u(u_0, v_0) + v'(t_0)\sigma_v(u_0, v_0)$ *dove*

$$\sigma_u(u, v) := \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)(u, v)$$

$$\sigma_v(u, v) := \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)(u, v)$$

Vogliamo imporre che $\widetilde{g}'(t_0) \neq (0, 0, 0)$.
Essendo $\gamma'(t_0) \neq (0, 0)$, *allora da (1) segue*

$$(2)\, \sigma_u(u_0, v_0) \text{ e } \sigma_v(u_0, v_0) \text{ sono L.I.}$$

Ricordiamo ora che:

$$(2) \iff \sigma_u(u_0, v_0) \wedge \sigma_v(u_0, v_0) \neq (0, 0, 0)$$

dove dati $w = (w_1, w_2, w_3), z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$

$$w \wedge z = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} = (w_2 z_3 - z_2 w_3, w_1 z_3 + z_1 w_3, w_1 z_2 - z_1 w_2) \in \mathbb{R}^3$$

(prodotto vettore di w e z)
Ricordiamo inoltre che valgono le seguenti proprietà

- $w \wedge z$ *è ortogonale sia a w che a z;*
- $\|w \wedge z\| = \|w\| \, \|z\| \sin \alpha$*;*
- $w \wedge z = (0, 0, 0) \iff$ *w e z sono paralleli;*

Consideriamo ora il piano $\pi \subset \mathbb{R}^3$ *definito da*

$$\pi := \{\sigma(u_0, v_0) + \lambda \sigma_u(u_0, v_0) + \mu \sigma_v(u_0, v_0) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

(eq. parametrica di un piano)

Osserivamo che π *è il piano di eq.:*

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

dove, $(a, b, c) := \sigma_u(u_0, v_0) \wedge \sigma_v(u_0, v_0) \neq (0, 0, 0)$, $(x_0, y_0, z_0) := \sigma(u_0, v_0)$
Infatti, basta osservare che, se $(x, y, z) \in \pi$*, allora* (x, y, z) *verifica (*), allora, per proprietà del prodotto vettore, esistono* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *t.c.*

$$(x, y, z) = \sigma(u_0, v_0) + \lambda \sigma_u(u_0, v_0) + \mu \sigma_v(u_0, v_0) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Infine si osservi che la retta tangente alla curva $\widetilde{g}$*, passante pr* $\widetilde{g}(t_0)$*, di eq. parametrica*

$$(x, y, z) = \sigma(u_0, v_0) + \widetilde{g}'(t_0)(t - t_0) = \sigma(u_0, v_0) + (u'(t_0)\sigma_u(u_0, v_0) + v'(t_0)\sigma_v(u_0, v_0))(t - t_0)$$

$$= \sigma(u_0, v_0) + u'(t_0)\sigma_u(u_0, v_0)(t - t_0) + v'(t_0)\sigma_v(u_0, v_0)(t - t_0) \in \pi$$

$\forall t \in \mathbb{R}$. *Dunquq essa è contenuta in* π

Definizione 4.2.1 *Sia S superfice e sia* $p_0 \in S'$

1. *Il punto* p_0 *si dice* <u>*regolare*</u> *se esistono* $B(p_0, r_0)$ *ed una parametrizzazione* $\sigma : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ *di* $\overline{B(p_0, r_0) \cap S}$ *t.c.*

   1.1 σ *è di classe* C^1

   1.2 *vale (2) per il punto* $(u_0, v_0) \in D$ *t.c.* $\sigma(u_0, v_0) = p_0$.
   In tal caso il piano π *si chiama* <u>*piano tangente*</u> *a S nel punto* p_0.
   Le due direzioni (o versori)

   $$\pm \frac{\sigma_u(u_0, v_0) \wedge \sigma_v(u_0, v_0)}{\|\sigma_u(u_0, v_0) \wedge \sigma_v(u_0, v_0)\|}$$

   si chiamano <u>*direzioni*</u> *(o versori) normali a S in* p_0

2. *S si dice* <u>*regolare*</u>*, se tutti i punti interni di S sono regolari.*

Osservazione 4.2.1 *Sia* $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *intorno di una curva di Jordan e sia* $f \in C^0(\overline{D}) \cap C^1(D)$. *Consideriamo la superficie cartesiana*

$$S = G_f = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \overline{D}\}$$

Allora

Esercizio 36 1. *ogni punto* $p_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ *con* $(x_0, y_0) \in D$ *è interno di S regolare.*

2. *L'eq. del piano tangente a S nel punto* p_0 *è data da*

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Soluzione: *Si consideri la parametrizzazione di S data da*

$$\sigma(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

$(u, v) \in \overline{D}$

Esercizio 37 *Provare che*

$$\sigma_u(u_0, v_0) \wedge \sigma_v(u_0, v_0) = (-\partial_u f(u, v), -\partial_v f(u, v), 1) \ (u, v) \in D$$

Da ciò segue subito il punto uno.
Inoltre ricordando l'eq cartesiana del piano tangente a S nel punto p_0 *(vedi (*)), segue subito il punto due.*

4.3 Lez - 18, Superfici orientabili

Per introdurre il concetto di orientabilità di una superficie partiamo dal caso più semplice di una superficie cartesiana.
Per esempio, supponiamo che una superficie sia parametrizzata dalla mappa

$$\sigma : \overline{D} \to \mathbb{R}^3 \; \sigma(u,v) = (u, v, f(u,v))$$

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ interno di una curva di Jordan $f \in C^0(\overline{D}) \cap C^1(D)$.
I due versori normali a S nel punto $p = \sigma(u,v)$, $(u,v) \in D$ sono date da

$$\pm \frac{\sigma_u(u_0,v_0) \wedge \sigma_v(u_0,v_0)}{\|\sigma_u(u_0,v_0) \wedge \sigma_v(u_0,v_0)\|} = \pm \frac{(-\partial_u f(u,v), -\partial_v f(u,v), 1)}{\sqrt{1 + |\nabla f(u,v)|^2}}$$

Si noti che la terza componente del vettore

$$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f(u,v)|^2}} \neq 0$$

e $S' = \sigma(D)$.
Pertanto è sempre possibile selezionare, in ciascun punto, il versore normale che "punti verso l'alto" e lo denotiamo con

$$N_S^+(x,y,z) = \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|} \left(\sigma^{-1}(x,y,z)\right)$$

$(x,y,z) \in S'$, dove $\sigma^{-1} : S' \to D$, $\sigma'(x,y,z) = (x,y)$, mentre denotiamo

$$N_S^-(x,y,z) = -N_S^+(x,y,z)$$

Si noti che $N_S^+, N_S^- : S' \to \mathbb{R}^3$ sono continue.
Si dice in questo caso che sono possibili due orientazioni della superficie S, indotte dalla parametrizzazione.
Più in generale vale la seguente

Definizione 4.3.1 *Una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice orientabile se esiste una mappa $N_S^+ : S' \to \mathbb{R}^3$ t.c.*

1. *$N_S^+(p)$ coincide con uno dei due versori normali definiti tramite parametrizzazione;*
2. *N_S^+ è continua.*

N_S^+ è detto versore normale positivo a S.
Definiamo $N_S^- = -N_S^+$

Esempio 31 • *(Porzione di paraboloide)*
Sia $S = \{(x,y,x^2+y^2) : x^2+y^2 \leq r^2\}$
Sappiamo che l'insieme dei punti interni è dato da

$$S' := \{(x,y,x^2+y^2) : x^2+y^2 < r^2\}$$

$$\overline{D} := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq r^2\}$$

$\sigma : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(u,v) := (u, v, u^2 + v^2)$
$\sigma^{-1} : S' \to D$, $\sigma^{-1}(x,y,z) = (x,y)$.
Definiamo la mappa N_S^+,

$$N_S^+(x,y,z) = \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|}\left(\sigma^{-1}(x,y,z)\right) = \frac{(-2x,-2y,1)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$$

se $(x,y,z) \in S'$.
È facile verificare che N_S^+ *è un'orientazione di S.*
L'altra orientazione è data da $N_S^- = -N_S^+$. *In questo caso si dice cche l'orientazione positiva è indotta dalla parametrizzazione* σ

- *(Sfera di* $\mathbb{R}^3$*)*

$$S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$$

4.4 Integrali di superficie

Incominciamo a definire la nozione di area di una superficie.

4.4.1 Idea per definire l'area di una superficie

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e sia $\sigma : \overline{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una sua parametrizzazione.
Sia $Q = [u_0 + u_0 d_u] \times [v_0, v_0 + dv]$ cpn $(u_0, v_0) \in D$, l'elemento infinitesimo di area dS è dato da

$$(1)\, dS = area(\sigma(Q))$$

se du e dv sono quantità positive "molto piccole".
Ricordiamo che essendo S regolare, ammette piano tangente nel punto $p_0 = \sigma(u_0, v_0)$ definito da

$$\pi = \{\sigma(u_0,v_0) + \lambda\sigma_u(u_0,v_0) + \mu\sigma_v(u_0,v_0) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Essendo σ di classe C^1 è differenziabile in p_0, cioè

$$(2)\, \sigma(u,v) = \sigma(u_0,v_0) + d\sigma(u_0,,v_0)(u-u_0, v-v_0) + o\left(\|(u-u_0, v-v_0)\|\right)$$

$\forall (u,v) \in D$, dove per definizione $d\sigma(u_0,v_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e

$$d\sigma(u_0,v_0)(\lambda,\mu) := D\sigma(u_0,v_0)\begin{bmatrix}\lambda\\ \mu\end{bmatrix}\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$$

$$D\sigma(u_0,v_0) := \begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\\ \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{bmatrix}(u_0,v_0) \text{ matrice Jacobiana di } \sigma \text{ in } (u_0,v_0)$$

$$D\sigma(u_0,v_0) = \left[\sigma_u(u_0,v_0) \quad | \quad \sigma_v(u_0,v_0)\right]$$

