Sur la position d'un ensemble fermé de points d'un espace topologique

(DEUXIÈME PARTIE D'UN COURS DE TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE PROFESSÉ EN CAPTIVITÉ);

PAR JEAN LERAY.

Introduction.

Cette deuxième Partie de mon cours de topologie suppose connus les paragraphes I à V du Chapitre I et le paragraphe I du Chapitre II de ce cours. Cette deuxième Partie n'est pas indispensable à la compréhension de la troisième Partie, intitulée : *Sur les équations et les transformations*, bien que cette troisième Partie doive elle aussi apporter une contribution à l'étude des problèmes de position (Chap. VIII). La numérotation des chapitres, théorèmes et lemmes fait suite à celle de la première Partie.

On dit que deux ensembles homéomorphes F et F′ de points d'un espace topologique E *occupent la même position dans* E quand il existe une représentation topologique de E sur lui-même qui transforme F en F′. L'un des problèmes essentiels de la topologie est d'attacher à la figure que constituent E et F des *invariants topologiques*, c'est-à-dire des êtres algébriques qui soient les mêmes pour la figure (E, F) et pour la figure (E, F′). Le cas des espaces euclidiens à deux ou trois dimensions mis à part, ce problème n'a reçu que des solutions très incomplètes, toutes apparentées au théorème de dualité de M. Alexander (¹). Le *Chapitre IV* étudie ce problème, à l'aide de l'anneau d'homologie et à l'aide de l'anneau des pseudocycles (qui jouera un grand rôle dans les Chapitres VII et VIII de la troisième Partie) sans recourir à la notion de groupe dual (Pontrjagin) quelque indispensable qu'ait pu paraître cette notion à l'étude de cette question. Nos énoncés, s'ils sont voisins de propositions antérieurement établies par MM. Alexander, Kolmogoroff et Alexandroff (¹) dans le cas des

(¹) *Voir* les travaux de MM. Pontrjagin, Kolmogoroff, Alexander et Aléxandroff déjà cités dans la première Partie; A.-H., Chap. XI (en particulier le nº 7 du § 4); GORDON, *Ann. of Math.*, 37, 1936, p. 519-525; FREUDENTHAL, *Ann. of Math.*, 38, p. 647-655; KOMATU, *Tohoku Math. Journal*, 43, 1937, p. 414-420.

espaces localement bicompacts, ont l'avantage de valoir dans le cas des espaces normaux. Nos raisonnements consistent essentiellement à manier les formes d'un espace topologique, telles que nous les avons définies au Chapitre I; ces formes obéissent à *la plupart des règles du calcul qui régissent les formes de Pfaff*, dont M. É. Cartan a tiré un si grand profit en Théorie des groupes et en Géométrie différentielle; l'intérêt principal de ce Chapitre IV nous paraît être de *traiter une question de Topologie*, étrangère à toute hypothèse de différentiabilité, *par des calculs de cette nature*.

Le *Chapitre V*, en appliquant aux multiplicités les conclusions du paragraphe I du Chapitre II, permet de leur appliquer les conclusions du Chapitre IV. Le paragraphe I du Chapitre V montre avec quelle commodité la notion de couverture et, par suite, l'ensemble de nos définitions s'appliquent aux multiplicités; il utilise certaines couvertures particulières, les dallages, dont chaque élément est constitué par *une cellule convexe et une orientation de la variété plane qui est complètement orthogonale à cette cellule* [rappelons que les complexes qu'il est classique d'employer (A.-H.) pour construire les groupes de Betti d'une multiplicité ou d'un polyèdre ont des éléments constitués chacun par une cellule convexe et une orientation de la variété plane qui *contient* cette cellule]; la loi d'intersection des classes d'homologie d'une multiplicité s'obtient ainsi par une construction analogue à celle qu'il est classique d'effectuer pour déterminer la loi d'intersection des éléments du groupe de Betti (intersection que nous n'utilisons pas) (n° **62**, rem. 2); mais notre construction a sur cette construction classique l'avantage d'être indépendante de toute hypothèse d'orientabilité de la variété, quels que soient les coefficients utilisés. A titre d'exemple le paragraphe II détermine l'anneau d'homologie des espaces projectifs, en précisant la position de leurs hyperplans, et le paragraphe III reproduit un raisonnement de M. H. Hopf en y supprimant la restriction que les coefficients utilisés soient les entiers mod. 2.

CHAPITRE IV.

SUR LA POSITION D'UN ENSEMBLE FERMÉ DE POINTS.

I. — Cas général.

43. Énoncé des résultats. — A la figure que constituent un espace topologique *normal* E, un ensemble fermé F de points de E et l'ensemble complémentaire $O = E - F$, nous attacherons *les invariants topologiques* (¹) suivants :

l'*anneau* d'homologie $\mathcal{E}$ de E;
l'*anneau* d'homologie $\mathcal{F}$ de E;

(¹) *Voir* l'Introduction.

un *anneau* $\mathcal{O}$, que nous nommerons « anneau d'homologie de l'intérieur de O »;

un *homomorphisme* de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ (l'image de $\mathcal{E}$ est un sous-anneau $\mathcal{F}_E$ de $\mathcal{F}$) (n° **46**);

un *homomorphisme* de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{E}$ (l'image de $\mathcal{O}$ est un idéal $\mathcal{E}_0$ de $\mathcal{E}$) (n° **47**);

un *homomorphisme* de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{O}$ (l'image de $\mathcal{F}$ est un idéal $\mathcal{G}$ de $\mathcal{O}$) (n° **48**), ce troisième homomorphisme augmentant la dimension d'une unité et ne respectant pas la loi d'intersection.

Les noyaux respectifs de ces trois homomorphismes seront $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{F}_E$; nous aurons donc les trois isomorphismes ([1])

$$\boxed{(1)\quad \mathcal{E}/\mathcal{E}_0 \cong \mathcal{F}_E; \qquad (2)\quad \mathcal{O}/\mathcal{G} \cong \mathcal{E}_0; \qquad (3)\quad \mathcal{F}/\mathcal{F}_E \simeq \mathcal{G}.}$$

Remarque. — Alors que (1) et (2) sont des isomorphismes d'anneaux, (3) est un isomorphisme entre le groupe abélien hétérogène ([2]) $\mathcal{F}/\mathcal{F}_E$ et l'anneau $\mathcal{G}$; il respecte les relations linéaires, mais il ne respecte pas la dimension ([3]). Lorsque, les éléments de dimension nulle mis à part, $\mathcal{F}_E$ se trouve être un idéal de $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{F}/\mathcal{F}_E$ est un anneau et l'isomorphisme (3) définit dans $\mathcal{G}$ une loi de multiplication autre que la loi d'intersection : c'est la multiplication de M. Gordon (*voir* n° **51**, rem. 1) (toute intersection dans $\mathcal{G}$ est d'ailleurs nulle : *voir* n° **47**, rem. 1).

Nota. — Chacun de ces anneaux et de ces homomorphismes sera un invariant topologique de la figure, que constituent E et F, d'une façon si évidente que nous ne l'expliciterons pas.

46. INTERSECTION PAR F D'UNE CLASSE D'HOMOLOGIE DE E. — Associons à chaque classe d'homologie Z^p de E son intersection $Z^p.F$ par F; nous définissons ainsi *un homomorphisme* de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$. Nous nommerons $\mathcal{F}_E$ le transformé de $\mathcal{E}$ par cet homomorphisme; c'est un sous-anneau de $\mathcal{F}$. Nous nommerons $\mathcal{E}_0$ le noyau de cet homomorphisme : *$\mathcal{E}_0$ est l'idéal que constituent les classes d'homologie Z^p de* E *telles que* $Z^p.F \sim 0$ *dans* F.

Les hypothèses que E est normal et que F est fermé permettent d'établir le lemme suivant; son énoncé est très voisin de celui du lemme 13 (n° **26**); il en est de même pour sa démonstration, que nous n'expliciterons pas :

LEMME 22. — *Si une forme* L^p *de* E *est telle que* $L^p.F$ *soit un cycle de* F *homologue à zéro dans* F, *alors il existe une forme* L^{p-1} *de* E *telle que* $\dot{L}^p.F = L^{p-1}.F$.

([1]) *Voir* VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra*, T. I (Springer, 1937), Chap. III, § 16; A.-H., *Anhang*, I, § 1, n° 9.

([2]) Un groupe abélien hétérogène est un ensemble d'éléments de dimensions diverses dont les combinaisons linéaires homogènes sont définies et appartiennent au groupe.

([3]) D'où l'emploi du symbole $\simeq$ au lieu du symbole $\cong$.

Ce lemme 22 permet de donner la *deuxième définition* de $\mathcal{E}_0$ que voici : *$\mathcal{E}_0$ est l'idéal que constituent les classes d'homologie de* E *contenant chacune un cycle* Z^p *tel que* $|Z^p| \subset O$.

Démonstration. — Il s'agit de prouver l'équivalence des deux propriétés suivantes :

α. $Z^p.F \sim 0$ dans F;

β. Z^p est homologue dans E à un cycle dont le support appartient à O.

Il est évident que β entraîne α. Soit réciproquement Z^p un cycle de E tel que $Z^p.F \sim 0$; il existe d'après le lemme 22 une forme L^{p-1} de E telle que $Z^p.F = \dot{L}^{p-1}.F$; $Z^p - \dot{L}^{p-1}$ est un cycle de E qui est homologue à Z^p et dont le support appartient à O. C. Q. F. D.

47. Appartenance de chaque classe d'homologie de l'intérieur de O a une classe d'homologie de E. — Envisageons les cycles de E dont les supports appartiennent à O; deux d'entre eux, $Z^{p,1}$ et $Z^{p,2}$, seront dits homologues à l'intérieur de O quand il existera une forme L^{p-1} de E vérifiant les relations

$$Z^{p,1} - Z^{p,2} = \dot{L}^{p-1}, \qquad |L^{p-1}| \subset O.$$

Cette homologie répartit ces cycles en classes, dites *classes d'homologie de l'intérieur de* O, qui constituent un anneau $\mathcal{O}$, dit *anneau d'homologie de l'intérieur de* O.

Les cycles de E constituant une même classe d'homologie de l'intérieur de O appartiennent à une même classe d'homologie de E; nous dirons que la première de ces deux classes appartient à la seconde, cette appartenance est *un homomorphisme* de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{E}$; plus précisément, vu la deuxième définition de $\mathcal{E}_0$, c'est un homomorphisme de $\mathcal{O}$ sur $\mathcal{E}_0$; son noyau $\mathcal{G}$ *est l'idéal que constituent les classes d'homologie de l'intérieur de* O *dont les cycles sont homologues à zéro dans* E.

Remarque 1. — L'intersection d'un élément de $\mathcal{O}$ par un élément de $\mathcal{G}$ est toujours nulle : soit Z^p un cycle de E tel que $|Z^p| \subset O$; un élément de $\mathcal{G}$ est un ensemble de cycles de E du type $\dot{L}^q$; or $\dot{L}^q.Z^p = (L^q.Z^p)^{\cdot}$ et $|L^q.Z^p| \subset O$; $L^q.Z^p$ est donc bien homologue à zéro à l'intérieur de O.

Remarque 2. — L'hypothèse que E est normal et la notion de prolongement d'une couverture (n° **26**) permettent d'identifier les formes de E dont le support appartient à O et les formes de O dont le support est un ensemble fermé de points de E. D'où la proposition suivante : soient O′ et O″ deux ensembles ouverts de points de deux espaces normaux E′ et E″; faisons l'hypothèse :

(*h*) il existe une représentation topologique de O′ sur O″ qui transforme les ensembles de points de O′ qui sont fermés dans E′ en ensembles fermés dans E″, et *vice versa*;

alors les anneaux d'homologie $\mathcal{O}'$ et $\mathcal{O}''$ de l'intérieur de O′ et de l'intérieur de O″ sont isomorphes. L'hypothèse (h) est vérifiée par exemple dans les deux cas suivants :

a. il existe une représentation topologique de la fermeture $\overline{O'}$ de O′ sur la fermeture $\overline{O''}$ de O″ qui représente O′ sur O″ (1);

b. E′ et E″ sont bicompacts; O′ et O″ sont homéomorphes.

48. Dérivée dans E d'une classe d'homologie de F. — Le lemme 12 (nº **26**) et le théorème 1 (nº **18**) ont pour corollaire immédiat le lemme suivant :

Lemme 23. — *Étant donnée une classe d'homologie z^p de* F, *il existe une forme* L^p *de* E *telle que* $z^p \sim L^p . F$.

