Analisi Matematica 2

Enrico Favretto

28/02/2022

Contents

Chapter 1

Funzioni a più variabili, [BDPG, 10]

1.1 Lez - 01

Studieremo funzioni a più variabili reali a valori scalari e vettoriali, cioè $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ con $n, k \in InsN$ e $n \geq 1, k \geq 1$.
Se $k = 1, n \geq 2$, f si dice funzione di più variabili a valori scalari;
Se $k \geq 1, n \geq 1$, f si dice funzione di più variabili a valori vettoriali.

Incominciamo a trattare il caso in cui $n = 2, 3$ e $k = 1$.

MOTIVAZIONE: I fenomenti in Fisica/Ingegneria sono modelizzati da funzioni che dipendono da due/tre variabili.

Esempio 1

1. *La funzione temperatura di una piastra piana $A \subseteq \mathbb{R}^2$.*
   La funzione temperatura della piastra A può essere modelizzata da una funzione
   $$T : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty] \subseteq \mathbb{R}$$
   $$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$
2. *La funzione distanza dall'origine in $\mathbb{R}^3$,*
   $$f : \mathbb{R}^3 \to [0, +\infty]$$
   $$f(p) := d(O, p) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
   $$\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

1.1.1 Grafico di una funzione scalare di più variabili

Ricordiamo che nel caso di una funzione scalare da una variabile $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($y = f(x)$, $x \in A$), A intervallo di $\mathbb{R}$.

$$G_f := \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Se $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ($z = f(x, y)$, $(x, y) \in A$)

$$G_f := \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ($t = f(x, y, z)$, $(x, y, z) \in A$)

$$G_f := \{(x, y, z, f(x, y, z)) \mid (x, y, z) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

Disegnare G_f in $\mathbb{R}^4$? Non può essere facilmente studiato, il grafico è una ipersuperficie di $\mathbb{R}^4$

1.1.2 Curve di livello di una funzione di più variabili

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, fissato $t \in \mathbb{R}$,

$$C_t := \{(x, y) \in A \mid f(x, y) = t\}$$

(è un insieme di tipo "curva" contenuto in A)

Esempio 2 *$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := x - y$, (z = x-y) $x - y - z = 0$,*

$$((1, -1, -1), (x, y, z)) = 0$$

$$C_t := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = t\}$$

fascio di rette parallele al variare di t

$$G_f := \{(x, y, x - y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

piano di $\mathbb{R}^3$ contenente la retta r e ortogonale al vettore (1,-1,-1)

$$r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$$

Più in generale se $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $C_t := \{(x, y, z) \in A \mid f(x, y, z) = t\}$ è un insieme di tipo "superficie".

Esercizio 1 *Studiare le curve di livello della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$.*

$$C_t := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = t\}$$

- *C_t è la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio $\sqrt{t}$, se $t \geq 0$*
- *C_t è vuoto ($\emptyset$), se $t < 0$*

1.1.3 Limiti e continuità per funzioni di più variabili

Problema: Data $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, fissato $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ introdurre la definizione

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

Ricordiamo la definizione di limite per funzioni reali di una variabile, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in [a,b]$ $lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \iff (def.)$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = d(x_0, \varepsilon) > 0 \mid |f(x) - L| < \varepsilon$$

$\forall x \in (a,b) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0$, $lim_{x\to a^+} f(x) = L, lim_{x\to b^-} f(x) = L$

$$B(x_0, \delta) := (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \delta\}$$

intorno sferico di centro x_0 *e reaggio* $\delta > 0$

Idea per l'introduzione di limite per funzioni di $n = 2$ varaibili

Generalizzazione:

1. La definizione di intorno di centro x_0 e raggio $r > 0$ a $\mathbb{R}^2$
2. La nozione di intervallo apero e chiuso a $\mathbb{R}^2$, come pure la nozione di punto estremo di un intervallo.

1.2 Lez - 02

Definizione 1.2.1 (Distanza Euclidea in $\mathbb{R}^2$) *Si chiama distanza euclidea di $\mathbb{R}^2$ (o nel piano) la funzione, $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty)$:*

$$d(p, q) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$p = (x_1, y_1)$, $q = (x_2, y_2)$

Definizione 1.2.2 *Si chiama intorno (sferico) di centro $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e raggio $r > 0$ (o anche palla aperta di centro p_0 e raggio $r > 0$), l'insieme:*

$$B_r(p_0) = B(p_0, r) := \{p \in \mathbb{R}^2 \mid d(p, p_0) < r\} =$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$$

Definizione 1.2.3 *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$*

1. *Un punto $p_0 \in \mathbb{R}^2$ si dice punto di frontiera di A se*

   $$B(p_0, r) \cap A \neq \varnothing \text{ e } B(p_0, r) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus A) \neq \varnothing, \forall r > 0$$

   L'insieme di tutti i punti di frontiera di A è detto frontiera di A e di denota ∂A

2. *L'insieme A è detto chiuso se ogni punto di frontiera di A appartiene ad A*

3. *L'insieme A è detto aperto se non contiene alcun punto della sua frontiera*

4. *L'insieme di tutti i punti di A che non sono di frontiera si chiama parte interna di A e si denota con $\mathring{A}$*

5. *L'insieme A è detto limitato se $\exists R_0 > 0$ t.c. $A \subseteq B(O, R_0)$*

Esempio 3 1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, *allora*

   - $\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
   - $\mathring{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$

2. $A = \mathbb{R}^2$, $\partial A = \varnothing$, $\mathring{A} = A = \mathbb{R}^2$

Definizione 1.2.4 *Dato $A \subseteq \mathbb{R}^2$*

1. *$p_0 \in \mathbb{R}^2$ si dice punto di accomulazione per A se*

   $$B(p_0, r) \cap (A \setminus \{p_0\}) \neq \varnothing, \forall r > 0$$

2. *$p_0 \in A$ si dice punto isolato di A se p_0 non è un punto di accomulazione, cioè se:*

   $$\exists r_0 > 0 \mid B(p_0, r_0) \cap A = \{p_0\}$$

Definizione 1.2.5 (Limite di funzioni di due variabili) *Sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e sia* $p_0 \in \mathbb{R}^2$ *punto di accomulazione per* A. *Si dice che:*

$$\exists lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \in \mathbb{R}$$

oppure $\exists \lim_{p\to p_0} f(p) = L$ *se*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = d(p_0, \varepsilon) > 0 \mid |f(x,y) - L| < \varepsilon, \forall (x,y) \in B(p, \delta) \cap (A \setminus \{p_0\})$$

Osservazione 1.2.1 *Tenendo presente il caso di funzioni di una variabile, si può enunciare anche la definizione nel caso in cui* $L = \pm\infty$

1.2.1 Calcolo dei limiti

Proposizione 1.2.1 (Unicità del limite) *Sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e sia* $p_0 \in \mathbb{R}^2$ *punto di accomulazione per* A. *Supponiamo che* $\exists lim_{p\to p_0} f(p) = L \in \mathbb{R}$. *Allora* L *è* <u>*unico*</u>.

Teorema 1.2.2 (Tecniche per il calcolo dei limiti) *Siano* $g, f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p_0 \in \mathbb{R}^2$ *punto di accomulazione per* A. *Supponiamo che* $\exists \lim_{p\to p_0} f(p) = L \in \mathbb{R}$ *e* $\exists \lim_{p\to p_0} g(p) = M \in \mathbb{R}$, *allora:*

1. $\exists \lim_{p\to p_0} f(p) + g(p) = L + M$
2. $\exists \lim_{p\to p_0} f(p) \cdot g(p) = L \cdot M$
3. *Se* $g(p) \neq 0, \forall p \in A \setminus \{p_0\}$ *e* $M \neq 0$, *allora* $\exists \lim_{p\to p_0} \frac{f(p)}{g(p)} = \frac{L}{M}$
4. *Sia* $F : \mathbb{R} to \mathbb{R}$ *continua e sia* $h(p) = F(f(p))$, *allora* $\exists \lim_{p\to p_0} h(p) = F(L)$
5. ***Teorema del confronto***: *Sia* $h, g, f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *supponiamo che:*

   5.1 $f(p) \leq g(p) \leq h(p)$, $\forall p \in A \setminus \{p_0\}$

   5.2 $\exists \lim_{p\to p_0} f(p) = \lim_{p\to p\to p_0} h(p) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

   allora $\exists \lim_{p\to p_0} g(p) = L$

***Dim.* 1** *Le dimostrazioni di 1-4 sono lasciate al lettore :)*

5 *Supponiamo che* $L \in \mathbb{R}$, *dobbiamo provare che* $\exists \lim_{p\to p_0} g(p) = L$, *cioè per definizione:*

   1* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta (= \delta(p_0, \varepsilon)) > 0$ *t.c.* $|g(p) - L| < \varepsilon$ $\forall p \in B(p_0, \delta) \cap (A \setminus \{p_0\})$. *Per ipotesi sappiamo che*

$$\lim_{p\to p_0} f(p) = L, \lim_{p\to p_0} h(p) = L$$

   cioè :

   2* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 (= \delta_1(p_0, \varepsilon)) > 0$ *t.c.* $|f(p) - L| < \varepsilon$ *o equivalentemente* $L - \varepsilon < f(p) < L + \varepsilon$ $\forall p \in B(p_0, \delta_1) \cap (A \setminus \{p_0\})$, *e:*

*3** $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta_2\,(=\delta_2(p_0,\varepsilon)) > 0$ *t.c.* $|h(p) - L| < \varepsilon$ *o equivalentemente* $L - \varepsilon < h(p) < L + \varepsilon \;\forall p \in B(p_0, \delta_2) \cap (A \setminus \{p_0\})$

Da (5.1),(2),(3*) segue che* $\forall\varepsilon > 0$, *scegliendo* $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ *vale che*

$$L - \varepsilon < f(p) \leq g(p) \leq h(p) < L + \varepsilon$$

$\forall p \in B(p_0, \delta) \cap (A \setminus \{p_0\})$ *e dunque vale la (1*).*

Introduciamo un altro strumento importante per il calcolo dei limiti per funzioni di due variabili.
Ricordiamo che data $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $B \subseteq A$ si chiama <u>funzione restrizione</u> $f|_B\colon B \to \mathbb{R}$, $f|_B(x) := f(x)$ se $x \in B$.

Teorema 1.2.3 (Limite lungo direzioni) *Siano* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $p_0 \in \mathbb{R}^2$ *punto di accomulazione, allora sono equivalenti*

1. $\exists \lim_{p\to p_0} f(p) = L$
2. *Per ogni sottoinsieme* $B \subseteq A$, *per cui* p_0 *è un punto di accomulazione per* B, $\exists \lim_{p\to p_0} f|_B(p) = L$

Un insieme $B \subseteq A$ può essere visto come una direzione lungo cui $p \to p_0$.

Osservazione 1.2.4 *Il teorema precedente risulta efficace <u>solo</u> per provare che il limite <u>non</u> esiste.*

1.2.2 Esempi calcolo limiti

Esercizio 2 *1. Calcola, se esiste,* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$

Dim. 2 *Nel calcolo del limite bisogna valutare:*

- *Esistenza (il limite può non esistere)*
- *Tecninche appropriate per il calcolo*

Utilizziamo il punto (4) del primo teorema.
Ricordiamo anche il limite notevole $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$
Denotiamo:

- $h(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ *se* $(x,y) \in A = (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$
- $t = x^2 + y^2$
- *Sia* $p_0 = (0,0)$ *punto di accomulazione per A.*

Osserviamo che $h(x,y) = F(f(x,y))$, *dove* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F := \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

è continua, e $f(x,y) = x^2 + y^2 \;\; (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Poichè $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, *dal punto (4)*

$$\exists \lim_{p\to p_0} h(p) = \lim_{p\to p_0} F(f(p)) = F(0) = 1$$

2. Calcola se esite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

Dim. 3 *Sia*

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$\forall (x,y) \in A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *e* $p_0 = (0,0)$.
Utilizziamo il teorema per provare che il limite non esiste.
Infatti se

$$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$$

allora
(1)* $\exists \lim_{x\to 0} f(x,mx) = L$, $\forall m \in R$
dove $y = mx$, $B = \{y = mx\}$ *(direzionale) e* m *è finito.*
<u>Osserviamo</u> che $f(x,mx) = \frac{mx^2}{(m^2+1)x^2} = \frac{m}{m^2+1}$ *se* $x \neq 0$, *quindi*

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \frac{m}{m^2+1}$$

ma se $m = 0, 1$ *il limite prende valore* $0, \frac{1}{2}$ $(0 \neq \frac{1}{2})$,
dunque non può valere (1), quindi il limite <u>non esiste</u>*

Dalla definizione di limite per funzioni di due variabili segue subito la nozione di continuità .

Esercizio 3 *Calcolare se esiste*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

Sugg: Provare che $\nexists$

1.3 Lez - 03

1.3.1 Definizioni limiti e continuità per $\mathbb{R}^n$

Definizione 1.3.1 *Sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1. f *si dice continua in* $p_0 \in A$ *se*
   (a) p_0 *è un punto* *isolato* *di* A*, oppure*
   (b) p_0 *è un punto di accomulazione ed* $\exists \lim_{p \to p_0} f(p) = f(p_0)$
2. f *si dice* *continua* *su* A *se* f *è continua in ogni punto* $p_0 \in A$

Le nozioni di limite e continuità , introdotte per funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, si possono estendere al caso di funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $n \geq 3$.
Più precisamente su $\mathbb{R}^n$ possiamo definire la distanza Euclidea:

$$d(p, q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$$

se $p = (x_1, ..., x_n)$ e $q = (y_1, ..., y_n)$.

Intorno di centro $p_0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ e $r > 0$ è l'insieme:

$$B(p_0, r) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid d(p, p_0) < r\}$$

$$= \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1 - x_1^0)^2 + ... + (x_n - x_n^0)^2 < r^2\}$$

Tramite la nozione di intorni, si possono estendere a $\mathbb{R}^n$ la nozione di:

- frontiera di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- insieme aperto/chiuso $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- insieme limitato $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- punto di accomulazione/isolato di $A \subseteq \mathbb{R}^n$

Pertanto:

Definizione 1.3.2 *Sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *e sia* $p_0 \in \mathbb{R}^n$ *punto di accomulazione di* A*. Allora si dice che:*

$$\exists \lim_{p \to p_0} f(p) = L \in \mathbb{R}$$

se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(p, \varepsilon) > 0 \ t.c. \ |f(p) - L| < \varepsilon, \forall p \in B(p_0, \delta) \cap (A \setminus \{p_0\})$$

In modo simile si può introdurre la nozione di continuità per funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

1.3.2 Calcolo differenziale per funzioni a più variabili

Derivate parziali

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto, $p_0 = (x_0, y_0) \in A$, essendo A aperto, $\exists \delta_0 > 0$ t.c.

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta] \subset A$$

In particolare i segmenti:

- $(x, y_0) \in A \ \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$
- $(x_0, y) \in A \ \forall y \in [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$

Pertanto son ben definiti i rapporti incrementali

- $((x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\}) \ni x \to \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$
- $((y_d 0 - \delta_0, y_0 + \delta_0) \setminus \{y_0\}) \ni y \to \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$

Definizione 1.3.3 *1. Si dice che f è derivabile(parzialmente) rispetto alla variabile x nel punto $p_0 = (x_0, y_0)$ se*

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} := \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$$

2. Si dice che f è derivabile(parzialmente) rispetto alla variabile y nel punto $p_0 = (x_0, y_0)$ se

$$\exists \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} := \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = D_2 f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$$

3. Se f è derivabile (parzialmente) sia rispetto ad x ed y nel punto $p_0 = (x_0, y_0)$, si chiama (vettore)gradiente di f in p_0 il vettore:

$$\nabla f(p_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)\right) \in \mathbb{R}^2$$

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A insieme aperto. Supponiamo che:

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \to \mathbb{R}$$

allora è ben definito il campo dei vettori gradiente:

$$\nabla f : \mathbb{R}^2 \supseteq A \ni p \to \nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p)\right) \in \mathbb{R}^2$$

Applicazione: Sia $V : A \to \mathbb{R}$ il potenziale di una carica elettrica in un insieme A del piano. Allora vale la realzione $\nabla V = \underline{E}$, dove $\underline{E} := (E_1(x,y), E_2(x,y)) \to$ vettore campo elettrico.

Problema: $\exists \nabla f(p_0)$ è la nozione corretta di derivabilità per funzioni di due variabili? Per esempio se $\exists \nabla f(p_0) \Rightarrow$ f è continua in p_0?

Esempio 4 *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p_0 = (0,0)$ *e*

$$f(x,y) := \begin{cases} 0 & \textit{se } (x,y) = (0,0) \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & \textit{se } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Abbiamo visto che: $\nexists \lim_{p \to p_0} f(p) \Rightarrow f$ *non è continua in* p_0.
D'altra parte:

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$$

se $x \neq 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

$$\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0$$

se $y \neq 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
Pertanto $\exists \nabla f(0,0) = (0,0)$ *ma f non è continua nel punto (0,0).*

1.3.3 Piano tangente al grafico

Approssimazione lineare e nozione di differenziabilità per funzioni di più variabili.

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $z = f(x,y)$.

Problema: Definire il "piano tangente" alla "superficie" G_f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ se esiste.
Ricordiamo che l'equazione di un piano π di $\mathbb{R}^3$, non parallelo all'asse z, passante per il punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è del tipo

$$\pi : z = a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$.
Ricordiamo inoltre che per funzioni di $n = 1$ variabile, se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, la retta tangente r a G_f nel punto $(x_0, f(x_0))$ ha equazione:

$$r : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

ed è caratterizzata dalla proprietà di essere l'unica retta del fascio di rette $y = m(x - x_0) + f(x_0)$, $m \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\text{(D)}\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [m(x - x_0) + f(x_0)]}{|x - x_0|} = 0$$

(miglior approssimazione lineare al primo ordine) Infatti: $n = 1$, $L(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$ sono le applicazioni lineari di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$

Esercizio 4 $\exists f'(x_0) \in \mathbb{R} \iff \exists m \in \mathbb{R}$ *t.c. vale (D), inoltre* $m = f'(x_0)$.
Sugg: Utilizzare (D) nel caso di funzioni di due variabili per definire il paino tangente.
Più precisamente, data $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *con A aperto, sia* $p_0 = (x_0, y_0) \in A$. *Suppponimao che esistono* $a, b \in \mathbb{R}$ *t.c.*

$$\text{(D)}\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x) - [a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0)]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

Allora se vale (D:)

Definizione 1.3.4

1. *il piano* $\pi : z = a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0, y_0)$ *si dice piano tangente al grafico* G_f *nel punto* $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$
2. f *si dice differenziabile nel punto* $p_0 = (x_0, y_0)$ *proveremo che:*
   (a) *Se f è differenziabile in* $p_0 \in A \Rightarrow f$ *è continua*
   (b) *Se f è differenziale in* $p_0 \in A$, *allora*

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \exists \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$$

Esercizio 5 $!\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 0$? *NO.*

1.4 Lez - 04

Piano tangente al grafico G_f in un punto $(x_0, y_o, f(x_0, y_0))$, per una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è un piano π di equazione $z = a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0, y_0)$ dove $p_0 = (x_0, y_0) \in A$, verificante la seguente equazione:

$$\text{(D)}\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x) - [a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0)]}{d(p, p_0)}$$

dove $d(p, p_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

Definizione 1.4.1 *Dato $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e dato $p_0 = (x_0, y_0) \in A$, la funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si dice differenziabile nel punto p_0 se vale (D), per $a, b \in \mathbb{R}$ opportuni.*

Proposizione 1.4.1 *Se f è differenziabile nel punto $p_0 = (x_0, y_0)$, allora*

$$\exists \nabla f(p_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \right)$$

e

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0), b = \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$$

Dim. 4 *Supponiamo che f sia differenziabile in p_0, cioè che valga (D). Ponendo nella (D), $y = y_0$ otteniamo che:*

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x, y_0)\,[a(x - x_0) + f(x_0, y_0)]}{|x - x_0|} = 0$$

$$\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) = a$$

procediamo allo stesso modo, ponendo $x = x_0$ nella (D) e otteniamo $\frac{\partial f}{\partial y}(p_0) = b$

Definizione 1.4.2 *L'applcazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,*

$$L(x, y) := \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)y$$

si chima differenziale di f in p_0, si denota con:

$$L = df(p_0) := \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)dy$$

Definizione 1.4.3 (Piano tangente) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto con f differenziabile in p_0. Si chiama piano tangente al grafico G_f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ il piano π di equazione:*

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

Teorema 1.4.1 *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto, f differenziabile in $p_0 \in A$, allora f è continua in p_0*

Dim. 5

$$f(p) - f(p_0) = \frac{f(p) - f(p_0) - df(p_0)(p - p_0)}{d(p, p_0)} \cdot d(p, p_0) + df(p_0)(p - p_0) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)(y - y_0)$$

Il tutto tende a 0 per $p \to p_0$.

$$\Rightarrow \exists \lim_{p \to p_0} (f(p) - f(p_0)) = 0$$

1.4.1 Differenziabilità in $n \geq 3$

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, $p_0 \in A$, $p = (x_1, ..., x_n)$, $p_0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ possiamo definire

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(p_0 + he_i) - f(p_0)}{h}$$

dove $i = 1, ..., n$, $e_i, ..., e_n$ denota la base canonica di $\mathbb{R}^n$, cioè $e_i = (0, 0, ..., 0, 1_{\text{i-esimo elemento}}, 0, 0, ..., 0)$
Diremo che

$$\exists \nabla f(p_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_0) \right)$$

gradiente di f in p_0, se $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)$, $\forall i = 1, ..., n$

Definizione 1.4.4 *f si dice differenziabile in un punto $p_0 \in A$ se esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ t.c.*

$$(D) \exists \lim_{p \to p_0} \frac{f(p) - f(p_0) - L(p - p_0)}{d(p.p_0)} = 0$$

L'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ per cui valga (D) si denota con $L = df(p_0)$

Proposizione 1.4.2 (11.4) *Se f è differenziabile nel punto p_0 allora*

i $\exists \nabla df(p_0)$

ii

$$df(p_0)(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) v_i := \nabla f(p_0) \cdot v$$

se $v = (v_1, ..., v_n)$

Osservazione 1.4.2 *Se $v = e_i$, $\nabla f(p_0) \cdot e_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)$*

Notazione 1.4.3 $df(p_0) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) dx_i$

Osservazione 1.4.4 *Dalla definizione di differenziabilità nel caso $n = 1$, segue che, se $A = (a, b)$, $x_0 \in A$, allora* ***Esercizio 1.5, foglio 2:***

$$\exists f'(x_0) \iff f \text{ è differenziabile in } x_0$$

Esercizio 6 (1b, foglio 2) *Calcolare se esiste*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 - e^{xy^2}}{\sqrt{x^4 + y^4}}$$

Dim. 6 *Ricordiamo che (1)* $\exists \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$.
Utilizzando il precedente limite possiamo eseguire il seguente bilanciamento:

$$\frac{1 - e^{xy^2}}{xy^2} \cdot \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^4}}$$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, *con* $xy^2 \neq 0$. *Osserviamo che:*

(2)

$$\frac{1 - e^{xy^2}}{\sqrt{x^4 + y^4}} = 0$$

Se $xy^2 \neq 0$ *e* $(x, y) \neq (0, 0)$

(3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-e^{xy^2}}{xy^2} = 1$.
Rimane da calcolare, se esiste:

(4) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^4}}$

è molto utile, per studiare limite del tipo (4) fare un cambiamento di variabili ed utilizzare le coordinate polari:

Coordinate polari

Consideraimo il seguente cambiameto di variabili $\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}$ *con* $\rho > 0$ *e* $0 \leq \vartheta \leq \pi$, *quindi:*

$$\frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^4}} \to \frac{\rho\cdot\cos\vartheta\cdot\rho^2\sin^2\vartheta}{\sqrt{\rho^4\left(\cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta\right)}} = \rho\cdot\frac{\cos\vartheta\cdot\sin^2\vartheta}{\sqrt{\left(\cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta\right)}}$$

Dalla (2) sappiamo che se $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-e^{xy^2}}{\sqrt{x^4+y^4}} = L \Rightarrow L = 0$.
<u>Idea</u>: Utilizzare la funzione in coordinate polari, per cercare di provare tramite il teorema del confronto che (5) $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^4}}$.

Le coordinate polari risulatano molto utili per trovare delle stime per applicare il teorema del confronto:

$$\textit{(6)}\ 0 \leq |\frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^4}}| = |\rho \cdot \frac{\cos\vartheta \cdot \sin^2\vartheta}{\sqrt{(\cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta)}}| \leq$$

$$\leq \rho \cdot \frac{|\cos\vartheta \cdot \sin^2\vartheta|}{\sqrt{(\cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta)}} \leq \frac{\rho \cdot 1}{\sqrt{\cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta}}$$

Esercizio 7 $\cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta \geq \frac{1}{2}$, $\forall\vartheta \in [0, 2\pi]$

Pertanto da (6) segue che

$$\begin{cases} \vartheta > 0 & \forall\vartheta \in (0, 2\pi) \\ \\ \frac{1}{\vartheta} > 0 & \vartheta \to 0^+ \end{cases}$$

$$0 \leq |\frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^4}}| \leq \sqrt{2} \cdot \rho = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}$$

$\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *se* $(x,y) \to (0,0)$ *Dunque vale (5) e possiamo concludere che*

$$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-e^{xy^2}}{\sqrt{x^4+y^4}} = 0$$

$$f(x,y) = \frac{1-e^{xy^2}}{\sqrt{x^4+y^4}}$$

se $(x,y) \neq (0,0)$,

- $!\exists \lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$
- $!\exists \lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$

$\Rightarrow \exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L \Rightarrow L = 0$

***Dim. 7* (1.5, foglio 2)** $(\Rightarrow)\exists f'(p_0) \Rightarrow f$ *è differenziabile in* x_0.
Ricordiamo che per definizione

$$\exists f'(x_0) \in \mathbb{R} \iff (1)\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

N.B.: $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to x_0}|f(x)| = 0$

Esercizio 8

$$(1) \iff (2)\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{|x-x_0|} = 0$$

Osserviamo che per definizione f è differenziabile in $x_0 \iff$ *vale (2).*
Mostriamo l'implicazione $(\Leftarrow)$, *Supponiamo che valga (2).*

Esercizio 9

$$(2) \iff (3) \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

È chiaro che

$$(3) \iff \exists \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0 \iff$$

$$\iff \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \stackrel{def}{\iff} \exists f'(x_0)$$

1.5 Lez - 05

1.5.1 Condizioni sulle derivate parziali che assicurino la diffrenenziablità

Osservazione 1.5.1 *La derivabilità parziale non è sufficiente ad assicurare la diffrenenziablità*

Problema: Data $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto e supponiamo che $\exists \nabla f(p_0)$ con $p_0 \in A$. Quale proprietà ulteriore bisogna aggiungere per ottenere la diffrenenziablità di f in p_0?