Se du e dv sono molto piccoli, per l'approssimazione (2), possiamo considerare nullo $o\left(\|(u-u_0, v-v_0)\|\right)$.
Perciò

$$(3)\, area(\sigma(Q)) \simeq area(\widetilde{Q})$$

dove

$$\widetilde{Q} = \mathsf{T}(Q) = \{\sigma(u_0,v_0) + \lambda\sigma_u(u_0,v_0) + \mu\sigma_v(u_0,v_0) : \lambda \in [0, du], \mu \in [0, dv]\} \subseteq \pi$$

(parallelogramma determinato dal vertice $\sigma(u_0,v_0)$ e dai vettori $du \cdot \sigma_u(u_0,v_0)$ e $dv \cdot \sigma_v(u_0,v_0)$) e

$$\mathsf{T}(\lambda,\mu) := \sigma(u_0,v_0) + d\sigma(u_0,v_0)(\lambda,\mu)\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$$

Denotiamo

$$w = du \cdot \sigma_u(u_0,v_0) \text{ e } z = dv \cdot \sigma_v(u_0,v_0)$$

Allora

$$(4)\, area(\widetilde{Q}) = \|w\|\,\|z\| \sin\alpha := \|w \wedge z\| = \|\sigma_u(u_0,v_0) \wedge \sigma_v(u_0,v_0)\|\; du\, dv$$

dove $\alpha =$ angolo tra w e z.
Pertanto da (1), (3), (4) otteniamo

$$dS \simeq \|\sigma_u(u_0,v_0) \wedge \sigma_v(u_0,v_0)\|\; du\, dv$$

Definizione 4.4.1 *Sia S una superficie regolare di parametrizzazione $\sigma : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ insieme misurabile e supponiamo che la funzione*

$$(*) D \ni (u,v) \to \|\sigma_u \wedge \sigma_v\|(u,v)$$

sia limitata.
Si chiama <u>area di S</u> il valore

$$A(S) := \iint_D \|\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)\|\; du\, dv$$

Una superficie S regolare per cui valga $(*)$ si dice <u>di area ben definita</u>

Esempio 32 1. *Calcolare l'area della sfera di centro (0,0,0) e raggio $r > 0$*
Soluzione:

Possiamo rappresentare

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$$

e consideriammo la sua parametrizzazione in coordinate sferiche, cioè la mappa $\sigma : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$, $\overline{D} = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$,

$$\sigma(u,v) = r\left(\cos u \sin v, \sin u \sin v, cosv\right)$$

Esercizio 38 *Verificare*

$$\|\sigma_u \wedge \sigma_v\| = r^2 \,|\sin v|$$

Pertanto

$$A(S) = \iint_D \|\sigma_u \wedge \sigma_v\|\,(u,v)\,du\,dv = \iint_D r^2 \,|\sin v|\; du\,dv =$$

$$= r^2 \left(\int_0^{2\pi} du\right) \cdot \left(\int_0^{\pi} \sin v\,dv\right) = r^2 \cdot 2\pi\,(\,-cosv|_0^{\pi}\,) = 4\pi r^2$$

2. *Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ interno di una curva di Jordan, e sia $f \in C^0(\overline{D}) \cap C^1(D)$ e supponiamo che $\partial_u f, \partial_v f : D \to \mathbb{R}$ siano limitate.*
   Allora se $S = G_f := \{(u,v,f(u,v)) : (u,v) \in D\}$,

   $$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + |\nabla f(u,v)|^2}\,du\,dv$$

   Soluzione:

   Consideriamo la parametrizzazione cartesiana $\sigma : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ di S definita come

   $$\sigma(u,v) = (u,v,f(u,v))\,(u,v) \in \overline{D}$$

   Sappiamo che

   $$\sigma_u \wedge \sigma_v = (-\partial_u f, -\partial_v f, 1)$$

   se $(u,v) \in D$.
   Pertanto

   $$A(S) = \iint_D \|\sigma_u \wedge \sigma_v\|\,(u,v)\,du\,dv = \iint_D \sqrt{1 + \partial_u f^2 + \partial_v f^2}\,du\,dv =$$

   $$= \iint_D \sqrt{1 + |\nabla f(u,v)|^2}\,du\,dv$$

Esercizio 39 *Siano $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare, $f : \Gamma = \gamma([a,b]) \to [0,+\infty)$ continua, e sia*

$$S = \{(\gamma_1(u), \gamma_2(u), v) : a \le u \le b, 0 \le v \le f(\gamma(u))\}$$

(sottografico di f lungo Γ).
Provare che S è una superficie regolare e $A(S) = \int_\gamma f\,ds$.
Soluzione:

Consideriamo la parametrizzazione $\sigma : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(u,v) = (\gamma_1(u), \gamma_2(u), v)$ dove

$$\overline{D} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u \in [a,b], v \in [0, f(\gamma(u))]\}$$

Allora

- $\sigma_u = (\gamma_1'(u), \gamma_2'(u), 0)$
- $\sigma_v = (0, 0, 1)$

se $(u, v) \in D$ *e*

Esercizio 40 *Verificare:*

1. D *è interno di una curva di Jordan*
2. $\sigma_u \wedge \sigma_v = (\gamma_2'(u), -\gamma_1'(u), 0)$ *se* $(u, v) \in D$
3. $\sigma(\overline{D}) = S$

In particolare, essendo γ *una curva regolare, dal punto (2) segue che* S *è regolare. Inoltre*

$$A(S) = \iint_D \|\sigma_u \wedge \sigma_v\| (u, v)\, du\, dv = \iint_D \sqrt{\gamma_1'(u)^2 + \gamma_2'(u)^2}\, du\, dv$$

Essendo D *un insieme semplice rispetto a* v*, per la formula di riduzione su domini semplici, otteniamo:*

$$A(S) = \iint_D \|\gamma'(u)\|\ du\, dv = \int_a^b \|\gamma'(u)\| \left(\int_0^{f(\gamma(u))} dv \right) du =$$

$$= \int_a^b f(\gamma(u)) \|\gamma'(u)\|\ du =: \int_\gamma f\, ds$$

4.4.2 Generalizzazione di nozione di integrale di I sp. per curve a superfici

Si può generalizzare la nozione di integrale di I specie per curve alle superfici.

Definizione 4.4.2 *Sia* S *una superficie regolare di parametrizzazione* $\sigma : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ *t.c.*

1. $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *misurabile*
2. $D \ni (u, v) \to \|\sigma_u \wedge \sigma_v\| (u, v)$ *sia limitata*

Sia $f : S' \to \mathbb{R}$ *continua e limitata. Il valore*

$$\iint_S f\, dS := \iint_D f(\sigma(u, v)) \|\sigma_u \wedge \sigma_v\| (u, v)\, du\, dv$$

si chiama *integrale di superficie* *di* f*.*

Chapter 5

Il teorema della divergenza nel piano e nello spazio, [BDPG,16]

5.1 Lez - 19

Ricordiamo che se $v \in E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un campo vettoriale di classe $C^1(E)$ su un aperto E, l'operatore

$$v(x) = (v_1(x), .., v_n(x)) \to div(v)(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x) \in \mathbb{R}$$

se $x \in E$, operatore di divergenza

Definizione 5.1.1 *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso, una funzione $f : E \to \mathbb{R}$ si dice di classe $C^1(E)$ se esiste un aperto $E^* \supset E$ ed una funzione $f^* : E^* \to \mathbb{R}$ di classe $C^1(E^*)$ t.c.*

$$f^*(x) = f(x)\, \forall x \in E$$

Più in generale, se $v = (v_1, ..., v_n) : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ campo vettoriale si dice di classe $C^1(E)$ se ogni componente $v_i : E \to \mathbb{R}$ è di classe $C^1(E)$

Osservazione 5.1.1 *Tipicamente utilizzeremo questa nozione nel caso in cui $E = \overline{A} \supset A$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.*

Definizione 5.1.2
1. *Un dominio E semplice rispetto a y si dice regolare a tratti se*

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [\alpha, \beta], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

con $g_1(x) < g_2(x)$ $\forall x \in [\alpha, \beta]$, $g_1, g_2 \in C^1([\alpha, \beta])$

2. Un dominio $E \subseteq \mathbb{R}^2$ semplice rispetto a x si dice regolare a tratti se

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [\alpha, \beta], g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$$

con $g_1(y) < g_2(y)$ $\forall y \in [\alpha, \beta]$, $g_1, g_2 \in C^1([\alpha, \beta])$

Assumiamo, per esempio, che $E \subseteq \mathbb{R}^2$ sia un dominio y-semplice come in (1). Allora si può provare che ∂E è il sostegno di una curva semplice chiusa e ragolare a tratti $\gamma : [\alpha, \beta + 3] \to \mathbb{R}^2$ definita come

$$\gamma = \bigcup_{i=1}^{4} \gamma_i$$

dove

- $\gamma_1(t) = (t, g_1(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$
- $\gamma_2(t) = (\beta, g_1(\beta) + (g_2(\beta) - g_1(\beta))(t - \beta))$, $t \in [\beta, \beta + 1]$
- $\gamma_3(t) = (\beta + (\beta - \alpha)(\beta + 1 - t), g_2(\beta + (\beta - \alpha)(\beta + 1 - t)))$, $t \in [\beta + 1, \beta + 2]$
- $\gamma_4(t) = (\alpha, g_2(\alpha) + (g_2(\alpha) - g_1(\alpha))(\beta + 2 - t))$, $t \in [\beta + 2, \beta + 3]$

Si noti che γ è una curva di Jordan, che induce un orientamento positivo su ∂E. Infatti una curva di Jordan si dice che induca un orientamento positivo su ∂E, frontiera del suo interno, quando ∂E è prcorso in senso anti-orario. In questo caso l'insieme E è tenuto a sinistra quanto ∂E è percorso.
Con questa convenzione, se ω è una forma differenziale continua su ∂E e $f \in C^0(\partial E)$ si pone, per definizione,

$$\int_{\partial^+ E} \omega = \int_\gamma \omega, \int_{\partial E} f\, ds = \int_\gamma f\, ds$$

Vale allora il seguente fondamentale risultato

5.2 Teorema Gauss-Green

Teorema 5.2.1 (formule di Gauss-Green per domini semplici) *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio semplice, regolare a tratti e sia $f \in C^1(E)$. Allora*

$$(GG1) \iint_E \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{\partial^+ E} f\, dy$$

$$(GG2) \iint_E \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_{\partial^+ E} f\, dx$$

Osservazione 5.2.2 *Le formule (GG1) e (GG2) collegano un integrale doppio su un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^2$ ad un integrale curvilineo sulla frontiera ∂E. Quindi si "abbassa" la dimensione sull'insieme su cui si integra da 2 (insieme E) a 1*

(insieme ∂E).
In questo senso questo risultato può essere considerato l'analogo in $\mathbb{R}^2$ del teorema fondamentale del calcolo dell'integrale dove si afferma che se $v \in C^1([a,b])$,

$$\int_a^b \frac{dv}{dx}(x)\,dx = v(b) - v(a)$$

Quindi l'integrale di una funzione su un intervallo (dim = 1) al valore della sua primitiva in due punti (dim = 0).

