Analisi Matematica 2

Enrico Favretto

28/02/2022

Contents

1 Funzioni a più variabili **3**

1.1 Lez - 01 . . . 3

1.1.1 Grafico di una funzione scalare di più variabili . . . 3

1.1.2 Curve di livello di una funzione di più variabili . . . 4

1.1.3 Limiti e continuità per funzioni di più variabili . . . 4

1.2 Lez - 02 . . . 6

1.2.1 Calcolo dei limiti . . . 7

1.2.2 Esempi calcolo limiti . . . 8

1.3 Lez - 03 . . . 10

1.3.1 Definizioni limiti e continuità per $\mathbb{R}^n$ . . . 10

1.3.2 Calcolo differenziale per funzioni a più variabili . . . 11

1.3.3 Piano tangente al grafico . . . 12

1.4 Lez - 04 . . . 14

1.4.1 Differenziabilità in $n \geq 3$ . . . 15

1.5 Lez - 05 . . . 19

1.5.1 Condizioni sulle derivate parziali che assicurino la diffrenenziablità . . . 19

1.5.2 Derivate direzionali . . . 20

1.5.3 Teo: Diff. vs. Deriv. direz. . . . 21

1.5.4 Teorema del valore medio . . . 22

1.6 Lez - 06 . . . 23

1.6.1 Derivate parziali di una f composta di più variabili . . . 23

1.6.2 I caso particolare . . . 23

1.6.3 II caso particolare . . . 25

1.6.4 Caso generale di RDC . . . 26

1.6.5 Teorema RDC . . . 27

1.7 Lez - 07 . . . 28

1.7.1 Derivate parziali di ordine superiore . . . 28

1.7.2 Teo: Inversione dell'ordine di derivazione . . . 28

1.7.3 Taylor per funzioni di più variabili . . . 28

1.7.4 Taylor del II ordine + resto di Peano . . . 28

2 Esercitazioni **29**
2.1 Lezione 1 - 09/03/2022 29
2.2 Esercitazione 2 - 23/03/2022 33

Chapter 1

Funzioni a più variabili

1.1 Lez - 01

Studieremo funzioni a più variabili reali a valori scalari e vettoriali, cioè $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ con $n, k \in InsN$ e $n \geq 1, k \geq 1$.
Se $k = 1, n \geq 2$, f si dice funzione di più variabili a valori scalari;
Se $k \geq 1, n \geq 1$, f si dice funzione di più variabili a valori vettoriali.

Incominciamo a trattare il caso in cui $n = 2, 3$ e $k = 1$.

MOTIVAZIONE: I fenomenti in Fisica/Ingegneria sono modelizzati da funzioni che dipendono da due/tre variabili.

Esempio 1 *1. La funzione temperatura di una piastra piana $A \subseteq \mathbb{R}^2$. La funzione temperatura della piastra A può essere modelizzata da una funzione*

$$T : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty] \subseteq \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

2. La funzione distanza dall'origine in $\mathbb{R}^3$,

$$f : \mathbb{R}^3 \to [0, +\infty]$$

$$f(p) := d(O, p) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

1.1.1 Grafico di una funzione scalare di più variabili

Ricordiamo che nel caso di una funzione scalare da una variabile $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($y = f(x)$, $x \in A$), A intervallo di $\mathbb{R}$.

$$G_f := \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Se $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ($z = f(x,y)$, $(x,y) \in A$)

$$G_f := \{(x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ($t = f(x,y,z)$, $(x,y,z) \in A$)

$$G_f := \{(x,y,z,f(x,y,z)) \mid (x,y,z) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

Disegnare G_f in $\mathbb{R}^4$? Non può essere facilmente studiato, il grafico è una ipersuperficie di $\mathbb{R}^4$

1.1.2 Curve di livello di una funzione di più variabili

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, fissato $t \in \mathbb{R}$,

$$C_t := \{(x,y) \in A \mid f(x,y) = t\}$$

(è un insieme di tipo "curva" contenuto in A)

Esempio 2 *$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x - y$, (z = x-y) $x - y - z = 0$,*

$$((1,-1,-1),(x,y,z)) = 0$$

$$C_t := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = t\}$$

fascio di rette parallele al variare di t

$$G_f := \{(x,y,x-y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$$

piano di $\mathbb{R}^3$ contenente la retta r e ortogonale al vettore (1,-1,-1)

$$r := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$$

Più in generale se $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $C_t := \{(x,y,z) \in A \mid f(x,y,z) = t\}$ è un insieme di tipo "superficie".

Esercizio 1 *Studiare le curve di livello della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$.*

$$C_t := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = t\}$$

- *C_t è la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{t}$, se $t \geq 0$*
- *C_t è vuoto ($\varnothing$), se $t < 0$*

1.1.3 Limiti e continuità per funzioni di più variabili

<u>Problema</u>: Data $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, fissato $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ introdurre la definizione

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

Ricordiamo la definizione di limite per funzioni reali di una variabile, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in [a, b]$ $lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \iff (def.)$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = d(x_0, \varepsilon) > 0 \mid |f(x) - L| < \varepsilon$$

$\forall x \in (a, b) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0$, $lim_{x \to a^+} f(x) = L, lim_{x \to b^-} f(x) = L$

$$B(x_0, \delta) := (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \delta\}$$

intorno sferico di centro x_0 *e reaggio* $\delta > 0$

Idea per l'introduzione di limite per funzioni di $n = 2$ varaibili

<u>Generalizzazione</u>:

1. La definizione di intorno di centro x_0 e raggio $r > 0$ a $\mathbb{R}^2$
2. La nozione di intervallo apero e chiuso a $\mathbb{R}^2$, come pure la nozione di punto estremo di un intervallo.

1.2 Lez - 02

Definizione 1.2.1 (Distanza Euclidea in $\mathbb{R}^2$) *Si chiama* <u>*distanza euclidea*</u> *di* $\mathbb{R}^2$ *(o nel piano) la funzione,* $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty)$*:*

$$d(p, q) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$p = (x_1, y_1)$*,* $q = (x_2, y_2)$

Definizione 1.2.2 *Si chiama* <u>*intorno*</u> *(sferico) di centro* $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *e raggio* $r > 0$ *(o anche palla aperta di centro* p_0 *e raggio* $r > 0$*), l'insieme:*

$$B_r(p_0) = B(p_0, r) := \{p \in \mathbb{R}^2 \mid d(p, p_0) < r\} =$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$$

Definizione 1.2.3 *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}^2$

1. *Un punto* $p_0 \in \mathbb{R}^2$ *si dice* <u>*punto di frontiera*</u> *di* A *se*

   $$B(p_0, r) \cap A \neq \varnothing \text{ e } B(p_0, r) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus A) \neq \varnothing, \forall r > 0$$

   L'insieme di tutti i punti di frontiera di A *è detto* <u>*frontiera di A*</u> *e di denota* ∂A

2. *L'insieme* A *è detto* <u>*chiuso*</u> *se ogni punto di frontiera di* A *appartiene ad* A

3. *L'insieme* A *è detto* <u>*aperto*</u> *se non contiene alcun punto della sua frontiera*

4. *L'insieme di tutti i punti di* A *che non sono di frontiera si chiama* <u>*parte interna di A*</u> *e si denota con* $\mathring{A}$

5. *L'insieme* A *è detto* <u>*limitato*</u> *se* $\exists R_0 > 0$ *t.c.* $A \subseteq B(O, R_0)$

Esempio 3

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$*, allora*
   - $\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
   - $\mathring{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$
2. $A = \mathbb{R}^2$*,* $\partial A = \varnothing$*,* $\mathring{A} = A = \mathbb{R}^2$

Definizione 1.2.4 *Dato* $A \subseteq \mathbb{R}^2$

1. $p_0 \in \mathbb{R}^2$ *si dice* <u>*punto di accomulazione*</u> *per* A *se*

   $$B(p_0, r) \cap (A \setminus \{p_0\}) \neq \varnothing, \forall r > 0$$

2. $p_0 \in A$ *si dice* <u>*punto isolato*</u> *di* A *se* p_0 *non è un punto di accomulazione, cioè se:*

   $$\exists r_0 > 0 \mid B(p_0, r_0) \cap A = \{p_0\}$$

Definizione 1.2.5 (Limite di funzioni di due variabili) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e sia $p_0 \in \mathbb{R}^2$ punto di accomulazione per A. Si dice che:*

$$\exists lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \in \mathbb{R}$$

oppure $\exists \lim_{p\to p_0} f(p) = L$ se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = d(p_0, \varepsilon) > 0 \mid |f(x,y) - L| < \varepsilon, \forall (x,y) \in B(p,\delta) \cap (A \setminus \{p_0\})$$

