DISCIPLINA: ESTRUTURA DE DADOS II

2018

UEA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

Árvore Espalhada (Geradora) Mínima

Prof. Luis Cuevas Rodríguez, PhD

EST
Escola Superior de Tecnologia da UEA

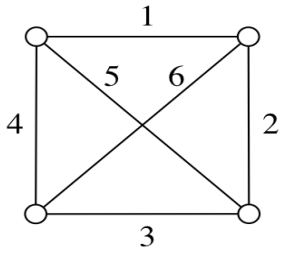
NUCOMP
NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO

Árvore Espalhada ou Geradora

- **Árvore Geradora** (Spanning Tree) T de um grafo G é um subgrafo de G tal que:
  - T é uma árvore.
    - Acíclico:
    - Conexo:
  - T conecta todos os vértices de G.

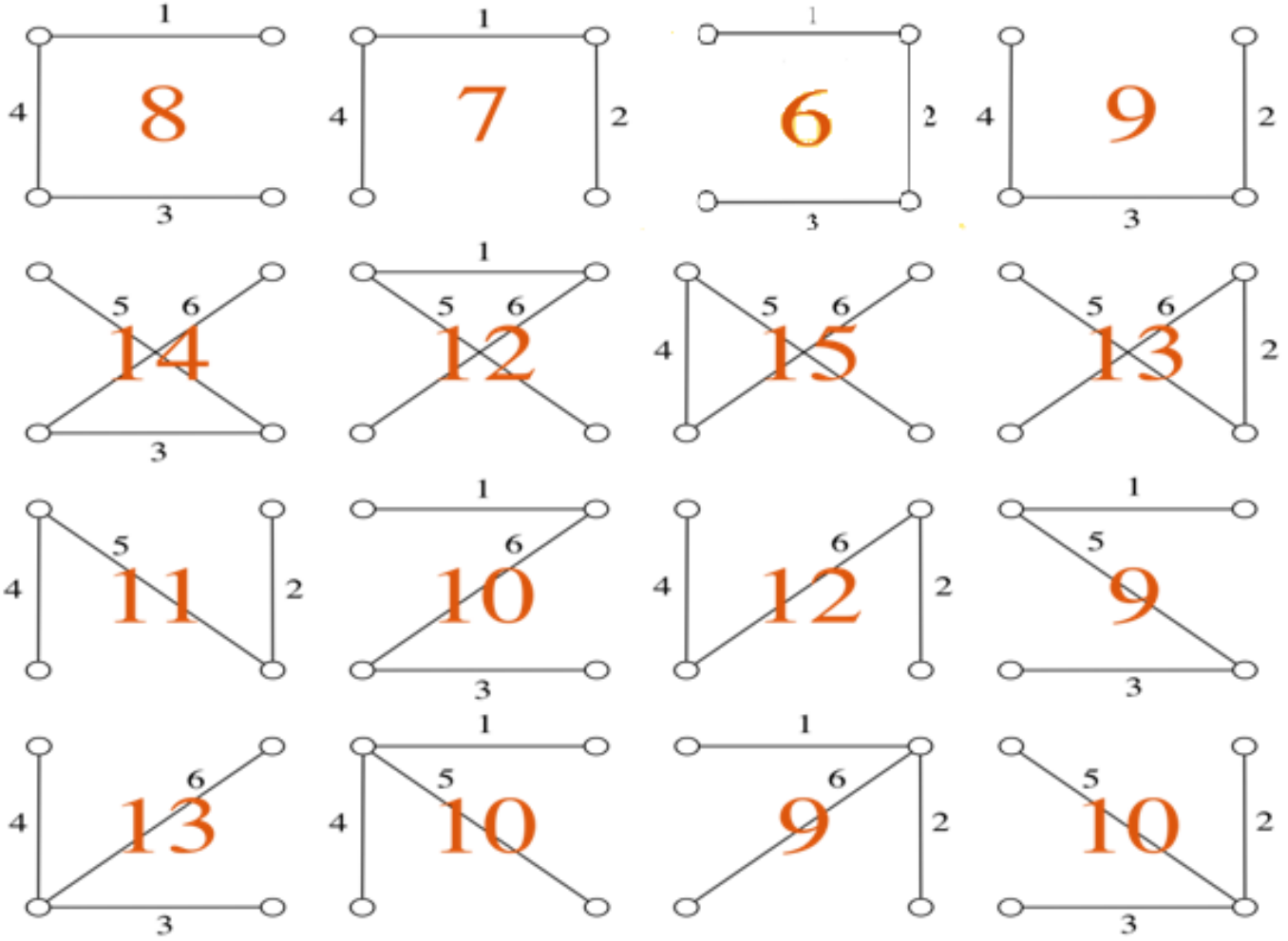
- Um grafo G=(V, E), (u,v)$\in$ E.
  - Encontrar um subconjunto acíclico T $\subseteq$ E que conecte todos os vértices.