Teorema 1.5.2 (del differenziale totale) *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $p_0 \in A$. Supponiamo che*

(i)
$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \to \mathbb{R}$$

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ *siano continue nel punto p_0, cioè*
$$\exists \lim_{p \to p_0} \frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) \, e \lim_{p \to p_0} \frac{\partial f}{\partial y}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$$

Allora f è differenzibile nel punto p_0. [BDPG, 11.5]

Osservazione 1.5.3 *È sufficiente richiedre la (i) e (ii) in un intorno di p_0*

Il teorema del differenziale totale giustifica la seguente definizione:

Definizione 1.5.1 *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

(i) f si dice differenziabile su A se è diff su ogni punto di A.

(ii) f si dice di classe C^1 su A se f è continua e
$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \to \mathbb{R} \text{ continui}$$

In questo caso scriveremo che $f \in C^1(A)$

Dal teorema del differenziale totale segue anche:

Corollario 1.5.1 *Sia $f \in C^1(A)$ allora f è differenziabile su ogni punto di $p_0 \in A$*

1.5.2 Derivate direzionali

Norma di un vettore di $\mathbb{R}^n$

Sia $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, si chiama norma di v, e si denota

$$\|v\| := \sqrt{v_1^2 + ... + v_n^2} = d(v, \underline{O}) = \sqrt{v \cdot v}$$

Esempio 5 *1. $n = 1$, $\|v\| = |v|$ se $v \in \mathbb{R}$*

2. $n = 2$. (immaginarsi il piano cartesiano)

Osservazione 1.5.4 *Se $p, q \in \mathbb{R}^n \Rightarrow d(p, q) = \|p - q\|$*

Esercizio 10 (6,foglio 1) *1. $\|v\| = 0 \iff v = \underline{O} = (0, ..., 0)$*

2. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda v = (\lambda v_1, ..., \lambda v_n)$ con $v = (v_1, ..., v_n)$, allora $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$

3. Disuguaglianza triangolare: Se $v, w \in \mathbb{R}^n$, $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Definizione 1.5.2 *Un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ si dice direzione (vettore unitario, versore) se $\|v\| = 1$*

Esempio 6 *$n = 2$, i vettori $e_1 = (1, 0)$ ed $e_2 = (0, 1)$ sono direzioni di $\mathbb{R}^2$*

Sia $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ una direzione, e $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto e $p_0 = (x_0, y_0) \in A$, allora $\exists \delta > 0$ t.c.

$$p_0 + hv = (x_0 + hv_1, y_0 + hv_2) \in A$$

se $|h| \leq \delta$, pertanto è ben definita:

$$(-\delta, \delta) \setminus \{0\} \ni h \to \frac{f(p_0 + hv) - f(p_0)}{h}$$

Definizione 1.5.3 *Si dice che f è derivabile (parzialmente) rispetto alla direzione v nel punto p_0 se*

$$\exists \frac{\partial f}{\partial v}(p_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(p_0 + hv) - f(p_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

Notazione 1.5.5 *Talvolta $\frac{\partial f}{\partial v}(p_0) = D_v f(p_0)$*

Osservazione 1.5.6 *(i) Sia $F : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$, (funzione di $n = 1$ variabile)*

$$F(t) := f(p_0 + tv) \ \text{ se } t \in (-\delta, \delta)$$

Allora è immediato verificare che

$$\exists \frac{\partial f}{\partial v}(p_0) \iff \exists F'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{F'(h) - F(0)}{h}$$

ed in questo case, $\frac{\partial f}{\partial v}(p_0) = F'(0)$

(ii) È immediato verificare che se $v = e_1$ o $v = e_2$, allora

$$\frac{\partial f}{\partial e_1}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial e_2}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$$

1.5.3 Teo: Diff. vs. Deriv. direz.

Teorema 1.5.7 (diffrenenziablità vs derivabiliità direzionale) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto e sia fissato $p_0 = (x_0, y_0) \in A$. Supponiamo che f sia differenziale in p_0, allora*

$$\exists \frac{\partial f}{\partial v}(p_0) = df(p_0)(v) = \nabla f(p_0) \cdot (v) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)(v_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)(v_2)$$

per ogni direzione $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$

Dim. 8 *Consideriamo la funzione $F : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$,*

$$F(t) = f(p_0 + tv) = f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)$$

Per ipotesi, f è differenziabile in p_0, cioè vale:

$$(D) \exists \lim_{p \to p_0} \frac{f(p) - f(p_0) - \nabla f(p_0) \cdot (p - p_0)}{d(p, p_0)} = 0$$

la condizione (D) è equivalente a chiedere:

$$(D*) f(p) = f(p_0) + \nabla f(p_0) \cdot (p - p_0) + o\left(d(p, p_0)\right) \, \forall p \in A$$

dove con $o\left(d(p, p_0)\right) \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \exists \lim_{p \to p_0} \frac{o(d(p,p_0))}{d(p,p_0)} = 0$ Scegliendo $p = p_0 + hv$ in (D), otteniamo che:*

$$F(h) := f(p_0 + hv) - f(p_0) + \nabla f(p_0) \cdot (hv) + o(d(p_0 + hv, p_0)) =$$

$$= F(0) + h\left(\nabla f(p_0) \cdot v\right) + o(|h|)$$

Infatti ricordiamo che:

$$d(p_0 + hv, p_0) = \|p_0 + hv - p_0\| = \|hv\| = |h| \, \|v\| = |h|$$

Dall'identità precedente segue che:

$$\exists F'(0) := \lim_{h \to 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \nabla f(p_0) \cdot v = df(p_0)(v)$$

Per l'osservazione precedente $F'(0) = \frac{\partial f}{\partial v}(p_0)$ da cui segue la tesi.

Dal teorema segue la generalizzazione del teorema del valore medio (G. Lagrange) a funzioni $n = 2$ variabili.

1.5.4 Teorema del valore medio

Teorema 1.5.8 (TdVM, n=1) *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continua e derivabile in* (a,b). *Allora* $\exists c \in (a,b)$ *t.c.*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Teorema 1.5.9 (del valore medio, n=2) *Sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *A aperto. Supponiamo che:*

(i) $\exists p, q \in A$ *t.c.* $[p,q] := \{tq + (1-t)p \mid t \in [0,1]\} \subset A$

(ii) f *è continua sull'insieme* $[p,q]$ *e differenziabile su* $(p,q) := \{tq + (1-t)p \mid t \in (0,1)\}$

Allora esiste un punto $\bar{c} \in (p,q)$ *t.c.* $f(q) - f(p) = \nabla f(\bar{c}) \cdot (q - p)$

Dim. 9 *Supponiamo* $p \neq q$ *altrimenti la tesi è banale e sia*

$$v := \frac{q - p}{\|q - p\|}$$

una direzione di $\mathbb{R}^2$.
Definiamo la funzione (d n=1 variabile) $F(t) := f(p+tv)$ *con* $t \in [0, \|q-p\|]$ $(\subset \mathbb{R})$ *e fissiamo* p, q, *osserviamo che* F *è ben definita per la (i) e* $F(0) = f(p)$ *e* $F(\|q-p\|) = f(q)$. *Inoltre per la (ii):*

1. $F : [0, \|q-p\|] \to \mathbb{R}$ *è continua;*
2. $\exists F'(t) = \frac{\partial f}{\partial v}(p + tv)$, $\forall t \in (0, \|q-p\|)$

Possimao applicare il teorema del valore medio (n=1 variabile) a F e otteniamo che esiste $\bar{t} \in (0, \|q-p\|)$ *t.c.*

$$f(q) - f(p) = F(\|q-p\|) - F(0) = F(\bar{t})\,\|q-p\| =$$

$$=_{(2)} \frac{\partial f}{\partial v}(p + \bar{t}v)\,\|q-p\| = (\nabla f(p + \bar{t}v) \cdot v)\,\|q-p\| =$$

$$= \left(\nabla f(p + \bar{t}v) \cdot \frac{q-p}{\|q-p\|}\right) \cdot \frac{q-p}{\|q-p\|} = \nabla f(p + \bar{t}v)(q - p)$$

Scegliendo $\bar{c} = p + \bar{t}v \in (p,q)$ *otteniamo la tesi*

Corollario 1.5.2 *Sia* $f : B(p_0, r_0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. *Supponiamo che* $\exists \nabla f(p_0) = (0,0)\, \forall p \in B(p_0, r_0)$. *Allora* $f(p) = f(p_0)$, $\forall p \in B(p_0, r_0)$

Dim. 10 *per il teorema del diff. tot.* f *è differenziale su* $B(p_0, r_0)$. *Possimao applicare il teorema del valore medio e otteniamo che* $\exists \bar{c} \in (p, p_0)$ *t.c.* $f(p) - f(p_0) = \nabla f(\bar{c})(p - p_0) = 0$, $\forall p \in B(p_0, r_0)$

1.6 Lez - 06

1.6.1 Derivate parziali di una f composta di più variabili

Problema: Vogliamo determinare una formula generale che ci consente di calcolare le derivate parziali di una (generica) funzione composta di più variabili.

Esercizio 11 (7, foglio 3) *Consideriamo la funzione composta* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita come* $h := f \circ g$, *dove* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$*:*

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

se $(x,y) \neq (0,0)$ *e*
$g(t) = (g_1(t), g_2(t)) = (\sin^2(t), \cos^2(t))$, $t \in \mathbb{R}$ *Calcolare* $h'(t)$, $t \in \mathbb{R}$

Richiami della RDC

Siano $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ con $g(J) \subseteq I$, I, J intervalli aperti di $\mathbb{R}$.
$h := f \circ g$, $h(x) := f(g(x))$, $x \in I$

Proposizione 1.6.1 (Regola della catena, RDC) *Se* f, g *sono derivabli, rispettivamente, in* $g(x_0)$ *e in* x_0, *allora* $\exists h'(x) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

Esempio 7 $f(y) = \sin y$, $g(x) = x^2$, $h = f \circ g$, $h(x) = \sin x^2$, $\exists h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \cos x^2 \cdot 2x$

Prima di arrivare alla formula generale di derivazione di una funzione composta, introduciamo alcuni casi particolari

1.6.2 I caso particolare

Consideriamo $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, I intervallo aperto di $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ fissato.

$$I \ni t \to g(t) = (g_1(t), g_2(t)) = (x(t), y(t))$$

con $g_1, g_2 : I \to \mathbb{R}$.
Supponiamo che $\exists g_1'(t_0), g_2'(t_0)$ e $g(I) \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^2$, A aperto.
Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e supponiamo che f sia differenziabile in

$$p_0 = (x_0, y_0) = g(t_0) = (g_1(t_0), g_2(t_0))$$

Consideriamo la funzione composta $h : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h := f \circ g$

$$I \ni t \to h(t) := (f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(g_1(t), g_2(t))$$

Teorema 1.6.1

$$(1)\, \exists h'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) \cdot g_1'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \cdot g_2'(t_0)$$

oppure tramite matrici

$$(1bis)\, \exists h'(t_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cg_1'(t_0) \\ g_2'(t_0) \end{bmatrix} =$$

$= \nabla f(p_0) \cdot g'(t_0)$, *dove* $g'(t_0) = (g_1'(t_0), g_2(t_0))$.

Espansione calssica di RDC, Leibniz

Se scriviamo g e f, in termini di "variabili dipendenti", cioè

$$g = \begin{cases} x = x(t) = g_1(t) \\ y = y(t) = g_2(t) \end{cases} \quad \text{(curva del piano)}$$

$z = z(x, y) = f(x, y)$, allora componendo f con g, la variabile dipendente z dipenderà dalla sola variabile indipendente t per cui, $z = z(t) = z(x(t), y(t))$, $t \in I$.
Quindi in termini di queste variabili (z, x, y, t) si può scrivere la (1) come:

$$\frac{dz)}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

oppure utilizzando (1bis)

$$\frac{dz}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix}$$

***Dim.* 11 (Idea!)** *Proviamo la (1), cioè provare che*

$$(2)\, \exists h'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = \nabla f(p_0) \cdot g'(t_0)$$

Essendo f differenziabile in p_0 *vale che:*

$$(3)\, f(p) = f(p_0) + df(p_0) \cdot (p - p_0) + o(\|p - p_0\|)$$

$\forall p \in A$ *se* $p_0 = g(t_0)$.
Da (3) segue che, se scegliamo $p = g(t)$ *otteniamo:*

$$f(g(t)) = f(g(t_0)) + df(g(t_0)) \cdot (g(t) - g(t_0)) + o(\|g(t) - g(t_0)\|)$$

$\forall t \in I$, *da cui:*

$$(4)\, \frac{f(g(t)) - f(g(t_0))}{t - t_0} = \frac{df(g(t_0)) \cdot (g(t) - g(t_0))}{t - t_0} + \frac{o(\|g(t) - g(t_0)\|)}{t - t_0}$$

$t \in I, t \neq t_0$.
Osserviamo che essendo $df(p_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lineare allora:

$$(5)\ \frac{df(p_0)(g(t) - g(t_0))}{t - t_0} = df(p_0) \cdot \left(\frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}\right)$$

Passando al limite nella (5) per $t \to t_0$, dalla continuità della funzione $df(p_0)$, si ottiene che:

$$\lim_{t \to t_0} df(p_0) \left(\frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}\right) = df(p_0) \cdot g'(t_0)$$

$$(6)\ \exists \lim_{t \to t_0} \frac{df(p_0)(g(t) - g(t_0))}{t - t_0} = df(p_0) \cdot g'(t_0) = \nabla f(p_0) \cdot g'(t_0)$$

Si può provare anche (ed è il punto delicato che omettiamo)

$$(7)\ \exists \lim_{t \to t_0} \frac{o(\|g(t) - g(t_0)\|)}{t - t_0} = 0$$

Da (6) e (7), possiamo passare al limite per $t \to t_0$ nella (4) ed otteniamo la (2) e dunque la tesi.

1.6.3 II caso particolare

$g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, A aperto, e $p_0 = (s_0, t_0) \in A$

$$A \ni (s,t) \to g(s,t) = (g_1(s,t), g_2(s,t))$$

$g_1, g_2 : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Supponiamo che g_1 e g_2 siano differenziabili in p_0 e $g(A) \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, B aperto.
In particolare:

$$\exists \nabla g_i(p_0) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial s}(p_0), \frac{\partial g_i}{\partial t}(p_0)\right)\ i = 1, 2$$

Sia $f : B \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, B aperto, f differenziabile in $q_0 = (x_0, y_0) = (g_1(p_0), g_2(p_0))$, $B \ni (x,y) \to f(x,y) \in \mathbb{R}$.
Supponiamo che f sia differenziabile in q_0.
Consideriamo $h := f \circ g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$A \ni (s,t) \to (f \circ g)(s,t) = f(g(s,t)) = f(g_1(s,t), g_2(s,t))$$

Teorema 1.6.2

$$(1)\ \begin{array}{l} \exists \frac{\partial h}{\partial s}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(p_0)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial s}(p_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(p_0)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial s}(p_0) \\ \exists \frac{\partial h}{\partial t}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(p_0)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial t}(p_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(p_0)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial t}(p_0) \end{array}$$

in termini di matrici:

$$(1bis)\ \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial s}(p_0) & \frac{\partial h}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(g(p_0)) & \frac{\partial f}{\partial y}(g(p_0)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial s}(p_0) & \frac{\partial g_1}{\partial t}(p_0) \\ \\ \frac{\partial g_2}{\partial s}(p_0) & \frac{\partial g_2}{\partial t}(p_0) \end{bmatrix}$$

Dove $\frac{\partial g_1}{\partial s}(p_0), \frac{\partial g_1}{\partial t}(p_0) = \nabla g_1(p_0)$ e $\frac{\partial g_2}{\partial s}(p_0), \frac{\partial g_2}{\partial t}(p_0) = \nabla g_2(p_0)$

Esercizio 12 *Utilizzare (1bis) del teorma nel secondo caso e svolgere esercizio 7 foglio 3*

1.6.4 Caso generale di RDC

Vogliamo ora trattare il caso generale della formuala di derivazione per funzioni composte di più variabili.

Matrice Jacobiana

Definizione 1.6.1 (Matrice Jacobiana) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A aperto,*

$$A \ni x = (x_1, ..., x_n) \to f(x) = (f(x_1), ..., f(x_n))$$

con $f_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$.
Supponiamo che dato $x_0 = (x_1^0, ..., x_n^0) \in A$,

$$\exists \nabla f_i(x_0) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right)$$

con $i = 1, ..., m$.

Si chiama Matrice Jacobiana di f nel punto x_0 la matrice $m \times n$

$$Df(x_0) = Jf(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix}$$

Osservazione 1.6.3 *(i) La nozione di matrice Jacobiana generalizza la nozione di vettore gradiente per una funzione (scalare) $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.*
Si noti che in questo caso la matrice Jacobiana $1 \times n$ è data da

$$Df_(x_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) \equiv \nabla f(x_0)$$

(ii) La riga i-esima della matrice Jacobiana $Df(x_0)$ coincide con $\nabla f_i(x_0)$

(iii) La (1bis) del precedente teorema, in termini di matrici Jacobiane può scriversi come

$$Dh(p_0) = Df(g(p_0)) \cdot Dg(p_0)\ \text{(RDC)}$$

1.6.5 Teorema RDC

Teorema 1.6.4 (Regola della catena, RDC) *Siano* $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *e* $f : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, *$A$ e B aperti*

(i) $g(A) \subseteq B$

(ii) *Se* $g = (g_1, \dots, g_m)$, $f = (f_1, \dots, f_k)$
Supponiamo che $g_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,(i = 1, \dots, m)$ *sia diff. in un dato* $x_0 \in A$
$f_i : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}\,(i = 1, \dots, k)$ *sia diff. in un dato* $y_0 = g(x_0)$
Consideriamo ora la funzione $h := f \circ g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $h = (h_1, \dots, h_k)$
con $h_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
allora le funzioni $h_i : A \to \mathbb{R}(i = 1, \dots, k)$ *sono diff. in* x_0 *e*

$$Dh(x_0) = Df(g(x_0)) \cdot Dg(x_0)$$

1.7 Lez - 07

1.7.1 Derivate parziali di ordine superiore

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto. Supponiamo che $\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \to \mathbb{R}$ poniamo:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \end{array}\right\} \text{Derivate parziali seconde pure}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} := \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} := \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \end{array}\right\} \text{Derivate parziali seconde miste}$$

quando tutte le derivate parziali scritte esistono.

Osservazione 1.7.1 *In generale* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

1.7.2 Teo: Inversione dell'ordine di derivazione

Teorema 1.7.2 (sull'inversione dell'ordine di derivazione) *[BDPG, 11.11] Sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *A aperto,* $p_0 = (x_0, y_0) \in A$ *fissato. Supponiamo* $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : A \to \mathbb{R}$ *e siano continue in* p_0, *allora* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0)$

Il teorema precedente può estendersi al caso di funzioni $n \geq 2$ variabili.

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto. Supponimao che esiset $\frac{\partial f}{\partial x_i} : A \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$.
Se $\exists \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x_0)$ in un punto $x_0 \in A$ per $j = 1, \ldots, n$, diciamo che

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) := \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x_0)$$

Nel caso in cui $j = i \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x_0)$.
Con queste notazioni, vale la seguente generalizzazione del teorema sull'inversione dell'ordine di derivazione.

Teorema 1.7.3 *Sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *A aperto. Supponimao che per fissati* $i, j = 1, ..., n$, *con* $i \neq j$, $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : A \to \mathbb{R}$ *e siano continue in* x_0. *Allora:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$$

Definizione 1.7.1 *Sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *A aperto*

(a) *f si dice di <u>classe</u> $C^2(A)$ e scriveremo $f \in C^2(A)$ se $f \in C^0(A)$ ed $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}$: $A \to \mathbb{R}$ continua $\forall i = 1, ..., n$, $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : A \to \mathbb{R}$ continua $\forall i, j = 1, ..., n$*

(b) *f si dice di <u>classe</u> $C^m(A)$ e scriveremo $f \in C^m(A), (m \geq 1)$ se $f \in C^0(A)$ e $\exists \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_k}} : A \to \mathbb{R}$ continua $\forall i_1, ..., i_k = 1, ..., n$ e $\forall 1 \leq k \leq n$*

Osservazione 1.7.4 *Se $f \in C^m(A)$, con $m \geq 2$ per il teo sull'inversione dell'ordine di derivazione*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

$\forall x \in A$, $\forall i, j = 1, ..., n$

1.7.3 Taylor per funzioni di più variabili

Problema: Data $f : B(p_0, r) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funzione di classe $C^m(B(p_0, r))$, approssimare f con un polinomio di $n = 2$ variabili di ordine m, nel modo "migliore possibile"

Definizione 1.7.2 *Dato $m \in \mathbb{N}$, $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ fissato, si chiama <u>polinomio di ordine m di $n = 2$ variabili, centrato in p_0</u>, una funzione $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ del tipo*

$$T(x, y) = \sum_{h=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} c_{i,h-i}(x - x_0)^i (y - y_0)^{h-i}$$

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dove $c_{i,h-i}$ (i = 0,...,h e h = 0,..., m) sono $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ coeff. ass.

Esempio 8 (a) *Se m = 0, $T(x, y) = c_{0,0} \in \mathbb{R} \, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$*

(b) *Se m = 1, $T(x, y) = c_{0,0} + c_{1,0}(x - x_0) + c_{0,1}(y - y_0)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$*

(c) *Se m = 2, $T(x, y) = c_{0,0} + c_{1,0}(x - x_0) + c_{0,1}(y - y_0) + c_{2,0}(x - x_0)^2 + c_{1,1}(x - x_0)(y - y_0) + c_{0,2}(y - y_0)^2$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$*

Problema: Sia $f \in C^2(B(p_0, r))$, determinare se esiste un polinomio $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di ordine 2, centrato in p_0, t.c.

$$f(p) = T(p) + o\left(\|p - p_0\|^2\right)$$

$\forall p = (x, y) \in B(p_0, r)$

Notazione 1.7.5 *Se $v, w \in \mathbb{R}^n$, $v \cdot w = \langle v, w \rangle$*

Definizione 1.7.3 *Data $f \in C^2(A)$, $A \in \mathbb{R}^2$ aperto, si chiama, <u>matrice hessiana</u> di f in un punto $p \in A$, la matrice 2×2*

$$D^2 f(p) = H(f)(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Osservazione 1.7.6 *per il teo. dell'inv. dell'ordine di derivazione $D^2 f(p)$ è <u>simmetrica</u>*

1.7.4 Taylor del II ordine + resto di Peano

Sia $f \in C^2(B(p_0, r))$, $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$ fissato. Allora vale:

$$(FT_2)\; f(p) = T_2(p) + o\left(\|p - p_0\|^2\right)$$

$\forall p = (x, y) \in B(p_0, r)$, dove

$$T_2(p) := f(p_0) + \langle \nabla f(p_0), p - p_0 \rangle + \frac{1}{2}\left\langle D^2 f(p_0) \cdot (p - p_0), p - p_0 \right\rangle$$

se $p \in \mathbb{R}^2$.
(polinomio di taylor del II ordine di f, centrato in p_0)
Ricordiamo che con $o\left(\|p - p_0\|^2\right) \Rightarrow \exists \lim_{p \to p_0} \frac{o\left(\|p-p_0\|^2\right)}{\|p-p_0\|^2} = 0$

***Dim.* 12** *Fissiamo $p \in B(p_0, r) \setminus \{p_0\}$ e denotiamo $v := \frac{p-p_0}{\|p-p_0\|} = (v_1, v_2)$, (direzione $p - p_0$) e definiamo: $F(t) := f(p_0 + tv)$, con $t \in (-r, r)$.
Poichè la funzione $g : (-r, r) \to B(p_0, r) \subseteq \mathbb{R}^2$, $g(t) = p_0 + tv := (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)$ è una funzione di classe $C^2((-r, r))$, come pure f, per RDC la funzione composta: $F(t) = f(g(t))$, $t \in (-r, r)$, è di classe $C^2((-r, r))$. Pertanto possiamo applicare la formula di Taylor del II ordine per una funzione di una variabile per $t = 0$ e otteniamo:*

$$(1)\; F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{1}{2}F''(0)t^2 + o(t^2) \;\; \text{per } t \to 0$$

Calcoliamo $F(0), F'(0), F''(0)$. Per RDC:

- $$F'(t) = \langle \nabla f(p_0 + tv), v \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0 + tv)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0 + tv)v_2$$

- $$F''(t) = v_1 \cdot \left\langle \nabla\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(p_0 + tv), v \right\rangle + v_2 \cdot \left\langle \nabla\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(p_0 + tv), v \right\rangle =$$

$$= v_1\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0 + tv)v_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0 + tv)v_2\right) + v_2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0 + tv)v_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0 + tv)v_2\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0 + tv)v_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0 + tv)v_1 v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0 + tv)v_2^2$$

Pertanto

(2) $F(0) = f(p_0)$

(3) $F'(0) = \langle \nabla f(p_0), v \rangle$

(4) $F''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0 + tv)v_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0 + tv)v_1 v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0 + tv)v_2^2$

Osserviamo che $F''(0)$ *può essere riscritto mediante hessiana* $D^2 f(p_0)$, *come* $(4bis) F''(0) = \left\langle D^2 f(p_0) v, v \right\rangle$, *pertanto da (1), (2), (3), (4bis) otteniamo:*

$$f(p_0 + tv) = F(t) = f(p_0) + \langle \nabla f(p_0), v \rangle \, t + \frac{1}{2} \left\langle D^2 f(p_0) v, v \right\rangle t^2 + o(t^2), \text{ per } t \to 0$$

Scegliendo $t = \|p - p_0\|$, *otteniamo la tesi.*

Osservazione 1.7.7 (BDPG,11.14) *Si può ottenere una formula di taylor con resto di Peano e Lagrange anche per funzioni* $f : B(p_0, r) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *di classe* $C^2(B(p_0, r))$ *con* $n \geq 3$.
Essa è molto più complicata perciò la omettiamo

Esercizio 13

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \end{cases}$$

$\exists f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *ma f' non è continua nel punto* $x_0 = 0$

1.8 Lez - 08

1.8.1 Massimi e minimi per funzioni a più variabili

Problema: Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e data $f : A \to \mathbb{R}$, determinare, <u>se esistono</u>, i punti di max e min di f.

