1) **Ejercicio #2**

Se desea emular digitalmente la característica de un filtro analógico pasa bajos Butterworth de orden 2, con $f_c = 1\ kHz$.

A. Para $f_s = 100\ kHz$ y aplicando transformación bilineal, obtener un filtro con respuesta $H_{(z)}$ cuyo comportamiento emule al Butterworth analógico.
Trazar la respuesta en frecuencia de módulo y fase de ambos filtros sobre un mismo gráfico para establecer comparaciones.

B. Repetir el punto anterior para $f_s = 10\ kHz$.

C. Repetir los puntos A) y B) si se desea emular digitalmente la característica de un filtro analógico pasa altos Butterworth de orden 2, con $f_c = 6\ kHz$

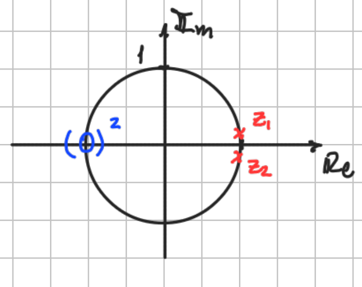
D. Indique en cuál de los 3 casos (A, B ó C) justificaría rediseñar aplicando prewarping. Explique el motivo en pocas palabras.

$$T_{B_2}(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \quad , \quad F_B(z) = k\,\frac{z-1}{z+1} \quad ; \quad k = 2f_s = 200\ kHz$$

$$T_{B_2}(z) = \frac{1}{k^2\frac{(z-1)^2}{(z+1)^2} + \sqrt{2}\,k\,\frac{(z-1)}{z+1} + 1} = \frac{(z+1)^2}{k^2\,(z-1)^2 + \sqrt{2}\,k\,(z+1)(z-1) + (z+1)^2}$$

$$T_{B_2}(z) = \frac{(z+1)^2}{k^2(z^2-2z+1) + \sqrt{2}k\,(z^2-1) + z^2+2z+1} = \frac{(z+1)^2}{z^2(k^2+k\sqrt{2}+1) + z(2-2k^2) + (k^2-\sqrt{2}k+1)}$$

$$T_{B_2}(z) = \frac{(z+1)^2}{40000,282.10^6 z^2 - 8.10^{10} z + 3,999.10^{10}} \longrightarrow \begin{cases} z_1 = 0,999 + j\,0,0000070789 = 0,999 + j\,7,0789.10^{-6} \\ z_2 = 0,999 - j\,0,0000070789 = 0,999 - j\,7,0789.10^{-6} \end{cases}$$



Para este y los demás puntos se procedió a hacerlos en python.

Ejercicio #3

Dadas las siguientes respuestas al impulso se pide:

- Transferencia del sistema $H(z)$
- Singularidades en el plano z
- Respuesta de módulo y fase

a) ***Filtro de media móvil*** (*moving average).*

$h_1(k) = (1, 1)$ significa $h(0) = 1$ y $h(1) = 1$
$h_2(k) = (1, 1, 1)$

1. ¿Qué modificación debería implementarse para que la salida representa la media aritmética?
2. Para el último sistema, ¿qué frecuencia de muestreo se debería adoptar si se quisiera eliminar con dicho filtro la interferencia causada por la frecuencia de línea de 50 Hz?

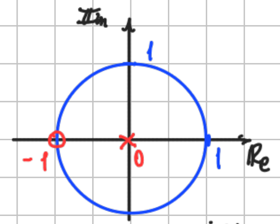
b) ***Filtro diferenciador***

$h_1(k) = (1, -1)$ ***de primer orden***
$h_2(k) = (1, 0, -1)$ ***de segundo orden***

1. ¿Qué demora introducen ambos sistemas?
2. Hasta qué frecuencias estos sistemas se comportan como un derivador ideal. Considere una tolerancia admisible del 5% respecto a su respuesta ideal $|H(\Omega)| = \Omega$.

