L'homologie d'un espace fibré dont la fibre est connexe

(Cours professé au Collège de France en 1950);

Par Jean LERAY.

INTRODUCTION.

Les crochets [ ] renvoient à la bibliographie, p. 213. Ayant à parler constamment de cohomologie et jamais d'homologie, je dirai *homologie* là où l'usage est de dire cohomologie.

1. Préliminaires. — Nous avons antérieurement [11] attaché *un anneau spectral* et *un anneau filtré* (1) à une application continue ξ d'un espace localement compact X dans un espace localement compact Y; ces anneaux établissent une relation entre l'anneau d'homologie de X et celui de Y, calculé relativement à un anneau variable, qui est, au point y, l'anneau d'homologie de $\overset{-1}{\xi}(y)$. L'objet de cet article-ci est de préciser les propriétés de ces invariants, quand ξ est la projection d'un espace fibré X sur sa base Y : il explicite [10].

Supposons que X soit un espace connexe, fibré par une fibre F non connexe; soit F′ une composante connexe de F; quand la fibre F décrit X, F′ décrit une composante connexe de X, donc X tout entier; on peut prouver que l'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie de la projection de X sur sa base sont les mêmes, qu'on prenne pour fibre F ou F′; aussi supposerons-nous *la fibre connexe :* sinon une généralité illusoire compliquerait inutilement nos énoncés.

(1) Ces anneaux sont des algèbres quand l'homologie est relative à un anneau ayant une unité.

Nous n'approfondissons pas l'étude des *espaces homogènes*, ni celle des *espaces fibrés principaux :* leur homologie vient d'être étudiée par H. Cartan, J. L. Koszul et moi-même au *Colloque de Topologie de Bruxelles* [6]. Nous ne précisons pas non plus quelles relations peuvent exister entre notre anneau spectral et les généralisations, récemment esquissées par G. Hirsch [9], des classes caractéristiques de E. Stiefel, H. Whitney, N. E. Steenrod [14].

2. Sommaire. — Soit ξ la projection d'un espace fibré X, de fibre connexe F, sur sa base $Y = X/F$. Le Chapitre I envisage, après H. Whitney et N. E. Steenrod [12], l'anneau d'homologie $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{B})$ de Y relativement à un anneau qui, au point y de Y, est l'anneau d'homologie de $\overset{-1}{\xi}(y)$; quand y décrit dans Y un contour fermé, cet anneau est transformé par un automorphisme, qui est l'image de la classe d'homotopie de ce contour par un homomorphisme (¹) canonique β; $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{B})$ est l'anneau d'homologie de Y relativement à l'anneau d'homologie de F quand β est constant; c'est évidemment le cas quand Y est simplement connexe; nous indiquons d'autres cas où β est constant, en particulier le suivant :

$$X = U/W, \qquad Y = U/V, \qquad F = V/W,$$

U étant un espace fibré principal, dont la fibre V est un groupe connexe, W étant un sous groupe fermé de V. D'après la théorie générale des applications continues qu'expose [11], $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{B})$ est le premier terme d'un anneau spectral, c'est-à-dire d'une suite d'anneaux différentiels, dont chacun a pour anneau d'homologie le suivant; les termes de cette suite ayant un rang supérieur à la dimension de la base ou à la dimension de la fibre sont identiques à l'anneau gradué de l'anneau d'homologie, convenablement filtré, de X; cet anneau spectral et cette filtration sont des invariants topologiques de la structure fibrée de X; nous rappelons les propriétés de ces invariants. Nous montrons que l'anneau spectral est indépendant de son indice r quand la section par F applique l'anneau d'homologie de X *sur* celui de F.

(¹) Cet homomorphisme β applique donc le groupe fondamental de Y dans le groupe des automorphismes de l'anneau d'homologie de la fibre.

Le *Chapitre* II suppose β constant et l'homologie relative à un corps; alors : la caractéristique d'Euler de X est le produit de celles de Y et F; on peut majorer les nombres de Betti de l'un quelconque des trois espaces X, Y, F en fonction de ceux des deux autres; si l'on suppose que X, Y et F sont des variétés orientables, alors l'algèbre spectrale a la dualité de Poincaré et la filtration de l'algèbre d'homologie de X a, elle aussi, la dualité de Poincaré.

Le *Chapitre* III traite trois cas particuliers : la fibre à même homologie qu'une sphère; la fibre a même homologie qu'un produit de sphères de dimensions paires; la base a même homologie qu'une sphère. Le premier de ces cas a été étudié dès 1941 par W. Gysin [8]; nous retrouvons, comme cas particuliers des propriétés d'une application continue quelconque, tous les théorèmes de W. Gysin concernant l'homologie et les théorèmes que viennent de démontrer S. S. Chern et E. Spanier [4]; il est curieux que W. Gysin suppose l'espace et sa base orientables, découvre presque toutes les propriétés qui sont indépendantes de cette hypothèse, ne découvre aucune de celles qu'elle entraîne; S. S. Chern et E. Spanier n'étudient pas non plus les conséquences de la dualité de Poincaré. On sait que W. Gysin démontre ses théorèmes à l'aide d'invariants d'homotopie très importants, dont N. E. Steenrod [13] a simplifié et généralisé la définition; nous n'établirons pas les liens qui existent entre ces invariants d'homotopie et l'anneau spectral (*cf.* [11], n° 80). Quand la base a même homologie qu'une sphère, nous trouvons des invariants dont la structure additive est duale de celle que nous avons obtenue quand la fibre a même homologie qu'une sphère; nous retrouvons et complétons les résultats récents de H. C. Wang [15], qui suppose que la base est, à proprement parler, une sphère; nous n'indiquons pas comment nos conclusions permettent de retrouver les théorèmes de H. Samelson sur les espaces homogènes sphériques et de les étendre aux espaces homogènes ayant même homologie qu'une sphère.

3. Historique. — J'ai annoncé dès 1946 dans [10] les résultats essentiels du présent article; j'ai signalé que, dès cette époque, G. Hirsch avait obtenu la formule (9.9); il l'a depuis énoncée comme

suit : « On peut définir sur l'espace vectoriel $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathfrak{A}) \otimes \mathcal{H}(F \bigcirc \mathfrak{A})$ des différentielles, augmentant de 1 le degré canonique, telle que cet espace vectoriel ait, relativement à l'une quelconque de ces différentielles, $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathfrak{A})$ pour espace vectoriel d'homologie ». Depuis G. Hirsch a également énoncé le théorème 7.3 *b* (formules (5) et (7) de ma Note [10]).

Je dois remercier A. Borel d'avoir très utilement collaboré à la mise au point du théorème 4.3, du n° **5** et du n° **11**.

Je dois enfin signaler que A. Borel et J. P. Serre ont découvert la conséquence la plus remarquable de la théorie qu'expose cet article : ils ont prouvé que, *si un espace fibré a même homologie qu'un espace euclidien de dimension p, alors sa base et sa fibre, dont le nombre des composantes connexes est supposé fini, ont même homologie que des espaces euclidiens de dimensions q et p — q*. A l'aide des raisonnements de A. Borel et J. P. Serre j'ai amélioré les énoncés que j'avais primitivement donnés au théorème 9.1 et à son corollaire 9.2, de telle sorte que ce théorème de A. Borel et J. P. Serre est maintenant une conséquence aisée du théorème 9.1 et de leur Note [1].

CHAPITRE I.

CAS GÉNÉRAL.

4. L'HOMOMORPHISME CANONIQUE β, DU GROUPE FONDAMENTAL DE LA BASE, DANS LE GROUPE DES AUTOMORPHISMES DE L'ANNEAU D'HOMOLOGIE DE LA FIBRE. — *Définition* 4.1. — Soient trois espaces X, Y, F, connexes et localement compacts; Y sera en outre localement connexe. Nous dirons que X est *fibré*, a pour *fibre* F et pour *base* $Y = X/F$ quand nous aurons défini une application continue ξ de X *sur* Y telle qu'il existe un voisinage ouvert V de la diagonale (¹) de $Y \times Y$ possédant la propriété suivante : si K est une partie de Y petite d'ordre $\overset{\circ}{V}$, $\overset{-1}{\xi}(K)$ est homéomorphe au produit $F \times K$, cet homéomorphisme transformant ξ en la projection canonique de $F \times K$ sur K.

(¹) *Cf.* [2], Livre III, Chap. II, *Structures uniformes*.

F et $\overset{-1}{\xi}(y)$ sont donc homéomorphes, quel que soit $y \in Y$; ξ est nommée *projection* de X sur Y.

Remarque. — Cette définition, qui est moins stricte que celle de C. Ehresmann, est celle sur laquelle B. Eckmann base sa théorie de l'homotopie des espaces fibrés [7]. Nous verrons au n° 5 qu'une définition encore moins stricte peut être utilisée, quand X est un espace à fibre homogène.

LEMME 4.1. — *Soit $\mathcal{B}'$ un faisceau propre* (¹) *défini sur* Y. *Supposons que la section de $\mathcal{B}'(K)$ par $y \in K$ soit un isomorphisme de $\mathcal{B}'(K)$ sur $\mathcal{B}'(y)$, quand* K *est une partie de* Y *compacte, connexe et petite d'ordre* $\overset{2}{V}$. *Alors il existe un sous-faisceau $\mathcal{B}$ de $\mathcal{B}'$ possédant les propriétés suivantes :*

$\mathcal{B}$ est isomorphe à un anneau sur toute partie de Y *compacte, connexe et petite d'ordre* V ;

$$\mathcal{B}(y) = \mathcal{B}'(y) \quad \text{quel que soit} \quad y \in Y; \tag{4.1}$$

$$\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{B}'). \tag{4.2}$$

Preuve. — Montrons que si K_1 et K_2 sont deux parties de Y, compactes, connexes, petites d'ordre V, contenant une même partie compacte K de Y, alors les sections par K de $\mathcal{B}'(K_1)$ et $\mathcal{B}'(K_2)$ constituent le même sous-anneau de $\mathcal{B}'(K)$:

$$K\mathcal{B}'(K_1) = K\mathcal{B}'(K_2). \tag{4.3}$$

Soit $K_0 = K_1 \cup K_2$; K_0 est compact, connexe et petit d'ordre $\overset{2}{V}$; soit $y \in K_1 \cap K_2$; puisque les sections par y des anneaux $\mathcal{B}'(K_\mu)$ ($\mu = 0, 1, 2$) sont des isomorphismes de ces anneaux sur $\mathcal{B}'(y)$, la section de $\mathcal{B}'(K_0)$ par K_ν ($\nu = 1, 2$) est un isomorphisme de $\mathcal{B}'(K_0)$ sur $\mathcal{B}'(K_\nu)$:

$$\mathcal{B}'(K_\nu) = K_\nu \mathcal{B}'(K_0) \qquad \text{pour} \quad \nu = 1, 2;$$

donc

$$K\mathcal{B}'(K_\nu) = K\mathcal{B}'(K_0),$$

(¹) Nous supposons connues les notions définies dans [11].

ce qui prouve la formule (4.3). Cette formule permet de définir $\mathcal{B}$ comme suit :

$\mathcal{B}(K_1) = \mathcal{B}'(K_1)$, si K_1 est une partie compacte, connexe et petite d'ordre V de Y ;

$\mathcal{B}(K) = K\mathcal{B}'(K_1)$, si la partie fermée K de Y appartient à de telles parties K_1 de Y ;

$\mathcal{B}(K) = 0$, sinon.

$\mathcal{B}$ est propre, puisque Y est localement connexe. La formule (4.2) résulte de (4.1) et du corollaire 46.1 de [11].

LEMME 4.2. — *Soit $\mathcal{B}'$ un faisceau propre, défini sur* Y *et possédant les propriétés suivantes : soit* K *une partie de* Y *compacte, connexe et petite d'ordre* $\overset{2}{V}$; *la section de $\mathcal{B}'(K)$ par $y \in K$ est un homomorphisme de $\mathcal{B}'(K)$ sur $\mathcal{B}'(y)$; l'ensemble des éléments de $\mathcal{B}'(K)$ qu'annule la section par y est indépendant de y. La donnée de $\mathcal{B}'$ définit un faisceau $\mathcal{B}$ possédant les propriétés suivantes :*

$\mathcal{B}$ est isomorphe à un anneau sur toute partie de Y *compacte, connexe et petite d'ordre* V ;

$$\mathcal{B}(y) = \mathcal{B}'(y) \quad \textit{quel que soit} \quad y \in Y;$$
$$\mathcal{H}(Y \odot \mathcal{B}) = \mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{B}').$$

Preuve. — Soit K une partie fermée de Y ; soit $\mathcal{B}''(K)$ l'ensemble des $b'' \in \mathcal{B}'(K)$ tels que $yb'' = 0$ quel que soit $y \in K$; les anneaux $\mathcal{B}''(K)$ constituent un sous-faisceau propre $\mathcal{B}''$ de $\mathcal{B}'$; $\mathcal{B}''$ est un idéal de $\mathcal{B}'$ tel que $\mathcal{B}''(y) = 0$ quel que soit $y \in Y$. Vu le théorème 46.1 de [11], on ne modifie pas la proposition à prouver quand on remplace $\mathcal{B}'$ par $\mathcal{B}'/\mathcal{B}''$; cette proposition se réduit alors au lemme 4.1.

LEMME 4.3. — *Si $X = F \times K$, si* K *est compact et connexe, alors :*

a. La section de $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ par $F \times y$, où $y \in K$, est un homomorphisme de $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ sur $\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A})$;

b. L'ensemble des éléments qu'annule cette section est indépendant de y.

Preuve de a. — Soit $f \in F$, $k \in K$; en appliquant $f \times k$ sur $f \times y$, on définit une rétraction de X sur $F \times y$; on applique le théorème 67.2 *a* de [11].

Preuve de b. — $\theta_y(f) = f \times y$ est une application propre de F dans X; elle dépend du paramètre $y \in K$; l'homomorphisme $\overset{-1}{\theta}_y$ de $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ est indépendant de y, vu le théorème 67.1 de [11]; cet homomorphisme est la section par $F \times y$, d'après le théorème 47.1 *b* de [11].

Choisissons dans le lemme 4.2 $\mathcal{B} = \xi\mathcal{F}(X \bigcirc \mathcal{A})$; les hypothèses de ce lemme sont vérifiées, vu le lemme 4.3; donc

THÉORÈME 4.1. — *La donnée de l'espace fibré* X, *de l'anneau* $\mathcal{A}$ *et du voisinage* V *de la diagonale de* $Y \times Y$ *définit un faisceau* $\mathcal{B}$, *isomorphe à l'anneau* $\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A})$ *sur chaque partie de* Y *compacte, connexe et petite d'ordre* V;

$$\boxed{\mathcal{H}[Y \bigcirc \xi\mathcal{F}(X \bigcirc \mathcal{A})] = \mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{B}).} \tag{4.4}$$

Supposons Y *globalement et localement connexe par arcs;* soit y un point de Y arbitrairement choisi; notons $\mathfrak{T}(Y)$ le groupe fondamental de Y relatif à y et choisissons $F = \overset{-1}{\xi}(y)$; le théorème 73.1 de [11] associe à $\mathcal{B}$ un homomorphisme β de $\mathfrak{T}(Y)$ dans le groupe des automorphismes de $\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A})$; il est évident que, quand on remplace V par $V' \supset V$, β ne change pas : β est indépendant du choix de V; on peut donc préciser comme suit le théorème 4.1 :

THÉORÈME 4.2. — *Soit un espace fibré* X, *dont la base* Y *est globalement et localement connexe par arcs; soit un anneau* $\mathcal{A}$. *Ces données définissent un homomorphisme* β, *localement constant, du groupe fondamental* $\mathfrak{T}(Y)$ *de* Y *dans le groupe des automorphismes de l'anneau* $\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A})$. *La relation* (4.4) *vaut quand le faisceau* $\mathcal{B}$ *est localement isomorphe à* $\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A})$ *sur* Y *et que son homomorphisme associé est* β.