Osservazione 1.2.1 *Tenendo presente il caso di funzioni di una variabile, si può enunciare anche la definizione nel caso in cui $L = \pm\infty$*

1.2.1 Calcolo dei limiti

Proposizione 1.2.1 (Unicità del limite) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e sia $p_0 \in \mathbb{R}^2$ punto di accomulazione per A. Supponiamo che $\exists lim_{p\to p_0} f(p) = L \in \mathbb{R}$. Allora L è unico.*

Teorema 1.2.2 (Tecniche per il calcolo dei limiti) *Siano $g, f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p_0 \in \mathbb{R}^2$ punto di accomulazione per A. Supponiamo che $\exists \lim_{p\to p_0} f(p) = L \in \mathbb{R}$ e $\exists \lim_{p\to p_0} g(p) = M \in \mathbb{R}$, allora:*

1. $\exists \lim_{p\to p_0} f(p) + g(p) = L + M$
2. $\exists \lim_{p\to p_0} f(p) \cdot g(p) = L \cdot M$
3. *Se $g(p) \neq 0, \forall p \in A \setminus \{p_0\}$ e $M \neq 0$, allora $\exists \lim_{p\to p_0} \frac{f(p)}{g(p)} = \frac{L}{M}$*
4. *Sia $F : \mathbb{R} to \mathbb{R}$ continua e sia $h(p) = F(f(p))$, allora $\exists \lim_{p\to p_0} h(p) = F(L)$*
5. ***Teorema del confronto**: Sia $h, g, f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, supponiamo che:*
   5.1 $f(p) \leq g(p) \leq h(p)$, $\forall p \in A \setminus \{p_0\}$
   5.2 $\exists \lim_{p\to p_0} f(p) = \lim_{p\to p\to p_0} h(p) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

   allora $\exists \lim_{p\to p_0} g(p) = L$

***Dim.* 1.2.1** *Le dimostrazioni di 1-4 sono lasciate al lettore :)*

5 *Supponiamo che $L \in \mathbb{R}$, dobbiamo provare che $\exists \lim_{p\to p_0} g(p) = L$, cioè per definizione:*

1* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta\,(= \delta(p_0, \varepsilon)) > 0$ *t.c.* $|g(p) - L| < \varepsilon\ \forall p \in B(p_0, \delta) \cap (A \setminus \{p_0\})$. *Per ipotesi sappiamo che*

$$\lim_{p\to p_0} f(p) = L, \lim_{p\to p_0} h(p) = L$$

cioè :

2* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1\,(= \delta_1(p_0, \varepsilon)) > 0$ *t.c.* $|f(p) - L| < \varepsilon$ *o equivalentemente* $L - \varepsilon < f(p) < L + \varepsilon\ \forall p \in B(p_0, \delta_1) \cap (A \setminus \{p_0\})$, *e:*

3 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_2 \, (= \delta_2(p_0, \varepsilon)) > 0$ t.c. $|h(p) - L| < \varepsilon$ o equivalentemente $L - \varepsilon < h(p) < L + \varepsilon \ \forall p \in B(p_0, \delta_2) \cap (A \setminus \{p_0\})$*

Da (5.1),(2),(3*) segue che $\forall \varepsilon > 0$, scegliendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ vale che*

$$L - \varepsilon < f(p) \leq g(p) \leq h(p) < L + \varepsilon$$

$\forall p \in B(p_0, \delta) \cap (A \setminus \{p_0\})$ e dunque vale la (1).*

Introduciamo un altro strumento importante per il calcolo dei limiti per funzioni di due variabili.
Ricordiamo che data $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $B \subseteq A$ si chiama <u>funzione restrizione</u> $f|_B \colon B \to \mathbb{R}$, $f|_B(x) := f(x)$ se $x \in B$.

Teorema 1.2.3 (Limite lungo direzioni) *Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $p_0 \in \mathbb{R}^2$ punto di accomulazione, allora sono equivalenti*

1. *$\exists \lim_{p \to p_0} f(p) = L$*
2. *Per ogni sottoinsieme $B \subseteq A$, per cui p_0 è un punto di accomulazione per B, $\exists \lim_{p \to p_0} f|_B(p) = L$*

Un insieme $B \subseteq A$ può essere visto come una direzione lungo cui $p \to p_0$.

Osservazione 1.2.4 *Il teorema precedente risulta efficace <u>solo</u> per provare che il limite <u>non</u> esiste.*

1.2.2 Esempi calcolo limiti

Esercizio 2 *1. Calcola, se esiste, $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$*

Dim. 1.2.2 *Nel calcolo del limite bisogna valutare:*

- *Esistenza (il limite può non esistere)*
- *Tecninche appropriate per il calcolo*

Utilizziamo il punto (4) del primo teorema.
Ricordiamo anche il limite notevole $\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$
Denotiamo:

- *$h(x, y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ se $(x, y) \in A = (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$*
- *$t = x^2 + y^2$*
- *Sia $p_0 = (0, 0)$ punto di accomulazione per A.*

Osserviamo che $h(x, y) = F(f(x, y))$, dove $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F := \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

è continua, e $f(x, y) = x^2 + y^2 \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Poichè $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0$, dal punto (4)

$$\exists \lim_{p \to p_0} h(p) = \lim_{p \to p_0} F(f(p)) = F(0) = 1$$

2. *Calcola se esite* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

   Dim. 1.2.3 *Sia*
   $$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$
   $\forall (x,y) \in A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *e* $p_0 = (0,0)$.
   Utilizziamo il teorema per provare che il limite non esiste.
   Infatti se
   $$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$$
   allora
   (1)* $\exists \lim_{x\to 0} f(x,mx) = L$, $\forall m \in R$
   dove $y = mx$, $B = \{y = mx\}$*(direzionale) e* m *è finito.*
   <u>*Osserviamo*</u> *che* $f(x,mx) = \frac{mx^2}{(m^2+1)x^2} = \frac{m}{m^2+1}$ *se* $x \neq 0$, *quindi*
   $$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \frac{m}{m^2+1}$$
   ma se $m = 0, 1$ *il limite prende valore* $0, \frac{1}{2}$ $(0 \neq \frac{1}{2})$,
   dunque non può valere (1), quindi il limite* <u>*non esiste*</u>

Dalla definizione di limite per funzioni di due variabili segue subito la nozione di continuità .

Esercizio 3 *Calcolare se esiste*
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

Sugg: Provare che $\nexists$

1.3 Lez - 03

1.3.1 Definizioni limiti e continuità per $\mathbb{R}^n$

Definizione 1.3.1 *Sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1. f *si dice continua in* $p_0 \in A$ *se*
   (a) p_0 *è un punto* <u>*isolato*</u> *di* A, *oppure*
   (b) p_0 *è un punto di accomulazione ed* $\exists \lim_{p \to p_0} f(p) = f(p_0)$
2. f *si dice* <u>*continua*</u> *su* A *se* f *è continua in ogni punto* $p_0 \in A$

Le nozioni di limite e continuità , introdotte per funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, si possono estendere al caso di funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $n \geq 3$.
Più precisamente su $\mathbb{R}^n$ possiamo definire la distanza Euclidea:

$$d(p, q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$$

se $p = (x_1, ..., x_n)$ e $q = (y_1, ..., y_n)$.

<u>Intorno</u> di centro $p_0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ e $r > 0$ è l'insieme:

$$B(p_0, r) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid d(p, p_0) < r\}$$

$$= \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1 - x_1^0)^2 + ... + (x_n - x_n^0)^2 < r^2\}$$

Tramite la nozione di intorni, si possono estendere a $\mathbb{R}^n$ la nozione di:

- frontiera di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- insieme aperto/chiuso $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- insieme limitato $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- punto di accomulazione/isolato di $A \subseteq \mathbb{R}^n$

Pertanto:

Definizione 1.3.2 *Sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *e sia* $p_0 \in \mathbb{R}^n$ *punto di accomulazione di* A. *Allora si dice che:*

$$\exists \lim_{p \to p_0} f(p) = L \in \mathbb{R}$$

se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(p, \varepsilon) > 0 \text{ t.c. } |f(p) - L| < \varepsilon, \forall p \in B(p_0, \delta) \cap (A \setminus \{p_0\})$$

In modo simile si può introdurre la nozione di continuità per funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

1.3.2 Calcolo differenziale per funzioni a più variabili

Derivate parziali

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto, $p_0 = (x_0, y_0) \in A$, essendo A aperto, $\exists \delta_0 > 0$ t.c.

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta] \subset A$$

In particolare i segmenti:

- $(x, y_0) \in A \ \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$
- $(x_0, y) \in A \ \forall y \in [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$

Pertanto son ben definiti i rapporti incrementali

- $((x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\}) \ni x \to \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}$
- $((y_d 0 - \delta_0, y_0 + \delta_0) \setminus \{y_0\}) \ni y \to \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0}$

Definizione 1.3.3 *1. Si dice che f è derivabile(parzialmente) rispetto alla variabile x nel punto $p_0 = (x_0, y_0)$ se*

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} := \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$$

2. Si dice che f è derivabile(parzialmente) rispetto alla variabile y nel punto $p_0 = (x_0, y_0)$ se

$$\exists \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} := \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = D_2 f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$$

3. Se f è derivabile (parzialmente) sia rispetto ad x ed y nel punto $p_0 = (x_0, y_0)$, si chiama (vettore)gradiente di f in p_0 il vettore:

$$\nabla f(p_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \right) \in \mathbb{R}^2$$

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A insieme aperto. Supponiamo che:

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \to \mathbb{R}$$

allora è ben definito il campo dei vettori gradiente:

$$\nabla f : \mathbb{R}^2 \supseteq A \ni p \to \nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p) \right) \in \mathbb{R}^2$$

Applicazione: Sia $V : A \to \mathbb{R}$ il potenziale di una carica elettrica in un insieme A del piano. Allora vale la realzione $\nabla V = \underline{E}$, dove $\underline{E} := (E_1(x,y), E_2(x,y)) \to$ vettore campo elettrico.

Problema: $\exists \nabla f(p_0)$ è la nozione corretta di derivabilità per funzioni di due variabili? Per esempio se $\exists \nabla f(p_0) \Rightarrow$ f è continua in p_0?

Esempio 4 *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p_0 = (0,0)$ *e*

$$f(x,y) := \begin{cases} 0 & se\ (x,y) = (0,0) \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & se\ (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Abbiamo visto che: $\nexists \lim_{p \to p_0} f(p) \Rightarrow f$ *non è continua in* p_0.
D'altra parte:

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$$

se $x \neq 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

$$\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0$$

se $y \neq 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
Pertanto $\exists \nabla f(0,0) = (0,0)$ *ma f non è continua nel punto (0,0).*

1.3.3 Piano tangente al grafico

Approssimazione lineare e nozione di differenziabilità per funzioni di più variabili.

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $z = f(x,y)$.

Problema: Definire il "piano tangente" alla "superficie" G_f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ se esiste.
Ricordiamo che l'equazione di un piano π di $\mathbb{R}^3$, non parallelo all'asse z, passante per il punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è del tipo

$$\pi : z = a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$.
Ricordiamo inoltre che per funzioni di $n = 1$ variabile, se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, la retta tangente r a G_f nel punto $(x_0, f(x_0))$ ha equazione:

$$r : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

ed è caratterizzata dalla proprietà di essere l'unica retta del fascio di rette $y = m(x - x_0) + f(x_0)$, $m \in \mathbb{R}$ t.c.

$$(\mathrm{D}) \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [m(x - x_0) + f(x_0)]}{|x - x_0|} = 0$$

(miglior approssimazione lineare al primo ordine) Infatti: $n = 1$, $L(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$ sono le applicazioni lineari di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$

Esercizio 4 $\exists f'(x_0) \in \mathbb{R} \iff \exists m \in \mathbb{R}$ *t.c. vale (D), inoltre* $m = f'(x_0)$.
Sugg: Utilizzare (D) nel caso di funzioni di due variabili per definire il paino tangente.
Più precisamente, data $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *con* A *aperto, sia* $p_0 = (x_0, y_0) \in A$. *Suppponimao che esistono* $a, b \in \mathbb{R}$ *t.c.*

$$(D)\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x) - [a(x - x_0) + b(y - y_0 + f(x_0)]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

Allora se vale (D:)

Definizione 1.3.4 1. *il piano* $\pi : z = a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0, y_0)$ *si dice piano tangente al grafico* G_f *nel punto* $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

2. *f si dice differenziabile nel punto* $p_0 = (x_0, y_0)$ *proveremo che:*

   (a) *Se f è differenziabile in* $p_0 \in A \Rightarrow f$ *è continua*

   (b) *Se f è differenziale in* $p_0 \in A$*, allora*

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \exists \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$$

Esercizio 5 $!\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 0$? *NO.*

1.4 Lez - 04

Piano tangente al grafico G_f in un punto $(x_0, y_o, f(x_0, y_0))$, per una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è un piano π di equazione $z = a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0, y_0)$ dove $p_0 = (x_0, y_0) \in A$, verificante la seguente equazione:

$$(\mathrm{D})\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x) - [a(x - x_0) + b(y - y_0 + f(x_0)]}{d(p, p_0)}$$

dove $d(p, p_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

Definizione 1.4.1 *Datp AsubseteqR^2 aperto e dato $p_0 = (x_0, y_0) \in A$, la funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si dice differenziabile nel punto p_0 se vale (D), per $a, b \in \mathbb{R}$ opportuni.*

Proposizione 1.4.1 *Se f è differenziabile nel punto $p_0 = (x_0, y_0)$, allora*

$$\exists \nabla f(p_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \right)$$

e

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0), b = \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$$

Dim. 1.4.1 *Supponiamo che f sia differenziabile in p_0, cioè che valga (D). Ponendo nella (D), $y = y_0$ otteniamo che:*

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x, y_0)\,[a(x - x_0) + f(x_0, y_0)]}{|x - x_0|} = 0$$

$$\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) = a$$

procediamo allo stesso modo, ponendo $x = x_0$ nella (D) e otteniamo $\frac{\partial f}{\partial y}(p_0) = b$

Definizione 1.4.2 *L'applcazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,*

$$L(x, y) := \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)y$$

si chima differenziale di f in p_0, si denota con:

$$L = df(p_0) := \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)dy$$

Definizione 1.4.3 (Piano tangente) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto con f differenziabile in p_0. Si chiama piano tangente al grafico G_f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ il piano π di equazione:*

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

Teorema 1.4.1 *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto, f differenziabile in $p_0 \in A$, allora f è continua in p_0*

Dim. 1.4.2

$$f(p) - f(p_0) = \frac{f(p) - f(p_0) - df(p_0)(p - p_0)}{d(p, p_0)} \cdot d(p, p_0) + df(p_0)(p - p_0) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)(y - y_0)$$

Il tutto tende a 0 per $p \to p_0$.

$$\Rightarrow \exists \lim_{p \to p_0} (f(p) - f(p_0)) = 0$$

1.4.1 Differenziabilità in $n \geq 3$

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, $p_0 \in A$, $p = (x_1, ..., x_n)$, $p_0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ possiamo definire

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(p_0 + he_i) - f(p_0)}{h}$$

dove $i = 1, ..., n$, $e_i, ..., e_n$ denota la base canonica di $\mathbb{R}^n$, cioè $e_i = (0, 0, ..., 0, 1_{\text{i-esimo elemento}}, 0, 0, ..., 0)$
Diremo che

$$\exists \nabla f(p_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_0) \right)$$

gradiente di f in p_0, se $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)$, $\forall i = 1, ..., n$

Definizione 1.4.4 *f si dice differenziabile in un punto $p_0 \in A$ se esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ t.c.*

$$(D) \exists \lim_{p \to p_0} \frac{f(p) - f(p_0) - L(p - p_0)}{d(p.p_0)} = 0$$

L'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ per cui valga (D) si denota con $L = df(p_0)$

Proposizione 1.4.2 (11.4) *Se f è differenziabile nel punto p_0 allora*

i $\exists \nabla df(p_0)$

ii

$$df(p_0)(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) v_i := \nabla f(p_0) \cdot v$$

se $v = (v_1, ..., v_n)$

Osservazione 1.4.2 *Se $v = e_i$, $\nabla f(p_0) \cdot e_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)$*

Notazione 1.4.3 $df(p_0) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) dx_i$

Osservazione 1.4.4 *Dalla definizione di differenziabilità nel caso $n = 1$, segue che, se $A = (a, b)$, $x_0 \in A$, allora* ***Esercizio 1.5, foglio 2:***

$$\exists f'(x_0) \iff f \text{ è differenziabile in } x_0$$

Esercizio 6 (1b, foglio 2) *Calcolare se esiste*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 - e^{xy^2}}{\sqrt{x^4 + y^4}}$$

Dim. 1.4.3 *Ricordiamo che (1)* $\exists \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$.
Utilizzando il precedente limite possiamo eseguire il seguente bilanciamento:

$$\frac{1 - e^{xy^2}}{xy^2} \cdot \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^4}}$$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, *con* $xy^2 \neq 0$. *Osserviamo che:*

(2)

$$\frac{1 - e^{xy^2}}{\sqrt{x^4 + y^4}} = 0$$

Se $xy^2 \neq 0$ *e* $(x, y) \neq (0, 0)$

(3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-e^{xy^2}}{xy^2} = 1$.
Rimane da calcolare, se esiste:

(4) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^4}}$

è molto utile, per studiare limite del tipo (4) fare un cambiamento di variabili ed utilizzare le coordinate polari:

Coordinate polari

Consideraimo il seguente cambiameto di variabili $\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}$ *con* $\rho > 0$ *e* $0 \leq \vartheta \leq \pi$, *quindi:*

$$\frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^4}} \to \frac{\rho \cdot \cos\vartheta \cdot \rho^2 \sin^2\vartheta}{\sqrt{\rho^4 \left(\cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta\right)}} = \rho \cdot \frac{\cos\vartheta \cdot \sin^2\vartheta}{\sqrt{\left(\cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta\right)}}$$

Dalla (2) sappiamo che se $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-e^{xy^2}}{\sqrt{x^4+y^4}} = L \Rightarrow L = 0$.
<u>Idea</u>: Utilizzare la funzione in coordinate polari, per cercare di provare tramite il teorema del confronto che (5) $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^4}}$.

Le coordinate polari risulatano molto utili per trovare delle stime per applicare il teorema del confronto:

$$(6)\ 0 \leq |\frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^4}}| = |\rho \cdot \frac{\cos\vartheta \cdot \sin^2\vartheta}{\sqrt{\left(\cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta\right)}}| \leq$$

$$\leq \rho \cdot \frac{|\cos\vartheta \cdot \sin^2\vartheta|}{\sqrt{\left(\cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta\right)}} \leq \frac{\rho \cdot 1}{\sqrt{\cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta}}$$

Esercizio 7 $\cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta \geq \frac{1}{2}$, $\forall\vartheta \in [0, 2\pi]$

Pertanto da (6) segue che

$$\begin{cases} \vartheta > 0 & \forall\vartheta \in (0, 2\pi) \\ \\ \frac{1}{\vartheta} > 0 & \vartheta \to 0^+ \end{cases}$$

$$0 \leq |\frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^4}}| \leq \sqrt{2} \cdot \rho = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}$$

$\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *se* $(x,y) \to (0,0)$ *Dunque vale (5) e possiamo concludere che*

$$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-e^{xy^2}}{\sqrt{x^4+y^4}} = 0$$

$$f(x,y) = \frac{1-e^{xy^2}}{\sqrt{x^4+y^4}}$$

se $(x,y) \neq (0,0)$,

- $!\exists \lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$
- $!\exists \lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$

$\Rightarrow \exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L \Rightarrow L = 0$

***Dim.* 1.4.4 (1.5, foglio 2)** $(\Rightarrow)\exists f'(p_0) \Rightarrow f$ *è differenziabile in* x_0.
Ricordiamo che per definizione

$$\exists f'(x_0) \in \mathbb{R} \iff (1)\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

N.B.: $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to x_0}|f(x)| = 0$

Esercizio 8

$$(1) \iff (2)\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{|x-x_0|} = 0$$

Osserviamo che per definizione f è differenziabile in $x_0 \iff$ *vale (2).*
Mostriamo l'implicazione $(\Leftarrow)$, *Supponiamo che valga (2).*

Esercizio 9

$$(2) \iff (3) \exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = 0$$

È chiaro che

$$(3) \iff \exists \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \right) = 0 \iff$$

$$\iff \exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \overset{def}{\iff} \exists f'(x_0)$$

1.5 Lez - 05

1.5.1 Condizioni sulle derivate parziali che assicurino la diffrenenziablità

Osservazione 1.5.1 *La derivabilità parziale non è sufficiente ad assicurare la diffrenenziablità*

Problema: Data $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto e supponiamo che $\exists \nabla f(p_0)$ con $p_0 \in A$. Quale proprietà ulteriore bisogna aggiungere per ottenere la diffrenenziablità di f in p_0?

Teorema 1.5.2 (del differenziale totale) *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $p_0 \in A$. Supponiamo che*

(i)
$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \to \mathbb{R}$$

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ *siano continue nel punto p_0, cioè*
$$\exists \lim_{p \to p_0} \frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) \, e \lim_{p \to p_0} \frac{\partial f}{\partial y}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$$

Allora f è differenzibile nel punto p_0. [BDPG, 11.5]

Osservazione 1.5.3 *È sufficiente richiedre la (i) e (ii) in un intorno di p_0*

Il teorema del differenziale totale giustifica la seguente definizione:

Definizione 1.5.1 *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

(i) f si dice differenziabile su A se è diff su ogni punto di A.

(ii) f si dice di classe C^1 su A se f è continua e
$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \to \mathbb{R} \text{ continui}$$

In questo caso scriveremo che $f \in C^1(A)$

Dal teorema del differenziale totale segue anche:

Corollario 1.5.1 *Sia $f \in C^1(A)$ allora f è differenziabile su ogni punto di $p_0 \in A$*

1.5.2 Derivate direzionali

Norma di un vettore di $\mathbb{R}^n$

Sia $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, si chiama <u>norma</u> di v, e si denota

$$\|v\| := \sqrt{v_1^2 + ... + v_n^2} = d(v, \underline{O}) = \sqrt{v \cdot v}$$

Esempio 5 *1. $n = 1$, $\|v\| = |v|$ se $v \in \mathbb{R}$*

2. $n = 2$. (immaginarsi il piano cartesiano)

Osservazione 1.5.4 *Se $p, q \in \mathbb{R}^n \Rightarrow d(p, q) = \|p - q\|$*

Esercizio 10 (6,foglio 1) *1. $\|v\| = 0 \iff v = \underline{O} = (0, ..., 0)$*

2. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda v = (\lambda v_1, ..., \lambda v_n)$ con $v = (v_1, ..., v_n)$, allora $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$

3. <u>Disuguaglianza triangolare:</u> Se $v, w \in \mathbb{R}^n$, $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Definizione 1.5.2 *Un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ si dice <u>direzione</u> (<u>vettore unitario</u>, <u>versore</u>) se $\|v\| = 1$*

Esempio 6 *$n = 2$, i vettori $e_1 = (1, 0)$ ed $e_2 = (0, 1)$ sono direzioni di $\mathbb{R}^2$*

Sia $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ una direzione, e $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto e $p_0 = (x_0, y_0) \in A$, allora $\exists \delta > 0$ t.c.

$$p_0 + hv = (x_0 + hv_1, y_0 + hv_2) \in A$$

se $|h| \leq \delta$, pertanto è ben definita:

$$(-\delta, \delta) \setminus \{0\} \ni h \to \frac{f(p_0 + hv) - f(p_0)}{h}$$

Definizione 1.5.3 *Si dice che f è <u>derivabile</u> (parzialmente) rispetto alla direzione v nel punto p_0 se*

$$\exists \frac{\partial f}{\partial v}(p_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(p_0 + hv) - f(p_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

Notazione 1.5.5 *Talvolta $\frac{\partial f}{\partial v}(p_0) = D_v f(p_0)$*

Osservazione 1.5.6 *(i) Sia $F : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$, (funzione di $n = 1$ variabile)*

$$F(t) := f(p_0 + tv) \;\; se \; t \in (-\delta, \delta)$$

Allora è immediato verificare che

$$\exists \frac{\partial f}{\partial v}(p_0) \iff \exists F'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{F'(h) - F(0)}{h}$$

ed in questo case, $\frac{\partial f}{\partial v}(p_0) = F'(0)$

(ii) È immediato verificare che se $v = e_1$ o $v = e_2$, allora

$$\frac{\partial f}{\partial e_1}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial e_2}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$$

1.5.3 Teo: Diff. vs. Deriv. direz.

Teorema 1.5.7 (diffrenenziablità vs derivabiliità direzionale) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto e sia fissato $p_0 = (x_0, y_0) \in A$. Supponiamo che f sia differenziale in p_0, allora*

$$\exists \frac{\partial f}{\partial v}(p_0) = df(p_0)(v) = \nabla f(p_0) \cdot (v) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)(v_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)(v_2)$$

per ogni direzione $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$

Dim. 1.5.1 *Consideriamo la funzione $F : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$,*

$$F(t) = f(p_0 + tv) = f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)$$

Per ipotesi, f è differenziabile in p_0, cioè vale:

$$(D) \exists \lim_{p \to p_0} \frac{f(p) - f(p_0) - \nabla f(p_0) \cdot (p - p_0)}{d(p, p_0)} = 0$$

la condizione (D) è equivalente a chiedere:

$$(D*) f(p) = f(p_0) + \nabla f(p_0) \cdot (p - p_0) + o\,(d(p, p_0)) \; \forall p \in A$$

dove con $o\,(d(p, p_0)) \overset{def.}{\iff} \exists \lim_{p \to p_0} \frac{o(d(p,p_0))}{d(p,p_0)} = 0$ Scegliendo $p = p_0 + hv$ in (D), otteniamo che:*

$$F(h) := f(p_0 + hv) - f(p_0) + \nabla f(p_0) \cdot (hv) + o(d(p_0 + hv, p_0)) =$$

$$= F(0) + h\,(\nabla f(p_0) \cdot v) + o(|h|)$$

Infatti ricordiamo che:

$$d(p_0 + hv, p_0) = \|p_0 + hv - p_0\| = \|hv\| = |h|\,\|v\| = |h|$$

Dall'identità precedente segue che:

$$\exists F'(0) := \lim_{h \to 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \nabla f(p_0) \cdot v = df(p_0)(v)$$

Per l'osservazione precedente $F'(0) = \frac{\partial f}{\partial v}(p_0)$ da cui segue la tesi.

Dal teorema segue la generalizzazione del teorema del valore medio (G. Lagrange) a funzioni $n = 2$ variabili.

1.5.4 Teorema del valore medio

Teorema 1.5.8 (TdVM, n=1) *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in (a,b). Allora $\exists c \in (a,b)$ t.c.*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Teorema 1.5.9 (del valore medio, n=2) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto. Supponiamo che:*

(i) $\exists p,q \in A$ *t.c.* $[p,q] := \{tq + (1-t)p \mid t \in [0,1]\} \subset A$

(ii) f *è continua sull'insieme* $[p,q]$ *e differenziabile su* $(p,q) := \{tq + (1-t)p \mid t \in (0,1)\}$

Allora esiste un punto $\bar{c} \in (p,q)$ t.c. $f(q) - f(p) = \nabla f(\bar{c}) \cdot (q-p)$

Dim. 1.5.2 *Supponiamo $p \neq q$ altrimenti la tesi è banale e sia*

$$v := \frac{q-p}{\|q-p\|}$$

una direzione di $\mathbb{R}^2$.
Definiamo la funzione (d n=1 variabile) $F(t) := f(p+tv)$ con $t \in [0, \|q-p\|]$ ($\subset \mathbb{R}$) e fissiamo p,q, osserviamo che F è ben definita per la (i) e $F(0) = f(p)$ e $F(\|q-p\|) = f(q)$. Inoltre per la (ii):

1. $F : [0, \|q-p\|] \to \mathbb{R}$ *è continua;*
2. $\exists F'(t) = \frac{\partial f}{\partial v}(p+tv)$, $\forall t \in (0, \|q-p\|)$

Possimao applicare il teorema del valore medio (n=1 variabile) a F e otteniamo che esiste $\bar{t} \in (0, \|q-p\|)$ t.c.

$$f(q) - f(p) = F(\|q-p\|) - F(0) = F(\bar{t})\, \|q-p\| =$$

$$=_{(2)} \frac{\partial f}{\partial v}(p+\bar{t}v)\, \|q-p\| = (\nabla f(p+\bar{t}v) \cdot v)\, \|q-p\| =$$

$$= \left(\nabla f(p+\bar{t}v) \cdot \frac{q-p}{\|q-p\|}\right) \cdot \frac{q-p}{\|q-p\|} = \nabla f(p+\bar{t}v)(q-p)$$

Scegliendo $\bar{c} = p + \bar{t}v \in (p,q)$ otteniamo la tesi

Corollario 1.5.2 *Sia $f : B(p_0, r_0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Supponiamo che $\exists \nabla f(p_0) = (0,0)\, \forall p \in B(p_0, r_0)$. Allora $f(p) = f(p_0)$, $\forall p \in B(p_0, r_0)$*

Dim. 1.5.3 *per il teorema del diff. tot. f è differenziale su $B(p_0, r_0)$. Possimao applicare il teorema del valore medio e otteniamo che $\exists \bar{c} \in (p, p_0)$ t.c. $f(p) - f(p_0) = \nabla f(\bar{c})(p - p_0) = 0$, $\forall p \in B(p_0, r_0)$*

1.6 Lez - 06

1.6.1 Derivate parziali di una f composta di più variabili

Problema: Vogliamo determinare una formula generale che ci consente di calcolare le derivate parziali di una (generica) funzione composta di più variabili.

Esercizio 11 (7, foglio 3) *Consideriamo la funzione composta* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita come* $h := f \circ g$*, dove* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$*:*

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

se $(x,y) \neq (0,0)$ *e*
$g(t) = (g_1(t), g_2(t)) = (\sin^2(t), \cos^2(t))$, $t \in \mathbb{R}$ *Calcolare* $h'(t)$, $t \in \mathbb{R}$

Richiami della RDC

Siano $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ con $g(J) \subseteq I$, I, J intervalli aperti di $\mathbb{R}$.
$h := f \circ g$, $h(x) := f(g(x))$, $x \in I$

Proposizione 1.6.1 (Regola della catena, RDC) *Se* f, g *sono derivabli, rispettivamente, in* $g(x_0)$ *e in* x_0*, allora* $\exists h'(x) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

Esempio 7 $f(y) = \sin y$, $g(x) = x^2$, $h = f \circ g$, $h(x) = \sin x^2$, $\exists h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \cos x^2 \cdot 2x$

Prima di arrivare alla formula generale di derivazione di una funzione composta, introduciamo alcuni casi particolari

1.6.2 I caso particolare

Consideriamo $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, I intervallo aperto di $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ fissato.

$$I \ni t \to g(t) = (g_1(t), g_2(t)) = (x(t), y(t))$$

con $g_1, g_2 : I \to \mathbb{R}$.
Supponiamo che $\exists g_1'(t_0), g_2'(t_0)$ e $g(I) \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^2$, A aperto.
Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e supponiamo che f sia differenziabile in

$$p_0 = (x_0, y_0) = g(t_0) = (g_1(t_0), g_2(t_0))$$

Consideriamo la funzione composta $h : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h := f \circ g$

$$I \ni t \to h(t) := (f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(g_1(t), g_2(t))$$

Teorema 1.6.1

$$(1)\, \exists h'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) \cdot g_1'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \cdot g_2'(t_0)$$

oppure tramite matrici

$$(1bis)\, \exists h'(t_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cg_1'(t_0) \\ g_2'(t_0) \end{bmatrix} =$$

$= \nabla f(p_0) \cdot g'(t_0)$, *dove* $g'(t_0) = (g_1'(t_0), g_2(t_0))$.

Espansione calssica di RDC, Leibniz

Se scriviamo g e f, in termini di "variabili dipendenti", cioè

$$g = \begin{cases} x = x(t) = g_1(t) \\ y = y(t) = g_2(t) \end{cases} \quad \text{(curva del piano)}$$

$z = z(x, y) = f(x, y)$, allora componendo f con g, la variabile dipendente z dipenderà dalla sola variabile indipendente t per cui, $z = z(t) = z(x(t), y(t))$, $t \in I$.
Quindi in termini di queste variabili (z, x, y, t) si può scrivere la (1) come:

$$\frac{dz)}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

oppure utilizzando (1bis)

$$\frac{dz}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix}$$

***Dim.* 1.6.1 (Idea!)** *Proviamo la (1), cioè provare che*

$$(2)\, \exists h'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = \nabla f(p_0) \cdot g'(t_0)$$

Essendo f differenziabile in p_0 *vale che:*

$$(3)\, f(p) = f(p_0) + df(p_0) \cdot (p - p_0) + o(\|p - p_0\|)$$

$\forall p \in A$ *se* $p_0 = g(t_0)$.
Da (3) segue che, se scegliamo $p = g(t)$ *otteniamo:*

$$f(g(t)) = f(g(t_0)) + df(g(t_0)) \cdot (g(t) - g(t_0)) + o(\|g(t) - g(t_0)\|)$$

$\forall t \in I$, *da cui:*

$$(4)\, \frac{f(g(t)) - f(g(t_0))}{t - t_0} = \frac{df(g(t_0)) \cdot (g(t) - g(t_0))}{t - t_0} + \frac{o(\|g(t) - g(t_0)\|)}{t - t_0}$$

$t \in I, t \neq t_0$.
Osserviamo che essendo $df(p_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *lineare allora:*

$$(5)\ \frac{df(p_0)(g(t) - g(t_0))}{t - t_0} = df(p_0) \cdot \left(\frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} \right)$$

Passando al limite nella (5) per $t \to t_0$*, dalla continuità della funzione* $df(p_0)$*, si ottiene che:*

$$\lim_{t \to t_0} df(p_0) \left(\frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} \right) = df(p_0) \cdot g'(t_0)$$

$$(6)\ \exists \lim_{t \to t_0} \frac{df(p_0)(g(t) - g(t_0))}{t - t_0} = df(p_0) \cdot g'(t_0) = \nabla f(p_0) \cdot g'(t_0)$$

Si può provare anche (ed è il punto delicato che omettiamo)

$$(7)\ \exists \lim_{t \to t_0} \frac{o(\|g(t) - g(t_0)\|)}{t - t_0} = 0$$

Da (6) e (7), possiamo passare al limite per $t \to t_0$ *nella (4) ed otteniamo la (2) e dunque la tesi.*

1.6.3 II caso particolare

$g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, A aperto, e $p_0 = (s_0, t_0) \in A$

$$A \ni (s, t) \to g(s, t) = (g_1(s, t), g_2(s, t))$$

$g_1, g_2 : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Supponiamo che g_1 e g_2 siano differenziabili in p_0 e $g(A) \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, B aperto.
In particolare:

$$\exists \nabla g_i(p_0) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial s}(p_0), \frac{\partial g_i}{\partial t}(p_0) \right)\ i = 1, 2$$

Sia $f : B \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, B aperto, f differenziabile in $q_0 = (x_0, y_0) = (g_1(p_0), g_2(p_0))$, $B \ni (x, y) \to f(x, y) \in \mathbb{R}$.
Supponiamo che f sia differenziabile in q_0.
Consideriamo $h := f \circ g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$A \ni (s, t) \to (f \circ g)(s, t) = f(g(s, t)) = f(g_1(s, t), g_2(s, t))$$

Teorema 1.6.2

$$(1)\ \begin{array}{l} \exists \frac{\partial h}{\partial s}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(p_0)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial s}(p_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(p_0)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial s}(p_0) \\ \exists \frac{\partial h}{\partial t}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(p_0)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial t}(p_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(p_0)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial t}(p_0) \end{array}$$

in termini di matrici:

$$(1bis)\ \left[\frac{\partial h}{\partial s}(p_0) \quad \frac{\partial h}{\partial t}\right] = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(g(p_0)) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(g(p_0))\right] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial s}(p_0) & \frac{\partial g_1}{\partial t}(p_0) \\ \\ \frac{\partial g_2}{\partial s}(p_0) & \frac{\partial g_2}{\partial t}(p_0) \end{bmatrix}$$

Dove $\frac{\partial g_1}{\partial s}(p_0), \frac{\partial g_1}{\partial t}(p_0) = \nabla g_1(p_0)$ e $\frac{\partial g_2}{\partial s}(p_0), \frac{\partial g_2}{\partial t}(p_0) = \nabla g_2(p_0)$

Esercizio 12 *Utilizzare (1bis) del teorma nel secondo caso e svolgere esercizio 7 foglio 3*

1.6.4 Caso generale di RDC

Vogliamo ora trattare il caso generale della formuala di derivazione per funzioni composte di più variabili.

Matrice Jacobiana

Definizione 1.6.1 (Matrice Jacobiana) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A aperto,*

$$A \ni x = (x_1, ..., x_n) \to f(x) = (f(x_1), ..., f(x_n))$$

con $f_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$.
Supponiamo che dato $x_0 = (x_1^0, ..., x_n^0) \in A$,

$$\exists \nabla f_i(x_0) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\right)$$

con $i = 1, ..., m$.

Si chiama <u>Matrice Jacobiana</u> di f nel punto x_0 la matrice $m \times n$

$$Df(x_0) = Jf(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix}$$

Osservazione 1.6.3 *(i) La nozione di matrice Jacobiana generalizza la nozione di vettore gradiente per una funzione (scalare) $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.*
Si noti che in questo caso la matrice Jacobiana $1 \times n$ è data da

$$Df_(x_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right) \equiv \nabla f(x_0)$$

(ii) La riga i-esima della matrice Jacobiana $Df(x_0)$ coincide con $\nabla f_i(x_0)$

(iii) La (1bis) del precedente teorema, in termini di matrici Jacobiane può scriversi come

$$Dh(p_0) = Df(g(p_0)) \cdot Dg(p_0) \ (RDC)$$

1.6.5 Teorema RDC

Teorema 1.6.4 (Regola della catena, RDC) *Siano* $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *e* $f : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, *A e B aperti*

(i) $g(A) \subseteq B$

(ii) *Se* $g = (g_1, \ldots, g_m)$, $f = (f_1, \ldots, f_k)$
Supponiamo che $g_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,(i = 1, \ldots, m)$ *sia diff. in un dato* $x_0 \in A$
$f_i : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}\,(i = 1, \ldots, k)$ *sia diff. in un dato* $y_0 = g(x_0)$
Consideriamo ora la funzione $h := f \circ g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $h = (h_1, \ldots, h_k)$
con $h_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
allora le funzioni $h_i : A \to \mathbb{R}(i = 1, \ldots, k)$ *sono diff. in* x_0 *e*

$$Dh(x_0) = Df(g(x_0)) \cdot Dg(x_0)$$

1.7 Lez - 07

1.7.1 Derivate parziali di ordine superiore

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto. Supponiamo che $\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \to \mathbb{R}$ poniamo:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \end{array}\right\} \text{Derivate parziali seconde pure}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} := \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} := \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \end{array}\right\} \text{Derivate parziali seconde miste}$$

quando tutte le derivate parziali scritte esistono.