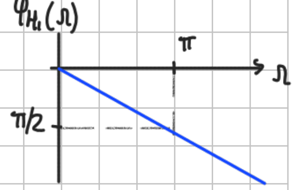
a) $h_1(k) = (1, 1)$

$$H_1(z) = 1 + z^{-1} = \frac{z+1}{z}$$



$$H_1(\Omega) = 1 + e^{-j\Omega} = \left(e^{j\Omega/2} + e^{-j\Omega/2}\right) e^{-j\Omega/2}$$

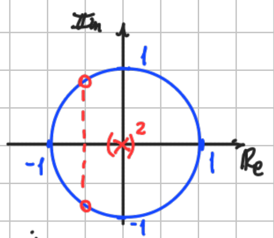
$$H_1(\Omega) = 2\cos(\Omega/2)\, e^{-j\Omega/2}$$



$h_2(k) = (1, 1, 1)$

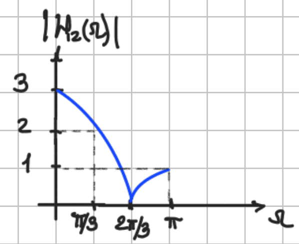
$$H_2(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} = \frac{z^2 + z + 1}{z^2}$$

$$H_2(z) = \frac{\left(z - \frac{-1-j\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \frac{-1+j\sqrt{3}}{2}\right)}{z^2}$$



$$H_2(\Omega) = 1 + e^{-j\Omega} + e^{-j2\Omega} = \left(e^{j\Omega} + 1 + e^{-j\Omega}\right) e^{-j\Omega}$$

$$H_2(\Omega) = [1 + 2\cos(\Omega)]\, e^{-j\Omega}$$



1) Si N es la cant. de muestras, cada coeficiente deberá ser 1/N.

$h_1(k) = (1/2, 1/2)$ y $h_2(k) = (1/3, 1/3, 1/3)$

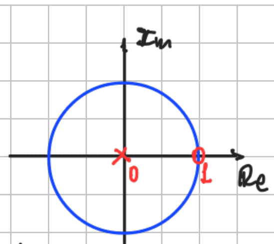
2) Con $h_2(k)$ se tiene:

$$f = \frac{2\pi}{3}\,\frac{f_s}{2\pi} \rightarrow f_s = 3 \cdot f = 3 \cdot 50\text{ Hz} = 150\text{ Hz}$$

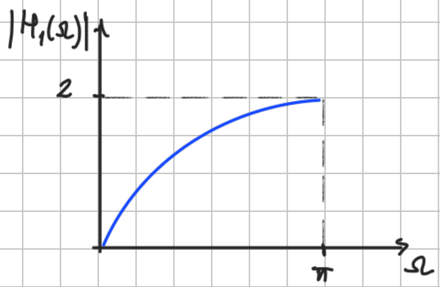
b)

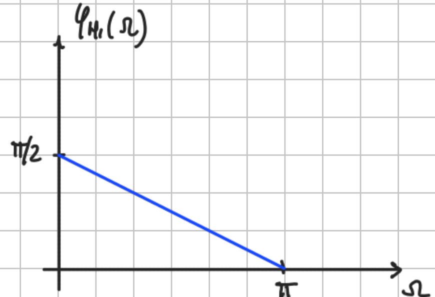
$h_1(k) = (1, -1)$

$H_1(z) = 1 - z^{-1} = \dfrac{z-1}{z}$



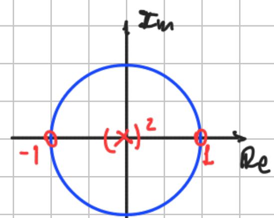
$$H_1(\Omega) = 1 - e^{-j\Omega} = \left(e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2}\right) e^{-j\Omega/2} = 2j\ \text{sen}(\Omega/2)\ e^{-j\Omega/2} = 2\,\text{sen}(\Omega/2)\, e^{j(\pi/2 - \Omega/2)}$$