Rappelons que H. Whitney puis N. E. Steenrod [12] avaient déjà considéré cet homomorphisme β.

Quand β *est constant, c'est-à-dire égal sur* $\mathfrak{T}(Y)$ *à l'automorphisme identique de* $\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A})$, *on peut choisir le faisceau* $\mathcal{B}$ *indentique à l'anneau* $\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A})$ (*cf.* [11], corollaire 73.1) et la formule (4.4) se réduit donc à la formule

$$\boxed{\mathcal{H}[Y \bigcirc \xi\mathcal{F}(X \bigcirc \mathcal{A})] = \mathcal{H}[Y \bigcirc \mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A})].} \tag{4.5}$$

THÉORÈME 4.3. — *β est constant et la formule (4.5) vaut dans chacun des cas suivants :*

a. $\mathfrak{T}(Y)$ se réduit à son unité, c'est-à-dire Y est « simplement connexe »;

b. La fibre $\overset{-1}{\xi}(y)$ est une variété de dimension d, continûment orientable (¹), *ayant même anneau d'homologie relativement aux entiers* (²) *que la sphère de dimension d.*

c. X est un espace fibré, au sens de C. Ehresmann, et son groupe structural est connexe.

d. Il existe un groupe, localement et globalement connexe, d'homéomorphismes de X qui appliquent transitivement (³) *chaque fibre sur elle-même.*

Preuve de a. — β est nécessairement constant.

Preuve sommaire de b, c, d. — Faisons parcourir à y un chemin fermé de Y; suivons par continuité une classe d'homologie de $\overset{-1}{\xi}(y)$; nous retrouvons à l'extrémité de ce chemin la classe choisie à l'origine; donc β est constant.

Dans le cas *d* les hypothèses qu'énonce la définition 4.1 sont superflues, comme nous allons le prouver.

5. ESPACE A FIBRE HOMOGÈNE. — *Définition* 5.1. — Nous dirons qu'un espace U est *fibré principal* et a pour fibre V quand V est un groupe localement compact d'homéomorphismes de U, dont aucun, sauf l'identité, n'a de point fixe :

$$v \in V \text{ applique } u \in U \text{ en } vu \in U; \quad vu \text{ dépend continûment du couple } (v, u); \quad vu \neq u \quad \text{si} \quad v \neq 1.$$

(¹) *Orienter continûment* $\overset{-1}{\xi}(y)$, c'est choisir, si possible, son orientation en sorte que l'homéomorphisme de $\overset{-1}{\xi}(K)$ sur $F \times K$ et la projection de $F \times y$ sur F la transforment en une orientation de F indépendante du choix de y dans K, quel que soit K petit d'ordre $\mathring{V}$.

(²) Rappelons que $\mathcal{H}(F \bigcirc \mathfrak{A}) = \mathcal{H}F \otimes \mathfrak{A}$ d'après le théorème 63.3 de [11].

(³) C'est-à-dire : il existe toujours des opérations du groupe qui transforment l'un en l'autre deux points d'une même fibre.

La relation « deux points de U peuvent être transformés l'un en l'autre par une opération de V » est une relation d'équivalence; l'espace quotient de U par cette relation d'équivalence sera nommé *base* de U et noté U/V ([2], Livre III, Chap. I, § 9); nous ferons les deux hypothèses suivantes :

vu est un *homéomorvhisme* de V sur Vu; l'espace U/V est *séparé* (c'est-à-dire de Hausdorff). Ces hypothèses sont en particulier réalisées dans chacun des deux cas suivants : V *est compact*; U est un groupe localement compact et V *est l'un de ses sous-groupes fermés* (l'espace U/V est alors dit *homogène*). L'application canonique η de U sur U/V sera nommée *projection* de U sur sa base :

$$\eta(\mathrm{V}u) \in \mathrm{U/V}.$$

LEMME 3.1. — *a.* η *est ouverte, c'est-à-dire applique un ouvert sur un ouvert.*

b. Si U *est localement compact et localement connexe,* U/V *l'est aussi.*

c. Supposons V *connexe; soit* $\mathrm{K} \subset \mathrm{U/V}$ *: si* K *est ouvert et connexe,* $\overset{-1}{\eta}(\mathrm{K})$ *l'est aussi.*

d. Si V *est compact,* η *est propre.*

Preuve de a. — Soit O une partie ouverte de U; $\eta(\mathrm{O}) = \eta(\mathrm{VO})$; VO est ouvert; $\eta(\mathrm{VO})$ l'est donc, vu la définition de la topologie de U/V.

Preuve de b et d. — Soit K un voisinage compact et connexe de $u \in \mathrm{U}$; puisque η est ouverte et continue, $\eta(\mathrm{K})$ est un voisinage compact et connexe de ηu. Si V est compact, $\overset{-1}{\eta}[\eta(\mathrm{K})] = \mathrm{VK}$ est compact.

Preuve de c. — Si $\overset{-1}{\eta}(\mathrm{K})$ est réunion de deux parties ouvertes, sans point commun, K l'est aussi; en effet : $\overset{-1}{\eta}(k)$, où $k \in \mathrm{K}$, appartient à une seule de ces parties; η est ouverte.

Définition 3.2. — Soit U un espace fibré principal, de fibre V; soit W un sous-groupe fermé de V; on vérifie aisément que Wu est homéomorphe à W et que U/W est un espace séparé. Soient η et ζ les projections de U sur U/V et U/W ; soit ξ l'application de U/W sur U/V qui applique $\zeta(\mathrm{W}u) \in \mathrm{U/W}$ sur $\eta(\mathrm{V}u) \in \mathrm{U/V}$:

$$\xi\zeta = \eta;$$

l'image $\overset{-1}{\xi}(y)$ de $y \in \mathrm{U/V}$ est homéomorphe à l'espace homogéne V/W : nous dirons que U/W *a une fibre homogène* V/W et que ξ *est la projection de* U/W *sur sa base* U/V.

Remarque. — Nous ne supposons pas vérifiées les hypothèses qu'énonce la définition 4.1.

THÉORÈME 5.1. — *Soit* U *un espace fibré principal; soit* V *sa fibre, soit* W *un sous-groupe fermé de* V *; supposons* U *localement connexe et* V *connexe : l'espace localement connexe* $\mathrm{X} = \mathrm{U/W}$ *a pour fibre l'espace homogène et connexe* $\mathrm{F} = \mathrm{V/W}$ *et a pour base l'espace localement connexe* $\mathrm{Y} = \mathrm{U/V}$. *La formule* (4.5) *s'applique.*

Par abus de langage nous dirons que β *est constant quand les hypothèses du théorème* 5.1 *sont vérifiées,* même si Y n'est pas localement connexe par arcs.

Preuve. — Nous avons

$$\zeta : \ \mathrm{U} \to \mathrm{X} = \mathrm{U/W}; \qquad \xi : \ \mathrm{X} = \mathrm{U/W} \to \mathrm{Y} = \mathrm{U/V}; \qquad \xi\zeta = \eta : \ \mathrm{U} \to \mathrm{Y} = \mathrm{U/V}.$$

Soit K une partie ouverte et connexe de Y; soit $\overline{\mathrm{K}}$ son adhérence; soit $u \in \overset{-1}{\eta}(\mathrm{K})$; $\mathrm{V}u$ applique V dans $\overset{-1}{\eta}(\overline{\mathrm{K}})$; ζ transforme cette application en une application de $\mathrm{F} = \mathrm{V/W}$ dans $\zeta\overset{-1}{\eta}(\overline{\mathrm{K}}) = \overset{-1}{\xi}(\overline{\mathrm{K}})$; son homomorphisme réciproque λ_{K} applique $\mathcal{H}[\overset{-1}{\xi}(\overline{\mathrm{K}}) \bigcirc \mathcal{C}\!\mathcal{L}]$ dans $\mathcal{H}(\mathrm{F} \bigcirc \mathcal{C}\!\mathcal{L})$. D'après le lemme 5.1 *c*, $\overset{-1}{\eta}(\mathrm{K})$ est globalement et localement connexe : deux points de $\overset{-1}{\eta}(\mathrm{K})$ appartiennent donc à une même partie compacte et connexe de $\overset{-1}{\eta}(\mathrm{K})$; d'après le théorème 67.1 de [11], λ_{K} est donc indépendant du choix de u dans $\overset{-1}{\eta}(\mathrm{K})$. Soit $y \in \mathrm{Y}$, soit $u \in \overset{-1}{\eta}(y)$, $\mathrm{V}u$ est un homéomorphisme de V sur $\mathrm{V}u = \overset{-1}{\eta}(y)$; ζ le transforme en un homéomorphisme de $\mathrm{F} = \mathrm{V/W}$ sur $\zeta\overset{-1}{\eta}(y) = \overset{-1}{\xi}(y)$;

son homomorphisme réciproque est un isomorphisme λ_y de $\mathcal{H}[\overset{-1}{\xi}(y) \bigcirc \mathcal{A}]$ sur $\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A})$. D'après le théorème 47.1 de [11]

$$(5.1) \qquad \lambda_K b = \lambda_y \overset{-1}{\xi}(y) b \quad \text{si} \quad y \in K \quad \text{et} \quad b \in \mathcal{H}[\overset{-1}{\xi}(K) \bigcirc \mathcal{A}].$$

Par suite $\lambda_y \overset{-1}{\xi}(y) b$ est indépendant du choix de u dans $\overset{-1}{\eta}(y)$; vu la continuité du faisceau $\mathcal{B} = \xi\mathcal{F}(X \bigcirc \mathcal{A})$, l'isomorphisme λ_y est donc indépendant de ce choix. D'après (5.1) cet isomorphisme vérifie l'hypothèse b du lemme 5.2; ce lemme établit (4.5).

LEMME 5.2. — *Soient un espace* Y, *un faisceau propre* $\mathcal{B}$ *défini sur* Y *et un anneau* $\mathcal{A}$. *Supposons associé à chaque point* y *de* Y *un isomorphisme* λ_y *de* $\mathcal{B}(y)$ *sur* $\mathcal{A}$. *Cet isomorphisme définit un isomorphisme de* $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{B})$ *sur* $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$ *quand l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée :*

a. Si K *est une partie fermée de* Y, *si* $b \in \mathcal{B}(K)$ *et si* $y \in K$, *alors l'élément* $\lambda_y yb$ *de* $\mathcal{A}$ *est indépendant de* y *au voisinage de chaque point de* K*;*

b. Y *est localement connexe;* $\lambda_y yb$ *est indépendant du choix de* y *dans* K, *quand* K *est ouvert et connexe et que* $b \in \mathcal{B}(K)$.

Preuve de a. — Soit $\mathcal{B}'$ le sous-faisceau de $\mathcal{B}$ que constituent les éléments nuls des $\mathcal{B}(K)$ tels que K ne soit pas compact et les $b' \in \mathcal{B}(K)$ tels que K soit compact et que $\lambda_y yb'$ soit un élément de $\mathcal{A}$ indépendant de $y \in K$. $\mathcal{B}'(y) = \mathcal{B}(y)$; $\mathcal{B}'$ est propre, vu l'hypothèse a. Si $b' \in \mathcal{B}'(K)$ et $y \in K$, $\lambda b' = \lambda_y yb'$ est indépendant de y; λ est donc un homomorphisme de $\mathcal{B}'$ dans le faisceau de Y identique à $\mathcal{A}$. Le théorème 46.1 et le corollaire 46.1 de [11] prouvent que

$$\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{B}') = \mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A}).$$

Preuve de b. — Puisque $\mathcal{B}$ est propre et Y localement connexe, $\lambda_y yb$ est constant sur K au voisinage de chaque point de K : l'hypothèse a est vérifiée.

6. L'ANNEAU SPECTRAL ET L'ANNEAU FILTRÉ D'HOMOLOGIE D'UN ESPACE FIBRÉ. — Soient un anneau $\mathcal{A}$ et deux entiers : $l < m$; appliquons les nos 50,

60 et 65 de [11] à la projection ξ de l'espace fibré X sur sa base Y; nous obtenons *des invariants topologiques qui relient l'anneau d'homologie* $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ *de* X *aux anneaux d'homologie de sa fibre* F *et de sa base* Y; ces invariants sont *un anneau spectral* $\mathcal{H}_r = \mathcal{H}_r(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{A})$ et *une filtration* f de l'anneau $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$. Énonçons leurs propriétés en supposant connues les définitions que posent les nos 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11 et 12 de [11] et en notant h_X, h_F et h_Y les éléments de $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$, $\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A})$ et $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$.

a. $\mathcal{H}_r$ *est un anneau canonique gradué,* dépendant de l'entier $r > m$; ses degrés sont nommés *degré canonique* et *degré filtrant*; *sa différentielle* δ_r *est homogène, de degré canonique* 1 *et de degré filtrant* r; l'automorphisme α associé à δ_r (n° **8** de [11]) multiplie par $(-1)^p$ les éléments homogènes de degré canonique p; $\mathcal{H}_{r+1}$ *est l'anneau d'homologie de* $\mathcal{H}_r$: les éléments homogènes de $\mathcal{H}_r$ annulant δ_r ont une image canonique, ayant les mêmes degrés, dans $\mathcal{H}_{r+1}$.

b. On a

$$\boxed{\mathcal{H}_{m+1} = \mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{B}),}$$

$\mathcal{B}$ *étant le faisceau, localement isomorphe à* $\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A})$ *sur* Y, que définissent les théorèmes 4.1 et 4.2; $\mathcal{B} = \mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A})$ quand les théorèmes 4.3 et 5.1 s'appliquent; $\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A})$ et par suite $\mathcal{B}$ ont un degré, dit canonique; le degré canonique de $\mathcal{H}_{m+1}$ est celui de $\mathcal{H}(Y^1 \bigcirc \mathcal{B})$, le degré utilisé sur $\mathcal{B}$ étant le degré canonique (*voir* le n° 42 de [11]); le degré filtrant de $\mathcal{H}_{m+1}$ est celui de $\mathcal{H}(Y^m \bigcirc \mathcal{B})$, le degré utilisé sur $\mathcal{B}$ étant l fois le degré canonique.

c. $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ a un degré canonique, indépendant de la façon dont X est fibré, et une filtration f, qui en dépend : $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ *est un anneau gradué-filtré, dont l'anneau bigradué est*

$$\boxed{\mathcal{G} = \lim_{r \to +\infty} \mathcal{H}_r.}$$

d. Modifier l et m ne modifie pas essentiellement ces invariants; il est avantageux de choisir tantôt $l = 0$, $m = 1$, tantôt $l = -1$, $m = 0$; *on passe du choix* $l = -1$, $m = 0$ *au choix* $l = 0$, $m = 1$ *en ajoutant* 1 *à l'indice r et en augmentant du degré canonique la filtration f de $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ et le degré filtrant de $\mathcal{H}_r$.*

e. Si $l=0$, $m=1$, la filtration et le degré filtrant sont $\geqq 0$, $\leqq \dim Y$ et, sur les éléments homogènes, $\leqq$ degré canonique. Si $l=-1$, $m=0$, la filtration et le signe filtrant sont $\geqq -\dim F$, $\leqq 0$ et, sur les éléments homogènes, $\geqq -$ degré canonique.

f. Soit $F\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A}) \subset \mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A})$ la section de $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ par la fibre F; $F = \overset{-1}{\xi}(y)$, $y \in Y$; les propriétés que nous allons énoncer sont indépendantes du choix de y. Le sous-faisceau de $\mathcal{B}$ localement isomorphe à $F\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ est un sous-faisceau du faisceau identique sur Y à $F\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$; en composant la section de $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ par F, l'isomorphisme canonique Π (*voir* [11], n° 48) de $F\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ dans $\mathcal{H}[Y \bigcirc F\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})]$ et l'homomorphisme canonique de $\mathcal{H}[Y \bigcirc F\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})]$ dans $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{B})$, on définit un homomorphisme canonique $\underline{\Phi}$ de $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ dans $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{B})$; les propriétés de $\underline{\Phi}$ sont les suivantes, *quand on choisit $l=0$, $m=1$:*

$\underline{\Phi} h_X$ a un degré filtrant nul et une image canonique dans $\mathcal{G}$;

Cette image est $h_X \bmod \mathcal{H}^{(1)}$, $\mathcal{H}^{(1)}$ étant l'ensemble des h_X tels que $f(h_X) > 0$.