Definizione 1.8.1 *Data $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:*

1. *$p_0 \in A$ si dice, punto di <u>massimo</u> (= max) <u>relativo</u> di f su A se $\exists r_0 > 0$ t.c. $f(p) \leq f(p_0)\, \forall p \in A \cap B(p_0, r_0)$*
   Rispettivamente $p_0 \in A$ si dice, punto di <u>minimo</u> (= min) <u>relativo</u> di f su A se $\exists r_0 > 0$ t.c. $f(p) \geq f(p_0)\, \forall p \in A \cap B(p_0, r_0)$

2. *$p_0 \in A$ si dice punto di <u>massimo</u> (= MAX) <u>assoluto</u> se $\forall p \in A,\ f(p) \leq f(p_0)$*
   Rispettivamente $p_0 \in A$ si dice punto di <u>minimo</u> (= MIN) <u>assoluto</u> se $\forall p \in A,\ f(p) \geq f(p_0)$

Osservazione 1.8.1 *Se p_0 è un punto di max (o min) assoluto $\Rightarrow p_0$ è punto di max (o min) relativo. Il viceversa non può valere.*

N.B.: 1.8.2 *Non confondere i punti di max e min di una funzione con il suo massimo e minimo.*

- $Min_A f := Min f(p) : p \in A \in \mathbb{R}$, *se esiste è unico*
- $Max_A f := Max f(p) : p \in A \in \mathbb{R}$, *se esiste è unico*

Consideriamo il seguente esempio:

Esempio 9 $n = 1,\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\, f(x) =:= x(3 - x^2)$

In particolare si può vedere che i punti $x = \pm 1$ sono rispettivamente max e min relativi, ma $x = -1$ non è minimo assoluto e $x = +1$ non è massimo assoluto.
Infatti essendo la funzione non limitata ($\sup_{\mathbb{R}} f = +\infty$ e $\inf_{\mathbb{R}} f = -\infty$) / $\exists max_{\mathbb{R}} f$ e $min_{\mathbb{R}} f$

1.8.2 Estremi liberi di una funzione (min/max relativi)

Problema: Supponiamo che $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sia aperto e $f : A \to \mathbb{R}$, vogliamo determinare se esistono i punti di max e min relativo su A. Questi punti sono detti <u>estremi liberi</u> di f.

Lo strumento principale per la ricerda di estremi liberi è :

Teorema 1.8.3 (Fermat) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto. Supponiamo che esista $p_0 \in A$ t.c.*

(i) f differenziabile in p_0. In particolare $\exists \nabla f(p_0)$

(ii) p_0 sia un estremo libero di f in A

Allora $\nabla f(p_0) = \underline{O}_{\mathbb{R}^n} = (0, ..., 0)$ (n-volte)

Il precedente teorema giustifica la seguente definizione:

Definizione 1.8.2 *Data $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, un punto $p_0 \in A$ si chiama punto stazionario(o critico) di f se f è differenziabile in p_0 e $\nabla f(p_0) = \underline{O}_{\mathbb{R}^n}$*

Dim. 13 *Per semplicità , $n = 2$, $p_0 = (x_0, y_0)$. Essendo A aperto esiste $\delta > 0$ t.c. $p_0 + te_1 \in A$ se $t \in (-\delta, \delta)$.*
Consideriamo $F : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$, $F(t) := f(p_0 + te_1)$, da (i)

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) \iff (1) \begin{cases} F \text{ è derivabile nel punto } t = 0 \\ e\ F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) \end{cases}$$

Dall'altra parte, da (ii) p_0 estremo libero di f (2) $t = 0$ è un estremo libero di F. Possiamo applicare il teorema di Fermat di una variabile ed otteniamo $F'(0) = 0 =_{(1)} \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)$.

Analogamente consideriamo $F(t) = f(p_0 + te_2)$ e si prova che $\frac{\partial f}{\partial y}(p_0) = 0$.
Pertanto si prova che $\nabla f(p_0) = (0, 0) = \underline{O}^2_{\mathbb{R}}$

Osservazione 1.8.4 *Non ogni punto stazionario di f è un punto di estremo libero.*

Esempio 10 *$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = y^3$, $p_0 = (x_0, 0)$.*
Poichè $\nabla f(x, y) = (0, 3y^2)$, $\nabla f(p_0) = (0, 0)$. Pertanto ogni punto $p_0 = (x_0, 0)$ (per un fissato $x_0 \in \mathbb{R}$) è un punto stazionario di f, ma p_0 non è un estremo libero, infatti $\forall r > 0$ $f(x_0, 0) = 0\, \forall x_0 \in \mathbb{R}$, quindi $p_0 = (x_0, 0)$ si dice punto di sella.

Definizione 1.8.3 *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto. Un punto $p_0 \in A$ si dice punto di sella se p_0 è un punto stazionario di f e $f(p) - f(p_0)$ amette sia valori positivi che negativi in ogni intorno di p_0*

1.8.3 Matrice Hessiana

Problema: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in C^2(A)$. Supponiamo che $p_0 \in A$ sia un punto stazionario di f.
Come determinare se p_0 sua un estremo libero o un punto di sella?

Definizione 1.8.4 *Sia $f \in C^2(A)$, si chiama, matrice hessiana di f nel punto $p_0 \in A$ la matrice simmetrica $(n \times n)$*

$$D^2 f(p_0) = Hf(p_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(p_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(p_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(p_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1}\right)(p_0) \\ \vdots \\ \nabla \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_n}\right)(p_0) \end{bmatrix}$$

1.8.4 Teorema: Criterio per il segno di una matrice

Richiami di algfebra lineare

Definizione 1.8.5 *Sia H una matrice* $n \times n$

(i) *H si dice* <u>*definita positiva*</u> *se* $\langle Hv, v\rangle > 0$, $\forall v \in \mathbb{R}^n \times \{\underline{O}\}$

(ii) *H si dice* <u>*semi-definita positiva*</u> *se* $\langle Hv, v\rangle \geq 0$, $\forall v \in \mathbb{R}^n \times \{\underline{O}\}$

(iii) *H si dice* <u>*definita negativa*</u> *se* $\langle Hv, v\rangle < 0$, $\forall v \in \mathbb{R}^n \times \{\underline{O}\}$

(iv) *H si dice* <u>*semi-definita negativa*</u> *se* $\langle Hv, v\rangle \leq 0$, $\forall v \in \mathbb{R}^n \times \{\underline{O}\}$

Un criterio semplice per verificare il segno di una matrice H $n \times n$:

Teorema 1.8.5 (criterio per il segno di una matrice) *Sia*

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{n1} & \dots & h_{nn} \end{bmatrix} \text{ una matrice } n \times n$$

Definiamo

$$D_i = det \begin{matrix} h_{11} & \dots & h_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{i1} & \dots & h_{ii} \end{matrix} \text{ con } 1 \leq i \leq n$$

Allora

(a) *H è definita positiva* $\iff D_i > 0 \, \forall i = 1, ..., n$

(b) *H è definita negativa* $\iff \begin{cases} D_i > 0 \text{ per i valori pari di } i \\ D_i < 0 \text{ per i valori dispari di } i \end{cases}$

(c) *Se* $detH = Dn \neq 0$ *e nessuna delle condizioni precedenti fosse soddisfatta, allora H non è semi-definita positiva nè semi-definita negativa*

Corollario 1.8.1 *Se H* (2×2) *matrice simmetrica* $H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$ *con* $h_{12} = h_{21}$

(a) *H è definita positiva* $\iff h_{11} > 0$ *e* $detH > 0$

(b) *H è definita negativa* $\iff h_{11} < 0$ *e* $detH > 0$

(c) *Se* $detH < 0$, *allora H non è semi-def. pos. nè semi.def. neg.*

Teorema 1.8.6 (BDPG,11.25) *Sia A aperto di* $\mathbb{R}^n$, $f \in C^2(A)$ *e sia* $p_0 \in A$ *un punto stazionario di f*

(i) *Se* $D^2 f(p_0)$ *fosse def. pos.* $\Rightarrow p_0$ *è un punto di* <u>*minimo relativo*</u> *di f su A*

(ii) *Se $D^2f(p_0)$ fosse def. neg. $\Rightarrow p_0$ è un punto di <u>massimo relativo</u> di f su A*

(iii) *Se $D^2f(p_0)$ non fosse semi-def. pos. nè semi-def. neg. $\Rightarrow p_0$ è un punto di <u>sella</u> di f su A*

(iv) *Se $D^2f(p_0)$ fosse semi-def. pos. o semi-def. neg. $\Rightarrow p_0$ può essere un punto di <u>massimo o minimo relativo</u> o un punto di <u>sella</u> di f su A*

1.8.5 Esempi

Esempio 11 (1a,foglio 5) *Data $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + +2kxy + y^2$. Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$, i punti di max e min relativo di f.*

Soluzione 1. ***Punti stazionari di f su*** $\mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2ky = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2kx + 2y = 0 \end{cases}$$

- ***Esercizio 14*** *Se $k \neq 1 \Rightarrow (0,0)$ è l'unico punto stazionario*
- *Se $k = 1 \Rightarrow$ I punti della retta $x + y = 0$ sono tutti e soli i punti stazionari*
- *Se $k = -1 \Rightarrow$ I punti della retta $x - y = 0$ sono tutti e soli i punti stazionari*

Soluzione 2. ***Studio del segno della matrice Hessiana***

$$D^2f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 2k \\ 2k & 2 \end{bmatrix}$$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ *e* $det D^2f(x,y) = 4 - 4k^2 = 4(1-k^2)$

- ***Esercizio 15*** *Se $k^2 < 1 \Rightarrow D^2f(0,0)$ è def. positiva $\Rightarrow$ (0,0) è un punto di minimo relativo*
- *Se $k = 1$, $det D^2f(x_0, -x_0) = 0 \Rightarrow D^2f(x_0,-x_0)$ non è def-neg. nè def-pos. $\Rightarrow$ nulla si può dire*
  - *Se $k = 1$, $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 \Rightarrow (x_0, -x_0)$ è un punto di minimo assoluto*
  - *Se $k = -1$, $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \Rightarrow (x_0, -x_0)$ è un punto di minimo assoluto*

Appendice:

1. Se f è differenziabile in p_0 e $\nabla f(p_0) = (0,0) \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial v}(p_0) = 0 \forall v \in \mathbb{R}^2$, $\|v\| = 1$.
   Infatti poichè $\frac{\partial f}{\partial v}(p_0) = \nabla f(p_0 = \underline{O}_{\mathbb{R}^2}) \cdot v = 0$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$, il punto di $x_0 = 0$ è un punto di minimo assoluto per f.

3. Se $k = 1$ i punti della retta di eq: $x + y = 0$ sono tutti e soli i punti stazionari di f.

4. $k = 1$, $f(x, y) = (x + y)^2 \geq 0 \, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x_0, -x_0) = 0$

1.9 Lez - 09

Problema: Condizioni che assicurino l'esistenza di $\min_A f$ e $\max_A f$ e come determinarli

Teorema 1.9.1 (Weirestrass) *[BDPG,10.10] Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, Supponiamo che:*

(i) A sia limitato e chiuso, (in $n = 1$, $A = [a, b], \partial A = \{a, b\}, \mathring{A} = (a, b)$)

(ii) f sia continua su A

Allora esiste $\min_A f$ *e* $\max_A f$

1.9.1 Ricerca del max e min (assoluto) su insieme limitato e chiuso

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato e chiuso e $f : A \to \mathbb{R}$. Allora per il Teorema di Weirestrass $\exists \min_A f = f(p_1)$ e $\exists \max_A f = f(p_2)$.
Vi sono le seguenti possibilità se $i = 1, 2$

(i) $p_i \in \mathring{A}$ e $\exists \nabla f(p_i) = (0, 0)$

(ii) $p_i \in \mathring{A}$ ma $\nexists \nabla f(p_i)$, diremo in questo caso che p_i è <u>punto singolare</u>

(iii) $\partial_i \in \partial A$

Problema: *[BDPG,13.2]* Ricerca dei punti di max e min nei punti della frontiera di A, dettoi anche estremi vincolati

- $max, min \in \mathring{A} \Rightarrow$ estremi liberi
- $max, min \in \partial A \Rightarrow$ estremi vincolati

Esempio 12 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $f(x, y) = x^2 + 2y^2$

- $\mathring{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$
- $\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
- $\nabla f(x, y) = (2x, 4y)$ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$f(p_2) = \exists max_A f$ *e* $f(p_1) = \exists min_A f$, $\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff x = y = 0$
$f(0, 0) = 0$ *e* $p_1 = (0, 0)$ *è un punto di minimo assoluto di f.*
È chiaro che $p_2 \in \partial A$ *e dunque vale che* $max_A f = max_{\partial A} f$
quindi ci poniamo il problema di come determinare $max_{\partial A} f$

Osservazione 1.9.2 $\nabla f(x, y) = (2x, 4y) \neq (0, 0)$ $\forall (x, y) \in \partial A$

1.9.2 Frontiera attraverso parametrizzazione

Caso $n = 2$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato e chiuso.
Si chiama <u>parametrizzazione</u> di ∂A una funzione $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ (detta <u>curva</u>)

- (P1) $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$
- (P2) con $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ di classe C^1
- (P3) e $\gamma([a, b]) = \partial A$

Supponiamo che $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e vogliamo minimizzare/massimizzare f su ∂A
Definiamo $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, $F(t) = f(\gamma(t))$.
Si può provare tramite RDC che $F \in C^1([a, b])$. Inoltre è immediato verificare $min_{\partial A} f = min_{[a,b]} F$ e $max_{\partial A} f = max_{[a,b]} F$
Pertanto la ricerca di $min_{\partial A} f$ e $max_{\partial A} f$ si riduce a $min_{[a,b]} F$ e $max_{[a,b]} F$

Ritorniamo all'esempio 12:
Una parametrizzazione di $\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ è data da

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)\, t \in [0, 2\pi]\, \gamma([0, 2\pi]) = \partial A$$

$F(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + 2sin^2 t = 1 + sen^2(t)$, allora è facile verificare che

$$max_{[0,2\pi]} F = 2 = F\left(\frac{\pi}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}\pi\right)$$

Pertanto i punti di ∂A dove è raggiunto il massimo sono dati da:

$$\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1) \text{ e } \gamma\left(\frac{3}{2}\pi\right) = (0, -1)$$

Infatti $f(0, 1) = f(0, -1) = 2$

Caso $n = 3$

Sia $A \subseteq 3$ chiuso e limitato. Si chiama parametrizzazione di ∂A una funzione $\gamma : B \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$\gamma(s, t) = (\gamma_1(s, t), \gamma_2(s, t), \gamma_3(s, t))$$

Con $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : B \to \mathbb{R}$ t.c.

(P1) B chiuso e limitato

(P2) $\gamma(B) = \partial A$

(P3) $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in C^1(\mathring{B}) \cap C^0(B)$

∂A è detta superficie.

Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ si vuole determinare $max_{\partial A} f$ e $min_{\partial A} f$.
Definiamo $F : B \to \mathbb{R}$, $F(s,t) := f(\gamma(s,t))$ con $(s,t) \in B$, allora

$$min_{\partial A} f = min_B f \text{ e } max_{\partial A} f = max_B f$$

Osservazione 1.9.3 *Pertanto il $min_{\partial A} f$ e il $max_{\partial A} f$ (di una funzione di 3 variabili sul bordo di A) viene riportato al $min_B f$ e $max_B f$ (di una funzione di 2 variabili) su un insieme $B \subseteq \mathbb{R}^2$*

Esempio 13 *Sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, $f(x,y,z) = x + y - z$ Determinare $min_A f$ e $max_A f$.*

Soluzione:

1. ***Punti stazionari di $\mathring{A}$***
   Osserviamo che $f \in C^\infty(\mathring{A})$.

   Esercizio 16 *Non ci sono punti stazionari in $\mathring{A}$*

   Dal'altra parte $f \in C^0(A)$ ed $A \subseteq \mathbb{R}^3$ è chiuso e limitato. Pertanto per il teorema di Weirestrass

   $$\exists min_A f = min_{\partial A} f \text{ e } max_A f = max_{\partial A} f$$

2. ***Max e min su ∂A***
   $\partial A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $B = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \subseteq \mathbb{R}^2 \ni (\vartheta, \varphi)$

   $$\gamma(\vartheta, \varphi) = (\cos\vartheta \sin\varphi, \sin\vartheta \sin\varphi, \cos\varphi)$$

   γ è una parametrizzazione di ∂A (cambiamento di coordinate sferiche)
   $F(\vartheta, \varphi) := f(\gamma(\vartheta, \varphi)) = \cos\vartheta \sin\varphi + \sin\vartheta \sin\varphi - \cos\varphi = \sin\varphi \cdot (\cos\vartheta + \sin\vartheta) - \cos\varphi$

   Per proseguire nella nostra strategia dovremmo determinare $min_B F$ e $min_B F$ con $F : B = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}$.

   Ci rendiamo conto subito che questa ricerca non è semplice.

Osservazione 1.9.4 *In effetti il metodo di ricerca dei max e min di una funzione su un bordo dato come parametrizzazione, diventa complesso, e dunque inefficace per funzioni di variabili $n \geq 3$*

1.9.3 Metodo dei moltiplicatori di Lagrange, TML

Caso $n = 2$

Supponiamo che l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) \leq 0\}$ dove $\partial A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$.
Un insieme del piano $\mathsf{V} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ è detto <u>vincolo</u> (è una curva del piano)

Teorema 1.9.5 (Teorema dei moltiplicatori di Lagrange, TML) *Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e $\mathsf{V} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ dove $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Supponiamo che:*

(i) $\exists \min_{\mathsf{V}} f = f(p_0)$*(o* $\exists \max_{\mathsf{V}} f = f(p_0)$*) con* $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathsf{V}$

(ii) $\exists \nabla g(p_0) \neq (0, 0)$

Allora esiste $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ (detto <u>moltiplicatore</u>) t.c. $(x_0, y_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^3$ è un punto stazionario della funzione.
Equivalentemente:

$$\exists \lambda_0 \in \mathbb{R} \ t.c. \begin{cases} g(p_0) = 0 \\ \\ \nabla f(p_0) + \lambda_0 \nabla g(p_0) = (0, 0) \end{cases} \qquad (*)$$

Definizione 1.9.1 *Un punto $p_0 \in \mathsf{V}$ verificante 5.2.3 (*) su opportuno $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ si dice **punto stazionario vincolato alla funzione** f **relativamente al vincolo** V*

Esempio 14 *Trovare $max_{\partial A} f$ se $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ e $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.*
Sia $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Allora:
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0\}$, $\nabla g(x, y) = (2x + 2y) \neq (0, 0)$ $\forall (x, y) \in \partial A$.
Pertanto possiamo applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange:
Sia $L(x, y, \lambda) := x^2 + 2y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$,

$$\nabla L(x, y, \lambda) = (0, 0, 0) \iff \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x + 2\lambda x &= 0 \\ \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 4y + 2\lambda y &= 0 \\ \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x^2 + y^2 - 1 &= 0 \end{cases} \iff$$

$\iff (x, y, \lambda) = (\pm 1, 0, -1), (0, \pm 1, -2),$

$$min_{\partial A} f = f(\pm 1, 0) = 1 \ e \ max_{\partial A} f = (0, \pm 1) = 2$$

Teorema della funzione implicita, U. Dini

Prima della dimostrazione del metodo dei moltiplicatori di Lagrange, premettiamo il seguente teorema:

Teorema 1.9.6 (della funzione implicita, U. Dini) *[BDPG, 13.3] Supponiamo che, per esempio, $g(p_0) = 0$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(p_0) \neq 0$.*
Allora V è localmente grafico di una funzione $y = \varphi(x)$, cioè $\exists \delta_0 > 0$ ed è un'unica funzione $\varphi : (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \to \mathbb{R}$, $\exists r_0 > 0$ t.c.

(D_1) $\mathsf{V} \cap B(p_0, r_0) = \{(x, \varphi(x)) : x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)\}$ *e* $\varphi(x_0) = y_0$

(D_2) φ è derivabile e

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

$\forall x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$

***Dim.* 14 (TML, 5.2.3)** *Supponiamo per esempio che $\frac{\partial g}{\partial y}(p_0) \neq 0$.*
Possiamo applicare il teorema della funzione implicita 1.9.6: per D_1, possiamo definire $h(x) := f(x, \varphi(x))$ $x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$
Essendo $p_0 \in \mathsf{V}$ un punto di minimo (da ipotesi) di f su $\mathsf{V} \Rightarrow (1) x_0$ è un punto di minimo di h si $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$.
D'altra parte, per RDC, $h \in C^1\left((x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)\right)$.
Per il teorema di Fermat, per funzioni di 1 variabile,

$$0 = h'(x_0) =_{(RDC)} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \varphi(x_0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0) =$$

$$=_{(D_2)} \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \cdot \left(-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x))}\right) \iff$$

$$\iff det \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \\ \\ \frac{\partial g}{\partial x}(p_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(p_0) \end{bmatrix} = 0 \iff \exists \lambda_0 \in R \text{ t.c. } \nabla f(p_0) = -\lambda_0 \nabla g(p_0)$$

Caso $n = 3$

Il teorema dei moltiplicatori di Lagrange su può estendere a funzioni di $n = 3$ variabili

Teorema 1.9.7 (TML con $n = 3$) *Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ e $\mathsf{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$ dove $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Supponiamo che:*

(i) $\exists \min_{\mathsf{V}} f = f(p_0)$ *(o* $\exists \max_{\mathsf{V}} f = f(p_0)$*) con* $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathsf{V}$

(ii) $\exists \nabla g(p_0) \neq (0, 0, 0)$

Allora

$$\exists \lambda_0 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \begin{cases} g(p_0) = 0 \\ \\ \nabla f(p_0) + \lambda_0 \nabla g(p_0) = (0, 0, 0) \end{cases} \quad (*)$$

Osservazione 1.9.8 *Il vincolo V in questo caso è una superficie di $\mathbb{R}^3$*

Esempio 15 *Trovare* $max_{\partial A} f$*,* $f(x,y,z) = x+y-z$ *e* $\partial A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ ***Soluzione:***
Applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per funzioni di $n = 3$ *variabili*

$$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) = x+y-z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

se $(x,y,z,\lambda) \in \mathbb{R}^4$*, in quanto* $\partial A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = 0\}$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 1+2x\lambda & = \quad 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x} = 1+2y\lambda & = \quad 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 1+2z\lambda & = \quad 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2+y^2+z^2-1 & = \quad 0 \end{cases} \iff (x,y,z,\lambda) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \mp\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow max_{\partial A} f = max\left\{f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \mp\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\} = \sqrt{3} \ e$$

$$min_{\partial A} f = min\left\{f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \mp\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\} = -\sqrt{3}$$

Chapter 2

Integrale per funzioni a più variabili, [BDPG, 14]

Vogilamo introdurre la nozione di <u>integrale</u> per una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}(n = 2, 3)$, detto anche <u>integrale multiplo</u>

2.1 Lez - 10, Integrale doppio su un rettangolo

Caso $n = 2$

$A = Q = [a, b] \times [c, d]$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ limitata, cioè $\exists M > 0$ t.c. $|f(p)| \leq M\, \forall p \in A$

Idea:(Interpretazione geometrica dell'integrale)

Supponiamo $f(p) \geq 0\, \forall p \in A$, definiamo

$$\mathsf{T}_f(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq f(x, y), (x, y) \in A\}$$

(trapezioidale indotta da $f : A \to \mathbb{R}$).
$\mathsf{T}_f(A) \equiv$ solido di $\mathbb{R}^3$ sotteso dal grafico di f, G_f.
Vogliamo definire un numero reale non negativo:

$$L = \iint_A f(x, y)\, dx\, dy \text{ (integrale doppio di f su A)}$$

t.c. $L = volume(\mathsf{T}_f(A))$

Definizione 2.1.1 *(i) Si chiama suddivisione dell'intervallo* $[a, b]$ *un insieme* <u>*finito*</u> *(detto retta reale)* $\{x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n\}$ *t.c.* $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$

(ii) Si chiama sudddivisione dell'insieme $Q = [a, b] \times [c, d]$ *l'insieme (del piano)* $\mathcal{D} := \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 = \{(x_i, y_j) : i = 0, ..., n, j = 0, ..., m\}$*, dove:*

$$\mathcal{D}_1 = \{x_0, ..., x_n\} \text{ suddivisione di [a,b]}$$

$$\mathcal{D}_2 = \{y_0, ..., y_n\} \text{ suddivisione di [c,d]}$$

Dato $\mathcal{D}$ *una suddivisione di Q, Q resta suddiviso in* $n \times m$ *rettangoli*

$$Q_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

con $i = 1, ..., n$ *e* $j = 1, ..., m$
Definiamo $area(Q_{ij}) := (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$

Definizione 2.1.2 *Si chiama* *<u>somme superiore</u> (risp. <u>somme inferiore</u>) di f rispetto alla suddivisione* $\mathcal{D}$ *di Q, fissata una funzione* $f : Q \to \mathbb{R}$*, il numero reale*

$$S(f, \mathcal{D}) := \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} M_{ij} area(Q_{ij}) \, M_{ij} := sup_{Q_{ij}} f$$

rispettivamente il numero reale

$$s(f, \mathcal{D}) := \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} m_{ij} area(Q_{ij}) \, m_{ij} := inf_{Q_{ij}} f$$

Osservazione 2.1.1 *Essendo f limitata,* $i = 1, ..., n \; j = 1, ..., m$

$$M_{ij} := sup_{Q_{ij}} f := sup\{f(p) : p \in Q_{ij}\}$$

$$m_{ij} := inf_{Q_{ij}} f := inf\{f(p) : p \in Q_{ij}\}$$

2.1.1 Proprietà importanti delle somme sup. ed inf.

(PS1) Se $f \geq 0$ su Q, allora $M_{ij} area(Q_{ij})$ e $m_{ij} area(Q_{ij})$ rappresentano il volume di un parallelepipedo di base Q_{ij} ed altezza M_{ij} o m_{ij}

(PS2) Per ogni suddivisione $\mathcal{D}$ di Q

$$area(Q) \cdot inf_Q f \leq s(f, \mathcal{D}) \leq S(f, \mathcal{D}) \leq area(Q) \cdot \sup_Q f$$

(PS3) Si potrebbe provare (ma lo omettiamo) che, prese $\mathcal{D}'$ e $\mathcal{D}''$ due suddivisioni di Q, allora $s(f, \mathcal{D}') \leq S(f, \mathcal{D}'')$

Definizione 2.1.3 *Siano* $Q = [a, b] \times [c, d]$ *e* $f : Q \to \mathbb{R}$ *limitata. La funzione si dice integrabile (secondo <u>Reimann</u>) su Q, e scriveremo* $f \in \mathcal{R}(Q)$*, se*

$$L = sups(f, \mathcal{D}) : \mathcal{D} \text{ sudd. di } Q = inf\{S(f, \mathcal{D}), \mathcal{D} \text{ sudd. di } Q\}$$

Il numero reale L si chiama <u>*integrale*</u>*(doppio) e si denota*

$$L = \iint_Q f(x,y)\, dx\, dy = \iint_Q f = \int_Q f$$

Nel caso in cui $f \geq 0$ ed $f \in \mathcal{R}(Q)$, definiamo il <u>*volume del solido $\mathsf{T}_f(Q)$*</u>

$$vol\,(\mathsf{T}_f(Q)) := \iint_Q f$$

2.1.2 Teoremi: Esistenza & Proprietà integrale

Problema: Condizioni che assicurano $f \in \mathcal{R}(Q)$?

