

# Analisi Matematica 2

Enrico Favretto

28/02/2022

# Contents

<b>1</b>	<b>Funzioni a più variabili, [BDPG, 10]</b>	<b>3</b>
1.1	Lez - 01 . . . . .	3
1.1.1	Grafico di una funzione scalare di più variabili . . . . .	4
1.1.2	Curve di livello di una funzione di più variabili . . . . .	4
1.1.3	Limiti e continuità per funzioni di più variabili . . . . .	5
1.2	Lez - 02 . . . . .	6
1.2.1	Calcolo dei limiti . . . . .	7
1.2.2	Esempi calcolo limiti . . . . .	8
1.3	Lez - 03 . . . . .	10
1.3.1	Definizioni limiti e continuità per $\mathbb{R}^n$ . . . . .	10
1.3.2	Calcolo differenziale per funzioni a più variabili . . . . .	11
1.3.3	Piano tangente al grafico . . . . .	12
1.4	Lez - 04 . . . . .	14
1.4.1	Differenziabilità in $n \geq 3$ . . . . .	15
1.5	Lez - 05 . . . . .	19
1.5.1	Condizioni sulle derivate parziali che assicurino la differenziabilità . . . . .	19
1.5.2	Derivate direzionali . . . . .	20
1.5.3	Teo: Diff. vs. Deriv. direz. . . . .	21
1.5.4	Teorema del valore medio . . . . .	22
1.6	Lez - 06 . . . . .	23
1.6.1	Derivate parziali di una f composta di più variabili . . . . .	23
1.6.2	I caso particolare . . . . .	23
1.6.3	II caso particolare . . . . .	25
1.6.4	Caso generale di RDC . . . . .	26
1.6.5	Teorema RDC . . . . .	27
1.7	Lez - 07 . . . . .	28
1.7.1	Derivate parziali di ordine superiore . . . . .	28
1.7.2	Teo: Inversione dell'ordine di derivazione . . . . .	28
1.7.3	Taylor per funzioni di più variabili . . . . .	29
1.7.4	Taylor del II ordine + resto di Peano . . . . .	30
1.8	Lez - 08 . . . . .	32
1.8.1	Massimi e minimi per funzioni a più variabili . . . . .	32
1.8.2	Estremi liberi di una funzione (min/max relativi) . . . . .	32

1.8.3	Matrice Hessiana . . . . .	33
1.8.4	Teorema: Criterio per il segno di una matrice . . . . .	34
1.8.5	Esempi . . . . .	35
1.9	Lez - 09 . . . . .	37
1.9.1	Ricerca del max e min (assoluto) su insieme limitato e chiuso . . . . .	37
1.9.2	Frontiera attraverso parametrizzazione . . . . .	38
1.9.3	Metodo dei moltiplicatori di Lagrange, TML . . . . .	40
<b>2</b>	<b>Integrale per funzioni a più variabili, [BDPG, 14]</b>	<b>43</b>
2.1	Lez - 10, Integrale doppio su un rettangolo . . . . .	43
2.1.1	Proprietà importanti delle somme sup. ed inf. . . . .	44
2.1.2	Teoremi: Esistenza & Proprietà integrale . . . . .	45
2.1.3	Formula di riduzione sui rettangoli . . . . .	46
2.1.4	Esempio . . . . .	46
2.2	Lez 11 - Integrale doppio su insiemi generali . . . . .	48
2.2.1	Insiemi numerabili e loro area . . . . .	49
2.2.2	Integrali doppi su insiemi misurabili . . . . .	50
2.2.3	Teo.: Integrale doppio su insieme di misura nulla . . . . .	50
2.3	Integrali doppi su domini semplici e formule di riduzione . . . . .	50
2.3.1	Teorema: Formula di riduzione su domini semplici . . . . .	51
2.4	Lez - 12 . . . . .	53
2.4.1	Applicazione della formula di riduzione su domini semplici al calcolo di volumi di solidi . . . . .	53
2.4.2	Teorema: Additività dell'integrale doppio . . . . .	54
2.5	Cambiamento di var. per gli integrali doppi . . . . .	54
2.5.1	Caso particolare: coordinate polari . . . . .	54
2.5.2	Caso generale . . . . .	56
2.5.3	Teorema: Cambiamento di variabili negli integrali doppi . . . . .	57
2.6	Lez - 13, Integrali tripli, [BDPG,14.5] . . . . .	60
2.6.1	Integrale triplo su un parallelepipedo . . . . .	60
2.6.2	Integrale triplo su insiemi generali . . . . .	60
2.6.3	Formule di riduzione per integrali tripli . . . . .	60
2.6.4	Cambiamento di variabili negli integrali tripli . . . . .	60
<b>3</b>	<b>Esercitazioni</b>	<b>61</b>
3.1	Lezione 1 - 09/03/2022 . . . . .	61
3.2	Esercitazione 2 - 23/03/2022 . . . . .	65
3.3	Lezione 3 - 06/04/2022 . . . . .	70

# Chapter 1

## Funzioni a più variabili, [BDPG, 10]

### 1.1 Lez - 01

Studieremo funzioni a più variabili reali a valori scalari e vettoriali, cioè  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  con  $n, k \in \mathbb{N}$  e  $n \geq 1, k \geq 1$ .

Se  $k = 1, n \geq 2$ ,  $f$  si dice funzione di più variabili a valori scalari;

Se  $k \geq 1, n \geq 1$ ,  $f$  si dice funzione di più variabili a valori vettoriali.

Incominciamo a trattare il caso in cui  $n = 2, 3$  e  $k = 1$ .

MOTIVAZIONE: I fenomeni in Fisica/Ingegneria sono modellizzati da funzioni che dipendono da due/tre variabili.

**Esempio 1** 1. La funzione temperatura di una piastra piana  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ .

La funzione temperatura della piastra  $A$  può essere modellizzata da una funzione

$$T : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, +\infty] \subseteq \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

2. La funzione distanza dall'origine in  $\mathbb{R}^3$ ,

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, +\infty]$$

$$f(p) := d(O, p) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

### 1.1.1 Grafico di una funzione scalare di più variabili

Ricordiamo che nel caso di una funzione scalare da una variabile  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $y = f(x)$ ,  $x \in A$ ),  $A$  intervallo di  $\mathbb{R}$ .

$$G_f := \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Se  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ( $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in A$ )

$$G_f := \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  ( $t = f(x, y, z)$ ,  $(x, y, z) \in A$ )

$$G_f := \{(x, y, z, f(x, y, z)) \mid (x, y, z) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

Disegnare  $G_f$  in  $\mathbb{R}^4$ ? Non può essere facilmente studiato, il grafico è una iper-superficie di  $\mathbb{R}^4$

### 1.1.2 Curve di livello di una funzione di più variabili

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , fissato  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$C_t := \{(x, y) \in A \mid f(x, y) = t\}$$

(è un insieme di tipo "curva" contenuto in  $A$ )

**Esempio 2**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) := x - y$ , ( $z = x - y$ )  $x - y - z = 0$ ,

$$((1, -1, -1), (x, y, z)) = 0$$

$$C_t := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = t\}$$

*fascio di rette parallele al variare di  $t$*

$$G_f := \{(x, y, x - y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

*piano di  $\mathbb{R}^3$  contenente la retta  $r$  e ortogonale al vettore  $(1, -1, -1)$*

$$r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$$

*Più in generale se  $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $C_t := \{(x, y, z) \in A \mid f(x, y, z) = t\}$  è un insieme di tipo "superficie".*

**Esercizio 1** *Studiare le curve di livello della funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .*

$$C_t := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = t\}$$

- $C_t$  è la circonferenza di centro  $(0, 0)$  e raggio  $\sqrt{t}$ , se  $t \geq 0$
- $C_t$  è vuoto ( $\emptyset$ ), se  $t < 0$

### 1.1.3 Limiti e continuità per funzioni di più variabili

Problema: Data  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , fissato  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  introdurre la definizione

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

Ricordiamo la definizione di limite per funzioni reali di una variabile,  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in [a, b]$   $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \iff (def.)$ ,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0 \mid |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\forall x \in (a, b) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = L$$

$$B(x_0, \delta) := (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \delta\}$$

*intorno sferico di centro  $x_0$  e raggio  $\delta > 0$*

**Idea per l'introduzione di limite per funzioni di  $n = 2$  variabili**

Generalizzazione:

1. La definizione di intorno di centro  $x_0$  e raggio  $r > 0$  a  $\mathbb{R}^2$
2. La nozione di intervallo aperto e chiuso a  $\mathbb{R}^2$ , come pure la nozione di punto estremo di un intervallo.

## 1.2 Lez - 02

**Definizione 1.2.1 (Distanza Euclidea in  $\mathbb{R}^2$ )** Si chiama distanza euclidea di  $\mathbb{R}^2$  (o nel piano) la funzione,  $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, +\infty)$ :

$$d(p, q) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$p = (x_1, y_1), q = (x_2, y_2)$$

**Definizione 1.2.2** Si chiama intorno (sferico) di centro  $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  e raggio  $r > 0$  (o anche palla aperta di centro  $p_0$  e raggio  $r > 0$ ), l'insieme:

$$\begin{aligned} B_r(p_0) = B(p_0, r) &:= \{p \in \mathbb{R}^2 \mid d(p, p_0) < r\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\} \end{aligned}$$

**Definizione 1.2.3** Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^2$

1. Un punto  $p_0 \in \mathbb{R}^2$  si dice punto di frontiera di  $A$  se

$$B(p_0, r) \cap A \neq \emptyset \text{ e } B(p_0, r) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus A) \neq \emptyset, \forall r > 0$$

L'insieme di tutti i punti di frontiera di  $A$  è detto frontiera di  $A$  e si denota  $\partial A$

2. L'insieme  $A$  è detto chiuso se ogni punto di frontiera di  $A$  appartiene ad  $A$
3. L'insieme  $A$  è detto aperto se non contiene alcun punto della sua frontiera
4. L'insieme di tutti i punti di  $A$  che non sono di frontiera si chiama parte interna di  $A$  e si denota con  $\mathring{A}$
5. L'insieme  $A$  è detto limitato se  $\exists R_0 > 0$  t.c.  $A \subseteq B(O, R_0)$

**Esempio 3** 1.  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ , allora

- $\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
- $\mathring{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$

2.  $A = \mathbb{R}^2, \partial A = \emptyset, \mathring{A} = A = \mathbb{R}^2$

**Definizione 1.2.4** Dato  $A \subseteq \mathbb{R}^2$

1.  $p_0 \in \mathbb{R}^2$  si dice punto di accumulazione per  $A$  se

$$B(p_0, r) \cap (A \setminus \{p_0\}) \neq \emptyset, \forall r > 0$$

2.  $p_0 \in A$  si dice punto isolato di  $A$  se  $p_0$  non è un punto di accumulazione, cioè se:

$$\exists r_0 > 0 \mid B(p_0, r_0) \cap A = \{p_0\}$$

**Definizione 1.2.5 (Limite di funzioni di due variabili)** Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $p_0 \in \mathbb{R}^2$  punto di accumulazione per  $A$ . Si dice che:

$$\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L \in \mathbb{R}$$

oppure  $\exists \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = L$  se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = d(p_0, \varepsilon) > 0 \mid |f(x,y) - L| < \varepsilon, \forall (x,y) \in B(p, \delta) \cap (A \setminus \{p_0\})$$

**Osservazione 1.2.1** Tenendo presente il caso di funzioni di una variabile, si può enunciare anche la definizione nel caso in cui  $L = \pm\infty$

### 1.2.1 Calcolo dei limiti

**Proposizione 1.2.1 (Unicità del limite)** Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $p_0 \in \mathbb{R}^2$  punto di accumulazione per  $A$ . Supponiamo che  $\exists \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = L \in \mathbb{R}$ . Allora  $L$  è unico.

**Teorema 1.2.2 (Tecniche per il calcolo dei limiti)** Siano  $g, f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p_0 \in \mathbb{R}^2$  punto di accumulazione per  $A$ . Supponiamo che  $\exists \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = L \in \mathbb{R}$  e  $\exists \lim_{p \rightarrow p_0} g(p) = M \in \mathbb{R}$ , allora:

1.  $\exists \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) + g(p) = L + M$
2.  $\exists \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) \cdot g(p) = L \cdot M$
3. Se  $g(p) \neq 0, \forall p \in A \setminus \{p_0\}$  e  $M \neq 0$ , allora  $\exists \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{f(p)}{g(p)} = \frac{L}{M}$
4. Sia  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua e sia  $h(p) = F(f(p))$ , allora  $\exists \lim_{p \rightarrow p_0} h(p) = F(L)$
5. **Teorema del confronto:** Sia  $h, g, f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , supponiamo che:

$$5.1 \quad f(p) \leq g(p) \leq h(p), \quad \forall p \in A \setminus \{p_0\}$$

$$5.2 \quad \exists \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = \lim_{p \rightarrow p_0} h(p) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

$$\text{allora } \exists \lim_{p \rightarrow p_0} g(p) = L$$

**Dim. 1** Le dimostrazioni di 1-4 sono lasciate al lettore :)

5 Supponiamo che  $L \in \mathbb{R}$ , dobbiamo provare che  $\exists \lim_{p \rightarrow p_0} g(p) = L$ , cioè per definizione:

$$1^* \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta (= \delta(p_0, \varepsilon)) > 0 \text{ t.c. } |g(p) - L| < \varepsilon \quad \forall p \in B(p_0, \delta) \cap (A \setminus \{p_0\}). \text{ Per ipotesi sappiamo che}$$

$$\lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = L, \quad \lim_{p \rightarrow p_0} h(p) = L$$

cioè :

$$2^* \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 (= \delta_1(p_0, \varepsilon)) > 0 \text{ t.c. } |f(p) - L| < \varepsilon \text{ o equivalentemente } L - \varepsilon < f(p) < L + \varepsilon \quad \forall p \in B(p_0, \delta_1) \cap (A \setminus \{p_0\}), \text{ e:}$$



$3^* \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 (= \delta_2(p_0, \varepsilon)) > 0$  t.c.  $|h(p) - L| < \varepsilon$  o equivalentemente  
 $L - \varepsilon < h(p) < L + \varepsilon \forall p \in B(p_0, \delta_2) \cap (A \setminus \{p_0\})$

Da (5.1), (2\*), (3\*) segue che  $\forall \varepsilon > 0$ , scegliendo  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  vale che

$$L - \varepsilon < f(p) \leq g(p) \leq h(p) < L + \varepsilon$$

$\forall p \in B(p_0, \delta) \cap (A \setminus \{p_0\})$  e dunque vale la (1\*).

Introduciamo un altro strumento importante per il calcolo dei limiti per funzioni di due variabili.

Ricordiamo che data  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $B \subseteq A$  si chiama funzione restrizione  $f|_B : B \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f|_B(x) := f(x)$  se  $x \in B$ .

**Teorema 1.2.3 (Limite lungo direzioni)** Siano  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $p_0 \in \mathbb{R}^2$  punto di accumulazione, allora sono equivalenti

1.  $\exists \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = L$
2. Per ogni sottoinsieme  $B \subseteq A$ , per cui  $p_0$  è un punto di accumulazione per  $B$ ,  $\exists \lim_{p \rightarrow p_0} f|_B(p) = L$

Un insieme  $B \subseteq A$  può essere visto come una direzione lungo cui  $p \rightarrow p_0$ .

**Osservazione 1.2.4** Il teorema precedente risulta efficace solo per provare che il limite non esiste.

## 1.2.2 Esempi calcolo limiti

**Esercizio 2** 1. Calcola, se esiste,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$

**Dim. 2** Nel calcolo del limite bisogna valutare:

- Esistenza (il limite può non esistere)
- Tecniche appropriate per il calcolo

Utilizziamo il punto (4) del primo teorema.

Ricordiamo anche il limite notevole  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

Denotiamo:

- $h(x, y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$  se  $(x, y) \in A = (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$
- $t = x^2 + y^2$
- Sia  $p_0 = (0, 0)$  punto di accumulazione per  $A$ .

Osserviamo che  $h(x, y) = F(f(x, y))$ , dove  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$F := \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

è continua, e  $f(x, y) = x^2 + y^2$   $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Poichè  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ , dal punto (4)

$$\exists \lim_{p \rightarrow p_0} h(p) = \lim_{p \rightarrow p_0} F(f(p)) = F(0) = 1$$

2. Calcola se esiste  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

**Dim. 3** Sia

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$\forall (x, y) \in A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  e  $p_0 = (0, 0)$ .

Utilizziamo il teorema per provare che il limite non esiste.

Infatti se

$$\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = L$$

allora

(1\*)  $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = L, \forall m \in \mathbb{R}$

dove  $y = mx$ ,  $B = \{y = mx\}$  (direzionale) e  $m$  è finito.

Osserviamo che  $f(x, mx) = \frac{mx^2}{(m^2+1)x^2} = \frac{m}{m^2+1}$  se  $x \neq 0$ , quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \frac{m}{m^2 + 1}$$

ma se  $m = 0, 1$  il limite prende valore  $0, \frac{1}{2}$  ( $0 \neq \frac{1}{2}$ ),

dunque non può valere (1\*), quindi il limite non esiste

Dalla definizione di limite per funzioni di due variabili segue subito la nozione di continuità .

**Esercizio 3** Calcolare se esiste

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

Sugg: Provare che  $\nexists$

## 1.3 Lez - 03

### 1.3.1 Definizioni limiti e continuità per $\mathbb{R}^n$

**Definizione 1.3.1** Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

1.  $f$  si dice *continua* in  $p_0 \in A$  se

(a)  $p_0$  è un punto *isolato* di  $A$ , oppure

(b)  $p_0$  è un punto di *accumulazione* ed  $\exists \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = f(p_0)$

2.  $f$  si dice *continua* su  $A$  se  $f$  è continua in ogni punto  $p_0 \in A$

Le nozioni di limite e continuità, introdotte per funzioni  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , si possono estendere al caso di funzioni  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $n \geq 3$ .