Árvore Espalhada



K_4

K_4 tem 16 árvores geradoras



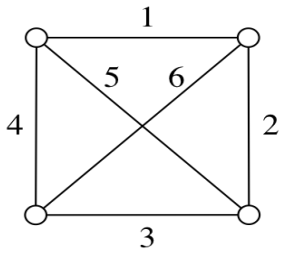
Prof. Luis Cuevas Rodríguez, PhD

UEA
UNIVERSIDADE
DO ESTADO DO
AMAZONAS

Árvore Espalhada Mínima

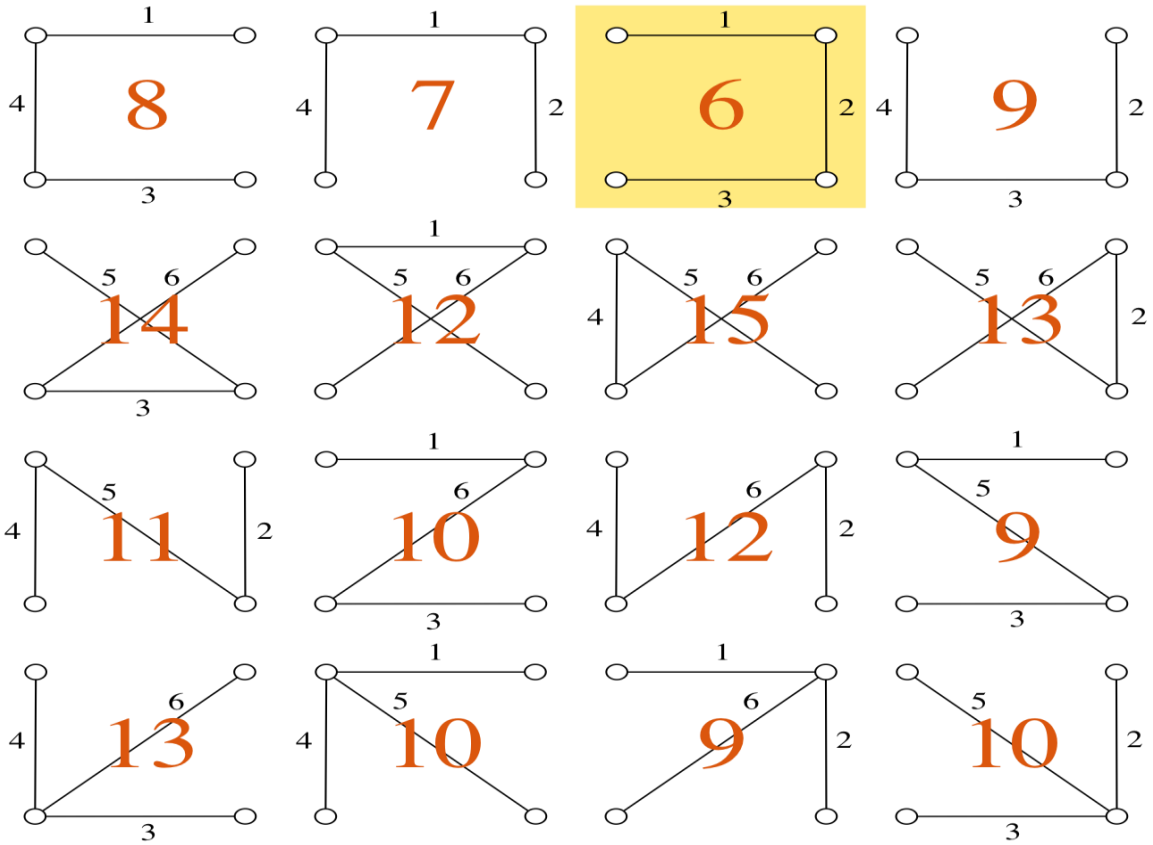
Árvore Geradora Mínima (Minimum Spanning Tree - **MST**) T de G: uma árvore geradora cujo peso *w(T)* (a soma dos pesos de suas arestas) é mínimo.