Esercizio 41 *Siano $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $a, b \in C^1(\mathbb{R})$ e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da*

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)\,dy$$

Supponendo noto che $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dx}\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dy = \int_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy$$

provare che

$$\exists F'(x) = f(x,b(x))b'(x) - f(x,a(x))a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy$$

Soluzione:

Si osservi che $F(x) = G(H(x))$, $x \in \mathbb{R}$, dove $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definite come

$$G(x,s,t) := \int_s^t f(x,y)\,dy, H(x) = (x, a(x), b(x))$$

Per RDC,

$$\exists F'(x) = \nabla G(H(x)) \cdot H'(x)\, \forall x \in \mathbb{R}$$

D'altra parte poichè

$$\nabla G(x,s,t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\int_s^t f(x,y)\,dy, -f(x,s), f(x,t)\right) =$$

$$= \left(\int_s^t \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dy, -f(x,s), f(x,t)\right)$$

e

$$H'(x) = (1, a'(x), b'(x))$$

segue la tesi.

5.3 Lez - 20, Dimostrazione Gauss-Green

Dimostriamo ora il teorema di Gauss-Green, 5.2.1,

***Dim.* 19** *Supponiamo che E sia semplice rispetto a y e sia rappresentato con le notazioni precedenti.*

- *Incominciamo a provare (GG2).*
  Dall'esercizio 5 foglio 10, segue:
  $$(1)\ \int_{\partial^+ E} f\,dx = \int_\alpha^\beta \left(f(x,g_1(x)) - f(x,g_2(x))\right)\,dx$$
  Per la formula di riduzione degli integrali doppi su domini semplici,
  $$(2)\ \iint_E \frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial f}{\partial y}\,dy\right)\,dx =$$
  $$= \int_\alpha^\beta \left(f(x,g_2(x)) - f(x,g_1(x))\right)\,dx$$
  Da (1) e (2) segue (GG2)
- *Proviamo ora (GG1).*
  Definiamo $F : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ come
  $$F(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy$$
  Per l'esercizio precedente (41)
  $$F'(x) = f(x,g_2(x))g_2'(x) - f(x,g_1(x))g_1'(x) + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy$$
  $\forall x \in [\alpha,\beta]$.
  Integrando rispetto a x la precedente identità , otteniamo
  $$F(\beta) - F(\alpha) = \int_\alpha^\beta F'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta =$$
  $$= \int_\alpha^\beta f(x,g_2(x))g_2'(x) - \int_\alpha^\beta f(x,g_1(x))g_1'(x) + \int_\alpha^\beta \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy\right)\,dx =$$
  $$= \iint_E \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy$$
  Possiamo riscrivere la precedente identità come
  $$(3)\ \iint_E \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta f(x,g_1(x))g_1'(x)\,dx + \int_{g_1(\beta)}^{g_2(\beta)} f(\beta,y)\,dy -$$

$$-\int_{\alpha}^{\beta} f(x, g_2(x))\, dx - \int_{g_1(\alpha)}^{g_2(\alpha)} f(\alpha, y)\, dy$$

D'altra parte, utilizzando la definizione di integrale curvilineo di II specie di $\omega = f\, dy$ lungo γ si ottiene:

Esercizio 42

$$(4) \int_{\partial^+ E} \omega = \int_{\gamma} \omega = \sum_{i=1}^{4} \int_{\gamma_i} \omega =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(x, g_1(x)) g_1'(x)\, dx + \int_{g_1(\beta)}^{g_2(\beta)} f(\beta, y)\, dy -$$

$$-\int_{\alpha}^{\beta} f(x, g_2(x))\, dx - \int_{g_1(\alpha)}^{g_2(\alpha)} f(\alpha, y)\, dy$$

Da (3) e (4) segue (GG1)

Una conseguenza importante delle formule di 5.2.1 è il teorema della divergenza. Prima però enunciamo la nozione di versore normale esterno ad un dominio semplice regolare a tratti.

5.3.1 Versore normale esterno ad un insieme semplice regoalre a tratti nel piano

Assumiamo che $E \subseteq \mathbb{R}^2$ si un insieme y-semplice regolare a tratti ed utilizziamo ancora le nozioni precedenti.
Ricordiamo che $\partial E =$ sostegno di γ, dove γ è chiusa, semplice, regolare a tratti, $\gamma = \cup_1^4 \gamma_i$ e γ è percorsa in senso anti-orario. Più precisamente

$$\gamma : [\alpha, \beta + 3] \to \partial E$$

e, se $\alpha = t_0 < t_1 = \beta < t_2 = \beta + 1 < t_3 = \beta + 2 < t_4 = \beta + 3$, $\gamma_i : [t_{i-1}, t_i] \to \partial E$ regolare e

$$\gamma_i(t) = (x_i(t), y_(t))\ i = 1, 2, 3, 4$$

Definiamo, per ogni punto $p \in \partial E$, con $p \neq \gamma(t_{i-1})$, $\gamma(t_i)$ (i = 1,2,3,4) i versori

$$\mathsf{T}^+(p) \frac{(x_i'(t), y_i'(t))}{\|\gamma'(t)\|}$$

se $p = \gamma(t)$, $t \in (t_{i-1}, t_i)$ e

$$Ne(p) := \frac{(y_i'(t), -x_i'(t))}{\|\gamma'(t)\|}$$

se $p = \gamma(t)$, $t \in (t_{i-1}, t_i)$.
I versori $\mathsf{T}^+(p)$ e $Ne(p)$ sono detti, risp., versore tangente positivo e versore normale esterno a ∂E.
È facile verificare che $\mathsf{T}^+(p)$ e $Ne(p)$ sono ortogonali e si potrebbe provare che $Ne(p)$ punta vero l'esterno di E.

Teorema 5.3.1 (divergenza per domini semplici) *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio semplice, regolare a tratti e sia $v = (v_1, v_2) : E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ di classe $C^1(E)$. Allora*

$$(GG) \quad \iint_E div(u)\, dx\, dy = \int_{\partial E} \langle v, Ne \rangle \; ds = \int_{\partial^+ E} (v_1\, dy - v_2\, dx)$$

Dim. 20 *Proviamo (GG) nel caso in cui E sia y-semplice, regolare a tratti ed utilizziamo le notazioni precedenti, con cui abbiamo rappresentato E.*

$$\int_{\partial E} \langle v, Ne \rangle \; ds := \int_\gamma \langle v, Ne \rangle \; ds = \sum_{i=1}^{4} \int_{\gamma_i} \langle v, Ne \rangle \; ds =$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \langle v(\gamma_i(t)), Ne(\gamma_i(t)) \rangle \, \|\gamma'(t)\| \; dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (v_1(\gamma_i(t)) y_i'(t) - v_2(\gamma_i(t)) x_i'(t)) \; dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \int_{t_{i-1}}^{t_i} v_1(\gamma_i(t)) y_i'(t) - \sum_{i=1}^{4} \int_{t_{i-1}}^{t_i} v_2(\gamma_i(t)) x_i'(t)\, dt =$$

$$= \int_{\partial^+ E} v_1\, dy - \int_{\partial^+ E} v_2\, dx =_{(GG1+GG2)}= \iint_E \frac{\partial v_1}{\partial x}\, dx\, dy + \iint_E \frac{\partial v_2}{\partial y}\, dx\, dy =$$

$$= \iint_E \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) dx1\, dy = \iint_E div(v)\, dx\, dy$$

5.3.2 Teorema della divergenza per insiemi generali del piano

Il teorema della divergenza vale per insiemi del piano molto generali

Definizione 5.3.1 *Dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice <u>convesso</u> se, $\forall p, q \in A$, essite una curva C^1 a tratti $\gamma : [a, b] \to A$ t.c. $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$*

Osservazione 5.3.2 *Un insieme convesso è connesso, mentre il viceversa può non valere. Infatti, se A è convesso presi $p, q \in A$ se definiamo la curva C^1 $\gamma : [0, 1] \to A$, definita come $\gamma(t) = tq + (1 - t)p$ è la curva cercata.*
Invece se, n=2, e

$$A = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$$

abbiamo visto che A è non è convesso. D'altra parte è facile convincersi che A è connesso.