Ceci dit, supposons que nous ayons

$$z^p \sim L^{p,1}.F \sim L^{p,2}.F;$$

d'après le lemme 22, il existe deux formes $L^{p,0}$ et L^{p-1} de E telles que

$$L^{p,2} = L^{p,1} + \dot{L}^{p-1} + L^{p,0}, \qquad |L^{p,0}| \subset O;$$

d'où

$$\dot{L}^{p,2} = \dot{L}^{p,1} + \dot{L}^{p,0}, \qquad |\dot{L}^{p,1}| + |\dot{L}^{p,2}| + |L^{p,0}| \subset O.$$

$\dot{L}^{p,1}$ et $\dot{L}^{p,2}$ appartiennent donc à une même classe d'homologie de l'intérieur de O; cette classe est d'ailleurs un élément de $\mathcal{G}$; nous la nommerons *dérivée dans* E *de la classe* z^p.

Cette dérivation est *un homomorphisme de* $\mathcal{F}$ *sur* $\mathcal{G}$ qui respecte les relations linéaires, mais qui augmente la dimension d'une unité et ne peut donc pas respecter la loi d'intersection. Son noyau est constitué par les classes d'homologie z^p de F telles qu'il existe un cycle Z^p de E vérifiant la relation $z^p \sim Z^p . F$; ce noyau est donc $\mathcal{F}_E$.

Tous les résultats qu'énonce le nº **45** sont maintenant établis.

49. Cas où les coefficients constituent un corps. — Supposons que les coefficients soient les nombres rationnels ou les entiers mod m, m étant premier. $\mathcal{A}$ étant l'un quelconque des six anneaux $\mathcal{E}$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}_E$, soit $\rho_p(\mathcal{A})$ le rang du groupe additif que constituent les éléments de dimension p de cet anneau; posons

$$\varepsilon_p = \rho_p(\mathcal{E}), \qquad \varphi_p = \rho_p(\mathcal{F}), \qquad \omega_p = \rho_p(\mathcal{O}) \qquad \text{et} \qquad \gamma_p = \rho_p(\mathcal{G});$$

(1) Nous rencontrerons de telles circonstances en étudiant l'invariance du domaine (3e partie, nº **95**).

ε_p et φ_p sont donc les $p^{\text{ièmes}}$ nombres de Betti de E et de F. Les relations (1), (2), (3) nous donnent

$$\varepsilon_p = \rho_p(\mathcal{F}_E) + \rho_p(\mathcal{E}_0), \qquad \rho_p(\mathcal{E}_0) = \omega_p - \gamma_p, \qquad \rho_p(\mathcal{F}_E) = \varphi_p - \gamma_{p+1},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\varepsilon_p = \varphi_p + \omega_p - \gamma_p - \gamma_{p+1}, \qquad 0 \leqq \gamma_p, \qquad \gamma_p \leqq \omega_p, \qquad \gamma_p \leqq \varphi_{p-1}.} \tag{4}$$

Les relations (4) peuvent servir de base à la théorie du calcul des variations de M. Maston Morse ([1]) et permettent même d'élargir cette théorie.

Remarque. — On déduit de (4) la relation

$$\sum_p (-1)^p \varepsilon_p = \sum_p (-1)^p \varphi_p + \sum_p (-1)^p \omega_p$$

qui permet de comparer les caractéristiques d'Euler de E et F, quand elles existent.

50. Cas où F décompose E en plusieurs domaines. — Supposons que O soit la réunion de deux ensembles ouverts disjoints O′ et O″; $\mathcal{O}$ est alors la somme directe des anneaux d'homologie $\mathcal{O}'$ et $\mathcal{O}''$ de l'intérieur de O′ et de O″; l'intersection d'un élément de $\mathcal{O}'$ par un élément de $\mathcal{O}''$ est toujours nulle. Les éléments de $\mathcal{G}$ qui font partie de $\mathcal{O}'$ constituent un idéal $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{O}'$. Les éléments de $\mathcal{F}$ dont la dérivée dans E est un élément de $\mathcal{G}'$ sont les classes d'homologie de F contenant un cycle du type $L^p.F$, $|\dot{L}^p| \subset O'$; ils constituent *un sous-anneau* $\mathcal{F}'$ *de* $\mathcal{F}$: en effet l'hypothèse $|\dot{L}^p| + |\dot{L}^q| \subset O'$ entraîne $|(L^p.L^q)^{\cdot}| \subset O'$.

Remarque. — Les composantes de O sont des domaines D_α; soit $\mathcal{O}_\alpha$ l'anneau d'homologie de D_α. Supposons E *bicompact* : tout ensemble de points de O qui est fermé dans E appartient à un nombre fini de D_α; tout élément Z^p de $\mathcal{O}$ peut donc être mis d'une manière et d'une seule sous la forme $Z^p \sim \sum_\alpha Z^{p,\alpha}$, où $Z^{p,\alpha} \subset \mathcal{O}_\alpha$, cette somme ne contenant qu'un nombre fini de termes non nuls. En d'autres termes $\mathcal{O}$ *est la somme directe des* $\mathcal{O}_\alpha$.

II. — Cas particuliers remarquables.

51. E est simple ($F \neq E$). — D'après les définitions posées au n° **46**, $\mathcal{E}_0$ est vide, $\mathcal{F}_E$ est l'ensemble des classes AF^0 (A : coefficient quelconque; F^0 : classe unité de F). D'après (2) $\mathcal{O}$ et $\mathcal{G}$ sont identiques. Donc la relation (3) s'écrit

$$\mathcal{F}/\mathcal{F}_E \simeq \mathcal{O}, \qquad \text{où } \mathcal{F}_E \text{ est l'ensemble des classes } AF^0. \tag{5}$$

[1] *Mémorial des Sciences mathématiques*, t. 92.

Cette relation permet :

1° étant donné $\mathcal{F}$, d'en déduire la structure de $\mathcal{O}$ (vu que, d'après la remarque 1 du n° **47**, l'intersection de deux éléments de $\mathcal{O}$ est toujours nulle);

2° étant donné $\mathcal{O}$, d'en déduire la structure de $\mathcal{F}$, hormis la loi d'intersection des éléments de cet anneau.

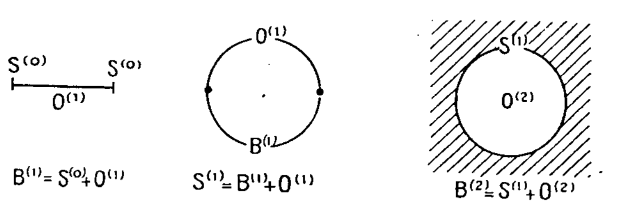
Remarque 1. — Les éléments de dimension nulle mis à part, $\mathcal{F}/\mathcal{F}_E$ est alors un anneau; il est possible de définir, dans $\mathcal{O}$, une loi de multiplication telle que $\mathcal{F}/\mathcal{F}_E$ et $\mathcal{O}$ soient isomorphes : c'est la multiplication de M. Gordon (*cf.* : n° **45**, rem.).

Remarque 2. — La relation (5) constitue une généralisation du *théorème de dualité d'Alexander* (A.-H., chap. XI) : ce théorème suppose que E est une boule et que F est un polyèdre; $\mathcal{O}$ est alors identique au groupe de Betti de O (n° **66**), tandis que le groupe de Betti de F est le groupe des caractères de $\mathcal{F}$ (n° **35**); d'où, par l'intermédiaire de (5), la relation de dualité entre les groupes de Betti de O et de F qu'exprime le théorème de dualité d'Alexander.

52. F EST SIMPLE. — $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_E$ sont tous deux identiques à l'ensemble des classes AF^0; donc, d'après (3), $\mathcal{G}$ est nul; d'après (2) $\mathcal{O} \cong \mathcal{E}_0$; d'après (1) $\mathcal{E}/\mathcal{E}_0$ est isomorphe à l'anneau que constituent les classes AF^0; la structure de $\mathcal{O}$ détermine celle de $\mathcal{E}$ et *vice versa*.

Application. — Les conclusions des n^{os} **51** et **52** et la remarque 2 du n° **47** permettent de déterminer par récurrence l'anneau d'homologie de la *sphère* (¹) à n dimensions $S^{(n)}$ (d'équation $x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$) et de *l'intérieur* $O^{(n)}$ *de la boule* $B^{(n)}$ à n dimensions (équation de $O^{(n)}$: $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 < 1$; de $B^{(n)}$: $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1$). Supposons prouvé, par récurrence, que l'anneau d'homologie de $S^{(n-1)}$ se compose des classes AZ^0 et AZ^{n-1}; puisque (*fig.* 9)

Fig. 9.



$B^{(n)} = S^{(n-1)} + O^{(n)}$ et que $B^{(n)}$ est simple (th. 6), d'après le n° **51** l'anneau d'homologie de $O^{(n)}$ se compose des classes AZ^n. D'autre part $S^{(n)} = B^{(n)} + O^{(n)}$, donc, d'après le n° **52**, l'anneau d'homologie de $S^{(n)}$ se compose des classes AZ^0 et AZ^n.

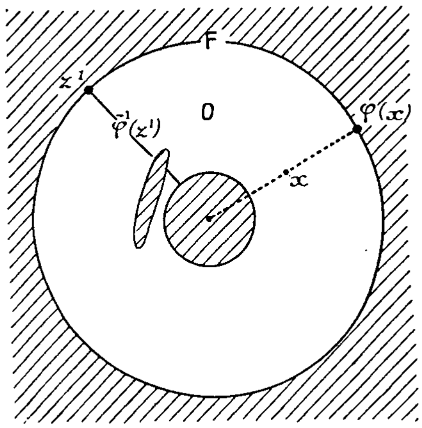
C. Q. F. D.

(¹) Le n° **29** a déterminé, par un autre procédé, l'anneau d'homologie de la sphère.

53. F EST UN RÉTRACTE DE E (*fig.* 10).

THÉORÈME 18. — *Supposons qu'il existe une représentation $\varphi(x)$ de E sur F qui soit l'identité sur F; alors $\mathcal{E}$ est la somme directe de l'idéal $\mathcal{E}_0$, qui est isomorphe à $\mathcal{O}$, et d'un sous-anneau $\overset{-1}{\varphi}(\mathcal{F})$, qui est isomorphe à $\mathcal{F}$; $\mathcal{F}_E$ est identique à $\mathcal{F}$.*

Fig. 10.



Démonstration. — Soit z^p une classe d'homologie arbitraire de F; d'après la remarque 1 du n° **14**, on a

$$\overset{-1}{\varphi}(z^p).\mathrm{F} \sim z^p; \tag{6}$$

(6) prouve que $\mathcal{F}_E$ est identique à $\mathcal{F}$; donc, d'après (3), $\mathcal{G}$ est nul; et, d'après (2), $\mathcal{O} \cong \mathcal{E}_0$. En outre (6) prouve que $\overset{-1}{\varphi}$ transforme $\mathcal{F}$ en un sous-anneau de $\mathcal{E}$, $\overset{-1}{\varphi}(\mathcal{F})$, qui est isomorphe à $\mathcal{F}$.

Soit maintenant Z^p une classe d'homologie de E qui soit somme d'un élément de $\mathcal{E}_0$ et d'un élément de $\overset{-1}{\varphi}(\mathcal{F})$:

$$Z^p \sim Z^{p,0} + \overset{-1}{\varphi}(z^p), \qquad \text{où } |Z^{p,0}| \subset \mathrm{O}; \tag{7}$$

alors $Z^p.\mathrm{F} \sim \overset{-1}{\varphi}(z^p).\mathrm{F}$, c'est-à-dire, compte tenu de (6), $Z^p.\mathrm{F} \sim z^p$; d'où, vu la remarque 2 du n° **14**, $\overset{-1}{\varphi}(z^p) \sim \overset{-1}{\varphi}(Z^p)$; en résumé, toute décomposition du type (7) est nécessairement du type

$$Z^p \sim \left[Z^p - \overset{-1}{\varphi}(Z^p)\right] + \overset{-1}{\varphi}(Z^p). \tag{8}$$

Réciproquement soit Z^p une classe d'homologie arbitraire de E.

D'une part $\overset{-1}{\varphi}(Z^p) \sim \overset{-1}{\varphi}(z^p)$, où $z^p \sim Z^p.\mathrm{F}$, est un élément de $\overset{-1}{\varphi}(\mathcal{F})$.

D'une part $[Z^p - \overset{-1}{\varphi}(Z^p)].F \sim z^p - \overset{-1}{\varphi}(z^p).F \sim o$, vu (6); donc $Z^p - \overset{-1}{\varphi}(Z^p)$ est un élément de $\mathcal{E}_0$.

$\mathcal{E}$ est donc bien la somme directe de $\mathcal{E}_0$ et $\overset{-1}{\varphi}(\mathcal{F})$.