$$\min\left\{w(T) = \sum_{\{u,v\} \in T} w(u,v)\right\}$$



K_4

K_4 tem 16 árvores geradoras



Prof. Luis Cuevas Rodríguez, PhD

UEA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

Árvore Espalhada Mínima

- O problema de achar T (Árvore Espalhada Mínima) e conhecido como ***Problema da Árvore Espalhada Mínima ou Problema da Árvore Geradora Mínima***
- A quantidade de aresta da Árvore Espalhada Mínima é |V|-1

Árvore Espalhada Mínima

- Algoritmos gulosos: para cada passo do algoritmo a opção escolhida é a melhor nesse momento.

```
GENERICO-AEM(G,w) //algoritmo genérico
A=∅
Enquanto A não forma uma árvore espalhada fazer:
        encontrar uma aresta (u, v) que seja segura para A
        A = A ∪ {(u, v)}
retorna A
```

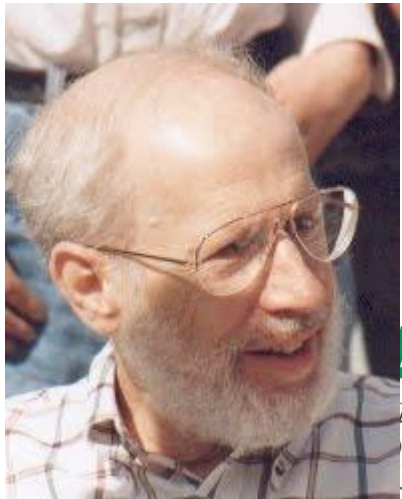
Executa |V|-1 vezes

- A → subconjunto de arestas, forma uma árvore espalhada mínima
- Aresta segura → aresta que pode ser adicionada a A
- Complexidade O(|V| x encontrar aresta)