Osservazione 1.7.1 *In generale* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

1.7.2 Teo: Inversione dell'ordine di derivazione

Teorema 1.7.2 (sull'inversione dell'ordine di derivazione) *[BDPG, 11.11] Sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *A aperto,* $p_0 = (x_0, y_0) \in A$ *fissato. Supponiamo* $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : A \to \mathbb{R}$ *e siano continue in* p_0, *allora* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0)$

Il teorema precedente può estendersi al caso di funzioni $n \geq 2$ variabili.

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto. Supponimao che esiset $\frac{\partial f}{\partial x_i} : A \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$.
Se $\exists \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x_0)$ in un punto $x_0 \in A$ per $j = 1, \ldots, n$, diciamo che

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) := \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x_0)$$

Nel caso in cui $j = i \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x_0)$.
Con queste notazioni, vale la seguente generalizzazione del teorema sull'inversione dell'ordine di derivazione.

Teorema 1.7.3

1.7.3 Taylor per funzioni di più variabili

1.7.4 Taylor del II ordine + resto di Peano

Chapter 2

Esercitazioni

2.1 Lezione 1 - 09/03/2022

Esercizio 2.1.1 *Determinare e disegnare nel piano xy il dominio delle seguenti funzioni, $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dove A: dominio che dobbiamo determinare.*

$$f(x, y) = \log(4(x^2 + y^2) - 1)$$

Soluzione:

$$4(x^2 + y^2) - 1 > 0 \iff x^2 + y^2 > \frac{1}{4}$$

Studiamo quindi: $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ *la circonferenza di centro* $c = (0, 0)$ *e raggio* $r = \frac{1}{2}$,

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > \frac{1}{4}\} = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B((0, 0), \frac{1}{2})}$$

dove:

- $\overline{B((0, 0), \frac{1}{2})} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}\}$
- $B((0, 0), \frac{1}{2}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{1}{2}\}$

Insiemi aperti e chiusi
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}$, *A è chiuso* $\iff A^c$ *è aperto.*
Definiamo $\bar{A} = A$, $xy \geq 0 \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$ *Disegnando gli assi:*
$A^c = \mathbb{R}^2 \setminus A$ *è aperto. Fisso ora* $(x_0, y_0) \in A^c$, $r = d(\partial A, (x_0, y_0)) = \min |x_0|, |y_0|$.
La palla $B((x_0, y_0), \frac{r}{2}) \subset A^c \Rightarrow A^c$ *è aperto* $\Rightarrow A$ *è chiuso.*

Esercizio 2.1.2 $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^4}$, $y^2 \geq x^4$.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \geq x^4\}$$

Proviamo a scrivere $y^2 - x^4$ come

$$y^2 - x^4 = (y - x^2)(y + x^2) \geq 0$$

Due casi:

- $y \geq x^2$
- $y \geq -x^2$

(Dal grafico otteniamo)

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 \vee y \leq -x^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq -x^2\}$

Esercizio 2.1.3 *Disegnare l'insieme di livello delle seguenti funzioni*

$$C_t = \{(x, y \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = t)\}$$

con $t \in \mathbb{R}$.
$f(x, y) = x^2 y$, fissiamo $t \in \mathbb{R}$, $t = x^2 y$

1. $t = 0$, $x^2 y = 0 \Rightarrow y = 0 \vee x = 0$
2. $t > 0$, $t = x^2 y \iff y = \frac{t}{x^2}$
   - $t = 1$, $y = \frac{1}{x^2}$
   - $t = 2$, $y = \frac{2}{x^2}$
3. $t < 0$, $t = x^2 y \iff y = \frac{t}{x^2}$
   - $t = -1$, $y = -\frac{1}{x^2}$
   - $t = -2$, $y = -\frac{2}{x^2}$

Esercizio 2.1.4 $f(x, y) = ye^{-x}$, $t \in \mathbb{R}$, $t = ye^{-x} \iff e^x t = y$

- $t = 0 \Rightarrow y = 0$
- $t = 1 \Rightarrow y = e^{-x}$
- $t = 2 \Rightarrow y = 2e^{-x}$
- $t = -1 \Rightarrow y = -e^{-x}$
- $t = -2 \Rightarrow y = -2e^{-x}$

Esercizio 2.1.5

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x - y}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} =?$$

eleviamo x e y al numeratore per $\frac{3}{3}$, otteniamo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(\sqrt[3]{x})^3 - (\sqrt[3]{y})^3}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}$$

Ricordiamo ora la differenza tra cubi $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$, otteniamo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})\left((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + (\sqrt[3]{y})^2\right)}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} =$$

$$= \lim_{(x,y\to(0,0))} (\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + (\sqrt[3]{y})^2 = 0$$

Esercizio 2.1.6

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} =?$$

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \iff$ *per ogni restrizione a un sottoinsieme B,* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f|_B(x,y) = l$

- $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx\}$, $\lim \frac{x^2 y}{x^4+y^2}|_B = \lim \frac{x^2 mx}{x^4 + m^2x^2} =$

$$= \frac{x^3 m}{x^2(x^2+m^2)} = x\left(\frac{m}{x^2+m^2}\right) = \lim_{x\to 0} x\left(\frac{m}{x^2+m^2}\right) = 0$$

- $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx^2\}$, $\lim \frac{x^2 y}{x^4+y^2}|_B =$

  $$\lim_{x\to 0} \frac{mx^4}{x^4 + m^2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+m^2}$$

  Proviamo due valori di m:

  - $m = 1$, $\frac{1}{2}$
  - $m = 2$, $\frac{2}{5}$

  Ho trovato due restrizioni $\{y = x^2\}$ e $\{y = 2x^2\}$ dove il limite assume due valori distinti. Allora per l'unicità del limite, il limite non esiste.

Esercizio 2.1.7

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

Coordinate polari
$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\vartheta = arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

- $x = \rho\cos\vartheta$
- $y = \rho\sin\vartheta$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\rho^2\cos^2\vartheta \cdot \rho\sin\vartheta}{\rho^2\cos^2\vartheta + \rho^2\sin^2\vartheta} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\rho^3\cos^2\vartheta \cdot \sin\vartheta}{\rho^2\left(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\right)}$$

Sappiamo che $\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta = 1$*, quindi il limite rimane:*

$$\lim \rho\cos^2\vartheta \cdot \sin\vartheta$$

$$0 \leq |\rho\cos^2\vartheta \cdot \sin\vartheta| < \rho$$

Da cui se $(x, y) \to (0, 0)$ *allora anche* $\rho \to 0$ *e siccome* $\begin{cases} \cos^2\vartheta < 1 \\ \sin\vartheta < 1 \end{cases}$*, grazie al* ***teorema del confronto*** *il limite vale 0.*

Esercizio 2.1.8 *Dire quali insiemi sono aperti/chiusi e quali limitati, inoltre determinare la frontiera.*

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (xy)(y-1) \geq 0\}$$

- $x \geq 0$
- $y \geq 0$
- $y - 1 \geq 0$, $y \geq 1$

Frontiera: $\partial H = \{y = 1\} \cup \{x = 0\} \cup \{y = 0\}$

2.2 Esercitazione 2 - 23/03/2022

Esercizio 2.2.1 *(a)*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(e^{xy^2}-1)\log(1+x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\sin(xy)}$$

Ricordiamo che:

- $\frac{\log(1+t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$
- $\frac{e^t-1}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$
- $\frac{\sin(t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$

Grazie a ciò il nostro limite diventa:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy^2}-1}{xy^2} \cdot \frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} \cdot \frac{xy}{\sin(xy)} \cdot y$$

(i) *Definiamo* $t = x^2+y^2 \to 0$ *per* $(x,y)\to(0,0)$,

$$\frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{\log(1+t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$$

(ii) *Definiamo* $t = xy \to 0$ *per* $(x,y)\to(0,0)$,

$$\frac{xy}{\sin(xy)} = \frac{t}{\sin(t)} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$$

(iii) *Definiamo* $t = xy^2 \to 0$ *per* $(x,y)\to(0,0)$,

$$\frac{e^{xy^2}-1}{xy^2} = \frac{e^t-1}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$$

$$= 1 \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$$

(c)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{\log(1+x^2+y^2)}$$

Ricordiamo che:

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$$

Allora il limite diventa:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{(xy)^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{\log(1+x^2+y^2)} \cdot \frac{(xy)^2}{x^2+y^2}$$