54. E EST BICOMPACT ET HOMOTOPE A F DANS E. — Supposons en outre que E soit bicompact et que φ soit homotope à la transformation identique de E en lui-même; alors, d'après le corollaire 5_2 (n° **20**), $\overset{-1}{\varphi}(Z^p) \sim Z^p$; donc $\mathcal{E}_0$ est nul, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont isomorphes. Nous énoncerons comme suit cette conclusion :

Définition. — On dit que E est homotope à F dans E quand il existe une représentation $\varphi(x)$ de E sur F qui possède les propriétés suivantes :

$\varphi(x) = x$ quand $x \in F$;

$\varphi(x)$ est homotope dans E à la représentation identique de E en lui-même.

THÉORÈME 19. — *Si* E *est normal, bicompact et homotope à* F *dans* E, *alors* $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{F}$ *sont isomorphes*, $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{O}$ *et* $\mathcal{G}$ *sont nuls, l'intersection par* F *et* $\overset{-1}{\varphi}$ *sont deux isomorphismes inverses l'un de l'autre de* $\mathcal{E}$ *sur* $\mathcal{F}$ *et de* $\mathcal{F}$ *sur* $\mathcal{E}$.

55. COMPARAISON DES NOMBRES DE LEFSCHETZ DE E ET F. — [Le théorème 25, (n° **78**) utilise les conclusions de ce numéro-ci]. Soit $\xi(x)$ une représentation de E dans E telle que $\xi(F) \subset F$. Les coefficients utilisés étant les *nombres rationnels*, supposons que $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{F}$ *ont des bases finies*; désignons par $\mathcal{A}^p$ le groupe additif que constituent les éléments de dimension p d'un anneau hétérogène $\mathcal{A}$; $\mathcal{E}^p$ et $\mathcal{F}^p$ sont donc, par hypothèse, des modules (A.-H., *Anhang* I, § 2; nous utilisons les coefficients rationnels, tandis que A.-H. utilise des coefficients entiers); les relations (1), (2), (3) prouvent que $\mathcal{E}_0^p$, $\mathcal{F}_E^p$, $\mathcal{G}^p$ et $\mathcal{O}^p$ sont de même des modules, nuls à partir d'une certaine valeur de p. De l'hypothèse $\xi(F) \subset F$ résulte aisément que $\overset{-1}{\xi}$ définit un automorphisme de chacun des modules $\mathcal{E}^p$, $\mathcal{F}^p$, $\mathcal{O}^p$, $\mathcal{E}_0^p$, $\mathcal{F}_E^p$ et $\mathcal{G}^p$; nommons $T(\mathcal{E}^p)$, $T(\mathcal{F}^p)$, ... les traces respectives de ces automorphismes; un théorème classique (A.-H., *Anhang* I, § 2, n° **27**) permet de déduire de (1), (2), (3) les relations

$$T(\mathcal{E}^p) = T(\mathcal{F}_E^p) + T(\mathcal{E}_0^p); \qquad T(\mathcal{E}_0^p) = T(\mathcal{O}^p) - T(\mathcal{G}^p); \qquad T(\mathcal{F}_E^p) = T(\mathcal{F}^p) - T(\mathcal{G}^{p+1}),$$

d'où résultent les relations analogues à (4), qui s'identifient à (4) quand $\xi(x)$ est la transformation identique

$$T(\mathcal{E}^p) = T(\mathcal{F}^p) + T(\mathcal{O}^p) - T(\mathcal{G}^p) - T(\mathcal{G}^{p+1}). \tag{9}$$

Par définition [1] le nombre de Lefschetz $\Lambda_\xi(E)$ de la transformation $\xi(x)$

[1] *Cf.* n° **41**, formule (60); les autres définitions du nombre de Lefschetz qu'indique le n° **41** ne sont utilisables que moyennant des hypothèses plus étroites que celles que nous faisons ici.

envisagée sur E est $\sum_p (-1)^p \mathrm{T}(\mathcal{E}^p)$; $\sum_p (-1)^p \mathrm{T}(\mathcal{F}^p)$ est le nombre de Lefschetz $\Lambda_\xi(\mathrm{F})$ de la transformation $\xi(x)$ envisagée sur F; d'où

$$\Lambda_\xi(\mathrm{E}) = \Lambda_\xi(\mathrm{F}) + \sum_p (-1)^p \mathrm{T}(\mathcal{O}^p). \tag{10}$$

Posons

$$\overset{2}{\xi}(x) = \xi(\xi(x)), \quad \ldots, \quad \overset{n}{\xi}(x) = \overset{n-1}{\xi}(\xi(x));$$

soit $\overset{-n}{\xi}(x)$ la transformation inverse de $\overset{n}{\xi}(x)$; on a

$$\overset{n-1}{\xi}(\mathrm{E}) \supset \overset{n}{\xi}(\mathrm{E});$$

posons

$$f = \prod_n \overset{n}{\xi}(\mathrm{E});$$

on a

$$f = \overset{\pm n}{\xi}(f).$$

Supposons que E soit un espace de Hausdorff *bicompact*; alors f est fermé (A.-H., chap. I, § 2, th. II); $f = \lim_{n \to +\infty} \overset{n}{\xi}(\mathrm{E})$ (A.-H., chap. II, § 5, th. II); si V est un voisinage de f, $\overset{n}{\xi}(\mathrm{E}) \subset \mathrm{V}$ à partir d'une certaine valeur de n (A.-H., chap. II, § 4, th. II). Supposons enfin $f \subset \mathrm{F}$. Soit Z^p un cycle de E tel que $|\mathrm{Z}^p| \subset \mathrm{O}$; on a $|\mathrm{Z}^p| . f = 0$; il existe donc un entier positif n tel que $|\mathrm{Z}^p| . \overset{n}{\xi}(\mathrm{E}) = 0$; donc $\overset{-n}{\xi}(|\mathrm{Z}^p|) = 0$, donc $\overset{-n}{\xi}(\mathrm{Z}^p) \sim 0$. Il en résulte que $\mathrm{T}(\mathcal{O}^p) = 0$; [on le prouve en utilisant dans $\mathcal{O}^p$ une base constituée par un nombre maximum d'éléments $\mathrm{Z}^{p,\alpha}$ tels que $\overset{-1}{\xi}(\mathrm{Z}^{p,\alpha}) \sim 0$, un nombre maximum d'éléments $\mathrm{Z}^{p,\beta}$ tels que $\overset{-1}{\xi}(\mathrm{Z}^{p,\beta}) \sim \mathrm{Z}^{p,\alpha}, \ldots$; $\overset{-1}{\xi}$ transforme les $\mathrm{Z}^{p,\alpha}$ en 0, les $\mathrm{Z}^{p,\beta}$ en les $\mathrm{Z}^{p,\alpha}, \ldots$]. De même $\mathrm{T}(\mathcal{G}^p) = 0$ et $\mathrm{T}(\mathcal{E}^p_0) = 0$. Les relations (9) et (10) se réduisent à $\mathrm{T}(\mathcal{E}^p) = \mathrm{T}(\mathcal{F}^p)$, $\Lambda_\xi(\mathrm{E}) = \Lambda_\xi(\mathrm{F})$. En résumé :

Théorème 20. — *Soit un espace de Hausdorff bicompact* E; *soit* $\xi(x)$ *une représentation en lui-même de* E; *soit* $f = \prod_n \overset{n}{\xi}(\mathrm{E}) = \lim_{n \to +\infty} \overset{n}{\xi}(\mathrm{E})$; *soit* F *un ensemble fermé de points de* E *tel que*

$$f + \xi(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}.$$

Utilisons les coefficients rationnels; supposons que les anneaux d'homologie de E *et* F *aient des bases finies. Soient* $\mathrm{T}(\mathcal{E}^p)$ *et* $\mathrm{T}(\mathcal{F}^p)$ *les traces des automorphismes de* $\mathcal{E}^p$ *et* $\mathcal{F}^p$ *que définit* $\overset{-1}{\xi}$; *soient* $\Lambda_\xi(\mathrm{E})$ *et* $\Lambda_\xi(\mathrm{F})$ *les nombres de Lefschetz de* ξ *envisagé sur* E, *puis sur* F.

On a

$$T(\mathcal{E}^p) = T(\mathcal{F}^p); \tag{11_1}$$

$$\Lambda_\xi(E) = \Lambda_\xi(F). \tag{11_2}$$

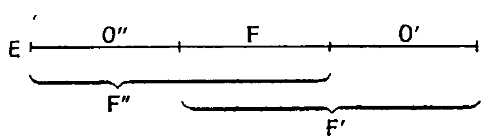
Remarque. — Quand F vérifie la relation $f + \xi(F) \subset F$ (par exemple quand $F = f$) mais n'a pas de base d'homologie finie, il est donc naturel de *définir* $T(\mathcal{F}^p)$ et $\Lambda_\xi(F)$ comme étant égaux à $T(\mathcal{E}^p)$ et $\Lambda_\xi(E)$. (*Cf.* théorème 25, rem. 2, n° **78**).

COROLLAIRE 20. — *Si* $\overset{n}{\xi}(E)$ *converge vers un point quand* $n \to +\infty$, *alors* $T(\mathcal{E}^p) = 0$ *pour* $p > 0$ *et* $\Lambda_\xi(E) = 1$.

III. — L'anneau d'homologie de la réunion de deux ensembles fermés.

Soient deux ensembles fermés F' et F'' de points d'un espace *normal* E, tels que $F' + F'' = E$. Ce paragraphe III est une *digression* ayant pour objet la comparaison des anneaux d'homologie $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}''$ et $\mathcal{F}$ et des nombres de Betti ε_p, φ'_p, φ''_p et φ_p de E, F', F'' et $F = F'.F''$.

Fig. 11.



56. UNE PREMIÈRE DÉMONSTRATION DE LA FORMULE DE MAYER-VICTORIS. — L'application de la relation (4) à la figure (E, F'') puis à la figure (F', F) donne

$$\varepsilon_p = \varphi''_p + \omega'_p - \gamma_p - \gamma_{p+1},$$
$$\varphi'_p = \varphi_p + \omega'_p - \Gamma_p - \Gamma_{p+1}$$

(ω'_p a la même valeur dans ces deux relations en vertu de la remarque 2 du n° **47**); d'où, en retranchant membre à membre ces deux relations et en posant $\nu_p = \Gamma_p - \gamma_p$,

$$\varepsilon_p = \varphi'_p + \varphi''_p - \varphi_p + \nu_p + \nu_{p+1}; \tag{12}$$

nous verrons qu'on peut compléter cette relation par les trois inégalités

$$0 \leqq \nu_p, \qquad \nu_p \leqq \varphi_{p-1}, \qquad \nu_p \leqq \varepsilon_p; \tag{13}$$

dont les deux premières résultent d'ailleurs aisément du paragraphe I.

La relation (12), ainsi complétée par les inégalités (13), constitue la formule de Mayer-Victoris : le paragraphe II du Chapitre VII de A.-H. établit cette formule dans le cas où F′ et F″ sont des polyèdres [1]; notre démonstration suppose seulement que E est un espace topologique normal.

On peut plus généralement appliquer les conclusions du paragraphe I aux cinq figures (E, F), (E, F′), (E, F″), (F′, F), (F″, F). Mais on n'obtient pas ainsi toutes les relations existant entre les anneaux d'homologie des ensembles entrant en jeu. L'objet de ce paragraphe III est de définir trois homomorphismes, qui sont duals des trois homomorphismes que A.-H. utilise pour démontrer la formule de Mayer-Victoris et qui jouissent de propriétés analogues à celles des trois homomorphismes qu'utilise le paragraphe I; nous désignerons chacun des anneaux que nous utiliserons par la lettre qui désigne dans A.-H. son dual.

57. Énoncé des résultats. — Nous envisagerons les invariants topologiques suivants de la figure que constituent F′ et F″ :

l'*anneau* d'homologie $\mathcal{E}$ de E;

la *somme directe* $\mathcal{F}'+\mathcal{F}''$ *des anneaux* d'homologie $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ de F′ et F″; un élément (Z'^p, Z''^p) de $\mathcal{F}'+\mathcal{F}''$ est constitué par un élément de $\mathcal{F}'$ et un élément de $\mathcal{F}''$ de même dimension; on pose

$$A(Z'^p, Z''^p) \sim (AZ'^p, AZ''^p),$$
$$(Z'^{p,1}, Z''^{p,1}) + (Z'^{p,2}, Z''^{p,2}) \sim (Z'^{p,1}+Z'^{p,2}, Z''^{p,1}+Z''^{p,2}),$$
$$(Z'^p, Z''^p).(Z'^q, Z''^q) \sim (Z'^p.Z'^q, Z''^p.Z''^q);$$

l'*anneau* d'homologie $\mathcal{F}$ de $F = F'.F''$;

un *homomorphisme* de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}'+\mathcal{F}''$ (l'image de $\mathcal{E}$ est le sous-anneau $\mathcal{S}$ de $\mathcal{F}'+\mathcal{F}''$) (n° **57**);

un *homomorphisme* de $\mathcal{F}'+\mathcal{F}''$ dans $\mathcal{F}$ (l'image de $\mathcal{F}'+\mathcal{F}''$ est le sous-groupe $\mathcal{V}$ de $\mathcal{F}$) (n° **58**);

un *homomorphisme* de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{E}$ (l'image de $\mathcal{F}$ est l'idéal $\mathcal{N}$ de $\mathcal{E}$) (n° **59**);

les 2ᵉ et 3ᵉ homomorphismes ne respectent pas la loi d'intersection;

le 3ᵉ augmente la dimension d'une unité.