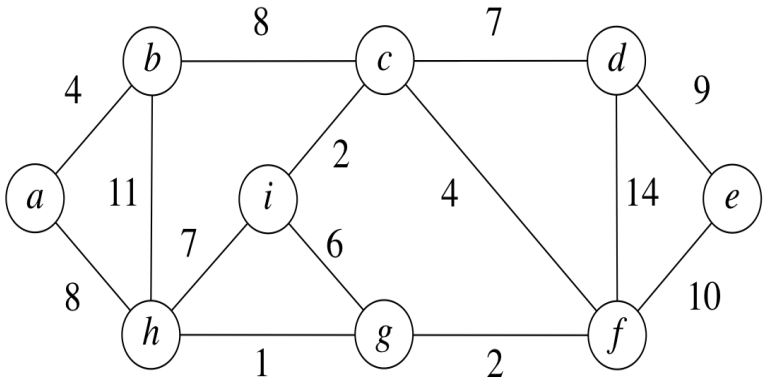
Algoritmos - Árvore Espalhada Mínima

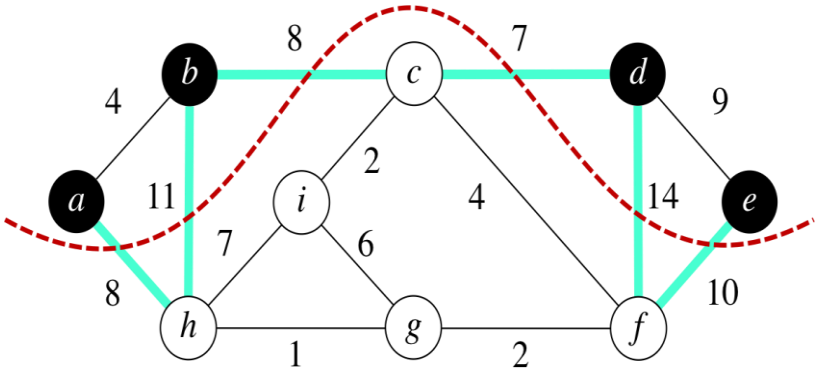
- Algoritmo de Prim
  - matemático e informático estadunidense.

- Algoritmo de Kruskal
  - matemático, estatístico, informático e psicometrista estadunidense.



Algoritmo de Prim

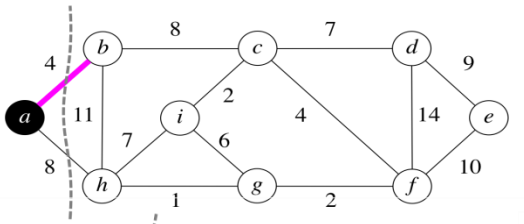
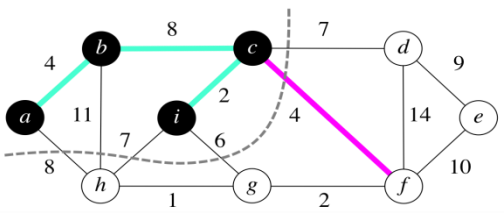