Les conditions suivantes sont équivalentes.

$$\underline{\Phi} h_X = 0; \qquad F h_X = 0; \qquad f(h_X) > 0.$$

$\underline{\Phi}\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ est le sous-anneau de $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{B})$ que constituent les éléments de $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{B})$ dont le degré filtrant est nul et qui ont une image dans $\mathcal{H}_r$ quel que soit $r > 1$. Si Y n'est pas compact, $\underline{\Phi} = 0$, car $F\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A}) = 0$, vu la continuité du faisceau d'homologie $\mathcal{F}(X \bigcirc \mathcal{A})$.

g. Supposons F *compact* : ξ est propre. *Choisissons $l=-1$, $m=0$*: l'isomorphisme canonique Π de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A})$ définit (vu le théorème 65.1 *a* de [11]) *un isomorphisme canonique $\underline{\Psi}$ de $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$ sur l'ensemble des éléments de $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{B})$ dont le degré filtrant est nul.*

$\underline{\Psi} h_Y$ a une image canonique dans $\mathcal{G}$; cette image est $\overset{-1}{\xi} h_Y$.

Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

$\overset{-1}{\xi} h_Y = 0$; l'image canonique de $\underline{\Psi} h_Y$ dans $\mathcal{H}_r$ est nulle quand r est suffisamment grand.

$\overset{-1}{\xi}\mathcal{H}(\mathrm{Y} \bigcirc \mathcal{A})$ *est l'ensemble des* h_{X} *tels que* $f(h_{\mathrm{X}}) = 0$.

h. Supposons Y et F compacts, c'est-à-dire X *compact.* Soient Π_{X}, Π_{Y} et Π_{F} les isomorphismes canoniques de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H}(\mathrm{X} \bigcirc \mathcal{A})$, $\mathcal{H}(\mathrm{Y} \bigcirc \mathcal{A})$ et $\mathcal{H}(\mathrm{F} \bigcirc \mathcal{A})$ (*voir* [11], n° 65); on a

$$\underline{\Phi}\Pi_{\mathrm{X}} = \underline{\Psi}\Pi_{\mathrm{Y}}.$$

$\mathrm{F}\overset{-1}{\xi}$ *applique* $\mathcal{H}(\mathrm{Y} \bigcirc \mathcal{A})$ *sur* $\Pi_{\mathrm{F}}\mathcal{A}$; vu le theorème 47.1 de [11], $\mathrm{F}\overset{-1}{\xi}$ est en effet l'homomorphisme Π_{F} réciproque de la restriction ξ_{F} de ξ à $\mathrm{F} = \overset{-1}{\xi}(y)$.

i. Si l'anneau $\mathcal{A}$ *est commutatif,* c'est-à-dire si $aa_1 = a_1 a$ quand a et $a_1 \in \mathcal{A}$, alors

$$hh_1 = (-1)^{pq} h_1 h$$

quand h *et* h_1 *sont deux éléments homogènes, de degrés canoniques* p *et* q, *de l'un quelconque des anneaux* $\mathcal{H}(\mathrm{X} \bigcirc \mathcal{A})$, $\mathcal{H}(\mathrm{F} \bigcirc \mathcal{A},)$ $\mathcal{H}(\mathrm{Y} \bigcirc \mathcal{A})$, $\mathcal{H}_r$.

Remarque. — On obtient des invariants de l'espace fibré X en utilisant, au lieu de l'anneau $\mathcal{A}$, un faisceau localement isomorphe sur X à un anneau; les n$^{\text{os}}$ **4** et **6** subsistent à ceci près : pour pouvoir définir $\underline{\Psi}$ il faut supposer non seulement F compact, mais aussi le faisceau utilisé sur X identique à un anneau sur $\overset{-1}{\xi}(y)$, quel que soit $y \in \mathrm{Y}$. Plus généralement encore, [11] permet d'utiliser au lieu de $\mathcal{A}$ un faisceau localement isomorphe sur X à un anneau différentiel filtré.

7. Cas ou l'anneau spectral $\mathcal{H}_r$ est indépendant de r. — Pour qu'il en soit ainsi, *il faut et il suffit que* $\delta_r = 0$ *quel que soit* $r > m$.

Théorème **7**.1. — *Supposons* $\mathcal{H}_r$ *indépendant de* r*;*

a. $\mathcal{H}_{m+1} = \mathcal{H}(\mathrm{Y} \bigcirc \mathcal{B})$ *est l'anneau bigradué de l'anneau gradué* $\mathcal{H}(\mathrm{X} \bigcirc \mathcal{A})$, *convenablement filtré;*

b. Si Y *est compact et est globalement et localement connexe par arcs, alors* $\mathrm{F}\mathcal{H}(\mathrm{X} \bigcirc \mathcal{A})$ *est l'ensemble des éléments de* $\mathcal{H}(\mathrm{F} \bigcirc \mathcal{A})$ *que les automorphismes* $\beta\mathfrak{T}(\mathrm{Y})$ *laissent invariants.*

c. Si F *est compact, alors* $\overset{-1}{\xi}$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{H}(\mathrm{Y} \bigcirc \mathcal{A})$ *dans* $\mathcal{H}(\mathrm{X} \bigcirc \mathcal{A})$.

Preuve de a. — N° **6** *c*.

Preuve de b. — Le théorème 4.2 permet de supposer que $\mathcal{B}$ contient un sous-faisceau $\mathcal{B}'$ identique à l'anneau constitué par les éléments de $\mathcal{H}(\mathrm{F} \bigcirc \mathcal{A})$ que les automorphismes $\beta\mathfrak{T}(\mathrm{Y})$ laissent invariants; cet anneau contient le sous-anneau $\mathrm{F}\mathcal{H}(\mathrm{X} \bigcirc \mathcal{A})$; $\mathcal{B}'$ contient donc un sous-faisceau $\mathcal{B}''$ identique à $\mathrm{F}\mathcal{H}(\mathrm{X} \bigcirc \mathcal{A})$. Il s'agit de prouver que $\mathcal{B}'' = \mathcal{B}'$; d'après le théorème 65.1 *a* de [11], il suffit de prouver que

$$\mathcal{H}^{[0]}(\mathrm{Y} \bigcirc \mathcal{B}'') = \mathcal{H}^{[0]}(\mathrm{Y} \bigcirc \mathcal{B}'),$$

$\mathcal{H}^{[0]}\ldots$ désignant l'ensemble des termes de degré nul de $\mathcal{H}\ldots$, quand on utilise un degré nul sur $\mathcal{B}$. Or

$$\mathcal{H}^{[0]}(\mathrm{Y} \bigcirc \mathcal{B}'') \subset \mathcal{H}^{[0]}(\mathrm{Y} \bigcirc \mathcal{B}') \subset \mathcal{H}^{[0]}(\mathrm{Y} \bigcirc \mathcal{B});$$

puisque $\mathcal{B}'' \subset \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$; il suffit donc de prouver que

$$\mathcal{H}^{[0]}(\mathrm{Y} \bigcirc \mathcal{B}'') = \mathcal{H}^{[0]}(\mathrm{Y} \bigcirc \mathcal{B}),$$

c'est-à-dire que

$$\underline{\Phi}\,\mathcal{H}(\mathrm{X} \bigcirc \mathcal{A}) = \mathcal{H}^{[0]}(\mathrm{Y} \bigcirc \mathcal{B});$$

le n° **6** *f* l'affirme.

Preuve de c. — N° **6** *g*.

THÉORÈME **7**.2. — *$\mathcal{H}_r$ est indépendant de r, quand les degrés canoniques de tous les éléments de $\mathcal{H}(\mathrm{Y} \bigcirc \mathcal{B})$ ont la même parité.*

Preuve. — δ_r, qui augmente de 1 le degré canonique, est nécessairement nul.

THÉORÈME **7**.3. — *Supposons que* F *soit compact et que la section de $\mathcal{H}(\mathrm{X} \bigcirc \mathcal{A})$ par* F *applique $\mathcal{H}(\mathrm{X} \bigcirc \mathcal{A})$ sur $\mathcal{H}(\mathrm{F} \bigcirc \mathcal{A})$:*

$$\mathcal{H}(\mathrm{F} \bigcirc \mathcal{A}) = \mathrm{F}\mathcal{H}(\mathrm{X} \bigcirc \mathcal{A});$$

il est nécessaire que X *soit compact:*

a. Si l'anneau $\mathcal{H}(\mathrm{F} \bigcirc \mathcal{A})$ ou l'anneau d'homologie $\mathcal{H}\mathrm{Y}$ de Y *relativement aux entiers est sans torsion, alors $\mathcal{H}_r$ est indépendant de r: donc :*

$\mathcal{H}\mathrm{Y} \otimes \mathcal{H}(\mathrm{F} \bigcirc \mathcal{A})$ *est l'anneau bigradué de l'anneau gradué $\mathcal{H}(\mathrm{X} \bigcirc \mathcal{A})$, muni d'une filtration convenable;*

$\overset{-1}{\xi}$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}(\mathrm{Y} \bigcirc \mathcal{A})$ dans $\mathcal{H}(\mathrm{X} \bigcirc \mathcal{A})$;

b. Si $\mathcal{A}$ est un corps commutatif [ou, plus généralement si $\mathcal{A}$ est un anneau commutatif possédant une unité et si l'algèbre $\mathcal{H}(\mathrm{F} \bigcirc \mathcal{A})$ a une base par rapport à $\mathcal{A}$], alors $\mathcal{H}_r$ est indépendant de r; donc :

le produit tensoriel (1) *d'algèbres $\mathcal{H}(\mathrm{Y} \bigcirc \mathcal{A}) \otimes \mathcal{H}(\mathrm{F} \bigcirc \mathcal{A})$ est l'algèbre bigraduée de l'algèbre $\mathcal{H}(\mathrm{X} \bigcirc \mathcal{A})$, munie d'une filtration convenable;*

$\overset{-1}{\xi}$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}(\mathrm{Y} \bigcirc \mathcal{A})$ dans $\mathcal{H}(\mathrm{X} \bigcirc \mathcal{A})$.

Remarque 1. — Les algèbres $\mathcal{H}(\mathrm{X} \bigcirc \mathcal{A})$ et $\mathcal{H}(\mathrm{Y} \bigcirc \mathcal{A}) \otimes \mathcal{H}(\mathrm{F} \bigcirc \mathcal{A})$ ne sont pas isomorphes en général (*voir* dans [6], mon exposé, théorème 2.2 *c*).

Remarque 2. — Le corollaire 9.3 complète ce théorème.

Preuve. — Si X n'est pas compact, alors $\mathrm{F}\mathcal{H}(\mathrm{X} \bigcirc \mathcal{A}) = 0$ (n° 6 *f*); donc $\mathcal{H}(\mathrm{F} \bigcirc \mathcal{A}) = 0$, contrairement à l'hypothèse que F est compact. D'après le n° 6 *f*, le faisceau $\mathcal{B}$ est identique à l'anneau $\mathcal{H}(\mathrm{F} \bigcirc \mathcal{A}) = \mathrm{F}\mathcal{H}(\mathrm{X} \bigcirc \mathcal{A})$; la formule (4.4) se réduit donc à la formule (4.5). Le théorème 63.3 ou 63.4 de [11] prouve que

$$\mathcal{H}_{m+1} = \mathcal{H}\mathrm{Y} \otimes \mathcal{H}(\mathrm{F} \bigcirc \mathcal{A}) \quad \text{dans le cas } a;$$
$$\mathcal{H}_{m+1} = \mathcal{H}(\mathrm{Y} \bigcirc \mathcal{A}) \otimes \mathcal{H}(\mathrm{F} \bigcirc \mathcal{A}) \quad \text{dans le cas } b.$$

Notons u_{Y} et h_{Y} l'unité et les élements de $\mathcal{H}\mathrm{Y}$ (cas *a*) ou $\mathcal{H}(\mathrm{Y} \bigcirc \mathcal{A})$ (cas *b*); notons u_{F} et h_{F} l'unité et les éléments de $\mathcal{H}(\mathrm{F} \bigcirc \mathcal{A})$. D'après le n° 6 *f*, $u_{\mathrm{Y}} \otimes h_{\mathrm{F}}$ appartient à $\Phi\mathcal{H}(\mathrm{X} \bigcirc \mathcal{A})$ et a donc une image dans $\mathcal{G}$, D'après le n° 6 *g*, $h_{\mathrm{Y}} \otimes u_{\mathrm{F}}$ appartient à $\overline{\Psi}\mathcal{H}(\mathrm{Y} \bigcirc \mathcal{A})$ et a donc une image dans $\mathcal{G}$. Donc $(h_{\mathrm{Y}} \otimes u_{\mathrm{F}}).(u_{\mathrm{Y}} \otimes h_{\mathrm{F}}) = h_{\mathrm{Y}} \otimes h_{\mathrm{F}}$ a une image dans $\mathcal{G}$: tout élément de $\mathcal{H}_{m+1}$ a une image dans $\mathcal{G}$: donc $\delta_r = 0$; donc $\mathcal{H}_r$ est indépendant de r; on applique le théorème 7.1 *a,c*.

---

(1) $$(ah_{\mathrm{Y}}) \otimes h_{\mathrm{F}} = h_{\mathrm{Y}} \otimes (ah_{\mathrm{F}}) \quad \text{si} \quad a \in \mathcal{A}$$

et si $\otimes$ désigne un produit tensoriel d'algèbres sur $\mathcal{A}$.

CHAPITRE II.

CAS OU β EST CONSTANT, $\mathcal{A}$ ÉTANT UN CORPS COMMUTATIF.