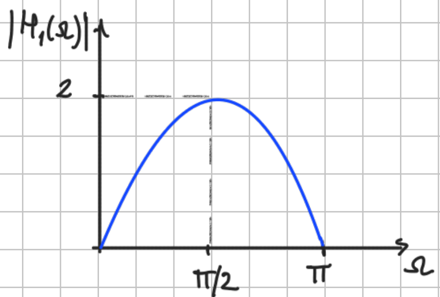


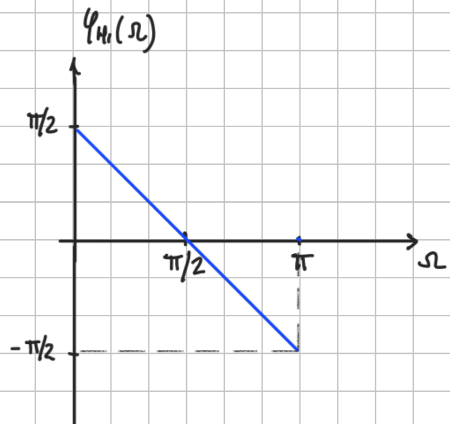
$h_2(k) = (1, 0, -1)$

$H_2(z) = 1 - z^{-2} = \dfrac{z^2 - 1}{z^2}$



$$H_2(\Omega) = 1 - e^{-j2\Omega} = \left(e^{j\Omega} - e^{-j\Omega}\right) e^{-j\Omega} = 2\,\text{sen}(\Omega)\, e^{j(\pi/2 - \Omega)}$$





1) $H_1(z)$ presenta demora de $1/2$ (indeseable, no es entero)

$H_2(z)$ presenta una demora unitaria.

2) $|H_1(\Omega)| = 2\,\text{sen}(\Omega/2) \;\longrightarrow\; \left.\dfrac{\partial |H_1(\Omega)|}{\partial \Omega}\right|_{\Omega=0} = \cos(\Omega/2)\Big|_{\Omega=0} = 1$

$\Rightarrow \quad 2\,\text{sen}(\Omega/2) > (\Omega) \cdot 0,95$

$\Omega \simeq 0,35\pi \,;\quad \pi = f_s/2 \;\longrightarrow\; f = 0,35\,\dfrac{f_s}{2} = \underline{0,175\, f_s}$

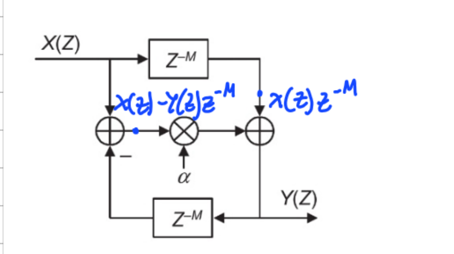
$$|H_2(\Omega)| = 2\,sen(\Omega) \rightarrow \frac{\partial\,|H_2(\Omega)|}{\partial\Omega}\Big|_{\Omega=0} = 2\cos(\Omega)\Big|_{\Omega=0} = 2$$

$$\Rightarrow 2\,sen(\Omega) > (2\Omega)\cdot 0,95$$

$$\Omega \simeq \frac{7}{40}\pi \rightarrow f = \frac{7}{40}\,\frac{f_s}{2} = \frac{7}{80}f_s$$

$$\underline{f \simeq 0,09\,f_s}$$

2) Se dispone del siguiente filtro digital:



a) Para la transferencia del filtro con M = 2 y α=0.8; calcular 1) el diagrama de polos y ceros y la respuesta en frecuencia de 2) módulo, 3) fase y 4) retardo de grupo.

b) Si quisiéramos anular una senoidal interferente de 125 Hz y su armónica de 375 Hz y sólo dispone de un sumador y el filtro de la figura con M = 4. Proponga un esquema de la solución y calcule los parámetros del filtro que sería necesario adecuar.

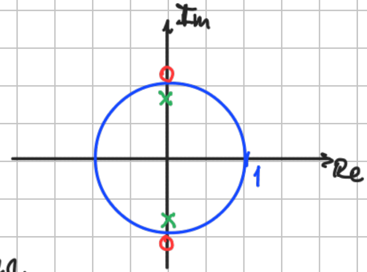
a)

$$Y(z) = x(z)\,z^{-M} + \alpha\left[x(z) - Y(z)\,z^{-M}\right]$$

$$Y(z)\left(1 + \alpha z^{-M}\right) = x(z)\left(z^{-M} + \alpha\right)$$

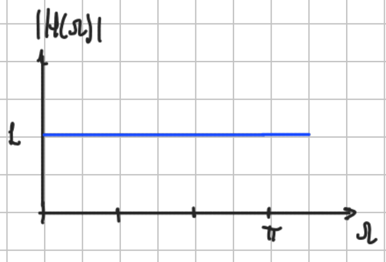
$$H(z) = \frac{z^{-M} + \alpha}{\alpha z^{-M} + 1} = \frac{\alpha z^{M} + 1}{z^{M} + \alpha}$$