Les noyaux respectifs de ces trois homomorphismes sont $\mathcal{N}$, $\mathcal{V}$ et $\mathcal{S}$; nous avons donc les trois isomorphismes

$$\boxed{(14)\quad \mathcal{E}/\mathcal{N} \cong \mathcal{S}; \qquad (15)\quad \mathcal{F}'+\mathcal{F}''/\mathcal{S} \simeq \mathcal{V}; \qquad (16)\quad \mathcal{F}/\mathcal{V} \simeq \mathcal{N};}$$

(14) est un isomorphisme d'anneaux, alors que les premiers membres de (15) et (16) ne sont que des groupes hétérogènes.

Une seconde démonstration de la formule de Mayer-Victoris résulte des relations (14), (15) et (16) : supposons que les coefficients constituent un corps;

---

[1] *Voir* aussi A.-H., *Anhang zum* 11ᵗᵉⁿ *Kapitel.*

nommons $\rho_p(\mathcal{A})$ le rang du groupe que forment les éléments à p dimensions de $\mathcal{A}$; posons $\nu_p = \rho_p(\mathcal{N})$; nous déduisons de ces trois relations les trois formules

$$\varepsilon_p = \nu_p + \rho_p(\mathcal{S}); \qquad \rho_p(\mathcal{S}) = \varphi'_p + \varphi''_p - \rho_p(\mathcal{V}); \qquad \rho_p(\mathcal{V}) = \varphi_p - \nu_{p-1},$$

qui équivalent à l'ensemble des relations (12) et (13).

Nota. — Utilisons les notations du paragraphe I : par exemple $\mathcal{E}_{0'}$ sera l'idéal que constituent les classes d'homologie de E contenant chacune un cycle Z^p tel que $|Z^p| \subset O' = F' - F = E - F''$. Utilisons les symboles $\cap$ et $\cup$ pour l'intersection et la somme de deux sous-groupes [1]; nous aurons

$$\mathcal{N} = \mathcal{E}_{0'} \cap \mathcal{E}_{0''}; \qquad \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_{0'} \cup \mathcal{E}_{0''}; \qquad \mathcal{F}_E = \mathcal{F}_{F'} \cap \mathcal{F}_{F''}; \qquad \mathcal{V} = \mathcal{F}_{F'} \cup \mathcal{F}_{F''}.$$

38. Intersection par F' et par F'' d'une classe d'homologie de E. — Associons à chaque classe d'homologie Z^p de E l'élément $(Z^p.F', Z^p.F'')$ de $\mathcal{F}' + \mathcal{F}''$; nous définissons ainsi *un homomorphisme* de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}' + \mathcal{F}''$. Le noyau de cet homomorphisme est évidemment l'idéal $\mathcal{N} = \mathcal{E}_{0'} \cap \mathcal{E}_{0''}$. Nous nommerons $\mathcal{S}$ le transformé de $\mathcal{E}$ par cet homomorphisme : *$\mathcal{S}$ est le sous-anneau de $\mathcal{F}' + \mathcal{F}''$ que constituent les éléments* $(Z^p.F', Z^p.F'')$.

L'hypothèse que E est normal et que F' et F'' sont fermés permet d'établir le lemme suivant :

Lemme 24. — *Étant donnés un cycle Z'^p de F' et un cycle Z''^p de F'', pour qu'il existe un cycle Z^p de F tel que*

$$(17) \qquad Z'^p \sim Z^p.F' \quad \text{dans } F' \qquad \text{et} \qquad Z''^p \sim Z^p.F'' \quad \text{dans } F'',$$

il faut et il suffit que

$$(18) \qquad Z'^p.F \sim Z''^p.F \quad \text{dans } F.$$

Nota. — Ce lemme a pour corollaire immédiat la formule

$$\mathcal{F}_E = \mathcal{F}_{F'} \cap \mathcal{F}_{F''}.$$

Démonstration. — Les relations (17) entraînent les relations

$$Z'^p.F \sim Z^p.F \qquad \text{et} \qquad Z''^p.F \sim Z^p.F,$$

donc la relation (18).

Réciproquement soient un cycle Z'^p de F' et un cycle Z''^p de F'' vérifiant (18). D'après le lemme 23 il existe des formes de E, L'^p et L''^p, telles que

$$Z'^p \sim L'^p.F \qquad \text{et} \qquad Z''^p \sim L''^p.F;$$

---

[1] La somme de deux sous-groupes d'un groupe abélien est le plus petit sous-groupe les contenant.

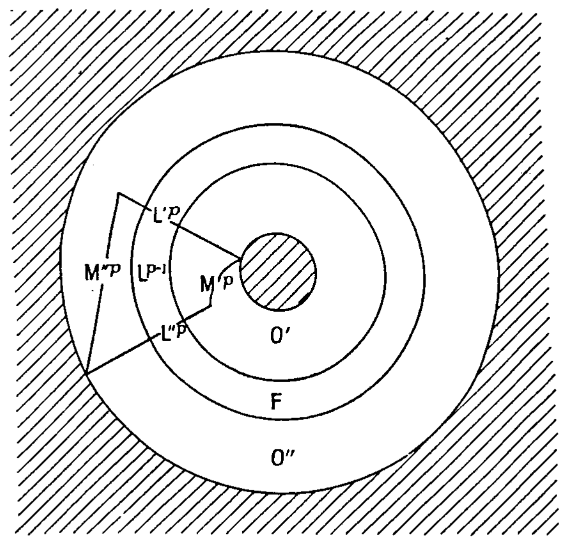
(18) s'écrit $L'^p.F \sim L''^p.F$; donc, d'après le lemme 22, il existe des formes L^{p-1} et M^p de E telles que

$$L'^p - L''^p = \dot{L}^{p-1} + M^p, \qquad \text{où } |M^p| \subset O' + O'';$$

on peut effectuer une décomposition $M^p = M'^p - M''^p$, $|M'^p| \subset O'$, $|M''^p| \subset O''$; on a

$$L'^p + M''^p \sim L''^p + M'^p \quad \text{dans E.}$$

Fig. 12.



La forme $Z^p = L'^p + M''^p$ vérifie les relations

$$Z^p.F' \sim L'^p.F' \sim Z'^p \qquad \text{et} \qquad Z^p.F'' \sim (L''^p + M'^p).F'' \sim L''^p.F'' \sim Z''^p,$$

c'est-à-dire les relations (17); ces relations exigent que $\dot{Z}^p.F' = 0$ et que $\dot{Z}^p.F'' = 0$, donc que $\dot{Z}^p = 0$: Z^p est un cycle de E vérifiant les relations (17).

C. Q. F. D.

Ce lemme 24 permet de donner *la deuxième définition de* $\mathcal{S}$ que voici : *$\mathcal{S}$ est le sous-anneau de $\mathcal{F}' + \mathcal{F}''$ que constituent les éléments* (Z'^p, Z''^p) *tels que* $Z'^p.F \sim Z''^p.F$ dans F.

39. Intersection par F d'un élément de $\mathcal{F}' + \mathcal{F}''$. — Associons à chaque élément (Z'^p, Z''^p) de $\mathcal{F}' + \mathcal{F}''$ l'élément $Z'^p.F - Z''^p.F$ de $\mathcal{F}$; nous définissons ainsi *un homomorphisme* de $\mathcal{F}' + \mathcal{F}''$ dans $\mathcal{F}$ qui respecte la dimension et les relations linéaires, mais qui ne respecte pas la loi d'intersection. Son noyau est $\mathcal{S}$ (*cf.* 2e définition de $\mathcal{S}$). Le transformé de $\mathcal{F}' + \mathcal{F}''$ par cet homomorphisme est le sous-groupe $\mathcal{V}$ de $\mathcal{F}$ que constituent les éléments

$$Z'^p.F + Z''^p.F \qquad (Z'^p \in \mathcal{F}', Z''^p \in \mathcal{F}'');$$

$\mathcal{V}$ est la somme de $\mathcal{F}_{F'}$ et $\mathcal{F}_{F''}$.

60. Dérivée dans E des classes d'homologie de F. — Soit z^p une classe d'homologie de F; sa dérivée dans E est la somme d'une classe d'homologie Z'^{p+1} de l'intérieur de O′ et d'une classe d'homologie Z''^{p+1} de l'intérieur de O″; Z'^{p+1} et $-Z''^{p+1}$ appartiennent à un même élément de l'idéal $\mathfrak{N} = \mathcal{E}_{0'} \cap \mathcal{E}_{0''}$; la correspondance entre z^p et cet élément de $\mathfrak{N}$ est *un homomorphisme* de $\mathcal{F}$ sur $\mathfrak{N}$ qui respecte les relations linéaires, mais qui, augmentant la dimension d'une unité, ne peut respecter la loi d'intersection. Prouvons que son noyau est $\mathcal{V}$.

Il est évident qu'à z^p correspond l'élément nul de $\mathfrak{N}$ lorsque $z^p \in \mathcal{F}_{F'}$ ou lorsque $z^p \in \mathcal{F}_{F''}$, donc lorsque $z^p \in \mathcal{V} = \mathcal{F}_{F'} \cup \mathcal{F}_{F''}$.

Réciproquement, si à un élément z^p de $\mathcal{F}$ correspond l'élément nul de $\mathcal{V}$, c'est qu'il existe des formes L^p, L'^p et L''^p de E telles que

$$z^p \sim L^p.F; \qquad L^p = L'^p + L''^p; \qquad |\dot{L}'^p| \subset O'; \qquad |\dot{L}''^p| \subset O'';$$

$L''^p.F'$ est un cycle de F′ que nous nommerons Z'^p et $L'^p.F''$ est un cycle de F″ que nous nommerons Z''^p; on a

$$z^p \sim Z'^p.F + Z''^p.F \in \mathcal{V}.$$

Tous les résultats qu'énonce le n° **57** sont établis.

IV. — Les pseudocycles.

Pour déterminer effectivement l'anneau d'homologie d'un espace, on utilise les théorèmes 4, 5, 6, 7, 12 et 19, qui supposent cet espace normal et bicompact. La structure des anneaux d'homologie des espaces non bicompacts les plus élémentaires est sans doute compliquée : un segment de droite ouvert possède des cycles non homologues à zéro de dimension 1. L'anneau des pseudocycles d'un espace ne présentera pas ces inconvénients; il jouera par ailleurs aux Chapitres VII et VIII un rôle fondamental.

Nota. — L'anneau des pseudocycles est vraisemblablement identique au « groupe de Betti supérieur, interne » de M. Alexandroff.

61. Les pseudocycles d'un espace topologique. — *Définition.* — Nous nommerons *pseudocycle* à p dimensions d'un espace topologique E tout opérateur Z^p qui associe à chaque ensemble normal et bicompact B de points de E une classe d'homologie de B, que nous nommerons $Z^p.B$, en sorte que la condition suivante soit vérifiée : si b est un ensemble fermé de points de B, on a $Z^p.b \sim (Z^p.B).b$ dans b. Pour exprimer que $Z^p.B \sim 0$ quel que soit B nous écrirons $Z^p \sim 0$.

Exemples. — Si E est normal et bicompact, le pseudocycle Z^p sera identifié à la classe d'homologie $Z^p.E$ de E. Sinon, toute classe d'homologie $Z^{p,c}$ de E définit un pseudocycle $Z^{p,\psi}$ de E tel que $Z^{p,\psi}.B \sim Z^{p,c}.B$ quel que soit B; (cette correspondance entre $Z^{p,c}$ et $Z^{p,\psi}$ constitue un homomorphisme de l'anneau d'homologie de E dans « l'anneau des pseudocycles de E »); mais on peut avoir $Z^{p,c} \not\sim 0$ et $Z^{p,\psi} \sim 0$ (par exemple quand E est un segment de droite ouvert) et tout pseudocycle $Z^{p,\psi}$ ne correspond pas nécessairement à une classe d'homologie $Z^{p,c}$.