8. L'ALGÈBRE SPECTRALE ET L'ALGÈBRE FILTRÉE D'HOMOLOGIE D'UN ESPACE FIBRÉ. — Soient un corps commutatif $\mathcal{A}$, un espace fibré X, tel que β soit constant, et deux entiers $l < m$. Utilisons la terminologie que définit le n° 20 de [11], toutes les algèbres étant des algèbres sur $\mathcal{A}$, tous les produits tensoriels $\otimes$ étant des *produits tensoriels d'algèbres* sur $\mathcal{A}$: $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$, $\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A})$, $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$ sont des algèbres graduées; nous noterons leurs éléments h_X, h_F, h_Y; quand leurs unités existent, nous les noterons u_X, u_F, u_Y. Les propriétés de l'anneau spectral $\mathcal{H}_r$ et de la filtration de $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ que définit le n° **6** s'énoncent maintenant comme suit :

a. $\mathcal{H}_r (r > m)$ *est une algèbre canonique graduée: ses degrés sont nommés degré canonique et degré filtrant; sa différentielle* δ_r *est homogène de degré canonique* 1 *et de degré filtrant r;* $\mathcal{H}_{r+1}$ *est l'algèbre d'homologie de* $\mathcal{H}_r$.

b. La formule (4.5), qui s'applique par hypothèse, s'écrit, vu le théorème 63.4 de [11],

$$(8.1) \qquad \boxed{\mathcal{H}_{m+1} = \mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A}) \otimes \mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A})} \qquad \text{(produit tensoriel d'algèbres);}$$

$h_Y \otimes h_F$ a pour degrés canonique et filtrant : degré $h_Y +$ degré h_F; m degré $h_Y + l$ degré h_F.

c. $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ est une algèbre graduée-filtrée, dont l'algèbre bigraduée est

$$\boxed{\mathcal{G} = \lim_{r \to +\infty} \mathcal{H}_r.}$$

d, e. Voir n° **6** *d, e.*

f. Choisissons $l = 0$, $m = 1$. *Si* Y *est compact,* $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$ *a une unité* u_Y*;*

$$\underline{\Phi} h_X = u_Y \otimes F h_X;$$

$u_Y \otimes F h_X$ *a une image canonique dans* $\mathcal{G}$; *c'est* $h_X \bmod \mathcal{H}^{(1)}$.

Les conditions suivantes sont équivalentes

$$\mathrm{F}h_{\mathrm{X}}=0, \qquad f(h_{\mathrm{X}})>0.$$

Pour que $u_{\mathrm{Y}}\otimes h_{\mathrm{F}}$ *ait une image dans* $\mathcal{G}$, *il faut et il suffit que* $h_{\mathrm{F}}\in \mathrm{F}\mathcal{H}(\mathrm{X}\bigcirc\mathcal{A})$.

Si Y *n'est pas compact,* $\mathrm{F}\mathcal{H}(\mathrm{X}\bigcirc\mathcal{A})=0$, $f(h_{\mathrm{X}})>0$.

g. Choisissons $l=-1$, $m=0$ *et supposons* F *compact;* $\mathcal{H}(\mathrm{F}\bigcirc\mathcal{A})$ *a une unité* u_{F}*:*

$$\Psi h_{\mathrm{Y}}=h_{\mathrm{Y}}\otimes u_{\mathrm{F}};$$

$h_{\mathrm{Y}}\otimes u_{\mathrm{F}}$ *a une image canonique dans* $\mathcal{G}$, *c'est* $\overset{-1}{\xi} h_{\mathrm{Y}}$.

Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

$\overset{-1}{\xi} h_{\mathrm{Y}}=0$*; l'image canonique de* $h_{\mathrm{Y}}\otimes u_{\mathrm{F}}$ *dans* $\mathcal{H}_r$ *est nulle quand* r *est suffisamment grand.*

$\overset{-1}{\xi}\mathcal{H}(\mathrm{Y}\bigcirc\mathcal{A})$ *est l'ensemble des* h_{X} *tels que* $f(h_{\mathrm{X}})=0$ *et est aussi l'ensemble des éléments de* $\mathcal{G}$ *dont le degré filtrant est nul.*

h. Supposons Y et F compacts, c'est-à-dire X *compact;* $\mathrm{F}\overset{-1}{\xi}$ applique $\mathcal{H}(\mathrm{Y}\bigcirc\mathcal{A})$ sur l'ensemble des éléments au_{F} où $a\in\mathcal{A}$.

i. Si h *et* h_1 *sont deux éléments homogènes, de degrés canoniques* p *et* q, de l'une quelconque des algèbres précédentes,

$$hh_1=(-1)^{pq}h_1h.$$

9. Relations entre les polynomes de Poincaré de X, Y, F. — *Définition* 9.1. — *Soit* $\mathcal{H}$ *une algèbre graduée, dont le degré est* ≥ 0 *et dont le rang est fini;* soit $\mathcal{H}^{[p]}$ l'ensemble de ses éléments homogènes de degré p;

$$\mathcal{H}=\sum_{p\geq 0}\mathcal{H}^{[p]};$$

soit t *une variable auxiliaire;*

$$\mathcal{H}_t=\sum_{p\geq 0}t^p.\operatorname{rang}\mathcal{H}^{[p]}$$

est un polynome, à coefficients entiers ≥ 0, *que nous nommerons polynome de Poincaré de* $\mathcal{H}$.

Soit $\mathcal{J}$ un idéal gradué de $\mathcal{H}$; soit $\mathcal{H}'=\mathcal{H}/\mathcal{J}$, on a

$$\mathcal{H}'_t=\mathcal{H}_t-\mathcal{J}_t. \tag{9.1}$$

Preuve. — [2], Livre II, Chap. II, § 3, n° 3, formule (1).

Soient $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}'$ deux algèbres graduées, dont le degré est $\geqq 0$ et dont le rang est fini,

$$(\mathcal{K}\otimes\mathcal{K}')_t=\mathcal{K}_t.\mathcal{K}'_t. \tag{9.2}$$

Preuve. — [2], Livre II, Chap. III, § 1, n° 3, formule (5).

Nous *ordonnerons* (*voir* [2], Livre I, § 6) comme suit les polynomes en t.

$\mathcal{K}_t\leqq\mathcal{K}'_t$ signifiera que $\mathcal{K}'_t-\mathcal{K}_t$ a ses coefficients $\geqq 0$.

LEMME 9.1. — *a. Soit $\mathcal{H}$ l'algèbre d'homologie d'une algèbre canonique $\mathcal{K}$ ayant un rang fini et un degré $\geqq 0$; il existe un polynome $\mathcal{D}_t\geqq 0$ tel que*

$$\mathcal{K}_t-\mathcal{H}_t=(1+t)\mathcal{D}_t. \tag{9.3}$$

b. Soit $\mathcal{K}'$ un sous-espace gradué de $\mathcal{K}$ tel que $\mathcal{K}'\cap\delta\mathcal{K}=0$; soit $\mathcal{H}'$ l'image des cycles de $\mathcal{K}'$ dans $\mathcal{H}$; on a

$$\mathcal{K}'_t-\mathcal{H}'_t\leqq\mathcal{D}_t. \tag{9.4}$$

c. Soit $\mathcal{K}''$ un sous-espace gradué de l'algèbre des cycles de $\mathcal{K}$; soit $\mathcal{H}''$ l'image de $\mathcal{K}''$ dans $\mathcal{H}$; on a

$$\mathcal{K}''_t-\mathcal{H}''_t\leqq t\mathcal{D}_t. \tag{9.5}$$

Preuve de a. — Soit $\mathcal{C}$ l'algèbre des cycles de $\mathcal{K}$; soit $\mathcal{D}=\mathcal{K}/\mathcal{C}$; d'après (9.1)

$$\mathcal{D}_t=\mathcal{K}_t-\mathcal{C}_t.$$

δ définit un isomorphisme, qui augmente de 1 le degré, de $\mathcal{D}=\mathcal{K}/\mathcal{C}$ sur $\delta\mathcal{K}$; le polynome de Poincaré de $\delta\mathcal{K}$ est donc $t\mathcal{D}_t$; or $\mathcal{H}=\mathcal{C}/\delta\mathcal{K}$; d'où, vu (9.1),

$$\mathcal{H}_t=\mathcal{C}_t-t\mathcal{D}_t.$$

On obtient (9.3) en éliminant $\mathcal{C}_t$ entre les deux relations précédentes.

Preuve de b. — $\mathcal{H}'$ est isomorphe à l'espace $\mathcal{C}'$ des cycles de $\mathcal{K}'$:

$$\mathcal{H}'_t=\mathcal{C}'_t.$$

δ définit un isomorphisme, qui augmente de 1 le degré, de $\mathcal{K}'/\mathcal{C}'$ dans $\delta\mathcal{K}$; donc

$$\mathcal{K}'_t - \mathcal{C}'_t \leq \mathcal{O}_t;$$

en éliminant $\mathcal{C}'_t$ entre ces deux relations, on obtient (9.4).

Preuve de c. — Soit $\mathcal{O}'' = \delta\mathcal{K} \cap \mathcal{K}''$;

$$\mathcal{O}''_t \leq t\mathcal{O}_t.$$

Puisque $\mathcal{K}''/\mathcal{O}'' = \mathcal{H}''$,

$$\mathcal{K}''_t - \mathcal{O}''_t = \mathcal{H}''_t.$$

On obtient (9.5) en éliminant $\mathcal{O}''_t$ entre les deux relations précédentes.

Lemme 9.2. — *Soit $\mathcal{H}_r$ une algèbre canonique spectrale* $(r > m)$; *supposons que $\mathcal{H}_{m+1}$ ait un rang fini et un degré canonique* ≥ 0; *quand r est suffisamment grand, $\mathcal{H}_r$ est une algèbre indépendante de r, que nous noterons $\mathcal{G}$; le degré qui servira à définir les polynomes de Poincaré sera le degré canonique.*

a. Il existe un polynome $D_t \geq 0$ *tel que*

$$(\mathcal{H}_{m+1})_t - \mathcal{G}_t = (1+t)D_t. \tag{9.6}$$

b. Soit $\mathcal{H}'_{m+1}$ un sous-espace gradué de $\mathcal{H}_{m+1}$ tel que l'image canonique dans $\mathcal{G}$ d'un élément non nul de $\mathcal{H}'_{m+1}$ diffère de zéro quand elle existe; soit $\mathcal{G}'$ l'image canonique de $\mathcal{H}'_{m+1}$ dans $\mathcal{G}$;

$$(\mathcal{H}'_{m+1})_t - \mathcal{G}_t \leq D_t \leq t^{-1}[(\mathcal{H}_{m+1})_t - (\mathcal{H}'_{m+1})_t]. \tag{9.7}$$

c. Soit $\mathcal{H}''_{m+1}$ un sous-espace gradué de $\mathcal{H}_{m+1}$ dont tous les éléments aient une image dans $\mathcal{G}$; soit $\mathcal{G}''$ l'image de $\mathcal{H}''_{m+1}$ dans $\mathcal{G}$,

$$t^{-1}[(\mathcal{H}''_{m+1})_t - \mathcal{G}''_t] \leq D_t \leq (\mathcal{H}_{m+1})_t - (\mathcal{H}''_{m+1})_t. \tag{9.8}$$

Preuve. — $\mathcal{H}_r$ est indépendant de r dès que r dépasse l'oscillation, qui est finie, du degré filtrant. Soient $\mathcal{H}'_r$ et $\mathcal{H}''_r$ les images canoniques de $\mathcal{H}'_{m+1}$ et $\mathcal{H}''_{m+1}$ dans $\mathcal{H}_r$; on a, d'après le lemme 9.1,

$$(\mathcal{H}_r)_t - (\mathcal{H}_{r+1})_t = (1+t)(\mathcal{O}_r)_t, \qquad (\mathcal{H}'_r)_t - (\mathcal{H}'_{r+1})_t \leq (\mathcal{O}_r)_t,$$
$$(\mathcal{H}''_r)_t - (\mathcal{H}''_{r+1})_t \leq t(\mathcal{O}_r)_t;$$

en ajoutant membre à membre les relations qu'on obtient en faisant varier r et en posant $D_t = \sum_r (\mathcal{D}_r)_t$, on a (9.6) et

$$(\mathcal{H}'_{m+1})_t - \mathcal{G}'_t \leqq D_t, \qquad (\mathcal{H}''_{m+1})_t - \mathcal{G}''_t \leqq t D_t;$$

ces inégalités et celles qu'on en déduit en majorant $\mathcal{G}'_t$ et $\mathcal{G}''_t$ par l'expression de $\mathcal{G}_t$ que fournit (9.6) donnent (9.7) et (9.8).

LEMME 9.3. — *Soit $\mathcal{H}$ une algèbre graduée-filtrée, dont le degré est $\geqq 0$; soit $\mathcal{G}$ son algèbre bigraduée. Nommons canonique le degré de $\mathcal{H}$ et le degré correspondant de $\mathcal{G}$; utilisons le degré canonique pour définir les polynomes de Poincaré; les rangs de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont égaux; quand ils sont finis,*

$$\mathcal{H}_t = \mathcal{G}_t.$$

Preuve. — La relation (9.1) et la définition de l'algèbre bigraduée d'une algèbre bigraduée-filtrée : [11], n° 7.

THÉORÈME 9.1. — *Soit* X *un espace fibré, de fibre* F *et de base* Y; *soit un corps commutatif* $\mathcal{A}$; *supposons* β *constant; supposons* $\mathcal{H}(\mathrm{F} \bigcirc \mathcal{A})$ *et* $\mathcal{H}(\mathrm{Y} \bigcirc \mathcal{A})$ *de rangs finis. Alors* $\mathcal{H}(\mathrm{X} \bigcirc \mathcal{A})$ *est de rang fini. Soient* X_t, Y_t, F_t *les polynomes de Poincaré de* $\mathcal{H}(\mathrm{X} \bigcirc \mathcal{A})$, $\mathcal{H}(\mathrm{Y} \bigcirc \mathcal{A})$, $\mathcal{H}(\mathrm{F} \bigcirc \mathcal{A})$. *Étant donné un polynome quelconque, par exemple* X_t, *notons* $\hat{X}_t$ (*et* $\check{X}_t$) *le polynome qui s'obtient en supprimant ses termes de degré maximum* (*de degré minimum*). *On a*

$$X_t = Y_t F_t - (1 + t) D_t, \tag{9.9}$$

où

$$0 \leqq D_t \leqq \text{Borne inf.}\,(\hat{Y}_t \check{F}_t,\ t^{-1} \check{Y}_t \hat{F}_t); \tag{9.10}$$

donc (A. Borel et J. P. Serre, *cf.* n° 5) *les termes de plus haut degré* (*de plus bas degré*) *de* X_t *et* $Y_t F_t$ *sont les mêmes.*

Preuve de (9.9). — Les formules (8.1) et (9.2) donnent

$$(\mathcal{H}_{m+1})_t = Y_t F_t;$$

d'après le lemme 9.2*a*, $\mathcal{G}$ a un rang fini et

$$\mathcal{G}_t = Y_t F_t - (1 + t) D_t, \qquad \text{où} \quad D_t \geqq 0;$$

d'après le lemme 9.3, $\mathcal{H}(\mathrm{X} \bigcirc \mathcal{A})$ a un rang fini et $X_t = \mathcal{G}_t$.