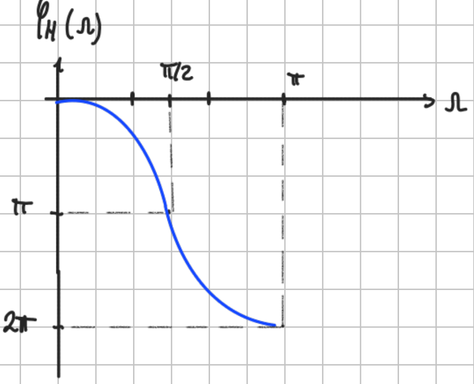
$$\rightarrow H(z) = \frac{0,8\,z^2 + 1}{z^2 + 0,8} = \frac{0,8\,(z - j\sqrt{5}/2)(z + j\sqrt{5}/2)}{(z - j\,2/\sqrt{5})(z + j\,2/\sqrt{5})}$$



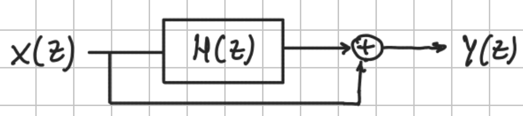
$$|H(\Omega)|^2 = \frac{0,8\,e^{j2\Omega} + 1}{e^{j2\Omega} + 0,8}\;\frac{0,8\,e^{-j2\Omega} + 1}{e^{-j2\Omega} + 0,8} = \frac{0,8^2 + 0,8\left(e^{-j2\Omega} + e^{j2\Omega}\right) + 1}{1 + 0,8\left(e^{j2\Omega} + e^{-j2\Omega}\right) + 0,8^2} = 1$$

$$\rightarrow |H(\Omega)| = 1$$





b)



$$T(z) = \frac{0,8\,z^4 + 1}{z^4 + 0,8} + 1 = \frac{2\left(0,8\,z^4 + 1\right)}{z^4 + 0,8} = 5/2\;\frac{\left(z^4 + 5/4\right)}{z^4 + 4/5}$$

• ceros : $z^4 = -1/0{,}8 = -5/4 \rightarrow z = (5/4)^{1/4} e^{j\frac{\pi + 2k\pi}{4}}$; $k = 0,1,2,3$

$z_0 = 1{,}05\, e^{j\pi/4}$; $z_1 = 1{,}05\, e^{j3\pi/4}$

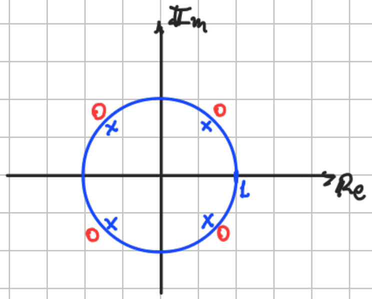
$z_2 = 1{,}05\, e^{j5\pi/4}$; $z_3 = 1{,}05\, e^{j7\pi/4}$

• polos :

$z^4 = -0{,}8 = -4/5 \rightarrow z = (4/5)^{1/4} e^{j\frac{\pi + 2k\pi}{4}}$; $K = 0,1,2,3$

$z_0 = 0{,}94\, e^{j\pi/4}$; $z_1 = 0{,}94\, e^{j3\pi/4}$

$z_2 = 0{,}94\, e^{j5\pi/4}$; $z_3 = 0{,}94\, e^{j7\pi/4}$



Si hay que eliminar $f_1 = 125$ Hz y $f_2 = 375$ Hz

$$\left.\begin{array}{l} \pi/4 \rightarrow 125\text{ Hz} \\ 3\pi/4 \rightarrow 375\text{ Hz} \end{array}\right\}$$

$f_1 = \frac{\pi}{4} \frac{f_s}{2\pi} \rightarrow f_s = 1\text{kHz}$

o

$f_2 = \frac{3\pi}{4} \frac{f_s}{2\pi} \rightarrow \underline{f_s = 1\text{kHz}}$