La détermination des pseudocycles à 0 dimension est aisée : E est la réunion d'ensembles e_α deux à deux disjoints ayant la propriété suivante : pour que deux points de E fassent partie d'un même e_α il faut et il suffit qu'ils fassent partie d'un même ensemble normal, bicompact et connexe de points de E; soit $Z^{0,\alpha}$ le pseudocycle à 0 dimension qui est défini comme suit : $Z^{0,\alpha}.B \sim B^0$ si $B \subset e_\alpha$; $Z^{0,\alpha}.B \sim 0$ si $B.e_\alpha = 0$; le pseudocycle de E à 0 dimension le plus général est $\sum_\alpha A_\alpha Z^{0,\alpha}$.

Opérations sur les pseudocycles. — $Z^{p,1}$ et $Z^{p,2}$ étant deux pseudocycles de E, A_1 et A_2 étant deux coefficients, $A_1 Z^{p,1} + A_2 Z^{p,2}$ sera le pseudocycle de E que définit la relation

$$(A_1 Z^{p,1} + A_2 Z^{p,2}).B \sim A_1 Z^{p,1}.B + A_2 Z^{p,2}.B.$$

Soient Z^p et Z'^q deux pseudocycles de deux espaces de Hausdorff E et E'; nous définirons le pseudocycle $Z^p \times Z'^q$ de $E \times E'$ par la relation

$$(Z^p \times Z'^q).B \sim [(Z^p.b) \times (Z'^p.b')].B,$$

où b et b' sont les projections respectives de B sur E et sur E'.

Soient Z^p et Z'^q des pseudocycles de deux espaces topologiques E et E'; nous définirons les pseudocycles $Z^p.Z'^q$ et $Z^q.E'$ de E.E' par les relations

$$(Z^p.Z'^q).b \sim (Z^p.b).(Z'^q.b),$$
$$(Z^p.E').b \sim Z^p.b,$$

où b est un ensemble normal et bicompact arbitraire de points de E.E'. Les pseudocycles d'un espace topologique constituent donc un anneau hétérogène.

φ étant une représentation d'un espace topologique E' dans un espace de Hausdorff E et Z^p étant un pseudocycle de E, soit b' un ensemble normal et bicompact quelconque de points de E'; $\varphi(b')$ est bicompact (A.-H., Chap. II, § 2, n° 1, théor. I) et normal (A.-H., Chap. II, § 1, théor. XIII); $Z^p.\varphi(b')$ est donc une classe d'homologie de $\varphi(b')$; $\overset{-1}{\varphi}[Z^p.\varphi(b')].b'$ est une classe d'homologie de b';

nous définirons un pseudocycle $\overset{-1}{\varphi}(Z^p)$ de E′ en posant

$$\overset{-1}{\varphi}(Z^p).b' \sim \overset{-1}{\varphi}[Z^p.\varphi(b')].b'.$$

En résumé les opérations sur l'anneau d'homologie que définit le n° **14** s'appliquent aussi à l'anneau des pseudocycles des espaces de Hausdorff.

Propriétés de l'anneau des pseudocycles. — La notion de pseudocycle permet de généraliser très aisément aux espaces de Hausdorff les théorèmes 4, 5, 6 et 7, qui ne sont applicables qu'aux espaces de Hausdorff bicompacts :

Théorème 5 *bis*. — *Si $\varphi_{x''}(x')$ est une représentation de l'espace topologique* E′ *dans l'espace de Hausdorff* E, *représentation dépendant continûment du paramètre x'', qui est un point d'un espace normal, bicompact et connexe* E″, *et si Z^p est un pseudocycle de* E, *alors le pseudocycle $\overset{-1}{\varphi}_{x''}(Z^p)$ est indépendant de x''.*

Démonstration. — Soit b' un ensemble normal et bicompact de points de E′; $B = \sum_{x'' \in E''} \varphi_{x''}(b')$ est un ensemble normal et bicompact de points de E; $Z^p.B$ est un cycle de B; d'après le théorème 5 (n° **19** *bis*) $\overset{-1}{\varphi}_{x''}(Z^p.B).b'$ est une classe d'homologie de b' indépendante de x''; or $\overset{-1}{\varphi}_{x''}(Z^p).b' \sim \overset{-1}{\varphi}_{x''}(Z^p.B).b'$; donc $\overset{-1}{\varphi}_{x''}(Z^p)$ est indépendant de x''.

Ce théorème a pour corollaire le théorème 6 *bis*.

Définition. — Nous nommerons *pseudosimples* les espaces dont tous les pseudocycles sont nuls, sauf ceux que définissent la classe d'homologie unité Z^0 et ses multiples AZ^0.

Théorème 6 *bis*. — *Tout espace de Hausdorff homotope en lui-même à l'un de ses points est pseudosimple.*

Exemple. — L'intérieur de la boule est pseudosimple.

De même on obtient aisément les propositions suivantes :

Théorème 4 *bis*. — *Tout espace de Hausdorff a mêmes pseudocyles que son produit par un espace de Hausdorff pseudosimple.*

Théorème 7 *bis*. — *L'anneau des pseudocyles de* $E' \times E''$ *est le produit direct de ceux de* E′ *et de* E″, *lorsque* E′ *et* E″ *sont deux espaces de Hausdorff et que les coefficients sont les nombres rationnels.*

Soit k un complexe dont les supports sont des ensembles normaux, bicompacts et simples de points d'un espace topologique E. Soit Z^p un pseudocyle de E; $Z^p.|k|$ est un cycle de $|k|$; son intersection par un cycle z_q de k appartient (lemme 14) à une classe d'homologie de k bien déterminée, que nous représenterons par le symbole $Z^p.z_q$.

Nous verrons que le théorème 19 peut être généralisé aux pseudocycles des espaces topologiques (n° **62**). Mais ni le théorème 12, ni le théorème 2, ni par suite les théorèmes 8, 9, 10, 11, ne semblent pouvoir être généralisés de la sorte.

62. Variante aux paragraphes I, II et III de ce chapitre. — Soit F un ensemble fermé de points d'un espace topologique E; posons $O = E - F$. Désignons par $\mathcal{E}$ l'anneau des pseudocycles de E, par $\mathcal{F}$ celui des pseudocycles de F; l'intersection par F des éléments de $\mathcal{E}$ constitue *un homomorphisme* de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$; son noyau $\mathcal{E}_0$ est l'ensemble des pseudocycles Z^p de E tels que $Z^p.B$ soit homologue dans B à un cycle étranger à F.B (B étant un ensemble normal et bicompact quelconque de points de E); soit $\mathcal{F}_E$ l'image de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ par cet homomorphisme. Nommons « pseudocycle de l'intérieur de O » tout opérateur Z^p qui associe à tout ensemble normal et bicompact B de points de E une classe d'homologie $Z^p.B$ de l'intérieur de B.O (B.O étant considéré comme un sous-ensemble ouvert de B), la condition $(Z^p.B).b \sim Z^p.b$, si $b \subset B$, étant vérifiée; tout pseudocycle de l'intérieur de O appartient à un pseudocycle de E; cette appartenance est *un homomorphisme* dans $\mathcal{E}$ de l'anneau $\mathcal{O}$ des pseudocycles de l'intérieur de O; plus précisément, c'est un homomorphisme de $\mathcal{O}$ sur $\mathcal{E}_0$; son noyau $\mathcal{G}$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{O}$ qui appartiennent à l'élément nul de $\mathcal{E}$. Soit enfin z^p un pseudocycle de F; soit B un ensemble normal et bicompact quelconque de points de E; la classe d'homologie $z^p.B$ de F.B a pour dérivée dans B une classe d'homologie de l'intérieur de B.O: cette classe est l'intersection par B d'un pseudocyle de l'intérieur de O que nous nommerons « dérivée de z^p dans E »; cette dérivation est *un homomorphisme* de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{G}$; son noyau est $\mathcal{F}_E$.

De l'existence de ces trois homomorphismes découlent des conclusions analogues à celles qu'énoncent les paragraphes I et II : par exemple les relations (1), (2) et (3) existent entre les anneaux de pseudocycles que nous venons de définir; lorsque E est pseudosimple on a la relation (5), qui est une généralisation du *théorème d'Alexander*, sans doute équivalente à celle que M. Alexandroff nomme théorème de Kolmogoroff; le théorème 19 devient le théorème suivant :

Théorème 19 *bis*. — *Soient un espace de Hausdorff* E *et un ensemble fermé* F *de points de* E. *Supposons* E *homologue à* F *dans* E. [Ou plus généralement supposons qu'il existe une représentation $\varphi_{x''}(x)$ de E dans E qui possède les propriétés suivantes : $\varphi_{x''}(x)$ dépend continûment du paramètre x'' qui est un point d'un espace normal, bicompact et connexe E″; pour une valeur particulière de x'', $\varphi_{x''}(x)$ est la représentation identique de E sur E; pour une autre valeur de x'', $\varphi_{x''}(x)$ est une représentation de E dans F]. *Alors l'intersection* *par F définit un isomorphisme de l'anneau des pseudocycles de E sur l'anneau des pseudocycles de F.*

Remarque 1. — Ce théorème permet de déterminer effectivement l'anneau des pseudocyles de E lorsqu'on peut choisir F convexoïde, car alors les théorèmes 12 et 15 permettent de déterminer l'anneau d'homologie de F, qui est l'anneau des pseudocyles de F (exemple : E est l'intérieur d'une couronne, d'un tore; F sera un cercle).

Remarque 2. — Quand E est normal et bicompact, l'anneau des pseudocycles de E, de F, de l'intérieur de O..., est identique à l'anneau d'homologie de E, de F, de l'intérieur de O....

Remarque 3. — Le paragraphe III peut de même être transposé aux anneaux de pseudocyles.

CHAPITRE V.

LES MULTIPLICITÉS.

I. — Généralité sur les multiplicités.

65. DÉFINITIONS. — Soit M *une multiplicité à* N *dimensions de bord* $\dot{M}$: ceci signifie que M et $\dot{M}$ sont deux polyèdres, $\dot{M}$ appartenant à M; que chaque point de $M - \dot{M}$ possède dans M un voisinage homéomorphe à l'intérieur de la boule à N dimensions $(x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_N^2 < 1)$; et que chaque point de $\dot{M}$ possède dans M un voisinage homéomorphe à l'ensemble défini par les relations $x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_N^2 < 1$, $x_1 \geqq 0$, les points de $\dot{M}$ situés dans ce voisinage ayant pour images les points de cet ensemble qui vérifient la relation $x_1 = 0$.

Supposons M *différentiable :* il est possible de définir dans M l'angle de deux directions issues d'un même point, en sorte que cet angle soit une fonction continue de ce point et de ces directions.

Envisageons une subdivision ([1]) du polyèdre M en cellules convexes, à au plus N dimensions, telle que l'intersection de deux de ces cellules soit vide ou soit une cellule convexe à moins de N dimensions; nous nommerons $|X^{p,\alpha}|$ celles des cellules convexes à N-p dimensions qui entrent en jeu dans cette subdivision et qui n'appartiennent pas entièrement à $\dot{M}$. Introduisons des éléments $X^{p,\alpha}$ constitués chacun par l'une des cellules $|X^{p,\alpha}|$ et par un sens d'orientation d'un élément de variété à p dimensions complètement orthogonal à $|X^{p,\alpha}|$: cette orientation sera pratiquement définie par la donnée, dans un certain ordre, de p vecteurs orthogonaux à $|X^{p,\alpha}|$ et linéairement indépen-

([1]) A.-H., Chap. III, § 2, Unterteilung.

dants; — $X^{p,\alpha}$ sera l'élément qui se déduit de $X^{p,\alpha}$ en remplaçant cette orientation par l'orientation opposée. Soient $|X^{p+1,\lambda}|$ ceux des $|X^{p+1,\beta}|$ qui font partie de la frontière de la cellule convexe $|X^{p,\alpha}|$; convenons de définir l'orientation de $X^{p+1,\lambda}$ par la donnée d'un vecteur orthogonal à $|X^{p+1,\lambda}|$, situé dans $|X^{p,\alpha}|$ (donc orienté vers l'intérieur de cette cellule) et des p vecteurs attachés à $X^{p,\alpha}$; nous appellerons dérivée de l'élément $X^{p,\alpha}$ la forme linéaire

$$\dot{X}^{p,\alpha}=\sum_{\lambda} X^{p+1,\lambda};$$

on vérifie aisément que $(\dot{X}^{p,\alpha})^{\cdot}=0$: les $X^{p,\alpha}$ constituent un complexe concret (n° **7**). Tout complexe ayant une telle structure sera nommé *dallage de* M.