Più precisamente su  $\mathbb{R}^n$  possiamo definire la distanza Euclidea:

$$d(p, q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

se  $p = (x_1, \dots, x_n)$  e  $q = (y_1, \dots, y_n)$ .

Intorno di centro  $p_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  e  $r > 0$  è l'insieme:

$$B(p_0, r) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid d(p, p_0) < r\}$$

$$= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2 < r^2\}$$

Tramite la nozione di intorni, si possono estendere a  $\mathbb{R}^n$  la nozione di:

- frontiera di un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- insieme aperto/chiuso  $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- insieme limitato  $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- punto di accumulazione/isolato di  $A \subseteq \mathbb{R}^n$

Pertanto:

**Definizione 1.3.2** Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $p_0 \in \mathbb{R}^n$  punto di accumulazione di  $A$ . Allora si dice che:

$$\exists \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = L \in \mathbb{R}$$

se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(p, \varepsilon) > 0 \text{ t.c. } |f(p) - L| < \varepsilon, \forall p \in B(p_0, \delta) \cap (A \setminus \{p_0\})$$

In modo simile si può introdurre la nozione di continuità per funzioni  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

### 1.3.2 Calcolo differenziale per funzioni a più variabili

#### Derivate parziali

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto,  $p_0 = (x_0, y_0) \in A$ , essendo  $A$  aperto,  $\exists \delta_0 > 0$  t.c.

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta] \subset A$$

In particolare i segmenti:

- $(x, y_0) \in A \ \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$
- $(x_0, y) \in A \ \forall y \in [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$

Pertanto son ben definiti i rapporti incrementali

- $((x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\}) \ni x \rightarrow \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$
- $((y_0 - \delta_0, y_0 + \delta_0) \setminus \{y_0\}) \ni y \rightarrow \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$

**Definizione 1.3.3** 1. Si dice che  $f$  è derivabile(parzialmente) rispetto alla variabile  $x$  nel punto  $p_0 = (x_0, y_0)$  se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} := \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$$

2. Si dice che  $f$  è derivabile(parzialmente) rispetto alla variabile  $y$  nel punto  $p_0 = (x_0, y_0)$  se

$$\exists \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} := \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = D_2 f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$$

3. Se  $f$  è derivabile (parzialmente) sia rispetto ad  $x$  ed  $y$  nel punto  $p_0 = (x_0, y_0)$ , si chiama (vettore)gradiente di  $f$  in  $p_0$  il vettore:

$$\nabla f(p_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \right) \in \mathbb{R}^2$$

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  insieme aperto. Supponiamo che:

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \rightarrow \mathbb{R}$$

allora è ben definito il campo dei vettori gradiente:

$$\nabla f : \mathbb{R}^2 \supseteq A \ni p \rightarrow \nabla f(p) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p) \right) \in \mathbb{R}^2$$

Applicazione: Sia  $V : A \rightarrow \mathbb{R}$  il potenziale di una carica elettrica in un insieme  $A$  del piano. Allora vale la relazione  $\nabla V = \underline{E}$ , dove  $\underline{E} := (E_1(x, y), E_2(x, y)) \rightarrow$  vettore campo elettrico.

Problema:  $\exists \nabla f(p_0)$  è la nozione corretta di derivabilità per funzioni di due variabili? Per esempio se  $\exists \nabla f(p_0) \Rightarrow f$  è continua in  $p_0$ ?

**Esempio 4** Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p_0 = (0, 0)$  e

$$f(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

Abbiamo visto che:  $\nexists \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) \Rightarrow f$  non è continua in  $p_0$ .

D'altra parte:

$$\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$$

$$\text{se } x \neq 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$$

$$\frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0$$

$$\text{se } y \neq 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Pertanto  $\exists \nabla f(0, 0) = (0, 0)$  ma  $f$  non è continua nel punto  $(0, 0)$ .

### 1.3.3 Piano tangente al grafico

**Approssimazione lineare e nozione di differenziabilità per funzioni di più variabili.**

Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ,  $z = f(x, y)$ .

Problema: Definire il "piano tangente" alla "superficie"  $G_f$  nel punto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  se esiste.

Ricordiamo che l'equazione di un piano  $\pi$  di  $\mathbb{R}^3$ , non parallelo all'asse  $z$ , passante per il punto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  è del tipo

$$\pi : z = a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

dove  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Ricordiamo inoltre che per funzioni di  $n = 1$  variabile, se  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in (a, b)$ , la retta tangente  $r$  a  $G_f$  nel punto  $(x_0, f(x_0))$  ha equazione:

$$r : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

ed è caratterizzata dalla proprietà di essere l'unica retta del fascio di rette  $y = m(x - x_0) + f(x_0)$ ,  $m \in \mathbb{R}$  t.c.

$$(D) \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - [m(x - x_0) + f(x_0)]}{|x - x_0|} = 0$$

(miglior approssimazione lineare al primo ordine) Infatti:  $n = 1$ ,  $L(x) = ax$ ,  $a \in \mathbb{R}$  sono le applicazioni lineari di  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$

**Esercizio 4**  $\exists f'(x_0) \in \mathbb{R} \iff \exists m \in \mathbb{R} \text{ t.c. vale (D), inoltre } m = f'(x_0)$ .

Sugg: Utilizzare (D) nel caso di funzioni di due variabili per definire il piano tangente.

Più precisamente, data  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  aperto, sia  $p_0 = (x_0, y_0) \in A$ . Supponiamo che esistono  $a, b \in \mathbb{R}$  t.c.

$$(D) \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x) - [a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0)]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

Allora se vale (D:)

**Definizione 1.3.4** 1. il piano  $\pi : z = a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0, y_0)$  si dice piano tangente al grafico  $G_f$  nel punto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

2.  $f$  si dice differenziabile nel punto  $p_0 = (x_0, y_0)$  proveremo che:

- (a) Se  $f$  è differenziabile in  $p_0 \in A \Rightarrow f$  è continua
- (b) Se  $f$  è differenziale in  $p_0 \in A$ , allora

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \exists \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$$

**Esercizio 5**  $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ ? NO.

## 1.4 Lez - 04

Piano tangente al grafico  $G_f$  in un punto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ , per una funzione  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  è un piano  $\pi$  di equazione  $z = a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0, y_0)$  dove  $p_0 = (x_0, y_0) \in A$ , verificante la seguente equazione:

$$(D) \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x) - [a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0)]}{d(p, p_0)}$$

dove  $d(p, p_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

**Definizione 1.4.1** *Dato  $A$  subseteq  $\mathbb{R}^2$  aperto e dato  $p_0 = (x_0, y_0) \in A$ , la funzione  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  si dice differenziabile nel punto  $p_0$  se vale (D), per  $a, b \in \mathbb{R}$  opportuni.*

**Proposizione 1.4.1** *Se  $f$  è differenziabile nel punto  $p_0 = (x_0, y_0)$ , allora*

$$\exists \nabla f(p_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \right)$$

e

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0), b = \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$$

**Dim. 4** *Supponiamo che  $f$  sia differenziabile in  $p_0$ , cioè che valga (D). Ponendo nella (D),  $y = y_0$  otteniamo che:*

$$\begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) [a(x - x_0) + f(x_0, y_0)]}{|x - x_0|} &= 0 \\ \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) &= a \end{aligned}$$

procediamo allo stesso modo, ponendo  $x = x_0$  nella (D) e otteniamo  $\frac{\partial f}{\partial y}(p_0) = b$

**Definizione 1.4.2** *L'applicazione lineare  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,*

$$L(x, y) := \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)y$$

*si chiama differenziale di  $f$  in  $p_0$ , si denota con:*

$$L = df(p_0) := \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)dy$$

**Definizione 1.4.3 (Piano tangente)** *Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto con  $f$  differenziabile in  $p_0$ . Si chiama piano tangente al grafico  $G_f$  nel punto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  il piano  $\pi$  di equazione:*

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

**Teorema 1.4.1** Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto,  $f$  differenziabile in  $p_0 \in A$ , allora  $f$  è continua in  $p_0$

**Dim. 5**

$$\begin{aligned} f(p) - f(p_0) &= \frac{f(p) - f(p_0) - df(p_0)(p - p_0)}{d(p, p_0)} \cdot d(p, p_0) + df(p_0)(p - p_0) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)(y - y_0) \end{aligned}$$

Il tutto tende a 0 per  $p \rightarrow p_0$ .

$$\Rightarrow \exists \lim_{p \rightarrow p_0} (f(p) - f(p_0)) = 0$$

#### 1.4.1 Differenziabilità in $n \geq 3$

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto,  $p_0 \in A$ ,  $p = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $p_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  possiamo definire

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p_0 + h e_i) - f(p_0)}{h}$$

dove  $i = 1, \dots, n$ ,  $e_i, \dots, e_n$  denota la base canonica di  $\mathbb{R}^n$ , cioè  $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1_{i\text{-esimo elemento}}, 0, 0, \dots, 0)$   
Diremo che

$$\exists \nabla f(p_0) := \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_0) \right)$$

gradiente di  $f$  in  $p_0$ , se  $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$

**Definizione 1.4.4**  $f$  si dice differenziabile in un punto  $p_0 \in A$  se esiste un'applicazione lineare  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  t.c.

$$(D) \exists \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{f(p) - f(p_0) - L(p - p_0)}{d(p, p_0)} = 0$$

L'applicazione lineare  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  per cui valga (D) si denota con  $L = df(p_0)$

**Proposizione 1.4.2 (11.4)** Se  $f$  è differenziabile nel punto  $p_0$  allora

$$i \quad \exists \nabla df(p_0)$$

ii

$$df(p_0)(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) v_i := \nabla f(p_0) \cdot v$$

$$\text{se } v = (v_1, \dots, v_n)$$

**Osservazione 1.4.2** Se  $v = e_i$ ,  $\nabla f(p_0) \cdot e_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)$

**Notazione 1.4.3**  $df(p_0) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) dx_i$



**Osservazione 1.4.4** Dalla definizione di differenziabilità nel caso  $n = 1$ , segue che, se  $A = (a, b)$ ,  $x_0 \in A$ , allora **Esercizio 1.5, foglio 2**:

$$\exists f'(x_0) \iff f \text{ è differenziabile in } x_0$$

**Esercizio 6 (1b, foglio 2)** Calcolare se esiste

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - e^{xy^2}}{\sqrt{x^4 + y^4}}$$

**Dim. 6** Ricordiamo che (1)  $\exists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ .

Utilizzando il precedente limite possiamo eseguire il seguente bilanciamento:

$$\frac{1 - e^{xy^2}}{xy^2} \cdot \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^4}}$$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , con  $xy^2 \neq 0$ . Osserviamo che:

(2)

$$\frac{1 - e^{xy^2}}{\sqrt{x^4 + y^4}} = 0$$

Se  $xy^2 \neq 0$  e  $(x, y) \neq (0, 0)$

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - e^{xy^2}}{xy^2} = 1.$$

Rimane da calcolare, se esiste:

$$(4) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^4}}$$

è molto utile, per studiare limite del tipo (4) fare un cambiamento di variabili ed utilizzare le coordinate polari:

**Coordinate polari**

Consideriamo il seguente cambiamento di variabili  $\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}$  con  $\rho > 0$  e  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ , quindi:

$$\frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^4}} \rightarrow \frac{\rho \cdot \cos \vartheta \cdot \rho^2 \sin^2 \vartheta}{\sqrt{\rho^4 (\cos^4 \vartheta + \sin^4 \vartheta)}} = \rho \cdot \frac{\cos \vartheta \cdot \sin^2 \vartheta}{\sqrt{(\cos^4 \vartheta + \sin^4 \vartheta)}}$$

Dalla (2) sappiamo che se  $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - e^{xy^2}}{\sqrt{x^4 + y^4}} = L \Rightarrow L = 0$ .

Idea: Utilizzare la funzione in coordinate polari, per cercare di provare tramite il teorema del confronto che (5)  $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^4}}$ .

Le coordinate polari risultano molto utili per trovare delle stime per applicare il teorema del confronto:

$$(6) \quad 0 \leq \left| \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^4}} \right| = \left| \rho \cdot \frac{\cos \vartheta \cdot \sin^2 \vartheta}{\sqrt{(\cos^4 \vartheta + \sin^4 \vartheta)}} \right| \leq$$

$$\leq \rho \cdot \frac{|\cos \vartheta \cdot \sin^2 \vartheta|}{\sqrt{(\cos^4 \vartheta + \sin^4 \vartheta)}} \leq \frac{\rho \cdot 1}{\sqrt{\cos^4 \vartheta + \sin^4 \vartheta}}$$

**Esercizio 7**  $\cos^4 \vartheta + \sin^4 \vartheta \geq \frac{1}{2}$ ,  $\forall \vartheta \in [0, 2\pi]$

Pertanto da (6) segue che

$$\begin{cases} \vartheta > 0 & \forall \vartheta \in (0, 2\pi) \\ \frac{1}{\vartheta} > 0 & \vartheta \rightarrow 0^+ \end{cases}$$

$$0 \leq \left| \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^4}} \right| \leq \sqrt{2} \cdot \rho = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  se  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  Dunque vale (5) e possiamo concludere che

$$\exists \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{1 - e^{xy^2}}{\sqrt{x^4 + y^4}} = 0$$

$$f(x, y) = \frac{1 - e^{xy^2}}{\sqrt{x^4 + y^4}}$$

se  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,

- $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$
- $\exists \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0$

$$\Rightarrow \exists \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = L \Rightarrow L = 0$$

**Dim. 7 (1.5, foglio 2)**  $(\Rightarrow) \exists f'(p_0) \Rightarrow f$  è differenziabile in  $x_0$ .

Ricordiamo che per definizione

$$\exists f'(x_0) \in \mathbb{R} \iff (1) \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{N.B.}: \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$$

**Esercizio 8**

$$(1) \iff (2) \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$$

Osserviamo che per definizione  $f$  è differenziabile in  $x_0 \iff$  vale (2).

Mostriamo l'implicazione  $(\Leftarrow)$ , Supponiamo che valga (2).

**Esercizio 9**

$$(2) \iff (3) \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

*È chiaro che*

$$\begin{aligned} (3) &\iff \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0 \iff \\ &\iff \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \stackrel{def}{\iff} \exists f'(x_0) \end{aligned}$$

## 1.5 Lez - 05

### 1.5.1 Condizioni sulle derivate parziali che assicurino la differenziabilità

**Osservazione 1.5.1** *La derivabilità parziale non è sufficiente ad assicurare la differenziabilità*

**Problema:** Data  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto e supponiamo che  $\exists \nabla f(p_0)$  con  $p_0 \in A$ . Quale proprietà ulteriore bisogna aggiungere per ottenere la differenziabilità di  $f$  in  $p_0$ ?

**Teorema 1.5.2 (del differenziale totale)** *Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto,  $p_0 \in A$ . Supponiamo che*

(i)

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \rightarrow \mathbb{R}$$

(ii)  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$  siano continue nel punto  $p_0$ , cioè

$$\exists \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) \text{ e } \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{\partial f}{\partial y}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$$

Allora  $f$  è differenziabile nel punto  $p_0$ . [BDPG, 11.5]

**Osservazione 1.5.3** *È sufficiente richiedere la (i) e (ii) in un intorno di  $p_0$*

Il teorema del differenziale totale giustifica la seguente definizione:

**Definizione 1.5.1** *Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$*

(i)  *$f$  si dice differenziabile su  $A$  se è diff su ogni punto di  $A$ .*

(ii)  *$f$  si dice di classe  $C^1$  su  $A$  se  $f$  è continua e*

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ continui}$$

*In questo caso scriveremo che  $f \in C^1(A)$*

Dal teorema del differenziale totale segue anche:

**Corollario 1.5.1** *Sia  $f \in C^1(A)$  allora  $f$  è differenziabile su ogni punto di  $p_0 \in A$*

## 1.5.2 Derivate direzionali

### Norma di un vettore di $\mathbb{R}^n$

Sia  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ , si chiama norma di  $v$ , e si denota

$$\|v\| := \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} = d(v, \underline{0}) = \sqrt{v \cdot v}$$

**Esempio 5** 1.  $n = 1$ ,  $\|v\| = |v|$  se  $v \in \mathbb{R}$

2.  $n = 2$ . (immaginarsi il piano cartesiano)

**Osservazione 1.5.4** Se  $p, q \in \mathbb{R}^n \Rightarrow d(p, q) = \|p - q\|$

**Esercizio 10 (6, foglio 1)** 1.  $\|v\| = 0 \iff v = \underline{0} = (0, \dots, 0)$

2. Se  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $\lambda v = (\lambda v_1, \dots, \lambda v_n)$  con  $v = (v_1, \dots, v_n)$ , allora  $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$

3. Disuguaglianza triangolare: Se  $v, w \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

**Definizione 1.5.2** Un vettore  $v \in \mathbb{R}^n$  si dice direzione (vettore unitario, versore) se  $\|v\| = 1$

**Esempio 6**  $n = 2$ , i vettori  $e_1 = (1, 0)$  ed  $e_2 = (0, 1)$  sono direzioni di  $\mathbb{R}^2$

Sia  $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$  una direzione, e  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto e  $p_0 = (x_0, y_0) \in A$ , allora  $\exists \delta > 0$  t.c.

$$p_0 + hv = (x_0 + hv_1, y_0 + hv_2) \in A$$

se  $|h| \leq \delta$ , pertanto è ben definita:

$$(-\delta, \delta) \setminus \{0\} \ni h \rightarrow \frac{f(p_0 + hv) - f(p_0)}{h}$$

**Definizione 1.5.3** Si dice che  $f$  è derivabile (parzialmente) rispetto alla direzione  $v$  nel punto  $p_0$  se

$$\exists \frac{\partial f}{\partial v}(p_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p_0 + hv) - f(p_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

**Notazione 1.5.5** Talvolta  $\frac{\partial f}{\partial v}(p_0) = D_v f(p_0)$

**Osservazione 1.5.6** (i) Sia  $F : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ , (funzione di  $n = 1$  variabile)

$$F(t) := f(p_0 + tv) \text{ se } t \in (-\delta, \delta)$$

Allora è immediato verificare che

$$\exists \frac{\partial f}{\partial v}(p_0) \iff \exists F'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F'(h) - F(0)}{h}$$

ed in questo case,  $\frac{\partial f}{\partial v}(p_0) = F'(0)$

(ii) È immediato verificare che se  $v = e_1$  o  $v = e_2$ , allora

$$\frac{\partial f}{\partial e_1}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial e_2}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$$

### 1.5.3 Teo: Diff. vs. Deriv. direz.

**Teorema 1.5.7 (differenziabilità vs derivabilità direzionale)** Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto e sia fissato  $p_0 = (x_0, y_0) \in A$ . Supponiamo che  $f$  sia differenziale in  $p_0$ , allora

$$\exists \frac{\partial f}{\partial v}(p_0) = df(p_0)(v) = \nabla f(p_0) \cdot (v) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)(v_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)(v_2)$$

per ogni direzione  $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$

**Dim. 8** Consideriamo la funzione  $F : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$F(t) = f(p_0 + tv) = f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)$$

Per ipotesi,  $f$  è differenziabile in  $p_0$ , cioè vale:

$$(D) \exists \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{f(p) - f(p_0) - \nabla f(p_0) \cdot (p - p_0)}{d(p, p_0)} = 0$$

la condizione (D) è equivalente a chiedere:

$$(D^*) f(p) = f(p_0) + \nabla f(p_0) \cdot (p - p_0) + o(d(p, p_0)) \quad \forall p \in A$$

dove con  $o(d(p, p_0)) \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{o(d(p, p_0))}{d(p, p_0)} = 0$  Scegliendo  $p = p_0 + hv$  in  $(D^*)$ , otteniamo che:

$$\begin{aligned} F(h) &:= f(p_0 + hv) - f(p_0) + \nabla f(p_0) \cdot (hv) + o(d(p_0 + hv, p_0)) = \\ &= F(0) + h(\nabla f(p_0) \cdot v) + o(|h|) \end{aligned}$$

Infatti ricordiamo che:

$$d(p_0 + hv, p_0) = \|p_0 + hv - p_0\| = \|hv\| = |h| \|v\| = |h|$$

Dall'identità precedente segue che:

$$\exists F'(0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \nabla f(p_0) \cdot v = df(p_0)(v)$$

Per l'osservazione precedente  $F'(0) = \frac{\partial f}{\partial v}(p_0)$  da cui segue la tesi.