Preuve de l'inégalité $D_t \leqq \hat{Y}_t \check{F}_t$. — Puisque δ_r augmente le degré filtrant ($m \geqq 0$), δ_r annule les éléments de degré filtrant maximum; en choisissant $l=0$, $m=1$ et $v_Y \in \mathcal{H}(Y \bigcirc \mathfrak{C})$ de degré maximum, on constate que $v_Y \otimes h_F$ a une image dans $\mathcal{G}$; en choisissant $l=-1$, $m=0$ et $w_F \in \mathcal{H}(F \bigcirc \mathfrak{C})$ de degré minimum, on constate que $h_Y \otimes w_F$ a une image dans $\mathcal{G}$. Le sous-espace vectoriel $\mathcal{H}''_{m+1}$ de $\mathcal{H}_{m+1}$ qu'engendrent ces $v_Y \otimes h_F$ et $h_Y \otimes w_F$ a pour polynome de Poincaré

$$(\mathcal{H}''_{m+1})_t = Y_t F_t - \hat{Y}_t \check{F}_t;$$

la seconde des inégalités (9.8) donne

$$D_t \leqq \hat{Y}_t \check{F}_t.$$

Preuve de l'inégalité $D_t \leqq t^{-1} \check{Y}_t \hat{F}_t$. — Puisque δ_r augmente le degré filtrant ($m \geqq 0$), aucune valeur de δ_r ne peut être de degré filtrant minimum; en choisissant $l=0$, $m=1$ et $w_Y \in \mathcal{H}(Y \bigcirc \mathfrak{C})$ de degré minimum, on constate que $w_Y \otimes h_F$, supposé $\neq 0$, ne peut avoir d'image nulle dans $\mathcal{G}$; en choisissant $l=-1$, $m=0$ et $v_F \in \mathcal{H}(F \bigcirc \mathfrak{C})$ de degré maximum, on constate que $h_Y \otimes v_F$, supposé $\neq 0$, ne peut avoir d'image nulle dans $\mathcal{G}$. Supposons nulle la composante homogène de h_F ayant pour degré le maximum du degré de $\mathcal{H}(F \bigcirc \mathfrak{C})$; puisque l'image dans $\mathcal{G}$ d'un élément de $\mathcal{H}_{m+1}$ n'existe que quand les images de ses composantes homogènes existent et puisqu'elle en est la somme directe, $w_Y \otimes h_F + h_Y \otimes v_F$, supposé $\neq 0$, ne peut avoir d'image nulle dans $\mathcal{G}$. Le sous-espace vectoriel $\mathcal{H}'_{m+1}$ de $\mathcal{H}_{m+1}$ qu'engendre $w_Y \otimes h_F + h_Y \otimes v_F$ a pour polynome de Poincaré

$$(\mathcal{H}'_{m+1})_t = (Y_t - \check{Y}_t)\hat{F}_t + Y_t(F_t - \hat{F}_t) = Y_t F_t - \check{Y}_t \hat{F}_t;$$

la seconde des inégalités (9.7) donne

$$D_t \leqq t^{-1} \check{Y}_t \hat{F}_t.$$

Remarque. — $D_t \leqq \hat{Y}_t \check{F}_t$ équivaut à $D_t \leqq t^{-1} \check{Y}_t \hat{F}_t$ quand Y, F et par suite X sont des variétés compactes orientables.

Corollaire 9.1. — *Quand les hypothèses du théorème* 9.1 *sont satisfaites, les caractéristiques d'Euler* X_{-1}, Y_{-1}, F_{-1} *de* X, Y, F *vérifient la relation*

$$X_{-1} = Y_{-1} . F_{-1}. \tag{9.11}$$

Preuve. — On fait $t = -1$ dans (9.9).

COROLLAIRE 9.2. — *Supposons vérifiées les hypothèses du théorème* 9.1; *on peut majorer comme suit chacun des polynomes* X_t, Y_t, F_t *en fonction des deux autres.*

a. On a

$$X_t \leqq Y_t F_t. \tag{9.12}$$

b. On a

$$Y_t \leqq \frac{X_t}{F_t - (1+t)\check{F}_t}; \tag{9.13}$$

$$Y_t \leqq \frac{X_t}{F_t - (1+t^{-1})\hat{F}_t}; \tag{9.14}$$

le second membre de (9.13) *doit être remplacé par son développement, suivant les puissances croissantes de* t, *limité à* $t^{\dim Y}$; *le second membre de* (9.14) *doit être remplacé par son développement, suivant les puissances décroissantes de* t, *limité aux puissances* $\geqq 0$.

c. On a, quand [1] *le dénominateur n'est pas* $\leqq 0$,

$$F_t \leqq \frac{X_t}{Y_t - (1+t^{-1})\check{Y}_t}; \tag{9.15}$$

$$F_t \leqq \frac{X_t}{Y_t - (1+t)\hat{Y}_t}; \tag{9.16}$$

le second membre de (9.15) *doit être remplacé par son développement suivant les puissances croissantes de* t, *limité à* $t^{\dim F}$; *le second membre de* (9.16) *doit être remplacé par son développement suivant les puissances décroissantes de* t, *limité aux puissances* $\geqq 0$.

Remarque. — (9.13) équivaut à (9.14) et (9.15) à (9.16) quand Y, F et par suite X sont des variétés compactes orientables.

Preuve de a. — (9.9) et (9.10).

Preuve de (9.13). — D'après (9.9) et (9.10) on a

$$Y_t[F_t - (1+t)\check{F}_t] \leqq X_t;$$

---

(1) C'est par exemple le cas de (9.15) quand Y est compact et simplement connexe.

on multiplie les deux membres par le développement, suivant les puissances croissantes de t, de $[F_t-(1+t)\check{F}_t]^{-1}$; tous les coefficients de ce développement sont $\geqq 0$ car le seul terme >0 de $[F_t-(1+t)\check{F}_t]$ est son terme de degré minimum.

Les preuves de (9.14), (9.15) *et* (9.16) sont analogues.

Théorème 9.2. — *Supposons vérifiées les hypothèses du théorème* 9.1.

a. Posons

$$P = F\mathscr{H}(X \bigcirc \mathfrak{A}) \subset \mathscr{H}(F \bigcirc \mathfrak{A});$$

on a

$$0 \leqq P_t \leqq \text{Borne inf. } (F_t, X_t); \tag{9.17}$$

si Y *est compact*

$$F_t - P_t \leqq D_t; \tag{9.18}$$

sinon $P = 0$.

b. Supposons F *compact : la projection* ξ *de* X *sur* Y *est propre; posons*

$$Q = \overset{-1}{\xi}\mathscr{H}(Y \bigcirc \mathfrak{A}) \subset \mathscr{H}(X \bigcirc \mathfrak{A});$$

on a

$$0 \leqq Q_t \leqq \text{Borne inf. } (Y_t, X_t), \tag{9.19}$$

$$t^{-1}(Y_t - Q_t) \leqq D_t. \tag{9.20}$$

c. Supposons F *et* Y *compacts, c'est-à-dire* X *compact; on a* (9.18) *et les inégalités précisant* (9.10), (9.17), (9.19) *et* (9.20)

$$1 \leqq P_t \leqq F_t; \quad 1 \leqq Q_t \leqq Y_t; \quad P_t + Q_t - 1 \leqq X_t; \tag{9.21}$$

$$t^{-1}(Y_t - Q_t)P_t \leqq D_t \leqq \hat{Y}_t(F_t - P_t); \tag{9.22}$$

$$D_t \leqq t^{-1}(\check{Y}_t\hat{F}_t - \check{Q}_t) \quad \text{si} \quad F_t \neq 1. \tag{9.23}$$

Preuve de (9.17). — La définition de P. Si Y n'est pas compact, $P = 0$ (n° **6** f).

Preuve de (9.18). — D'après le n° **8** f, $u_Y \otimes h_F$ n'a d'image canonique dans $\mathcal{G}$ que si $h_F \in P$ et cette image n'est nulle que si $h_F = 0$; d'où, vu (9.7),

$$F_t - P_t \leqq D_t.$$

Preuve de (9.19). — La définition de Q.

Preuve de (9.20). — D'après le n° **8**g, $h_Y \otimes u_F$ a une image canonique dans $\mathcal{G}$ et cette image est $\overset{-1}{\xi} h_Y$; d'où vu (9.8),

$$t^{-1}(Y_t - Q_t) \leqq D_t.$$

Preuve de (9.21). — $P = F\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ possède une unité, image de l'unité de $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$, vu [11], définition 48.3 et n° 65; donc $1 \leqq P_t$. De même $Q = \overset{-1}{\xi}\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$ possède une unité, image de l'unité de $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$; donc $1 \leqq Q_t$. D'après le n° **8**h, FQ a pour polynome de Poincaré 1; les éléments de Q que la section par F annule constituent une algèbre, dont le polynome de Poincaré est donc, vu (9.1), $Q_t - 1$; c'est une sous-algèbre de l'algèbre que constituent les éléments de $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ que la section par F annule et dont le polynome de Poincaré est $X_t - P_t$ d'après (9.1); donc

$$Q_t - 1 \leqq X_t - P_t.$$

Preuve de la première des inégalités (9.22). — Puisque $u_Y \otimes Fh_X$ et $h_Y \otimes u_F$ ont des images dans $\mathcal{G}$, leur produit $h_Y \otimes Fh_X$ a dans $\mathcal{G}$ une image, qui est le produit des images de $u_Y \otimes Fh_X$ et $h_Y \otimes u_F$. Donc $\mathcal{H}_{m+1}$ contient la sous-algèbre $\mathcal{H}''_{m+1} = \mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A}) \otimes F\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$, dont le polynome de Poincaré est $Y_t P_t$ et dont chaque élément a une image dans $\mathcal{G}$; l'ensemble $\mathcal{G}''$ de ces images est, d'après le n° **8**f et g, une image de $\overset{-1}{\xi}\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A}) \otimes F\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$; donc $\mathcal{G}''_t \leqq Q_t P_t$. D'après (9.8) on a donc

$$t^{-1}(Y_t - Q_t)P_t \leqq D_t.$$

Preuve de la seconde des inégalités (9.22). — Nous venons de voir que $h_Y \otimes Fh_X$ a une image dans $\mathcal{G}$; nous avons vu (théorème 9.1, preuve de $D_t \leqq \hat{Y}_t \check{F}_t$) que $v_Y \otimes h_F$ a une image dans $\mathcal{G}$, quand v_Y est un élement de degré maximum de $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$. Ces éléments $h_Y \otimes Fh_X$ et $v_Y \otimes h_F$ engendrent un sous-espace vectoriel $\mathcal{H}''_{m+1}$ de $\mathcal{H}_{m+1}$, dont le polynome de Poincaré est

$$\hat{Y}_t P_t + (Y_t - \hat{Y}_t)F_t = Y_t F_t - \hat{Y}_t(F_t - P_t);$$

d'après (9.8) on a donc

$$D_t \leqq \hat{Y}_t(F_t - P_t).$$

Preuve de (9.23). — Nous avons vu (théorème 9.1, preuve de $D_t \leqq t^{-1}\check{Y}_t\hat{F}_t$) que $u_Y \otimes h_F + h_Y \otimes v_F$, supposé $\neq 0$, ne peut avoir d'image nulle dans $\mathcal{G}$, si la composante homogène de degré maximum de h_F est nulle; d'après le n° **8***g*, $h'_Y \otimes u_F$, supposé $\neq 0$, ne peut avoir d'image nulle dans $\mathcal{G}$ si h'_Y appartient à un sous-espace de $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$ isomorphe à Q; supposons le degré de $h'_Y > 0$; puisque l'image dans $\mathcal{G}$ d'un élément de $\mathcal{H}_{m+1}$ n'existe que quand les images de ses composantes homogènes existent et puisqu'elle en est la somme directe,

$$h_{m+1} = u_Y \otimes h_F + h_Y \otimes v_F + h'_Y \otimes u_F,$$

supposé $\neq 0$, ne peut avoir d'image nulle dans $\mathcal{G}$. Le sous-espace vectoriel $\mathcal{H}'_{m+1}$ de $\mathcal{H}_{m+1}$ qu'engendre h_{m+1} a pour polynome de Poincaré

$$(\mathcal{H}'_{m+1})_t = \hat{F}_t + Y_t(F_t - \hat{F}_t) + \check{Q}_t = Y_t F_t - \check{Y}_t \hat{F}_t + \check{Q}_t;$$

la seconde des inégalités (9.7) donne (9.23).

Corollaire 9.3. — *Soit* X *un espace de fibre* F *et de base* Y; *soit un corps commutatif* $\mathcal{A}$; *supposons que les algèbres* $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$ *et* $\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A})$ *aient des rangs finis.*

a. Si F *est compact et si la section par* F *est un homomorphisme de* $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ sur $\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A})$, *alors* X *est compact et*

$$X_t = Y_t F_t, \qquad Q_t = Y_t.$$

b. Réciproquement, si β *est constant, si* Y *est compact et si* $X_t = Y_t F_t$, *alors la section par* F *est un homomorphisme de* $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ sur $\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A})$.

Preuve de a. — Théorème 7.3*b*.

Preuve de b. — De (9.9) résulte que si $X_t = Y_t F_t$, alors $D_t = 0$; d'où, vu (9.18), $F_t = P_t$; cette relation exige que $F\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A}) = \mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A})$.

10. Cas où Y et F sont orientables : dualité de Poincaré. — *Définition* 10.1. — Soient, sur le corps commutatif $\mathcal{A}$, deux espaces vectoriels $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^*$ de dimensions finies; nous nommerons *dualité* de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^*$ toute fonction bilinéaire $\langle e, e^* \rangle$, définie sur le produit $\mathcal{E} \times \mathcal{E}^*$

de ces deux espaces, prenant ses valeurs dans $\mathcal{A}$ et possédant la propriété suivante :

si $e \in \mathcal{E}$ est tel que $\langle e, e^\star \rangle = 0$, quel que soit $e^\star \in \mathcal{E}^\star$, alors $e = 0$;
si $e^\star \in \mathcal{E}^\star$ est tel que $\langle e, e^\star \rangle = 0$, quel que soit $e \in \mathcal{E}$, alors $e^\star = 0$;

Quand existe une telle dualité, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^\star$ ont *même dimension* et *chacun d'eux peut être identifié au dual de l'autre* ([2]. Livre II, Chap. II, § 4, déf. 1 et prop. 6). On dit que e et $e^\star$ sont *orthogonaux* quand $\langle e, e^\star \rangle = 0$. On nomme sous-espace de $\mathcal{E}$ *complètement orthogonal* au sous-espace $\mathcal{F}^\star$ de $\mathcal{E}^\star$ l'ensemble des $e \in \mathcal{E}$ tels que $\langle e, f^\star \rangle = 0$, quel que soit $f^\star \in \mathcal{F}^\star$; on définit de même le sous-espace $\mathcal{F}^\star$ de $\mathcal{E}^\star$ complètement orthogonal au sous-espace $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$; rappelons que si $\mathcal{F}$ est complètement orthogonal à $\mathcal{F}^\star$, alors $\mathcal{F}^\star$ est complètement orthogonal à $\mathcal{F}$ ([2], Livre II, Chap. II, § 4, prop. 7) : nous dirons que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^\star$ sont complètement orthogonaux.

Définition 10.2. — Nous dirons que l'algèbre $\mathcal{K}$ sur $\mathcal{A}$ possède la *dualité de Poincaré* quand elle a les propriétés que voici : $\mathcal{K}$ est de rang fini; $\mathcal{K}$ est graduée (ou bigraduée, le degré utilisé étant le degré canonique); son degré est $\geqq 0$; $\mathcal{K}$ possède une unité, dont les produits par les éléments de $\mathcal{A}$ constituent l'ensemble des éléments de $\mathcal{K}$ homogènes de degré nul; si d est le maximum du degré de $\mathcal{K}$, tout élément homogène de degré d est divisible par tout élément non nul de $\mathcal{K}$.

Nous supposerons

$$k^{[p]}.k^{[q]} = (-1)^{pq} k^{[q]}.k^{[p]};$$

nous n'aurons donc pas à distinguer la divisibilité à droite de la divisibilité à gauche.

Soit $\mathcal{K}^{[p]}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{K}$ homogènes de degré p. Par hypothèse, $\mathcal{K}^{[d]}$ est un espace vectoriel de rang 1; en notant

$\langle k, k' \rangle$ *la composante homogène de degré d de k.k'* $\quad$ (k *et* $k' \in \mathcal{K}$),

on définit évidemment une *dualité* de $\mathcal{K}$ avec lui-même : dire que *deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{K}$ sont complètement orthogonaux* aura un sens. Cette dualité constitue une dualité de $\mathcal{K}^{[p]}$ et $\mathcal{K}^{[d-p]}$; par suite :

Proposition 10.1. — *Si $\mathcal{K}$ a la dualité de Poincaré, alors*

$$\mathcal{K}_t = t^d \mathcal{K}_{t^{-1}},$$

$\mathcal{K}_{t^{-1}}$ se déduisant du polynome $\mathcal{K}_t$ en y remplaçant la variable t par t^{-1}.