Definizione 5.3.2 *Un insieme E si dice <u>dominio reolare a tratti</u> se*

1. *$E = \overline{A}$, con A aperto, connesso e limitato*

2. *E è misurabile*

3. *∂E è l'unione disgiunta del sostegno di k curve di Jordan, C^1 a tratti, orientate in modo tale da percorrere ∂E tenendo a sinistra E.*

Esempio 33 *Sia $E = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.*
Allora E è n dominio regolare a tratti.
Infatti $E = \overline{A}$ dove $A = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$, con A aperto limitato e connesso. Inoltre E è misurabile e $\partial E = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, dove

- $\Gamma_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} = \gamma_1([0, 2\pi])$
- $\Gamma_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\} = \gamma_2([0, 2\pi])$

dove

- $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \partial E$, $\gamma_1(t) = (cost, -sint)$
- $\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \partial E$, $\gamma_2(t) = (2cost, 2sint)$

Dato E dominio regolare a tratti, data ω forma diff. di classe C^0 su ∂E, data $f : \partial E \to \mathbb{R}$ di classe C^0 su ∂E, definiamo

$$\int_{\partial^+ E} \omega = \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i} \omega$$

e

$$\int_{\partial E} f\, ds = \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i} f\, ds$$

5.3.3 Versore normale esterno ad un dominio regolare a tratti del piano e teo. della divergenza

Sia E un dominio regolare a tratti.
Ricordiamo che $\partial E =$ unione disgiunta dei sostegni di k curve $\gamma_1, ..., \gamma_k$ di Jordan regolari a tratti, orientate in modo tale da percorrere ∂E tenendo a sinistra E.
Definiamo in ogni punto di ∂E, eccetto al più un numero finito di punti, il versore tangente positivo in un punto $p \in \partial E$ nel modo seguente:
se $\gamma_i(t) = (x_i(t), y_i(t)) = p$,

$$\mathsf{T}^+(p) = \frac{(x_i'(t), y_i'(t))}{\|\gamma_i'(t)\|}$$

Si definisce versore normale esterno in un punto $p \in \partial E$ il versore

$$Ne(p) = \frac{(y_i'(t), -x_i'(t))}{\|\gamma_i'(t)\|}$$

se $p = \gamma_i(t)$

Teorema 5.3.3 (della divergenza nel piano) *[BDPG,16.5] Sia $E \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio regolare a tratti e sia $v : E \to \mathbb{R}^2$ di classe $C^1(E)$. Allora*

$$(GG) \iint_E div(v)\, dx\, dy = \int_{\partial E} \langle v, Ne\rangle \; ds = \int_{\partial^+ E} v_1\, dy - v_2\, dx$$

La quantità

$$\int_{\partial E} \langle v, Ne\rangle \; dS$$

rappresenta il flusso del campo v ... dell'insieme E.

Il teorema della divergenza ha fondamentali applicazioni fisiche/ingegneristiche.

Chapter 6

Esercitazioni

6.1 Lezione 1 - 09/03/2022

Esercizio 6.1.1 *Determinare e disegnare nel piano xy il dominio delle seguenti funzioni, $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dove A: dominio che dobbiamo determinare.*

$$f(x,y) = \log(4(x^2+y^2)-1)$$

Soluzione:

$$4(x^2+y^2)-1>0 \iff x^2+y^2>\frac{1}{4}$$

Studiamo quindi: $x^2+y^2=\frac{1}{4}$ la circonferenza di centro $c=(0,0)$ e raggio $r=\frac{1}{2}$,

$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2>\frac{1}{4}\} = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B((0,0),\frac{1}{2})}$$

dove:

- $\overline{B((0,0),\frac{1}{2})} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2}\le\frac{1}{2}\}$
- $B((0,0),\frac{1}{2}) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2}<\frac{1}{2}\}$

Insiemi aperti e chiusi
$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy\ge 0\}$, *A è chiuso* $\iff$ A^c *è aperto.*
Definiamo $\bar{A}=A$, $xy\ge 0 \iff \begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0\end{cases} \vee \begin{cases} x\le 0 \\ y\le 0\end{cases}$ *Disegnando gli assi:*
$A^c=\mathbb{R}^2\setminus A$ *è aperto. Fisso ora* $(x_0,y_0)\in A^c$, $r=d(\partial A,(x_0,y_0))=\min|x_0|,|y_0|$.
La palla $B((x_0,y_0),\frac{r}{2})\subset A^c \Rightarrow A^c$ *è aperto* $\Rightarrow A$ *è chiuso.*

Esercizio 6.1.2 $f(x,y)=\sqrt{y^2-x^4}$, $y^2\ge x^4$.

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y^2\ge x^4\}$$

Proviamo a scrivere $y^2 - x^4$ come

$$y^2 - x^4 = (y - x^2)(y + x^2) \geq 0$$

Due casi:

- $y \geq x^2$
- $y \geq -x^2$

(Dal grafico otteniamo)

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 \vee y \leq -x^2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq -x^2\}$

Esercizio 6.1.3 *Disegnare l'insieme di livello delle seguenti funzioni*

$$C_t = \{(x, y \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = t)\}$$

con $t \in \mathbb{R}$.
$f(x,y) = x^2y$, fissiamo $t \in \mathbb{R}$, $t = x^2y$

1. $t = 0$, $x^2y = 0 \Rightarrow y = 0 \vee x = 0$
2. $t > 0$, $t = x^2y \iff y = \frac{t}{x^2}$
   - $t = 1$, $y = \frac{1}{x^2}$
   - $t = 2$, $y = \frac{2}{x^2}$
3. $t < 0$, $t = x^2y \iff y = \frac{t}{x^2}$
   - $t = -1$, $y = -\frac{1}{x^2}$
   - $t = -2$, $y = -\frac{2}{x^2}$

Esercizio 6.1.4 $f(x,y) = ye^{-x}$, $t \in \mathbb{R}$, $t = ye^{-x} \iff e^x t = y$

- $t = 0 \Rightarrow y = 0$
- $t = 1 \Rightarrow y = e^{-x}$
- $t = 2 \Rightarrow y = 2e^{-x}$
- $t = -1 \Rightarrow y = -e^{-x}$
- $t = -2 \Rightarrow y = -2e^{-x}$

Esercizio 6.1.5

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x - y}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} =?$$

eleviamo x e y al numeratore per $\frac{3}{3}$, otteniamo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(\sqrt[3]{x})^3 - (\sqrt[3]{y})^3}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}$$

Ricordiamo ora la differenza tra cubi $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$, *otteniamo:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})\left((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + (\sqrt[3]{y})^2\right)}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} =$$

$$= \lim_{(x,y\to(0,0))} (\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + (\sqrt[3]{y})^2 = 0$$

Esercizio 6.1.6

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} =?$$

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \iff$ *per ogni restrizione a un sottoinsieme* B, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f|_B(x,y) = l$

- $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx\}$, $\lim \frac{x^2 y}{x^4+y^2}|_B = \lim \frac{x^2 mx}{x^4+m^2x^2} =$

$$= \frac{x^3 m}{x^2(x^2+m^2)} = x\left(\frac{m}{x^2+m^2}\right) = \lim_{x\to 0} x\left(\frac{m}{x^2+m^2}\right) = 0$$

- $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx^2\}$, $\lim \frac{x^2 y}{x^4+y^2}|_B =$

$$\lim_{x\to 0} \frac{mx^4}{x^4 + m^2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+m^2}$$

  Proviamo due valori di m:

  - $m = 1$, $\frac{1}{2}$
  - $m = 2$, $\frac{2}{5}$

  Ho trovato due restrizioni $\{y = x^2\}$ *e* $\{y = 2x^2\}$ *dove il limite assume due valori distinti. Allora per l'unicità del limite, il limite non esiste.*

Esercizio 6.1.7

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

Coordinate polari
$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\vartheta = arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

- $x = \rho\cos\vartheta$
- $y = \rho\sin\vartheta$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\rho^2\cos^2\vartheta \cdot \rho\sin\vartheta}{\rho^2\cos^2\vartheta + \rho^2\sin^2\vartheta} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\rho^3\cos^2\vartheta \cdot \sin\vartheta}{\rho^2\left(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\right)}$$

Sappiamo che $\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta = 1$, *quindi il limite rimane:*

$$\lim \rho\cos^2\vartheta \cdot \sin\vartheta$$

$$0 \leq |\rho\cos^2\vartheta \cdot \sin\vartheta| < \rho$$

Da cui se $(x, y) \to (0, 0)$ *allora anche* $\rho \to 0$ *e siccome* $\begin{cases} \cos^2\vartheta < 1 \\ \sin\vartheta < 1 \end{cases}$, *grazie al* ***teorema del confronto*** *il limite vale 0.*

Esercizio 6.1.8 *Dire quali insiemi sono aperti/chiusi e quali limitati, inoltre determinare la frontiera.*

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (xy)(y-1) \geq 0\}$$

- $x \geq 0$
- $y \geq 0$
- $y - 1 \geq 0$, $y \geq 1$

Frontiera: $\partial H = \{y = 1\} \cup \{x = 0\} \cup \{y = 0\}$

6.2 Esercitazione 2 - 23/03/2022

Esercizio 6.2.1 *(a)*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(e^{xy^2}-1)\log(1+x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\sin(xy)}$$

Ricordiamo che:

- $\frac{\log(1+t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$
- $\frac{e^t-1}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$
- $\frac{\sin(t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$

Grazie a ciò il nostro limite diventa:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy^2}-1}{xy^2} \cdot \frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} \cdot \frac{xy}{\sin(xy)} \cdot y$$

(i) Definiamo $t = x^2+y^2 \to 0$ *per* $(x,y)\to(0,0)$,

$$\frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{\log(1+t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$$

(ii) Definiamo $t = xy \to 0$ *per* $(x,y)\to(0,0)$,

$$\frac{xy}{\sin(xy)} = \frac{t}{\sin(t)} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$$

(iii) Definiamo $t = xy^2 \to 0$ *per* $(x,y)\to(0,0)$,

$$\frac{e^{xy^2}-1}{xy^2} = \frac{e^t-1}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$$

$$= 1 \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$$

(c)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{\log(1+x^2+y^2)}$$

Ricordiamo che:

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$$

Allora il limite diventa:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{(xy)^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{\log(1+x^2+y^2)} \cdot \frac{(xy)^2}{x^2+y^2}$$

(i) $t = xy \to 0$ *per* $(x, y) \to (0, 0)$

$$\frac{1-\cos(xy)}{(xy)^2} = \frac{1-\cos(t)}{t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{2}$$

(ii) Per (i) dell'esercizio (a) si ha:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} =?$$

Passiamo alle coordinate polari: $\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}$

$$0 \le \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2+y^2} = \frac{\rho^4 \cdot \cos^2\vartheta \cdot \sin^2\vartheta}{\rho^2\left(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\right)} \le \rho^2$$

Per $\rho \to 0$ *tutto* $0 \to 0$ *e* $\rho^2 \to 0$*, quindi anche il limite tende a zero per il teorema del confronto.*
Consideriamo il caso in cui $x = 0$ *o* $y = 0$

- *Vediamo* $x = 0$*,*

$$\lim_{y\to 0} \frac{1-\cos(0)}{log(1+y^2)} = \left[\frac{0}{0}\right]_{F.IND.} = \lim_{y\to 0} 1-\cos(0) \cdot \frac{y^2}{\log(1+y^2)} \cdot \frac{1}{y^2} = 0$$