Nous dirons que deux dallages de M, K et K', d'éléments $X^{p,\alpha}$ et $X'^{q,\beta}$, sont *en position générale* l'un par rapport à l'autre lorsque chacun des ensembles $|X^{p,\alpha}|.|X'^{q,\beta}|$ ou bien est vide, ou bien est une cellule convexe à $N-p-q$ dimensions, n'appartenant pas entièrement à $\dot{M}$. Introduisons des éléments $X^{p,\alpha}.X^{q,\beta}$ constitués chacun par l'une de ces cellules $|X^{p,\alpha}|.|X'^{q,\beta}|$ et par celle des orientations de l'élément de variété complètement orthogonal à cette cellule que définissent les p vecteurs attachés à $X^{p,\alpha}$ et les q vecteurs attachés à $X'^{q,\beta}$. Ces éléments $X^{p,\alpha}.X'^{q,\beta}$ constituent un dallage; on vérifie aisément que

$$X^{p,\alpha}.X'^{q,\beta}=(-1)^{pq}X'^{q,\beta}.X^{p,\alpha}; \qquad (X^{p,\alpha}.X'^{q,\beta})^{\cdot}=\dot{X}^{p,\alpha}.X'^{q,\beta}+(-1)^{p}X^{p,\alpha}.\dot{X}'^{q,\beta};$$

ce dallage est donc l'intersection des deux dallages K et K', au sens de la définition générale de l'intersection des complexes concrets (n° **8**).

Soit m une multiplicité à n dimensions, appartenant à M et de bord $\dot{m}$. Soit K un dallage de M d'éléments $X^{p,\alpha}$. Nous dirons que K et m sont en position générale l'un par rapport à l'autre lorsque chacun des ensembles $|X^{p,\alpha}|.m$ ou bien est vide, ou bien est une cellule convexe à $n-p$ dimensions, n'appartenant pas entièrement à $\dot{m}$. Introduisons des éléments $X^{p,\alpha}.m$ constitués chacun par l'une de ces cellules convexes et par celle des orientations de l'élément de variété de m, complètement orthogonal à $|X^{p,\alpha}|.m$, que définissent les projections sur m des p vecteurs attachés à $X^{p,\alpha}$. Les $X^{p,\alpha}.m$ constituent un dallage de m : c'est *l'intersection par m du dallage* K, vu la définition générale de l'intersection d'un complexe concret par un ensemble (n° **8**).

64. Les dallages sont des couvertures. — L'objet de ce numéro est d'établir la proposition suivante : *Tout dallage* K *d'une multiplicité différentiable* M *est une couverture de* M. D'après le théorème 12 (n° **28**) cette proposition a pour corollaire la suivante : *les classes d'homologie de* M *sont identiques à celles de* K. Soit N la dimension de M; nous ferons l'hypothèse que ces deux propositions sont applicables aux multiplicités m à $N-1$ dimensions. Tout dallage possède manifestement un cycle unité; il s'agit donc de prouver que l'intersection de K par chaque point x de M est un simplexe; nous distinguerons trois cas.

a. Cas où x est étranger à $\dot{M}$ et aux divers $|X^{N,\alpha}|$. — Nous pouvons tracer dans M une multiplicité m à $N-1$ dimensions qui contienne x et qui soit en position générale par rapport à K; $K.x$ est identique à $K.m.x$. Or $K.m$ est un dallage, donc une couverture de m; par suite $K.m.x$ est un simplexe. Donc $K.x$ est un simplexe.

b. Cas où x est l'un des points $|X^{N,\alpha}|$. — Soit v un voisinage de $x=|X^{N,1}|$ ayant les propriétés que voici : v est homéomorphe à une boule à N dimensions; la frontière m de v est homéomorphe à une sphère à $N-1$ dimensions; m est une multiplicité de M, en position générale par rapport à K; v et m sont étrangers à tous les $|X^{p,\alpha}|$ qui ne contiennent pas x; m rencontre tous les $|X^{p,\alpha}|$ qui contiennent x, sauf $|X^{N,1}|$. Par hypothèse $K.m$ a les mêmes classes d'homologie, AZ^0 et AZ^{N-1}, que la sphère m; or le complexe abstrait de $K.x$ s'obtient en adjoignant aux éléments du complexe abstrait de $K.m$ un élément à N dimensions, qui est la dérivée de chacune des formes de $K.m$ qui constituent la classe Z^{N-1}; donc $K.x$ est un simplexe.

c. Cas où x est un point de $\dot{M}$. — Soit v un voisinage de x ayant les propriétés que voici : la frontière m de v est homéomorphe à une boule à $N-1$ dimensions; m est une multiplicité de M, en position générale par rapport à K; les $|X^{p,\alpha}|$ que m rencontre sont ceux auxquels x appartient. Puisque m est simple, $K.m$ est par hypothèse un simplexe. $K.x$, qui est isomorphe à $K.m$, est donc un simplexe.

65. Anneau d'homologie d'une multiplicité M à N dimensions. — Puisque tout dallage d'une multiplicité constitue une couverture à supports simples de cette multiplicité, la connaissance d'un dallage d'une multiplicité permet de construire l'anneau d'homologie de cette multiplicité, par application du théorème 15 (nos **36** et **37**). En pratique, il sera souvent plus commode d'utiliser seulement le théorème 12 (n° **28**) : d'après ce théorème *les classes d'homologie d'une multiplicité s'identifient aux classes d'homologie d'un quelconque des dallages de cette multiplicité; on déterminera la loi d'intersection de ces classes en construisant deux dallages de la multiplicité, en position générale l'un par rapport à l'autre, et l'intersection de ces deux dallages.*

De cette construction résultent les propositions suivantes :

a. Cycles de M de dimensions supérieures ou égales à N. — Tout cycle de M à plus de N dimensions est homologue à zéro. Si $\dot{M}\neq 0$, tout cycle de M à N dimensions est homologue à zéro. Si $\dot{M}=0$ et si M n'est pas orientable, M possède une classe d'homologie non nulle à N dimensions Z^N; on a $2Z^N\sim 0$.

Si $\dot{M} = 0$ et si M est orientable, M possède des classes d'homologie à N dimensions, qui sont les multiples AZ^N d'une classe Z^N; $AZ^N \not\sim 0$ si $A \neq 0$.

b. Identité du groupe d'homologie B^p *et du groupe de Betti* (¹) b_{N-p} *de* M, *quand* $\dot{M} = 0$ (*cf.* n° **59**, remarque 2). Supposons $\dot{M} = 0$. Supposons ou bien que M est *orientable*, ou bien que les coefficients utilisés sont les *entiers mod* 2. Soit K un dallage de M; notons le complexe K en notation inférieure (n° **50**), c'est-à-dire écrivons $x_{N-p,\alpha}$ au lieu de $X^{p,\alpha}$; K devient un complexe k qui vérifie les conditions a, b, c, d du n° **59**; les cycles d'une classe d'homologie $Z^{p,\alpha}$ de K deviennent les cycles d'une classe d'homologie $z_{N-p,\alpha}$ de k; or les $Z^{p,\alpha}$ sont les éléments du groupe d'homologie B^p de M, les $z_{N-p,\alpha}$ sont les éléments du groupe de Betti b_{N-p} de M; nous venons donc de construire un isomorphisme de ces deux groupes; pour exprimer que $Z^{p,\alpha}$ et $z_{N-p,\alpha}$ se correspondent par cet isomorphisme, nous écrirons (en utilisant une notation utilisée au n° **40** dans un cas analogue)

$$z_{N-p,\alpha} \sim \frac{Z^{p,\alpha}}{Z^N},$$

Z^N étant celle des deux classes $\pm Z^N$ de B^N qui correspond à la classe 1 de b_0. On établit aisément les formules analogues à (57) (n° **40**)

$$\boxed{\sum_\beta A_\beta \frac{Z^{p,\beta}}{Z^N} \sim \frac{\sum_\beta A_\beta Z^{p,\beta}}{Z^N}; \qquad Z^r.\frac{Z^q}{Z^N} \sim \frac{Z^r.Z^q}{Z^N}; \qquad \frac{Z^N}{Z^N} \sim 1.} \tag{19}$$

c. Dualité de B^p *et* b_p. — D'après la remarque 1 du n° **59**, b_p est le groupe des caractères de B^p. Donc, en vertu des théorèmes de dualité de M. Pontrjagin (A.-H., *Anhang.*, *I.*, § 5, n° **66**, cas α et γ), B^p et b_p sont isomorphes, quand les coefficients utilisés sont les rationnels ou les entiers mod m. D'où :

Théorème de dualité de Poincaré. — *Si* M *est une multiplicité orientable et close* ($\dot{M} = 0$), *alors*

1° *les* $p^{\text{ièmes}}$ *et* $(N-p)^{\text{ièmes}}$ *nombres de Betti de* M *sont égaux;*

2° *les* $p^{\text{ièmes}}$ *et* $(N-p)^{\text{ièmes}}$ *groupes d'homologie de* M *sont isomorphes, quand les coefficients sont les entiers mod m.*

Si M *est une multiplicité close (orientable ou non) et si les coefficients sont les entiers mod 2, alors les* $p^{\text{ièmes}}$ *et* $(N-p)^{\text{ièmes}}$ *groupes d'homologie de* M *sont isomorphes.*

(¹) Notre définition des groupes de Betti des polyèdres (n° **39**, remarque 1) équivaut à celle qu'utilise A.-H.

Remarque 1. — Supposons $\dot{M} \neq 0$. On peut définir de même un isomorphisme $z_{N-p} \sim \frac{Z^p}{Z^N}$ entre les classes d'homologie Z^p de M et les éléments z_{N-p} du « groupe de Betti de M mod $\dot{M}$ » (ou relativement à $\dot{M}$: *cf* A.-H., *Relativzyklus*). Le théorème de Poincaré ne vaut plus. Mais d'après le théorème 19 *bis* l'anneau d'homologie de M est identique à l'anneau des pseudocycles de l'ensemble ouvert $O = M - \dot{M}$, auquel s'applique la généralisation du théorème de Poincaré qu'établit le numéro suivant.

Remarque 2. — La construction de l'intersection de deux classes d'homologie de M au moyen de deux dallages en position générale (début de ce numéro), quand on écrit ces dallages en notation inférieure, s'identifie à la définition classique de l'intersection de deux éléments du groupe de Betti (A.-H., Chap. XI, § I) dans les deux cas où il est possible de définir l'intersection des éléments du groupe de Betti : le cas où les coefficients sont les entiers mod 2 et le cas où la multiplicité est orientable. Il en résulte que l'intersection des deux éléments du groupe de Betti $z_p \sim \frac{Z^{N-p}}{Z^N}$ et $z_q \sim \frac{Z^{N-q}}{Z^N}$ est $z_{p+q-N} \sim \frac{Z^{N-p}.Z^{N-q}}{Z^N}$.

66. Domaine D d'une multiplicité M à N dimensions. — Indiquons sommairement comment les conclusions du numéro précédent peuvent être étendues à un domaine D de M.

En précisant convenablement le lemme 8 (n° **17**), on établit les propositions suivantes : Toute classe d'homologie de l'intérieur de D contient des cycles appartenant à des dallages de M. Étant donnés deux tels cycles, $Z^{p,1}$ et $Z^{p,2}$, appartenant à une même classe d'homologie de l'intérieur de D, on peut trouver une forme L^{p-1} dont le support est intérieur à D, qui appartient à un dallage de M et qui vérifie la condition $\dot{L}^{p-1} \sim Z^{p,1} - Z^{p,2}$.

On tire de ces propositions les conclusions suivantes :

a. Cycles de l'intérieur de D *de dimensions supérieures ou égales à* N. — Tout cycle de l'intérieur de D à plus de N dimensions est homologue à zéro. Si D contient des points de $\dot{M}$, tout cycle de l'intérieur de D à N dimensions est homologue à zéro.

Si D ne contient pas de point de $\dot{M}$ et si D n'est pas orientable, l'intérieur de D possède une seule classe d'homologie à N dimensions non nulle, Z^N; on a $2Z^N \sim 0$.