Proposition 10.2. — *Soit $\mathcal{J}$ un idéal gradué de l'algèbre $\mathcal{K}$, qui a la dualité de Poincaré.*

$$\mathcal{J} \text{ et Ann. } \mathcal{J} \text{ sont complètement orthogonaux;}$$
$$\text{Ann. (Ann. } \mathcal{J}) = \mathcal{J}.$$

Ann. $\mathcal{J}$ désigne l'annulateur de $\mathcal{J}$, c'est-à-dire l'ensemble des $k \in \mathcal{K}$ tels que $ki = 0$ quel que soit $i \in \mathcal{J}$; il n'y a pas lieu de distinguer annulateur à gauche et à droite de $\mathcal{J}$: ils sont identiques.

Preuve. — Soit $n \in \mathcal{N} = \text{Ann. } \mathcal{J}$; soit $i \in \mathcal{J}$; $ni = 0$; donc $\langle n, i \rangle = 0$: n est orthogonal à $\mathcal{J}$. Soit $n \notin \mathcal{N}$: il existe $i \in \mathcal{J}$ tel que $ni \neq 0$; puisque $\mathcal{K}$ a la dualité de Poincaré, il existe $k \in \mathcal{K}$ tel que nik soit un élément non nul de degré maximum : $\langle n, ik \rangle \neq 0$; or $ik \in \mathcal{J}$, puisque $\mathcal{J}$ est un idéal; donc n n'est pas orthogonal à $\mathcal{J}$.

Par suite $\mathcal{N}$ et $\mathcal{J}$ sont complètement orthogonaux. De même $\mathcal{N}$ et Ann. $\mathcal{N}$ sont complètement orthogonaux. Donc $\mathcal{J} = \text{Ann. } \mathcal{N}$.

Lemme 10.1. — *Si $\mathcal{K}$ est une algèbre canonique, ayant la dualité de Poincaré, alors son algèbre d'homologie $\mathcal{H}$ a la dualité de Poincaré, si le maximum du degré de $\mathcal{H}$ n'est pas inférieur au maximum du degré de $\mathcal{K}$.*

Preuve. — Soit $k^{[d]}$ un élément non nul de $\mathcal{K}^{[d]}$: $\mathcal{K}^{[d]}$ est l'ensemble des $ak^{[d]} (a \in \mathcal{A})$; donc $k^{[d]} \not\sim 0$: sinon $\mathcal{H}^{[d]}$ serait nul, contrairement à l'hypothèse. Par suite

$$\delta \mathcal{K}^{[d-1]} = 0. \tag{10.1}$$

Soit $\mathcal{C}^{[p]}$ l'ensemble des cycles de $\mathcal{K}^{[p]}$; soit $\mathcal{O}^{[p]}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{C}^{[p]}$ homologues à zéro; cherchons le sous-espace de $\mathcal{K}^{[d-p]}$ complètement orthogonal à $\mathcal{O}^{[p]}$: la condition que $k^{[d-p]}$ soit orthogonal à $\mathcal{O}^{[p]}$ s'écrit

$$\delta k^{[p-1]} . k^{[d-p]} = 0 \quad \text{quel que soit} \quad k^{[p-1]} \in \mathcal{K}^{[p-1]};$$

puisque, vu (10.1), $\delta(k^{[p-1]}.k^{[d-p]})=0$, cette condition s'écrit

$$k^{[p-1]}.\delta k^{[d-p]}=0 \quad \text{quel que soit} \quad k^{[p-1]}\in\mathcal{K}^{[p-1]},$$

c'est-à-dire, puisque $\mathcal{K}$ a la dualité de Poincaré,

$$\delta k^{[d-p]}=0$$

c'est-à-dire

$$k^{[d-p]}\in\mathcal{C}^{[d-p]}.$$

Donc

$$(10.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}^{[p]} \text{ et } \mathcal{C}^{[d-p]} \text{ sont des sous-espaces complètement orthogonaux} \\ \qquad\qquad \text{de } \mathcal{K}^{[p]} \text{ et } \mathcal{K}^{[d-p]}. \end{array}\right.$$

Soit $c^{[p]}\in\mathcal{C}^{[p]}$ tel que $c^{[p]}.c^{[d-p]}\sim 0$ quel que soit $c^{[d-p]}\in\mathcal{C}^{[d-p]}$; on a, d'après (10.1), $c^{[p]}.c^{[d-p]}=0$ quel que soit $c^{[d-p]}\in\mathcal{C}^{[d-p]}$; donc, vu (10.2), $c^{[p]}\in\mathcal{D}^{[p]}$, c'est-à-dire $c^{[p]}\sim 0$. Par suite, si $h^{[p]}\in\mathcal{H}^{[p]}$ est tel que $h^{[p]}.h^{[d-p]}=0$ quel que soit $h^{[d-p]}\in\mathcal{H}^{[d-p]}$, alors $h^{[p]}=0$: $\mathcal{H}$ a la dualité de Poincaré.

H. Cartan [3] a donné au *théorème de dualité de Poincaré* un énoncé ayant la conséquence suivante : Soit X une variété compacte, connexe et orientable, de dimension d; (une variété de dimension d est un espace dont chaque point a un voisinage homéomorphe à la boule de dimension d); soit $\mathcal{A}$ un corps commutatif; l'algèbre d'homologie $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ a la dualité de Poincaré; le maximum de son degré est d. En particulier, vu la proposition 10.1, le polynome de Poincaré X_t de X vérifie donc la relation

$$X_t = t^d X_{t^{-1}}.$$

THÉORÈME 10.1. — *Soit* X *un espace fibré, de fibre* F *et de base* Y; *soit un corps commutatif* $\mathcal{A}$; *supposons que* β *soit constant et que* X *et* Y *soient des variétés orientables, compactes et connexes;* F *est donc aussi une telle variété. On peut compléter comme suit les n*os **8** *et* **9** :

a. $D_t = t^{\dim X - 1} D_{t^{-1}}$.

b. L'anneau spectral $\mathcal{H}_r$ *a la dualité de Poincaré; le maximum de son degré canonique est* $\dim X$; *ses éléments homogènes de degré canonique* $\dim X$ *ont le degré filtrant* $m \dim Y + l \dim F$.

c. Les éléments homogènes de $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ *dont le degré est* $\dim X$ *ont pour filtration* $m \dim Y + l \dim F$. *Soit* $\mathcal{H}^{(q)}$ *l'ensemble des éléments de*

$\mathcal{H}(X \bigcirc \mathfrak{A})$ *dont la filtration est* $\geqq q$; *si* $l = 0$ *et* $m = 1$, $\mathcal{H}^{(q)}$ *est l'annulateur de* $\mathcal{H}^{(\dim Y+1-q)}$, *c'est-à-dire, vu la proposition* 10.2, *le sous-espace de* $\mathcal{H}$ *complètement orthogonal à* $\mathcal{H}^{(\dim Y+1-q)}$.

Preuve de a. — On a

$$\dim X = \dim Y + \dim F$$

et, d'après le théorème de dualité de Poincaré,

$$X_t = t^{\dim X} X_{t^{-1}}, \qquad Y_t = t^{\dim Y} Y_{t^{-1}}, \qquad F_t = t^{\dim F} F_{t^{-1}};$$

on porte ces relations dans (9.9).

Preuve de b. — Il existe un élément non nul et de degré canonique $\dim X$ dans $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathfrak{A})$, donc dans $\mathcal{G}$, donc dans chacun des $\mathcal{H}_r$. D'après (8.1) le maximum du degré canonique de $\mathcal{H}_{m+1}$ est $\dim X$. Donc le maximum du degré canonique de $\mathcal{H}_r$ est exactement $\dim X$, quel que soit $r > m$. D'après (8.1) et le théorème de dualité de Poincaré, $\mathcal{H}_{m+1}$ a la dualité de Poincaré. Vu le lemme 10.1, $\mathcal{H}_r$ a donc la dualité de Poincaré. Pour établir que les éléments de $\mathcal{H}_r$, dont le degré canonique est $\dim X$, ont le degré filtrant $m \dim Y + l \dim F$, il suffit de le vérifier quand $r = m + 1$; c'est alors une conséquence évidente du n° **8** *b*.

Preuve de c. — S'il existait un élément de $\mathcal{H}$ ayant le degré canonique $\dim X$ et une filtration $\neq m \dim Y + l \dim F$, il exiterait un élément de $\mathcal{G}$ ayant le degré canonique $\dim X$ et un degré filtrant $\neq m \dim Y + l \dim F$; ce serait contraire à *b*, puisque $\mathcal{G} = \mathcal{H}_r$ quand r est très grand. D'après *b*, $\mathcal{G}$ a la dualité de Poincaré : étant donné l'élément g de $\mathcal{G}$, il existe un élément homogène g_1 de $\mathcal{G}$ tel que, si $l = 0$, $m = 1$,

$$g g_1 \neq 0; \qquad \text{degré filtrant } g_1 = \dim Y - \text{degré filtrant } g;$$

par suite, étant donné $h \in \mathcal{H}(X \bigcirc \mathfrak{A})$, il existe $h_1 \in \mathcal{H}(X \bigcirc \mathfrak{A})$ tel que

$$h h_1 \neq 0; \qquad f(h_1) = \dim Y - f(h);$$

donc, si $f(h) < q$,

$$h \notin \text{Ann.}\ \mathcal{H}^{(\dim Y+1-q)}.$$

Réciproquement, supposons $f(h) \geqq q$; si $h_1 \in \mathcal{H}^{(\dim Y+1-q)}$, alors

$$f(hh_1) \geqq f(h) + f(h_1) > \dim Y;$$

donc $hh_1 = 0$:

$$h \in \text{Ann.}\ \mathcal{H}^{(\dim Y+1-q)}.$$

Donc

$$\mathcal{H}^{(q)} = \text{Ann.}\ \mathcal{H}^{(\dim Y+1-q)}.$$

Si l'on choisit l et m quelconques au lieu de $l = 0$, $m = 1$, on appliquera la proposition suivante :

Variante au théorème 10.1c. — *Soit $\mathcal{H}^{[p]}$ l'espace vectoriel que constituent les éléments de $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ homogènes de degré canonique p : $0 \leqq p \leqq \dim X$; la filtration est nulle sur $\mathcal{H}^{[0]}$, égale à $m \dim Y + l \dim F$ sur $\mathcal{H}^{[\dim X]}$; $\mathcal{H}^{[p]}$ et $\mathcal{H}^{[\dim X-p]}$ sont duals; le sous-espace de $\mathcal{H}^{[p]}$ constitué par ses éléments de filtration $\geqq q$ est complètement orthogonal au sous-espace de $\mathcal{H}^{[\dim X-p]}$ constitué par ses éléments de filtration $> m \dim Y + l \dim F - q$.*

Preuve. — Cette proposition n'est pas altérée quand on augmente la filtration du degré canonique (n° **6**d), ni quand on multiplie l et m par un même entier > 0; or elle est vraie, vu le théorème 10.1c, quand $l = 0$, $m = 1$.

CHAPITRE III.

CAS PARTICULIERS.

I. — Cas où la fibre a l'homologie d'une sphère.

11. Généralités. — Théorème 11.1. — *Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif, ayant une unité. Soit ξ la projection sur sa base Y d'un espace fibré, dont la fibre F est compacte et a, relativement à $\mathcal{A}$, même algèbre d'homologie que la sphère de dimension d. Supposons β constant* [1]. *Il*

[1] Cette hypothèse, quand F est une variété orientable, signifie qu'elle est continûment orientable (théorème 4.3b).

existe un endomorphisme linéaire μ *de* $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$, *augmentant le degré de* $d+1$, *vérifiant*

$$(11.1) \quad \mu(h_Y h'_Y) = \mu h_Y . h'_Y = (-1)^{p(d+1)} h_Y . \mu h'_Y \qquad (h_Y \text{ homogène de degré } p)$$

et possédant les propriétés suivantes :

a. Soit $M = \mu\, \mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$*; les conditions que voici sont équivalentes :*

$$\overset{-1}{\xi}\, h_Y = 0, \qquad h_Y \in M.$$

b. Soit N *l'ensemble des* h_Y *tels que* $\mu h_Y = 0$; *il existe un isomorphisme* (²) *canonique, augmentant le degré de* d, *de* N *sur le* $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$*-module* $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A}) / \overset{-1}{\xi}\, \mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$.

c. Supposons Y *compact; soit* Π_Y *l'isomorphisme canonique de* $\mathcal{A}$ *dans* $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$; *soit* v_F *une base du* $\mathcal{A}$*-module que constituent les éléments de* $\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A})$ *homogènes de degré* d*; les deux conditions suivantes sont équivalentes.*

$$a v_F \in F\, \mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A}); \qquad \Pi_Y a \in N.$$

d. Si Y *est compact, il existe un élément* m_Y *de* $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$ *tel que*

$$\mu h_Y = m_Y h_Y; \qquad \text{degré } m_Y = d+1;$$

m_Y *est nommée classe caractéristique.*

e. Si Y *est compact, et si* d *est pair, alors*

$$2 m_Y = 0.$$

Remarque. — S. S. Chern et E. Spanier [4] démontrent *a* et *b*, qu'ils énoncent comme suit : il existe une suite exacte d'homomorphismes canoniques

$$\mathcal{H}^{[p]}(Y \bigcirc \mathcal{A}) \xrightarrow{\overset{-1}{\xi}} \mathcal{H}^{[p]}(X \bigcirc \mathcal{A}) \to \mathcal{H}^{[p-d]}(Y \bigcirc \mathcal{A}) \xrightarrow{\mu} \mathcal{H}^{[p+1]}(Y \bigcirc \mathcal{A}).$$

(²) Isomorphisme de modules : la multiplication de $n \in N$ par $h_Y \in \mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$ est la multiplication dans $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$; la multiplication de h_X mod $\overset{-1}{\xi}\, \mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$ par h_Y est la multiplication dans $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$, calculée mod $\overset{-1}{\xi}\, \mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$, de h_X par $\overset{-1}{\xi}\, h_Y$.

Définition de μ; *notations.* — $\mathcal{S}$ sera l'anneau d'homologie, relativement aux entiers, d'une sphère de dimension d : $\mathcal{S}$ a une base, constituée par une unité u et un élément v de degré d; $v^2 = 0$; par hypothèse

$$\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A}) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{S};$$

c'est une algèbre ayant pour base

$$u_F = 1 \otimes u; \qquad v_F = 1 \otimes v.$$

Donc, vu le n° **6**, en choisissant $l = -1$, $m = 0$,

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A}) \otimes \mathcal{S};$$

autrement dit tout élément de $\mathcal{H}_1$ est du type

$$h_Y \otimes u + h'_Y \otimes v;$$

$h_Y \otimes u$ et $h'_Y \otimes v$ ont pour degrés filtrants respectif 0 et $-d$. D'après le n° **6** les homomorphismes $\underline{\Phi}$ et $\underline{\Psi}$ se définissent comme suit :

(11.2) $\underline{\Phi} h_X = \Pi_Y a \otimes u + \Pi_Y a' \otimes v$, si Y est compact et $F h_X = a u_F + a' v_F$;

(11.3) $\qquad \underline{\Psi} h_Y = h_Y \otimes u, \qquad$ où $\quad h_Y \in \mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$.

Puisque le degré filtrant a pour seules valeurs 0 et $-d$ et que δ_r augmente de r le degré filtrant, on a $\delta_r = 0$ pour $r \neq d$:

(11.4) $\quad \mathcal{H}_r = \mathcal{H}_1 \quad$ pour $\quad r \leq d; \qquad \mathcal{H}_{d+1} = \mathcal{H}_r = \mathcal{G} \qquad$ pour $\quad d < r$.