Richiami per funzioni di $n = 1$ variabili $Q = [a,b]$

Teorema 2.1.2 *$f \in C^0([a,b])$, allora $f \in \mathcal{R}([a,b])$,*
$f \geq 0, f \in C^0([a,b])$, $area(\mathsf{T}_f([a,b])) := \int_a^b f(x)\, dx$

Teorema 2.1.3 *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è non decrescete (cioè $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$), allora $f \in \mathcal{R}([a,b])$*

Teorema 2.1.4 (Esistenza dell'integrale) *[BDPG,14.4] Sia $f \in C^0(Q)$ allora $f \in \mathcal{R}(Q)$*

Teorema 2.1.5 (Proprietà dell'integrale) *[BDPG, 14.5] Siano $f, g \in \mathcal{R}(Q)$ con $Q = [a,b] \times [c,d]$*

(i) ***Linearità*** *: $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(Q)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e*

$$\iint_Q (\alpha f + \beta g) = \alpha \iint_Q f + \beta \iint_Q g$$

(ii) ***Monotonia****: Se $g \leq f$ su Q, allora*

$$\iint_Q g \leq \iint_Q f$$

(iii) ***Valore assoluto****: $|f| \in \mathcal{R}(Q)$ e*

$$\left| \iint_Q f \right| \leq \iint_Q |f|$$

(iv) ***Teorema della media interale***

$$inf_Q f \leq \frac{1}{area(Q)} \iint_Q f \leq sup_Q f$$

e il valore $\frac{1}{area(Q)} \iint_Q f \equiv$ media integrale di f su Q.
Se $f \in C^0(Q)$, allora esiste $p_0 = (x_0, y_0) \in Q$ t.c.

$$f(p_0) = \frac{1}{area(Q)} \iint_Q f$$

2.1.3 Formula di riduzione sui rettangoli

Problema: Sia $f \in \mathscr{R}(Q)$, come calcolare $\iint_Q f$?

Teorema 2.1.6 (Formula di riduzione sui rettangoli) *[BDPG, 14.6] Siano $Q = [a,b] \times [c,d]$ e $f \in \mathscr{R}(Q)$*

(i) Supponiamo che, $\forall y \in [c,d]$, la funzione $[a,b] \ni x \to f(x,y)$ sia integrabile (come funzione di una variabile), allora la funzione $[c,d] \ni y \to \int_a^b f(x,y)\,dx$ è integrabile su [c,d] e

$$(1) \iint_Q f = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

(ii) Supponiamo che, $\forall x \in [a,b]$, la funzione $[c,d] \ni y \to f(x,y)$ sia integrabile (come funzione di una variabile), allora

$$(2) \iint_Q f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

In particolare se $f \in C^0(Q)$, valgono (i) e (ii) e

$$(3) \iint_Q f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

Osservazione 2.1.7 (Principio di Cavalieri) *La formula (2) può essere interpretata geometricamente nel modo seguente:*
sia $f \geq 0$, definimao la regione piana $\mathsf{T}_f^x(Q) := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq f(x,y)\}$ per $x \in [a,b]$ fissato. Allora

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy = area\left(\mathsf{T}_f^x(Q)\right)$$

Pertanto la (2) si può interpretare come

$$volume(\mathsf{T}_f(Q)) := \iint_Q f =_{(2)} \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_a^b area(\mathsf{T}_f^x(Q))\,dx \text{ somma di volumi infinitesimi}$$

2.1.4 Esempio

Esempio 16 *Calcolare $\iint_Q f$ dove $Q = [0,1] \times [0,\pi]$, $f(x,y) := x \cdot \sin(xy)$*

Soluzione:

È facile verificare che $f \in C^0(Q)$, quindi possiamo utilizzare la formula (3), però osserviamo che, ai fini del caolcolo, utilizzare (1) o (2) può essere differente.

$$\iint_Q f = \int_0^1 \left(\int_0^\pi x \cdot \sin(xy)\, dy \right) dx$$

Fissiamo $0 \leq x \leq 1$

$$\int_0^\pi x \cdot \sin(xy) = x \int_0^\pi \sin(xy)\, dy = x \left(-\frac{\cos(xy)}{x} \right) \Bigg|_0^\pi = -cos(\pi x) + 1$$

Quindi

$$\int_0^1 \left(\int_0^\pi x \cdot \sin(xy)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(-cos(\pi x) + 1 \right) dx =$$

$$= -\frac{\sin(\pi x)}{\pi} + x \Bigg|_0^1 = -\frac{\sin \pi}{\pi} + 1 + \frac{\sin 0}{\pi} - 0 = 1$$

Esercizio 17 *Verificare che l'integrlae iterato*

$$1 = \iint_Q f = \int_0^\pi \left(\int_0^1 x \cdot \sin(xy)\, dx \right) dy = \int_0^\pi \frac{\sin(y) - y\cos(y)}{y^2}\, dy$$

L'ultimo integrale, esiste, ma la funzione integranda non ammettec ome primitivva rappresentabile come funzioni elementari, come, per esempio $\int \frac{\sin x}{x}\, dx$, $\int e^{-x^2}\, dx$, $[0,1] \ni x \to \frac{\sin(x)}{x}$ *è continua, dunque* $\exists \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\, dx \in \mathbb{R}$

2.2 Lez 11 - Integrale doppio su insiemi generali

Vogliamo defnire la nozione di integrale per una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ limitata, dove A è un dominioi più generale di uun rettangolo.

Definizione 2.2.1 *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ limitata e A limitato e sia $Q = [a,b] \times [c,d] \supset A$. Definiamo*

$$\widetilde{f} : Q \to \mathbb{R}, \widetilde{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & se \quad (x,y) \in A \\ 0 & se \quad (x,y) \in Q \setminus A \end{cases}$$

Si dice che f è <u>*integrabile*</u> *su A, e scriveremo $f \in \mathcal{R}(A)$, se $\widetilde{f} \in \mathcal{R}(Q)$. In questo caso:*

$$\iint_A f = \iint_Q \widetilde{f} \text{ (integrale doppio di f su A)}$$

Osservazione 2.2.1 *(i) Si può verificare (ma omettiamo) che l'integrbilità di f su A non dipende dalla scelta del rettangolo Q, come pure il valore $\iint_Q \widetilde{f}$*

(ii) La funzione $\widetilde{f}$, tipicamente, non sarà continua nei punti di frontiera ∂A

Esempio 17 *$A =$ cerchio del piano, $f = 1$ su A.*

$$G_{\widetilde{f}} := \{(x,y,1) : (x,y) \in A\} \cup \{(x,y,0) : (x,y) \in Q \setminus A\}$$

Se Q è un retta contenente A, allora $\widetilde{f} : Q \to \mathbb{R}$, come definita in 2.2.1, è discontinua in tutti i punti di ∂A.
In accordo con la nostra definizione precedente e tenendo conto della nostra idea geometrica di integrale doppio

$$\iint_Q \widetilde{f} := volume(\mathsf{T}_{\widetilde{f}}(Q))$$

dove $\mathsf{T}_{\widetilde{f}}(Q) := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le \widetilde{f}(x,y)\} = \{(x,y,0) : (x,y) \in Q \setminus A\} \cup \{(x,y,z) : (x,y) \in A, 0 \le z \le 1\} = P \cup \mathsf{T}_f(A)$, essendo P una parte limitata di un piano, $volume(P) = 0$, mentre $volume(\mathsf{T}_f(A)) = volume(A \times [0,1]) = area(A)$.
Quindi questo ragionamento ci porta a concludere:

$$\iint_A f := \iint_Q \widetilde{f} = volume(\mathsf{T}_{\widetilde{f}(Q)}) = area(A)$$

Pertanto, da questo ragionamento, risulta evidente che, se per l'insieme A non fosse defnita una nozione di area non sapremmo come calolcare $\iint_A f$

2.2.1 Insiemi numerabili e loro area

Definizione 2.2.2 *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita come $f(x) := 1$ se $x \in A$, con A limitato. L'insieme A si dice* <u>*misurabile*</u> *(secondo Peano-Jordan) se $f \in \mathcal{R}(A)$. In questo caso il valore dell'integrale si chiama* <u>*misura*</u> *(o area) di A e si denota*

$$|A|_2 := \iint_A 1\,dx\,dy$$

Osservazione 2.2.2 *Se $A = Q = [a,b] \times [c,d]$, allora è facile verificare che Q è misurabile e*

$$|Q|_2 = area(Q) = (b-a)(d-c)$$

Teorema: Caraterizzazione degli insiemi misurabili

Teorema 2.2.3 (Caraterizzazione degli insiemi misurabili) *[BDPG,14.9] Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato. Allora*

$$A \text{ è misurabile} \iff \partial A \text{è misurabile e } |\partial A|_2 = 0$$

Teorema 2.2.4 (BDPG, 14.11) *Sia $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile (come funzione di n=1 variabile). Allora $G_g := \{(x, g(x)) : x \in [a,b]\}$ è misurabile e $|G_g|_2 = 0$*

Tramite i teoremi 2.2.3, 2.2.4 si può provare il seguente corollario.

Corollario 2.2.1 *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato. Supponiamo che*

$$\partial A = \bigcup_{i=1}^{k} G_{g_i}$$

dove $g_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}$ continue $\forall i = 1, ..., k$
Allora A è misurabile.

Esempio 18 (Misurabilità insiemi semplici del piano) *Siano $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue e supponiamo che $g_1(x) \le g_2(x)\,\forall x \in [a,b]$. Sia*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

insieme semplice rispetto all'asse y.

Esercizio 18 *A è limitato e chiuso.*

$$\partial A = G_{g_1} \cup \{(b,y) : g_1(b) \le y \le g_2(b)\} G_{g_2} \cup \{(a,y) : g_1(a) \le y \le g_2(a)\}$$

Pertanto $|\partial A|_2 = 0$ e, per il corollario 2.2.1, A è misurabile.

2.2.2 Integrali doppi su insiemi misurabili

Teorema: Esistenza integrale doppio su insiemi misurabili

Teorema 2.2.5 (Esistenza integrale doppio su insiemi misurabili) *[BDPG, 14.13] Sia $f : A \to \mathbb{R}$. Supponiamo che:*

- *A sia limitato e misurabile*
- *f sia limitato e $f \in C^0(A)$*

Allora $f \in \mathcal{R}(A)$

Osservazione 2.2.6
- *Dal 2.2.5, segue che, se A è limitato, chiuso e misurabile e e $f \in C^0(A)$, allora $f \in \mathcal{R}(A)$*
- *Continuano a valere le proprietà di linearità , monotonia e il teorema della media integrale, che abbiamo visto per l'integrale doppio di una funzione defnita su un rettangolo*

Infine vale il seguente risultato, molto utili nel calcolo di integrali.

2.2.3 Teo.: Integrale doppio su insieme di misura nulla

Teorema 2.2.7 (Integrale doppio su insieme di misura nulla) *[BDPG,14.15] Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme limitato e misurabile, sia $f \in \mathcal{R}(A)$. Supponamo che $A = B \cup C$, con B e C misurabli e $|C|_2 = 0$. Allora:*

$$\iint_A f = \iint_B f$$

Osservazione 2.2.8 *Una immediata conseguenza di 2.2.3 e 2.2.7 è la seguente: sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato e misurabile e sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \in \mathcal{R}(A)$, allora*

$$\iint_A f = \iint_{\mathring{A}} f$$

2.3 Integrali doppi su domini semplici e formule di riduzione

Definizione 2.3.1 *Un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^2$ si dice*

- *Dominio semplice (o normale) rispetto all'asse y se esistono $g_1, g_2 \in C^0([a,b])$ t.c. $g_1 \le g_2$ su $[a,b]$ e*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

- *Dominio semplice (o normale) rispetto all'asse x se esistono $h_1, h_2 \in C^0([c,d])$ t.c. $h_1 \le h_2$ su $[c,d]$ e*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c,d], h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$

Osservazione 2.3.1 *Ricordiamo che, per quanto visto prima, un dominio semplice è limitato e misurabile. Inoltre, per il 2.2.5, se A è semplice ed $f \in C^0(A)$, allora $f \in \mathcal{R}(A)$*

Vogliamo ora introdurre una formila per il calcolo di integrali doppi su domini semplici.

2.3.1 Teorema: Forumla di riduzione su domini semplici

Teorema 2.3.2 (Forumla di riduzione su domini semplici) *[BDPG,14.17] Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio semplice rispetto ad uno degli assi. Supponiamo che $f \in C^0(A)$, allora $f \in \mathcal{R}(A)$ e valgono le seguenti formule:*

1. *Se $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ con $g_1, g_2 \in C^0([a,b])$, allora*
$$(1) \iint_A f = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\, dy \right) dx$$
In particoalre A è misurabile e $|A|_2 = \iint_A 1 = \int_a^b (g_2(x) - g_1(x))\, dx$

2. *Se $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c,d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$ con $h_1, h_2 \in C^0([c,d])$, allora*
$$(2) \iint_A f = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\, dx \right) dy$$
In particoalre A è misurabile e $|A|_2 = \iint_A 1 = \int_c^d (h_2(y) - h_1(y))\, dy$

Osservazione 2.3.3 *Le proprietà di linearità , monotonia e il teorema della media integrale, continuano a valere per integrali doppi su domini semplici.*

Esempio 19 *Calcolare $\iint_A f(x,y)\, dx\, dy$ nei seguenti casi:*

1. *$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$, $f(x,y) = x$*

Soluzione:
A è un dominio semplice rispetto all'asse y ed $f \in C^0(A)$, possiamo applicare la 2.3.2 (1), ottendo che
$$\iint_A f = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} x\, dy \right) dx$$
Fissato $x \in [0,1]$,
$$\int_0^{x^2} x\, dy = x \int_0^{x^2} 1\, dy = xy|_0^{x^2} = x^3$$
Pertanto
$$\iint_A x\, dx\, dy = \int_0^1 x^3\, dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{4}$$

2. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$, $f(x, y) = \frac{\sin(x)}{x}$

Soluzione:
A è un dominio semplice rispetto all'asse x ed $f \in C^0(A)$*, possiamo applicare la 2.3.2 (2), ottendo che*

$$\iint_A \frac{\sin(x)}{x}\, dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_y^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x}\, dx \right) dy$$

Fissiamo $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\exists \int_y^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x}\, dx, \textit{ ma non si può calolcare}$$

Osserviamo che A è un dominio semplice anche rispetto all'asse y, infatti:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq x\}$$

possiamo quindi applicare 2.3.2 (1) ed otteniamo

$$\iint_A \frac{\sin(x)}{x}\, dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^x \frac{\sin x}{x}\, dy \right) dx$$

Fissiamo $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$

$$\int_0^x \frac{\sin(x)}{x}\, dy = \frac{\sin(x)}{x} \int_0^y dy = \frac{\sin(x)}{x} \cdot x = \sin(x)$$

Pertanto

$$\iint_A \frac{\sin(x)}{x}\, dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\, dx = -\cos(x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

2.4 Lez - 12

2.4.1 Applicazione della formula di riduzione su domini semplici al calcolo di volumi di solidi

Definizione 2.4.1 *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato e misurabile e $f \in \mathcal{R}(A)$, con $f \geq 0$ su A. Denotiamo*

$$\mathsf{T}_f(A) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in A\}$$

Si chiama volume del solido $\mathsf{T}_f(A)$ il numero

$$volume\,(\mathsf{T}_f(A)) := \iint_A f$$

Tramite la formula (1) e (2) del precedente teorema 2.3.2 si possono calcolare i volumi di diversi solidi.

Esempio 20 *Sappiamo che $A \subseteq \mathbb{R}^2$ sia un dominio semplice rispetto a y, allora dalla (1) si ottiene:*

$$(*)\ volume(\mathsf{T}_f(A)) = \iint_A f = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

Esercizio 19 *Calcolare il volume del solido di $\mathbb{R}^3$,*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq y^2, (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]\}$$

Soluzione:

È facile verificare che $S = \mathsf{T}_f(A)$ con $A = [0, 1] \times [0, 1]$ dominio semplice sia rispetto y che x, ed $f(x, y) := y^2$, $f \in C^0(A)$. Pertanto possiamo applicare (*) e otteniamo

$$volume(S) = volume(\mathsf{T}_f(A)) = \iint_A f = \int_0^1 \left(\int_0^1 y^2\, dy \right) dx$$

se rappresentiamo

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

Fissato $x \in [0, 1]$,

$$\int_0^1 y^2\, dy = \frac{1}{3} y^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Pertanto

$$volume(S) = \int_0^1 \frac{1}{3}\, dx = \frac{1}{3}$$

Infine vale la seguente proprietà , molto utili nel calcolo di integrali doppi

2.4.2 Teorema: Additività dell'integrale doppio

Teorema 2.4.1 (Additività dell'integrale doppio) *[BDPG,14.18]*
Siano $A_1, ..., A_m \subseteq \mathbb{R}^2$ insiemi semplici t.c.

$$A_i \cap A_j \subseteq \partial A_i \cap \partial A_j$$

se $i \neq j, i, j = 1, ..., m$.
Sia $f : A_1 \cup ... \cup A_m \to \mathbb{R}$ e supponiamo che $f \in \mathscr{R}(A_i) \forall i = 1, ..., m$.
Allora f è integrabile su $A_1 \cup ... \cup A_m$, cioè $f \in \mathscr{R}(A_1 \cup ... \cup A_m)$ e

$$\iint_{A_1 \cup ... \cup A_m} f = \sum_{i=1}^{m} \iint_{A_i} f$$

2.5 Cambiamento di var. per gli integrali doppi

2.5.1 Caso particolare: coordinate polari

Problema: Calcolare il volume della semisfera di centro $(0, 0, 0)$ e raggio $r > 0$ in $\mathbb{R}^3$.
È facile verificare che, se denotiamo S la semisfera di centro $(0, 0, 0)$ e raggio $r > 0$,

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, z \geq 0\}$$

$z^2 \leq r^2 - (x^2 + y^2)$, $0 \leq z \leq \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}$

Inotre, se denotiamo $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ allora S può essere anche rappresentato nella forma

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}\right\} = \mathsf{T}_f(D)$$

dove $f(x, y) := \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}$,$(x, y) \in D$.
Utilizzando la nostra definizione di volume $\mathsf{T}_f(D)$, otteniamo che

$$volume(S) = volume(\mathsf{T}_f(D)) := \iint_D f(x, y)\, dx\, dy$$

Esercizio 20 *Calcolare* $\iint_D \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}\, dx\, dy$

Soluzione:

- **Primo modo**
  Osserviamo che l'insieme D può essere rappresentato come un dominio semplcei rispetto all'asse y. Infatti

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -r \leq x \leq r, -\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}\}$$

Utilizzando la formula di riduzione per integrali doppi su domini semplici, otteniamo

$$\iint_D \sqrt{r^2-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_{-r}^{r}\left(\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2-(x^2+y^2)}\,dy\right) dx$$

Notiamo che il calcolo dell'integrare iterato risulta abbastanza complicato.

- **Secondo modo**
Utilizziamo le coordinate polari, cioè consideriamo l'applicazione $\psi : (0,+\infty)\times(0,2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $\rho,\vartheta \to (\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)$

$$\begin{cases} x = x(\rho,\vartheta) = \rho\cos\vartheta \\ y = y(\rho,\vartheta) = \rho\sin\vartheta \end{cases}$$

È facile verificare che $\psi : (0,+\infty)\times(0,2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \geq 0\}$ è bigettiva e se $D^* := (0,r)\times(0,2\pi)$

$$\psi(D^*) = \mathring{D} \setminus \{(x,0) : 0 \leq x \leq r\}$$

Poichè
$$area(D) = area\left(\mathring{D} \setminus \{(x,0) : 0 \leq x \leq r\}\right)$$
e
$$area(\partial D) = area\left(\{(x,0) : 0 \leq x \leq r\}\right) = 0$$
per la proprietà degli integrali doppi sugli insiemi di misura nulla, segue che

$$\iint_D \sqrt{r^2-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \iint_{\mathring{D}\setminus\{(x,0):0\leq x\leq r\}} \sqrt{r^2-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

$$= \iint_{\mathring{D}\setminus\{(x,0):0\leq x\leq r\}} \sqrt{r^2-\rho^2}\,dx\,dy$$

Idea: Vogliamo cambiare le variabili di integrazione nell'integrale doppio da $(x,y) \to$ a (ρ,ϑ).
Il problema è capire come si trasforma l'elemento infinitesimo di area $dA = dxdy$ in funzione dell'elemento infinitesimo $dA^* = d\rho d\vartheta$

Più precisamente capire quale sia il coefficiente di trasformazione $k = k(\rho,\vartheta)$ per cui $dA = dxdy = k(\rho,\vartheta)\,d\rho\,d\vartheta = k(\rho,\vartheta)dA^*$
Utilizziamo un ragionamento intuitivo: il rettangolo $Q^* = [\rho,\rho+d\rho]\times[\vartheta,\vartheta+d\vartheta]$, sarà trasportato nella regione piana $Q = \psi(Q^*)$ delimitata da:

  - $L_1 =$ il segmento che congiunge i punti $\psi(\rho,\vartheta)$ e $\psi(\rho+d\rho,\vartheta)$
  - $L_2 =$ l'arco di cerchio che congiunge i punti $\psi(\rho+d\rho,\vartheta)$ e $\psi(\rho+d\rho,\vartheta+d\vartheta)$
  - $L_3 =$ il segmento che congiunge i punti $\psi(\rho+d\rho,\vartheta+d\vartheta)$ e $\psi(\rho,\vartheta+d\vartheta)$

– L_4 = l'arco di cerchio che congiunge i punti $\psi(\rho,\vartheta+d\vartheta)$ e $\psi(\rho,\vartheta)$

Se $d\rho$ e $d\vartheta$ sono "molto piccoli", $dA = dxdy \cong area(Q) \cong lunghezza(L_4)d\rho = \rho d\vartheta d\rho = \rho dA^*$ con $A = [x, x+dx] \times [y, y+dy]$.
Si può provare rigorosamente che $dA = \rho dA^*$.
Ritornando al calcolo dell'integrale doppio

$$\iint_D \sqrt{r^2-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \iint_{\mathring{D}\setminus\{(x,0):0\le x\le r\}} \sqrt{r^2-\rho^2}dA =$$

$$= \iint_{(0,r)\times(0,2\pi)} \sqrt{r^2-\rho^2}\rho dA^* = \iint_{(0,r)\times(0,2\pi)} \sqrt{r^2-\rho^2}\rho d\rho d\vartheta =$$

$$= \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{r^2-\rho^2}\rho\,d\vartheta\right) d\rho = 2\pi \int_0^r \sqrt{r^2-\rho^2}\rho\,d\rho$$

Esercizio 21 $\int_0^r \sqrt{r^2-\rho^2}\rho\,d\rho = \frac{r^3}{3}$

In conclusione

$$volume(S) = \iint_D \sqrt{r^2-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \frac{2}{3}\pi r^3$$

2.5.2 Caso generale

Siano $D, D^* \subseteq \mathbb{R}^2$ aperti limitati e misurabili e sia

$$\psi : D^* \to D, \psi(u,v) = (\psi_1(u,v), \psi_2(u,v)) = (x(u,v), y(u,v))$$

$\psi_1, \psi_2 : D^* \to \mathbb{R}$

Definizione 2.5.1 *La mappa ψ si dice un cambiamento di variabili se*

- *ψ è bigettiva*
- *$\psi_i \in C^1(D^*)$, ψ_i, $\frac{\partial\psi_i}{\partial u}$, $\frac{\partial\psi_i}{\partial v}$ $: D^* \to \mathbb{R}$ limitate (i=1,2)*
- $\det D\psi(u,v) \neq 0$, $\forall(u,v) \in D^*$, *dove*

$$D\psi(u,v) := \begin{bmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\psi_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\psi_2}{\partial v}(u,v) \end{bmatrix} \quad \textit{(Matrice Jacobiana)}$$

Denotiamo $dA^* = du\,dv$ e $dA = dx\,dy$

Problema: Legame tra dA e dA^*?