Dal teorema segue la generalizzazione del teorema del valore medio (G. Lagrange) a funzioni  $n = 2$  variabili.

### 1.5.4 Teorema del valore medio

**Teorema 1.5.8 (TdVM, n=1)** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua e derivabile in  $(a, b)$ . Allora  $\exists c \in (a, b)$  t.c.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

**Teorema 1.5.9 (del valore medio, n=2)** Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto. Supponiamo che:

- (i)  $\exists p, q \in A$  t.c.  $[p, q] := \{tq + (1-t)p \mid t \in [0, 1]\} \subset A$
- (ii)  $f$  è continua sull'insieme  $[p, q]$  e differenziabile su  $(p, q) := \{tq + (1-t)p \mid t \in (0, 1)\}$

Allora esiste un punto  $\bar{c} \in (p, q)$  t.c.  $f(q) - f(p) = \nabla f(\bar{c}) \cdot (q - p)$

**Dim. 9** Supponiamo  $p \neq q$  altrimenti la tesi è banale e sia

$$v := \frac{q - p}{\|q - p\|}$$

una direzione di  $\mathbb{R}^2$ .

Definiamo la funzione (d  $n=1$  variabile)  $F(t) := f(p + tv)$  con  $t \in [0, \|q - p\|]$  ( $\subset \mathbb{R}$ ) e fissiamo  $p, q$ , osserviamo che  $F$  è ben definita per la (i) e  $F(0) = f(p)$  e  $F(\|q - p\|) = f(q)$ . Inoltre per la (ii):

1.  $F : [0, \|q - p\|] \rightarrow \mathbb{R}$  è continua;
2.  $\exists F'(t) = \frac{\partial f}{\partial v}(p + tv)$ ,  $\forall t \in (0, \|q - p\|)$

Possiamo applicare il teorema del valore medio ( $n=1$  variabile) a  $F$  e otteniamo che esiste  $\bar{t} \in (0, \|q - p\|)$  t.c.

$$\begin{aligned} f(q) - f(p) &= F(\|q - p\|) - F(0) = F(\bar{t}) \|q - p\| = \\ &=_{(2)} \frac{\partial f}{\partial v}(p + \bar{t}v) \|q - p\| = (\nabla f(p + \bar{t}v) \cdot v) \|q - p\| = \\ &= \left( \nabla f(p + \bar{t}v) \cdot \frac{q - p}{\|q - p\|} \right) \cdot \frac{q - p}{\|q - p\|} = \nabla f(p + \bar{t}v)(q - p) \end{aligned}$$

Scegliendo  $\bar{c} = p + \bar{t}v \in (p, q)$  otteniamo la tesi

**Corollario 1.5.2** Sia  $f : B(p_0, r_0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Supponiamo che  $\exists \nabla f(p_0) = (0, 0) \forall p \in B(p_0, r_0)$ . Allora  $f(p) = f(p_0)$ ,  $\forall p \in B(p_0, r_0)$

**Dim. 10** per il teorema del diff. tot.  $f$  è differenziale su  $B(p_0, r_0)$ . Possiamo applicare il teorema del valore medio e otteniamo che  $\exists \bar{c} \in (p, p_0)$  t.c.  $f(p) - f(p_0) = \nabla f(\bar{c})(p - p_0) = 0$ ,  $\forall p \in B(p_0, r_0)$

## 1.6 Lez - 06

### 1.6.1 Derivate parziali di una f composta di più variabili

**Problema:** Vogliamo determinare una formula generale che ci consente di calcolare le derivate parziali di una (generica) funzione composta di più variabili.

**Esercizio 11 (7, foglio 3)** Consideriamo la funzione composta  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita come  $h := f \circ g$ , dove  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ :

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

se  $(x, y) \neq (0, 0)$  e

$$g(t) = (g_1(t), g_2(t)) = (\sin^2(t), \cos^2(t)), t \in \mathbb{R} \text{ Calcolare } h'(t), t \in \mathbb{R}$$

#### Richiami della RDC

Siano  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  con  $g(J) \subseteq I$ ,  $I, J$  intervalli aperti di  $\mathbb{R}$ .  
 $h := f \circ g$ ,  $h(x) := f(g(x))$ ,  $x \in I$

**Proposizione 1.6.1 (Regola della catena, RDC)** Se  $f, g$  sono derivabili, rispettivamente, in  $g(x_0)$  e in  $x_0$ , allora  $\exists h'(x) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

**Esempio 7**  $f(y) = \sin y$ ,  $g(x) = x^2$ ,  $h = f \circ g$ ,  $h(x) = \sin x^2$ ,  $\exists h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \cos x^2 \cdot 2x$

Prima di arrivare alla formula generale di derivazione di una funzione composta, introduciamo alcuni casi particolari

### 1.6.2 I caso particolare

Consideriamo  $g : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $I$  intervallo aperto di  $\mathbb{R}$ ,  $t_0 \in I$  fissato.

$$I \ni t \rightarrow g(t) = (g_1(t), g_2(t)) = (x(t), y(t))$$

con  $g_1, g_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Supponiamo che  $\exists g'_1(t_0), g'_2(t_0)$  e  $g(I) \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $A$  aperto.

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e supponiamo che  $f$  sia differenziabile in

$$p_0 = (x_0, y_0) = g(t_0) = (g_1(t_0), g_2(t_0))$$

Consideriamo la funzione composta  $h : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h := f \circ g$

$$I \ni t \rightarrow h(t) := (f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(g_1(t), g_2(t))$$



**Teorema 1.6.1**

$$(1) \exists h'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) \cdot g'_1(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \cdot g'_2(t_0)$$

oppure tramite matrici

$$(1bis) \exists h'(t_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g'_1(t_0) \\ g'_2(t_0) \end{bmatrix} = \\ = \nabla f(p_0) \cdot g'(t_0), \text{ dove } g'(t_0) = (g'_1(t_0), g'_2(t_0)).$$

**Espansione classica di RDC, Leibniz**

Se scriviamo  $g$  e  $f$ , in termini di "variabili dipendenti", cioè

$$g = \begin{cases} x = x(t) = g_1(t) \\ y = y(t) = g_2(t) \end{cases} \quad (\text{curva del piano})$$

$z = z(x, y) = f(x, y)$ , allora componendo  $f$  con  $g$ , la variabile dipendente  $z$  dipenderà dalla sola variabile indipendente  $t$  per cui,  $z = z(t) = z(x(t), y(t))$ ,  $t \in I$ .

Quindi in termini di queste variabili  $(z, x, y, t)$  si può scrivere la (1) come:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

oppure utilizzando (1bis)

$$\frac{dz}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix}$$

**Dim. 11 (Idea!)** Proviamo la (1), cioè provare che

$$(2) \exists h'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = \nabla f(p_0) \cdot g'(t_0)$$

Essendo  $f$  differenziabile in  $p_0$  vale che:

$$(3) f(p) = f(p_0) + df(p_0) \cdot (p - p_0) + o(\|p - p_0\|)$$

$\forall p \in A$  se  $p_0 = g(t_0)$ .

Da (3) segue che, se scegliamo  $p = g(t)$  otteniamo:

$$f(g(t)) = f(g(t_0)) + df(g(t_0)) \cdot (g(t) - g(t_0)) + o(\|g(t) - g(t_0)\|)$$

$\forall t \in I$ , da cui:

$$(4) \frac{f(g(t)) - f(g(t_0))}{t - t_0} = \frac{df(g(t_0)) \cdot (g(t) - g(t_0))}{t - t_0} + \frac{o(\|g(t) - g(t_0)\|)}{t - t_0}$$

$t \in I, t \neq t_0$ .

Osserviamo che essendo  $df(p_0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  lineare allora:

$$(5) \frac{df(p_0)(g(t) - g(t_0))}{t - t_0} = df(p_0) \cdot \left( \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} \right)$$

Passando al limite nella (5) per  $t \rightarrow t_0$ , dalla continuità della funzione  $df(p_0)$ , si ottiene che:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} df(p_0) \left( \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} \right) = df(p_0) \cdot g'(t_0)$$

$$(6) \exists \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{df(p_0)(g(t) - g(t_0))}{t - t_0} = df(p_0) \cdot g'(t_0) = \nabla f(p_0) \cdot g'(t_0)$$

Si può provare anche (ed è il punto delicato che omettiamo)

$$(7) \exists \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{o(\|g(t) - g(t_0)\|)}{t - t_0} = 0$$

Da (6) e (7), possiamo passare al limite per  $t \rightarrow t_0$  nella (4) ed otteniamo la (2) e dunque la tesi.

### 1.6.3 II caso particolare

$g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $A$  aperto, e  $p_0 = (s_0, t_0) \in A$

$$A \ni (s, t) \rightarrow g(s, t) = (g_1(s, t), g_2(s, t))$$

$g_1, g_2 : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Supponiamo che  $g_1$  e  $g_2$  siano differenziabili in  $p_0$  e  $g(A) \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ ,  $B$  aperto.

In particolare:

$$\exists \nabla g_i(p_0) = \left( \frac{\partial g_i}{\partial s}(p_0), \frac{\partial g_i}{\partial t}(p_0) \right) \quad i = 1, 2$$

Sia  $f : B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $B$  aperto,  $f$  differenziabile in  $q_0 = (x_0, y_0) = (g_1(p_0), g_2(p_0))$ ,

$B \ni (x, y) \rightarrow f(x, y) \in \mathbb{R}$ .

Supponiamo che  $f$  sia differenziabile in  $q_0$ .

Consideriamo  $h := f \circ g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$A \ni (s, t) \rightarrow (f \circ g)(s, t) = f(g(s, t)) = f(g_1(s, t), g_2(s, t))$$

#### Teorema 1.6.2

$$(1) \quad \begin{aligned} \exists \frac{\partial h}{\partial s}(p_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(g(p_0)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial s}(p_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(p_0)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial s}(p_0) \\ \exists \frac{\partial h}{\partial t}(p_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(g(p_0)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial t}(p_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(p_0)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial t}(p_0) \end{aligned}$$

in termini di matrici:

$$(1bis) \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial s}(p_0) & \frac{\partial h}{\partial t}(p_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(g(p_0)) & \frac{\partial f}{\partial y}(g(p_0)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial s}(p_0) & \frac{\partial g_1}{\partial t}(p_0) \\ \frac{\partial g_2}{\partial s}(p_0) & \frac{\partial g_2}{\partial t}(p_0) \end{bmatrix}$$

Dove  $\frac{\partial g_1}{\partial s}(p_0), \frac{\partial g_1}{\partial t}(p_0) = \nabla g_1(p_0)$  e  $\frac{\partial g_2}{\partial s}(p_0), \frac{\partial g_2}{\partial t}(p_0) = \nabla g_2(p_0)$

**Esercizio 12** Utilizzare (1bis) del teorema nel secondo caso e svolgere esercizio 7 foglio 3

### 1.6.4 Caso generale di RDC

Vogliamo ora trattare il caso generale della formula di derivazione per funzioni composte di più variabili.

#### Matrice Jacobiana

**Definizione 1.6.1 (Matrice Jacobiana)** Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $A$  aperto,

$$A \ni x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow f(x) = (f(x_1), \dots, f(x_n))$$

con  $f_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Supponiamo che dato  $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in A$ ,

$$\exists \nabla f_i(x_0) := \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

con  $i = 1, \dots, m$ .

Si chiama Matrice Jacobiana di  $f$  nel punto  $x_0$  la matrice  $m \times n$

$$Df(x_0) = Jf(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix}$$

**Osservazione 1.6.3** (i) La nozione di matrice Jacobiana generalizza la nozione di vettore gradiente per una funzione (scalare)  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Si noti che in questo caso la matrice Jacobiana  $1 \times n$  è data da

$$Df(x_0) := \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) \equiv \nabla f(x_0)$$

(ii) La riga  $i$ -esima della matrice Jacobiana  $Df(x_0)$  coincide con  $\nabla f_i(x_0)$

(iii) La (1bis) del precedente teorema, in termini di matrici Jacobiane può scriversi come

$$Dh(p_0) = Df(g(p_0)) \cdot Dg(p_0) \text{ (RDC)}$$

### 1.6.5 Teorema RDC

**Teorema 1.6.4 (Regola della catena, RDC)** Siano  $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $f : B \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $A$  e  $B$  aperti

(i)  $g(A) \subseteq B$

(ii) Se  $g = (g_1, \dots, g_m)$ ,  $f = (f_1, \dots, f_k)$

Supponiamo che  $g_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \ (i = 1, \dots, m)$  sia diff. in un dato  $x_0 \in A$   
 $f_i : B \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \ (i = 1, \dots, k)$  sia diff. in un dato  $y_0 = g(x_0)$

Consideriamo ora la funzione  $h := f \circ g : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $h = (h_1, \dots, h_k)$

con  $h_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,

allora le funzioni  $h_i : A \rightarrow \mathbb{R} \ (i = 1, \dots, k)$  sono diff. in  $x_0$  e

$$Dh(x_0) = Df(g(x_0)) \cdot Dg(x_0)$$

## 1.7 Lez - 07

### 1.7.1 Derivate parziali di ordine superiore

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto. Supponiamo che  $\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \rightarrow \mathbb{R}$  poniamo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &:= \frac{\partial f}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &:= \frac{\partial f}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \text{Derivate parziali seconde pure}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &:= \frac{\partial f}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &:= \frac{\partial f}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \text{Derivate parziali seconde miste}$$

quando tutte le derivate parziali scritte esistono.

**Osservazione 1.7.1** In generale  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

### 1.7.2 Teo: Inversione dell'ordine di derivazione

**Teorema 1.7.2 (sull'inversione dell'ordine di derivazione)** [BDPG, 11.11]

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto,  $p_0 = (x_0, y_0) \in A$  fissato. Supponiamo  $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : A \rightarrow \mathbb{R}$  e siano continue in  $p_0$ , allora  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0)$

Il teorema precedente può estendersi al caso di funzioni  $n \geq 2$  variabili.

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto. Supponiamo che esista  $\frac{\partial f}{\partial x_i} : A \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Se  $\exists \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(x_0)$  in un punto  $x_0 \in A$  per  $j = 1, \dots, n$ , diciamo che

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) := \frac{\partial f}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(x_0)$$

Nel caso in cui  $j = i \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x_0)$ .

Con queste notazioni, vale la seguente generalizzazione del teorema sull'inversione dell'ordine di derivazione.

**Teorema 1.7.3** Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto. Supponiamo che per fissati  $i, j = 1, \dots, n$ , con  $i \neq j$ ,  $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : A \rightarrow \mathbb{R}$  e siano continue in  $x_0$ . Allora:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$$

**Definizione 1.7.1** Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto

- (a)  $f$  si dice di classe  $C^2(A)$  e scriveremo  $f \in C^2(A)$  se  $f \in C^0(A)$  ed  $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i} : A \rightarrow \mathbb{R}$  continua  $\forall i = 1, \dots, n$ ,  $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : A \rightarrow \mathbb{R}$  continua  $\forall i, j = 1, \dots, n$
- (b)  $f$  si dice di classe  $C^m(A)$  e scriveremo  $f \in C^m(A)$ , ( $m \geq 1$ ) se  $f \in C^0(A)$  e  $\exists \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} : A \rightarrow \mathbb{R}$  continua  $\forall i_1, \dots, i_k = 1, \dots, n$  e  $\forall 1 \leq k \leq m$

**Osservazione 1.7.4** Se  $f \in C^m(A)$ , con  $m \geq 2$  per il teo sull'inversione dell'ordine di derivazione

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

$\forall x \in A, \forall i, j = 1, \dots, n$

### 1.7.3 Taylor per funzioni di più variabili

**Problema:** Data  $f : B(p_0, r) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  funzione di classe  $C^m(B(p_0, r))$ , approssimare  $f$  con un polinomio di  $n = 2$  variabili di ordine  $m$ , nel modo "migliore possibile"

**Definizione 1.7.2** Dato  $m \in \mathbb{N}$ ,  $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  fissato, si chiama polinomio di ordine  $m$  di  $n = 2$  variabili, centrato in  $p_0$ , una funzione  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  del tipo

$$T(x, y) = \sum_{h=0}^m \sum_{i=0}^n c_{i, h-i} (x - x_0)^i (y - y_0)^{h-i}$$

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , dove  $c_{i, h-i}$  ( $i = 0, \dots, h$  e  $h = 0, \dots, m$ ) sono  $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$  coeff. ass.