- *Vediamo* $y = 0$*,*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(0)}{log(1+x^2)} = \left[\frac{0}{0}\right]_{F.IND.} = \lim_{y\to 0} 1-\cos(0) \cdot \frac{x^2}{\log(1+x^2)} \cdot \frac{1}{x^2} = 0$$

(e)

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,1)} \frac{xy(z-1)}{x^2+y^2+(z-1)^2}$$

- ***Primo metodo***

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \\ t = z-1 \xrightarrow[z\to 1]{} t \to 0 \end{cases}$$

$$0 \le \left|\frac{\rho\cos\vartheta \cdot \rho\sin\vartheta \cdot t}{\rho^2\left(\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta\right)+t^2}\right| \le \left|\frac{\rho^2 \cdot t}{\rho^2+t^2}\right| \le 1 \cdot t$$

$$\left(\frac{\rho^2}{\rho^2+t^2} \le 1 \iff \rho^2 \le \rho^2+t^2 \iff t^2 \ge 0 \Rightarrow \textit{ sempre}\right)$$

Quindi per $t \to 0$*,* $0 \to 0$ *e* $t \to 0$*, quindi per il teorema del confronto il limite*

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,1)} \frac{xy(z-1)}{x^2+y^2+(z-1)^2} = 0$$

- ***Secondo metodo:*** $t = z - 1 \xrightarrow{z\to 1} 0$
  $\lim_{(x,y,t)\to(0,0,0)} \frac{xyt}{x^2+y^2+t^2}$

$$0 \leq \left|\frac{xyt}{x^2+y^2+t^2}\right| \leq^? \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2+t^2}\right)^3}{x^2+y^2+t^2} = \sqrt{x^2+y^2+t^2}$$

In particolare si ha $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2+t^2} \Rightarrow x^2 \leq x^2+y^2+t^2 \iff y^2+t^2 \geq 0$*, lo stesso vale per* $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2+t^2}$ *e* $|t| \leq \sqrt{x^2+y^2+t^2}$*, quindi otteniamo:*

$$0 \leq \left|\frac{xyt}{x^2+y^2+t^2}\right| \leq \sqrt{x^2+y^2+t^2}$$

Che tende a 0 per $(x,y,t) \to (0,0,0)$*, quindi grazie al teorema del confronto il limite vale 0*

Esercizio 6.2.2 *Data* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$f(x,y) = \begin{cases} g(x,y) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a)

$$g(x,y) = \frac{x\sin(x^2y)}{x^2+y^2}\ \forall (x,y) \neq (0,0)$$

La funzione f, che coincide con g $\forall (x,y) \neq (0,0)$*, è* ***continua*** $\forall (x,y) \neq (0,0)$ *perchè è* ***composizione*** *e* ***prodotto*** *di funzioni continue (<u>Teorema</u>). Dobbiamo quindi vedere il comportamento della funzione in* $(0,0)$*,*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$$

cioè

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin(x^2y)}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2y}{x^2y}$$

per $x \neq 0$ *e* $y \neq 0$*.*

(i) $t = x^2y \to 0$ *per* $(x,y) \to (0,0)$*,* $\frac{\sin(t)}{t} \to 1$

$$= 1 \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^2+y^2} = 1 \cdot 0 = 0$$

Verifichiamolo tramite le coordinate polari.
$x = \rho\cos\vartheta$
$y = \rho\sin\vartheta$

$$0 \leq \left|\frac{x^3y}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{\rho^4 \cdot \cos^3\vartheta\sin\vartheta}{\rho^2\left(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\right)}\right| \leq \rho^2$$

Quindi per $\rho \to 0$ anche il limite vale 0 grazie al teorema del confronto. Abbiamo verificato che il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$*, quindi la funzione f è continua.*
Controlliamo ora:

- $y = 0$ *e* $x \neq 0$, $\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot 0}{x^2} = 0$
- $y \neq 0$ *e* $x = 0$, $\lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0$

b)

$$g(x,y) = \frac{\sin(2xy)}{e^{x^2+y^2} - 1}$$

Dobbiamo studiarne il comportamento in $(0,0)$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2 \cdot \frac{\sin(2xy)}{2xy} \cdot \frac{xy}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{e^{x^2+^2}}$$

(i) $t = 2xy$, $\frac{\sin(t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$ *per* $(x,y) \to (0,0)$

(ii) $t = x^2 + y^2 \to 0$ *per* $(x,y) \to (0,0)$, $\frac{t}{e^t - 1} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$

- *Proviamo con le coordinate polari:* $\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{\rho^2 \sin\vartheta\cos\vartheta}{\rho^2} \Rightarrow \sin\vartheta\cos\vartheta$$

  Quindi non va bene, allora proviamo a prendere una restrizione del dominio.

- $y = mx$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 m}{x^2(m^2+1)} \to \frac{m}{m^2+1}$$

  Ottenimao due rislutati diversi, $\big((m = 1, \lim = \frac{1}{2}), (m = 2, \lim = \frac{2}{5})\big)$*, quindi ho trovare due restrizioni dove il limite è diverso, perciò* $\nexists \lim$.

Esercizio 6.2.3 *Calcolare il gradiente delle seguenti funzioni:*

1. $f(x,y) = \sin(x,y)$, $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)\right)$

   - $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(xy) \cdot \frac{\partial(xy)}{\partial x} = \cos(xy) \cdot y$
   - $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(xy) \cdot \frac{\partial(xy)}{\partial y} = \cos(xy) \cdot x$

   $\nabla f(x,y) = (y\cos(xy), x\cos(xy)) = \cos(xy) \cdot (y,x)$.
   Calcolare la <u>*derivata direzionale*</u> *rispetto al vettore* $v = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) = \langle \nabla f(x,y), v\rangle = \frac{\cos(xy)}{\sqrt{3}} \left\langle (y,x), (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \right\rangle =$$

$$= \frac{\cos(xy)}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{y}{2} + \frac{3x}{2}\right) = \frac{\cos(xy)}{2\sqrt{3}}(3x - y)$$

Calcoliamo il piano tangente nei punti $(0, 0, f(0, 0))$ *e* $(1, 2, f(1, 2))$*, ricrodiamo la formula del piano:*

$$z = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x, y) - (x_0, y_0) \rangle$$

Cerchiamo ora i valori:

- $f(x, y) = \sin(xy),\ f(0, 0) = 0$
- $\nabla f(x, y) = \cos(xy)(y, x),\ \nabla f(0, 0) = 1 \cdot (0, 0) = 0$

Quindi $z = 0 + 0 \Rightarrow$ *il piano tangente è* $z = 0$.
Chi è il normale?
$n = (0, 0, 1),\ (x_0, y_0) = (1, 2)$

- $f(x, y) = \sin(xy),\ f(1, 2) = \sin(2)$
- $\nabla f(x, y) = \cos(xy)(y, x),\ \nabla f(1, 2) = \cos(2) \cdot (2, 1)$

$z = \sin(2) + \langle \cos(2) \cdot (2, 1), (x - 1, y - 2) \rangle = \sin(2) + \cos(2) \cdot (2x + y - 4)$

6.3 Lezione 3 - 06/04/2022

Esercizio 6.3.1 (Es 2, Provetta) *Siano* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

- $f(t,u,v) = \big(k(t+v), u^2+v\big)$

  $f_1 = k(t+v)$

  $f_2 = u^2+v$

- $g(x,y) = \big(\log(1+x^2+y^2), \sin(x-y), x-y\big)$

  $g_1 = \log(1+x^2+y^2)$

  $g_2 = \sin(x-y)$

  $g_3 = x-y$

(1) Calcolare $Df(t,u,v)$ $\forall (t,u,v) \in \mathbb{R}^3$ *e* $Dg(x,y) \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

(2) Calcolare la matricve Jacobiana di h in (0,0), $Dh(0,0)$*, dove* $h = f \circ g$

(1) Iniziamo osservando che l funzioni $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *(i = 1,2) sono* C^∞ *perchè sono polinomi e* $g_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *(i = 1,2,3) sono* C^∞ *perchè composizione di funzioni* C^∞*,* $\Rightarrow$ *f e g sono differenziabili, per definizione di jacobiana si ha*

$$Df(t,u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t}(t,u,v) & \frac{\partial f_1}{\partial u}(t,u,v) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(t,u,v) \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial t}(t,u,v) & \frac{\partial f_2}{\partial u}(t,u,v) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(t,u,v) \\ \\ \frac{\partial f_3}{\partial t}(t,u,v) & \frac{\partial f_3}{\partial u}(t,u,v) & \frac{\partial f_3}{\partial v}(t,u,v) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & k \\ 0 & 2u & 1 \end{bmatrix}$$

$$Dg(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \\ \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \\ \\ \frac{\partial g_3}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_3}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2x}{1+x^2+y^2} & \frac{2y}{1+x^2+y^2} \\ \\ \cos(x-y) & -\cos(x-y) \\ \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(2) $h = f \circ g = f(g(x,y)) = h(x,y)$*,* $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow Dh$ *è* 2×2*, Essendo f e g differenziabili, segue che la funzione composta* $h = f \circ g$ *è differenziabile e vale RDC, cioè* $Dh(0,0) = Df(g(0,0)) \cdot Dg(0,0)$*, poichè* $g(0,0) = (0,0,0)$ *e*

$$Dg(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Df(0,0,0) = \begin{bmatrix} k & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow det \begin{bmatrix} k & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = k \neq 0,\ se\ k \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Dh(0,0) = \begin{bmatrix} k & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 6.3.2 (Es. 3, Provetta) *Consideriamo la funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,*

$$f(x,y) = \arctan(1 + x^3 + \sqrt{(2)}kxy + y^2 - x^2)\,\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Determinare se esistono punti di massimo e/o minimo relativo o di sella.