Si può provare che $dA = |[|\,detD\psi(u,v)]dA^*$.
Più precisamente vale:

2.5.3 Teorema: Cambiamento di variabili negli integrali doppi

Teorema 2.5.1 (Cambiamento di variabili negli integrali doppi) *[BDPG,14.19]* *Siano $D, D^* \subseteq \mathbb{R}^2$ aperti limitati e misurabili, sia $\psi : D^* \to D$ un cambiamento di variabili e sia $f : D \to \mathbb{R}$ continua e limitata.*
Allora vale la formula

$$(FCV)_2 \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(\psi(u,v))\,|\det D\psi(u,v)|\;du\,dv$$

Esercizio 22 *(i) Calcolare l'area dell'insieme*

$$D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\right\}$$

dove $a > 0, b > 0$ fissati.

Soluzione:

L'insieme D rappresenta un'elisse con semiassi di lunghezza a e b. L'insieme D è limitato e misurabile. Infatti:

Esercizio 23 *D è un dominio semplice rispetto all'asse y. Quindi D è misurabile.*

Per definizione

$$area(D) = |D|_2 = \iint_D 1\,dx\,dy$$

Utilizzando il cambiamento di variabili rispetto a coordinate ellittiche, il calcolo dell'integrale doppio diventa abbastanza semplice. Infatti, consideriamo il cambiamento

$$\begin{cases} x(\rho,\vartheta) = \psi_1(\rho,\vartheta) := a\rho\cos\vartheta \\ y(\rho,\vartheta) = \psi_2(\rho,\vartheta) := b\rho\cos\vartheta \end{cases} \quad \rho \ge 0, \vartheta \in [0,2\pi]$$

e sia $D^* := (0,1) \times (0,2\pi)$, $\psi : D^* \to \mathbb{R}^2$, $\psi(\rho,\vartheta) := (\psi_1(\rho,\vartheta), \psi_2(\rho,\vartheta))$

Esercizio 24 *Verificare che la mappa $\psi : D^* \to \mathring{D} \setminus \{(x,0) : 0 \le x \le a\}$ è un cambiamento di variabili, in accordo con la definizione 5.3.2 prima introdotta. Inoltre $\det D\psi(\rho,\vartheta) = ab\rho$.*

Possiamo applicare $(FCV)_2$ con $f \equiv 1$ su D, ed otteniamo

$$area(D) = \iint_D 1\,dx\,dy = \iint_{\mathring{D}\setminus\{(x,0):0\le x\le a\}} 1\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{D^*} 1 \cdot |\det D\psi(\rho,\vartheta)|\;d\rho\,d\vartheta = 2\pi ab \int_0^1 \rho\,d\rho\,d\vartheta = \pi ab$$

(ii) Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D \frac{y^2}{x}\,dx\,dy$$

Dove $D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2x^2, y^2 \leq x \leq 3y^2\right\}$

Soluzione:

L'insieme D può essere viso come $D = D_1 \cap D_2$*, dove*

- $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2x^2\}$
- $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 y^2 \leq x \leq 3y^2\}$

Incominciamo a studiare la geometria di D. È chiaro che $(0,0) \in D$*. Supponiamo che* $(x,y) \in D \setminus \{(0,0)\}$ *allora per definizione di D,* $(x,y) \in (D_1 \setminus \{(0,0)\}) \cap (D_2 \setminus \{(0,0)\})$*. È chiaro che, per come sono definiti* D_1 *e* D_2*, necessariamente*

1. $x > 0$ *e* $y > 0$
2. $x^2 \leq y \leq 2x^2$
3. $y^2 \leq x \leq 3y^2$

Dividendo la disuguaglianza (2) per x^2 *e la (3) per* y^2*, grazie alla condizione (1), si intuisce che un possibile cambiamento di variabili* $x = \psi_1(u,v)$*,* $y = \psi_2(u,v)$ *potrebbe essere quello per cui*

$$\begin{cases} u = \frac{y}{x^2} \\ \\ v = \frac{x}{y^2} \end{cases} \quad \text{con } 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 3$$

Esercizio 25 *Risolvere il sistema precedente rispetto ad x e y.*

Otteniamo

$$\begin{cases} x = x(u,v) = \psi_1(u,v) = \frac{1}{u^{\frac{2}{3}} v^{\frac{1}{3}}} \\ \\ y = y(u,v) = \psi_2(u,v) = \frac{1}{u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}}} \end{cases}$$

Sia $D^* := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 1 < u < 2, 1 < v < 3\}$ *è chiaro per costruzione che:*

- $\psi : D^* \to \mathring{D}$ *è bigettiva*
- D^* *e* $\mathring{D}$ *sono limitati e misurabili (da 2.2.1)*
- $\psi_i \in C^1(D^*)$*, i =1,2*

– ***Esercizio 26***

$$D\psi(u,v) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}u^{-\frac{5}{3}}v^{-\frac{1}{3}} & -\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{-\frac{4}{3}} \\ -\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}v^{-\frac{2}{3}} & -\frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{5}{3}} \end{bmatrix}$$

$\det D\psi(u,v) = \frac{1}{3}u^{-2}v^{-2}$ *se* $(u,v) \in D^*$ *Possimao applicare l'osservazione (??) e* $(FCV)_2$*, ottenendo che*

$$\iint_D \frac{y^2}{x}\,dx\,dy = \iint_{\mathring{D}} \frac{y^2}{x}\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{D^*} \frac{1}{v}\frac{1}{3}\frac{1}{u^2}\frac{1}{v^2}\,du\,dv = \frac{1}{3}\iint_{D^*} \frac{du\,dv}{u^2v^3}$$

L'ultimo integrale doppio risulta essere un integrale doppo su un rettangolo, applicando la formula di riduzione sui rettangoli otteniamo:

$$\iint_{D^*} \frac{du\,dv}{u^2v^3} = \int_1^2 u^{-2}\,du \cdot \int_1^3 v^{-3}\,dv =$$

$$= -\frac{1}{u}\bigg|_1^2 \cdot -2v^{-2}\big|_1^3 = \frac{2}{9}$$

Pertanto

$$\iint_D \frac{y^2}{x} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9} = \frac{2}{27}$$

2.6 Lez - 13, Integrali tripli, [BDPG,14.5]

2.6.1 Integrale triplo su un parallelepipedo

Sia $Q := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subset \mathbb{R}^3$ un parallelepipedo. Siano

- $\mathscr{D}_1 := \{a_1 = x_0 \leq \cdots \leq x_i \leq \ldots x_{n_1} = b_1\}$ sudd. di $[a_1, b_1]$
- $\mathscr{D}_2 := \{a_2 = y_0 \leq \cdots \leq y_j \leq \ldots y_{n_2} = b_1\}$ sudd. di $[a_2, b_2]$
- $\mathscr{D}_3 := \{a_3 = z_0 \leq \cdots \leq z_k \leq \ldots z_{n_3} = b_3\}$ sudd. di $[a_3, b_3]$

Definizione 2.6.1 *Si chiama suddivisione $\mathscr{D}$ del parallelepipedo $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ un insieme del tipo*

$$\mathscr{D} = \mathscr{D}_1 \times \mathscr{D}_2 \times \mathscr{D}_3 = \{(x_i, y_j, z_k) : i = 0, ..., n_1; j = 0, ..., n_2; k = 0, ..., n_3\}$$

se $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \mathscr{D}_3$ sono definiti come sopra.

Data una suddivisione $\mathscr{D}$ di Q, Q risulta suddiviso in $n_1 \times n_2 \times n_3$ parallelepipedi

$$Q_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

con $i = 1, ..., n_1$, $j = 1, ..., n_2$, $k = 1, ..., n_3$, il cui volume è

$$vol(Q_{ijk}) = |Q_{ijk}|_3 := (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$$

Sia $f : Q \to \mathbb{R}$ limitata e definiamo

$$m_{ijk} = inf_{Q_{ijk}} f \in \mathbb{R} \text{ e } M_{ijk} = sup_{Q_{ijk}} f \in \mathbb{R}$$

con $i = 1, ..., n_1$, $j = 1, ..., n_2$, $k = 1, ..., n_3$ Definiamo

- $S(f, Q) = \sum_{ijk} M_{ijk} \cdot |Q_{ijk}|_3$ (somma superiore di f su Q)
- $s(f, Q) = \sum_{ijk} m_{ijk} \cdot |Q_{ijk}|_3$ (somma inferiore di f su Q)

Definizione 2.6.2 *Si dice che f è integrabile su Q e si scrive $f \in \mathscr{R}(Q)$ se*

$$L = sup_{\mathscr{D}} s(f, \mathscr{D}) = inf_{\mathscr{D}} S(f, \mathscr{D}) \in \mathbb{R}$$

Il valore L prende nome di integrale triplo di f su Q e si denota con i simboli

$$\iiint_Q f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \iiint_Q f, \int_Q f, \int_Q f\, dx\, dy\, dz$$

Continuano a valere i risultati degli interali doppi su rettangoli.

Proprietà

Teorema 2.6.1 (Esistenza dell'integrale) *Sia* $f \in C^0(Q)$ *allora* $f \in \mathcal{R}(Q)$

Teorema 2.6.2 (Proprietà dell'integrale) *Siano* $f, g \in \mathcal{R}(Q)$

(i) ***Linearità*** *:* $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(Q)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *e*

$$\int_Q (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_Q f + \beta \int_Q g$$

(ii) ***Monotonia****: Se* $g \leq f$ *su* Q*, allora*

$$\int_Q g \leq \int_Q f$$

(iii) ***Valore assoluto****:* $|f| \in \mathcal{R}(Q)$ *e*

$$\left| \int_Q f \right| \leq \int_Q |f|$$

(iv) ***Teorema della media interale***

$$inf_Q f \leq \frac{1}{|Q|_3} \int_Q f \leq sup_Q f$$

Se $f \in C^0(Q)$*, allora esiste* $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in Q$ *t.c.*

$$f(p_0) = \frac{1}{|Q|_3} \int_Q f$$

2.6.2 Integrale triplo su insiemi generali

Definizione 2.6.3 *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}^3$ *limitato,* $f : A \to \mathbb{R}$ *limitata. Allora* f *si dice* <u>*integrabile*</u> *su* A*, e si scrive* $f \in \mathcal{R}(A)$ *se la funzione* $\widetilde{f} : Q \to \mathbb{R}$ *definita come*

$$\widetilde{f}(x,y,z) := \begin{cases} f(x,y,z) & se \quad (x,y,z) \in A \\ 0 & se \quad (x,y,z) \in Q \setminus A \end{cases}$$

è integrabile su Q*, dove* Q *è un (qualunque) parallelepipedo contenente* A*.*
Si pone:

$$\int_A f := \int_Q \widetilde{f}$$

Definizione 2.6.4 *Un insieme* $A \subseteq \mathbb{R}^3$ *limitato si dice* <u>*misurabile*</u> *(secondo Peano-Jordan) se la funzione* $\widetilde{f} : Q \to \mathbb{R}$*, definita come*

$$\widetilde{f}(x,y,z) := \begin{cases} 1 & se \quad (x,y,z) \in A \\ 0 & se \quad (x,y,z) \in Q \setminus A \end{cases}$$

è integrabile su Q, per un opportuno parallelepipedo $Q \supseteq A$

$$|A|_3 := \iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz$$

(misura 3-dimensionale o volume di A)

Continuano a valere

Teorema 2.6.3 (Caraterizzazione degli insiemi misurabili) *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ limitato. Allora*

$$A \text{ è misurabile} \iff \partial A \text{è misurabile e } |\partial A|_3 = 0$$

Teorema 2.6.4 (BDPG, 14.11) *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^3$ limitato e misurabile, sia $g \in \mathcal{R}(E)$. Allora $G_g := \{(x, y, g(x, y)) : (x, y) \in E\} \subseteq \mathbb{R}^3$ è misurabile e $|G_g|_3 = 0$*

Teorema 2.6.5 (Esistenza integrale tripli su insiemi misurabili) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Supponiamo che:*

- *A sia limitato e misurabile*
- *f sia limitato e $f \in C^0(A)$*

Allora $f \in \mathcal{R}(A)$

2.6.3 Formule di riduzione per integrali tripli

Teorema 2.6.6 (Formule di riduzione su parallelepipedi) *[BDPG,14.26] Siano $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$, $f \in C^0(Q)$*

(i) La funzione

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \ni (x, y) \to \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) \, dz$$

è integrabile su $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ e

$$(1) \iiint_Q f = \iint_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) \, dz \right)$$

(ii) La funzione

$$[a_1, b_1] \ni x \to \iint_{[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} f(x, y, z) \, dy \, dz$$

è integrabile su $[a_1, b_1]$ e

$$(2) \iiint_Q f = \int_{a_1}^{b_1} \left(\iint_{[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} f(x, y, z) \, dz \right)$$

La

(1) si chiama formula di riduzione per fili

(2) si chiama formula di riduzione per strati

- *L'insieme* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]\}$ *è uno strato.*
- *L'insieme* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [a_3, b_3]\}$ *è un filo.*

Un'immediata conseguenza della formula di riduzione sui parallelepipedi e di quella per i rettangoli 2.1.6 segue il seguente risultato:

Corollario 2.6.1 *Sia* $f \in C^0(Q)$ *allora*

$$\iiint_Q f = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)\, dz \right) dy \right) dx$$

Definizione 2.6.5 *Un insieme* $A \subseteq \mathbb{R}^3$ *si chiama semplice (o normale) rispetto all'asse z se*

$$(*)\, A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in E, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$$

dove $g_1, g_2 : E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*,* $g_1, g_2 \in C^0(E)$

Osservazione 2.6.7 *Definizioni analoghe si possono dare per insiemi semplici rispetto agli assi x ed y.*

Teorema 2.6.8 (Formule di riduzione per integrali tripli rispetto a domini semplici) *[BDPG,14.28] Sia* $A \subseteq \mathbb{R}^3$ *un insieme semplice rispetto all'asse z di tipo* $(*)$ *e sia* $f \in C^0(A)$*. Allora*

$$(3)\ \iiint_A f = \iint_E \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dx\, dy$$

Osservazione 2.6.9 *La formula (3) è una formula di riduzione per fili che generalizza la formula (1) di quella sui parallelepipedi.*
La formula (2) di riduzione per strati su parallelepipedi può essere estesa ad insiemi più generali. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ *limitato e misurabile e supponiamo che*

$$(**)\, A = A \cap (\mathbb{R} \times [a, b] \times \mathbb{R})$$

e sia tale che, lo strato di A

$(***)\, A_y = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in A\}$ *sia misurabile (come insieme del piano x,z)*

Teorema 2.6.10 (Formula di riduzione per strati) *[BDPG,14.28] Sia* $A \subseteq \mathbb{R}^3$ *verificante* $(**)$ *e* $(***)$ *e sia* $f \in C^0(A)$ *limitata. Allora*

$$(4)\ \iiint_A f = \int_a^b \left(\iint_{A_y} f(x, y, z)\, dx\, dz \right) dy$$

Applicazione della formula di riduzione per strati: volume di un solido di rotazione

Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [c, d], x^2 + y^2 \leq f(z)^2\}$ dovve $f \in C^0([c, d]),\ f \geq 0$.
A può essere visto come il <u>solido di rotazione</u> ottenuto ruotando l'insieme

$$F := \{(y, z) : z \in [c, d], 0 \leq y \leq f(z)\}$$

attorno all'asse z.
Fissato $z \in [c, d]$ lo strato di A

$$A_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq f(z)^2\}$$

rappresenta un cerchio (nel piano x,y) con centro (0,0) e raggio $f(z)$.
Quindi

$$area(A_z) = \pi f(z)^2 \, \forall z \in [c, d]$$

Pertanto applicando la (4), otteniamo

$$|A|_3 = \iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz = \int_c^d \left(\iint_{A_z} 1 \, dx \, dy \, dz \right) =$$

$$= \int_c^d area(A_z) \, dz = \pi \int_c^d f(z)^2 \, dz$$

(formula del volume di un solido di rotazione)

2.6.4 Cambiamento di variabili negli integrali tripli

Siano $D^*, D \subseteq \mathbb{R}^3$ aperti limitati e misurabili, e sia $\Psi : D^* \to \mathcal{D}$, $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) = (x, y, z)$, $\Psi_i = \Psi_i(u, v, w) : D^* \to \mathbb{R}$ (i=1,2,3).

Definizione 2.6.6 *La mappa Ψ si dice <u>cambiamento di variabile</u> (in $\mathbb{R}^3$) Se*

(i) Ψ *è bigettiva*

(ii) $\Psi_i \in C^1(D^*)$,

$$\Psi_i, \frac{\partial \Psi_i}{\partial u}, \frac{\partial \Psi_i}{\partial v}, \frac{\partial \Psi_i}{\partial w} : D^* \to \mathbb{R}$$

limitate (i = 1,2,3)

(iii) $\det D\Psi(u, v, w) \neq 0$, *dove*

$$D\Psi(u, v, w) := \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial u} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial v} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial w} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial u} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial v} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial w} \\ \frac{\partial \Psi_3}{\partial u} & \frac{\partial \Psi_3}{\partial v} & \frac{\partial \Psi_3}{\partial w} \end{bmatrix}$$

se $(u, v, w) \in \mathcal{D}^*$

Teorema 2.6.11 (Cambiamento di variabili negli integrali tripli) *Siano $D^*, D \subset \mathbb{R}^3$ aperti limitati e misurabili, sia $\Psi : D^* \to D$ un cambiamento di variabili e sia $f \in C^0(D)$ e limitata. Allora*

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D^*} f(\Psi(u,v,w))\,|\det D\Psi(u,v,w)|\;du\,dv\,dw$$

Definizione 2.6.7 *Coordinate sferiche:*

$$\Psi \equiv \begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\vartheta \\ y = r\sin\varphi\sin\vartheta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

$0 \leq \vartheta \leq 2\pi, r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq \pi,\ |\det D\Psi(r,\vartheta,\varphi)| = r^2 \sin\varphi$

Chapter 3

Curve ed integrali curvilinei, [BDPG, 12]

3.1 Lez - 14, Curve in $\mathbb{R}^n$

Definizione 3.1.1 *(i) Si chiama* <u>*curva*</u> *una mappa* $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ *continua,* $\gamma(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t))$ *con* I *intervallo di* $\mathbb{R}$

(ii) Se $I = [a, b]$*, i punti* $\gamma(a)$*,* $\gamma(b)$ *di* $\mathbb{R}^n$ *si chiamano* <u>*estremi*</u> *della curva*

(iii) Si chiama <u>*sostegno*</u> *(o supporto) della curva* γ*, l'insieme* $\gamma(I) \subseteq \mathbb{R}^n$*. Si chiama* <u>*equazione parametrica*</u> *di* γ *l'equazione* $x = (x_1, ..., x_n) = \gamma(t)\, t \in I$

(iv) La curva γ *si dice* <u>*chiusa*</u> *se* $I = [a, b]$ *e* $\gamma(a) = \gamma(b)$

(v) La curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ *si dice* <u>*semplice*</u> *se* γ *è iniettiva, o se* γ *è chiusa e* $I = [a, b]$*, allora* $\gamma : [a, b) \to \mathbb{R}^n$ *è iniettiva.*

I casi più significativi di curve, interessanti per le applicazioni, sono in $n = 2, 3$.

Esempio 21 *(i) Sia* $f \in C^0([a, b])$ *e consideriamo le curve* $\gamma, \gamma^* : [a, b] \to \mathbb{R}^2$*,* $\gamma(t) = (t, f(t))$ *e* $\gamma^*(t) = (f(t), t)$*,* $t \in [a, b]$*.*
γ, γ^* *sono dette* <u>*curve piane cartesiane*</u>*.*

- *Gli estremi della curva* γ *sono i punti:* $(a, f(a)), (b, f(b))$
- *Gli estremi della curva* γ^* *sono i punti:* $(f(a), a), (f(b), b)$

Il supporto della curva γ, γ^* *coincide rispettivamente, con il grafico della funzione f,* G_f*, vista, nel primo caso, come funzione di y rspetto a x, cioè*

$$G_f := \{(t, f(t)) : t \in [a, b]\}$$

e, nel secondo caso, come funzione di x rispetto a y, cioè

$$G_f := \{(f(t), t) : t \in [a, b]\}$$

Osserviamo che le due curve sono semplici e non chiuse.
Le eq. parametriche sono, rispettivamente,

$$- \ (x, y) = \gamma(t) = (t, f(t))\, t \in [a, b] \iff \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}, \ t \in [a, b] \text{ e}$$

$$- \ (x, y) = \gamma(t) = (f(t), t)\, t \in [a, b] \iff \begin{cases} x = f(t) \\ y = t \end{cases}, \ t \in [a, b]$$

(ii) *Sia* $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ *la curva definita da* $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$
È facile verificare che γ *è una curva piana chiusa* $(\gamma(0) = (1, 0) = \gamma(2\pi))$ *e semplice.*
Il sostegno di γ,$\gamma([0, 2\pi])$ *è dato da*

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

L'equazione parametrica di γ *è data da*

$$(x, y) = \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)), t \in [0, 2\pi] \iff \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases} \ t \in [0, 2\pi]$$

(iii) *Sia* $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$ *la curva definita come nell'esempio (ii), cambaindo il dominio.*
La curva è ancora una curva piana chiusa $(\gamma(0) = (1, 0) = \gamma(4\pi))$ *ma non è semplice. Infatti la funzione* $\gamma[0, 4\pi) \to \mathbb{R}^2$ *non è iniettiva.*
La curva ha come sostego C dell'esempio (ii). Da un punto di vista intuitivo, il sostegno di γ *è percorso due volte.*

N.B.: 3.1.1 *Due curve possono avere lo stesso sostegno ma essere differenti, come gli esempi (ii) e (iii)*

(iv) *Sia* $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *la curva definita da* $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, $t \in \mathbb{R}$ γ *è una curva semplice, on chiusa ed il suo sostegno rappresenta un'elica infinia contenuta nel cilindro* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$.
L'eq. parametrica è data da

$$(x, y, z) = \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t) t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = cos(t) \\ y = sin(t) \\ z = t \end{cases} \ t \in \mathbb{R}$$

3.1.1 Orientazione di una curva semplice

Sia data una curva semplice $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$. Allora essa induce <u>un'orientazione</u> sul suo sostegno $\gamma(I) \subseteq \mathbb{R}^n$.
Più precisamente

Definizione 3.1.2 *Data $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ curva semplice, si dice che il punto $x_1 = \gamma(t_1)$ precede il punto $x_2 = \gamma(t_2)$ se $t_1 < t_2$. L'orientazione della curva viene detta anche verso della curva.*

Esempio 22 *Le curve degli esempi (i), (ii), (iv), essendo semplici, sono tutte orientabili, mentre la curva (iii) non essendo semplice, non è orientabile.*

3.1.2 Vettore velocità di una curva

Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ una curva. Se le componenti $\gamma_i : I \to \mathbb{R}$ $(i = 1, ..., n)$ sono derivabili in un fissato punto $t_0 \in I$, il vettore

$$\gamma'(t_0) = (\gamma_1'(t_0), ..., \gamma_n')$$

è detto vettore velocità di γ in t_0.
Essendo la funzione γ_i derivabile, sappiamo che

$$(*)\, \gamma_i(t) = \gamma_i(t_0) + \gamma_i'(t_0)(t - t_0) + o(t - t_o)\, (t \to t_0)$$

per $i = 1, ..., n$.
Una forma più compatta per scrivere (*) è

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) + o(t - t_o)\, (t \to t_0)$$

Osservazione 3.1.2 *È immediato verificare che $\gamma'(t_0) = D\gamma(t_0)^T$, dove*

$$D\gamma(t_0) = \begin{bmatrix} \gamma_1'(t_0) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t_0) \end{bmatrix} \text{ matrice Jacobiana } n \times 1$$

Definizione 3.1.3 *Se $\gamma'(t_0) \neq \underline{O}_{\mathbb{R}^n}$, si chiama retta tangente alla curva γ nel punto $x_0 = \gamma(t_0)$ la retta di equazione parametrica*

$$x = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) = \gamma_1(t_0) + \gamma_1'(t_0)(t - t_0) + ... + \gamma_n(t_0) + \gamma_n'(t_0)(t - t_0)$$

se $t \in I$

Osservazione 3.1.3 *(i) Sia $n = 2$, $\gamma(t) = (\gamma_1, (t)\gamma_2(t))$, $t \in I$, $p_0 = \gamma(t_0) = (x_0, y_0)$, $\gamma'(t_0) = (v_1, v_2) \neq (0, 0)$. Supponiamo per esempio, $v_2 \neq 0$. L'eq. parametrica della retta tangente diventa*

$$\begin{cases} x = v_1(t - t_0) + x_0 \\ y = v_2(t - t_0) + y_0 \end{cases} \iff \begin{cases} t - t_0 = \frac{y - y_0}{v_2} \\ \\ x = v_1(t - t_0) + x_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{v_1}{v_2}(y - y_0) + x_0 \iff$$

$$\iff r : v_2(x - x_0) - v_1(y - y_0) = 0$$

(eq. di una retta nel piano x,y passante per (x_0, y_0) di direzione v)

N.B.: 3.1.4 *Si noti che il vettore* $(v_2, -v_1)$ *è* *ortogonale* *al vettore* (v_1, v_2), *in quanto* $(v_1, v_2) \cdot (v_2, -v_1) = 0$, *e la retta* r *può essere riscritta come:*

$$r : (x - x_0, y - y_0) \cdot (v_2, -v_1)$$

(ii) Se $\gamma'(t_0) = \underline{O}_{\mathbb{R}^n}$, *la retta tangente può non esistere*

Esempio 23 $n = 2$, $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, *definita come* $\gamma(t) = (x_0, y_0)\, \forall t \in \mathbb{R}$.
Il sostegno di γ *è il punto* (x_0, y_0)*: non è una curva regolare.*

Definizione 3.1.4 *Una curva* $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$

(a) si dice di classe C^m *se* $\gamma_i : I \to \mathbb{R}$ *sono di classe* $C^m\, \forall i = 1, ..., n$

(b) si dice *regolare* *se* γ *è di classe* C^1 *e* $\gamma'(t) \neq \underline{O}_{\mathbb{R}^n}\ \forall t \in I$

Definizione 3.1.5 *Data* $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ *curva regolare, si chiama* *versore* *(o direzione) tangente a* γ *il campo vettore*

$$\mathsf{T}_\gamma(t) := \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\ t \in I$$