Pour la même raison il existe un endomorphisme linéaire μ de $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$, augmentant de $d+1$ le degré, tel que

(11.5) $\qquad \delta_d(h_Y \otimes u) = 0; \qquad \delta_d(h_Y \otimes v) = (-1)^{pd} \mu h_Y \otimes u,$

si h_Y est homogène de degré p.

Preuve de (11.1). — Si h_Y et h'_Y ont les degrés p et q, on a

$$\begin{aligned}\delta_d(h_Y h'_Y \otimes v) &= \delta_d[(h_Y \otimes u).(h'_Y \otimes v)] \\ &= (-1)^{p+qd}(h_Y \otimes u).(\mu h'_Y \otimes u) = (-1)^{p+qd} h_Y . \mu h'_Y \otimes u;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_d(h_Y h'_Y \otimes v) &= (-1)^{qd}\, \delta_d[(h_Y \otimes v).(h'_Y \otimes u)] \\ &= (-1)^{(p+q)d}(\mu h_Y \otimes u).(h'_Y \otimes u) = (-1)^{(p+q)d} \mu h_Y . h'_Y \otimes u.\end{aligned}$$

Preuve de a. — D'après le n° **6** g, la condition

$$\overset{-1}{\xi}\, h_Y = 0$$

équivaut à la condition :

l'image dans $\mathcal{H}_r$ de $\underline{\Psi} h_Y = h_Y \otimes u$ est nulle pour r assez grand; donc à la condition

$$h_Y \otimes u \in \delta_d \mathcal{H}_d,$$

donc, vu (11.5), à

$$h_Y \in M.$$

Preuve de b. — D'après (11.4) et (11.5), $\mathcal{G}$ est la somme directe

$$(11.6) \qquad \mathcal{G} = \underset{\text{(degré filtrant nul)}}{[\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})/M] \otimes u} + \underset{\text{(degré filtrant} - d)}{N \otimes v}.$$

L'ensemble des éléments de $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ dont la filtration est nulle est, d'après le n° **6** g, $\overset{-1}{\xi}\, \mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$; d'où, puisque la filtration vaut o ou $-d$,

$$(11.7) \qquad \mathcal{G} = \underset{\text{(degré filtrant nul)}}{\overset{-1}{\xi}\, \mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})} + \underset{\text{(degré filtrant} - d)}{\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})/\overset{-1}{\xi}\, \mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})}.$$

La comparaison de (11.6) et (11.7) prouve b.

Preuve de c. — D'après (11.2) la condition

$$a v_F \in F\, \mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$$

équivaut à

$$\Pi_Y a \otimes v \in \underline{\Phi}\, \mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A});$$

c'est-à-dire, vu le n° **6** f, à

$$\Pi_Y a \otimes v \quad \text{a une image dans } \mathcal{G};$$

c'est-à-dire, vu (11.4), à

$$\delta_d(\Pi_Y a \otimes v) = 0;$$

c'est-à-dire, vu (11.5), à

$$\mu \Pi_Y a = 0.$$

Preuve de d. — $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$ a une unité u_Y; on pose $\mu u_Y = m_Y$; on applique (11.1).

Preuve de e. — On a

$$(u_Y \otimes v)^2 = 0 \qquad \text{car} \quad v^2 = 0;$$
$$\delta(u_Y \otimes v)^2 = 2(u_Y \otimes v).(m_Y \otimes u) = 2 m_Y \otimes v.$$

Le théorème suivant est évident, vu [11], théorème 63.1 *a* et *d* :

THÉORÈME 11.2. — *Si l'algèbre d'homologie* $\mathcal{H}$F *de* F *relativement à l'anneau des entiers est l'algèbre d'homologie de la sphère de dimension d, alors :*

Les hypothèses du théorème 11.1 *sont vérifiées;*

$$\mu(h_Y \otimes a) = \mu h_Y \otimes a, \qquad \text{où} \quad h_Y \in \mathcal{H}Y, \qquad h_Y \otimes a \in \mathcal{H}Y \otimes \mathcal{A} \subset \mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A});$$

en particulier, si Y *est compact, la classe caractéristique de* $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$ *est l'image canonique de celle de* $\mathcal{H}$Y.

12. CAS OÙ $\mathcal{A}$ EST UN CORPS COMMUTATIF. — THÉORÈME 12.1. — *On peut compléter comme suit le théorème* 11.1, *quand on adjoint à ses hypothèses celle que* $\mathcal{A}$ *est un corps commutatif :*

a. Les polynomes de Poincaré X_t, Y_t, Q_t *des trois algèbres sur* $\mathcal{A}$: $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$, $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$, $\overset{-1}{\xi}\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$ *vérifient les relations*

$$tX_t = (1+t)Q_t + (t^{d+1} - 1)Y_t; \qquad 1 \leqq Q_t \leqq \text{Borne inf.}\ (Y_t, X_t).$$

b. Supposons X *compact; les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

$$\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A}) = F\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A}); \qquad X_t = (1 + t^d)Y_t; \qquad Q_t = Y_t.$$

c. Ces conditions sont réalisées en particulier quand d est pair, la caractéristique du corps $\mathcal{A}$ *étant* $\neq 2$.

Preuve de a. — μ définit un isomorphisme de $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})/N$ sur M; cet isomorphisme augmente le degré de $d+1$; donc, vu la formule (9.1),

$$t^{d+1} Y_t = t^{d+1} N_t + M_t. \tag{12.1}$$

En appliquant cette même formule (9.1) aux deuxièmes membres de (11.6) et (11.7) on obtient

$$Y_t = M_t + Q_t; \qquad X_t = Q_t + t^d N_t. \tag{12.2}$$

L'élimination de N_t et M_t entre (12.1) et (12.2) donne l'égalité énoncée. L'inégalité énoncée est l'inégalité (9.19).

Preuve de b. — D'après le corollaire 9.3, les deux premières conditions sont équivalentes. D'après le théorème 11.1*c*, la condition $\mathcal{H}(F \bigcirc \mathfrak{A}) = F\mathcal{H}(X \bigcirc \mathfrak{A})$ équivaut à la condition que N contienne l'unité de $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathfrak{A})$, c'est-à-dire à $m_Y = 0$, c'est-à-dire, vu (12.2), à $Y_t = Q_t$.

Preuve de c. — Théorème 11.1*c*.

13. Cas où X, Y et F sont orientables, $\mathfrak{A}$ étant un corps commutatif. — Théorème 13.1. — *Soit une variété compacte* X *de dimension* D, *ayant pour fibre une variété* F *de dimension d et pour base une variété* Y *de dimension* D — *d; faisons l'une des trois hypothèses équivalentes, qui entraînent que* β *est constant :* X *et* Y *sont orientables;* X *est orientable et* F *est continûment orientable;* Y *est orientable et* F *est continûment orientable. Soit un corps* $\mathfrak{A}$; *supposons que* Y *ait, relativement à* $\mathfrak{A}$, *même algèbre d'homologie que la sphère de dimension d. On peut alors compléter comme suit le théorème* 11.1 :

a. M *et* N *sont complètement orthogonaux* (définition 10.2);

$$M = \text{Ann. } N; \qquad N = \text{Ann. } M.$$

b. Le sous-espace de $\mathcal{H}^{[p]}(X \bigcirc \mathfrak{A})$ *complètement orthogonal à* $\overset{-1}{\xi}\,\mathcal{H}^{[D-p]}(Y \bigcirc \mathfrak{A})$ *est* $\overset{-1}{\xi}\,\mathcal{H}^{[p]}(Y \bigcirc \mathfrak{A})$.

c. Les polynomes de Poincaré X_t *et* Y_t *de* $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathfrak{A})$ *et* $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathfrak{A})$ *s'expriment en fonction du polynome de Poincaré* Q_t *de* $\overset{-1}{\xi}\,\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathfrak{A})$ *par les formules*

$$X_t = Q_t + t^D Q_{t^{-1}}; \tag{13.1}$$

$$Y_t = \frac{Q_t - t^{D+1} Q_{t^{-1}}}{1 - t^{d+1}}, \qquad \text{où} \quad 1 \leqq Q_t \leqq Y_t. \tag{13.2}$$

Remarque. — Le théorème 12.1 *b, c* complète ce théorème.

Preuve de a. — Par définition N = Ann. M; on applique la proposition 10.2.

Preuve de b. — On applique la variante au théorème 10.1*c*, ($l = -1$, $m = 0$) en notant que la filtration vaut $-d$ ou 0 et que l'ensemble des éléments de filtration 0 est $\overset{-1}{\xi}\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$.

Preuve de c. — D'après *b* les modules $\overset{-1}{\xi}\mathcal{H}^{[D-p]}(Y \bigcirc \mathcal{A})$ et $\mathcal{H}^{[p]}(X \bigcirc \mathcal{A}) / \overset{-1}{\xi}\mathcal{H}^{[p]}(Y \bigcirc \mathcal{A})$ ont même rang ; c'est ce qu'exprime (13.1). La relation (13.2) résulte de (13.1) et du théorème 12.1*a*.

THÉORÈME 13.2. — *Conservons les hypothèses du théorème* 13.1.

a. Si $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ possède un élément w_X, de degré > 0, tel que

$$w_X . \overset{-1}{\xi} h_Y \in \overset{-1}{\xi}\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A}) \quad \text{entraîne} \quad \overset{-1}{\xi} h_Y = 0,$$

alors $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$ possède un élément n_Y vérifiant les deux relations équivalentes :

(13.3) $$\text{Mult. } m_Y = \text{Ann. } n_Y;$$

(13.4) $$\text{Ann. } m_Y = \text{Mult. } n_Y.$$

b. Réciproquement, si $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$ possède un élément n_Y vérifiant ces relations, alors $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ possède au moins un élément w_X tel que tout $h_X \in \mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ puisse être mis d'une façon et d'une seule sous la forme

(13.5) $$h_X = \overset{-1}{\xi} h_Y + w_X . \overset{-1}{\xi} h'_Y;$$

on a

(13.6) $$\text{degré } w_X = d + \text{degré } n_Y.$$

Supposons le corps $\mathcal{A}$ de caractéristique $\neq 2$. Si w_X est de degré impair, alors $w_X^2 = 0$ et par suite $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ est le produit tensoriel de $\overset{-1}{\xi}\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$ par l'algèbre extérieure d'un module de rang 1. Si w_X est de degré pair, alors on peut choisir w_X tel que

(13.7) $$w_X^2 \in \overset{-1}{\xi}\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A});$$

cette condition détermine w_X à la multiplication près par un élément de $\mathcal{A}$.

Remarque. — Si $m_Y = 0$, alors n_Y existe : c'est l'unité de $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$.

Preuve de a. — D'après le théorème 11.1 *b*, w_X a une image canonique n_Y dans N et la condition

$$(13.8) \qquad w_X . \overset{-1}{\xi} h_Y \in \overset{-1}{\xi} \mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$$

équivaut à la condition $n_Y h_Y = 0$, c'est-à-dire à

$$(13.9) \qquad h_Y \in \text{Ann. } n_Y.$$

Par hypothèse (13.8) équivaut à $\overset{-1}{\xi} h_Y = 0$, c'est-à-dire, vu le théorème 11.1 *a*, à

$$(13.10) \qquad h_Y \in \text{Mult. } m_Y.$$

L'équivalence de (13.9) et (13.10) prouve (13.3). La proposition 10.2 prouve l'équivalence de (13.3) et (13.4).

Preuve de b. — Le théorème 11.1 *a* définit un isomorphisme de $\overset{-1}{\xi} \mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$ sur $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})/M$; puisque $M = \text{Ann. } n_Y$ et $N = \text{Mult. } n_Y$, la multiplication par n_Y définit un isomorphisme (augmentant le degré du degré de n_Y) de $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})/M$ sur N; le théorème 11.1 *b* définit un isomorphisme (augmentant le degré de d) de N sur le $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$-module $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})/\overset{-1}{\xi} \mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$; en composant ces trois isomorphismes, on obtient un isomorphisme (augmentant le degré de $d +$ degré n_Y) de $\overset{-1}{\xi} \mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$ sur $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})/\overset{-1}{\xi} \mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$. Par suite $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})/\overset{-1}{\xi} \mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$ est un $\overset{-1}{\xi} \mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$-module de rang 1; soit l'un de ses éléments de base; soit w_X l'un des éléments de $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ dont il est l'image : étant donné $h_X \in \mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$, il existe un élément unique $\overset{-1}{\xi} h'_Y$ de $\overset{-1}{\xi} \mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$ tel que

$$h_X - w_X . \overset{-1}{\xi} h'_Y \in \overset{-1}{\xi} \mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A});$$

autrement dit, h_X peut être mis d'une façon et d'une seule sous la forme (13.5). Supposons w_X de degré pair; on a en particulier

$$w_X^2 = \overset{-1}{\xi} h''_Y + w_X . \overset{-1}{\xi} h'''_Y;$$

tous les autres choix possibles w'_X de w_X sont donnés par la formule

$$w'_X = a\left(w_X - \overset{-1}{\xi} h_Y\right), \qquad \text{où} \quad a \in \mathcal{A};$$

ceux de ces choix qui vérifient la condition (13.7) sont ceux pour lesquels $2\overset{-1}{\xi} h_Y = \overset{-1}{\xi} h'''_Y$; cette condition détermine donc w'_X à la multiplication près par $a \in \mathcal{A}$.

II. — Cas où la fibre a l'homologie d'un produit de sphères de dimensions paires.

14. Théorème 14.1. — *Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif, ayant une unité et dans lequel la division par 2 soit possible. Soit ξ la projection sur sa base* Y, *d'un espace fibré* X, *dont la fibre* F *a même algèbre d'homologie, par rapport à $\mathcal{A}$, que le produit* P *de ω sphères de dimensions paires; supposons* X *compact,* Y *globalement et localement connexe par arcs et simplement connexe. Alors :*

a. $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A}) \otimes \mathcal{H}P$ *est l'algèbre bigraduée de l'algèbre graduée* $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$, *munie d'une filtration convenable;*

b. $\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A}) = F\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$;

c. $\overset{-1}{\xi}$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$ *dans* $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$.

Preuve de a. — L'anneau d'homologie $\mathcal{H}P$ de P relativement aux entiers est (*voir* [11], théorème 64.1) l'anneau des polynomes de ω variables commutatives $v_1, \ldots, v_\omega$, calculées mod $v_1^2, \ldots, v_\omega^2$: $\mathcal{H}P$ a une base constituée par une unité u et les monomes $v_\lambda v_\mu \ldots v_\nu$ où $1 \leqq \lambda < \mu < \ldots < \nu \leqq \omega$. D'après le théorème 63.1d de [11], l'hypothèse énoncée est que

$$\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A}) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{H}P;$$

$\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A})$ est une algèbre sur $\mathcal{A}$ ayant une base. Donc, vu le théorème 4.3a et le n° **6**, l'algèbre spectrale $\mathcal{H}_r$ a pour premier terme, quand on choisit $l = -1$, $m = 0$:

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A}) \otimes \mathcal{H}P.$$

Supposons prouvé que $\delta_1 = \ldots = \delta_{r-1} = 0$: on a

$$\mathcal{H}_r = \mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A}) \otimes \mathcal{H}P;$$

prouvons que $\delta_r = 0$. δ_r annule les termes de degré filtrant maximum :

$$\delta_r(h_Y \otimes u) = 0. \tag{14.1}$$

Soit u_Y l'unité de $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathfrak{A})$; posons

$$\partial_r(u_Y \otimes v_\lambda) = \sum_{\mu, \ldots, \nu} h_{\mu, \ldots, \nu} \otimes v_\mu \ldots v_\nu;$$

puisque ∂_r augmente de r le degré filtrant,

$$-r + \text{degré } v_\lambda = \text{degré } v_\mu + \ldots + \text{degré } v_\nu;$$

donc

$$\text{degré } v_\lambda > \text{Max.}\,(\text{degré } v_\mu, \ldots, \text{degré } v_\nu),$$

aucun des indices $\mu, \ldots, \nu$ n'est donc égal à λ; en appliquant ∂_r à

$$u_Y \otimes v_\lambda^2 = 0,$$

on obtient

$$2 \sum_{\mu, \ldots, \nu} h_{\mu, \ldots, \nu} \otimes v_\lambda v_\mu \ldots v_\nu = 0$$

qui entraîne donc

$$h_{\mu, \ldots, \nu} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\partial_r(u_Y \otimes v_\lambda) = 0. \tag{14.2}$$

De (14.1) et (14.2) résulte $\partial_r = 0$. Donc $\mathcal{H}_r$ est indépendant de r : $\mathcal{H}_1 = \mathcal{G}$, ce qui prouve a.