Si D ne contient pas de point de $\dot{M}$ et si D est orientable, l'intérieur de D possède des classes d'homologie à N dimensions, qui sont les multiples AZ^N d'une classe Z^N; $AZ^N \not\sim 0$ si $A \neq 0$.

b. Identité du groupe d'homologie B^p *de l'intérieur de* D *et du groupe de Betti* b_{N-p} *de* D, *quand* $\dot{M}.D = 0$. — Supposons que D est orientable, ou bien que les coefficients sont les entiers mod 2. En écrivant les dallages K de M en notation inférieure on obtient des complexes k vérifiant les conditions a, b, c, d du n° **59**; on transforme ainsi les classes d'homologie de l'intérieur de D en éléments du groupe de Betti de D (pour la définition du groupe de Betti de D, *voir* A.-H., Chap. IV, § 1, n° **9**); cette transformation constitue un iso morphisme du groupe d'homologie B^p de l'intérieur de D et du groupe de Betti $b_{\mathrm{N}-p}$ de D; pour exprimer que les éléments Z^p de B^p et $z_{\mathrm{N}-p}$ de $b_{\mathrm{N}-p}$ se correspondent, nous conviendrons, comme au numéro précédent, d'écrire

$$z_{\mathrm{N}-p} \sim \frac{\mathrm{Z}^p}{\mathrm{Z}^{\mathrm{N}}};$$

les formules (19) valent à nouveau.

c. Dualité du groupe $\mathcal{B}^p$ des pseudocycles à p dimensions de D *et du groupe de Betti b_p de* D, *lorsque les coefficients sont les rationnels ou les entiers mod m.* Dire que ces deux groupes sont duals (A.-H., *Anhang* I, § 5, n° **64**), c'est affirmer les deux propositions suivantes :

α. Si Z^p est un pseudocycle de D tel que $\mathrm{Z}^p \not\sim 0$, il existe un élément z^p de b_p tel que $\mathrm{Z}^p . z_p \not\sim 0$;

β. Si z_p est un élément de b_p tel que $z_p \not\sim 0$, il existe un pseudocycle Z^p de D tel que $\mathrm{Z}^p . z_p \not\sim 0$.

Démonstration de α. — Puisque $\mathrm{Z}^p \not\sim 0$, on peut trouver un ensemble bicompact $\mathcal{B}$ de points de D tel que $\mathrm{Z}^p . \mathrm{B} \not\sim 0$; il existe un polyèdre P tel que $\mathrm{B} \subset \mathrm{P} \subset \mathrm{D}$; on a $\mathrm{Z}^p . \mathrm{P} \not\sim 0$; d'après la remarque 1 du n° **59**, il existe un élément z_p du groupe de Betti de P tel que $\mathrm{Z}^p . z_p \not\sim 0$; z_p constitue *a fortiori* un élément du groupe de Betti de D; la proposition α est donc exacte.

Démonstration de β. — Soit z_p un élément non nul de b_p; soit $\mathrm{P}_{(\nu)}$ une suite de polyèdres possédant les propriétés suivantes :

z_p appartient au groupe de Betti de $\mathrm{P}_{(\nu)}$; $\mathrm{P}_{(\nu-1)} \subset \mathrm{P}_{(\nu)}$; $\lim\limits_{\nu \to \infty} \mathrm{P}_{(\nu)} = \mathrm{D}$. D'après la remarque 1 du n° **59**, puisque $z_p \not\sim 0$, il existe des classes d'homologie $\mathrm{Z}^{p;\nu,\alpha}$ de $\mathrm{P}_{(\nu)}$ telles que $\mathrm{Z}^{p;\nu,\alpha} . z_p \not\sim 0$; on en déduit aisément qu'on peut trouver une classe d'homologie $\mathrm{Z}^{p,\nu}$ de $\mathrm{P}_{(\nu)}$ possédant les propriétés suivantes :

$$\mathrm{Z}^{p,\nu} . z_p \not\sim 0; \qquad \mathrm{Z}^{p,\nu-1} \sim \mathrm{Z}^{p,\nu} . \mathrm{P}_{(\nu-1)}.$$

Ces $\mathrm{Z}^{p,\nu}$ définissent un pseudocycle Z^p de D; $\mathrm{Z}^p . z_p \not\sim 0$: la proposition β est établie.

Les résultats obtenus, complétés par le théorème de dualité de Pontrjagin (A.-H., *Anhang* 1, § 5, n° **66**) fournissent la conclusion suivante :

Généralisation du théorème de dualité de Poincaré. — *Supposons* $\dot{\mathrm{M}}.\mathrm{D}$ *vide. Choisissons comme coefficients les entiers mod 2 ou bien, quand* D *est orientable, les entiers mod m ou les nombres rationnels. Alors le $p^{\text{ième}}$ groupe d'homologie* B^p

de l'intérieur de D *et le groupe* $\mathcal{B}^{N-p}$ *des pseudocycles à p dimensions de* $\dot{D}$ *sont duals; ils sont donc isomorphes quand l'un d'eux a une base finie.*

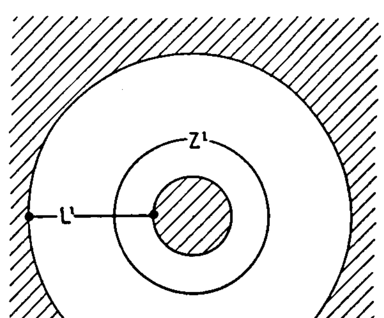
Remarque 1. — Quand $D = M$, B^p et $\mathcal{B}^p$ s'identifient au $p^{\text{ième}}$ groupe d'homologie de M et le théorème précédent s'identifie donc au théorème de dualité de Poincaré.

Remarque 2. — Un autre théorème de dualité de M. Pontrjagin [*The theory of topological commutative groups* (*Annals of Math.*, t. 35, 1934, p. 361-388, th. 5)] permettrait, sans supposer que B^p ou $\mathcal{B}^{N-p}$ a une base finie, d'affirmer que B^p est le groupe des caractères de $\mathcal{B}^{N-p}$ et vice versa, à condition toutefois d'employer des coefficients convenables, qui ne constituent plus un anneau, ce qui nous empêcherait de définir l'intersection des cycles et celle des pseudocycles.

d. Cas où $D = M - m$, *m étant une multiplicité à* $N - 1$ *dimensions.* — Supposons $\dot{M}$ close. Soient Az^{N-1} et AZ^N les classes d'homologie de dimensions $N-1$ et N de *m* et de l'intérieur de D. Soit $A_0 Z^N$ la dérivée de z^{N-1} dans M. On constate aisément que le groupe des classes d'homologie à N dimensions de M s'obtient en assujettissant celui de l'intérieur de D à la relation $A_0 Z^N \sim 0$; donc $A_0 = 0$ si M est orientable; $A_0 = \pm 2$ si M n'est pas orientable. En d'autres termes : *la dérivée de* z^{N-1} *dans* M *est nulle quand* M *est orientable, est* $\pm 2Z^N$ *quand* M *n'est pas orientable.*

Exemples. — 1° D est l'intérieur d'un anneau circulaire (*fig.* 13). D est orientable. En vertu du théorème 19 *bis* (remarque), les pseudocycles de D

Fig. 13.



sont les multiples $A\mathfrak{Z}^0$ du pseudocycle $\mathfrak{Z}^0$ que définit un cycle unité et les multiples $A\mathfrak{Z}^1$ du pseudocycle $\mathfrak{Z}^1 \sim L^1.D$, L^1 étant la forme de $\overline{D}$ dont le support est représenté ci-contre $(|\dot{L}^1| \subset \dot{D})$; $A\mathfrak{Z}^0 \not\sim 0$ et $A\mathfrak{Z}^1 \not\sim 0$ si $A \neq 0$.

Les classes d'homologie de l'intérieur de D sont les multiples AZ^2 et AZ^1 de la classe Z^2 et de la classe Z^1 qui contient le cycle représenté ci-contre : $AZ^2 \not\sim 0$ et $AZ^1 \not\sim 0$ si $A \neq 0$; $\mathfrak{Z}^1 . Z^1 \sim Z^2$.

2° D est l'intérieur d'une bande de Möbius : conclusions analogues aux différences près que voici : D n'est plus orientable; la classe Z^1 ne diffère de zéro que si les coefficients sont les entiers mod 2ν; $2Z^1 \sim 0$; $2Z^2 \sim 0$; $\mathfrak{Z}^1 . Z^1 \sim Z^2$ si ν est impair; $\mathfrak{Z}^1 . Z^1 \sim 0$ si ν est pair.

II. — Exemple des espaces projectifs.

Soit $P^{(N)}$ l'espace projectif à N dimensions; soit $P^{(N-1)}$ un hyperplan à $N-1$ dimensions de $P^{(N)}$; nous allons, par un procédé récurrent, déterminer l'anneau d'homologie de $P^{(N)}$, tout en précisant la position de $P^{(N-1)}$ dans $P^{(N)}$.

Notations. — Nous définirons la structure d'un anneau d'homologie par l'énumération de ses éléments et l'énoncé des relations ne résultant pas d'elles-mêmes de cette énumération : par exemple, pour désigner l'anneau dont les éléments sont Z^2 et AZ^3, vérifiant les relations $2Z^2 \sim 0$, $AZ^3 \not\sim 0$ si $A \neq 0$, $Z^2 . Z^2 \sim 0$, $Z^3 . Z^3 \sim 0$, $Z^2 . Z^3 \sim 0$, nous nous contenterons de dire : l'anneau $\{Z^2, AZ^3\}$.

67. Application des conclusions du paragraphe I du chapitre IV. — Les deux numéros précédents permettent d'appliquer le paragraphe I du Chapitre IV à la figure que constituent un espace projectif à N dimensions $E = P^{(N)}$ et un hyperplan à $N-1$ dimensions $F = P^{(N-1)}$ de cet espace; $O = E - F$ est homéomorphe à l'intérieur de la boule à N dimensions. Nous distinguerons le cas N pair et le cas N impair.

a. La figure que constituent $E = P^{(2n)}$, $F = P^{(2n-1)}$. — E est une multiplicité non orientable et F est une multiplicité orientable; donc, d'après le n° **65** *a*, les éléments de dimension $2n$ de $\mathcal{E}$ sont Z^{2n} et les éléments de dimension $2n-1$ de $\mathcal{F}$ sont Az^{2n-1}. D'après le n° **52** et la remarque 2 du n° **47**, $\mathcal{O}$ est l'anneau $\{A\zeta^{2n}\}$; d'après le n° **66** *d*, $\mathcal{G}$ est l'idéal $\{2A\zeta^{2n}\}$. Il résulte de ces faits, d'après la relation (2) $\mathcal{E}_0 \cong \mathcal{O}/\mathcal{G}$, que $\mathcal{E}_0$ est l'anneau $\{Z^{2n}\}$.

D'après le n° **48**, $\mathcal{F}_E$ se compose des éléments de $\mathcal{F}$ dont la dérivée dans E est l'élément nul de $\mathcal{G}$; donc, vu le n° **66** *d*, $\mathcal{F}_E$ se compose des éléments de $\mathcal{F}$ de dimensions inférieures à $2n-1$ et des éléments Az^{2n-1} tels que $2A = 0$; cette relation $2A = 0$ n'est d'ailleurs vérifiée que si les coefficients sont les entiers mod 2ν et si $A = \nu$.

De cette structure de $\mathcal{E}_0$ et de $\mathcal{F}_E$ le n° **46** nous permet de déduire que $\mathcal{E}$ se compose des éléments suivants :

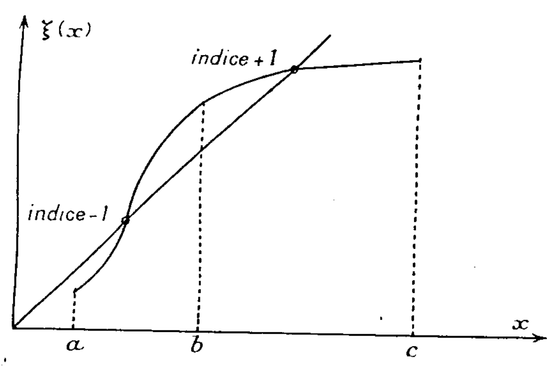
1° un élément Z^{2n} (vérifiant les relations $2Z^{2n} \sim 0$ et $Z^{2n} . F \sim 0$);

2° si les coefficients sont les entiers mod 2ν un élément Z^{2n-1} (vérifiant les relations $2Z^{2n-1} \sim 0$ et $Z^{2n-1}.F \sim \nu z^{2n-1}$);

3° enfin des éléments $Z^{q,\beta}$ de dimensions $q \leqq 2n-2$, tels que les $Z^{q,\beta}.F$ soient les divers éléments de $\mathcal{F}$ de dimensions $q \leqq 2n-2$.

b. La figure que constituent $E = P^{(2n+1)}$ et $F = P^{(2n)}$. — E est une multiplicité orientable, F est une multiplicité non orientable, donc, d'après le n° **65** *a*, les éléments de dimensions $2n+1$ de $\mathcal{E}$ sont AZ^{2n+1} et les éléments de dimension $2n$ de $\mathcal{F}$ sont z^{2n}.

Fig. 14.



D'après le n° **52** et la remarque 2 du n° **47**, $\mathcal{O}$ est l'anneau $\{A\zeta^{2n+1}\}$. D'après le n° **66** *d*, $\mathcal{G}$ est vide; (3) s'écrit donc $\mathcal{F} = \mathcal{F}_E$ et (2) s'écrit $\mathcal{O} \cong \mathcal{E}_0$: $\mathcal{E}_0$ est l'anneau $\{AZ^{2n+1}\}$. D'après (1) $\mathcal{E}$ se compose donc des éléments suivants :

1° AZ^{2n+1}; 2° des éléments $Z^{q,\beta}$ de dimensions $q \leqq 2n$ tels que les $Z^{q,\beta}.F$ soient les divers éléments de $\mathcal{F}$.