$arctan(t) \Rightarrow (arctan(t))' = \frac{1}{1+t^2} > 0 \Rightarrow$ arctan strettamente crescente Siccome arctan è strettamente crescente i punti di min e max rel. e sella coincidono con i punti di max/min/sella della funzione:

$$g(x,y) = 1 + x^3 + \sqrt{(2)}kxy + y^2 - x^2$$

I punti critici di g sono quelli dove si annulla il gradiente $\nabla g(x,y) = (0,0) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 + \sqrt{(2)}ky - 2x = 0 \\ \\ \sqrt{(2)}kx + 2y = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3x^2 + \sqrt{(2)}k\left(\frac{-kx}{\sqrt{(2)}}\right) - 2x = 0 \\ \\ y = -\frac{kx}{\sqrt{(2)}} \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 - k^2x - 2x = 0 \\ \\ y = -\frac{kx}{\sqrt{(2)}} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x(3x - (k^2+2)) = 0 \\ \\ y = -\frac{kx}{\sqrt{(2)}} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{2+k^2}{3} \\ \\ y = \frac{-k(2+k^2)}{3\sqrt{(2)}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} p_1 = (0,0) \\ p_2 = \left(\frac{2+k^2}{3}, \frac{-k(2+k^2)}{3\sqrt{(2)}}\right) \end{matrix} \quad \textit{sono punti stazionari}$$

- $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + \sqrt{(2)}ky - 2x$

  $h_{11} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = 6x - 2$

- $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \sqrt{(2)}kx + 2y$

  $h_{22} = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = 2$

- $h_{12} = h_{21} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = \sqrt(2)k = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$ *dal teorema di Schwartz*

$$Hg(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} \\ \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x-2 & \sqrt(2)k \\ \\ \sqrt(2)k & 2 \end{bmatrix}$$

- *Calcoliamo* $Hg(p_1)$

$$Hg(p_1) = Hg(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & \sqrt(2)k \\ \sqrt(2)k & 2 \end{bmatrix}$$

Autovalori di $Hg(p_1)$, *det* $\begin{bmatrix} -2-\lambda & \sqrt(2)k \\ \sqrt(2)k & 2-\lambda \end{bmatrix} = -4 + \lambda^2 - 2k^2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda^2 = 2k^2 + 4 \iff \lambda \pm \sqrt{4+2k^2}$

  - $\lambda_1 = \sqrt{4+2k^2} > 0$
  - $\lambda_2 = -\sqrt{4+2k^2} < 0$

$\Rightarrow$ *la matrice* $Hg(0,0)$ *non è definita dal colorralio viso a lezione,*
$detH = -4 - 2k^2 < 0 \Leftarrow detH < 0 \Rightarrow$ *non definita*
$\Rightarrow$ *per i teremi visti a lezione* $(0,0)$ *è un punto di sella.*

- *Calcoliamo* $Hg(p_2)$

$$Hg(p_2) = Hg\left(\frac{2+k^2}{3}, \frac{-k(2+k^2)}{3\sqrt(2)}\right) = \begin{bmatrix} 2+2k^2 & \sqrt(2)k \\ \sqrt(2)k & 2 \end{bmatrix}$$

$$det \begin{bmatrix} 2+2k^2 & \sqrt(2)k \\ \sqrt(2)k & 2 \end{bmatrix} = 4 + 4k^2 - 2k^2 = 4 + 2k^2 > 0$$

Siccome $h_{11} > 0$ *e* $detHg(p_2) > 0$ *si ha dal corollario visto a lezione che* $Hg(p_2)$ *è definita positiva.*
Quindi per il teorema visto a lezione p_2 *è un punto di minimo relativo.*

Esercizio 6.3.3 (Es 1, Provetta) *Data* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(1-\cos x)(\sin(ky))}{kx^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. *Dire se è continua in (0,0) Per definizione di continuità , f è continua in (0,0)*
   $\iff \exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0.$
   Ricordiamo i limiti notevoli:
   - $\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$
   - $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

Osserviamo che $f(x,0) = 0\,\forall x \neq 0$ *e* $f(0,y) = 0\,\forall y \neq 0$ *e*

$$(*) f(x,y) = \frac{1 - cos(x)}{x^2} \cdot x^2 \cdot \frac{\sin(ky)}{ky} \cdot \frac{ky}{kx^2 + y^4} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{ky}{kx^2 + y^4}$$

Notiamo che:

$$0 \leq \left| \frac{ky}{kx^2 + y^4} \right| \leq \left| \frac{ky}{kx^2} \right| \leq |y|$$

Quindi per $y \to 0$ *e grazie al TDC* $\frac{ky}{kx^2+y^4} \to 0$, *siccome tutti e tre i limiti in* $(*)$ *esistono e sono finiti si ha:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \text{ } f \text{ è continua in (0,0)}$$

2. *Dire se* $\exists \nabla f(0,0)$

   $\nabla f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right)$

   - $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$
   - $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$

   Quindi $\exists \nabla f(0,0) = (0,0)$

3. *Dire se f è differenziabile in (0,0)*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \langle \nabla f(0,0), (x,y) \rangle}{\sqrt{x^2 + y^2}} ? = 0$$

$\langle \nabla f(0,0), (x,y) \rangle = \langle (0,0), (x,y) \rangle = (0,0),$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - (0,0)}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} ? = 0$$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ *da svolgimento del primo punto (1)*

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0 - (0,0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

Chapter 7

Teoremi Orale

7.1 Continuità , derivabilità , differenziabilità , polinomio di Taylor.

7.1.1 Teorema del confronto

Teorema 7.1.1 (Teorema del confronto) *Sia* $h, g, f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *supponiamo che:*

5.1 $f(p) \le g(p) \le h(p)$, $\forall p \in A \setminus \{p_0\}$

5.2 $\exists \lim_{p \to p_0} f(p) = \lim_{p \to p \to p_0} h(p) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

allora $\exists \lim_{p \to p_0} g(p) = L$

Dim. 21 *Supponiamo che* $L \in \mathbb{R}$, *dobbiamo provare che* $\exists \lim_{p \to p_0} g(p) = L$, *cioè per definizione:*

*1** $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta \, (= \delta(p_0, \varepsilon)) > 0$ *t.c.*

$$|g(p) - L| < \varepsilon \ \forall p \in B(p_0, \delta) \cap (A \setminus \{p_0\})$$

Per ipotesi sappiamo che

$$\lim_{p \to p_0} f(p) = L, \lim_{p \to p_0} h(p) = L$$

cioè :

*2** $\forall \varepsilon > 0$,

$$\exists \delta_1 \, (= \delta_1(p_0, \varepsilon)) > 0$$

t.c. $|f(p) - L| < \varepsilon$ *o eq.*

$$L - \varepsilon < f(p) < L + \varepsilon \ \forall p \in B(p_0, \delta_1) \cap (A \setminus \{p_0\})$$

E

*3** $\forall \varepsilon > 0,$

$$\exists \delta_2 \, (= \delta_2(p_0, \varepsilon)) > 0$$

t.c. $|h(p) - L| < \varepsilon$ *o eq.*

$$L - \varepsilon < h(p) < L + \varepsilon \;\forall p \in B(p_0, \delta_2) \cap (A \setminus \{p_0\})$$

Da (5.1),(2),(3*) segue che* $\forall \varepsilon > 0$, *scegliendo* $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ *vale che*

$$L - \varepsilon < f(p) \leq g(p) \leq h(p) < L + \varepsilon$$

$\forall p \in B(p_0, \delta) \cap (A \setminus \{p_0\})$ *e dunque vale la (1*).*

7.1.2 Definizione di limite per una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Definizione 7.1.1 (Limite di funzioni di due variabili) *Sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e sia* $p_0 \in \mathbb{R}^2$ *punto di accomulazione per* A*. Si dice che:*

$$\exists lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \in \mathbb{R}$$

oppure $\exists \lim_{p\to p_0} f(p) = L$ *se*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = d(p_0, \varepsilon) > 0 \mid |f(x,y) - L| < \varepsilon, \forall (x,y) \in B(p,\delta) \cap (A \setminus \{p_0\})$$

7.1.3 Definizione di continuità per una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Definizione 7.1.2 *Sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1. f *si dice continua in* $p_0 \in A$ *se*
   (a) p_0 *è un punto* <u>*isolato*</u> *di* A*, oppure*
   (b) p_0 *è un punto di accomulazione ed* $\exists \lim_{p \to p_0} f(p) = f(p_0)$
2. f *si dice* <u>*continua*</u> *su* A *se* f *è continua in ogni punto* $p_0 \in A$

7.1.4 Definizione di derivate parziali e di vettore gradiente per una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ A aperto

Definizione 7.1.3 *1. Si dice che f è derivabile(parzialmente) rispetto alla variabile x nel punto $p_0 = (x_0, y_0)$ se*

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} := \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$$

2. Si dice che f è derivabile(parzialmente) rispetto alla variabile y nel punto $p_0 = (x_0, y_0)$ se

$$\exists \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} := \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = D_2 f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$$

3. Se f è derivabile (parzialmente) sia rispetto ad x ed y nel punto $p_0 = (x_0, y_0)$, si chiama (vettore)gradiente di f in p_0 il vettore:

$$\nabla f(p_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \right) \in \mathbb{R}^2$$

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A insieme aperto. Supponiamo che:

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \to \mathbb{R}$$

allora è ben definito il campo dei vettori gradiente:

$$\nabla f : \mathbb{R}^2 \supseteq A \ni p \to \nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p) \right) \in \mathbb{R}^2$$

7.1.5 Definizione di differenziabilità in un punto per una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e relazione con l'esistenza del gradiente in quel punto

Definizione 7.1.4 *Dato $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e dato $p_0 = (x_0, y_0) \in A$, la funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si dice differenziabile nel punto p_0 se vale*

$$\text{(D) } \exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x) - [a(x-x_0) + b(y-y_0) + f(x_0)]}{d(p, p_0)}$$

dove $d(p, p_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ e per $a, b \in \mathbb{R}$ opportuni.