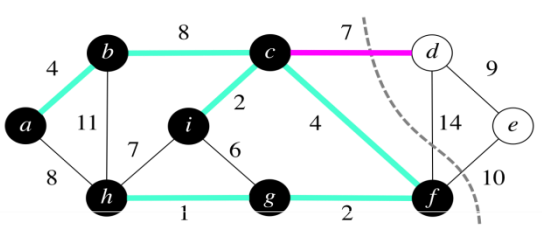
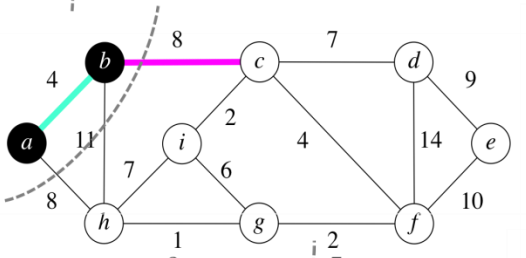
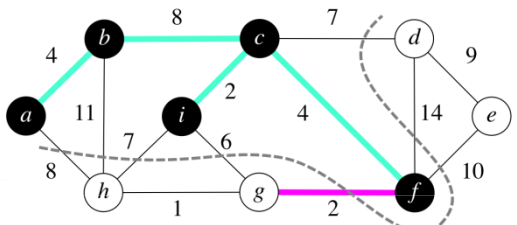
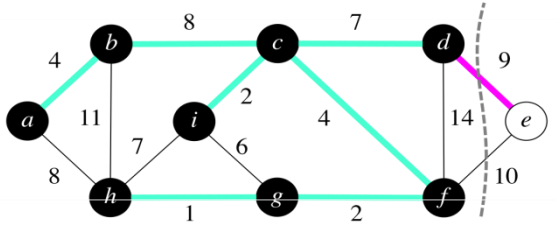
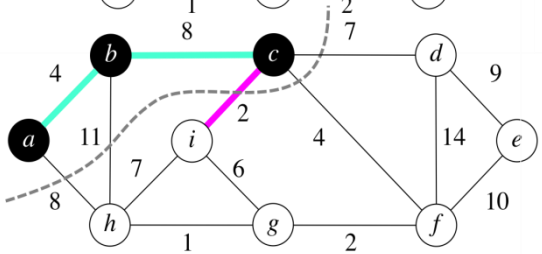
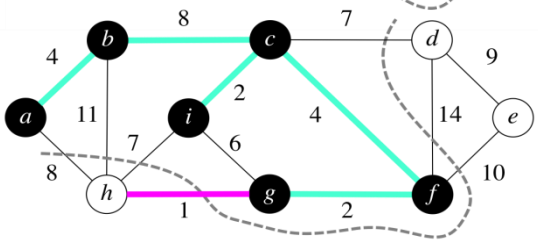
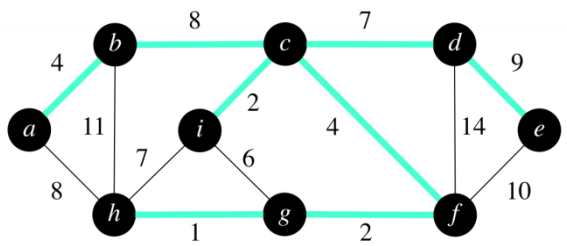
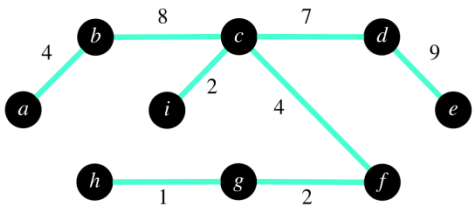
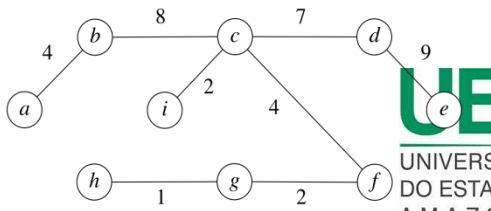