(i) $t = xy \to 0$ *per* $(x,y) \to (0,0)$

$$\frac{1-\cos(xy)}{(xy)^2} = \frac{1-\cos(t)}{t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{2}$$

(ii) Per (i) dell'esercizio (a) si ha:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} =?$$

Passiamo alle coordinate polari: $\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}$

$$0 \leq \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2+y^2} = \frac{\rho^4 \cdot \cos^2\vartheta \cdot \sin^2\vartheta}{\rho^2\left(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\right)} \leq \rho^2$$

Per $\rho \to 0$ *tutto* $0 \to 0$ *e* $\rho^2 \to 0$*, quindi anche il limite tende a zero per il teorema del confronto.*
Consideriamo il caso in cui $x = 0$ *o* $y = 0$

- *Vediamo* $x = 0$,

  $$\lim_{y\to 0} \frac{1-\cos(0)}{log(1+y^2)} = \left[\frac{0}{0}\right]_{F.IND.} = \lim_{y\to 0} 1-\cos(0) \cdot \frac{y^2}{\log(1+y^2)} \cdot \frac{1}{y^2} = 0$$

- *Vediamo* $y = 0$,

  $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(0)}{log(1+x^2)} = \left[\frac{0}{0}\right]_{F.IND.} = \lim_{y\to 0} 1-\cos(0) \cdot \frac{x^2}{\log(1+x^2)} \cdot \frac{1}{x^2} = 0$$

(e)

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,1)} \frac{xy(z-1)}{x^2+y^2+(z-1)^2}$$

- ***Primo metodo***

  $$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \\ t = z-1 \xrightarrow[z\to 1]{} t \to 0 \end{cases}$$

  $$0 \leq \left|\frac{\rho\cos\vartheta \cdot \rho\sin\vartheta \cdot t}{\rho^2\left(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\right) + t^2}\right| \leq \left|\frac{\rho^2 \cdot t}{\rho^2+t^2}\right| \leq 1 \cdot t$$

  $$\left(\frac{\rho^2}{\rho^2+t^2} \leq 1 \iff \rho^2 \leq \rho^2 + t^2 \iff t^2 \geq 0 \Rightarrow \textit{ sempre}\right)$$

  Quindi per $t \to 0$, $0 \to 0$ *e* $t \to 0$*, quindi per il teorema del confronto il limite*

  $$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,1)} \frac{xy(z-1)}{x^2+y^2+(z-1)^2} = 0$$

- ***Secondo metodo:*** $t = z - 1 \xrightarrow{z\to 1} 0$
  $\lim_{(x,y,t)\to(0,0,0)} \frac{xyt}{x^2+y^2+t^2}$

$$0 \leq \left|\frac{xyt}{x^2+y^2+t^2}\right| \leq^{?} \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2+t^2}\right)^3}{x^2+y^2+t^2} = \sqrt{x^2+y^2+t^2}$$

In particolare si ha $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2+t^2} \Rightarrow x^2 \leq x^2+y^2+t^2 \iff y^2+t^2 \geq 0$, *lo stesso vale per* $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2+t^2}$ *e* $|t| \leq \sqrt{x^2+y^2+t^2}$, *quindi otteniamo:*

$$0 \leq \left|\frac{xyt}{x^2+y^2+t^2}\right| \leq \sqrt{x^2+y^2+t^2}$$

Che tende a 0 per $(x,y,t) \to (0,0,0)$, *quindi grazie al teorema del confronto il limite vale 0*

Esercizio 2.2.2 *Data* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$f(x,y) = \begin{cases} g(x,y) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a)

$$g(x,y) = \frac{x\sin(x^2y)}{x^2+y^2}\ \forall (x,y) \neq (0,0)$$

La funzione f, che coincide con g $\forall (x,y) \neq (0,0)$, *è* ***continua*** $\forall (x,y) \neq (0,0)$ *perchè è* ***composizione*** *e* ***prodotto*** *di funzioni continue (Teorema). Dobbiamo quindi vedere il comportamento della funzione in* $(0,0)$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$$

cioè

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin(x^2y)}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2y}{x^2y}$$

per $x \neq 0$ *e* $y \neq 0$.

(i) $t = x^2y \to 0$ *per* $(x,y) \to (0,0)$, $\frac{\sin(t)}{t} \to 1$

$$= 1 \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^2+y^2} = 1 \cdot 0 = 0$$

Verifichiamolo tramite le coordinate polari.
$x = \rho\cos\vartheta$
$y = \rho\sin\vartheta$

$$0 \leq \left|\frac{x^3y}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{\rho^4 \cdot \cos^3\vartheta\sin\vartheta}{\rho^2\left(\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta\right)}\right| \leq \rho^2$$

Quindi per $\rho \to 0$ anche il limite vale 0 grazie al teorema del confronto.
Abbiamo verificato che il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, *quindi la funzione f è continua.*
Controlliamo ora:

- $y = 0$ *e* $x \neq 0$, $\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot 0}{x^2} = 0$
- $y \neq 0$ *e* $x = 0$, $\lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0$

b)

$$g(x,y) = \frac{\sin(2xy)}{e^{x^2+y^2} - 1}$$

Dobbiamo studiarne il comportamento in $(0,0)$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2 \cdot \frac{\sin(2xy)}{2xy} \cdot \frac{xy}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{e^{x^2+^2}}$$

(i) $t = 2xy$, $\frac{\sin(t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$ *per* $(x,y) \to (0,0)$

(ii) $t = x^2 + y^2 \to 0$ *per* $(x,y) \to (0,0)$, $\frac{t}{e^t - 1} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$

- *Proviamo con le coordinate polari:* $\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{\rho^2 \sin\vartheta\cos\vartheta}{\rho^2} \Rightarrow \sin\vartheta\cos\vartheta$$

Quindi non va bene, allora proviamo a prendere una restrizione del dominio.

- $y = mx$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 m}{x^2(m^2+1)} \to \frac{m}{m^2+1}$$

Ottenimao due rislutati diversi, $\big((m = 1, \lim = \frac{1}{2}), (m = 2, \lim = \frac{2}{5})\big)$, *quindi ho trovare due restrizioni dove il limite è diverso, perciò* $\nexists \lim$.

Esercizio 2.2.3 *Calcolare il gradiente delle seguenti funzioni:*

1. $f(x,y) = \sin(x,y)$, $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)\right)$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(xy) \cdot \frac{\partial(xy)}{\partial x} = \cos(xy) \cdot y$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(xy) \cdot \frac{\partial(xy)}{\partial y} = \cos(xy) \cdot x$

$\nabla f(x,y) = (y\cos(xy), x\cos(xy)) = \cos(xy) \cdot (y,x)$.
Calcolare la derivata direzionale rispetto al vettore $v = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) = \langle \nabla f(x,y), v\rangle = \frac{\cos(xy)}{\sqrt{3}} \left\langle (y,x), (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \right\rangle =$$

$$= \frac{\cos(xy)}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{y}{2} + \frac{3x}{2}\right) = \frac{\cos(xy)}{2\sqrt{3}}(3x - y)$$

Calcoliamo il piano tangente nei punti $(0, 0, f(0, 0))$ *e* $(1, 2, f(1, 2))$, *ricrodiamo la formula del piano:*

$$z = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x, y) - (x_0, y_0) \rangle$$

Cerchiamo ora i valori:

- $f(x, y) = \sin(xy)$, $f(0, 0) = 0$
- $\nabla f(x, y) = \cos(xy)(y, x)$, $\nabla f(0, 0) = 1 \cdot (0, 0) = 0$

Quindi $z = 0 + 0 \Rightarrow$ *il piano tangente è* $z = 0$.
Chi è il normale?
$n = (0, 0, 1)$, $(x_0, y_0) = (1, 2)$

- $f(x, y) = \sin(xy)$, $f(1, 2) = \sin(2)$
- $\nabla f(x, y) = \cos(xy)(y, x)$, $\nabla f(1, 2) = \cos(2) \cdot (2, 1)$

$z = \sin(2) + \langle \cos(2) \cdot (2, 1), (x - 1, y - 2) \rangle = \sin(2) + \cos(2) \cdot (2x + y - 4)$