**Esempio 8** (a) Se  $m = 0$ ,  $T(x, y) = c_{0,0} \in \mathbb{R} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

(b) Se  $m = 1$ ,  $T(x, y) = c_{0,0} + c_{1,0}(x - x_0) + c_{0,1}(y - y_0)$ ,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

(c) Se  $m = 2$ ,  $T(x, y) = c_{0,0} + c_{1,0}(x - x_0) + c_{0,1}(y - y_0) + c_{2,0}(x - x_0)^2 + c_{1,1}(x - x_0)(y - y_0) + c_{0,2}(y - y_0)^2$ ,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

**Problema:** Sia  $f \in C^2(B(p_0, r))$ , determinare se esiste un polinomio  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  di ordine 2, centrato in  $p_0$ , t.c.

$$f(p) = T(p) + o(\|p - p_0\|^2)$$

$\forall p = (x, y) \in B(p_0, r)$

**Notazione 1.7.5** Se  $v, w \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \cdot w = \langle v, w \rangle$

**Definizione 1.7.3** Data  $f \in C^2(A)$ ,  $A \in \mathbb{R}^2$  aperto, si chiama, matrice hessiana di  $f$  in un punto  $p \in A$ , la matrice  $2 \times 2$

$$D^2 f(p) = H(f)(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

**Osservazione 1.7.6** per il teo. dell'inv. dell'ordine di derivazione  $D^2 f(p)$  è simmetrica

### 1.7.4 Taylor del II ordine + resto di Peano

Sia  $f \in C^2(B(p_0, r))$ ,  $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  e  $r > 0$  fissato. Allora vale:

$$(FT_2) f(p) = T_2(p) + o(\|p - p_0\|^2)$$

$\forall p = (x, y) \in B(p_0, r)$ , dove

$$T_2(p) := f(p_0) + \langle \nabla f(p_0), p - p_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle D^2 f(p_0) \cdot (p - p_0), p - p_0 \rangle$$

se  $p \in \mathbb{R}^2$ .

(polinomio di Taylor del II ordine di  $f$ , centrato in  $p_0$ )

Ricordiamo che con  $o(\|p - p_0\|^2) \Rightarrow \exists \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{o(\|p - p_0\|^2)}{\|p - p_0\|^2} = 0$

**Dim. 12** Fissiamo  $p \in B(p_0, r) \setminus \{p_0\}$  e denotiamo  $v := \frac{p - p_0}{\|p - p_0\|} = (v_1, v_2)$ , (direzione  $p - p_0$ ) e definiamo:  $F(t) := f(p_0 + tv)$ , con  $t \in (-r, r)$ . Poichè la funzione  $g : (-r, r) \rightarrow B(p_0, r) \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $g(t) = p_0 + tv := (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)$  è una funzione di classe  $C^2((-r, r))$ , come pure  $f$ , per RDC la funzione composta:  $F(t) = f(g(t))$ ,  $t \in (-r, r)$ , è di classe  $C^2((-r, r))$ . Pertanto possiamo applicare la formula di Taylor del II ordine per una funzione di una variabile per  $t = 0$  e otteniamo:

$$(1) F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{1}{2}F''(0)t^2 + o(t^2) \text{ per } t \rightarrow 0$$

Calcoliamo  $F(0), F'(0), F''(0)$ . Per RDC:

•

$$F'(t) = \langle \nabla f(p_0 + tv), v \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0 + tv)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0 + tv)v_2$$

•

$$\begin{aligned} F''(t) &= v_1 \cdot \left\langle \nabla \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (p_0 + tv), v \right\rangle + v_2 \cdot \left\langle \nabla \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (p_0 + tv), v \right\rangle = \\ &= v_1 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0 + tv)v_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0 + tv)v_2 \right) + v_2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0 + tv)v_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0 + tv)v_2 \right) = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0 + tv)v_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0 + tv)v_1v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0 + tv)v_2^2 \end{aligned}$$

Pertanto

$$(2) F(0) = f(p_0)$$

$$(3) F'(0) = \langle \nabla f(p_0), v \rangle$$

$$(4) F''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0 + tv)v_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0 + tv)v_1v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0 + tv)v_2^2$$

Osserviamo che  $F''(0)$  può essere riscritto mediante hessiana  $D^2f(p_0)$ , come (4bis)  $F''(0) = \langle D^2f(p_0)v, v \rangle$ , pertanto da (1), (2), (3), (4bis) otteniamo:

$$f(p_0 + tv) = F(t) = f(p_0) + \langle \nabla f(p_0), v \rangle t + \frac{1}{2} \langle D^2f(p_0)v, v \rangle t^2 + o(t^2), \text{ per } t \rightarrow 0$$

Scegliendo  $t = \|p - p_0\|$ , otteniamo la tesi.

**Osservazione 1.7.7 (BDPG, 11.14)** Si può ottenere una formula di Taylor con resto di Peano e Lagrange anche per funzioni  $f : B(p_0, r) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2(B(p_0, r))$  con  $n \geq 3$ .

Essa è molto più complicata perciò la omettiamo

### Esercizio 13

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \end{cases}$$

$\exists f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ma  $f'$  non è continua nel punto  $x_0 = 0$



## 1.8 Lez - 08

### 1.8.1 Massimi e minimi per funzioni a più variabili

**Problema:** Dato un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  e data  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , determinare, se esistono, i punti di max e min di  $f$ .

**Definizione 1.8.1** Data  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ :

1.  $p_0 \in A$  si dice, punto di massimo ( $= \max$ ) relativo di  $f$  su  $A$  se  $\exists r_0 > 0$  t.c.  $f(p) \leq f(p_0) \forall p \in A \cap B(p_0, r_0)$   
Rispettivamente  $p_0 \in A$  si dice, punto di minimo ( $= \min$ ) relativo di  $f$  su  $A$  se  $\exists r_0 > 0$  t.c.  $f(p) \geq f(p_0) \forall p \in A \cap B(p_0, r_0)$
2.  $p_0 \in A$  si dice punto di massimo ( $= \text{MAX}$ ) assoluto se  $\forall p \in A, f(p) \leq f(p_0)$   
Rispettivamente  $p_0 \in A$  si dice punto di minimo ( $= \text{MIN}$ ) assoluto se  $\forall p \in A, f(p) \geq f(p_0)$

**Osservazione 1.8.1** Se  $p_0$  è un punto di max ( o min) assoluto  $\Rightarrow p_0$  è punto di max (o min) relativo. Il viceversa non può valere.

**N.B.: 1.8.2** Non confondere i punti di max e min di una funzione con il suo massimo e minimo.

- $\text{Min}_A f := \text{Min} f(p) : p \in A \in \mathbb{R}$ , se esiste è unico
- $\text{Max}_A f := \text{Max} f(p) : p \in A \in \mathbb{R}$ , se esiste è unico

Consideriamo il seguente esempio:

**Esempio 9**  $n = 1, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} f(x) =: x(3 - x^2)$

In particolare si può vedere che i punti  $x = \pm 1$  sono rispettivamente max e min relativi, ma  $x = -1$  non è minimo assoluto e  $x = +1$  non è massimo assoluto.

Infatti essendo la funzione non limitata ( $\sup_{\mathbb{R}} f = +\infty$  e  $\inf_{\mathbb{R}} f = -\infty$ ) /  $\exists \text{max}_{\mathbb{R}} f$  e  $\text{min}_{\mathbb{R}} f$

### 1.8.2 Estremi liberi di una funzione (min/max relativi)

**Problema:** Supponiamo che  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  sia aperto e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , vogliamo determinare se esistono i punti di max e min relativo su  $A$ . Questi punti sono detti estremi liberi di  $f$ .

Lo strumento principale per la ricerca di estremi liberi è :

**Teorema 1.8.3 (Fermat)** Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto. Supponiamo che esista  $p_0 \in A$  t.c.

(i)  $f$  differenziabile in  $p_0$ . In particolare  $\exists \nabla f(p_0)$

(ii)  $p_0$  sia un estremo libero di  $f$  in  $A$

Allora  $\nabla f(p_0) = \underline{O}_{\mathbb{R}^n} = (0, \dots, 0)$  ( $n$ -volte)

Il precedente teorema giustifica la seguente definizione:

**Definizione 1.8.2** Data  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto, un punto  $p_0 \in A$  si chiama punto stazionario (o critico) di  $f$  se  $f$  è differenziabile in  $p_0$  e  $\nabla f(p_0) = \underline{O}_{\mathbb{R}^n}$

**Dim. 13** Per semplicità,  $n = 2$ ,  $p_0 = (x_0, y_0)$ . Essendo  $A$  aperto esiste  $\delta > 0$  t.c.  $p_0 + te_1 \in A$  se  $t \in (-\delta, \delta)$ .

Consideriamo  $F : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(t) := f(p_0 + te_1)$ , da (i)

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) \iff (1) \begin{cases} F \text{ è derivabile nel punto } t = 0 \\ \text{e } F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) \end{cases}$$

Dall'altra parte, da (ii)  $p_0$  estremo libero di  $f$  (2)  $t = 0$  è un estremo libero di  $F$ . Possiamo applicare il teorema di Fermat di una variabile ed otteniamo  $F'(0) = 0 =_{(1)} \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)$ .

Analogamente consideriamo  $F(t) = f(p_0 + te_2)$  e si prova che  $\frac{\partial f}{\partial y}(p_0) = 0$ .

Pertanto si prova che  $\nabla f(p_0) = (0, 0) = \underline{O}_{\mathbb{R}^2}$

**Osservazione 1.8.4** Non ogni punto stazionario di  $f$  è un punto di estremo libero.

**Esempio 10**  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = y^3$ ,  $p_0 = (x_0, 0)$ .

Poichè  $\nabla f(x, y) = (0, 3y^2)$ ,  $\nabla f(p_0) = (0, 0)$ . Pertanto ogni punto  $p_0 = (x_0, 0)$  (per un fissato  $x_0 \in \mathbb{R}$ ) è un punto stazionario di  $f$ , ma  $p_0$  non è un estremo libero, infatti  $\forall r > 0$   $f(x_0, 0) = 0 \forall x_0 \in \mathbb{R}$ , quindi  $p_0 = (x_0, 0)$  si dice punto di sella.

**Definizione 1.8.3** Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto. Un punto  $p_0 \in A$  si dice punto di sella se  $p_0$  è un punto stazionario di  $f$  e  $f(p) - f(p_0)$  ammette sia valori positivi che negativi in ogni intorno di  $p_0$

### 1.8.3 Matrice Hessiana

**Problema:** Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^2(A)$ . Supponiamo che  $p_0 \in A$  sia un punto stazionario di  $f$ .

Come determinare se  $p_0$  sia un estremo libero o un punto di sella?

**Definizione 1.8.4** Sia  $f \in C^2(A)$ , si chiama, matrice hessiana di  $f$  nel punto  $p_0 \in A$  la matrice simmetrica ( $n \times n$ )

$$D^2 f(p_0) = Hf(p_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(p_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(p_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(p_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)(p_0) \\ \vdots \\ \nabla \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)(p_0) \end{bmatrix}$$

### 1.8.4 Teorema: Criterio per il segno di una matrice

#### Richiami di algebra lineare

**Definizione 1.8.5** Sia  $H$  una matrice  $n \times n$

- (i)  $H$  si dice definita positiva se  $\langle Hv, v \rangle > 0, \forall v \in \mathbb{R}^n \times \{\underline{O}\}$
- (ii)  $H$  si dice semi-definita positiva se  $\langle Hv, v \rangle \geq 0, \forall v \in \mathbb{R}^n \times \{\underline{O}\}$
- (iii)  $H$  si dice definita negativa se  $\langle Hv, v \rangle < 0, \forall v \in \mathbb{R}^n \times \{\underline{O}\}$
- (iv)  $H$  si dice semi-definita negativa se  $\langle Hv, v \rangle \leq 0, \forall v \in \mathbb{R}^n \times \{\underline{O}\}$

Un criterio semplice per verificare il segno di una matrice  $H$   $n \times n$ :

**Teorema 1.8.5 (criterio per il segno di una matrice)** Sia

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{n1} & \dots & h_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{una matrice } n \times n$$

Definiamo

$$D_i = \det \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{i1} & \dots & h_{ii} \end{bmatrix} \quad \text{con } 1 \leq i \leq n$$

Allora

- (a)  $H$  è definita positiva  $\iff D_i > 0 \forall i = 1, \dots, n$
- (b)  $H$  è definita negativa  $\iff \begin{cases} D_i > 0 \text{ per } i \text{ valori pari di } i \\ D_i < 0 \text{ per } i \text{ valori dispari di } i \end{cases}$
- (c) Se  $\det H = D_n \neq 0$  e nessuna delle condizioni precedenti fosse soddisfatta, allora  $H$  non è semi-definita positiva nè semi-definita negativa

**Corollario 1.8.1** Se  $H$  ( $2 \times 2$ ) matrice simmetrica  $H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$  con  $h_{12} = h_{21}$

- (a)  $H$  è definita positiva  $\iff h_{11} > 0$  e  $\det H > 0$
- (b)  $H$  è definita negativa  $\iff h_{11} < 0$  e  $\det H > 0$
- (c) Se  $\det H < 0$ , allora  $H$  non è semi-def. pos. nè semi-def. neg.

**Teorema 1.8.6 (BDPG, 11.25)** Sia  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^2(A)$  e sia  $p_0 \in A$  un punto stazionario di  $f$

- (i) Se  $D^2 f(p_0)$  fosse def. pos.  $\Rightarrow p_0$  è un punto di minimo relativo di  $f$  su  $A$

- (ii) Se  $D^2f(p_0)$  fosse def. neg.  $\Rightarrow p_0$  è un punto di massimo relativo di  $f$  su  $A$
- (iii) Se  $D^2f(p_0)$  non fosse semi-def. pos. nè semi-def. neg.  $\Rightarrow p_0$  è un punto di sella di  $f$  su  $A$
- (iv) Se  $D^2f(p_0)$  fosse semi-def. pos. o semi-def. neg.  $\Rightarrow p_0$  può essere un punto di massimo o minimo relativo o un punto di sella di  $f$  su  $A$

### 1.8.5 Esempi

**Esempio 11 (1a, foglio 5)** Data  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^2 + 2kxy + y^2$ .  
Determinare al variare di  $k \in \mathbb{R}$ , i punti di max e min relativo di  $f$ .

*Soluzione 1. Punti stazionari di  $f$  su  $\mathbb{R}^2$*

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 2ky = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2kx + 2y = 0 \end{cases}$$

- **Esercizio 14** Se  $k \neq 1 \Rightarrow (0, 0)$  è l'unico punto stazionario
- Se  $k = 1 \Rightarrow I$  punti della retta  $x + y = 0$  sono tutti e soli i punti stazionari
- Se  $k = -1 \Rightarrow I$  punti della retta  $x - y = 0$  sono tutti e soli i punti stazionari

*Soluzione 2. Studio del segno della matrice Hessiana*

$$D^2f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} (x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 2k \\ 2k & 2 \end{bmatrix}$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ e } \det D^2f(x, y) = 4 - 4k^2 = 4(1 - k^2)$$

- **Esercizio 15** Se  $k^2 < 1 \Rightarrow D^2f(0, 0)$  è def. positiva  $\Rightarrow (0, 0)$  è un punto di minimo relativo
- Se  $k = 1$ ,  $\det D^2f(x_0, -x_0) = 0 \Rightarrow D^2f(x_0, -x_0)$  non è def-neg. nè def-pos.  $\Rightarrow$  nulla si può dire
  - \* Se  $k = 1$ ,  $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 \Rightarrow (x_0, -x_0)$  è un punto di minimo assoluto
  - \* Se  $k = -1$ ,  $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \Rightarrow (x_0, -x_0)$  è un punto di minimo assoluto

### Appendice:

1. Se  $f$  è differenziabile in  $p_0$  e  $\nabla f(p_0) = (0, 0) \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial v}(p_0) = 0 \forall v \in \mathbb{R}^2$ ,  $\|v\| = 1$ .  
Infatti poichè  $\frac{\partial f}{\partial v}(p_0) = \nabla f(p_0) \cdot \underline{Q}_{\mathbb{R}^2} \cdot v = 0$

2.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x|$ ,  $x_0 = 0$ , il punto di  $x_0 = 0$  è un punto di minimo assoluto per  $f$ .
3. Se  $k = 1$  i punti della retta di eq:  $x + y = 0$  sono tutti e soli i punti stazionari di  $f$ .
4.  $k = 1$ ,  $f(x, y) = (x + y)^2 \geq 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x_0, -x_0) = 0$

## 1.9 Lez - 09

**Problema:** Condizioni che assicurino l'esistenza di  $\min_A f$  e  $\max_A f$  e come determinarli

**Teorema 1.9.1 (Weirestrass)** [BDPG,10.10] Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , Supponiamo che:

(i)  $A$  sia limitato e chiuso, (in  $n = 1$ ,  $A = [a, b]$ ,  $\partial A = \{a, b\}$ ,  $\mathring{A} = (a, b)$ )

(ii)  $f$  sia continua su  $A$

Allora esiste  $\min_A f$  e  $\max_A f$

### 1.9.1 Ricerca del max e min (assoluto) su insieme limitato e chiuso

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  limitato e chiuso e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Allora per il Teorema di Weirestrass  $\exists \min_A f = f(p_1)$  e  $\exists \max_A f = f(p_2)$ .