Definizione 3.1.6 *Una curva* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *si dice* C^1 *a tratti (o regolare a tratti) se esiste una suddivisione* $a = t_0 < ... < t_n = b$ *di* $[a, b]$ *t.c.*

$$\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]} : [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{R}^n$$

è di classe C^1 *(rispettivamente regolare).*
In tal caso γ *si dice anche uunionce delle* N *curve* $\gamma_i := \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ *e si scrive*

$$\gamma := \bigcup_{i=1}^{N} \gamma_i$$

Esempio 24 *Sia* $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ *la curva* $\gamma(t) = (t, |t|)$, $t \in [-1, 1]$.
Allora è facile verificare che γ *una curva regolare a tratti. Infatti se* $-1 = t_0 < 0 = t_1 < t_2 = 1$, *è facile verificare che*

$$\gamma_i \equiv \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]} : [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{R}^2$$

è *regolare.*
Poichè

- $\gamma_1 := (t, -t)$, $t \in [t_0, t_1]$
- $\gamma_1 := (t, t)$, $t \in [t_1, t_2]$

Si noti che il sostegno di γ *è il grafico della funzione* $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $y = f(x) = |x|$

3.1.3 Cambiamento di parametro di una curva

Definizione 3.1.7 *Due curve $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, $\widetilde{g} : \widetilde{I} \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1 si dicono equivalenti se esiste una funzione bigettiva $\varphi : \widetilde{I} \to I$ t.c.*

$$\varphi \in C^1(\widetilde{I}); \varphi'(\tau) \neq 0 \, \forall \tau \in \widetilde{I}; \widetilde{g}(\tau) = \gamma(\varphi(\tau)) \tau \in \widetilde{I};$$

In tal caso $\tau \to t = \varphi(\tau) \in I$ si dice cambiamento di parametrizzazione.
Se $\varphi'(\tau) > 0$, $\forall \tau \in \widetilde{I}$, allora si dice che γ, $\widetilde{g}$ hanno lo stesso verso; Se $\varphi'(\tau) < 0$, $\forall \tau \in \widetilde{I}$, allora si dice che γ, $\widetilde{g}$ hanno verso opposto

Esercizio 27 *Siano*

- $\gamma(t) := (cos(t), sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$
-
- $\widetilde{g}(\tau) := (cos(2\tau), sin(2\tau))$, $\tau \in [0, \pi]$
- $\gamma^*(s) := (cos(s), -sin(s))$, $s \in [0, 2\pi]$

Provare che:

1. *$\gamma, \widetilde{g}, \gamma^*$ sono equivalenti*
2. *$\gamma, \widetilde{g}$ hanno lo stesso verso, mentre γ, γ^* hanno verso opposto*

Soluzione:*(suggerimento)*

1. Per provare che $\gamma, \widetilde{g}$ sono eq. basta considerare il cambiamento di parametrizzazione $\varphi : [0, \pi] \to [0, 2\pi]$, $\varphi(\tau) := 2\tau$ per provare che γ, γ^* sono eq. basta considerare il cambiamento di parametrizzazione $\varphi : [0, 2\pi] \to [0, 2\pi]$, $\varphi(s) 2\pi - s$

Osservazione 3.1.5 *Si può che: date due curve equivalenti, allora*

1. *esse hanno lo stesso sostegno*
2. *se una delle due fosse semplice, anche l'altra sarebbe semplice*

3.2 Lez - 15, Lunghezza di una curva

Vogliamo ora definire la nozione di lunghezza di una curva.
Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva e sia $\mathscr{D} := t_0 = a < t_1 < ... < t_N = b$ una suddivisione di $[a,b]$: essa induce una suddivisione del sostegno di γ in $N+1$ parti definite da $\gamma(t_0), \gamma(t_1) \dots \gamma(t_N)$.
Consideriamo i segmenti

$$[\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)] := \{s\gamma(t_i) + (1-t)\gamma(t_{i-1}) : 0 \leq s \leq 1\}$$

$i = 1, ..., N$. La lunghezza della spezzata definita dall'unione $\bigcup_{i=1}^N [\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)]$ è data da

$$L(\gamma, \mathscr{D}) := \sum_{i=1}^N \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \in [0, +\infty)$$

Denotiamo

$$L(\gamma) := sup_{\mathscr{D}} L(\gamma, \mathscr{D}) \in [0, +\infty] =_{def} [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

Definizione 3.2.1 *Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva. Se $L(\gamma) < +\infty$, allora la curva si dice rettificabile e $L(\gamma)$ è detta lunghezza di γ*

Osservazione 3.2.1 *Si può provare che esistono curve per cui $L(\gamma) = +\infty$, vedi esempio [BDPG,12.5].*

Teorema 3.2.2 (Lunghezza di una curva) *[BDPG,12.10] Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1. Allora γ è rettificabile e*

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + ... + \gamma_n'(t)^2} \, dt$$

Corollario 3.2.1 (Lunghezza curve piane cartesiane) *Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una curva piana cartesiana di classe C^1, cioè*

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, f(t)) & t \in [a,b] \\ \textit{oppure} & \\ (f(t), t) & t \in [a,b] \end{cases}$$

con $f \in C^1([a,b])$. Allora γ è rettificabile e

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} \, dt$$

Esempio 25 *Sia $f(t) = t^2$, allora $L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2} \, dt$*

Teorema 3.2.3 (Indipendenza della lunghezza dalla parametrizzazione) *Siano $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e $\widetilde{g} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ due curve di classe C^1 equivalenti. Allora*

$$L(\gamma) = L(\widetilde{g})$$

Dim. 15 *Sia $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ il cambiamento di parametrizzazione, cioè*

$$\widetilde{g}(\tau) = \gamma(\varphi(\tau))\, \forall \tau \in [\alpha, \beta]$$

$\varphi \in C^1$ e bigettiva.
Supponiamo, per esempio, che $\varphi'(\tau) > 0\ \forall \tau \in [\alpha, \beta]$. Allora per il Teorema 5.4.1 e (RDC)

$$L(\widetilde{g}) =_{5.4.1} \int_\alpha^\beta \|\widetilde{g}'(\tau)\|\ d\tau =_{(RDC)} \int_\alpha^\beta \|\gamma'(\varphi(\tau)) \cdot \varphi'(\tau)\|\ d\tau =$$

$$= \int_\alpha^\beta \|\gamma'(\varphi(\tau))\|\, \varphi'(\tau)\, d\tau =$$

Poniamo $t = \varphi(\tau)$ e otteniamo

$$= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \|\gamma'(t)\|\ dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\ dt = L(\gamma)$$

Osservazione 3.2.4 *È facile verificare che una curva C^1 a tratti è rettificabile e, se $\gamma = \bigcup_{i=1}^N \gamma_i$, con $\gamma_i : [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1, allora*

$$L(\gamma) = \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma_i'(t)\|\ dt$$

3.3 Integrali curvilinei di I specie

Motivazione fisica: Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una curva di classe C^1 e supponimao che il sostegno di γ, $\Gamma := \gamma([a, b]) \subseteq \mathbb{R}^3$ modelizzi un filo rigiido dello spazio di densità lineare f, ovvero f ha la dimensione di una massa x unità di lunghezza. Se f fosse costante, M:= massa totale filo, allora

$$M = f \cdot L(\gamma) = \int f\, \|\gamma'(t)\|\ dt := \int_\gamma f\, ds$$

$ds \cong \|\gamma'(t)\|\ dt$ elemento infinetesimale di lunghezza.
In generale, se la densità f non fosse costante, $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ e dunque

$$M = \int_a^b f(\gamma(t))\, \|\gamma'(t)\|\ dt$$

Definizione 3.3.1 *Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1 e sia $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si definisce*

$$\int_\gamma f\, ds = \int_a^b f(\gamma(t))\, \|\gamma'(t)\|\ dt$$

e si chiama Integrale curvilineo di I specie di f lungo γ.

Notazione 3.3.1 *Se γ fosse una crva chiusa e semplice su usa anche il simbolo $\oint_\gamma f\, ds$*

Osservazione 3.3.2

- *L'integrale curvilineo di I specie è lineare.*
- *L'integrale curvilineo di I psecie si estende a curve C^1 a tratti. Infatti $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva C^1 a tratti e $\gamma = \bigcup_{i=1}^N \gamma|_{[t_{i-1},t_i]} : [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, ..., N$ di classe C^1; sia $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ continua. Allora possiamo definire*

$$\int_\gamma f\, ds := \sum_{i=1}^N \int_{\gamma|_{t_{i-1},t_i}} f\, ds$$

Proposizione 3.3.1 *Siano $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\widetilde{g} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ curve di classe C^1 equivalenti e sia $f : \Gamma = \gamma([a,b]) = \widetilde{g}([\alpha,\beta]) \to \mathbb{R}$ continua. Allora*

$$\int_\gamma f\, ds = \int_{\widetilde{g}} f\, ds$$

Esercizio 28 *Dimostrazione.*

3.4 Integrali curvilinei di II specie: campi vettoriali e forme differenziali

3.4.1 Campi vettoriali e forme differenziali

Definizione 3.4.1 *Si chiama campo vettoriale su un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ una mappa $F : E \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = (F_1(x), ..., F_n(x))$ $x \in E$, $F_i : E \to \mathbb{R}$*

Osservazione 3.4.1 *In fisica/ingegneria un campo vettoriale può rappresentare una forza applicata in un punto $x \in E$, dove E è una regione del piano o dello spazio, $E \subseteq \mathbb{R}^2$ o $E \subseteq \mathbb{R}^3$*

Definizione 3.4.2 *Dato un campo vettoriale $F : E \to \mathbb{R}^n$, si chiama forma differenziale (lineare) su E l'espressione formale*

$$\omega = F_1\, dx_1 + ... + F_n\, dx_n = \sum_{i=1}^n F_i\, dx_i = \langle F, dx \rangle$$

Osservazione 3.4.2 *Dalla definizione, si evince che ad ogni*

$$F : E \to \mathbb{R}^n \to \omega := \langle F, dx\rangle$$

Viceversa, data

$$\omega = \langle F, dx\rangle \text{ forma differenziale su } E \to F : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Pertanto si può stabilire una corrispondenza biunivoca tra:

$$\text{campo vettoriale} \iff \text{forma differenziale}$$

Definizione 3.4.3 *Una forma differenziale $\omega = \langle F, dx\rangle$ su un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice di classe C^0(risp C^1) se $F_i \in C^0(E)$ (risp $F_i \in C^1(E)$) $\forall i = 1, ..., n$*

Motivazione fisica:[Lavoro compiuto da una forza lungo un percorso]
Sia $n = 3$, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una forza assegnata,

$$F(x, y, z) := (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

se $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ con $F_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3)$ funzione continua.
Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) = (x(t), y(t), z(t))$ una curva di classe C^1.
La forma diff. ω rappresenta il lavoro compiuto dalla forza F su un punto materiale che si muove di uno spostamento infinitesimo

$$(dx, dy, dz) = (x'(t)\, dt, y'(t)\, dt, z'(t)\, dt)$$

lungo la curva γ.
Più precisamente, se il punto si muovesse lungo la curva γ e all'istante t si trovasse nella posizione $\gamma(t)$, allora il lavoro compiuto dalla forza nell'intervallo infinitesimo ddi tempo dt sarebbe dato da $\langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt$

Osservazione 3.4.3 *Ricordare che $\langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle = \|F(\gamma(t))\|\, \|\gamma'(t)\| \cos(\vartheta)$ dove ϑ = angolo formato dai vettori $F(\gamma(t))$ e $\gamma'(t)$*

La motivazione fisica suggerisce la seguente definizione:

Definizione 3.4.4 *Sia $\gamma : [a, b] \to E \subseteq \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1 e sia ω una forma differenziale di classe C^0 su E.*
Si definisce integrale curvilineo di II specie di ω (o del campo F) lungo γ il valore

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n F_i(\gamma(t))\gamma_i'(t)\, dt$$

Se γ fosse chiusa il precedente integrale si scrive anche $\oint_\gamma \omega$

Osservazione 3.4.4 1. *L'integrale curvilineo di II specie è lineare*

2. *L'integrale curvilineo di II specie si estende a curve C^1 a tratti. Infatti data $\gamma = \bigcup_{i=1}^N \gamma_i : [a, b] \to E \subseteq \mathbb{R}^n$ una curva C^1 a tratti e ω una forma differenziale continua su E, allora si definisce*

$$\int_\gamma \omega := \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \omega$$

3.4.2 Lez - 16, Teo: Integrale curvilineo di II specie rispetto a curve eq.

Teorema 3.4.5 *Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $\gamma : [a,b] \to E$, $\widetilde{g} : [\alpha, \beta] \to E$ curve C^1 e ω una forma differenziale C^0 su E.*

1. $\int_\gamma \omega = \int_{\widetilde{g}} \omega$ *se $\gamma, \widetilde{g}$ hanno lo stesso verso.*

2. $\int_\gamma \omega = -\int_{\widetilde{g}} \omega$ *se $\gamma, \widetilde{g}$ hanno lo verso opposto.*

Dim. 16 *Siano γ e $\widetilde{g}$ come definite prima e sia $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ il cambiamento di parametrizzazione t.c.*

$$\widetilde{g}(\tau) = \gamma(\varphi(\tau)) \, \forall \tau \in [\alpha, \beta]$$

Osserviamo che per RDC,

$$(1) \, \widetilde{g}'(\tau) = \gamma'(\varphi(\tau))\varphi'(\tau) \, \forall \tau \in [\alpha, \beta]$$

Allora

$$\int_{\widetilde{g}} \omega = \int_\alpha^\beta \langle F(\widetilde{g}(\tau)), \widetilde{g}'(\tau) \rangle \, d\tau =$$

$$=_{(1)} \int_\alpha^\beta \langle F(\gamma(\varphi(\tau))), \gamma'(\varphi(\tau)) \rangle \, \varphi'(\tau) \, d\tau$$

Poniamo ora $t = \varphi(\tau)$

$$= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt$$

- *Se $\gamma, \widetilde{g}$ hanno lo stesso verso ($\varphi'(\tau) > 0$), allora $a = \varphi(\alpha)$ e $b = \varphi(\beta)$ e otteniamo la 1.*

- *Se $\gamma, \widetilde{g}$ hanno lo verso opposto ($\varphi'(\tau) < 0$), allora $b = \varphi(\alpha)$ e $a = \varphi(\beta)$ e otteniamo la 2.*

Osservazione 3.4.6 *Le proprietà 1 e 2 sono coerenti con l'interpretazione fisica dell'integrale curvilineo di II sp., come lavoro.*

Esercizio 29 *Sia $\gamma : [a,b] \to E \subseteq \mathbb{R}^n$ regolare e semplice e sia $\omega = \langle F, dx \rangle$ un forma differenziale C^0 su F. Allora*

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \langle F, \mathsf{T}_\gamma \rangle \, ds$$

dove $\mathsf{T}_\gamma(t) := \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$, $t \in [a,b]$

Soluzione:

Ricordiamo che la curva γ si dice regolare se è di classe C^1 e $\gamma'(t) \neq \underline{O}_{\mathbb{R}^n}$, si dice semplice se non è chiusa, oppure è chiusa e $\gamma : [a,b) \to \mathbb{R}^n$ è iniettiva.
Supponiamo che γ non sia chiusa e γ sia iniettiva. È chiaro che se $\Gamma := \gamma([a,b]) \subset E$ sostegno di γ, allora è ben definita la funzione inversa $\gamma^{-1} : \Gamma \to [a,b]$.
Inoltre si può provare che γ^{-1} è continua.
Per definizione di integrale curvilineo di II sp.

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \langle F, dx\rangle = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \, dt =$$

$$= \int_a^b \left\langle F(\gamma(t)), \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right\rangle \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \mathsf{T}_\gamma(t)\rangle \, \|\gamma'(t)\| \, dt =$$

$$= \int_a^b f(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_\gamma f \, ds$$

dove $f(p) = \left\langle F(p), \mathsf{T}_\gamma(\gamma^{-1}(p))\right\rangle$ se $p \in \Gamma$

Osservazione 3.4.7 *Se F fosse ortogonale a T_γ in ogni punto $\gamma(t)$ allora*

$$\langle F(\gamma(t)), \mathsf{T}_\gamma(t)\rangle = 0 \, \forall t \in [a,b]$$

Dunque

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \langle F, dx\rangle = 0$$

3.4.3 Forme differenziali esatte (o campi vettoriali conservativi)

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $\mathcal{U} \in C^1(E)$. Possiamo associare ad $\mathcal{U}$ la forma diff.

$$d\mathcal{U} = \langle \nabla \mathcal{U}, dx\rangle = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_1} \, dx_1 + \cdots + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_n} \, dx_n$$

che viene anche chiamata <u>differenziale di $\mathcal{U}$</u> poichè coincide con la notazione con cui indichiamo il differenziale di $\mathcal{U}$

Definizione 3.4.5 *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $\omega = \langle F, dx\rangle$ dove $F : E \to \mathbb{R}^n$ di classe C^0. La forma ω si dice <u>esatta</u> in E se esiste $\mathcal{U} : E \to \mathbb{R}$ di classe C^1 t.c.*

$$\nabla \mathcal{U}(x) = F(x) \, \forall x \in E$$

o, equivalentemente, $d\mathcal{U} = \omega$.
In tal caso $\mathcal{U}$ è detta <u>funzione potenziale</u> (o primitiva) di ω in E.

Osservazione 3.4.8
- *Se $n = 1$, allora un campo vettoriale si riduce ad un campo scalare $F : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pertanto se, per esempio, $E = (a,b)$ e $F \in C^0([a,b])$, allora esiste*

$$\mathcal{U}(x) := \int_a^x F(t) \, dt \, x \in [a,b]$$

Per il teorema fondamentale del calcolo e $\mathcal{U}'(x) = F(x)\ \forall x \in [a,b]$.
Dunque se $n = 1$, $E = (a,b)$, $F \in C^0([a,b])$ *esiste (almeno) una primitiva* $\mathcal{U}$ *della forma* $\omega = \langle F, dx\rangle$ *che coincide con la primitiva di* F *su* E.

- *Se* $n \geq 2$, *vedremo che, dato un campo vettoriale* $F : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *può esiste un potenziale.*

Teorema 3.4.9 (Integrale per forme esatte) *Sia* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *aperto,* ω *forma diff. continua ed esatta su E. Allora per ogni curva* $\gamma : [a,b] \to E$ C^1 *a tratti vale che*

$$(*) \int_\gamma \omega = \mathcal{U}(\gamma(b)) - \mathcal{U}(\gamma(a))$$

dove $\mathcal{U} : E \to \mathbb{R}$ *è un qualunque potenziale di* ω

Dim. 17 *Per ipotesi, essendo* $\omega = \langle F, dx\rangle$ *esatta, esiste un potenziale* $\mathcal{U} : E \to \mathbb{R}$ *di* ω *su E, cioè* $\mathcal{U} \in C^1(E)$ *t.c.*

$$(1)\, \nabla\mathcal{U}(x) = F(x)\, \forall x \in E$$

Supponiamo che $\gamma : [a,b] \to E$ *sia di classe* C^1. *Allora per (RDC) e da (1),*

$$(2)\, \frac{d}{dt}\left(\mathcal{U}(\gamma(t))\right) = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_1}(\gamma(t))\gamma_1'(t) + ... + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_n}(\gamma(t))\gamma_n'(t) =$$

$$= \langle \nabla\mathcal{U}(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle = \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$$

$\forall t \in [a,b]$.
Dalla (2) e dal teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$(3) \int_\gamma \omega := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\left(\mathcal{U}(\gamma(t))\right)\, dt = \mathcal{U}(\gamma(b)) - \mathcal{U}(\gamma(a))$$

Si può provare la (3) in modo analogo, assumendo γ *sia* C^1 *a tratti.*

Osservazione 3.4.10

1. *Da (*) segue che se* ω *fosse esatta (o che F ammette una primitiva) su E, allora per ogni curva chiusa* $\gamma : [a,b] \to E$ C^1 *a tratti* $\oint_\gamma \omega = 0$.
   Si può provare che vale il viceversa, sotto alcune ipotesi. [BDPG,12.17]

2. *In Fisica le forme diff. esatte sono di particolare importanza. Infatti*

$$\langle F, dx\rangle \text{ è esatta} \iff F \text{ è un campo di forze conservativo}$$

Esempio 26 (di forma non esatta) *Sia* $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

Allora

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy$$

non è esatta su E. Infatti, sia $\gamma : [0, 2\pi] \to E$, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Allora γ è una curva chiusa C^1, ma

$$\oint_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sin(t)}{\cos^2(t) + \sin^2(t)}(-\sin(t)) + \frac{\cos(t)}{\cos^2(t) + \sin^2(t)}(\cos(t)) \right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\, dt \neq 0$$

Per il teorema precedente ω non può essere esatta su E.

3.4.4 Forma differenziali chiuse

Problema: Dato $F : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ campo vettoriale continuo:

1. Come riconoscere se ω sia esatta?
2. Se ω fosse esatta, come determinare un potenziale $\mathcal{U}$ di ω?

Introduciamo ora un criterio per verificare quando una forma differenziale lineare potrebbe essere esatta.

Definizione 3.4.6 *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $\omega = \langle F, dx \rangle$, dove $F : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = (F_1(x), ..., F_n(x))$ con $F_i \in C^1(E)$ $i = 1, ..., n$. Allora la forma ω si dice chiusa in E se*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \textit{ Regola derivate in croce}$$

$\forall i, j = 1, ..., n$

Proposizione 3.4.1 *Sia ω una forma di classe C^1 in $E \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Allora*

$$(**)\, \omega \textit{ esatta su } E \Rightarrow \omega \textit{ chiusa in } E$$

Dim. 18 *Per ipotesi, essendo ω esatta, esite una funzione potenziale $\mathcal{U}$ t.c.*

$$\nabla\mathcal{U}(x) = \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_n}(x) \right) =$$

$$= (F_1(x), ..., F_n(x)) = F(x)\, \forall x \in E$$

o, equivalentemente,

$$(1)\, \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_i}(x) = F_i(x) \forall x \in E, \forall i = 1, ..., n$$

Per il teo. sull'inversione dell'ordine di derivazione, fissato i e derivando rispetto ad un fissato x_j, nella (1), con $j \neq i$, essendo $\mathcal{U} \in C^2(E)$, otteniamo

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \quad \forall x \in E$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \quad \forall x \in E$$

Dalle identità precedenti, segue che F soddisfa la regola delle derivate in croce, e dunque ω è chiusa.

Osservazione 3.4.11 *Non vale l'implicazione inversa di (**), cioè*

$$\omega \text{ esatta su } E \not\Leftarrow \omega \text{ chiusa in } E$$

Esempio 27 $n = 2$,

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

in $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Esercizio 30 *Verificare che ω è chiusa, cioè*

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

in E se $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ se $(x,y) \in E$.
D'altra parte, abbiamo visto che, se $\gamma : [0,2\pi] \to E$, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, allora γ è una curva chiusa di classe C^1 e $\oint_\gamma \omega = 2\pi$.
Dunque ω non è esatta in E.

Una condizione necessaria e sufficiente che garantisce l'esattezza di una forma è data dal seguente teorema.

Teo: Chiusa = Esatta

Teorema 3.4.12 (Chiusa = Esatta) *[BDPG,12.21] Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, convesso, cioè per definizione*

$$\forall p, q \in E\, [p,q] := \{tp + (1-t)q : 0 \leq t \leq 1\} \subset E$$

Sia $\omega = \langle F, dx \rangle$, dove $F = (F_1, ..., F_n)$ con $F_i \in C^1(E)$ $i = 1, ..., n$. Allora

$$\omega \text{ è esatta su } E \iff \omega \text{ è chiusa in } E$$

Esempio 28 *1.*

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

in $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $[p,q] \not\subset E$ se $p = (-1,1)$ e $q = (1,1)$, in quanto $(0,0) \notin E$. Pertanto E non è convesso.
D'altra parte sappiamo che ω non è esatta.

2.

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

in $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$

Esercizio 31 *E è convesso.*

Essendo ω *chiusa in E, per il teorema precedente,* ω *è esatta in E, cioè esiste una funzione potenziale* $\mathcal{U} : E \to \mathbb{R}$ *di classe* C^1 *t.c.*

$$\nabla\mathcal{U}(x,y) = F(x,t) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \forall (x,y) \in E$$

Il problema che ora rimane è come calcolare la funzione potenziale $\mathcal{U}$

3.4.5 Costruzione di un potenziale per una forma diff. chiusa su aperto conv.

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ un aperto convesso e sia $\omega = \langle F, dx\rangle$ una forma differenziale chiusa su E. Per il teorema 3.4.12 sappiamo che esiste $\mathcal{U} : E \to \mathbb{R}$ di ω, cioè una funzione $\mathcal{U} \in C^2(E)$ t.c. $\nabla\mathcal{U}(x) = F(x)$ $\forall x \in E$, o eq.,

$$(1)\, \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x_i}(x) = F_i(x)$$

$\forall x \in E, i = 1, ..., n.$

Problema: Come determinare, esplicitamente, una funzione $\mathcal{U}$ verificante (1)?