Se f è differenziabile nel punto $p_0 = (x_0, y_0)$, allora

$$\exists \nabla f(p_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \right)$$

e

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0), b = \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$$

Dim. 22 *Supponiamo che f sia differenziabile in p_0, cioè che valga (D). Ponendo nella (D), $y = y_0$ otteniamo che:*

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x, y_0) - [a(x-x_0) + f(x_0, y_0)]}{|x - x_0|} = 0$$

$$\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) = a$$

Procediamo allo stesso modo, ponendo $x = x_0$ nella (D) e otteniamo $\frac{\partial f}{\partial y}(p_0) = b$

7.1.6 Regola della catena nel caso generale di due funzioni, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$

Teorema 7.1.2 (Regola della catena, RDC) *Siano* $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *e* $f : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$*, A e B aperti*

(i) $g(A) \subseteq B$

(ii) Se $g = (g_1, \dots, g_m)$*,* $f = (f_1, \dots, f_k)$

Supponiamo che $\begin{array}{l} g_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,(i = 1, \dots, m) \text{ sia diff. in un dato } x_0 \in A \\ f_i : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}\,(i = 1, \dots, k) \text{ sia diff. in un dato } y_0 = g(x_0) \end{array}$

Consideriamo ora la funzione $h := f \circ g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$*,* $h = (h_1, \dots, h_k)$
con $h_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*,*
allora le funzioni $h_i : A \to \mathbb{R}(i = 1, \dots, k)$ *sono diff. in* x_0 *e*

$$Dh(x_0) = Df(g(x_0)) \cdot Dg(x_0)$$

7.1.7 Formula di Taylor del II ordine per una funzione di due variabili

Definizione 7.1.5 *Dato $m \in \mathbb{N}$, $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ fissato, si chiama* <u>*polinomio di ordine m*</u> *di $n = 2$ variabili, centrato in p_0, una funzione $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ del tipo*

$$T(x,y) = \sum_{h=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} c_{i,h-i}(x-x_0)^i (y-y_0)^{h-i}$$

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$, dove $c_{i,h-i}$ (i = 0,...,h e h = 0,..., m) sono $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ coeff. ass.

Sia $f \in C^2(B(p_0,r))$, $p_0 = (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$ fissato. Allora vale:

$$(FT_2)\, f(p) = T_2(p) + o\left(\|p-p_0\|^2\right)$$

$\forall p = (x,y) \in B(p_0,r)$, dove

$$T_2(p) := f(p_0) + \langle \nabla f(p_0), p-p_0 \rangle + \frac{1}{2} \left\langle D^2 f(p_0) \cdot (p-p_0), p-p_0 \right\rangle$$

se $p \in \mathbb{R}^2$.
(polinomio di taylor del II ordine di f, centrato in p_0)

7.1.8 Definizione di matrice Hessiana per un funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e sua applicazione nella formula di Taylor del II ordine

Definizione 7.1.6 *Data $f \in C^2(A)$, $A \in \mathbb{R}^2$ aperto, si chiama, matrice hessiana di f in un punto $p \in A$, la matrice 2×2*

$$D^2 f(p) = H(f)(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

L'applicazione della matrice Hessiana nel PT2o si può trovare nello sviluppo della dimostrazione, infatti per una funzione $F(t) = f(p_0+tv), t \in (-r, r)$ e $B(p_0, r)$ andando a calcolare il polinomio di Taylor per $t = 0$, e supponendo di avere $v = \frac{p-p_0}{\|p-p_0\|}$, otteniamo che $F''(t)$:

$$F''(t) = v_1 \cdot \left\langle \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (p_0 + tv), v \right\rangle + v_2 \cdot \left\langle \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (p_0 + tv), v \right\rangle =$$

$$= v_1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0 + tv)v_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0 + tv)v_2 \right) + v_2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0 + tv)v_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0 + tv)v_2 \right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0 + tv)v_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0 + tv)v_1 v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0 + tv)v_2^2$$

Pertanto calcolando $F''(0)$ otteniamo:

$$F''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0 + tv)v_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0 + tv)v_1 v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0 + tv)v_2^2$$

Che può essere riscritto mediante matrice Hessiana del tipo:

$$F''(0) = \left\langle D^2 f(p_0)v, v \right\rangle$$

E sostituendola otteniamo

$$f(p_0 + tv) = F(t) = f(p_0) + \langle \nabla f(p_0), v \rangle \, t + \frac{1}{2} \left\langle D^2 f(p_0)v, v \right\rangle t^2 + o(t^2), \text{ per } t \to 0$$

Scegliendo $t = \|p - p_0\|$ e otteniamo la forma del polinomio di Taylor di II ordine. Ed è questa l'applicazione della matrice Hessiana.

7.2 Massimi e minimi

7.2.1 Definizione di punto di massimo/minimo relativo, massimo/minimo assoluto e punto di sella per una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Definizione 7.2.1 *Data* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*:*

1. $p_0 \in A$ *si dice, punto di* *massimo* *(= max)* *relativo* *di* f *su* A *se* $\exists r_0 > 0$ *t.c.* $f(p) \leq f(p_0)\, \forall p \in A \cap B(p_0, r_0)$
   Rispettivamente $p_0 \in A$ *si dice, punto di* *minimo* *(= min)* *relativo* *di* f *su* A *se* $\exists r_0 > 0$ *t.c.* $f(p) \geq f(p_0)\, \forall p \in A \cap B(p_0, r_0)$

2. $p_0 \in A$ *si dice punto di* *massimo* *(= MAX)* *assoluto* *se* $\forall p \in A,\ f(p) \leq f(p_0)$
   Rispettivamente $p_0 \in A$ *si dice punto di* *minimo* *(= MIN)* *assoluto* *se* $\forall p \in A,\ f(p) \geq f(p_0)$

Definizione 7.2.2 *Sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A *aperto. Un punto* $p_0 \in A$ *si dice* *punto di sella* *se* p_0 *è un punto stazionario di* f *e* $f(p) - f(p_0)$ *amette sia valori positivi che negativi in ogni intorno di* p_0

7.2.2 Teorema di Fermat sui punti stazionari di una funzione

Teorema 7.2.1 (Fermat) *Sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *$A$ aperto. Supponiamo che esista* $p_0 \in A$ *t.c.*

(i) f *differenziabile in* p_0. *In particolare* $\exists \nabla f(p_0)$

(ii) p_0 *sia un estremo libero di* f *in* A

Allora $\nabla f(p_0) = \underline{O}_{\mathbb{R}^n} = (0, ..., 0)$ *(n-volte)*

Definizione 7.2.3 *Data* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *$A$ aperto, un punto* $p_0 \in A$ *si chiama* <u>*punto stazionario*</u>*(o* <u>*critico*</u>*) di* f *se* f *è differenziabile in* p_0 *e* $\nabla f(p_0) = \underline{O}_{\mathbb{R}^n}$

7.2.3 Teorema di Weierstrass sullesistenza del massimo e minimo assoluto di una funzione

Teorema 7.2.2 (Weirestrass) *[BDPG,10.10] Sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, Supponiamo che:*

(i) A sia limitato e chiuso, (in $n = 1$*,* $A = [a, b], \partial A = \{a, b\}, \mathring{A} = (a, b)$*)*

(ii) f *sia continua su* A

Allora esiste $\min_A f$ *e* $\max_A f$

7.2.4 Metodo dei moltiplicatori di Lagrange per la ricerca di massimi e minimi vincolati per funzioni di due variabili

Teorema 7.2.3 (Teorema dei moltiplicatori di Lagrange, TML) *Sia* $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ *e* $\mathsf{V} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}$ *dove* $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. *Supponiamo che:*

(i) $\exists \min_{\mathsf{V}} f = f(p_0)$ *(o* $\exists \max_{\mathsf{V}} f = f(p_0)$*) con* $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathsf{V}$

(ii) $\exists \nabla g(p_0) \neq (0,0)$

Allora esiste $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ *(detto* *moltiplicatore**) t.c.* $(x_0, y_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^3$ *è un punto stazionario della funzione.*
Equivalentemente:

$$\exists \lambda_0 \in \mathbb{R} \ t.c. \begin{cases} g(p_0) = 0 \\ \\ \nabla f(p_0) + \lambda_0 \nabla g(p_0) = (0,0) \end{cases} \qquad (*)$$

7.3 Integrali per funzioni in più variabili

7.3.1 Definizione di insieme insieme semplice (o normale) in $\mathbb{R}^2$ rispetto agli assi cartesiani

Definizione 7.3.1 *Un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^2$ si dice*

- *Dominio semplice (o normale) rispetto all'asse y se esistono $g_1, g_2 \in C^0([a,b])$ t.c. $g_1 \leq g_2$ su $[a,b]$ e*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

- *Dominio semplice (o normale) rispetto all'asse x se esistono $h_1, h_2 \in C^0([c,d])$ t.c. $h_1 \leq h_2$ su $[c,d]$ e*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c,d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

7.3.2 Formula di riduzione di integrali doppi su insiemi semplici

Teorema 7.3.1 (Forumla di riduzione su domini semplici) *[BDPG,14.17]* *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio semplice rispetto ad uno degli assi. Supponiamo che $f \in C^0(A)$, allora $f \in \mathcal{R}(A)$ e valgono le seguenti formule:*

1. *Se $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ con $g_1, g_2 \in C^0([a,b])$, allora*
$$(1) \iint_A f = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$
In particoalre A è misurabile e $|A|_2 = \iint_A 1 = \int_a^b (g_2(x) - g_1(x))\ dx$

2. *Se $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c,d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$ con $h_1, h_2 \in C^0([c,d])$, allora*
$$(2) \iint_A f = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$
In particoalre A è misurabile e $|A|_2 = \iint_A 1 = \int_c^d (h_2(y) - h_1(y))\ dy$

7.3.3 Formula di cambiamento di variabili per integrali doppi e tripli

Integrali doppi

Definizione 7.3.2 *La mappa ψ si dice un cambiamento di variabili se*

- ψ *è bigettiva*
- $\psi_i \in C^1(D^*)$, $\psi_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial u}, \frac{\partial \psi_i}{\partial v} : D^* \to \mathbb{R}$ *limitate (i=1,2)*
- $\det D\psi(u,v) \neq 0$, $\forall (u,v) \in D^*$, *dove*

$$D\psi(u,v) := \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \psi_1}{\partial v}(u,v) \\ \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \psi_2}{\partial v}(u,v) \end{bmatrix} \quad \textit{(Matrice Jacobiana)}$$

Denotiamo $dA^* = du\, dv$ *e* $dA = dx\, dy$

Si può provare che $dA = |[| \, detD\psi(u,v)]dA^*$.