Vi sono le seguenti possibilità se  $i = 1, 2$

(i)  $p_i \in \mathring{A}$  e  $\exists \nabla f(p_i) = (0, 0)$

(ii)  $p_i \in \mathring{A}$  ma  $\nexists \nabla f(p_i)$ , diremo in questo caso che  $p_i$  è punto singolare

(iii)  $\partial_i \in \partial A$

**Problema:**[BDPG,13.2] Ricerca dei punti di max e min nei punti della frontiera di  $A$ , detti anche estremi vincolati

- $\max, \min \in \mathring{A} \Rightarrow$  estremi liberi
- $\max, \min \in \partial A \Rightarrow$  estremi vincolati

**Esempio 12**  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ,  $f(x, y) = x^2 + 2y^2$

- $\mathring{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$
- $\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
- $\nabla f(x, y) = (2x, 4y) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$f(p_2) = \exists \max_A f$  e  $f(p_1) = \exists \min_A f$ ,  $\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff x = y = 0$

$f(0, 0) = 0$  e  $p_1 = (0, 0)$  è un punto di minimo assoluto di  $f$ .

È chiaro che  $p_2 \in \partial A$  e dunque vale che  $\max_A f = \max_{\partial A} f$   
quindi ci poniamo il problema di come determinare  $\max_{\partial A} f$

**Osservazione 1.9.2**  $\nabla f(x, y) = (2x, 4y) \neq (0, 0) \quad \forall (x, y) \in \partial A$

### 1.9.2 Frontiera attraverso parametrizzazione

**Caso  $n = 2$**

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  limitato e chiuso.

Si chiama parametrizzazione di  $\partial A$  una funzione  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  (detta curva)

- (P1)  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$
- (P2) con  $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$
- (P3) e  $\gamma([a, b]) = \partial A$

Supponiamo che  $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$  e vogliamo minimizzare/massimizzare  $f$  su  $\partial A$

Definiamo  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(t) = f(\gamma(t))$ .

Si può provare tramite RDC che  $F \in C^1([a, b])$ . Inoltre è immediato verificare

$\min_{\partial A} f = \min_{[a, b]} F$  e  $\max_{\partial A} f = \max_{[a, b]} F$

Pertanto la ricerca di  $\min_{\partial A} f$  e  $\max_{\partial A} f$  si riduce a  $\min_{[a, b]} F$  e  $\max_{[a, b]} F$

Ritorniamo all'esempio 12:

Una parametrizzazione di  $\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  è data da

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi] \quad \gamma([0, 2\pi]) = \partial A$$

$F(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + 2\sin^2 t = 1 + \sin^2(t)$ , allora è facile verificare che

$$\max_{[0, 2\pi]} F = 2 = F\left(\frac{\pi}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}\pi\right)$$

Pertanto i punti di  $\partial A$  dove è raggiunto il massimo sono dati da:

$$\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1) \text{ e } \gamma\left(\frac{3}{2}\pi\right) = (0, -1)$$

Infatti  $f(0, 1) = f(0, -1) = 2$

**Caso  $n = 3$**

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  chiuso e limitato. Si chiama parametrizzazione di  $\partial A$  una funzione

$\gamma : B \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$\gamma(s, t) = (\gamma_1(s, t), \gamma_2(s, t), \gamma_3(s, t))$$

Con  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : B \rightarrow \mathbb{R}$  t.c.

(P1)  $B$  chiuso e limitato

(P2)  $\gamma(B) = \partial A$

(P3)  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in C^1(\overset{\circ}{B}) \cap C^0(B)$

$\partial A$  è detta superficie.

Sia  $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$  si vuole determinare  $\max_{\partial A} f$  e  $\min_{\partial A} f$ .  
Definiamo  $F : B \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(s, t) := f(\gamma(s, t))$  con  $(s, t) \in B$ , allora

$$\min_{\partial A} f = \min_B F \text{ e } \max_{\partial A} f = \max_B F$$

**Osservazione 1.9.3** *Pertanto il  $\min_{\partial A} f$  e il  $\max_{\partial A} f$  (di una funzione di 3 variabili sul bordo di  $A$ ) viene riportato al  $\min_B F$  e  $\max_B F$  (di una funzione di 2 variabili) su un insieme  $B \subseteq \mathbb{R}^2$*

**Esempio 13** *Sia  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ ,  $f(x, y, z) = x + y - z$ . Determinare  $\min_A f$  e  $\max_A f$ .*

**Soluzione:**

1. **Punti stazionari di  $\mathring{A}$**   
Osserviamo che  $f \in C^\infty(\mathring{A})$ .

**Esercizio 16** *Non ci sono punti stazionari in  $\mathring{A}$*

*Dal'altra parte  $f \in C^0(A)$  ed  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  è chiuso e limitato. Pertanto per il teorema di Weirestrass*

$$\exists \min_A f = \min_{\partial A} f \text{ e } \max_A f = \max_{\partial A} f$$

2. **Max e min su  $\partial A$**   
 $\partial A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ,  $B = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \subseteq \mathbb{R}^2 \ni (\vartheta, \varphi)$

$$\gamma(\vartheta, \varphi) = (\cos \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \varphi)$$

$\gamma$  è una parametrizzazione di  $\partial A$  (cambiamento di coordinate sferiche)  
 $F(\vartheta, \varphi) := f(\gamma(\vartheta, \varphi)) = \cos \vartheta \sin \varphi + \sin \vartheta \sin \varphi - \cos \varphi = \sin \varphi \cdot (\cos \vartheta + \sin \vartheta) - \cos \varphi$

*Per proseguire nella nostra strategia dovremmo determinare  $\min_B F$  e  $\max_B F$  con  $F : B = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ .*

*Ci rendiamo conto subito che questa ricerca non è semplice.*

**Osservazione 1.9.4** *In effetti il metodo di ricerca dei max e min di una funzione su un bordo dato come parametrizzazione, diventa complesso, e dunque inefficace per funzioni di variabili  $n \geq 3$*



### 1.9.3 Metodo dei moltiplicatori di Lagrange, TML

**Caso  $n = 2$**

Supponiamo che l'insieme  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) \leq 0\}$  dove  $\partial A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ .

Un insieme del piano  $V := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$  è detto vincolo (è una curva del piano)

**Teorema 1.9.5 (Teorema dei moltiplicatori di Lagrange, TML)** Sia  $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$  e  $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$  dove  $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ . Supponiamo che:

(i)  $\exists \min_V f = f(p_0)$  (o  $\exists \max_V f = f(p_0)$ ) con  $p_0 = (x_0, y_0) \in V$

(ii)  $\exists \nabla g(p_0) \neq (0, 0)$

Allora esiste  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  (detto moltiplicatore) t.c.  $(x_0, y_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^3$  è un punto stazionario della funzione.

Equivalentemente:

$$\exists \lambda_0 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \begin{cases} g(p_0) = 0 \\ \nabla f(p_0) + \lambda_0 \nabla g(p_0) = (0, 0) \end{cases} \quad (*)$$

**Definizione 1.9.1** Un punto  $p_0 \in V$  verificante 1.9.5 (\*) su opportuno  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  si dice **punto stazionario vincolato alla funzione  $f$  relativamente al vincolo  $V$**

**Esempio 14** Trovare  $\max_{\partial A} f$  se  $f(x, y) = x^2 + 2y^2$  e  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

Sia  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ . Allora:

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ ,  $\nabla g(x, y) = (2x, 2y) \neq (0, 0) \forall (x, y) \in \partial A$ .

Pertanto possiamo applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

Sia  $L(x, y, \lambda) := x^2 + 2y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ ,

$$\nabla L(x, y, \lambda) = (0, 0, 0) \iff \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 4y + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff (x, y, \lambda) = (\pm 1, 0, -1), (0, \pm 1, -2),$$

$$\min_{\partial A} f = f(\pm 1, 0) = 1 \text{ e } \max_{\partial A} f = f(0, \pm 1) = 2$$

### Teorema della funzione implicita, U. Dini

Prima della dimostrazione del metodo dei moltiplicatori di Lagrange, premettiamo il seguente teorema:

**Teorema 1.9.6 (della funzione implicita, U. Dini)** [BDPG, 13.3] Supponiamo che, per esempio,  $g(p_0) = 0$  e  $\frac{\partial g}{\partial y}(p_0) \neq 0$ .

Allora  $\mathcal{V}$  è localmente grafico di una funzione  $y = \varphi(x)$ , cioè  $\exists \delta_0 > 0$  ed è un'unica funzione  $\varphi : (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\exists r_0 > 0$  t.c.

( $D_1$ )  $\mathcal{V} \cap B(p_0, r_0) = \{(x, \varphi(x)) : x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)\}$  e  $\varphi(x_0) = y_0$

( $D_2$ )  $\varphi$  è derivabile e

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

$$\forall x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$$

**Dim. 14 (TML, 1.9.5)** Supponiamo per esempio che  $\frac{\partial g}{\partial y}(p_0) \neq 0$ .

Possiamo applicare il teorema della funzione implicita 1.9.6: per  $D_1$ , possiamo definire  $h(x) := f(x, \varphi(x))$   $x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$

Essendo  $p_0 \in \mathcal{V}$  un punto di minimo (da ipotesi) di  $f$  su  $\mathcal{V} \Rightarrow (1)x_0$  è un punto di minimo di  $h$  si  $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ .

D'altra parte, per RDC,  $h \in C^1((x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0))$ .

Per il teorema di Fermat, per funzioni di 1 variabile,

$$\begin{aligned} 0 = h'(x_0) &=_{(RDC)} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \varphi(x_0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0) = \\ &=_{(D_2)} \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \cdot \left( -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x))} \right) \iff \\ \iff \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(p_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(p_0) \end{bmatrix} &= 0 \iff \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \nabla f(p_0) = -\lambda_0 \nabla g(p_0) \end{aligned}$$

**Caso  $n = 3$**

Il teorema dei moltiplicatori di Lagrange su può estendere a funzioni di  $n = 3$  variabili

**Teorema 1.9.7 (TML con  $n = 3$ )** Sia  $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$  e  $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$  dove  $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$ . Supponiamo che:

(i)  $\exists \min_{\mathcal{V}} f = f(p_0)$  (o  $\exists \max_{\mathcal{V}} f = f(p_0)$ ) con  $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{V}$

(ii)  $\exists \nabla g(p_0) \neq (0, 0, 0)$

Allora

$$\exists \lambda_0 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \begin{cases} g(p_0) = 0 \\ \nabla f(p_0) + \lambda_0 \nabla g(p_0) = (0, 0, 0) \end{cases} \quad (*)$$

**Osservazione 1.9.8** Il vincolo  $\mathcal{V}$  in questo caso è una superficie di  $\mathbb{R}^3$

**Esempio 15** Trovare  $\max_{\partial A} f$ ,  $f(x, y, z) = x + y - z$  e  $\partial A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  **Soluzione:**

Applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per funzioni di  $n = 3$  variabili

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) = x + y - z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

se  $(x, y, z, \lambda) \in \mathbb{R}^4$ , in quanto  $\partial A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2x\lambda & = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 1 + 2y\lambda & = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = -1 + 2z\lambda & = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 & = 0 \end{cases} \iff (x, y, z, \lambda) = \left( \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \mp \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \max_{\partial A} f = \max \left\{ f \left( \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \mp \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\} = \sqrt{3} \text{ e}$$

$$\min_{\partial A} f = \min \left\{ f \left( \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \mp \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\} = -\sqrt{3}$$

## Chapter 2

# Integrale per funzioni a più variabili, [BDPG, 14]

Vogliamo introdurre la nozione di integrale per una funzione  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $n = 2, 3$ ), detto anche integrale multiplo

### 2.1 Lez - 10, Integrale doppio su un rettangolo

**Caso  $n = 2$**

$A = Q = [a, b] \times [c, d]$  e sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  limitata, cioè  $\exists M > 0$  t.c.  $|f(p)| \leq M \forall p \in A$

**Idea:(Interpretazione geometrica dell'integrale)**

Supponiamo  $f(p) \geq 0 \forall p \in A$ , definiamo

$$\mathbb{T}_f(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq f(x, y), (x, y) \in A\}$$

(trapezoidale indotta da  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ).

$\mathbb{T}_f(A) \equiv$  solido di  $\mathbb{R}^3$  sotteso dal grafico di  $f$ ,  $G_f$ .

Vogliamo definire un numero reale non negativo:

$$L = \iint_A f(x, y) dx dy \text{ (integrale doppio di } f \text{ su } A)$$

t.c.  $L = \text{volume}(\mathbb{T}_f(A))$

**Definizione 2.1.1** (i) Si chiama suddivisione dell'intervallo  $[a, b]$  un insieme finito (detto retta reale)  $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$  t.c.  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

(ii) Si chiama *suddivisione dell'insieme*  $Q = [a, b] \times [c, d]$  l'insieme (del piano)  
 $\mathcal{D} := \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 = \{(x_i, y_j) : i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m\}$ , dove:

$$\mathcal{D}_1 = \{x_0, \dots, x_n\} \text{ suddivisione di } [a, b]$$

$$\mathcal{D}_2 = \{y_0, \dots, y_m\} \text{ suddivisione di } [c, d]$$

Dato  $\mathcal{D}$  una suddivisione di  $Q$ ,  $Q$  resta suddiviso in  $n \times m$  rettangoli

$$Q_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

con  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, m$

$$\text{Definiamo } \text{area}(Q_{ij}) := (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

**Definizione 2.1.2** Si chiama *somme superiore* (risp. *somme inferiore*) di  $f$  rispetto alla suddivisione  $\mathcal{D}$  di  $Q$ , fissata una funzione  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ , il numero reale

$$S(f, \mathcal{D}) := \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n M_{ij} \text{area}(Q_{ij}) \quad M_{ij} := \sup_{Q_{ij}} f$$

rispettivamente il numero reale

$$s(f, \mathcal{D}) := \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n m_{ij} \text{area}(Q_{ij}) \quad m_{ij} := \inf_{Q_{ij}} f$$

**Osservazione 2.1.1** Essendo  $f$  limitata,  $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$

$$M_{ij} := \sup_{Q_{ij}} f := \sup\{f(p) : p \in Q_{ij}\}$$

$$m_{ij} := \inf_{Q_{ij}} f := \inf\{f(p) : p \in Q_{ij}\}$$

### 2.1.1 Proprietà importanti delle somme sup. ed inf.

(PS1) Se  $f \geq 0$  su  $Q$ , allora  $M_{ij} \text{area}(Q_{ij})$  e  $m_{ij} \text{area}(Q_{ij})$  rappresentano il volume di un parallelepipedo di base  $Q_{ij}$  ed altezza  $M_{ij}$  o  $m_{ij}$

(PS2) Per ogni suddivisione  $\mathcal{D}$  di  $Q$

$$\text{area}(Q) \cdot \inf_Q f \leq s(f, \mathcal{D}) \leq S(f, \mathcal{D}) \leq \text{area}(Q) \cdot \sup_Q f$$

(PS3) Si potrebbe provare (ma lo omettiamo) che, prese  $\mathcal{D}'$  e  $\mathcal{D}''$  due suddivisioni di  $Q$ , allora  $s(f, \mathcal{D}') \leq S(f, \mathcal{D}'')$

**Definizione 2.1.3** Siano  $Q = [a, b] \times [c, d]$  e  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  limitata. La funzione si dice *integrabile* (secondo Reimann) su  $Q$ , e scriveremo  $f \in \mathcal{R}(Q)$ , se

$$L = \sup\{s(f, \mathcal{D}) : \mathcal{D} \text{ sudd. di } Q\} = \inf\{S(f, \mathcal{D}) : \mathcal{D} \text{ sudd. di } Q\}$$

Il numero reale  $L$  si chiama integrale(doppio) e si denota

$$L = \iint_Q f(x, y) dx dy = \iint_Q f = \int_Q f$$

Nel caso in cui  $f \geq 0$  ed  $f \in \mathcal{R}(Q)$ , definiamo il volume del solido  $\mathbb{T}_f(Q)$

$$\text{vol}(\mathbb{T}_f(Q)) := \iint_Q f$$

### 2.1.2 Teoremi: Esistenza & Proprietà integrale

**Problema:** Condizioni che assicurano  $f \in \mathcal{R}(Q)$ ?

Richiami per funzioni di  $n = 1$  variabili  $Q = [a, b]$

**Teorema 2.1.2**  $f \in C^0([a, b])$ , allora  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ ,  
 $f \geq 0, f \in C^0([a, b])$ ,  $\text{area}(\mathbb{T}_f([a, b])) := \int_a^b f(x) dx$

**Teorema 2.1.3** Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è non decrescente (cioè  $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ ), allora  $f \in \mathcal{R}([a, b])$

**Teorema 2.1.4 (Esistenza dell'integrale)** [BDPG, 14.4] Sia  $f \in C^0(Q)$  allora  $f \in \mathcal{R}(Q)$

**Teorema 2.1.5 (Proprietà dell'integrale)** [BDPG, 14.5] Siano  $f, g \in \mathcal{R}(Q)$  con  $Q = [a, b] \times [c, d]$

(i) **Linearità** :  $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(Q)$ ,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e

$$\iint_Q (\alpha f + \beta g) = \alpha \iint_Q f + \beta \iint_Q g$$

(ii) **Monotonia**: Se  $g \leq f$  su  $Q$ , allora

$$\iint_Q g \leq \iint_Q f$$

(iii) **Valore assoluto**:  $|f| \in \mathcal{R}(Q)$  e

$$\left| \iint_Q f \right| \leq \iint_Q |f|$$

(iv) **Teorema della media interale**

$$\inf_Q f \leq \frac{1}{\text{area}(Q)} \iint_Q f \leq \sup_Q f$$

e il valore  $\frac{1}{\text{area}(Q)} \iint_Q f \equiv \text{media integrale di } f \text{ su } Q$ .  
 Se  $f \in C^0(Q)$ , allora esiste  $p_0 = (x_0, y_0) \in Q$  t.c.