Procedura per la costruzione di $\mathcal{U}$

Passo 1 Consideriamo la (1) nel caso $i = 1$, cioè l'equazione

$$(2)\, \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x_1}(x_1, ..., x_n) = F_1(x_1, ..., x_n)$$

Fissiamo $x_2, ..., x_n$ ed integriamo la (2) rispetto a x_1 ed otteniamo

$$(3)\, \mathcal{U}(x_1, ..., x_n) = \int F_1(x_1, ..., x_n)\,dx_1$$

Osserviamo che

$$\int F_1(x_1, ..., x_n)\,dx_1 = \mathcal{U}_1(x_1, ..., x_n) + c_1(x_2, ..., x_n)$$

Pertanto dalla (3) otteniamo che $\mathcal{U}$ deve essere della forma

$$(4)\mathcal{U}(x_1, ..., x_n) = \mathcal{U}_1(x_1, ..., x_n) + c_1(x_2, ..., x_n)$$

Passo 2 Imponiamo ora che $\mathcal{U}$ del tipo (4) verifichi la (1) nel caso $i = 2$, cioè

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_2}(x_1, ..., x_n) = \frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial x_2}(x_1, ..., x_n) + \frac{\partial c_1}{\partial x_2}(x_2, ..., x_n)$$

$$= F_2(x_1, ..., x_n)$$

Da questa identità si ricava che

$$(5)\ \frac{\partial c_1}{\partial x_2}(x_2, ..., x_n) = F_2(x_1, ..., x_n) - \frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial x_2}(x_1, ..., x_n)$$

Osserviamo ora che fissati, $x_2, ..., x_n$ la funzione (di una variabile)

$$x_1 \to F_2(x_1, ..., x_n) - \frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial x_2}(x_1, ..., x_n)$$

è costante, quando è definita su un certo intervallo.
Infatti la sua derivata

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_1, ..., x_n) - \frac{\partial^2 \mathcal{U}_1}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, ..., x_n) = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_1, ..., x_n) - \frac{\partial^2 \mathcal{U}_1}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, ..., x_n) =$$

$$= \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_1, ..., x_n) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_1, ..., x_n) = 0$$

Pertanto la funzione è indipendente da x_1 e dunque dipende solo da $x_2, ..., x_n$.
Dunque possiamo scrivere che

$$F_2(x_1, ..., x_n) - \frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial x_2}(x_1, ..., x_n) = g(x_2, ..., x_n)$$

Sostituendo nella (5) otteniamo che

$$(6)\ \frac{\partial c_1}{\partial x_2}(x_1, ..., x_n) = g(x_2, ..., x_n)$$

Fissiamo ora $x_3, ..., x_n$ ed integriamo rispetto x_2 nella (6) e otteniamo

$$c_1(x_2, ..., x_n) = \int g(x_2, ..., x_n)\, dx_2 = \mathcal{U}_2(x_2, ..., x_n) + c_2(x_3, ..., x_n)$$

Sostituendo nella (4), otteniamo che la funzione $\mathcal{U}$ sarà della forma

$$(7)\ \mathcal{U}(x_1, ..., x_n) = \mathcal{U}_1(x_1, ..., x_n) + \mathcal{U}_2(x_2, ..., x_n) + c_2(x_3, ..., x_n)$$

Passo 3 Imponiamo ora che una funzione $\mathcal{U}$ del tipo (7) verifichi (1) con $i = 3$. Ragionando come nel Passo 2, otteniamo che la funzione $\mathcal{U}$ sarà della forma

$$\mathcal{U}(x_1, ..., x_n) = \mathcal{U}_1(x_1, .., x_n) + \mathcal{U}(x_2, ..., x_n) + \mathcal{U}(x_3, ..., x_n) + c_3(x_4, ..., x_n)$$

Passo n otteniamo che la funzione $\mathcal{U}$ è della forma

$$\mathcal{U}(x_1, ..., x_n) = c_n + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i(x_i, ..., x_n)$$

dove $c_n \in \mathbb{R}$.
Questa funzione $\mathcal{U}$ è la funzione potenziale cercata.

Osservazione 3.4.13 *La procedura proposta porterebbe alla stessa conclusione se nel pass 1, si partisse da*

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_j} = F_j(x)$$

con J02, ..., n *e si completasse il procedimento fino ad eliminare le n variabili rimanenti*

Esercizio 32 *Data la forma differenziale*

$$\omega(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy$$

su $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, *determinare se* ω *sia esatta in* E *e calcolare un potenziale* $\mathcal{U}$ *di* ω *in* E.
Soluzione:

Abbiamo già visto che ω *è esatta in* E, *essendo* ω *chiusa in* E *ed* E *un insieme aperto e convesso.*
Applichiamo la procedura proposta.
Sappiamo che esiste una funzione $\mathcal{U} : E \to \mathbb{R}$ *di* C^2 *t.c.* $\forall (x, y) \in E$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x, y) = F_1(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \qquad (*) \\ \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}(x, y) = F_2(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad (**) \end{cases}$$

Fissiamo $x > 0$ *ed integriamo rispetto ad* y *la (**). otteniamo*

$$\mathcal{U}(x, y) = \int \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Esercizio 33 *Verificare:*

$$\int \frac{x}{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x} + c_1(x)$$

Pertanto, dalla (**) segue che $\mathcal{U}$ *sarà della forma*

$$(***)\, \mathcal{U}(x, y) = \arctan \frac{y}{x} + c_1(x)$$

se $(x, y) \in E$ *Da (*) e (***) segue*

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{x}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} + c_1'(x) = F_1(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

Da cui si ricava che $c_1'(x) = 0$ *se* $x > 0$ *e dunque* $c_1(x) \equiv c \in \mathbb{R}$ *(costante). Pertanto una funzione potenziale di* $\mathcal{U}$ *di* ω *in* E *è data da*

$$\mathcal{U}(x, y) = \arctan\frac{y}{x} + c\, c \in \mathbb{R}$$

Chapter 4

Esercitazioni

4.1 Lezione 1 - 09/03/2022

Esercizio 4.1.1 *Determinare e disegnare nel piano xy il dominio delle seguenti funzioni, $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dove A: dominio che dobbiamo determinare.*

$$f(x, y) = \log(4(x^2 + y^2) - 1)$$

Soluzione:

$$4(x^2 + y^2) - 1 > 0 \iff x^2 + y^2 > \frac{1}{4}$$

Studiamo quindi: $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ *la circonferenza di centro* $c = (0, 0)$ *e raggio* $r = \frac{1}{2}$,

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > \frac{1}{4}\} = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B((0, 0), \frac{1}{2})}$$

dove:

- $\overline{B((0, 0), \frac{1}{2})} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}\}$
- $B((0, 0), \frac{1}{2}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{1}{2}\}$

Insiemi aperti e chiusi
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}$, *A è chiuso* $\iff$ A^c *è aperto.*
Definiamo $\bar{A} = A$, $xy \geq 0 \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$ *Disegnando gli assi:*
$A^c = \mathbb{R}^2 \setminus A$ *è aperto. Fisso ora* $(x_0, y_0) \in A^c$, $r = d(\partial A, (x_0, y_0)) = \min |x_0|, |y_0|$.
La palla $B((x_0, y_0), \frac{r}{2}) \subset A^c \Rightarrow A^c$ *è aperto* $\Rightarrow$ *A è chiuso.*

Esercizio 4.1.2 $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^4}$, $y^2 \geq x^4$.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \geq x^4\}$$

Proviamo a scrivere $y^2 - x^4$ *come*

$$y^2 - x^4 = (y - x^2)(y + x^2) \geq 0$$

Due casi:

- $y \geq x^2$
- $y \geq -x^2$

(Dal grafico otteniamo)

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 \vee y \leq -x^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq -x^2\}$

Esercizio 4.1.3 *Disegnare l'insieme di livello delle seguenti funzioni*

$$C_t = \{(x, y \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = t)\}$$

con $t \in \mathbb{R}$.
$f(x, y) = x^2 y$, *fissiamo* $t \in \mathbb{R}$, $t = x^2 y$

1. $t = 0$, $x^2 y = 0 \Rightarrow y = 0 \vee x = 0$
2. $t > 0$, $t = x^2 y \iff y = \frac{t}{x^2}$
   - $t = 1$, $y = \frac{1}{x^2}$
   - $t = 2$, $y = \frac{2}{x^2}$
3. $t < 0$, $t = x^2 y \iff y = \frac{t}{x^2}$
   - $t = -1$, $y = -\frac{1}{x^2}$
   - $t = -2$, $y = -\frac{2}{x^2}$

Esercizio 4.1.4 $f(x, y) = ye^{-x}$, $t \in \mathbb{R}$, $t = ye^{-x} \iff e^x t = y$

- $t = 0 \Rightarrow y = 0$
- $t = 1 \Rightarrow y = e^{-x}$
- $t = 2 \Rightarrow y = 2e^{-x}$
- $t = -1 \Rightarrow y = -e^{-x}$
- $t = -2 \Rightarrow y = -2e^{-x}$

Esercizio 4.1.5

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x - y}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} = ?$$

eleviamo x *e* y *al numeratore per* $\frac{3}{3}$, *otteniamo:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(\sqrt[3]{x})^3 - (\sqrt[3]{y})^3}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}$$

Ricordiamo ora la differenza tra cubi $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$, *otteniamo:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})\left((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + (\sqrt[3]{y})^2\right)}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} =$$

$$= \lim_{(x,y\to(0,0))} (\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + (\sqrt[3]{y})^2 = 0$$

Esercizio 4.1.6

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = ?$$

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \iff$ *per ogni restrizione a un sottoinsieme* B, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f|_B(x,y) = l$

- $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx\}$, $\lim \frac{x^2 y}{x^4+y^2}|_B = \lim \frac{x^2 mx}{x^4 + m^2x^2} =$

$$= \frac{x^3 m}{x^2(x^2+m^2)} = x\left(\frac{m}{x^2+m^2}\right) = \lim_{x\to 0} x\left(\frac{m}{x^2+m^2}\right) = 0$$

- $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx^2\}$, $\lim \frac{x^2 y}{x^4+y^2}|_B =$

$$\lim_{x\to 0} \frac{mx^4}{x^4 + m^2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+m^2}$$

  Proviamo due valori di m:

  - $m = 1$, $\frac{1}{2}$
  - $m = 2$, $\frac{2}{5}$

  Ho trovato due restrizioni $\{y = x^2\}$ *e* $\{y = 2x^2\}$ *dove il limite assume due valori distinti. Allora per l'unicità del limite, il limite non esiste.*

Esercizio 4.1.7

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$$

Coordinate polari
$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\vartheta = arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

- $x = \rho\cos\vartheta$
- $y = \rho\sin\vartheta$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\rho^2\cos^2\vartheta \cdot \rho\sin\vartheta}{\rho^2\cos^2\vartheta + \rho^2\sin^2\vartheta} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\rho^3\cos^2\vartheta \cdot \sin\vartheta}{\rho^2\left(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\right)}$$

Sappiamo che $\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta = 1$, *quindi il limite rimane:*

$$\lim \rho\cos^2\vartheta \cdot \sin\vartheta$$

$$0 \leq |\rho\cos^2\vartheta \cdot \sin\vartheta| < \rho$$

Da cui se $(x, y) \to (0, 0)$ *allora anche* $\rho \to 0$ *e siccome* $\begin{cases} \cos^2\vartheta < 1 \\ \sin\vartheta < 1 \end{cases}$, *grazie al* ***teorema del confronto*** *il limite vale 0.*

Esercizio 4.1.8 *Dire quali insiemi sono aperti/chiusi e quali limitati, inoltre determinare la frontiera.*

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (xy)(y-1) \geq 0\}$$

- $x \geq 0$
- $y \geq 0$
- $y - 1 \geq 0$, $y \geq 1$

Frontiera: $\partial H = \{y = 1\} \cup \{x = 0\} \cup \{y = 0\}$

4.2 Esercitazione 2 - 23/03/2022

Esercizio 4.2.1 *(a)*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(e^{xy^2}-1)\log(1+x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\sin(xy)}$$

Ricordiamo che:

- $\frac{\log(1+t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$
- $\frac{e^t-1}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$
- $\frac{\sin(t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$

Grazie a ciò il nostro limite diventa:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy^2}-1}{xy^2} \cdot \frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} \cdot \frac{xy}{\sin(xy)} \cdot y$$

(i) *Definiamo* $t = x^2+y^2 \to 0$ *per* $(x,y)\to(0,0)$,

$$\frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{\log(1+t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$$

(ii) *Definiamo* $t = xy \to 0$ *per* $(x,y)\to(0,0)$,

$$\frac{xy}{\sin(xy)} = \frac{t}{\sin(t)} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$$

(iii) *Definiamo* $t = xy^2 \to 0$ *per* $(x,y)\to(0,0)$,

$$\frac{e^{xy^2}-1}{xy^2} = \frac{e^t-1}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$$

$$= 1 \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$$

(c)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{\log(1+x^2+y^2)}$$

Ricordiamo che:

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$$

Allora il limite diventa:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{(xy)^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{\log(1+x^2+y^2)} \cdot \frac{(xy)^2}{x^2+y^2}$$

(i) $t = xy \to 0$ *per* $(x,y) \to (0,0)$

$$\frac{1-\cos(xy)}{(xy)^2} = \frac{1-\cos(t)}{t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{2}$$

(ii) Per (i) dell'esercizio (a) si ha:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} = ?$$

Passiamo alle coordinate polari: $\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}$

$$0 \le \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2+y^2} = \frac{\rho^4 \cdot \cos^2\vartheta \cdot \sin^2\vartheta}{\rho^2\left(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\right)} \le \rho^2$$

Per $\rho \to 0$ *tutto* $0 \to 0$ *e* $\rho^2 \to 0$, *quindi anche il limite tende a zero per il teorema del confronto.*
Consideriamo il caso in cui $x = 0$ *o* $y = 0$

- *Vediamo* $x = 0$,

$$\lim_{y\to 0} \frac{1-\cos(0)}{log(1+y^2)} = \left[\frac{0}{0}\right]_{F.IND.} = \lim_{y\to 0} 1-\cos(0) \cdot \frac{y^2}{\log(1+y^2)} \cdot \frac{1}{y^2} = 0$$

- *Vediamo* $y = 0$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(0)}{log(1+x^2)} = \left[\frac{0}{0}\right]_{F.IND.} = \lim_{y\to 0} 1-\cos(0) \cdot \frac{x^2}{\log(1+x^2)} \cdot \frac{1}{x^2} = 0$$

(e)

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,1)} \frac{xy(z-1)}{x^2+y^2+(z-1)^2}$$

- ***Primo metodo***

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \\ t = z-1 \xrightarrow[z\to 1]{} t \to 0 \end{cases}$$

$$0 \le \left| \frac{\rho\cos\vartheta \cdot \rho\sin\vartheta \cdot t}{\rho^2\left(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\right) + t^2} \right| \le \left| \frac{\rho^2 \cdot t}{\rho^2+t^2} \right| \le 1 \cdot t$$

$$\left(\frac{\rho^2}{\rho^2+t^2} \le 1 \iff \rho^2 \le \rho^2 + t^2 \iff t^2 \ge 0 \Rightarrow \textit{ sempre} \right)$$

Quindi per $t \to 0$, $0 \to 0$ *e* $t \to 0$, *quindi per il teorema del confronto il limite*

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,1)} \frac{xy(z-1)}{x^2+y^2+(z-1)^2} = 0$$

- ***Secondo metodo**: $t = z - 1 \xrightarrow{z \to 1} 0$*
  $\lim_{(x,y,t)\to(0,0,0)} \frac{xyt}{x^2+y^2+t^2}$

$$0 \leq \left| \frac{xyt}{x^2+y^2+t^2} \right| \leq^{?} \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2+t^2}\right)^3}{x^2+y^2+t^2} = \sqrt{x^2+y^2+t^2}$$

In particolare si ha $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2+t^2} \Rightarrow x^2 \leq x^2+y^2+t^2 \iff y^2+t^2 \geq 0$, lo stesso vale per $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2+t^2}$ e $|t| \leq \sqrt{x^2+y^2+t^2}$, quindi otteniamo:

$$0 \leq \left| \frac{xyt}{x^2+y^2+t^2} \right| \leq \sqrt{x^2+y^2+t^2}$$

Che tende a 0 per $(x,y,t) \to (0,0,0)$, quindi grazie al teorema del confronto il limite vale 0

Esercizio 4.2.2 *Data $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da*

$$f(x,y) = \begin{cases} g(x,y) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a)

$$g(x,y) = \frac{x\sin(x^2y)}{x^2+y^2} \; \forall (x,y) \neq (0,0)$$

*La funzione f, che coincide con g $\forall (x,y) \neq (0,0)$, è **continua** $\forall (x,y) \neq (0,0)$ perchè è **composizione** e **prodotto** di funzioni continue (Teorema). Dobbiamo quindi vedere il comportamento della funzione in $(0,0)$,*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$$

cioè

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin(x^2y)}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2y}{x^2y}$$

per $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

(i) $t = x^2y \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$, $\frac{\sin(t)}{t} \to 1$

$$= 1 \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^2+y^2} = 1 \cdot 0 = 0$$

Verifichiamolo tramite le coordinate polari.
$x = \rho\cos\vartheta$
$y = \rho\sin\vartheta$

$$0 \leq \left| \frac{x^3y}{x^2+y^2} \right| = \left| \frac{\rho^4 \cdot \cos^3\vartheta \sin\vartheta}{\rho^2\left(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\right)} \right| \leq \rho^2$$

Quindi per $\rho \to 0$ *anche il limite vale 0 grazie al teorema del confronto. Abbiamo verificato che il limite* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$*, quindi la funzione* f *è continua.*
Controlliamo ora:

- $y = 0$ *e* $x \neq 0$, $\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot 0}{x^2} = 0$
- $y \neq 0$ *e* $x = 0$, $\lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0$

b)

$$g(x,y) = \frac{\sin(2xy)}{e^{x^2+y^2} - 1}$$

Dobbiamo studiarne il comportamento in $(0,0)$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2 \cdot \frac{\sin(2xy)}{2xy} \cdot \frac{xy}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{e^{x^2+^2}}$$

(i) $t = 2xy$, $\frac{\sin(t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$ *per* $(x,y) \to (0,0)$

(ii) $t = x^2 + y^2 \to 0$ *per* $(x,y) \to (0,0)$, $\frac{t}{e^t - 1} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$

- *Proviamo con le coordinate polari:* $\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{\rho^2 \sin\vartheta\cos\vartheta}{\rho^2} \Rightarrow \sin\vartheta\cos\vartheta$$

  Quindi non va bene, allora proviamo a prendere una restrizione del dominio.

- $y = mx$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 m}{x^2(m^2+1)} \to \frac{m}{m^2+1}$$

  Ottenimao due rislutati diversi, $\big((m = 1, \lim = \frac{1}{2}), (m = 2, \lim = \frac{2}{5})\big)$, *quindi ho trovare due restrizioni dove il limite è diverso, perciò* $\nexists \lim$.

Esercizio 4.2.3 *Calcolare il gradiente delle seguenti funzioni:*

1. $f(x,y) = \sin(x,y)$, $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)\right)$

   - $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(xy) \cdot \frac{\partial(xy)}{\partial x} = \cos(xy) \cdot y$
   - $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(xy) \cdot \frac{\partial(xy)}{\partial y} = \cos(xy) \cdot x$

   $\nabla f(x,y) = (y\cos(xy), x\cos(xy)) = \cos(xy) \cdot (y, x)$.
   Calcolare la <u>*derivata direzionale*</u> *rispetto al vettore* $v = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) = \langle \nabla f(x,y), v\rangle = \frac{\cos(xy)}{\sqrt{3}} \left\langle (y,x), (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \right\rangle =$$

$$= \frac{\cos(xy)}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{y}{2} + \frac{3x}{2}\right) = \frac{\cos(xy)}{2\sqrt{3}}(3x - y)$$

Calcoliamo il piano tangente nei punti $(0, 0, f(0, 0))$ *e* $(1, 2, f(1, 2))$*, ricrodiamo la formula del piano:*

$$z = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x, y) - (x_0, y_0) \rangle$$

Cerchiamo ora i valori:

- $f(x, y) = \sin(xy),\ f(0, 0) = 0$
- $\nabla f(x, y) = \cos(xy)(y, x),\ \nabla f(0, 0) = 1 \cdot (0, 0) = 0$

Quindi $z = 0 + 0 \Rightarrow$ *il piano tangente è* $z = 0$*.*
Chi è il normale?
$n = (0, 0, 1),\ (x_0, y_0) = (1, 2)$

- $f(x, y) = \sin(xy),\ f(1, 2) = \sin(2)$
- $\nabla f(x, y) = \cos(xy)(y, x),\ \nabla f(1, 2) = \cos(2) \cdot (2, 1)$

$z = \sin(2) + \langle \cos(2) \cdot (2, 1), (x - 1, y - 2) \rangle = \sin(2) + \cos(2) \cdot (2x + y - 4)$

4.3 Lezione 3 - 06/04/2022

Esercizio 4.3.1 (Es 2, Provetta) *Siano* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

- $f(t,u,v) = \big(k(t+v), u^2+v\big)$

  $f_1 = k(t+v)$

  $f_2 = u^2 + v$

- $g(x,y) = \big(\log(1+x^2+y^2), \sin(x-y), x-y\big)$

  $g_1 = \log(1+x^2+y^2)$

  $g_2 = \sin(x-y)$

  $g_3 = x-y$

(1) Calcolare $Df(t,u,v)\ \forall (t,u,v) \in \mathbb{R}^3$ *e* $Dg(x,y) \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

(2) Calcolare la matricve Jacobiana di h in (0,0), $Dh(0,0)$*, dove* $h = f \circ g$

(1) Iniziamo osservando che l funzioni $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *(i = 1,2) sono* C^∞ *perchè sono polinomi e* $g_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *(i = 1,2,3) sono* C^∞ *perchè composizione di funzioni* C^∞, $\Rightarrow$ *f e g sono differenziabili, per definizione di jacobiana si ha*

$$Df(t,u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t}(t,u,v) & \frac{\partial f_1}{\partial u}(t,u,v) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(t,u,v) \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial t}(t,u,v) & \frac{\partial f_2}{\partial u}(t,u,v) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(t,u,v) \\ \\ \frac{\partial f_3}{\partial t}(t,u,v) & \frac{\partial f_3}{\partial u}(t,u,v) & \frac{\partial f_3}{\partial v}(t,u,v) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & k \\ 0 & 2u & 1 \end{bmatrix}$$

$$Dg(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \\ \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \\ \\ \frac{\partial g_3}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_3}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2x}{1+x^2+y^2} & \frac{2y}{1+x^2+y^2} \\ \\ \cos(x-y) & -\cos(x-y) \\ \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(2) $h = f \circ g = f(g(x,y)) = h(x,y)$, $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow Dh$ *è* 2×2*, Essendo f e g differenziabili, segue che la funzione composta* $h = f \circ g$ *è differenziabile e vale RDC, cioè* $Dh(0,0) = Df(g(0,0)) \cdot Dg(0,0)$*, poichè* $g(0,0) = (0,0,0)$ *e*

$$Dg(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Df(0,0,0) = \begin{bmatrix} k & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow det \begin{bmatrix} k & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = k \neq 0,\ se\ k \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Dh(0,0) = \begin{bmatrix} k & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 4.3.2 (Es. 3, Provetta) *Consideriamo la funzione* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*,*

$$f(x,y) = \arctan(1 + x^3 + \sqrt(2)kxy + y^2 - x^2)\,\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Determinare se esistono punti di massimo e/o minimo relativo o di sella.

arctan$(t) \Rightarrow (arctan(t))' = \frac{1}{1+t^2} > 0 \Rightarrow$ *arctan strettamente crescente Siccome arctan è strettamente crescente i punti di min e max rel. e sella coincidono con i punti di max/min/sella della funzione:*

$$g(x,y) = 1 + x^3 + \sqrt(2)kxy + y^2 - x^2$$

I punti critici di g sono quelli dove si annulla il gradiente $\nabla g(x,y) = (0,0) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 + \sqrt(2)ky - 2x = 0 \\ \\ \sqrt(2)kx + 2y = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3x^2 + \sqrt(2)k\left(\frac{-kx}{\sqrt(2)}\right) - 2x = 0 \\ \\ y = -\frac{kx}{\sqrt(2)} \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 - k^2x - 2x = 0 \\ \\ y = -\frac{kx}{\sqrt(2)} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x(3x - (k^2+2)) = 0 \\ \\ y = -\frac{kx}{\sqrt(2)} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{2+k^2}{3} \\ \\ y = \frac{-k(2+k^2)}{3\sqrt(2)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} p_1 = (0,0) \\ p_2 = \left(\frac{2+k^2}{3}, \frac{-k(2+k^2)}{3\sqrt(2)}\right) \end{matrix} \quad \text{sono punti stazionari}$$

- $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + \sqrt(2)ky - 2x$

  $h_{11} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = 6x - 2$

- $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \sqrt(2)kx + 2y$

  $h_{22} = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = 2$

- $h_{12} = h_{21} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = \sqrt(2)k = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$ *dal teorema di Schwartz*

$$Hg(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} \\ \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x-2 & \sqrt(2)k \\ \\ \sqrt(2)k & 2 \end{bmatrix}$$

- *Calcoliamo* $Hg(p_1)$

$$Hg(p_1) = Hg(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & \sqrt(2)k \\ \sqrt(2)k & 2 \end{bmatrix}$$

Autovalori di $Hg(p_1)$, *det* $\begin{bmatrix} -2-\lambda & \sqrt(2)k \\ \sqrt(2)k & 2-\lambda \end{bmatrix} = -4 + \lambda^2 - 2k^2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda^2 = 2k^2 + 4 \iff \lambda \pm \sqrt{4 + 2k^2}$

  - $\lambda_1 = \sqrt{4+2k^2} > 0$
  - $\lambda_2 = -\sqrt{4+2k^2} < 0$

$\Rightarrow$ *la matrice* $Hg(0,0)$ *non è definita dal colorralio viso a lezione,*
$detH = -4 - 2k^2 < 0 \Leftarrow detH < 0 \Rightarrow$ *non definita*
$\Rightarrow$ *per i teremi visti a lezione* $(0,0)$ *è un punto di sella.*

- *Calcoliamo* $Hg(p_2)$

$$Hg(p_2) = Hg\left(\frac{2+k^2}{3}, \frac{-k(2+k^2)}{3\sqrt(2)}\right) = \begin{bmatrix} 2+2k^2 & \sqrt(2)k \\ \sqrt(2)k & 2 \end{bmatrix}$$

$$det \begin{bmatrix} 2+2k^2 & \sqrt(2)k \\ \sqrt(2)k & 2 \end{bmatrix} = 4 + 4k^2 - 2k^2 = 4 + 2k^2 > 0$$

Siccome $h_{11} > 0$ *e* $detHg(p_2) > 0$ *si ha dal corollario visto a lezione che* $Hg(p_2)$ *è definita positiva.*
Quindi per il teorema visto a lezione p_2 *è un punto di minimo relativo.*

Esercizio 4.3.3 (Es 1, Provetta) *Data* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(1-\cos x)(\sin(ky))}{kx^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. *Dire se è continua in (0,0) Per definizione di continuità , f è continua in (0,0)*
$\iff \exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0.$
Ricordiamo i limiti notevoli:
   - $\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$
   - $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