- grafo não-direcionado G=(V, E).
- **corte** (S, V − S) em G é uma bipartição de V
  - S = {a, b, d, e} e V − S = {h, i, g, c, f }
- **arestas cruzadas**: A
  - *A={ah, bh, bc, cd, df, ef}*
- **aresta leve**: aresta de cruzamento com peso mínimo
  - cd

Algoritmo de Prim

- Algoritmo cria uma **Árvore Geradora Mínima** adicionando as arestas leves, vértice por vértice.

Prof. Luis Cuevas Rodríguez, PhD

UEA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

Algoritmo de Prim

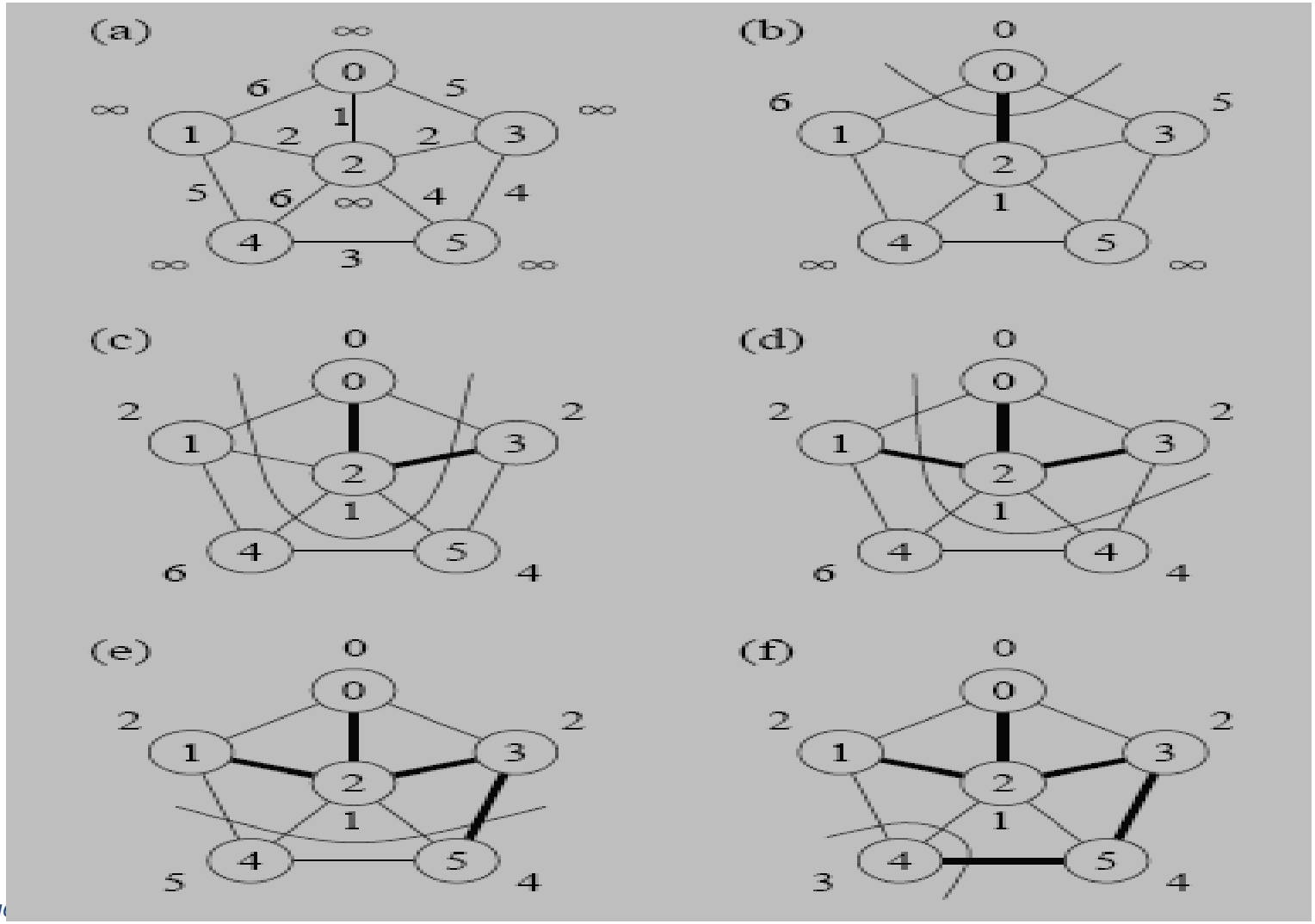
1. Escolha um vértice S para iniciar o subgrafo
2. enquanto houver vértices que não estão no subgrafo (não visitados)
3. selecione uma aresta segura (menor valor)
4. insira a aresta segura e seu vértice no subgrafo

Executa |V| vezes

$|E|^2$ ou
log |E|

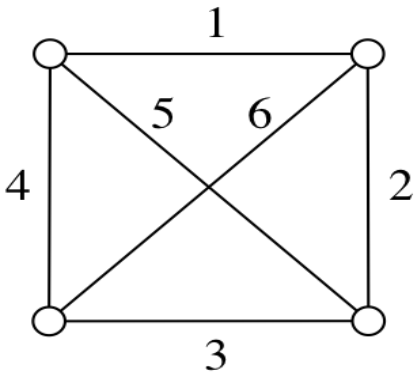
O(E log E) ➔ $|E|<|V|^2$ ➔ **O(E log V)**