$$f(p_0) = \frac{1}{\text{area}(Q)} \iint_Q f$$

### 2.1.3 Formula di riduzione sui rettangoli

**Problema:** Sia  $f \in \mathcal{R}(Q)$ , come calcolare  $\iint_Q f$ ?

**Teorema 2.1.6 (Formula di riduzione sui rettangoli)** [BDPG, 14.6] Siano  $Q = [a, b] \times [c, d]$  e  $f \in \mathcal{R}(Q)$

- (i) Supponiamo che,  $\forall y \in [c, d]$ , la funzione  $[a, b] \ni x \rightarrow f(x, y)$  sia integrabile (come funzione di una variabile), allora la funzione  $[c, d] \ni y \rightarrow \int_a^b f(x, y) dx$  è integrabile su  $[c, d]$  e

$$(1) \iint_Q f = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

- (ii) Supponiamo che,  $\forall x \in [a, b]$ , la funzione  $[c, d] \ni y \rightarrow f(x, y)$  sia integrabile (come funzione di una variabile), allora

$$(2) \iint_Q f = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

In particolare se  $f \in C^0(Q)$ , valgono (i) e (ii) e

$$(3) \iint_Q f = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

**Osservazione 2.1.7 (Principio di Cavalieri)** La formula (2) può essere interpretata geometricamente nel modo seguente:

sia  $f \geq 0$ , definiamo la regione piana  $\mathbb{T}_f^x(Q) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq f(x, y)\}$  per  $x \in [a, b]$  fissato. Allora

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy = \text{area}(\mathbb{T}_f^x(Q))$$

Pertanto la (2) si può interpretare come

$$\begin{aligned} \text{volume}(\mathbb{T}_f(Q)) &:= \iint_Q f =_{(2)} \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \\ &= \int_a^b \text{area}(\mathbb{T}_f^x(Q)) dx \text{ somma di volumi infinitesimi} \end{aligned}$$

### 2.1.4 Esempio

**Esempio 16** Calcolare  $\iint_Q f$  dove  $Q = [0, 1] \times [0, \pi]$ ,  $f(x, y) := x \cdot \sin(xy)$

**Soluzione:**

È facile verificare che  $f \in C^0(Q)$ , quindi possiamo utilizzare la formula (3), però osserviamo che, ai fini del calcolo, utilizzare (1) o (2) può essere differente.

$$\iint_Q f = \int_0^1 \left( \int_0^\pi x \cdot \sin(xy) dy \right) dx$$

Fissiamo  $0 \leq x \leq 1$

$$\int_0^\pi x \cdot \sin(xy) dy = x \int_0^\pi \sin(xy) dy = x \left( -\frac{\cos(xy)}{x} \right) \Big|_0^\pi = -\cos(\pi x) + 1$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left( \int_0^\pi x \cdot \sin(xy) dy \right) dx &= \int_0^1 (-\cos(\pi x) + 1) dx = \\ &= -\frac{\sin(\pi x)}{\pi} + x \Big|_0^1 = -\frac{\sin \pi}{\pi} + 1 + \frac{\sin 0}{\pi} - 0 = 1 \end{aligned}$$

**Esercizio 17** Verificare che l'integrale iterato

$$1 = \iint_Q f = \int_0^\pi \left( \int_0^1 x \cdot \sin(xy) dx \right) dy = \int_0^\pi \frac{\sin(y) - y \cos(y)}{y^2} dy$$

L'ultimo integrale, esiste, ma la funzione integranda non ammette come primitiva rappresentabile come funzioni elementari, come, per esempio  $\int \frac{\sin x}{x} dx$ ,  $\int e^{-x^2} dx$ ,  $[0, 1] \ni x \rightarrow \frac{\sin(x)}{x}$  è continua, dunque  $\exists \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx \in \mathbb{R}$



## 2.2 Lez 11 - Integrale doppio su insiemi generali

Vogliamo definire la nozione di integrale per una funzione  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  limitata, dove  $A$  è un dominio più generale di un rettangolo.

**Definizione 2.2.1** Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  limitata e  $A$  limitato e sia  $Q = [a, b] \times [c, d] \supset A$ . Definiamo

$$\tilde{f} : Q \rightarrow \mathbb{R}, \tilde{f}(x, y) := \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in A \\ 0 & \text{se } (x, y) \in Q \setminus A \end{cases}$$

Si dice che  $f$  è integrabile su  $A$ , e scriveremo  $f \in \mathcal{R}(A)$ , se  $\tilde{f} \in \mathcal{R}(Q)$ . In questo caso:

$$\iint_A f = \iint_Q \tilde{f} \text{ (integrale doppio di } f \text{ su } A)$$

**Osservazione 2.2.1** (i) Si può verificare (ma omettiamo) che l'integrabilità di  $f$  su  $A$  non dipende dalla scelta del rettangolo  $Q$ , come pure il valore  $\iint_Q \tilde{f}$

(ii) La funzione  $\tilde{f}$ , tipicamente, non sarà continua nei punti di frontiera  $\partial A$

**Esempio 17**  $A =$  cerchio del piano,  $f = 1$  su  $A$ .

$$G_{\tilde{f}} := \{(x, y, 1) : (x, y) \in A\} \cup \{(x, y, 0) : (x, y) \in Q \setminus A\}$$

Se  $Q$  è un rettangolo contenente  $A$ , allora  $\tilde{f} : Q \rightarrow \mathbb{R}$ , come definita in 2.2.1, è discontinua in tutti i punti di  $\partial A$ .

In accordo con la nostra definizione precedente e tenendo conto della nostra idea geometrica di integrale doppio

$$\iint_Q \tilde{f} := \text{volume}(\mathcal{T}_{\tilde{f}}(Q))$$

dove  $\mathcal{T}_{\tilde{f}}(Q) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \tilde{f}(x, y)\} = \{(x, y, 0) : (x, y) \in Q \setminus A\} \cup \{(x, y, z) : (x, y) \in A, 0 \leq z \leq 1\} = P \cup \mathcal{T}_f(A)$ , essendo  $P$  una parte limitata di un piano,  $\text{volume}(P) = 0$ , mentre  $\text{volume}(\mathcal{T}_f(A)) = \text{volume}(A \times [0, 1]) = \text{area}(A)$ .

Quindi questo ragionamento ci porta a concludere:

$$\iint_A f := \iint_Q \tilde{f} = \text{volume}(\mathcal{T}_{\tilde{f}}(Q)) = \text{area}(A)$$

Pertanto, da questo ragionamento, risulta evidente che, se per l'insieme  $A$  non fosse definita una nozione di area non sapremmo come calcolare  $\iint_A f$

### 2.2.1 Insiemi numerabili e loro area

**Definizione 2.2.2** Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definita come  $f(x) := 1$  se  $x \in A$ , con  $A$  limitato. L'insieme  $A$  si dice misurabile (secondo Peano-Jordan) se  $f \in \mathcal{R}(A)$ . In questo caso il valore dell'integrale si chiama misura (o area) di  $A$  e si denota

$$|A|_2 := \iint_A 1 \, dx \, dy$$

**Osservazione 2.2.2** Se  $A = Q = [a, b] \times [c, d]$ , allora è facile verificare che  $Q$  è misurabile e

$$|Q|_2 = \text{area}(Q) = (b - a)(d - c)$$

**Teorema: Caratterizzazione degli insiemi misurabili**

**Teorema 2.2.3 (Caratterizzazione degli insiemi misurabili)** [BDPG, 14.9]  
Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  limitato. Allora

$$A \text{ è misurabile} \iff \partial A \text{ è misurabile e } |\partial A|_2 = 0$$

**Teorema 2.2.4 (BDPG, 14.11)** Sia  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile (come funzione di  $n=1$  variabile). Allora  $G_g := \{(x, g(x)) : x \in [a, b]\}$  è misurabile e  $|G_g|_2 = 0$

Tramite i teoremi 2.2.3, 2.2.4 si può provare il seguente corollario.

**Corollario 2.2.1** Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  limitato. Supponiamo che

$$\partial A = \bigcup_{i=1}^k G_{g_i}$$

dove  $g_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}$  continue  $\forall i = 1, \dots, k$   
Allora  $A$  è misurabile.

**Esempio 18 (Misurabilità insiemi semplici del piano)** Siano  $g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue e supponiamo che  $g_1(x) \leq g_2(x) \forall x \in [a, b]$ . Sia

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

insieme semplice rispetto all'asse  $y$ .

**Esercizio 18**  $A$  è limitato e chiuso.

$$\partial A = G_{g_1} \cup \{(b, y) : g_1(b) \leq y \leq g_2(b)\} \cup G_{g_2} \cup \{(a, y) : g_1(a) \leq y \leq g_2(a)\}$$

Pertanto  $|\partial A|_2 = 0$  e, per il corollario 2.2.1,  $A$  è misurabile.

### 2.2.2 Integrali doppi su insiemi misurabili

**Teorema: Esistenza integrale doppio su insiemi misurabili**

**Teorema 2.2.5 (Esistenza integrale doppio su insiemi misurabili)** [BDPG, 14.13] Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Supponiamo che:

- $A$  sia limitato e misurabile
- $f$  sia limitato e  $f \in C^0(A)$

Allora  $f \in \mathcal{R}(A)$

**Osservazione 2.2.6** • Dal 2.2.5, segue che, se  $A$  è limitato, chiuso e misurabile e  $f \in C^0(A)$ , allora  $f \in \mathcal{R}(A)$

- Continuano a valere le proprietà di linearità, monotonia e il teorema della media integrale, che abbiamo visto per l'integrale doppio di una funzione definita su un rettangolo

Infine vale il seguente risultato, molto utili nel calcolo di integrali.

### 2.2.3 Teo.: Integrale doppio su insieme di misura nulla

**Teorema 2.2.7 (Integrale doppio su insieme di misura nulla)** [BDPG, 14.15]

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  un insieme limitato e misurabile, sia  $f \in \mathcal{R}(A)$ . Supponiamo che  $A = B \cup C$ , con  $B$  e  $C$  misurabili e  $|C|_2 = 0$ . Allora:

$$\iint_A f = \iint_B f$$

**Osservazione 2.2.8** Una immediata conseguenza di 2.2.3 e 2.2.7 è la seguente: sia  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  limitato e misurabile e sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{R}(A)$ , allora

$$\iint_A f = \iint_{\dot{A}} f$$

## 2.3 Integrali doppi su domini semplici e formule di riduzione

**Definizione 2.3.1** Un sottoinsieme  $A \subset \mathbb{R}^2$  si dice

- Dominio semplice (o normale) rispetto all'asse  $y$  se esistono  $g_1, g_2 \in C^0([a, b])$  t.c.  $g_1 \leq g_2$  su  $[a, b]$  e

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

- Dominio semplice (o normale) rispetto all'asse  $x$  se esistono  $h_1, h_2 \in C^0([c, d])$  t.c.  $h_1 \leq h_2$  su  $[c, d]$  e

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

**Osservazione 2.3.1** Ricordiamo che, per quanto visto prima, un dominio semplice è limitato e misurabile. Inoltre, per il 2.2.5, se  $A$  è semplice ed  $f \in C^0(A)$ , allora  $f \in \mathcal{R}(A)$

Vogliamo ora introdurre una formula per il calcolo di integrali doppi su domini semplici.

### 2.3.1 Teorema: Formula di riduzione su domini semplici

**Teorema 2.3.2 (Formula di riduzione su domini semplici)** [BDPG, 14.17]

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  un dominio semplice rispetto ad uno degli assi. Supponiamo che  $f \in C^0(A)$ , allora  $f \in \mathcal{R}(A)$  e valgono le seguenti formule:

1. Se  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$  con  $g_1, g_2 \in C^0([a, b])$ , allora

$$(1) \iint_A f = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

In particolare  $A$  è misurabile e  $|A|_2 = \iint_A 1 = \int_a^b (g_2(x) - g_1(x)) dx$

2. Se  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$  con  $h_1, h_2 \in C^0([c, d])$ , allora

$$(2) \iint_A f = \int_c^d \left( \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

In particolare  $A$  è misurabile e  $|A|_2 = \iint_A 1 = \int_c^d (h_2(y) - h_1(y)) dy$

**Osservazione 2.3.3** Le proprietà di linearità, monotonia e il teorema della media integrale, continuano a valere per integrali doppi su domini semplici.

**Esempio 19** Calcolare  $\iint_A f(x, y) dx dy$  nei seguenti casi:

1.  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$ ,  $f(x, y) = x$

**Soluzione:**

$A$  è un dominio semplice rispetto all'asse  $y$  ed  $f \in C^0(A)$ , possiamo applicare la 2.3.2 (1), ottenendo che

$$\iint_A f = \int_0^1 \left( \int_0^{x^2} x dy \right) dx$$

Fissato  $x \in [0, 1]$ ,

$$\int_0^{x^2} x dy = x \int_0^{x^2} 1 dy = xy \Big|_0^{x^2} = x^3$$

Pertanto

$$\iint_A x dx dy = \int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

2.  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$ ,  $f(x, y) = \frac{\sin(x)}{x}$

**Soluzione:**

$A$  è un dominio semplice rispetto all'asse  $x$  ed  $f \in C^0(A)$ , possiamo applicare la 2.3.2 (2), ottenendo che

$$\iint_A \frac{\sin(x)}{x} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_y^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x} dx \right) dy$$

Fissiamo  $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\exists \int_y^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x} dx, \text{ ma non si può calcolare}$$

Osserviamo che  $A$  è un dominio semplice anche rispetto all'asse  $y$ , infatti:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq x\}$$

possiamo quindi applicare 2.3.2 (1) ed otteniamo

$$\iint_A \frac{\sin(x)}{x} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^x \frac{\sin x}{x} dy \right) dx$$

Fissiamo  $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$

$$\int_0^x \frac{\sin(x)}{x} dy = \frac{\sin(x)}{x} \int_0^y dy = \frac{\sin(x)}{x} \cdot x = \sin(x)$$

Pertanto

$$\iint_A \frac{\sin(x)}{x} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx = -\cos(x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

## 2.4 Lez - 12

### 2.4.1 Applicazione della formula di riduzione su domini semplici al calcolo di volumi di solidi

**Definizione 2.4.1** Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  limitato e misurabile e  $f \in \mathcal{R}(A)$ , con  $f \geq 0$  su  $A$ . Denotiamo

$$\mathbb{T}_f(A) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in A\}$$

Si chiama volume del solido  $\mathbb{T}_f(A)$  il numero

$$\text{volume}(\mathbb{T}_f(A)) := \iint_A f$$

Tramite la formula (1) e (2) del precedente teorema 2.3.2 si possono calcolare i volumi di diversi solidi.

**Esempio 20** Sappiamo che  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  sia un dominio semplice rispetto a  $y$ , allora dalla (1) si ottiene:

$$(*) \text{ volume}(\mathbb{T}_f(A)) = \iint_A f = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

**Esercizio 19** Calcolare il volume del solido di  $\mathbb{R}^3$ ,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq y^2, (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]\}$$

**Soluzione:**

È facile verificare che  $S = \mathbb{T}_f(A)$  con  $A = [0, 1] \times [0, 1]$  dominio semplice sia rispetto  $y$  che  $x$ , ed  $f(x, y) := y^2$ ,  $f \in C^0(A)$ . Pertanto possiamo applicare (\*) e otteniamo

$$\text{volume}(S) = \text{volume}(\mathbb{T}_f(A)) = \iint_A f = \int_0^1 \left( \int_0^1 y^2 dy \right) dx$$

se rappresentiamo

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

Fissato  $x \in [0, 1]$ ,

$$\int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{3} y^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Pertanto

$$\text{volume}(S) = \int_0^1 \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3}$$

Infine vale la seguente proprietà, molto utili nel calcolo di integrali doppi

## 2.4.2 Teorema: Additività dell'integrale doppio

**Teorema 2.4.1 (Additività dell'integrale doppio)** [BDPG, 14.18]

Siano  $A_1, \dots, A_m \subseteq \mathbb{R}^2$  insiemi semplici t.c.

$$A_i \cap A_j \subseteq \partial A_i \cap \partial A_j$$

se  $i \neq j, i, j = 1, \dots, m$ .

Sia  $f : A_1 \cup \dots \cup A_m \rightarrow \mathbb{R}$  e supponiamo che  $f \in \mathcal{R}(A_i) \forall i = 1, \dots, m$ .

Allora  $f$  è integrabile su  $A_1 \cup \dots \cup A_m$ , cioè  $f \in \mathcal{R}(A_1 \cup \dots \cup A_m)$  e

$$\iint_{A_1 \cup \dots \cup A_m} f = \sum_{i=1}^m \iint_{A_i} f$$

## 2.5 Cambiamento di var. per gli integrali doppi

### 2.5.1 Caso particolare: coordinate polari

**Problema:** Calcolare il volume della semisfera di centro  $(0, 0, 0)$  e raggio  $r > 0$  in  $\mathbb{R}^3$ .

È facile verificare che, se denotiamo  $S$  la semisfera di centro  $(0, 0, 0)$  e raggio  $r > 0$ ,

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, z \geq 0\}$$

$$z^2 \leq r^2 - (x^2 + y^2), 0 \leq z \leq \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}$$

Inoltre, se denotiamo  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$  allora  $S$  può essere anche rappresentato nella forma

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)} \right\} = \mathsf{T}_f(D)$$

dove  $f(x, y) := \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}, (x, y) \in D$ .

Utilizzando la nostra definizione di volume  $\mathsf{T}_f(D)$ , otteniamo che

$$\text{volume}(S) = \text{volume}(\mathsf{T}_f(D)) := \iint_D f(x, y) \, dx \, dy$$

**Esercizio 20** Calcolare  $\iint_D \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)} \, dx \, dy$

**Soluzione:**

- **Primo modo**

Osserviamo che l'insieme  $D$  può essere rappresentato come un dominio semplice rispetto all'asse  $y$ . Infatti

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -r \leq x \leq r, -\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}\}$$

Utilizzando la formula di riduzione per integrali doppi su domini semplici, otteniamo

$$\iint_D \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)} dx dy = \int_{-r}^r \left( \int_{-\sqrt{r^2 - x^2}}^{\sqrt{r^2 - x^2}} \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)} dy \right) dx$$

Notiamo che il calcolo dell'integrare iterato risulta abbastanza complicato.

• **Secondo modo**

Utilizziamo le coordinate polari, cioè consideriamo l'applicazione  $\psi : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\rho, \vartheta \rightarrow (\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta)$

$$\begin{cases} x = x(\rho, \vartheta) = \rho \cos \vartheta \\ y = y(\rho, \vartheta) = \rho \sin \vartheta \end{cases}$$

È facile verificare che  $\psi : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$  è bigettiva e se  $D^* := (0, r) \times (0, 2\pi)$

$$\psi(D^*) = \overset{\circ}{D} \setminus \{(x, 0) : 0 \leq x \leq r\}$$

Poichè

$$area(D) = area\left(\overset{\circ}{D} \setminus \{(x, 0) : 0 \leq x \leq r\}\right)$$

e

$$area(\partial D) = area(\{(x, 0) : 0 \leq x \leq r\}) = 0$$

per la proprietà degli integrali doppi sugli insiemi di misura nulla, segue che

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)} dx dy &= \iint_{\overset{\circ}{D} \setminus \{(x, 0) : 0 \leq x \leq r\}} \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)} dx dy \\ &= \iint_{\overset{\circ}{D} \setminus \{(x, 0) : 0 \leq x \leq r\}} \sqrt{r^2 - \rho^2} d\rho d\vartheta \end{aligned}$$

**Idea:** Vogliamo cambiare le variabili di integrazione nell'integrale doppio da  $(x, y) \rightarrow (\rho, \vartheta)$ .

Il problema è capire come si trasforma l'elemento infinitesimo di area  $dA = dx dy$  in funzione dell'elemento infinitesimo  $dA^* = d\rho d\vartheta$

Più precisamente capire quale sia il coefficiente di trasformazione  $k = k(\rho, \vartheta)$  per cui  $dA = dx dy = k(\rho, \vartheta) d\rho d\vartheta = k(\rho, \vartheta) dA^*$

Utilizziamo un ragionamento intuitivo: il rettangolo  $Q^* = [\rho, \rho + d\rho] \times [\vartheta, \vartheta + d\vartheta]$ , sarà trasportato nella regione piana  $Q = \psi(Q^*)$  delimitata da:

- $L_1$  = il segmento che congiunge i punti  $\psi(\rho, \vartheta)$  e  $\psi(\rho + d\rho, \vartheta)$
- $L_2$  = l'arco di cerchio che congiunge i punti  $\psi(\rho + d\rho, \vartheta)$  e  $\psi(\rho + d\rho, \vartheta + d\vartheta)$
- $L_3$  = il segmento che congiunge i punti  $\psi(\rho + d\rho, \vartheta + d\vartheta)$  e  $\psi(\rho, \vartheta + d\vartheta)$



–  $L_4$  = l'arco di cerchio che congiunge i punti  $\psi(\rho, \vartheta + d\vartheta)$  e  $\psi(\rho, \vartheta)$

Se  $d\rho$  e  $d\vartheta$  sono "molto piccoli",  $dA = dx dy \cong \text{area}(Q) \cong \text{lunghezza}(L_4)d\rho = \rho d\vartheta d\rho = \rho dA^*$  con  $A = [x, x + dx] \times [y, y + dy]$ .

Si può provare rigorosamente che  $dA = \rho dA^*$ .

Ritornando al calcolo dell'integrale doppio

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)} dx dy &= \iint_{\dot{D} \setminus \{(x,0): 0 \leq x \leq r\}} \sqrt{r^2 - \rho^2} dA = \\ &= \iint_{(0,r) \times (0,2\pi)} \sqrt{r^2 - \rho^2} \rho dA^* = \iint_{(0,r) \times (0,2\pi)} \sqrt{r^2 - \rho^2} \rho d\rho d\vartheta = \\ &= \int_0^r \left( \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 - \rho^2} \rho d\vartheta \right) d\rho = 2\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - \rho^2} \rho d\rho \end{aligned}$$

**Esercizio 21**  $\int_0^r \sqrt{r^2 - \rho^2} \rho d\rho = \frac{r^3}{3}$

In conclusione

$$\text{volume}(S) = \iint_D \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)} dx dy = \frac{2}{3} \pi r^3$$

## 2.5.2 Caso generale

Siano  $D, D^* \subseteq \mathbb{R}^2$  aperti limitati e misurabili e sia

$$\psi : D^* \rightarrow D, \psi(u, v) = (\psi_1(u, v), \psi_2(u, v)) = (x(u, v), y(u, v))$$

$$\psi_1, \psi_2 : D^* \rightarrow \mathbb{R}$$

**Definizione 2.5.1** La mappa  $\psi$  si dice un cambiamento di variabili se

- $\psi$  è bigettiva
- $\psi_i \in C^1(D^*)$ ,  $\psi_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial u}, \frac{\partial \psi_i}{\partial v} : D^* \rightarrow \mathbb{R}$  limitate ( $i=1,2$ )
- $\det D\psi(u, v) \neq 0$ ,  $\forall (u, v) \in D^*$ , dove

$$D\psi(u, v) := \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \psi_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \psi_2}{\partial v}(u, v) \end{bmatrix} \quad (\text{Matrice Jacobiana})$$

Denotiamo  $dA^* = du dv$  e  $dA = dx dy$

**Problema:** Legame tra  $dA$  e  $dA^*$ ?

Si può provare che  $dA = |[\det D\psi(u, v)]| dA^*$ .

Più precisamente vale:

### 2.5.3 Teorema: Cambiamento di variabili negli integrali doppi

**Teorema 2.5.1 (Cambiamento di variabili negli integrali doppi)** [BDPG,14.19]  
 Siano  $D, D^* \subseteq \mathbb{R}^2$  aperti limitati e misurabili, sia  $\psi : D^* \rightarrow D$  un cambiamento di variabili e sia  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  continua e limitata.  
 Allora vale la formula

$$(FCV)_2 \quad \iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{D^*} f(\psi(u, v)) |\det D\psi(u, v)| \, du \, dv$$

**Esercizio 22** (i) Calcolare l'area dell'insieme

$$D := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

dove  $a > 0, b > 0$  fissati.

**Soluzione:**

L'insieme  $D$  rappresenta un'elisse con semiassi di lunghezza  $a$  e  $b$ . L'insieme  $D$  è limitato e misurabile. Infatti:

**Esercizio 23**  $D$  è un dominio semplice rispetto all'asse  $y$ . Quindi  $D$  è misurabile.

Per definizione

$$\text{area}(D) = |D|_2 = \iint_D 1 \, dx \, dy$$

Utilizzando il cambiamento di variabili rispetto a coordinate ellittiche, il calcolo dell'integrale doppio diventa abbastanza semplice. Infatti, consideriamo il cambiamento

$$\begin{cases} x(\rho, \vartheta) = \psi_1(\rho, \vartheta) := a\rho \cos \vartheta \\ y(\rho, \vartheta) = \psi_2(\rho, \vartheta) := b\rho \sin \vartheta \end{cases} \quad \rho \geq 0, \vartheta \in [0, 2\pi]$$

e sia  $D^* := (0, 1) \times (0, 2\pi)$ ,  $\psi : D^* \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\psi(\rho, \vartheta) := (\psi_1(\rho, \vartheta), \psi_2(\rho, \vartheta))$

**Esercizio 24** Verificare che la mappa  $\psi : D^* \rightarrow \mathring{D} \setminus \{(x, 0) : 0 \leq x \leq a\}$  è un cambiamento di variabili, in accordo con la definizione 2.5.1 prima introdotta. Inoltre  $\det D\psi(\rho, \vartheta) = ab\rho$ .

Possiamo applicare  $(FCV)_2$  con  $f \equiv 1$  su  $D$ , ed otteniamo

$$\begin{aligned} \text{area}(D) &= \iint_D 1 \, dx \, dy = \iint_{\mathring{D} \setminus \{(x, 0) : 0 \leq x \leq a\}} 1 \, dx \, dy = \\ &= \iint_{D^*} 1 \cdot |\det D\psi(\rho, \vartheta)| \, d\rho \, d\vartheta = 2\pi ab \int_0^1 \rho \, d\rho = \pi ab \end{aligned}$$

(ii) Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D \frac{y^2}{x} dx dy$$

Dove  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2x^2, y^2 \leq x \leq 3y^2\}$

**Soluzione:**

L'insieme  $D$  può essere visto come  $D = D_1 \cap D_2$ , dove

- $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2x^2\}$
- $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq x \leq 3y^2\}$

Incominciamo a studiare la geometria di  $D$ . È chiaro che  $(0, 0) \in D$ . Supponiamo che  $(x, y) \in D \setminus \{(0, 0)\}$  allora per definizione di  $D$ ,  $(x, y) \in (D_1 \setminus \{(0, 0)\}) \cap (D_2 \setminus \{(0, 0)\})$ . È chiaro che, per come sono definiti  $D_1$  e  $D_2$ , necessariamente

1.  $x > 0$  e  $y > 0$
2.  $x^2 \leq y \leq 2x^2$
3.  $y^2 \leq x \leq 3y^2$

Dividendo la disuguaglianza (2) per  $x^2$  e la (3) per  $y^2$ , grazie alla condizione (1), si intuisce che un possibile cambiamento di variabili  $x = \psi_1(u, v)$ ,  $y = \psi_2(u, v)$  potrebbe essere quello per cui

$$\begin{cases} u = \frac{y}{x^2} \\ v = \frac{x}{y^2} \end{cases} \quad \text{con } 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 3$$

**Esercizio 25** Risolvere il sistema precedente rispetto ad  $x$  e  $y$ .

Otteniamo

$$\begin{cases} x = x(u, v) = \psi_1(u, v) = \frac{1}{u^{\frac{2}{3}} v^{\frac{1}{3}}} \\ y = y(u, v) = \psi_2(u, v) = \frac{1}{u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}}} \end{cases}$$

Sia  $D^* := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 < u < 2, 1 < v < 3\}$  è chiaro per costruzione che:

- $\psi : D^* \rightarrow \overset{\circ}{D}$  è bigettiva
- $D^*$  e  $\overset{\circ}{D}$  sono limitati e misurabili (da 2.2.1)
- $\psi_i \in C^1(D^*)$ ,  $i = 1, 2$

– **Esercizio 26**

$$D\psi(u, v) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}u^{-\frac{5}{3}}v^{-\frac{1}{3}} & -\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{-\frac{4}{3}} \\ -\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}v^{-\frac{2}{3}} & -\frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{5}{3}} \end{bmatrix}$$

$\det D\psi(u, v) = \frac{1}{3}u^{-2}v^{-2}$  se  $(u, v) \in D^*$  Possiamo applicare l'osservazione (??) e  $(FCV)_2$ , ottenendo che

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{y^2}{x} dx dy &= \iint_{\tilde{D}} \frac{y^2}{x} dx dy = \\ &= \iint_{D^*} \frac{1}{v} \frac{1}{3} \frac{1}{u^2} \frac{1}{v^2} du dv = \frac{1}{3} \iint_{D^*} \frac{du dv}{u^2 v^3} \end{aligned}$$

L'ultimo integrale doppio risulta essere un integrale doppio su un rettangolo, applicando la formula di riduzione sui rettangoli otteniamo:

$$\begin{aligned} \iint_{D^*} \frac{du dv}{u^2 v^3} &= \int_1^2 u^{-2} du \cdot \int_1^3 v^{-3} dv = \\ &= -\frac{1}{u} \Big|_1^2 \cdot -2v^{-2} \Big|_1^3 = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

Pertanto

$$\iint_D \frac{y^2}{x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{27}$$

## 2.6 Lez - 13, Integrali tripli, [BDPG,14.5]

### 2.6.1 Integrale triplo su un parallelepipedo

Proprietà

### 2.6.2 Integrale triplo su insiemi generali

### 2.6.3 Formule di riduzione per integrali tripli

Applicazione della formula di riduzione per strati: volume di un solido di rotazione

### 2.6.4 Cambiamento di variabili negli integrali tripli

## Chapter 3

# Esercitazioni

### 3.1 Lezione 1 - 09/03/2022

**Esercizio 3.1.1** Determinare e disegnare nel piano  $xy$  il dominio delle seguenti funzioni,  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dove  $A$ : dominio che dobbiamo determinare.

$$f(x, y) = \log(4(x^2 + y^2) - 1)$$

**Soluzione:**

$$4(x^2 + y^2) - 1 > 0 \iff x^2 + y^2 > \frac{1}{4}$$

Studiamo quindi:  $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$  la circonferenza di centro  $c = (0, 0)$  e raggio  $r = \frac{1}{2}$ ,

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > \frac{1}{4}\} = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B((0, 0), \frac{1}{2})}$$

dove:

- $\overline{B((0, 0), \frac{1}{2})} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}\}$
- $B((0, 0), \frac{1}{2}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{1}{2}\}$

**Insiemi aperti e chiusi**

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}$ ,  $A$  è chiuso  $\iff A^c$  è aperto.

Definiamo  $\bar{A} = A$ ,  $xy \geq 0 \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$  Disegnando gli assi:

$A^c = \mathbb{R}^2 \setminus A$  è aperto. Fisso ora  $(x_0, y_0) \in A^c$ ,  $r = d(\partial A, (x_0, y_0)) = \min |x_0|, |y_0|$ .

La palla  $B((x_0, y_0), \frac{r}{2}) \subset A^c \Rightarrow A^c$  è aperto  $\Rightarrow A$  è chiuso.

**Esercizio 3.1.2**  $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^4}$ ,  $y^2 \geq x^4$ .

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \geq x^4\}$$

Proviamo a scrivere  $y^2 - x^4$  come

$$y^2 - x^4 = (y - x^2)(y + x^2) \geq 0$$

Due casi:

- $y \geq x^2$
- $y \geq -x^2$

(Dal grafico otteniamo)

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 \vee y \leq -x^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq -x^2\}$$

**Esercizio 3.1.3** Disegnare l'insieme di livello delle seguenti funzioni

$$C_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = t\}$$

con  $t \in \mathbb{R}$ .

$$f(x, y) = x^2y, \text{ fissiamo } t \in \mathbb{R}, t = x^2y$$

$$1. t = 0, x^2y = 0 \Rightarrow y = 0 \vee x = 0$$

$$2. t > 0, t = x^2y \iff y = \frac{t}{x^2}$$

- $t = 1, y = \frac{1}{x^2}$
- $t = 2, y = \frac{2}{x^2}$

$$3. t < 0, t = x^2y \iff y = \frac{t}{x^2}$$

- $t = -1, y = -\frac{1}{x^2}$
- $t = -2, y = -\frac{2}{x^2}$

**Esercizio 3.1.4**  $f(x, y) = ye^{-x}, t \in \mathbb{R}, t = ye^{-x} \iff e^x t = y$

- $t = 0 \Rightarrow y = 0$
- $t = 1 \Rightarrow y = e^{-x}$
- $t = 2 \Rightarrow y = 2e^{-x}$
- $t = -1 \Rightarrow y = -e^{-x}$
- $t = -2 \Rightarrow y = -2e^{-x}$

**Esercizio 3.1.5**

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} = ?$$

eleviamo  $x$  e  $y$  al numeratore per  $\frac{3}{3}$ , otteniamo:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(\sqrt[3]{x})^3 - (\sqrt[3]{y})^3}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}$$

Ricordiamo ora la differenza tra cubi  $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$ , otteniamo:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + (\sqrt[3]{y})^2)}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} &= \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + (\sqrt[3]{y})^2 = 0 \end{aligned}$$

### Esercizio 3.1.6

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = ?$$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = l \iff$  per ogni restrizione a un sottoinsieme  $B$ ,  
 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f|_B(x, y) = l$

- $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx\}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}|_B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 mx}{x^4 + m^2 x^2} =$   

$$= \frac{x^3 m}{x^2(x^2 + m^2)} = x \left( \frac{m}{x^2 + m^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} x \left( \frac{m}{x^2 + m^2} \right) = 0$$

- $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx^2\}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}|_B =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^4}{x^4 + m^2 x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m}{1 + m^2}$$

Proviamo due valori di  $m$ :

- $m = 1, \frac{1}{2}$
- $m = 2, \frac{2}{5}$

Ho trovato due restrizioni  $\{y = x^2\}$  e  $\{y = 2x^2\}$  dove il limite assume due valori distinti. Allora per l'unicità del limite, il limite non esiste.

### Esercizio 3.1.7

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

#### Coordinate polari

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \vartheta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

- $x = \rho \cos \vartheta$
- $y = \rho \sin \vartheta$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\rho^2 \cos^2 \vartheta \cdot \rho \sin \vartheta}{\rho^2 \cos^2 \vartheta + \rho^2 \sin^2 \vartheta} = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\rho^3 \cos^2 \vartheta \cdot \sin \vartheta}{\rho^2 (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta)} \end{aligned}$$



Sappiamo che  $\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta = 1$ , quindi il limite rimane:

$$\lim \rho \cos^2 \vartheta \cdot \sin \vartheta$$

$$0 \leq |\rho \cos^2 \vartheta \cdot \sin \vartheta| < \rho$$

Da cui se  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  allora anche  $\rho \rightarrow 0$  e siccome  $\begin{cases} \cos^2 \vartheta < 1 \\ \sin \vartheta < 1 \end{cases}$ , grazie al **teorema del confronto** il limite vale 0.