On déduit par récurrence de ces résultats les conclusions suivantes :

α. Classes d'homologie de dimensions paires. — $P^{(N)}$ ne possède pas de classe d'homologie Z^{2p} (autre que Z^0) quand les coefficients sont les rationnels ou les entiers mod $2\nu+1$. Si les coefficients sont les entiers ou les entiers mod 2ν, $P^{(N)}$ possède, quel que soit $2p \leqq N$, une classe d'homologie unique Z^{2p}; $2Z^{2p} \sim 0$; Z^{2p} contient des cycles qui sont chacun la somme d'éléments distincts d'un dallage de $P^{(N)}$, les supports de ces éléments constituant un hyperplan à $N-2p$ dimensions; si $F = P^{(N)}$ est un hyperplan quelconque de $P^{(N)}$, sa classe d'homologie de dimension $2p \leqq n$ est $Z^{2p}.F$.

β. Classes d'homologie de dimensions impaires. — D'une part les classes d'homologie de $P^{(2n+1)}$ de dimension $2n+1$ sont AZ^{2n+1}. D'autre part $P^{(N)}$ ne peut posséder de classe d'homologie Z^{2p+1} telle que $2p+1 < N$ que si les coefficients sont les entiers mod 2ν. Dans ce cas $P^{(N)}$ possède quel que soit $2p+1 < N$ une classe d'homologie unique Z^{2p+1}; $2Z^{2p+1} \sim 0$; Z^{2p+1} contient des cycles qui sont chacun ν fois la somme d'éléments distincts d'un dallage de $P^{(N)}$, les supports de ces éléments constituant un hyperplan à $N-2p-1$ dimensions; si $F=P^{(N)}$ est un hyperplan quelconque de $P^{(N)}$ sa classe d'homologie de dimension $2p+1<n$ est $Z^{2p+1}.F$; si $F=P^{(2n+1)}$ est un hyperplan quelconque de $P^{(N)}$ et si ses classes d'homologie de dimension $2n+1$ sont Az^{2n+1}, on a $Z^{2n+1}.F \sim \nu z^{2n+1}$.

68. Application des conclusions du paragraphe I du chapitre V. — Le n° **67** permet de déduire de la loi d'intersection qui règne dans l'anneau d'homologie de $P^{(N-1)}$ la loi d'intersection qui règne dans l'anneau d'homologie de $P^{(N)}$, exception faite de la loi qui permet de calculer les intersections $Z^p.Z^{N-p}$. Or le n° **67** a montré que la classe Z^p (et la classe Z^{N-p}) contient un cycle constitué par λ fois (μ fois) la somme d'éléments distincts d'un dallage, les supports de ces éléments constituant un hyperplan à $N-p$ (à p) dimensions; nous pouvons supposer que ces deux cycles appartiennent à deux dallages en position générale l'un par rapport à l'autre; il suffit d'envisager comme au n° **65**, l'intersection de ces deux dallages pour conclure $Z^p.Z^{N-p} \sim \lambda\mu.Z^N$.

D'où, par un raisonnement de récurrence, les résultats suivants :

Si les coefficients sont les entiers ou les entiers mod 2ν, $Z^{2p} \sim (Z^2)^p$ [où $(Z^2)^p$ est l'intersection de p classes identiques à Z^2].

Si les coefficients sont les entiers mod 2ν :

$$Z^{2p+1}.Z^{2q} \sim \nu Z^N, \quad \text{quand } 2p+2q+1=N,$$
$$Z^{2p+1}.Z^{2q} \sim Z^{2p+2q+1}, \quad \text{quand } 2p+2q+1<N,$$

enfin

$$Z^{2p+1}.Z^{2q+1} \sim \nu^2 (Z^2)^{p+q+1};$$

en tenant compte de la relation $2Z^2 \sim 0$ on donne à cette dernière relation la forme suivante :

$$\text{si } \nu \text{ est pair,} \quad Z^{2p+1}.Z^{2q+1} \sim 0,$$
$$\text{si } \nu \text{ est impair,} \quad Z^{2p+1}.Z^{2q+1} \sim (Z^2)^{p+q+1}.$$

69. Conclusions. — *Cas où les coefficients sont les rationnels ou les entiers* mod $2\nu+1$:

L'anneau d'homologie de $P^{(2n)}$ est $\{AZ^0\}$.
L'anneau d'homologie de $P^{2(n+1)}$ est $\{AZ^0, AZ^{2n+1}\}$.

Cas où les coefficients sont les entiers :

L'anneau d'homologie de $P^{(2n)}$ est $\{AZ^0, Z^2, (Z^2)^2, (Z^2)^3, \ldots, (Z^2)^n\}$.
L'anneau d'homologie de $P^{(2n+1)}$ est $\{AZ^0, Z^2, (Z^2)^2, (Z^2)^3 \ldots, (Z^2)^n, AZ^{2n+1}\}$.

Soient Z^2 et z^2 les classes d'homologie de dimension 2 de $P^{(N)}$ et de son hyperplan F; on a $z^2 \sim Z^2.F$.

Cas où les coefficients sont les entiers $\bmod 2\nu$, ν *étant impair :*

L'anneau d'homologie de $P^{(2n)}$ est $\{AZ^0, Z^1, (Z^1)^2, (Z^1)^3, \ldots, (Z^1)^{2n-1}, (Z^1)^{2n}\}$.

L'anneau d'homologie de $P^{(2n+1)}$ est $\{AZ^0, Z^1, (Z^1)^2, (Z^1)^3, \ldots, (Z^1)^{2n}, AZ^{2n+1}\}$, où $(Z^1)^{2n+1} \sim \nu Z^{2n+1}$.

Soient Z^1 et z^1 les classes d'homologie de dimension 1 de $P^{(N)}$ et de son hyperplan F, on a $z^1 \sim Z^1 . F$.

Cas où les coefficients sont les entiers $\bmod 2\nu$, ν *étant pair :*

L'anneau d'homologie de $P^{(2n)}$ est

$$\{AZ^0, Z^1, Z^2, Z^1.Z^2, (Z^2)^2, Z^1.(Z^2)^2, (Z^2)^3, \ldots, Z^1.(Z^2)^{n-1}, (Z^2)^n\},$$

où

$$(Z^1)^2 \sim 0.$$

L'anneau d'homologie de $P^{(2n+1)}$ est

$$\{AZ^0, Z^1, Z^2, Z^1.Z^2, (Z^2)^2, Z^1.(Z^2)^2, (Z^2)^3, \ldots, Z^1.(Z^2)^{n-1}, (Z^2)^n, AZ^{2n+1}\},$$

où

$$(Z^1)^2 \sim 0, \qquad Z^1.(Z^2)^n \sim \nu Z^{2n+1}.$$

Soient Z^1 et Z^2, z^1 et z^2 les classes d'homologie de dimensions 1 et 2 de $P^{(n)}$ et de son hyperplan F; on a

$$z^1 \sim Z^1.F, \qquad z^2 \sim Z^2.F.$$

III. — Nombre des domaines en lesquels un ensemble fermé de points d'une sphère décompose cette sphère, d'après un Mémoire de M. H. Hopf (1).

70. Soit $E = S^{(N)}$ la sphère à N dimensions; soit F un ensemble de points de $S^{(N)}$; $D = E - F$ se compose de d domaines disjoints D_α, d pouvant être infini. Soit $\mathcal{O}_\alpha$ l'anneau d'homologie de l'intérieur de D_α; $\mathcal{O}$ est la somme directe des $\mathcal{O}_\alpha$ (n° **50**, rem.). D'après le n° **66** *a*, le groupe des éléments de dimension N de $\mathcal{O}_\alpha$ est $\{A\zeta^{N,\alpha}\}$; tout élément de dimension N de $\mathcal{O}$ peut donc être mis d'une et d'une seule façon sous la forme $\sum_\alpha A_\alpha \zeta^{N,\alpha}$, le nombre des A_α non nuls étant fini; les éléments de dimension N de $\mathcal{G}$ sont ceux de ces éléments qui vérifient la condition $\sum_\alpha A_\alpha = 0$; enfin $\mathcal{E}_0$ est l'anneau $\{AZ^N\}$.

---

(1) *Systeme symmetrischer Bilinearformen und euklidische Modelle der projektiven Räume*, Satz II' (*Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, t. 85, 1940, pp. 165-177).

Donc, d'après (3), le groupe des éléments de dimension $N-1$ de $\mathcal{F}$ est la somme directe de $d-1$ groupes isomorphes à celui des coefficients; l'élément général de ce groupe peut être représenté par une expression $\sum_\alpha A_\alpha z^{N-1,\alpha}$, où $\sum_\alpha A_\alpha = 0$; d'autre part, d'après (2) et (3), il existe un isomorphisme entre le groupe des éléments de $\mathcal{F}$ de dimension p et le groupe des éléments de $\mathcal{O}$ de dimension $p+1$, pour $1 \leqq p \leqq N-2$; or $\mathcal{O}$ est la somme directe des $\mathcal{O}_\alpha$; donc le groupe des éléments de $\mathcal{F}$ de dimensions p comprises entre 1 et $N-2$ ($1 \leqq p \leqq N-2$) est la somme directe de d groupes $\mathcal{F}_\alpha$; $\mathcal{F}_\alpha$ se compose de ceux des éléments de $\mathcal{F}$ qui ont une dimension positive et dont la dérivée dans E appartient à $\mathcal{O}_\alpha$; donc, d'après le n° **50**, $\mathcal{F}_\alpha$ est un *sous-anneau* de $\mathcal{F}$; l'intersection d'un élément de $\mathcal{F}_\alpha$ et d'un élément de $\mathcal{F}_\beta$ appartient à la somme $\mathcal{F}_\alpha \cup \mathcal{F}_\beta$ de $\mathcal{F}_\alpha$ et $\mathcal{F}_\beta$ si la dimension de cette intersection est inférieure à $N-1$; si cette dimension est $N-1$, cette intersection est un élément du type $A(z^{N-1,\alpha} - z^{N-1,\beta})$.

En résumé nous obtenons le théorème suivant, que M. H. Hopf avait prouvé dans le cas où les coefficients sont les entiers mod 2 et dans le cas où F est une multiplicité orientable.

Théorème 20. — *Soit* F *un ensemble fermé de points d'une sphère à* N *dimensions, qui décompose cette sphère en d domaines; l'anneau d'homologie* $\mathcal{F}$ *de* F *est la somme directe des groupes suivants :*

1° *le groupe des éléments de dimension nulle de* F;

2° *d sous-anneaux* $\mathcal{F}_\alpha$ *de* $\mathcal{F}$, *dont les éléments ont des dimensions p comprises entre* 1 *et* $N-2$ ($1 \leqq p \leqq N-2$);

3° *le groupe des éléments de dimension* $N-1$ *de* $\mathcal{F}$, *qui est constitué par des éléments du type* $\sum_\alpha A_\alpha z^{N-1,\alpha}$, *où* $\sum_\alpha A_\alpha = 0$, *et qui est donc la somme directe de* $d-1$ *groupes identiques à celui des coefficients,*

L'intersection d'un élément de $\mathcal{F}_\alpha$ *par un élément de* $\mathcal{F}_\beta$ *appartient à* $\mathcal{F}_\alpha \cup \mathcal{F}_\beta$ *si sa dimension est inférieure à* $N-1$, *est du type* $A(z^{N-1,\alpha} - z^{N-1,\beta})$ *si sa dimension est* $N-1$.

Corollaire 20_1. — *Si* F *n'a pas de classe d'homologie de dimension* $N-1$, *alors* $O = E - F$ *est connexe.*

Corollaire 20_2. — *Si* F *est homéomorphe à une sphère à* $N-1$ *dimensions, alors* $O = S^{(N)} - F$ *se compose de* 2 *domaines* (théorème de Jordan-Brouwer, *voir* A.-H.).

COROLLAIRE 20_3. — *F ne peut être homéomorphe au plan projectif à* $N-1$ *dimensions* $P^{(N-1)}$ (H. Hopf).

Démonstration. — Choisissons comme coefficients les entiers mod 2; $P^{(N-1)}$ possède un cycle unique à une dimension z^1; si $P^{(N-1)}$ était homéomorphe à un ensemble de points de $S^{(N)}$, z^1 devrait appartenir à l'un des $\mathcal{F}_\alpha$, ce qui est impossible puisque $(z^1)^{N-1} \not\sim 0$.