Preuve de b et c. — Le théorème 7.1 b, c.

III. — Cas où la base a l'homologie d'une sphère.

15. GÉNÉRALITÉS. — *Définition* 15.1. — Soit un anneau $\mathcal{H}$; rappelons qu'un endomorphisme linéaire θ de $\mathcal{H}$ vérifiant la condition

$$\theta(hh') = \theta h . h' + h . \theta h', \qquad \text{où} \quad h \text{ et } h' \in \mathcal{H},$$

ou la condition

$$\theta(hh') = \theta h . h' + (-1)^p h . \theta h', \qquad \text{où } h \text{ est homogène de degré } p,$$

a été nommé par J. L. Koszul *dérivation* ou *antidérivation*.

THÉORÈME 15.1. — *Soit $\mathfrak{A}$ un anneau commutatif ayant une unité. Soit ξ la projection sur sa base* Y *d'un espace fibré* X, *de fibre* F; *suppo-*

sons que Y *soit un espace compact, connexe par arcs, simplement connexe, ayant même anneau d'homologie relativement aux entiers que la sphère de dimension* $d > 1$. $\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A})$ *possède, si d est impair, une dérivation* θ, *si d est pair, une antidérivation* θ, *qui abaisse le degré de* $d-1$ *et dont les propriétés sont les suivantes :*

a. $\theta h_F = 0$ *équivaut à* $h_F = F\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$; *donc* $\theta(h_F . F h_X) = \theta h_F . F h_X$ *et par suite*

$$\theta \mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A}) \textit{ est un } \mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})\textit{-module.}$$

b. L'ensemble des $h_X \in \mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ *tels que* $F h_X = 0$ *est un idéal* N;

$$N^2 = 0, \qquad \textit{c'est-à-dire} \quad nn' = 0 \qquad \textit{si} \quad n \textit{ et } n' \in N;$$

il existe un isomorphisme (¹) *canonique, diminuant le degré de d, de* N *sur le* $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$*-module* $\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A})/\theta\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A})$.

c. Supposons F *compact et nommons* Π_F *l'isomorphisme canonique de* $\mathcal{A}$ *dans* $\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A})$. *Soit* v_Y *une base du* $\mathcal{A}$*-module que constituent les éléments de* $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$ *homogènes de degré d. Les* $\overset{-1}{\xi}(a v_Y)$ *constituent l'ensemble des éléments homogènes de* N *ayant le degré d: les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

$$\overset{-1}{\xi}(a v_Y) = 0; \qquad \Pi_F a \in \theta\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A}).$$

Remarque. — H. C. Wang [15], quand Y est une sphère, démontre *a* et *b* qu'il énonce comme suit : il existe une suite exacte d'homomorphismes canoniques

$$\mathcal{H}^{[p]}(F \bigcirc \mathcal{A}) \xrightarrow{\theta} \mathcal{H}^{[p-d+1]}(F \bigcirc \mathcal{A}) \to \mathcal{H}^{[p+1]}(X \bigcirc \mathcal{A}) \xrightarrow{F} \mathcal{H}^{[p+1]}(F \bigcirc \mathcal{A}).$$

Définition de θ; *notations.* — $\mathcal{S}$ sera l'anneau d'homologie, relativement aux entiers, d'une sphère de dimension d : $\mathcal{S}$ a une base, constituée par une unité u et un élément v de degré d; par hypothèse

$$\mathcal{H}Y = \mathcal{S};$$

(¹) Isomorphisme de modules : la multiplication de $n \in N$ par h_X est la multiplication dans $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$; la multiplication de h_F par h_X est la multiplication dans $\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A})$ de h_F par $F h_X$.

donc, vu le théorème 63.3 de [11] :

$$\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A}) = \mathcal{H}Y \otimes \mathcal{A};$$

c'est une algèbre ayant pour base

$$u_Y = u \otimes 1, \qquad v_Y = v \otimes 1.$$

On a, vu le théorème 4.3*a* et le n° **6**, en choisissant $l = 0$, $m = 1$,

$$\mathcal{H}_2 = \mathcal{S} \otimes \mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A});$$

autrement dit tout élément de $\mathcal{H}_2$ est du type

$$u \otimes h_F + v \otimes h'_F;$$

$u \otimes h_F$ et $v \otimes h'_F$ ont pour degrés filtrants respectifs o et d. L'homomorphisme $\underline{\Phi}$ et, si F est compact, l'homomorphisme $\underline{\Psi}$ se définissent comme suit :

(15.1) $$\underline{\Phi} h_X = u \otimes F h_X;$$

(15.2) $$\underline{\Psi}(a u_Y) = u \otimes \Pi_F a; \qquad \underline{\Psi}(a v_Y) = v \otimes \Pi_F a.$$

Puisque le degré filtrant a pour seules valeurs o et d et que δ_r augmente de r le degré filtrant r, on a $\delta_r = 0$ pour $r \neq d$:

(15.3) $$\mathcal{H}_r = \mathcal{H}_2 \quad \text{pour} \quad r \leqq d; \qquad \mathcal{H}_{d+1} = \mathcal{H}_r = \mathcal{G} \quad \text{pour} \quad d < r.$$

Pour la même raison

(15.4) $$\delta_d(u \otimes h_F) = v \otimes \theta h_F; \qquad \delta_d(v \otimes h_F) = 0,$$

θ étant un endomorphisme linéaire de $\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A})$; θ diminue le degré de $d - 1$; θ est une dérivation quand d est impair et une antidérivation quand d est pair, car on a, si h_F est homogène de degré p,

$$\begin{aligned} v \otimes \theta(h_F h'_F) &= \delta_d(u \otimes h_F h'_F) = \delta_d[(u \otimes h_F).(u \otimes h'_F)] \\ &= \delta_d(u \otimes h_F).(u \otimes h'_F) + (-1)^p (u \otimes h_F).\delta_d(u \otimes h'_F) \\ &= (v \otimes \theta h_F).(u \otimes h'_F) + (-1)^p (u \otimes h_F).(v \otimes \theta h'_F) \\ &= v \otimes (\theta h_F.h'_F + (-1)^{p+pd} h_F.\theta h'_F). \end{aligned}$$

Preuve de a. — D'après (15.1) la condition

$$h_F \in F\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$$

équivaut à la condition

$$u \otimes h_F \in \underline{\Phi}\,\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A}),$$

c'est-à-dire, vu le n° 6 *f*, à la condition que $u \otimes h_F$ ait une image dans $\mathcal{G}$, c'est-à-dire, vu (15.3), à

$$\delta_d(u \otimes h_F) = 0$$

et, vu (15.4), à

$$0 h_F = 0.$$

Preuve de b. — Puisque les éléments que 0 annule constituent $F\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$, on a d'après (15.3) et (15.4)

$$\mathcal{G} = \underset{\text{(degré filtrant nul)}}{u \otimes F\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})} + \underset{\text{(degré filtrant } d\text{)}}{v \otimes \mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A})/0\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A})}. \tag{15.5}$$

La filtration de $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ vaut 0 ou d; d'après le n° 6 *f*, les éléments de filtration d constituent N, ce qui a deux conséquences :

le produit de deux éléments de N a une filtration $\geqq 2d$ et est donc nul;

$$\mathcal{G} = \underset{\text{(degré filtrant nul)}}{\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})/N} + \underset{\text{(degré filtrant } d\text{)}}{N}. \tag{15.6}$$

La comparaison de (15.5) et (15.6) achève la preuve de *b*.

Preuve de c. — D'après le n° 6 *g*, l'ensemble des éléments homogènes de $\overset{-1}{\xi}\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$ est l'ensemble des éléments homogènes de $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ dont la filtration égale le degré, quand on prend $l = 0$, $m = 1$; $\overset{-1}{\xi}\mathcal{H}^{[d]}(Y \bigcirc \mathcal{A})$ est donc l'ensemble des $\mathcal{H}^{[d]}(X \bigcirc \mathcal{A})$ de filtration d, c'est-à-dire $N^{[d]}$. D'après le n° 6 *g*, la condition $\overset{-1}{\xi}(av_Y) = 0$ équivaut à la condition

$$\underline{\Psi}(av_Y) = v \otimes \Pi_F a \quad \text{a une image nulle dans } \mathcal{G};$$

donc, vu (15.3) et (15.4), à la condition

$$\Pi_F a \in 0\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A}).$$

16. Cas où $\mathcal{A}$ est un corps commutatif. — Théorème 16.1. — *On peut compléter comme suit le théorème* 15.1, *quand on adjoint à ses hypothèses celle que $\mathcal{A}$ est un corps commutatif.*

a. Les polynomes de Poincaré X_t, F_t, P_t des trois algèbres sur $\mathcal{A}$: $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$, $\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A})$, $F\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ vérifient les relations

$$X_t = (1 + t) P_t + (t^d - t) F_t; \qquad 0 \leqq P_t \leqq \text{Borne inf.} (F_t, X_t);$$

$F_t - P_t$ et $X_t - P_t$ sont respectivement divisibles par t^{d-1} et t^d.

b. Supposons F *compact;*

$$\text{si}\quad \overset{-1}{\xi}\, v_Y = 0,\qquad \text{alors}\quad [t^{1-d}(F_t - P_t)]_{t=0} = 1,\qquad [t^{-d}(X_t - P_t)]_{t=0} = 0;$$
$$\text{si}\quad \overset{-1}{\xi}\, v_Y \neq 0,\qquad \text{alors}\quad [t^{1-d}(F_t - P_t)]_{t=0} = 0,\qquad [t^{-d}(X_t - P_t)]_{t=0} = 1.$$

Preuve de a. — D'après la formule (9.1) et le théorème 15.1 *a*, le polynome de Poincaré de $0\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A})$ est $t^{1-d}(F_t - P_t)$; donc, d'après le théorème 15.1 *b*,

$$X_t = t^d[F_t - t^{1-d}(F_t - P_t)]; \tag{16.1}$$

on a, puisque $F\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A}) = \mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})/N$,

$$P_t = X_t - N_t. \tag{16.2}$$

Donc : $F_t - P_t$ est divisible par t^{d-1}; $N_t = X_t - P_t$ est divisible par t^d;

$$X_t = P_t + N_t = (1 + t)\,P_t + (t^d - t)\,F_t. \tag{16.3}$$

Preuve de b. — D'après le théorème 15.1 *c*, $\overset{-1}{\xi}\, v_Y = 0$ ou $\neq 0$ suivant que le coefficient de t^d dans N_t vaut o ou 1, c'est-à-dire, vu (16.2) et (16.3), suivant que

$$t^{-d}(X_t - P_t) = F_t - t^{1-d}(F_t - P_t)$$

vaut o ou 1 pour $t = 0$; or $F_0 = 1$.

17. Cas ou X, Y, F sont des variétés orientables, $\mathcal{A}$ étant un corps commutatif. — Théorème 17.1. — *Adjoignons aux hypothèses du théorème* 15.1 *les suivantes :* $\mathcal{A}$ *est un corps commutatif,* X, Y *et* F *sont des variétés orientables, de dimensions* D, *d et* D — *d. On peut alors compléter ce théorème comme suit :*

a. $F\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ *et* $0\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A})$ *sont complètement orthogonaux* (*définition* 10.2).

b. N *est son propre annulateur;* N *est donc complètement orthogonal à lui-même.*

c. Les polynomes de Poincaré X_t *et* F_t *de* $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ *et* $\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{A})$ *s'expriment en fonction du polynome de Poincaré* P_t *de* $F\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ *par les formules*

$$X_t = P_t + t^D P_{t^{-1}}; \tag{17.1}$$

$$F_t = \frac{P_t - t^{D-1} P_{t^{-1}}}{1 - t^{d-1}},\qquad \text{où}\quad 1 \leqq P_t \leqq F_t. \tag{17.2}$$

Remarque. — Le théorème 16.1 *b* complète ce théorème.

Preuve de a. — D'après le théorème 10.1*b*, $\mathcal{G}$ a la dualité de Poincaré; on utilise l'expression (15.5) de $\mathcal{G}$.

Preuve de b. — D'après le théorème 10.1 *c*, l'ensemble des éléments de $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{C})$ de filtration $\geqq d$ est l'annulateur de l'ensemble des éléments de $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{C})$ de filtrations > 0; et il lui est complètement orthogonal. Or ces deux ensembles sont identiques à N.

Preuve de c. — D'après *b* les modules $N^{[p]}$ et $\mathcal{H}^{[D-p]}(X \bigcirc \mathcal{C})/N^{[D-p]}$ ont même rang; donc, vu (9.1),

$$N_t = t^D(X_{t^{-1}} - N_{t^{-1}});$$

remplaçons N_t par son expression (16.2); on obtient (17.1); (17.2) résulte de (17.1) et du théorème 16.1 *a*.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. Borel et J. P. Serre, *C. R. Acad. Sc.*, t. 230, 1950, p. 2258.

[2] N. Bourbaki, *Éléments de mathématiques*, Première Partie, Livres I, II, III, (Hermann).

[3] H. Cartan, *Séminaire dactylographié de l'École Normale Supérieure*, 1948-1949.

[4] S. S. Chern et E. Spanier, *Proceedings of Nat. Ac. of Sc.*, t. 36, 1950, p. 248-255.

[6] *Colloque de Topologie*, Bruxelles 1950.

[7] B. Eckmann, *Comm. Math. Helv.*, t. 14, 1941, p. 141-192.

[8] W. Gysin, *Comm. Math. Helv.*, t. 14, 1941, p. 61-122.

[9] G. Hirsch, *Bull. Soc. math. Belgique*, 1947-1948, p. 24-33; *C. R. Acad. Sc.*; t. 227, 1948, p. 1328; t. 229, 1949, p. 1297; t. 230, 1950, p. 46.

[10] J. Leray, *C. R. Acad. Sc.*, t. 223, 1946, p. 395.

[11] J. Leray, *Journal Math.*, t. 29, 1950, p. 1-139.

[12] N. E. Steenrod, *Ann. of Math.*, t. 44, 1943, p. 610-627.

[13] N. E. Steenrod, *Ann. of Math.*, t. 50, 1949, p. 954-988.

[14] E. Stiefel, *Comm. Math. Helv.*, t. 8 1935, p. 3-51; H. Whitney, *Bull. Amer. Soc.*, t. 43, 1937, p. 785-805; N. E. Steenrod, *Ann. of Math.*, t. 43, 1942, p. 116-131.

[15] H. C. Wang, *Duke Math. Journal*, t. 16, 1949, p. 33-38.