**Esercizio 3.1.8** Dire quali insiemi sono aperti/chiusi e quali limitati, inoltre determinare la frontiera.

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (xy)(y - 1) \geq 0\}$$

- $x \geq 0$
- $y \geq 0$
- $y - 1 \geq 0, y \geq 1$

Frontiera:  $\partial H = \{y = 1\} \cup \{x = 0\} \cup \{y = 0\}$

## 3.2 Esercitazione 2 - 23/03/2022

### Esercizio 3.2.1 (a)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(e^{xy^2} - 1) \log(1 + x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2) \sin(xy)}$$

Ricordiamo che:

- $\frac{\log(1+t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$
- $\frac{e^t - 1}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$
- $\frac{\sin(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$

Grazie a ciò il nostro limite diventa:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy^2} - 1}{xy^2} \cdot \frac{\log(1 + x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \cdot \frac{xy}{\sin(xy)} \cdot y$$

(i) Definiamo  $t = x^2 + y^2 \rightarrow 0$  per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ,

$$\frac{\log(1 + x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \frac{\log(1 + t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$$

(ii) Definiamo  $t = xy \rightarrow 0$  per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ,

$$\frac{xy}{\sin(xy)} = \frac{t}{\sin(t)} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$$

(iii) Definiamo  $t = xy^2 \rightarrow 0$  per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ,

$$\frac{e^{xy^2} - 1}{xy^2} = \frac{e^t - 1}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$$

$$= 1 \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y = 0$$

(c)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(xy)}{\log(1 + x^2 + y^2)}$$

Ricordiamo che:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$$

Allora il limite diventa:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(xy)}{(xy)^2} \cdot \frac{x^2 + y^2}{\log(1 + x^2 + y^2)} \cdot \frac{(xy)^2}{x^2 + y^2}$$

(i)  $t = xy \rightarrow 0$  per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

$$\frac{1 - \cos(xy)}{(xy)^2} = \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2}$$

(ii) Per (i) dell'esercizio (a) si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\log(1 + x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} &= 1 \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} = ? \end{aligned}$$

Passiamo alle coordinate polari:  $\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}$

$$0 \leq \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2 + y^2} = \frac{\rho^4 \cdot \cos^2 \vartheta \cdot \sin^2 \vartheta}{\rho^2 (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta)} \leq \rho^2$$

Per  $\rho \rightarrow 0$  tutto  $0 \rightarrow 0$  e  $\rho^2 \rightarrow 0$ , quindi anche il limite tende a zero per il teorema del confronto.

Consideriamo il caso in cui  $x = 0$  o  $y = 0$

- Vediamo  $x = 0$ ,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(0)}{\log(1 + y^2)} = \left[ \frac{0}{0} \right]_{F.I.N.D.} = \lim_{y \rightarrow 0} 1 - \cos(0) \cdot \frac{y^2}{\log(1 + y^2)} \cdot \frac{1}{y^2} = 0$$

- Vediamo  $y = 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(0)}{\log(1 + x^2)} = \left[ \frac{0}{0} \right]_{F.I.N.D.} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \cos(0) \cdot \frac{x^2}{\log(1 + x^2)} \cdot \frac{1}{x^2} = 0$$

(e)

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,1)} \frac{xy(z-1)}{x^2 + y^2 + (z-1)^2}$$

- **Primo metodo**

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \\ t = z - 1 \xrightarrow{z \rightarrow 1} t \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$0 \leq \left| \frac{\rho \cos \vartheta \cdot \rho \sin \vartheta \cdot t}{\rho^2 (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) + t^2} \right| \leq \left| \frac{\rho^2 \cdot t}{\rho^2 + t^2} \right| \leq 1 \cdot t$$

$$\left( \frac{\rho^2}{\rho^2 + t^2} \leq 1 \iff \rho^2 \leq \rho^2 + t^2 \iff t^2 \geq 0 \Rightarrow \text{sempre} \right)$$

Quindi per  $t \rightarrow 0$ ,  $0 \rightarrow 0$  e  $t \rightarrow 0$ , quindi per il teorema del confronto il limite

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,1)} \frac{xy(z-1)}{x^2 + y^2 + (z-1)^2} = 0$$

- **Secondo metodo:**  $t = z - 1 \xrightarrow{z \rightarrow 1} 0$   
 $\lim_{(x,y,t) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyt}{x^2+y^2+t^2}$

$$0 \leq \left| \frac{xyt}{x^2+y^2+t^2} \right| \leq? \frac{\left( \sqrt{x^2+y^2+t^2} \right)^3}{x^2+y^2+t^2} = \sqrt{x^2+y^2+t^2}$$

In particolare si ha  $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2+t^2} \Rightarrow x^2 \leq x^2+y^2+t^2 \iff y^2+t^2 \geq 0$ , lo stesso vale per  $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2+t^2}$  e  $|t| \leq \sqrt{x^2+y^2+t^2}$ , quindi otteniamo:

$$0 \leq \left| \frac{xyt}{x^2+y^2+t^2} \right| \leq \sqrt{x^2+y^2+t^2}$$

Che tende a 0 per  $(x,y,t) \rightarrow (0,0,0)$ , quindi grazie al teorema del confronto il limite vale 0

**Esercizio 3.2.2** Data  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} g(x,y) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a)

$$g(x,y) = \frac{x \sin(x^2 y)}{x^2 + y^2} \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

La funzione  $f$ , che coincide con  $g \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$ , è **continua**  $\forall (x,y) \neq (0,0)$  perchè è **composizione** e **prodotto** di funzioni continue (Teorema). Dobbiamo quindi vedere il comportamento della funzione in  $(0,0)$ ,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$$

cioè

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin(x^2 y)}{x^2 + y^2} \cdot \frac{x^2 y}{x^2 y}$$

per  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$ .

$$(i) \quad t = x^2 y \rightarrow 0 \text{ per } (x,y) \rightarrow (0,0), \quad \frac{\sin(t)}{t} \rightarrow 1$$

$$= 1 \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} = 1 \cdot 0 = 0$$

Verifichiamolo tramite le coordinate polari.

$$x = \rho \cos \vartheta$$

$$y = \rho \sin \vartheta$$

$$0 \leq \left| \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{\rho^4 \cdot \cos^3 \vartheta \sin \vartheta}{\rho^2 (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta)} \right| \leq \rho^2$$

Quindi per  $\rho \rightarrow 0$  anche il limite vale 0 grazie al teorema del confronto.  
Abbiamo verificato che il limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ , quindi la funzione  $f$  è continua.

Controlliamo ora:

- $y = 0$  e  $x \neq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 0}{x^2} = 0$
- $y \neq 0$  e  $x = 0$ ,  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = 0$

b)

$$g(x,y) = \frac{\sin(2xy)}{e^{x^2+y^2} - 1}$$

Dobbiamo studiarne il comportamento in  $(0,0)$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 2 \cdot \frac{\sin(2xy)}{2xy} \cdot \frac{xy}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{e^{x^2+y^2} - 1}$$

$$(i) \quad t = 2xy, \quad \frac{\sin(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1 \text{ per } (x,y) \rightarrow (0,0)$$

$$(ii) \quad t = x^2 + y^2 \rightarrow 0 \text{ per } (x,y) \rightarrow (0,0), \quad \frac{t}{e^t - 1} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$$

- Proviamo con le coordinate polari:  $\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{\rho^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{\rho^2} \Rightarrow \sin \vartheta \cos \vartheta$$

Quindi non va bene, allora proviamo a prendere una restrizione del dominio.

- $y = mx$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 m}{x^2(m^2 + 1)} \rightarrow \frac{m}{m^2 + 1}$$

Otteniamo due risultati diversi,  $((m = 1, \lim = \frac{1}{2}), (m = 2, \lim = \frac{2}{5}))$ , quindi ho trovato due restrizioni dove il limite è diverso, perciò  $\nexists \lim$ .

**Esercizio 3.2.3** Calcolare il gradiente delle seguenti funzioni:

$$1. \quad f(x,y) = \sin(xy), \quad \nabla f(x,y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \right)$$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(xy) \cdot \frac{\partial(xy)}{\partial x} = \cos(xy) \cdot y$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(xy) \cdot \frac{\partial(xy)}{\partial y} = \cos(xy) \cdot x$

$$\nabla f(x,y) = (y \cos(xy), x \cos(xy)) = \cos(xy) \cdot (y, x).$$

Calcolare la derivata direzionale rispetto al vettore  $v = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) = \langle \nabla f(x,y), v \rangle = \frac{\cos(xy)}{\sqrt{3}} \left\langle (y, x), \left( -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \right\rangle =$$

$$= \frac{\cos(xy)}{\sqrt{3}} \cdot \left( -\frac{y}{2} + \frac{3x}{2} \right) = \frac{\cos(xy)}{2\sqrt{3}}(3x - y)$$

Calcoliamo il piano tangente nei punti  $(0, 0, f(0, 0))$  e  $(1, 2, f(1, 2))$ , ricorriamo la formula del piano:

$$z = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x, y) - (x_0, y_0) \rangle$$

Cerchiamo ora i valori:

- $f(x, y) = \sin(xy)$ ,  $f(0, 0) = 0$
- $\nabla f(x, y) = \cos(xy)(y, x)$ ,  $\nabla f(0, 0) = 1 \cdot (0, 0) = 0$

Quindi  $z = 0 + 0 \Rightarrow$  il piano tangente è  $z = 0$ .

Chi è il normale?

$$n = (0, 0, 1), (x_0, y_0) = (1, 2)$$

- $f(x, y) = \sin(xy)$ ,  $f(1, 2) = \sin(2)$
- $\nabla f(x, y) = \cos(xy)(y, x)$ ,  $\nabla f(1, 2) = \cos(2) \cdot (2, 1)$

$$z = \sin(2) + \langle \cos(2) \cdot (2, 1), (x - 1, y - 2) \rangle = \sin(2) + \cos(2) \cdot (2x + y - 4)$$

### 3.3 Lezione 3 - 06/04/2022

**Esercizio 3.3.1 (Es 2, Provetta)** Siano  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

- $f(t, u, v) = (k(t+v), u^2+v)$   
 $f_1 = k(t+v)$   
 $f_2 = u^2+v$
- $g(x, y) = (\log(1+x^2+y^2), \sin(x-y), x-y)$   
 $g_1 = \log(1+x^2+y^2)$   
 $g_2 = \sin(x-y)$   
 $g_3 = x-y$

(1) Calcolare  $Df(t, u, v) \forall (t, u, v) \in \mathbb{R}^3$  e  $Dg(x, y) \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

(2) Calcolare la matrice Jacobiana di  $h$  in  $(0,0)$ ,  $Dh(0,0)$ , dove  $h = f \circ g$

(1) Iniziamo osservando che le funzioni  $f_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2$ ) sono  $C^\infty$  perchè sono polinomi e  $g_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sono  $C^\infty$  perchè composizione di funzioni  $C^\infty$ ,  $\Rightarrow f$  e  $g$  sono differenziabili, per definizione di jacobiana si ha

$$\begin{aligned} Df(t, u, v) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t}(t, u, v) & \frac{\partial f_1}{\partial u}(t, u, v) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(t, u, v) \\ \frac{\partial f_2}{\partial t}(t, u, v) & \frac{\partial f_2}{\partial u}(t, u, v) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(t, u, v) \\ \frac{\partial f_3}{\partial t}(t, u, v) & \frac{\partial f_3}{\partial u}(t, u, v) & \frac{\partial f_3}{\partial v}(t, u, v) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & k \\ 0 & 2u & 1 \end{bmatrix} \\ Dg(x, y) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g_3}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g_3}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2x}{1+x^2+y^2} & \frac{2y}{1+x^2+y^2} \\ \cos(x-y) & -\cos(x-y) \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(2)  $h = f \circ g = f(g(x, y)) = h(x, y)$ ,  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \Rightarrow Dh$  è  $2 \times 2$ , Essendo  $f$  e  $g$  differenziabili, segue che la funzione composta  $h = f \circ g$  è differenziabile e vale RDC, cioè  $Dh(0,0) = Df(g(0,0)) \cdot Dg(0,0)$ , poichè  $g(0,0) = (0,0,0)$  e

$$Dg(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Df(0,0,0) = \begin{bmatrix} k & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \begin{bmatrix} k & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = k \neq 0, \text{ se } k \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Dh(0,0) = \begin{bmatrix} k & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

**Esercizio 3.3.2 (Es. 3, Provetta)** Consideriamo la funzione  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y) = \arctan(1 + x^3 + \sqrt{(2)}kxy + y^2 - x^2) \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Determinare se esistono punti di massimo e/o minimo relativo o di sella.

$\arctan(t) \Rightarrow (\arctan(t))' = \frac{1}{1+t^2} > 0 \Rightarrow \arctan$  strettamente crescente Siccome  $\arctan$  è strettamente crescente i punti di min e max rel. e sella coincidono con i punti di max/min/sella della funzione:

$$g(x, y) = 1 + x^3 + \sqrt{(2)}kxy + y^2 - x^2$$

I punti critici di  $g$  sono quelli dove si annulla il gradiente  $\nabla g(x, y) = (0, 0) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 + \sqrt{(2)}ky - 2x = 0 \\ \sqrt{(2)}kx + 2y = 0 \end{cases} \iff \\ & \iff \begin{cases} 3x^2 + \sqrt{(2)}k\left(\frac{-kx}{\sqrt{(2)}}\right) - 2x = 0 \\ y = -\frac{kx}{\sqrt{(2)}} \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 - k^2x - 2x = 0 \\ y = -\frac{kx}{\sqrt{(2)}} \end{cases} \iff \\ & \iff \begin{cases} x(3x - (k^2 + 2)) = 0 \\ y = -\frac{kx}{\sqrt{(2)}} \end{cases} \iff \\ & \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{2+k^2}{3} \\ y = \frac{-k(2+k^2)}{3\sqrt{(2)}} \end{cases} \end{aligned}$$

$$p_1 = (0, 0)$$

$$\Rightarrow p_2 = \left( \frac{2+k^2}{3}, \frac{-k(2+k^2)}{3\sqrt{(2)}} \right) \text{ sono punti stazionari}$$

$$\bullet \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + \sqrt{(2)}ky - 2x$$

$$h_{11} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = 6x - 2$$

$$\bullet \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \sqrt{(2)}kx + 2y$$

$$h_{22} = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = 2$$



- $h_{12} = h_{21} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = \sqrt{(2)}k = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$  dal teorema di Schwartz

$$Hg(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x - 2 & \sqrt{(2)}k \\ \sqrt{(2)}k & 2 \end{bmatrix}$$

- Calcoliamo  $Hg(p_1)$

$$Hg(p_1) = Hg(0, 0) = \begin{bmatrix} -2 & \sqrt{(2)}k \\ \sqrt{(2)}k & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Autovalori di } Hg(p_1), \det \begin{bmatrix} -2 - \lambda & \sqrt{(2)}k \\ \sqrt{(2)}k & 2 - \lambda \end{bmatrix} = -4 + \lambda^2 - 2k^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = 2k^2 + 4 \iff \lambda \pm \sqrt{4 + 2k^2}$$

$$- \lambda_1 = \sqrt{4 + 2k^2} > 0$$

$$- \lambda_2 = -\sqrt{4 + 2k^2} < 0$$

$\Rightarrow$  la matrice  $Hg(0, 0)$  non è definita dal corollario visto a lezione,

$\det H = -4 - 2k^2 < 0 \iff \det H < 0 \Rightarrow$  non definita

$\Rightarrow$  per i teoremi visti a lezione  $(0, 0)$  è un punto di sella.

- Calcoliamo  $Hg(p_2)$

$$Hg(p_2) = Hg\left(\frac{2 + k^2}{3}, \frac{-k(2 + k^2)}{3\sqrt{(2)}}\right) = \begin{bmatrix} 2 + 2k^2 & \sqrt{(2)}k \\ \sqrt{(2)}k & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 2 + 2k^2 & \sqrt{(2)}k \\ \sqrt{(2)}k & 2 \end{bmatrix} = 4 + 4k^2 - 2k^2 = 4 + 2k^2 > 0$$

Siccome  $h_{11} > 0$  e  $\det Hg(p_2) > 0$  si ha dal corollario visto a lezione che  $Hg(p_2)$  è definita positiva.

Quindi per il teorema visto a lezione  $p_2$  è un punto di minimo relativo.

**Esercizio 3.3.3 (Es 1, Provetta)** Data  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(1 - \cos x)(\sin(ky))}{kx^2 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Dire se è continua in  $(0, 0)$  Per definizione di continuità,  $f$  è continua in  $(0, 0)$

$$\iff \exists \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0.$$

Ricordiamo i limiti notevoli:

- $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

Osserviamo che  $f(x, 0) = 0 \forall x \neq 0$  e  $f(0, y) = 0 \forall y \neq 0$  e

$$(*)f(x, y) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \cdot x^2 \cdot \frac{\sin(ky)}{ky} \cdot \frac{ky}{kx^2 + y^4} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{ky}{kx^2 + y^4}$$

Notiamo che:

$$0 \leq \left| \frac{ky}{kx^2 + y^4} \right| \leq \left| \frac{ky}{kx^2} \right| \leq |y|$$

Quindi per  $y \rightarrow 0$  e grazie al TDC  $\frac{ky}{kx^2 + y^4} \rightarrow 0$ , siccome tutti e tre i limiti in  $(*)$  esistono e sono finiti si ha:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow f \text{ è continua in } (0,0)$$

2. Dire se  $\exists \nabla f(0, 0)$

$$\nabla f(0, 0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right)$$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0$

Quindi  $\exists \nabla f(0, 0) = (0, 0)$

3. Dire se  $f$  è differenziabile in  $(0, 0)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - \langle \nabla f(0, 0), (x, y) \rangle}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

$$\langle \nabla f(0, 0), (x, y) \rangle = \langle (0, 0), (x, y) \rangle = (0, 0),$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - (0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$  da svolgimento del primo punto (1)

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{0 - (0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$