Osserviamo che $f(x,0) = 0 \, \forall x \neq 0$ *e* $f(0,y) = 0 \, \forall y \neq 0$ *e*

$$(*) f(x,y) = \frac{1 - cos(x)}{x^2} \cdot x^2 \cdot \frac{\sin(ky)}{ky} \cdot \frac{ky}{kx^2 + y^4} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{ky}{kx^2 + y^4}$$

Notiamo che:

$$0 \leq \left| \frac{ky}{kx^2 + y^4} \right| \leq \left| \frac{ky}{kx^2} \right| \leq |y|$$

Quindi per $y \to 0$ *e grazie al TDC* $\frac{ky}{kx^2+y^4} \to 0$*, siccome tutti e tre i limiti in* $(*)$ *esistono e sono finiti si ha:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \; f \text{ \textit{è continua in (0,0)}}$$

2. *Dire se* $\exists \nabla f(0,0)$

   $\nabla f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right)$

   - $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$
   - $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$

   Quindi $\exists \nabla f(0,0) = (0,0)$

3. *Dire se f è differenziabile in (0,0)*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \langle \nabla f(0,0), (x,y) \rangle}{\sqrt{x^2+y^2}} ? = 0$$

$\langle \nabla f(0,0), (x,y) \rangle = \langle (0,0), (x,y) \rangle = (0,0),$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - (0,0)}{\sqrt{(x^2+y^2)}} ? = 0$$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ *da svolgimento del primo punto (1)*

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0 - (0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Chapter 5

Teoremi Orale

5.1 Continuità , derivabilità , differenziabilità , polinomio di Taylor.

5.1.1 Teorema del confronto

Teorema 5.1.1 (Teorema del confronto) *Sia* $h, g, f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *supponiamo che:*

5.1 $f(p) \leq g(p) \leq h(p)$, $\forall p \in A \setminus \{p_0\}$

5.2 $\exists \lim_{p \to p_0} f(p) = \lim_{p \to p \to p_0} h(p) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

allora $\exists \lim_{p \to p_0} g(p) = L$

Dim. 19 *Supponiamo che* $L \in \mathbb{R}$, *dobbiamo provare che* $\exists \lim_{p \to p_0} g(p) = L$, *cioè per definizione:*

*1** $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta \, (= \delta(p_0, \varepsilon)) > 0$ *t.c.*

$$|g(p) - L| < \varepsilon \ \forall p \in B(p_0, \delta) \cap (A \setminus \{p_0\})$$

Per ipotesi sappiamo che

$$\lim_{p \to p_0} f(p) = L, \lim_{p \to p_0} h(p) = L$$

cioè :

*2** $\forall \varepsilon > 0$,

$$\exists \delta_1 \, (= \delta_1(p_0, \varepsilon)) > 0$$

t.c. $|f(p) - L| < \varepsilon$ *o eq.*

$$L - \varepsilon < f(p) < L + \varepsilon \ \forall p \in B(p_0, \delta_1) \cap (A \setminus \{p_0\})$$

E

*3** $\forall \varepsilon > 0,$

$$\exists \delta_2 \,(= \delta_2(p_0, \varepsilon)) > 0$$

t.c. $|h(p) - L| < \varepsilon$ *o eq.*

$$L - \varepsilon < h(p) < L + \varepsilon \;\forall p \in B(p_0, \delta_2) \cap (A \setminus \{p_0\})$$

Da (5.1),(2),(3*) segue che* $\forall \varepsilon > 0$*, scegliendo* $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ *vale che*

$$L - \varepsilon < f(p) \leq g(p) \leq h(p) < L + \varepsilon$$

$\forall p \in B(p_0, \delta) \cap (A \setminus \{p_0\})$ *e dunque vale la (1*).*

5.1.2 Definizione di limite per una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Definizione 5.1.1 (Limite di funzioni di due variabili) *Sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e sia* $p_0 \in \mathbb{R}^2$ *punto di accomulazione per* A*. Si dice che:*

$$\exists lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \in \mathbb{R}$$

oppure $\exists \lim_{p\to p_0} f(p) = L$ *se*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = d(p_0, \varepsilon) > 0 \mid |f(x,y) - L| < \varepsilon, \forall (x,y) \in B(p,\delta) \cap (A \setminus \{p_0\})$$

5.1.3 Definizione di continuità per una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Definizione 5.1.2 *Sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1. *f si dice continua in $p_0 \in A$ se*
   (a) *p_0 è un punto <u>isolato</u> di A, oppure*
   (b) *p_0 è un punto di accomulazione ed $\exists \lim_{p \to p_0} f(p) = f(p_0)$*
2. *f si dice <u>continua</u> su A se f è continua in ogni punto $p_0 \in A$*

5.1.4 Definizione di derivate parziali e di vettore gradiente per una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ A aperto

Definizione 5.1.3 *1. Si dice che f è derivabile(parzialmente) rispetto alla variabile x nel punto $p_0 = (x_0, y_0)$ se*

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} := \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$$

2. Si dice che f è derivabile(parzialmente) rispetto alla variabile y nel punto $p_0 = (x_0, y_0)$ se

$$\exists \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} := \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = D_2 f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$$

3. Se f è derivabile (parzialmente) sia rispetto ad x ed y nel punto $p_0 = (x_0, y_0)$, si chiama (vettore)gradiente di f in p_0 il vettore:

$$\nabla f(p_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \right) \in \mathbb{R}^2$$

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A insieme aperto. Supponiamo che:

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \to \mathbb{R}$$

allora è ben definito il campo dei vettori gradiente:

$$\nabla f : \mathbb{R}^2 \supseteq A \ni p \to \nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p) \right) \in \mathbb{R}^2$$

5.1.5 Definizione di differenziabilità in un punto per una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e relazione con l'esistenza del gradiente in quel punto

Definizione 5.1.4 *Dato $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e dato $p_0 = (x_0, y_0) \in A$, la funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si dice differenziabile nel punto p_0 se vale*

$$(D)\ \exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x) - [a(x-x_0) + b(y-y_0) + f(x_0)]}{d(p, p_0)}$$

dove $d(p, p_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ e per $a, b \in \mathbb{R}$ opportuni.

Se f è differenziabile nel punto $p_0 = (x_0, y_0)$, allora

$$\exists \nabla f(p_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \right)$$

e

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0), b = \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$$

Dim. 20 *Supponiamo che f sia differenziabile in p_0, cioè che valga (D).*
Ponendo nella (D), $y = y_0$ otteniamo che:

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - [a(x-x_0) + f(x_0, y_0)]}{|x - x_0|} = 0$$

$$\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) = a$$

Procediamo allo stesso modo, ponendo $x = x_0$ nella (D) e otteniamo $\frac{\partial f}{\partial y}(p_0) = b$

5.1.6 Regola della catena nel caso generale di due funzioni, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$

Teorema 5.1.2 (Regola della catena, RDC) *Siano* $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *e* $f : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, *$A$ e B aperti*

(i) $g(A) \subseteq B$

(ii) Se $g = (g_1, \ldots, g_m)$, $f = (f_1, \ldots, f_k)$
Supponiamo che $\begin{array}{l} g_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,(i = 1, \ldots, m) \text{ sia diff. in un dato } x_0 \in A \\ f_i : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}\,(i = 1, \ldots, k) \text{ sia diff. in un dato } y_0 = g(x_0) \end{array}$
Consideriamo ora la funzione $h := f \circ g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $h = (h_1, \ldots, h_k)$
con $h_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
allora le funzioni $h_i : A \to \mathbb{R}(i = 1, \ldots, k)$ *sono diff. in* x_0 *e*

$$Dh(x_0) = Df(g(x_0)) \cdot Dg(x_0)$$

5.1.7 Formula di Taylor del II ordine per una funzione di due variabili

Definizione 5.1.5 *Dato $m \in \mathbb{N}$, $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ fissato, si chiama polinomio di ordine m di $n = 2$ variabili, centrato in p_0, una funzione $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ del tipo*

$$T(x,y) = \sum_{h=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} c_{i,h-i}(x - x_0)^i (y - y_0)^{h-i}$$

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$, dove $c_{i,h-i}$ (i = 0,...,h e h = 0,..., m) sono $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ coeff. ass.

Sia $f \in C^2(B(p_0, r))$, $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$ fissato. Allora vale:

$$(FT_2)\, f(p) = T_2(p) + o\left(\|p - p_0\|^2\right)$$

$\forall p = (x, y) \in B(p_0, r)$, dove

$$T_2(p) := f(p_0) + \langle \nabla f(p_0), p - p_0 \rangle + \frac{1}{2} \left\langle D^2 f(p_0) \cdot (p - p_0), p - p_0 \right\rangle$$

se $p \in \mathbb{R}^2$.
(polinomio di taylor del II ordine di f, centrato in p_0)

5.1.8 Definizione di matrice Hessiana per un funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e sua applicazione nella formula di Taylor del II ordine

Definizione 5.1.6 *Data $f \in C^2(A)$, $A \in \mathbb{R}^2$ aperto, si chiama, <u>matrice hessiana</u> di f in un punto $p \in A$, la matrice 2×2*

$$D^2 f(p) = H(f)(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

L'applicazione della matrice Hessiana nel PT2o si può trovare nello sviluppo della dimostrazione, infatti per una funzione $F(t) = f(p_0+tv), t \in (-r,r)$ e $B(p_0,r)$ andando a calcolare il polinomio di Taylor per $t = 0$, e supponendo di avere $v = \frac{p-p_0}{\|p-p_0\|}$, otteniamo che $F''(t)$:

$$F''(t) = v_1 \cdot \left\langle \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(p_0+tv), v \right\rangle + v_2 \cdot \left\langle \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(p_0+tv), v \right\rangle =$$

$$= v_1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0+tv)v_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0+tv)v_2\right) + v_2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0+tv)v_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0+tv)v_2\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0+tv)v_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0+tv)v_1 v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0+tv)v_2^2$$

Pertanto calcolando $F''(0)$ otteniamo:

$$F''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0+tv)v_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0+tv)v_1 v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0+tv)v_2^2$$

Che può essere riscritto mediante matrice Hessiana del tipo:

$$F''(0) = \left\langle D^2 f(p_0)v, v \right\rangle$$

E sostituendola otteniamo

$$f(p_0+tv) = F(t) = f(p_0) + \langle \nabla f(p_0), v\rangle t + \frac{1}{2}\left\langle D^2 f(p_0)v, v\right\rangle t^2 + o(t^2), \text{ per } t \to 0$$

Scegliendo $t = \|p - p_0\|$ e otteniamo la forma del polinomio di Taylor di II ordine. Ed è questa l'applicazione della matrice Hessiana.

5.2 Massimi e minimi

5.2.1 Definizione di punto di massimo/minimo relativo, massimo/minimo assoluto e punto di sella per una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Definizione 5.2.1 *Data $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:*

1. *$p_0 \in A$ si dice, punto di massimo (= max) relativo di f su A se $\exists r_0 > 0$ t.c. $f(p) \leq f(p_0)\, \forall p \in A \cap B(p_0, r_0)$*
   Rispettivamente $p_0 \in A$ si dice, punto di minimo (= min) relativo di f su A se $\exists r_0 > 0$ t.c. $f(p) \geq f(p_0)\, \forall p \in A \cap B(p_0, r_0)$

2. *$p_0 \in A$ si dice punto di massimo (= MAX) assoluto se $\forall p \in A$, $f(p) \leq f(p_0)$*
   Rispettivamente $p_0 \in A$ si dice punto di minimo (= MIN) assoluto se $\forall p \in A$, $f(p) \geq f(p_0)$

Definizione 5.2.2 *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto. Un punto $p_0 \in A$ si dice punto di sella se p_0 è un punto stazionario di f e $f(p) - f(p_0)$ amette sia valori positivi che negativi in ogni intorno di p_0*

5.2.2 Teorema di Fermat sui punti stazionari di una funzione

Teorema 5.2.1 (Fermat) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto. Supponiamo che esista $p_0 \in A$ t.c.*

(i) f differenziabile in p_0. In particolare $\exists \nabla f(p_0)$

(ii) p_0 sia un estremo libero di f in A

Allora $\nabla f(p_0) = \underline{O}_{\mathbb{R}^n} = (0, ..., 0)$ (n-volte)

Definizione 5.2.3 *Data $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, un punto $p_0 \in A$ si chiama <u>punto stazionario</u>(o <u>critico</u>) di f se f è differenziabile in p_0 e $\nabla f(p_0) = \underline{O}_{\mathbb{R}^n}$*

5.2.3 Teorema di Weierstrass sullesistenza del massimo e minimo assoluto di una funzione

Teorema 5.2.2 (Weirestrass) *[BDPG,10.10] Sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, Supponiamo che:*

(i) A sia limitato e chiuso, (in $n = 1$*,* $A = [a, b], \partial A = \{a, b\}, \mathring{A} = (a, b)$*)*

(ii) f *sia continua su* A

Allora esiste $\min_A f$ *e* $\max_A f$

5.2.4 Metodo dei moltiplicatori di Lagrange per la ricerca di massimi e minimi vincolati per funzioni di due variabili

Teorema 5.2.3 (Teorema dei moltiplicatori di Lagrange, TML) *Sia* $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ *e* $\mathsf{V} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ *dove* $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. *Supponiamo che:*

(i) $\exists \min_{\mathsf{V}} f = f(p_0)$*(o* $\exists \max_{\mathsf{V}} f = f(p_0)$*) con* $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathsf{V}$

(ii) $\exists \nabla g(p_0) \neq (0, 0)$

Allora esiste $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ *(detto moltiplicatore) t.c.* $(x_0, y_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^3$ *è un punto stazionario della funzione.*
Equivalentemente:

$$\exists \lambda_0 \in \mathbb{R} \ t.c. \begin{cases} g(p_0) = 0 \\ \\ \nabla f(p_0) + \lambda_0 \nabla g(p_0) = (0, 0) \end{cases} \quad (*)$$

5.3 Integrali per funzioni in più variabili

5.3.1 Definizione di insieme insieme semplice (o normale) in $\mathbb{R}^2$ rispetto agli assi cartesiani

Definizione 5.3.1 *Un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^2$ si dice*

- *Dominio semplice (o normale) rispetto all'asse y se esistono $g_1, g_2 \in C^0([a,b])$ t.c. $g_1 \leq g_2$ su $[a,b]$ e*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

- *Dominio semplice (o normale) rispetto all'asse x se esistono $h_1, h_2 \in C^0([c,d])$ t.c. $h_1 \leq h_2$ su $[c,d]$ e*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c,d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

5.3.2 Formula di riduzione di integrali doppi su insiemi semplici

Teorema 5.3.1 (Forumla di riduzione su domini semplici) *[BDPG,14.17]* *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio semplice rispetto ad uno degli assi. Supponiamo che $f \in C^0(A)$, allora $f \in \mathcal{R}(A)$ e valgono le seguenti formule:*

1. *Se $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ con $g_1, g_2 \in C^0([a,b])$, allora*
$$(1) \iint_A f = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\, dy \right) dx$$
In particoalre A è misurabile e $|A|_2 = \iint_A 1 = \int_a^b (g_2(x) - g_1(x))\ dx$

2. *Se $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c,d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$ con $h_1, h_2 \in C^0([c,d])$, allora*
$$(2) \iint_A f = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\, dx \right) dy$$
In particoalre A è misurabile e $|A|_2 = \iint_A 1 = \int_c^d (h_2(y) - h_1(y))\ dy$

5.3.3 Formula di cambiamento di variabili per integrali doppi e tripli

Integrali doppi

Definizione 5.3.2 *La mappa ψ si dice un cambiamento di variabili se*

- *ψ è bigettiva*
- *$\psi_i \in C^1(D^*)$, $\psi_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial u}, \frac{\partial \psi_i}{\partial v} : D^* \to \mathbb{R}$ limitate (i=1,2)*
- *$\det D\psi(u,v) \neq 0$, $\forall (u,v) \in D^*$, dove*

$$D\psi(u,v) := \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \psi_1}{\partial v}(u,v) \\ \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \psi_2}{\partial v}(u,v) \end{bmatrix} \quad \textit{(Matrice Jacobiana)}$$

Denotiamo $dA^* = du\,dv$ e $dA = dx\,dy$

Si può provare che $dA = |[|\, detD\psi(u,v)]dA^*$.

Teorema 5.3.2 (Cambiamento di variabili negli integrali doppi) *[BDPG,14.19]*
Siano $D, D^* \subseteq \mathbb{R}^2$ aperti limitati e misurabili, sia $\psi : D^* \to D$ un cambiamento di variabili e sia $f : D \to \mathbb{R}$ continua e limitata.
Allora vale la formula

$$(FCV)_2 \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(\psi(u,v))\,|\det D\psi(u,v)|\;du\,dv$$

Integrali tripli

Definizione 5.3.3 *La mappa Ψ si dice cambiamento di variabile (in $\mathbb{R}^3$) Se*

(i) *Ψ è bigettiva*

(ii) *$\Psi_i \in C^1(D^*)$,*

$$\Psi_i, \frac{\partial \Psi_i}{\partial u}, \frac{\partial \Psi_i}{\partial v}, \frac{\partial \Psi_i}{\partial w} : D^* \to \mathbb{R}$$

limitate (i = 1,2,3)

(iii) *$\det D\Psi(u,v,w) \neq 0$, dove*

$$D\Psi(u,v,w) := \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial u} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial v} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial w} \\ \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial u} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial v} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial w} \\ \\ \frac{\partial \Psi_3}{\partial u} & \frac{\partial \Psi_3}{\partial v} & \frac{\partial \Psi_3}{\partial w} \end{bmatrix}$$

se $(u,v,w) \in \mathcal{D}^*$

Teorema 5.3.3 (Cambiamento di variabili negli integrali tripli) *Siano* $D^*, D \subset \mathbb{R}^3$ *aperti limitati e misurabili, sia* $\Psi : D^* \to D$ *un cambiamento di variabili e sia* $f \in C^0(D)$ *e limitata. Allora*

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D^*} f(\Psi(u,v,w))\,|\det D\Psi(u,v,w)|\;du\,dv\,dw$$

5.3.4 Cambiamento di coordinate cilindriche e sferiche

Coordinate ellittiche

Definizione 5.3.4 *Error 404, non le trovo!! Suppongo:*

Coordinate ellittiche:

$$\Psi \equiv \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}$$

$0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \rho \geq 0,$ $|\det D\Psi(\rho,\vartheta)| = \rho^2$

Coordinate sferiche

Definizione 5.3.5 *Coordinate sferiche:*

$$\Psi \equiv \begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\vartheta \\ y = r\sin\varphi\sin\vartheta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

$0 \leq \vartheta \leq 2\pi, r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq \pi,$ $|\det D\Psi(r,\vartheta,\varphi)| = r^2\sin\varphi$

5.3.5 Formule di riduzione per integrali tripli su un parallelepipedo

Teorema 5.3.4 (Formule di riduzione per integrali tripli rispetto a domini semplici) *[BDPG,14.28] Sia* $A \subseteq \mathbb{R}^3$ *un insieme semplice rispetto all'asse* z *di tipo*

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in E, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$$

e sia $f \in C^0(A)$*. Allora*

$$\iiint_A f = \iint_E \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dx\, dy$$

5.3.6 Definizione di insieme definito per fili e per strati

Definizione 5.3.6 *Dato un insieme* $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ *si definisce:*

- *L'insieme* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]\}$ *è uno strato.*
- *L'insieme* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [a_3, b_3]\}$ *è un filo.*

5.3.7 Formula di integrazione per fili e per strati

Teorema 5.3.5 (Formule di riduzione su parallelepipedi) *[BDPG,14.26]*
Siano $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$, $f \in C^0(Q)$

(i) La funzione

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \ni (x, y) \to \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)\, dz$$

è integrabile su $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ *e*

$$(1) \iiint_Q f = \iint_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)\, dz \right)$$

(ii) La funzione

$$[a_1, b_1] \ni x \to \iint_{[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} f(x, y, z)\, dy\, dz$$

è integrabile su $[a_1, b_1]$ *e*

$$(2) \iiint_Q f = \int_{a_1}^{b_1} \left(\iint_{[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} f(x, y, z)\, dz \right)$$

La

(1) si chiama formula di riduzione per <u>*fili*</u>

(2) si chiama formula di riduzione per <u>*strati*</u>

5.4 Curve e forme differenziali

5.4.1 Definizione di curva in $\mathbb{R}^n$, supporto di una curva, estremi di una curva, equazione parametrica di una curva

Definizione 5.4.1 *(i) Si chiama curva una mappa* $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ *continua,* $\gamma(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t))$ *con* I *intervallo di* $\mathbb{R}$

(ii) Se $I = [a, b]$*, i punti* $\gamma(a)$*,* $\gamma(b)$ *di* $\mathbb{R}^n$ *si chiamano estremi della curva*

(iii) Si chiama sostegno (o supporto) della curva γ*, l'insieme* $\gamma(I) \subseteq \mathbb{R}^n$*. Si chiama equazione parametrica di* γ *l'equazione* $x = (x_1, ..., x_n) = \gamma(t)\, t \in I$

5.4.2 Definizione di curva chiusa, semplice, regolare, orientazione (o verso di percorrenza) di una curva semplice

Definizione 5.4.2 *(i) La curva γ si dice chiusa se $I = [a, b]$ e $\gamma(a) = \gamma(b)$*

(ii) La curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ si dice semplice se γ è iniettiva, o se γ è chiusa e $I = [a, b]$, allora $\gamma : [a, b) \to \mathbb{R}^n$ è iniettiva.

Definizione 5.4.3 *Una curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ si dice regolare se γ è di classe C^1 e $\gamma'(t) \neq \underline{O}_{\mathbb{R}^n}$ $\forall t \in I$*

Definizione 5.4.4 *Sia data una curva semplice $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$. Allora essa induce un'orientazione sul suo sostegno $\gamma(I) \subseteq \mathbb{R}^n$. Più precisamente*

Data $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ curva semplice, si dice che il punto $x_1 = \gamma(t_1)$ precede il punto $x_2 = \gamma(t_2)$ se $t_1 < t_2$. L'orientazione della curva viene detta anche verso della curva.

5.4.3 Definizione di versore tangente ad una curva regolare

Definizione 5.4.5 *Data $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ curva regolare, si chiama* <u>*versore*</u> *(o direzione) tangente a γ il campo vettore*

$$\mathsf{T}_\gamma(t) := \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\, t \in I$$

5.4.4 Definizione di curva rettificabile e lunghezza di una curva L(γ)

Curva rettificabile

Definizione 5.4.6 *Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva. Se $L(\gamma) < +\infty$, allora la curva si dice rettificabile e $L(\gamma)$ è detta lunghezza di γ*

Lunghezza curva

Teorema 5.4.1 (Lunghezza di una curva) *[BDPG,12.10] Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1. Allora γ è rettificabile e*

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + ... + \gamma_n'(t)^2} \, dt$$

5.4.5 Formula per il calcolo della lunghezza di una curva rettificabile

Vogliamo ora definire la nozione di lunghezza di una curva.
Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva e sia $\mathcal{D} := t_0 = a < t_1 < ... < t_N = b$ una suddivisione di $[a,b]$: essa induce una suddivisione del sostegno di γ in $N+1$ parti definite da $\gamma(t_0), \gamma(t_1) \dots \gamma(t_N)$.
Consideriamo i segmenti

$$[\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)] := \{s\gamma(t_i) + (1-t)\gamma(t_{i-1}) : 0 \leq s \leq 1\}$$

$i = 1, ..., N$. La lunghezza della spezzata definita dall'unione $\bigcup_{i=1}^{N} [\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)]$ è data da

$$L(\gamma, \mathcal{D}) := \sum_{i=1}^{N} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \in [0, +\infty)$$

Denotiamo

$$L(\gamma) := sup_{\mathcal{D}} L(\gamma, \mathcal{D}) \in [0, +\infty] =_{def} [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

5.4.6 Definizione di integrale curvilineo di prima specie per una funzione continua f lungo una curva γ di classe C^1

Definizione 5.4.7 *Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1 e sia $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si definisce*

$$\int_\gamma f\, ds = \int_a^b f(\gamma(t))\, \|\gamma'(t)\|\, dt$$

e si chiama Integrale curvilineo di I specie di f lungo γ.

5.4.7 Definizione di integrale curvilineo di seconda specie di una forma differenziale lungo una curva di classe C^1

Definizione 5.4.8 *Sia $\gamma : [a, b] \to E \subseteq \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1 e sia ω una forma differenziale di classe C^0 su E.*
Si definisce integrale curvilineo di II specie di ω (o del campo F) lungo γ il valore

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} F_i(\gamma(t))\gamma_i'(t) \, dt$$

Se γ fosse chiusa il precedente integrale si scrive anche $\oint_\gamma \omega$

5.4.8 Definizione di forma differenziale esatta e di potenziale di una forma differenziale

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $\mathcal{U} \in C^1(E)$. Possiamo associare ad $\mathcal{U}$ la forma diff.

$$d\mathcal{U} = \langle \nabla \mathcal{U}, dx \rangle = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_1}\, dx_1 + \cdots + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_n}\, dx_n$$

che viene anche chiamata <u>differenziale di $\mathcal{U}$</u> poichè coincide con la notazione con cui indichiamo il differenziale di $\mathcal{U}$

Definizione 5.4.9 *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $\omega = \langle F, dx \rangle$ dove $F : E \to \mathbb{R}^n$ di classe C^0. La forma ω si dice <u>esatta</u> in E se esiste $\mathcal{U} : E \to \mathbb{R}$ di classe C^1 t.c.*

$$\nabla \mathcal{U}(x) = F(x)\, \forall x \in E$$

o, equivalentemente, $d\mathcal{U} = \omega$.
In tal caso $\mathcal{U}$ è detta <u>funzione potenziale</u> (o primitiva) di ω in E.

5.4.9 Formula per il calcolo dellintegrale curvilineo di una forma differenziale esatta

Teorema 5.4.2 (Integrale per forme esatte) *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, ω forma diff. continua ed esatta su E. Allora per ogni curva $\gamma : [a,b] \to E$ C^1 a tratti vale che*

$$(*) \int_\gamma \omega = \mathcal{U}(\gamma(b)) - \mathcal{U}(\gamma(a))$$

dove $\mathcal{U} : E \to \mathbb{R}$ è un qualunque potenziale di ω