Teorema 7.3.2 (Cambiamento di variabili negli integrali doppi) *[BDPG,14.19]*
Siano $D, D^* \subseteq \mathbb{R}^2$ *aperti limitati e misurabili, sia* $\psi : D^* \to D$ *un cambiamento di variabili e sia* $f : D \to \mathbb{R}$ *continua e limitata.*
Allora vale la formula

$$(FCV)_2 \iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{D^*} f(\psi(u,v))\, |\det D\psi(u,v)| \, du\, dv$$

Integrali tripli

Definizione 7.3.3 *La mappa Ψ si dice* <u>*cambiamento di variabile*</u> *(in $\mathbb{R}^3$) Se*

(i) Ψ *è bigettiva*

(ii) $\Psi_i \in C^1(D^*)$,

$$\Psi_i, \frac{\partial \Psi_i}{\partial u}, \frac{\partial \Psi_i}{\partial v}, \frac{\partial \Psi_i}{\partial w} : D^* \to \mathbb{R}$$

limitate (i = 1,2,3)

(iii) $\det D\Psi(u,v,w) \neq 0$, *dove*

$$D\Psi(u,v,w) := \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial u} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial v} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial w} \\ \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial u} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial v} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial w} \\ \\ \frac{\partial \Psi_3}{\partial u} & \frac{\partial \Psi_3}{\partial v} & \frac{\partial \Psi_3}{\partial w} \end{bmatrix}$$

se $(u,v,w) \in \mathscr{D}^*$

Teorema 7.3.3 (Cambiamento di variabili negli integrali tripli) *Siano* $D^*, D \subset \mathbb{R}^3$ *aperti limitati e misurabili, sia* $\Psi : D^* \to D$ *un cambiamento di variabili e sia* $f \in C^0(D)$ *e limitata. Allora*

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D^*} f(\Psi(u,v,w))\,|\det D\Psi(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$

7.3.4 Cambiamento di coordinate cilindriche e sferiche

Coordinate ellittiche

Definizione 7.3.4 *Error 404, non le trovo!! Suppongo:*

Coordinate ellittiche:

$$\Psi \equiv \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}$$

$0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \rho \geq 0,\ |\det D\Psi(\rho,\vartheta)| = \rho^2$

Coordinate sferiche

Definizione 7.3.5 *Coordinate sferiche:*

$$\Psi \equiv \begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\vartheta \\ y = r\sin\varphi\sin\vartheta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

$0 \leq \vartheta \leq 2\pi, r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq \pi,\ |\det D\Psi(r,\vartheta,\varphi)| = r^2\sin\varphi$

7.3.5 Formule di riduzione per integrali tripli su un parallelepipedo

Teorema 7.3.4 (Formule di riduzione per integrali tripli rispetto a domini semplici) *[BDPG,14.28] Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ un insieme semplice rispetto all'asse z di tipo*

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in E, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$$

e sia $f \in C^0(A)$. Allora

$$\iiint_A f = \iint_E \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dx\, dy$$

7.3.6 Definizione di insieme definito per fili e per strati

Definizione 7.3.6 *Dato un insieme* $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ *si definisce:*

- *L'insieme* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]\}$ *è uno strato.*
- *L'insieme* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [a_3, b_3]\}$ *è un filo.*

7.3.7 Formula di integrazione per fili e per strati

Teorema 7.3.5 (Formule di riduzione su parallelepipedi) *[BDPG,14.26]*
Siano $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$, $f \in C^0(Q)$

(i) La funzione

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \ni (x, y) \to \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)\, dz$$

è integrabile su $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ *e*

$$(1) \iiint_Q f = \iint_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)\, dz \right)$$

(ii) La funzione

$$[a_1, b_1] \ni x \to \iint_{[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} f(x, y, z)\, dy\, dz$$

è integrabile su $[a_1, b_1]$ *e*

$$(2) \iiint_Q f = \int_{a_1}^{b_1} \left(\iint_{[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} f(x, y, z)\, dz \right)$$

La

(1) si chiama formula di riduzione per <u>*fili*</u>

(2) si chiama formula di riduzione per <u>*strati*</u>

7.4 Curve e forme differenziali

7.4.1 Definizione di curva in $\mathbb{R}^n$, supporto di una curva, estremi di una curva, equazione parametrica di una curva

Definizione 7.4.1 *(i) Si chiama curva una mappa* $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ *continua,* $\gamma(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t))$ *con* I *intervallo di* $\mathbb{R}$

(ii) Se $I = [a, b]$*, i punti* $\gamma(a)$*,* $\gamma(b)$ *di* $\mathbb{R}^n$ *si chiamano estremi della curva*

(iii) Si chiama sostegno (o supporto) della curva γ*, l'insieme* $\gamma(I) \subseteq \mathbb{R}^n$*. Si chiama equazione parametrica di* γ *l'equazione* $x = (x_1, ..., x_n) = \gamma(t)\, t \in I$

7.4.2 Definizione di curva chiusa, semplice, regolare, orientazione (o verso di percorrenza) di una curva semplice

Definizione 7.4.2 *(i) La curva γ si dice <u>chiusa</u> se $I = [a, b]$ e $\gamma(a) = \gamma(b)$*

(ii) La curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ si dice <u>semplice</u> se γ è iniettiva, o se γ è chiusa e $I = [a, b]$, allora $\gamma : [a, b) \to \mathbb{R}^n$ è iniettiva.

Definizione 7.4.3 *Una curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ si dice <u>regolare</u> se γ è di classe C^1 e $\gamma'(t) \neq \underline{O}_{\mathbb{R}^n}$ $\forall t \in I$*

Definizione 7.4.4 *Sia data una curva semplice $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$. Allora essa induce <u>un'orientazione</u> sul suo sostegno $\gamma(I) \subseteq \mathbb{R}^n$. Più precisamente*

Data $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ curva semplice, si dice che il punto $x_1 = \gamma(t_1)$ <u>precede</u> il punto $x_2 = \gamma(t_2)$ se $t_1 < t_2$. L'orientazione della curva viene detta anche <u>verso</u> della curva.

7.4.3 Definizione di versore tangente ad una curva regolare

Definizione 7.4.5 *Data $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ curva regolare, si chiama versore (o direzione) tangente a γ il campo vettore*

$$\mathsf{T}_\gamma(t) := \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\; t \in I$$

7.4.4 Definizione di curva rettificabile e lunghezza di una curva L(γ)

Curva rettificabile

Definizione 7.4.6 *Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva. Se $L(\gamma) < +\infty$, allora la curva si dice rettificabile e $L(\gamma)$ è detta lunghezza di γ*

Lunghezza curva

Teorema 7.4.1 (Lunghezza di una curva) *[BDPG,12.10] Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1. Allora γ è rettificabile e*

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + ... + \gamma_n'(t)^2} \, dt$$

7.4.5 Formula per il calcolo della lunghezza di una curva rettificabile

Vogliamo ora definire la nozione di lunghezza di una curva.
Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva e sia $\mathcal{D} := t_0 = a < t_1 < ... < t_N = b$ una suddivisione di $[a,b]$: essa induce una suddivisione del sostegno di γ in $N+1$ parti definite da $\gamma(t_0), \gamma(t_1) \dots \gamma(t_N)$.
Consideriamo i segmenti

$$[\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)] := \{s\gamma(t_i) + (1-t)\gamma(t_{i-1}) : 0 \leq s \leq 1\}$$

$i = 1, ..., N$. La lunghezza della spezzata definita dall'unione $\bigcup_{i=1}^{N} [\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)]$ è data da

$$L(\gamma, \mathcal{D}) := \sum_{i=1}^{N} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \in [0, +\infty)$$

Denotiamo

$$L(\gamma) := sup_{\mathcal{D}} L(\gamma, \mathcal{D}) \in [0, +\infty] =_{def} [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

7.4.6 Definizione di integrale curvilineo di prima specie per una funzione continua f lungo una curva γ di classe C^1

Definizione 7.4.7 *Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1 e sia $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si definisce*

$$\int_\gamma f \, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\| \, dt$$

e si chiama Integrale curvilineo di I specie di f lungo γ.

7.4.7 Definizione di integrale curvilineo di seconda specie di una forma differenziale lungo una curva di classe C^1

Definizione 7.4.8 *Sia $\gamma : [a, b] \to E \subseteq \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1 e sia ω una forma differenziale di classe C^0 su E.*
Si definisce integrale curvilineo di II specie di ω (o del campo F) lungo γ il valore

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \, dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n F_i(\gamma(t))\gamma_i'(t)\, dt$$

Se γ fosse chiusa il precedente integrale si scrive anche $\oint_\gamma \omega$

7.4.8 Definizione di forma differenziale esatta e di potenziale di una forma differenziale

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $\mathcal{U} \in C^1(E)$. Possiamo associare ad $\mathcal{U}$ la forma diff.

$$d\mathcal{U} = \langle \nabla \mathcal{U}, dx \rangle = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_1}\, dx_1 + \cdots + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_n}\, dx_n$$

che viene anche chiamata differenziale di $\mathcal{U}$ poichè coincide con la notazione con cui indichiamo il differenziale di $\mathcal{U}$

Definizione 7.4.9 *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $\omega = \langle F, dx \rangle$ dove $F : E \to \mathbb{R}^n$ di classe C^0. La forma ω si dice esatta in E se esiste $\mathcal{U} : E \to \mathbb{R}$ di classe C^1 t.c.*

$$\nabla \mathcal{U}(x) = F(x)\, \forall x \in E$$

o, equivalentemente, $d\mathcal{U} = \omega$.
In tal caso $\mathcal{U}$ è detta funzione potenziale (o primitiva) di ω in E.

7.4.9 Formula per il calcolo dellintegrale curvilineo di una forma differenziale esatta

Teorema 7.4.2 (Integrale per forme esatte) *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, ω forma diff. continua ed esatta su E. Allora per ogni curva $\gamma : [a, b] \to E$ C^1 a tratti vale che*

$$(*) \int_\gamma \omega = \mathcal{U}(\gamma(b)) - \mathcal{U}(\gamma(a))$$

dove $\mathcal{U} : E \to \mathbb{R}$ è un qualunque potenziale di ω