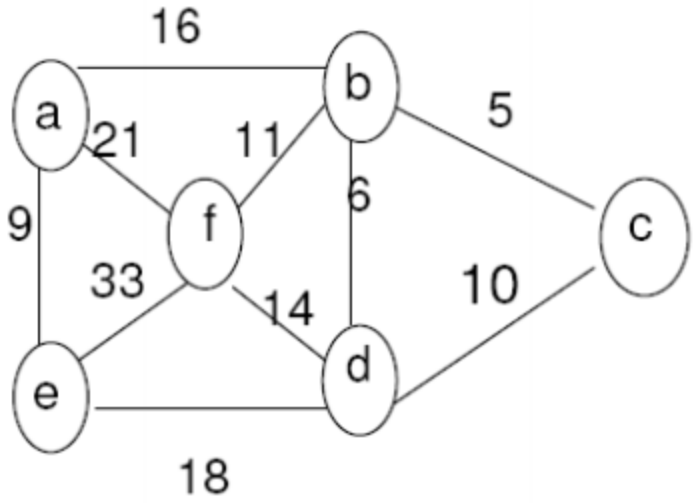
Algoritmo de Prim



Algoritmo de Prim

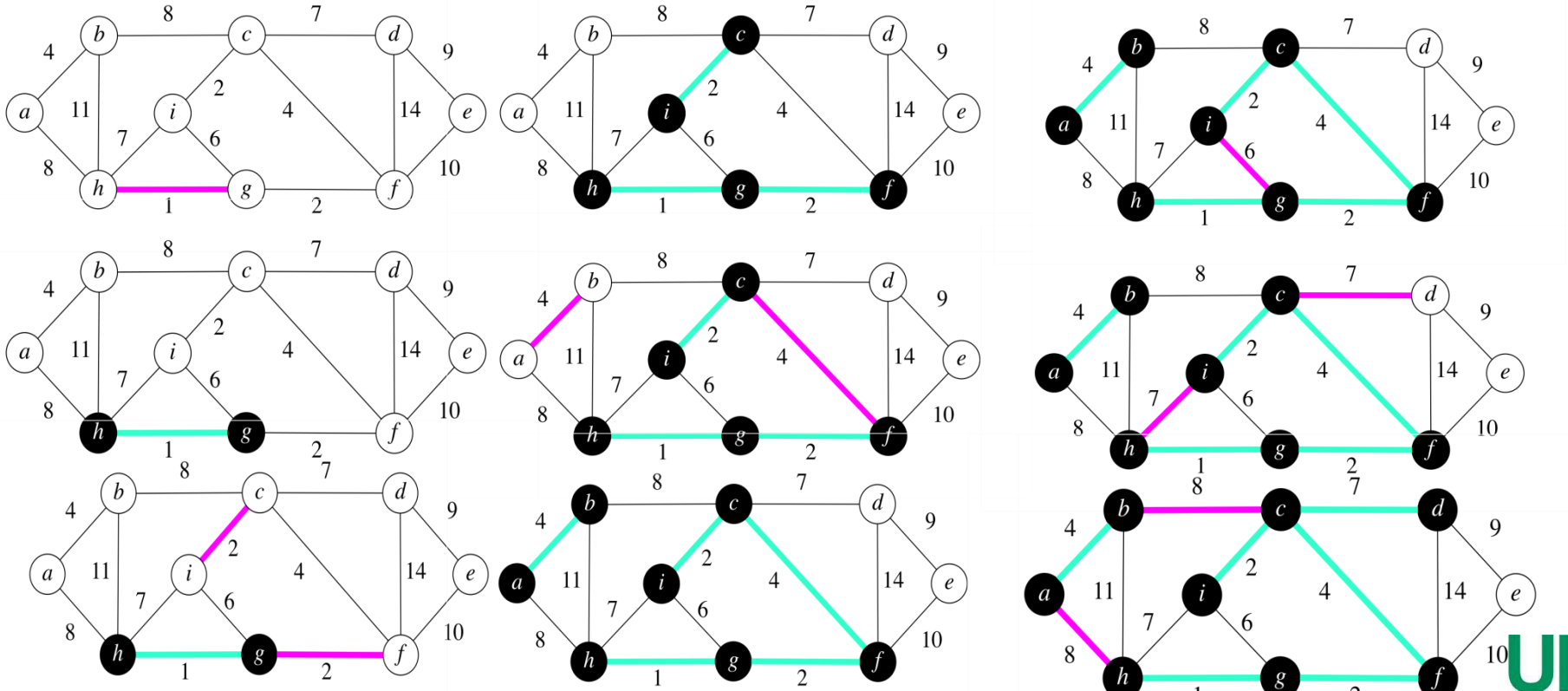
- Aplicar em:





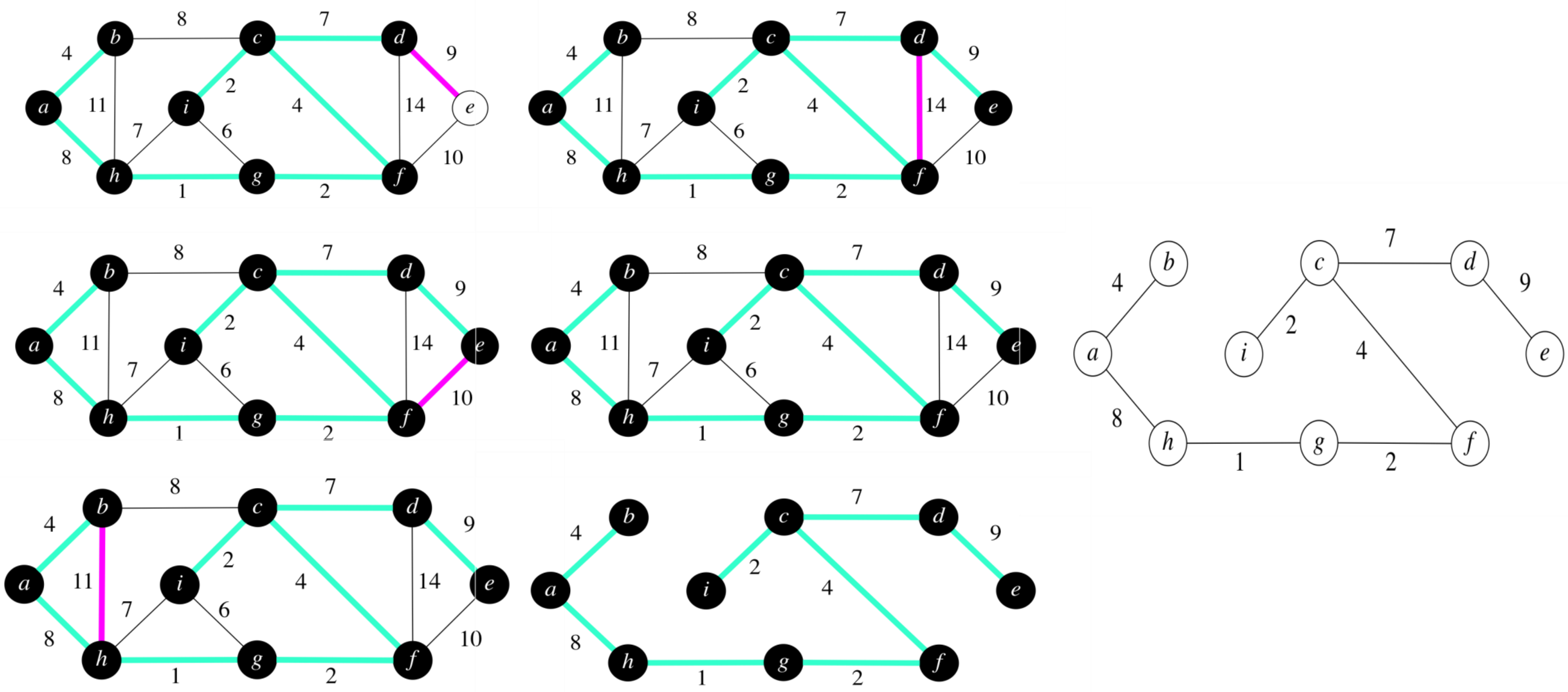
Algoritmo de Kruskal

- Adiciona uma aresta por vez em uma floresta *A*, na ordem não-decrescente dos pesos.
- Uma aresta é incluída se conecta vértices de árvores distintas de *A*.



UEA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

Algoritmo de Kruskal



Prof. Luis Cuevas Rodríguez, PhD

UEA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

Algoritmo de Kruskal

KRUSKAL(G,w)
A=∅
Para cada vertice v ∈ V[G] **fazer:**
creiar-arvore(v)
criar conjunto S de E ∈ E[G] ordenado pelo peso decrescente
Para cada aresta (u,v) ∈ S fazer:
remover a aresta como peso mínimo de S
Se ARVORE(u) ≠ ARVORE (v) **fazer**:
A = A ∪ {(u, v)}
retornar A

Executa |V| vezes

Algoritmo para ordenar
O(E log E) ou O(E^2)

Executa |E| vezes

O(E log E) ➔ |E|<|V|^2 ➔ **O(E log V)**

Algoritmo de Kruskal

- Aplicar em: