JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue

(Cours professés au Collège de France en 1947-1948 et 1949-1950);

Par Jean LERAY.

TABLE DES MATIÈRES.

INDEX DES DÉFINITIONS ET NOTATIONS.

INTRODUCTION.

Les crochets [ ] renvoient à la bibliographie, p. 139. Ayant à parler constamment de cohomologie et jamais d'homologie, je dirai *homologie* là où l'usage est de dire *cohomologie*. Avant d'esquisser le contenu de cet article, j'énumérerai les problèmes auxquels peuvent être appliquées les mêmes notions algébriques.

1. Les problèmes de topologie algébrique où interviennent des anneaux spectraux. — *a.* C'est l'étude des *espaces fibrés* qui m'a conduit à ces notions : soient X un espace fibré, F sa fibre, Y sa base, supposée simplement connexe; soient $\mathcal{H}X$, $\mathcal{H}F$, $\mathcal{H}Y$ leurs anneaux d'homologie relatifs aux entiers; sauf dans des cas exceptionnels, tels que celui où F a même anneau d'homologie qu'un point, il est impossible de déterminer $\mathcal{H}X$ en fonction de $\mathcal{H}F$ et $\mathcal{H}Y$; cependant il existe entre ces anneaux des relations de la nature suivante : supposons connue la définition des *anneaux filtrés* [n° **5**; cette définition ne diffère de la définition classique des corps valués (¹) que par la substitution d'une inégalité à une égalité], des *anneaux différentiels-gradués* (n^os **4** et **8**; cette définition consiste à énoncer les règles de calcul auxquelles obéissent les formes différentielles extérieures d'une variété), de l'*anneau gradué d'un anneau filtré* (n° **6**), enfin des *anneaux spectraux* (n° **9**; un anneau spectral $\mathcal{H}_r$ est un anneau gradué, dépendant de l'indice entier r, possédant une différentielle homogène de degré r et tel que $\mathcal{H}_{r+1}$ soit l'anneau d'homologie de $\mathcal{H}_r$; $r > l$; $\mathcal{H}_{l+1}$ est nommé premier terme de l'anneau spectral; on définit $\lim_{r \to +\infty} \mathcal{H}_r$). Les relations annoncées sont les suivantes : *l'anneau d'homologie de* Y *relatif à* $\mathcal{H}F$ *est le premier terme d'un anneau spectral dont la limite contient* (²) *l'anneau gradué de* $\mathcal{H}X$ *muni d'une certaine filtration* (³). *Cette filtration et cet anneau spectral sont des invariants topologiques de la structure fibrée envisagée.*

(¹) [15] Chap. X, *Bewertete Körper*.

(²) est, quand X a une dimension finie,

(³) G. Hirsch vient dénoncer un résultat voisin [7], mais les notions qu'il introduit ne sont pas des invariants topologiques.

Si Y n'est plus supposé simplement connexe, cet énoncé doit être modifié comme suit : le premier terme de l'anneau spectral est l'anneau d'homologie de Y « relatif à un système d'anneaux locaux isomorphes à $\mathcal{H}$F », comme dit Steenrod [14], ou, comme nous dirons « relatif à un faisceau localement isomorphe à $\mathcal{H}$F ».

L'idée générale de la démonstration est la suivante : soit ξ l'application de X sur Y qui applique chaque fibre sur un point; étant donnée une classe d'homologie de $\mathcal{H}$X, on cherche un cycle de cette classe qui s'exprime « autant que possible » au moyen d'images par $\overset{-1}{\xi}$ d'éléments attachés à Y; cet « autant que possible » s'exprime mathématiquement à l'aide d'une filtration nulle pour tout élément attaché à X, mais égale au degré (ou dimension) de tout élément attaché à Y.

b. Ces invariants des espaces fibrés ne sont que des cas particuliers *des invariants qu'on peut attacher à une application continue quelconque* ξ *d'un espace* X *dans un espace* Y : *une filtration de* $\mathcal{H}$X *et un anneau spectral* $\mathcal{H}_r$ *dont la limite contient l'anneau gradué de* $\mathcal{H}$X *ainsi filtré :* le premier terme de cet anneau spectral est l'anneau d'homologie de Y relatif à un anneau attaché à chaque point y de Y et variant avec ce point : l'anneau d'homologie de $\overset{-1}{\xi}(y)$, image réciproque de y; nous dirons en termes plus rigoureux que *le premier terme de cet anneau spectral est l'anneau d'homologie de* Y *relatif au faisceau transformé par* ξ *du faisceau d'homologie de* Y. Il existe :

1° un homomorphisme canonique $\underline{\Phi}$ de $\mathcal{H}$X dans le premier terme de $\mathcal{H}_r$;

2° un homomorphisme canonique $\underline{\Psi}$ de $\mathcal{H}$Y dans le premier terme de $\mathcal{H}_r$; les propriétés de ces homomorphismes résultent :

1° d'un homomorphisme canonique Φ des invariants attachés à l'application constante de X (invariants qui se réduisent à $\mathcal{H}$X) dans les invariants attachés à ξ;

2° d'un homomorphisme canonique Ψ des invariants attachés à l'application identique de Y (invariants qui se réduisent à $\mathcal{H}$Y) dans les invariants attachés à ξ.

c. Ce qui précède subsiste quand les anneaux d'homologie de X,

$\overset{-1}{\xi}(y)$ et F ne sont plus relatifs à l'anneau des entiers, mais à un anneau quelconque. Si, plus généralement, *ces anneaux d'homologie sont relatifs à un anneau différentiel-filtré ou,* plus généralement encore, *à un faisceau différentiel-filtré,* les seules modifications qui se produisent sont les suivantes : les invariants topologiques d'un espace sont constitués, comme ceux d'une application, par un anneau filtré et un anneau spectral, dont la limite contient l'anneau gradué de cet anneau filtré et dont le premier terme a une expression remarquable. L'étude des homomorphismes Φ et Ψ (*voir b*) s'en trouve clarifiée.

d. Soient F_μ des parties fermées d'un espace X, constituant un recouvrement localement fini de X; supposons donnés les anneaux d'homologie des F_μ et de leurs intersections et les homomorphismes nommés « sections de ces anneaux par les F_μ » ; ces données permettent de construire le premier terme d'un anneau spectral dont la limite contient l'anneau gradué de l'anneau d'homologie, convenablement filtré, de X. Ce fait permet de *construire, par un nombre fini d'opérations, les anneaux spectraux et filtrés d'homologie d'un polyèdre et d'une application simpliciale,* quand ces anneaux sont relatifs à un *faisceau localement isomorphe à un anneau différentiel-filtré.*

e. On constate ainsi que les invariants attachés à deux applications homotopes peuvent différer; mais *on peut associer une filtration de l'anneau d'homologie de* X *à chaque classe d'applications homotopes entre elles de* X *dans* Y.

f. Soit X *un espace sur lequel opère un groupe fini* Γ, *dont aucun élément n'a de point fixe;* soit $\underline{X}$ l'espace qui s'obtient en identifiant les images par Γ d'un point décrivant X; la connaissance de la façon dont Γ opère sur l'anneau d'homologie de X permet de définir le premier terme d'un anneau spectral dont le dernier est l'anneau gradué de l'anneau d'homologie, convenablement filtré, de $\underline{X}$: *voir* [5] et [6].

g. Soit φ *une fonctionnelle semi-continue inférieurement,* définie sur un espace localement compact X; la connaissance des limites, pour $\varepsilon \to 0$, des anneaux d'homologie des parties de X où $p - \varepsilon < \varphi(x) \leqq p$ (p : nombre réel) permet de définir le premier terme d'un anneau spectral dont le dernier terme est l'anneau gradué de l'anneau d'homologie, convenablement filtré, de X; les valeurs prises par la filtration sont réelles et la notion d'anneau spectral doit être généralisée (l'indice r, dont dépend cet anneau, parcourt un ensemble de valeurs réelles : les *valeurs critiques* de φ). Notre théorie rejoint ainsi celle du calcul des variations qu'on doit à Marston Morse [13].

2. Sommaire. — Le présent article ne développe ni **1**.g, ni **1**.f (*voir* [5] et [6]), ni **1**.a, ni les propriétés des espaces homogènes qui résultent de **1**.a (*voir* [8] et [12]) : il expose **1**.b, **1**.c, **1**.d et **1**.e. Il ne suppose connues que les notions fondamentales de l'Algèbre et de la Topologie générale.

Le *Chapitre I définit les notions algébriques fondamentales :* anneau filtré, gradué, différentiel, canonique (anneau gradué ayant une différentielle homogène de degré 1); il définit l'anneau gradué $\mathcal{G}\mathcal{A}$ d'un anneau filtré $\mathcal{A}$, l'anneau d'homologie $\mathcal{H}\mathcal{A}$ d'un anneau différentiel $\mathcal{A}$, l'anneau filtré d'homologie $\mathcal{H}\mathcal{A}$ et l'anneau spectral d'homologie $\mathcal{H}_r\mathcal{A}$ d'un anneau différentiel-filtré $\mathcal{A}$.

Le *Chapitre II combine les notions de l'Algèbre et de la Topologie :* Un *faisceau* (différentiel, filtré) $\mathcal{B}$ est constitué par un anneau (différentiel, filtré) attaché à chaque partie fermée de l'espace et par un homomorphisme de l'anneau attaché à F_1 dans l'anneau attaché à F quand $F_1 \subset F$; par exemple les anneaux d'homologie des parties fermées de l'espace constituent un faisceau : le faisceau d'homologie de l'espace; on définit la continuité d'un faisceau, le transformé $\xi\mathcal{B}$ d'un faisceau par une application continue ξ, le faisceau d'homologie $\mathcal{F}\mathcal{B}$ d'un faisceau différentiel $\mathcal{B}$, le faisceau filtré d'homologie $\mathcal{F}\mathcal{B}$ et le faisceau spectral d'homologie $\mathcal{F}_r\mathcal{B}$ d'un faisceau différentiel-filtré. Un *complexe* est un anneau différentiel à chaque élément duquel est associée une partie fermée de l'espace, son support; les supports sont assujettis à un système de conditions qui permettent de définir les transformés d'un complexe par l'inverse d'une application continue, l'intersection $\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{K}'$ de deux complexes canoniques $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}'$ et l'intersection $\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{B}$ d'un complexe canonique $\mathcal{K}$ et d'un faisceau différentiel continu $\mathcal{B}$; ce sont des complexes. $\mathcal{K}^l \bigcirc \mathcal{B}$ désigne $\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{B}$ muni d'une filtration définie par la donnée d'un entier l et d'une filtration de $\mathcal{B}$. Un complexe, possédant une unité, est *fin* quand cette unité est somme d'éléments à supports arbitrairement petits. Une *couverture* est un complexe canonique dont la section par chaque point a pour anneau d'homologie l'anneau des entiers. Étant donnés *un espace* X, *un entier l et un faisceau différentiel-filtré-continu* $\mathcal{B}$ *défini sur* X, soit $\mathfrak{X}$ une couverture fine de X; nous prouvons que l'anneau spectral d'homologie de $\mathfrak{X}^l \bigcirc \mathcal{B}$, pour $l < r$, et son anneau filtré d'homologie sont indépendants du choix de $\mathfrak{X}$; nous les notons :

$$\mathcal{H}_r(X^l \bigcirc \mathcal{B}), \quad \text{où} \quad r < l, \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{B});$$
$$\mathcal{H}_{l+1}(X^l \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{F}_l \mathcal{B}); \quad \lim_{r \to +\infty} \mathcal{H}_r(X^l \bigcirc \mathcal{B}) \supset \mathcal{G}\mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{B}).$$

Étant donnés une application continue ξ de X dans Y, deux entiers $l < m$ et un faisceau différentiel-filtré-continu $\mathcal{B}$, défini sur X, nous définissons de même un anneau spectral et un anneau filtré

$$\mathcal{H}_r\left(\overset{-1}{\xi}\, Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\right), \quad \text{où} \quad l < m < r,$$

et $\mathcal{H}\left(\overset{-1}{\xi}\, Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\right)$, qui est $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$ muni d'une certaine filtration;

$$\mathcal{H}_{m+1}\left(\overset{-1}{\xi}\, Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\right) = \mathcal{H}\left(Y \bigcirc \xi \mathcal{F}_m(X^l \bigcirc \mathcal{B})\right);$$
$$\lim_{r \to +\infty} \mathcal{H}_r\left(\overset{-1}{\xi}\, Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\right) \supset \mathcal{G}\mathcal{H}\left(\overset{-1}{\xi}\, Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\right).$$

Nous définissons enfin l'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'une application composée.

Le *Chapitre* III obtient des invariants topologiques d'un espace X, d'une application continue ξ ou d'une application composée en choisissant $\mathcal{B}$ *identique* ou *localement isomorphe à un anneau différentiel-filtré*: les invariants d'un espace qu'on obtient en choisissant $\mathcal{B}$ identique à un anneau sont classiques, les invariants d'un *espace* qu'on obtient en choisissant $\mathcal{B}$ localement isomorphe à un anneau ont déjà été étudiés par Steenrod [14]. Enfin le Chapitre III explicite **1**.*e*.

Les Chapitres II et III exposent également *les homomorphismes canoniques* que signale **1**.*b* et *les déterminations effectives* qu'annonce **1**.*d*; ces déterminations effectives ne peuvent pratiquement être effectuées que pour des polyèdres ou des applications simpliciales très banales.

5. Origine des notions utilisées. — Les nos **1** et **2** montrent que *le formalisme du calcul différentiel extérieur* est aussi indispensable à l'énoncé des résultats qu'à leur démonstration. Il est superflu de rappeler (*voir*, par exemple, l'Introduction de [9]) que ce calcul est l'outil essentiel de la Géométrie différentielle et que son application à la Topologie des variétés est due à E. Cartan et de Rham; c'est Alexander [1] qui le premier en appliqua le formalisme à la Topologie des espaces abstraits. La définition d'un anneau différentiel, quand cet anneau n'est pas supposé gradué, est due à Koszul [8].

Le présent article est le premier exposé détaillé de la notion, que résume [10], d'anneaux d'homologie spectral et filtré d'un espace ou d'une application relatifs à un faisceau; c'est H. Cartan [6] qui substitua le terme filtré au terme sous-valué que j'utilisais primitivement.

J'emploie ma définition antérieure des complexes [9], modifiée comme suit : un complexe n'a pas nécessairement de base; une multiplication est définie dans un complexe. Cette seconde modification, due à H. Cartan [4], permet de définir commodément la multiplication dans les anneaux d'homologie d'un espace ou d'une application.

Je définis l'anneau d'homologie d'un espace localement compact à l'aide de couvertures, comme dans [9]; mais cette définition est considérablement simplifiée par l'emploi de couvertures fines; j'ai proposé cette notion au Colloque de Topologie algébrique [11], en même temps que H. Cartan proposait une notion assez voisine [4]. Quand l'espace n'est pas compact, j'adopte un point de vue de H. Cartan [4]; la notion d'application propre lui est due; il m'a également signalé l'isomorphisme II (n^{os} **18** et **65**). Je tiens à le remercier de m'avoir si utilement tenu au courant de toutes ces belles mises au point qu'il a faites de la théorie de la cohomologie des espaces.

Le raisonnement fondamental que répètent avec diverses variantes les n^{os} **4**, **17**, **27** et **52** de mon article [9] équivaut à l'emploi de la proposition 10.4 (ci-dessous), c'est-à-dire à la considération d'un anneau spectral indépendant de son indice r; c'est l'analyse de ce raisonnement fondamental qui me conduisit à envisager des anneaux spectraux, puis filtrés. Le présent article perfectionne et développe donc les Chapitres I, II, IV de [9]; mais il est sans relation avec la théorie des équations qu'exposent les Chapitres III, V et VI de [9] et qui était l'objet essentiel de [9].

CHAPITRE I.

ANNEAU SPECTRAL ET ANNEAU FILTRÉ D'HOMOLOGIE D'UN ANNEAU DIFFÉRENTIEL-FILTRÉ.

I. — Anneau filtré.

4. Anneau gradué. — Définition 4.1. — *Un anneau* (¹) $\mathcal{A}$ *sera dit gradué quand il est, commme groupe additif, somme directe de sous-groupes* $\mathcal{A}^{[p]}$ *(p entier) tels que* (²) $\mathcal{A}^{[p]}\mathcal{A}^{[q]} \subset \mathcal{A}^{[p+q]}$.

On écrira

$$\mathcal{A} = \sum_p \mathcal{A}^{[p]},$$

les éléments de $\mathcal{A}^{[p]}$ sont dits *homogènes de degré p*.

Autrement dit : tout élément a de $\mathcal{A}$ s'écrit d'une façon unique

$$a = \sum_{-\infty < p < +\infty} a^{[p]}, \qquad \text{où} \quad a^{[p]} \in \mathcal{A}^{[p]}$$

($a^{[p]} = 0$ sauf pour un nombre fini d'entiers p).

$a^{[p]}$ est nommé *composante homogène de degré p* de a. Le produit de deux éléments homogènes de degrés p et q est homogène de degré $p+q$.

Exemple. — L'anneau des formes différentielles extérieures d'une variété différentiable est un anneau gradué.

Soient $\mathcal{A}'^{[p]}$ des sous-groupes des $\mathcal{A}^{[p]}$; $\mathcal{A}' = \sum_p \mathcal{A}'^{[p]}$ est un sous-groupe additif de $\mathcal{A}$; si $\mathcal{A}'^{[p]}\mathcal{A}'^{[q]} \subset \mathcal{A}'^{[p+q]}$, $\mathcal{A}'$ est un *sous-anneau* de $\mathcal{A}$; si $\mathcal{A}^{[p]}\mathcal{A}'^{[q]} \subset \mathcal{A}'^{[p+q]}$ et $\mathcal{A}'^{[p]}\mathcal{A}^{[q]} \subset \mathcal{A}'^{[p+q]}$, $\mathcal{A}'$ est un *idéal* bilatère de $\mathcal{A}$ et le quotient de $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A}'$ est (³) l'anneau gradué

$$\mathcal{A}/\mathcal{A}' = \sum_p \mathcal{A}^{[p]}/\mathcal{A}'^{[p]}.$$

(¹) Pour les définitions fondamentales de l'Algèbre, *voir* [2].

(²) $\mathcal{A}^{[p]}\mathcal{A}^{[q]}$ est l'ensemble des $a^{[p]}a^{[q]}$, où $a^{[p]} \in \mathcal{A}^{[p]}$ et $a^{[q]} \in \mathcal{A}^{[q]}$.

(³) Plus précisément : il existe un isomorphisme canonique de $\mathcal{A}/\mathcal{A}'$ sur $\sum_p \mathcal{A}^{[p]}/\mathcal{A}'^{[p]}$; nous convenons que cet isomorphisme est une identité.

Les deux théorèmes d'isomorphie de l'Algèbre (4) fournissent les deux propositions suivantes; $\mathfrak{A}' + \mathfrak{A}''$ désigne l'ensemble des $a' + a''$, où $a' \in \mathfrak{A}'$, $a'' \in \mathfrak{A}''$.

Proposition 4.1 — *Si* $\sum_p \mathfrak{A}'^{(p)}$ *est un idéal de* $\sum_p \mathfrak{A}^{(p)}$, *si* $\sum_p \mathfrak{A}''^{(p)}$ *est un idéal de* $\sum_p \mathfrak{A}^{(p)}$ *et de* $\sum_p \mathfrak{A}'^{(p)}$, *alors* $\sum_p \mathfrak{A}'^{(p)}/\mathfrak{A}''^{(p)}$ *est un idéal de* $\sum_p \mathfrak{A}^{(p)}/\mathfrak{A}''^{(p)}$ *et il existe un isomorphisme canonique* (5) *de*

$$\Big(\sum_p \mathfrak{A}^{(p)}/\mathfrak{A}''^{(p)}\Big)\Big/\Big(\sum_p \mathfrak{A}'^{(p)}/\mathfrak{A}''^{(p)}\Big) \text{ sur } \sum_p \mathfrak{A}^{(p)}/\mathfrak{A}'^{(p)}.$$

Proposition 4.2. — *Si* $\sum_p \mathfrak{A}'^{(p)}$ *est un idéal de* $\sum_p \mathfrak{A}^{(p)}$ *et si* $\sum_p \mathfrak{A}''^{(p)}$ *est un sous-anneau de* $\sum_p \mathfrak{A}^{(p)}$, *alors* $\sum_p \mathfrak{A}'^{(p)} \cap \mathfrak{A}''^{(p)}$ *est un idéal de* $\sum_p \mathfrak{A}''^{(p)}$ *et il existe un isomorphisme canonique de*

$$\sum_p (\mathfrak{A}'^{(p)} + \mathfrak{A}''^{(p)})/\mathfrak{A}'^{(p)} \text{ sur } \sum_p \mathfrak{A}''^{(p)}/(\mathfrak{A}'^{(p)} \cap \mathfrak{A}''^{(p)}).$$

Complétons cette proposition par la formule

$$\mathfrak{A}' \cap (\mathfrak{A}'' + \mathfrak{A}''') = (\mathfrak{A}' \cap \mathfrak{A}'') + \mathfrak{A}''', \qquad \text{quand } \mathfrak{A}''' \subset \mathfrak{A}'. \tag{4.1}$$

Remarque. — Si un anneau gradué possède une unité, elle est homogène de degré zéro. En effet, sa composante homogène de degré nul est une unité; or un anneau n'a qu'une unité.

5. Anneau filtré. — Définition 5.1. — *Nous nommerons filtration f d'un anneau $\mathfrak{A}$ toute fonction définie sur $\mathfrak{A}$, ayant pour valeurs les entiers ou le symbole $+\infty$ et vérifiant les relations*

$$f(a - a_1) \geqq \mathrm{Min.}[f(a), f(a_1)]; \qquad f(aa_1) \geqq f(a) + f(a_1); \qquad f(0) = +\infty \tag{5.1}$$
$$(a \text{ et } a_1 \in \mathfrak{A}).$$

(4) [2], Chap. I, § 4, n° 4; [15], Chap. IV, § 45.

(5) Canonique signifie : déterminé sans ambiguïté.

(6) La notion d'anneau filtré est voisine de celle de corps valué, qui est classique : [15], Chap. X, *Bewertete Körper*.

Remarque. — Quand nous dirons : f est *borné*, *fini*, *nul*, il sera sous-entendu pour $a \neq 0$.

Soit $\mathfrak{A}^{(p)}$ l'ensemble des éléments a de $\mathfrak{A}$ tels que $f(a) \geqq p$; les relations (5.1) équivalent aux suivantes :

$$(5.2) \qquad \mathfrak{A}^{(p)} \text{ est un groupe additif}; \qquad \mathfrak{A}^{(p+1)} \subset \mathfrak{A}^{(p)}; \qquad \lim_{p \to -\infty} \mathfrak{A}^{(p)} = \mathfrak{A}.$$

Proposition 5.1. — *Soient f_ω des filtrations de $\mathfrak{A}$ dépendant d'un paramètre $\omega \in \Omega$;*

$$(5.3) \qquad f(a) = \operatorname*{Borne\ inf.}_{\omega \in \Omega} f_\omega(a)$$

est une filtration de $\mathfrak{A}$, si $f(a) \neq -\infty$ quel que soit $a \in \mathfrak{A}$, ce qui est toujours vérifié si Ω est fini.

Proposition 5.2. — *Si $\mathfrak{I}$ est un idéal bilatère de $\mathfrak{A}$, on définit une filtration de $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}/\mathfrak{I}$ en posant*

$$(5.4) \qquad f(a') = \text{Borne sup. } f(a) \qquad \text{pour} \quad a' = a \bmod \mathfrak{I} \quad (^1).$$

Définition 5.2. — *Soit λ une application d'un anneau filtré $\mathfrak{A}'$ dans un anneau filtré $\mathfrak{A}$; s'il existe des entiers p tels que*

$$f(\lambda a') \geqq p + f(a') \text{ quel que soit } a' \in \mathfrak{A}',$$

leur borne supérieure sera notée $f(\lambda)$ et nommée filtration de λ

$$(5.5) \qquad f(\lambda a') \geqq f(\lambda) + f(a').$$

6. Filtration associée à un degré ; l'anneau gradué d'un anneau filtré. — A tout degré d'un anneau $\mathfrak{A}$ on peut associer la filtration suivante de $\mathfrak{A}$:

$$(6.1) \qquad f\left(\sum_p a^{(p)}\right) \text{ est le minimum des } p \text{ tels que } a^{(p)} \neq 0.$$

Soit $\mathfrak{A}$ un anneau filtré ; envisageons les groupes additifs $\mathfrak{A}^{(p)}/\mathfrak{A}^{(p+1)}$; définissons

$$(6.2) \qquad (a^{(p)} \bmod \mathfrak{A}^{(p+1)})(a^{(q)} \bmod \mathfrak{A}^{(q+1)}) = a^{(p)}a^{(q)} \bmod \mathfrak{A}^{(p+q+1)}, \qquad \text{où} \quad a^{(p)} \in \mathfrak{A}^{(p)};$$

---

(1) $a \bmod \mathfrak{I}$ désigne l'image canonique de a dans $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$.

nous nommerons *anneau gradué de l'anneau filtré* $\mathcal{A}$ l'anneau

$$\mathcal{G}\mathcal{A} = \sum_p \mathcal{A}^{(p)}/\mathcal{A}^{(p+1)}. \tag{6.3}$$

L'anneau gradué de l'anneau gradué $\mathcal{A}$, muni de la filtration associée au degré, est $\mathcal{A}$.

Soit λ un *homomorphisme de filtration* $\geqq 0$ d'un anneau filtré $\mathcal{A}'$ dans un anneau filtré $\mathcal{A}$: λ représente $\mathcal{A}'^{(p)}$ dans $\mathcal{A}^{(p)}$, donc $\mathcal{A}'^{(p)}/\mathcal{A}'^{(p+1)}$ dans $\mathcal{A}^{(p)}/\mathcal{A}^{(p+1)}$; λ définit donc un homomorphisme de $\mathcal{G}\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{G}\mathcal{A}$; cet homomorphisme transforme un élément homogène en un élément homogène de même degré.

PROPOSITION 6.1. — *Soit λ un homomorphisme de l'anneau filtré $\mathcal{A}'$ dans l'anneau filtré $\mathcal{A}$; λ respecte la filtration quand les deux conditions suivantes sont réalisées :*

$f(\lambda) \geqq 0$; λ définit un isomorphisme de $\mathcal{G}\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{G}\mathcal{A}$.

Preuve. — Soit $a' \in \mathcal{A}'$; $f(\lambda a') \geqq f(a')$, car $f(\lambda) \geqq 0$; si $f(\lambda a') > f(a')$, λ ne peut pas être un isomorphisme de $\mathcal{A}'^{(p)}/\mathcal{A}'^{(p+1)}$ dans $\mathcal{A}^{(p)}/\mathcal{A}^{(p+1)}$ pour $p = f(a')$; donc $f(\lambda a') = f(a')$.

PROPOSITION 6.2. — *Soit λ un homomorphisme de l'anneau filtré $\mathcal{A}'$ dans l'anneau filtré $\mathcal{A}$; λ est un isomorphisme, respectant la filtration, de $\mathcal{A}'$ sur $\mathcal{A}$ quand les conditions suivantes sont réalisées :*

$f(\lambda) \geqq 0$; λ définit un isomorphisme de $\mathcal{G}\mathcal{A}'$ sur $\mathcal{G}\mathcal{A}$; les filtrations de $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{A}$ sont bornées supérieurement.

Preuve. — λ respecte la filtration, d'après la proposition 6.1. Si $\lambda a' = 0$, $f(\lambda a') = +\infty$, donc $f(a') = +\infty$; donc $a' = 0$. Soit $a^{(p)} \in \mathcal{A}^{(p)}$; puisque λ est un isomorphisme de $\mathcal{G}\mathcal{A}'$ sur $\mathcal{G}\mathcal{A}$, il existe $a'^{(p)} \in \mathcal{A}'^{(p)}$ tel que

$$a^{(p)} - \lambda a'^{(p)} = a^{(p+1)} \in \mathcal{A}^{(p+1)};$$

il existe de même $a'^{(p+1)} \in \mathcal{A}'^{(p+1)}$ tel que

$$a^{(p+1)} - \lambda a'^{(p+1)} = a^{(p+2)} \in \mathcal{A}^{(p+2)}, \qquad \ldots;$$

or $a^{(q)} = 0$ quand q est suffisamment grand; donc

$$a^{(p)} = \lambda(a'^{(p)} + a'^{(p+1)} + \ldots a'^{(q)}) \in \lambda\mathcal{A}'.$$

7. Anneau bigradué; anneau gradué-filtré. — Définition 7.1. — *Un anneau $\mathfrak{A}$ sera dit bigradué quand il est, comme groupe additif, somme directe de sous-groupes $\mathfrak{A}^{[p,q]}$ (p, q entiers) tels que $\mathfrak{A}^{[p,q]}\mathfrak{A}^{[r,s]} \subset \mathfrak{A}^{[p+r,q+s]}$.*

Les éléments de $\mathfrak{A}^{[p,q]}$ sont dits homogènes de degrés p, q.

Définition 7.2. — *Un anneau gradué-filtré sera un anneau gradué $\mathfrak{A}$ possédant une filtration telle que*

(7.9) $f(a) = \text{Min.} f(a^{[q]})$ si $a = \Sigma a^{[q]}$ ($a^{[q]}$ homogène de degré q).

L'anneau gradué de $\mathfrak{A}$ considéré comme anneau filtré est un anneau bigradué $\mathcal{G}\mathfrak{A}$, que nous nommerons *anneau bigradué de l'anneau gradué-filtré* $\mathfrak{A}$: si $\mathfrak{A}^{[p](q)}$ est l'ensemble des termes de $\mathfrak{A}$ homogènes de degré p dont la filtration est au moins q,

$$\mathcal{G}\mathfrak{A} = \sum_{p,q} \mathfrak{A}^{[p](q)} / \mathfrak{A}^{[p](q+1)}. \tag{7.2}$$

Étant donné $\mathfrak{A}$ et un entier l, définissons

(7.3) $f'(a) = \text{Min.}[lp + f(a^{[p]})]$, où $a = \sum_p a^{[p]}$ ($a^{[p]}$ homogène de degré p);

f' est une filtration de $\mathfrak{A}$; nous dirons que *f' est f augmenté de l fois le degré*. L'anneau bigradué de $\mathcal{G}\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{A}$ reste le même quand on utilise f' au lieu de f; le degré de $\mathcal{G}\mathfrak{A}$ correspondant à la filtration est augmenté de l fois l'autre degré.

II. — Anneau différentiel-filtré.

8. Définitions. — Une *différentiation* sera définie sur un anneau $\mathfrak{A}$ par un automorphisme α et une application linéaire δ de $\mathfrak{A}$ en lui-même tels que [1]

(8.1) $\delta^2 a = 0$; $\alpha\delta a + \delta\alpha a = 0$; $\delta a a_1 = \delta a . a_1 + \alpha a . \delta a_1$, où a et $a_1 \in \mathfrak{A}$;

δa est nommé différentielle de a; $\mathfrak{A}$, α et δ constituent un *anneau différentiel*.

---

[1] $\delta a a_1$ représente $\delta(a a_1)$; $\delta a . a_1$ représente $(\delta a) a_1$.

Les éléments c de $\mathfrak{A}$ tels que $\partial c = 0$ sont nommés *cycles* de $\mathfrak{A}$; ils constituent un anneau $\mathcal{C}$. L'ensemble $\mathcal{O}$ des ∂a est un idéal bilatère de $\mathcal{C}$. L'anneau quotient

$$\mathcal{H}\mathfrak{A} = \mathcal{C}/\mathcal{O}$$

sera nommé *anneau d'homologie* de $\mathfrak{A}$. Deux cycles c et c_1 seront dits *homologues* si $c - c_1 \in \mathcal{O}$; on écrira $c \sim c_1$. Chacun des éléments de $\mathcal{H}\mathfrak{A}$ constitue une classe de cycles homologues entre eux; une telle classe est nommée *classe d'homologie* de $\mathfrak{A}$.

Remarque 8.1. — *Si $\mathfrak{A}$ possède une unité u, cette unité est un cycle: $\alpha u = u$; $\mathcal{H}\mathfrak{A}$ possède donc une unité.*

Preuve. — αu est une unité, car α est un automorphisme; un anneau a une seule unité, donc $\alpha u = u$; d'où, en différentiant $u^2 = u$, $\partial u = 0$.

Un *anneau différeniel-filtré* sera un anneau $\mathfrak{A}$ muni d'une différentiation (α, ∂) et d'une filtration f telles que

(8.2) $$f(\alpha a) = f(a).$$

La proposition 5.2 définit *une filtration* de $\mathcal{H}\mathfrak{A}$: soit $h \in \mathcal{H}\mathfrak{A}$; soit c un cycle de $\mathfrak{A}$ parcourant la classe h.

(8.3) $$f(h) = \text{Borne sup. de } f(c) \qquad (c \in h).$$

Un *anneau différentiel-gradué* sera un anneau gradué $\mathfrak{A}$ muni d'une différentiation (α, ∂) telle que α transforme tout élément homogène en un élément homogène de même degré. La *différentielle* ∂ sera dite *homogène de degré* r quand elle transformera un élément homogène de degré p en un élément homogène de degré $p + r$:

$$\partial a^{(p)} \in \mathfrak{A}^{(p+r)};$$

l'anneau d'homologie de $\mathfrak{A}$ est un anneau gradué: les composantes homogènes d'un cycle (~ 0) sont des cycles (~ 0).

Exemple. — Les formes différentielles extérieures d'une variété différentiable constituent un anneau différentiel gradué, dont la différentielle est homogène de degré 1.

9. L'ANNEAU SPECTRAL D'HOMOLOGIE D'UN ANNEAU DIFFÉRENTIEL-FILTRÉ. — Nous allons attacher à un anneau différentiel-filtré $\mathfrak{A}$ un anneau

différentiel-gradué $\mathcal{H}_r\mathcal{A}$, qui dépendra du paramètre à valeurs entières r et dont la différentielle sera homogène de degré r.

Soit

$$\mathcal{C}^p = \mathcal{A}^p \cap \mathcal{C}; \tag{9.1}$$

$$\mathcal{D}^p = \mathcal{A}^p \cap \mathcal{D}; \tag{9.2}$$

$$\mathcal{C}^p_r = \text{l'ensemble des } a \in \mathcal{A}^p \text{ tels que } \partial a \in \mathcal{A}^{p+r}; \qquad \partial \mathcal{C}^p_r = \mathcal{D}^{p+r}_r; \tag{9.3}$$

On a, la flèche désignant la limite d'une suite monotone,

$$\dots \subset \mathcal{D}^p_r \subset \mathcal{D}^p_{r+1} \subset \dots \to \mathcal{D}^p \subset \mathcal{C}^p \subset \dots \subset \mathcal{C}^p_{r+1} \subset \mathcal{C}^p_r \subset \dots \mathcal{A}^p; \tag{9.4}$$

$$\mathcal{C}^{p+1}_{r-1} = \mathcal{C}^p_r \cap \mathcal{A}^{p+1} \subset \mathcal{C}^p_r; \tag{9.5}$$

$$\mathcal{D}^{p+1}_{r+1} = \mathcal{D}^p_r \cap \mathcal{A}^{p+1} \subset \mathcal{D}^p_r; \tag{9.6}$$

$$\mathcal{C}^p_r \mathcal{C}^q_r \subset \mathcal{C}^{p+q}_r; \tag{9.7}$$

$$\mathcal{C}^p_r \mathcal{D}^q_{r-1} \subset \mathcal{C}^{p+q+1}_{r-1} + \mathcal{D}^{p+q}_{r-1}; \qquad \mathcal{D}^q_{r-1} \mathcal{C}^p_r \subset \mathcal{C}^{p+q+1}_{r-1} + \mathcal{D}^{p+q}_{r-1}. \tag{9.8}$$

Seule la relation (9.8) n'est pas évidente; elle résulte de la relation (8.1)

$$\alpha a . \partial a_1 = - \partial a . a_1 + \partial(a a_1),$$

où l'on choisit a et a_1 tels que

$$f(a) \geqq p, \qquad f(\partial a) \geqq p + r, \qquad f(a_1) \geqq q - r + 1, \qquad f(\partial a_1) \geqq q;$$

$f(\alpha a) \geqq p$ d'après (8.2).

D'après (9.7) $\sum_p \mathcal{C}^p_r$ (somme directe de groupes additifs isomorphes aux $\mathcal{C}^p_r$) est un anneau gradué; d'aprés (9.7) et (9.8) $\sum_p \mathcal{C}^{p+1}_{r-1} + \mathcal{D}^p_{r-1}$ est un idéal de cet anneau; soit

$$\boxed{\mathcal{H}_r\mathcal{A} = \sum_p \mathcal{C}^p_r / (\mathcal{C}^{p+1}_{r-1} + \mathcal{D}^p_{r-1}).} \tag{9.9}$$

Soit $h^{[p]}_r$ un élément homogène de degré p de $\mathcal{H}_r\mathcal{A}$; on a

$$h^{[p]}_r = c^p_r \bmod (\mathcal{C}^{p+1}_{r-1} + \mathcal{D}^p_{r-1}), \qquad \text{où} \quad c^p_r \in \mathcal{C}^p_r; \tag{9.10}$$

posons

$$\boxed{\partial_r h^{[p]}_r = \partial c^p_r \bmod (\mathcal{C}^{p+r+1}_{r-1} + \mathcal{D}^{p+r}_{r-1}),} \qquad \text{où} \quad \partial c^p_r \in \mathcal{D}^{p+r}_r \subset \mathcal{C}^{p+r}_r; \tag{9.11}$$

$$\boxed{\alpha h^{[p]}_r = \alpha c^p_r \bmod (\mathcal{C}^{p+1}_{r-1} + \mathcal{D}^p_{r-1}).}$$

δ_r est une différentielle homogène de degré r de l'anneau gradué $\mathcal{H}_r\mathcal{A}$.

Déterminons l'anneau d'homologie de $\mathcal{H}_r\mathcal{A}$. Cherchons d'abord l'anneau $\mathcal{C}\mathcal{H}_r$ des cycles de $\mathcal{H}_r\mathcal{A}$: la relation $\delta_r h_r^{(p)} = 0$ équivaut à

$$\partial c_r^p \in \mathcal{C}_{r-1}^{p+r+1} + \mathcal{D}_{r-1}^{p+r},$$

c'est-à-dire, puisque $c_r^p \in \mathcal{C}_r^p$, à

$$c_r^p \in \mathcal{C}_{r+1}^p + \mathcal{C}_{r-1}^{p+1},$$

d'où

$$\mathcal{C}\mathcal{H}_r = \sum_p (\mathcal{C}_{r+1}^p + \mathcal{C}_{r-1}^{p+1})/(\mathcal{C}_{r-1}^{p+1} + \mathcal{D}_{r-1}^p).$$

Soit $\mathcal{D}\mathcal{H}_r$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{C}\mathcal{H}_r$ homologues à zéro;

$$\mathcal{D}\mathcal{H}_r = \delta_r \mathcal{H}_r\mathcal{A} = \sum_p (\mathcal{C}_{r-1}^{p+1} + \mathcal{D}_{r-1}^p + \mathcal{D}_r^p)/(\mathcal{C}_{r-1}^{p+1} + \mathcal{D}_{r-1}^p),$$

c'est-à-dire, puisque $\mathcal{D}_{r-1}^p \subset \mathcal{D}_r^p$,

$$\mathcal{D}\mathcal{H}_r = \sum_p (\mathcal{C}_{r-1}^{p+1} + \mathcal{D}_r^p)/(\mathcal{C}_{r-1}^{p+1} + \mathcal{D}_{r-1}^p).$$

L'anneau d'homologie $\mathcal{C}\mathcal{H}_r/\mathcal{D}\mathcal{H}_r$ de $\mathcal{H}_r\mathcal{A}$ est donc, d'après la proposition 4.1, canoniquement isomorphe à

$$\sum_p (\mathcal{C}_{r+1}^p + \mathcal{C}_{r-1}^{p+1})/(\mathcal{C}_{r-1}^{p+1} + \mathcal{D}_r^p) = \sum_p (\mathcal{C}_{r+1}^p + \mathcal{C}_{r-1}^{p+1} + \mathcal{D}_r^p)/(\mathcal{C}_{r-1}^{p+1} + \mathcal{D}_r^p),$$

c'est-à-dire. d'après la proposition 4.2, puis la formule (4.1), à

$$\sum_p \mathcal{C}_{r+1}^p/\mathcal{C}_{r+1}^p \cap (\mathcal{C}_{r-1}^{p+1} + \mathcal{D}_r^p) = \sum_p \mathcal{C}_{r+1}^p/(\mathcal{C}_r^{p+1} + \mathcal{D}_r^p) = \mathcal{H}_{r+1}\mathcal{A}.$$

L'anneau d'homologie de $\mathcal{H}_r\mathcal{A}$ est donc $\mathcal{H}_{r+1}\mathcal{A}$ (à un isomorphisme canonique près).

L'homomorphisme transformant un cycle de $\mathcal{H}_r\mathcal{A}$ en sa classe d'homologie définit un homomorphisme $\varkappa_{r+1}^r$ d'un sous-anneau de $\mathcal{H}_r\mathcal{A}$ *sur* $\mathcal{H}_{r+1}\mathcal{A}$; nous poserons, quand $r < s$ (r, s entiers),

$$\varkappa_s^r = \varkappa_s^{s-1}\varkappa_{s-1}^{s-2}\dots\varkappa_{r+1}^r.$$

$\varkappa_s^r$ *est un homomorphisme d'un sous-anneau de* $\mathcal{H}_r\mathcal{A}$ *sur* $\mathcal{H}_s\mathcal{A}$ $(r<s)$; il est défini par la formule

(9.12) $$\boxed{\varkappa_s^r[c_s^p \bmod (\mathcal{C}_{r-1}^{p+1} + \mathcal{D}_{r-1}^p)] = c_s^p \bmod (\mathcal{C}_{s-1}^{p+1} + \mathcal{D}_{s-1}^p), \qquad \text{où} \quad c_s^p \in \mathcal{C}_s^p.}$$

Nous définirons en outre l'anneau gradué

(9.13) $$\boxed{\mathcal{H}_\infty\mathcal{A} = \sum_p \mathcal{C}^p/(\mathcal{C}^{p+1} + \mathcal{D}^p)}$$

et un homomorphisme $\varkappa_\infty^r$ d'un sous-anneau de $\mathcal{H}_r\mathcal{A}$ *sur* $\mathcal{H}_\infty\mathcal{A}$ par la formule

(9.14) $$\boxed{\varkappa_\infty^r[c^p \bmod (\mathcal{C}_{r-1}^{p+1} + \mathcal{D}_{r-1}^p)] = c^p \bmod (\mathcal{C}^{p+1} + \mathcal{D}^p), \qquad \text{où} \quad c^p \in \mathcal{C}^p;}$$

cette formule a un sens car, d'après (4.1),

$$\mathcal{C}^p \cap (\mathcal{C}_{r-1}^{p+1} + \mathcal{D}_{r-1}^p) = \mathcal{C}^{p+1} + \mathcal{D}_{r-1}^p \subset \mathcal{C}^{p+1} + \mathcal{D}^p.$$

On a sur le champ de définition de $\varkappa_t^r$, pour $r<s<t$, t étant un entier ou $+\infty$,

(9.15) $$\varkappa_t^r = \varkappa_t^s \varkappa_s^r.$$

D'après la définition 9.13 et la formule 4.1,

$$\mathcal{H}_\infty\mathcal{A} = \sum_p \mathcal{C}^p/\mathcal{C}^p \cap (\mathcal{C}^{p+1} + \mathcal{D});$$

d'où, vu la proposition 4.2, un isomorphisme canonique

$$\text{de } \mathcal{H}_\infty\mathcal{A} \text{ sur } \sum_p (\mathcal{C}^p + \mathcal{D})/(\mathcal{C}^{p+1} + \mathcal{D});$$

d'où, vu la proposition 4.1, un isomorphisme canonique

$$\text{de } \mathcal{H}_\infty\mathcal{A} \text{ sur } \left[\sum_p (\mathcal{C}^p + \mathcal{D})/\mathcal{D}\right] \Big/ \left[\sum_p (\mathcal{C}^{p+1} + \mathcal{D})/\mathcal{D}\right] = \mathcal{H}^p/\mathcal{H}^{p+1},$$

où $\mathcal{H}$ désigne l'anneau filtré $\mathcal{H}\mathcal{A}$. On a donc, à un isomorphisme canonique près,

(9.16) $$\boxed{\mathcal{H}_\infty\mathcal{A} = \mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{A}.}$$

PROPOSITION 9.1. — *Soit $h_r \in \mathcal{H}_r\mathcal{A}$; pour que $\chi_\infty^r h_r = 0$, il faut et il suffit qu'il existe un entier s tel que $\chi_s^r h_r = 0$ $(r < s < +\infty)$.*

Preuve. — Si $\chi_s^r h_r = 0$, $\chi_\infty^r h_r$ est évidemment défini et nul. Réciproquement, supposons $h_r = h_r^{[p]}$, homogène de degré p, et $\chi_\infty^r h_r^{[p]} = 0$; d'après (9.14)

$$h_r^{[p]} = c^p \bmod (\mathcal{C}_{r-1}^{p+1} + \mathcal{D}_{r-1}^p), \qquad \text{où} \quad c^p \in \mathcal{C}^{p+1} + \mathcal{D}^p;$$

(9.4) permet de préciser cette dernière relation : il existe un entier s tel que

$$c^p \in \mathcal{C}^{p+1} + \mathcal{D}_{s-1}^p;$$

d'où

$$c^p \in \mathcal{C}_{s-1}^{p+1} + \mathcal{D}_{s-1}^p;$$

d'où, vu (9.12),

$$\chi_s^r h_r^{[p]} = 0.$$

DÉFINITION 9.1. — *Nous nommerons anneau spectral toute suite d'anneaux différentiels-gradués $\mathcal{H}_r$ possédant les propriétés suivantes : l'indice r, dont dépend $\mathcal{H}_r$ prend toutes les valeurs entières (ou toutes les valeurs entières supérieures à un nombre donné); la différentielle δ_r de $\mathcal{H}_r$ est homogène de degré r; $\mathcal{H}_{r+1}$ est l'anneau d'homologie de $\mathcal{H}_r$.*

NOTATIONS. — *χ_{r+1}^r est l'application d'un cycle de $\mathcal{H}_r$ sur sa classe d'homologie ;*

$$\chi_s^r = \chi_s^{s-1} \chi_{s-1}^{s-2} \ldots \chi_{r+2}^{r+1} \chi_{r+1}^r \qquad (r < s < \infty)$$

est donc un homomorphisme d'un sous-anneau de $\mathcal{H}_r$ sur $\mathcal{H}_s$.

Soient $\mathcal{I}_r$ et (et $\mathcal{J}_r$) l'ensemble des $h_r \in \mathcal{H}_r$ tels que $\chi_s^r h_r$ soit défini quel que soit l'entier $s > r$ (tels que $\chi_s^r h_r = 0$ pour les entiers s suffisamment grands); $\mathcal{I}_r$ est un sous-anneau de $\mathcal{H}_r$; $\mathcal{J}_r$ est un idéal de $\mathcal{I}_r$; χ_s^r *identifie les anneaux $\mathcal{I}_r/\mathcal{J}_r$ et $\mathcal{I}_s/\mathcal{J}_s$ que nous nommerons* $\lim\limits_{r \to \infty} \mathcal{H}_r$: c'est une extension de la notion de limite directe. Si les $\mathcal{H}_r$ sont égaux à partir d'un certain rang, cette limite leur est égale.

CONCLUSION. — *Les formules* (9.9), (9.11) *et* 9.12) *attachent à un anneau différentiel-filtré $\mathcal{A}$ un anneau spectral $\mathcal{H}_r\mathcal{A}$, que nous nommerons anneau spectral d'homologie de $\mathcal{A}$; on a*

$$\mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{A} \subset \lim_{r \to +\infty} \mathcal{H}_r\mathcal{A}, \tag{9.17}$$

vu la définition de cette limite, les formules (9.13), (9.14), (9.15), (9.16) et la proposition 9.1.

10. Propriétés de l'anneau spectral d'homologie. — Proposition 10.1. — *Le degré de $\mathcal{H}_r\mathcal{A}$ et la filtration de $\mathcal{H}\mathcal{A}$ sont compris entre les bornes supérieure et inférieure de la filtration de $\mathcal{A}$.*

Preuve. — Soit $\mathcal{H}_r = \mathcal{H}_r\mathcal{A}$; si p est supérieur à cette borne supérieure, $\mathcal{C}_r^p = 0$, donc $\mathcal{H}_r^{[p]} = 0$ vu (9.9). Si p est inférieur à cette borne inférieure, $\mathcal{C}_r^p = \mathcal{C}_{r-1}^{p+1}$, donc $\mathcal{H}_r^{[p]} = 0$ vu (9.9). Les propriétés énoncées de la filtration de $\mathcal{H}\mathcal{A}$ résultent de sa définition (8.3).

Proposition 10.2. — *Quand la filtration de $\mathcal{A}$ est bornée supérieurement,*

$$\mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{A} = \lim_{r \to +\infty} \mathcal{H}_r\mathcal{A}.$$

Preuve. — Vu (9.16) et (9.17), il suffit de prouver que, étant donné $h_r^{[p]} \in \mathcal{H}_r\mathcal{A}$ tel que $\varkappa_s^r h_r^{[p]}$ soit défini pour tout $s > r$; $\varkappa_\infty^r h_r^{[p]}$ est défini : on a, d'après (9.12),

$$h_r^{[p]} = c_s^p \bmod (\mathcal{C}_{r-1}^{p+1} + \mathcal{D}_{r-1}^p), \qquad \text{où} \quad c_s^p \in \mathcal{C}_s^p;$$

on peut choisir s assez grand pour que tout élément de $\mathcal{A}$ de filtration $> p + s$ soit nul : $\mathcal{C}_s^p = \mathcal{C}^p$; d'après (9.14), $\varkappa_\infty^r h_r^{[p]}$ est donc défini.

La proposition 10.2 a pour conséquence immédiate la suivante :

Proposition 10.3. — *Soit un anneau différentiel-filtré $\mathcal{A}$ vérifiant les deux conditions suivantes :*

1° *la filtration de $\mathcal{A}$ est bornée supérieurement ;*
2° *la différentielle δ_r de $\mathcal{H}_r\mathcal{A}$ est nulle pour $r > l$.*
Alors

$$\mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{A} = \mathcal{H}_r\mathcal{A} \qquad \textit{pour} \quad r > l.$$

Remarque. — La condition 2° est vérifié quand 1° l'est, ainsi que :
2 *bis : le degré de $\mathcal{H}_r\mathcal{A}$ est borné inférieurement pour une valeur particulière de r.*

Proposition 10.4. — *Soit un anneau différentiel-filtré $\mathcal{A}$ vérifiant les deux hypothèses suivantes :*

1° *la filtration de $\mathcal{A}$ est bornée supérieurement ;*
2° *pour un entier $l \geq 0$, $\mathcal{H}_{l+1}\mathcal{A}$ est de degré nul.*

Alors le degré de $\mathcal{H}_r\mathcal{A}$ ($l<r$) et la filtration de $\mathcal{H}\mathcal{A}$ sont nuls;

$$\mathcal{H}_r\mathcal{A} = \mathcal{H}\mathcal{A} \qquad \text{pour} \quad l<r.$$

Preuve. — L'homomorphisme $\varkappa_r^{l+1}$ prouve que $\mathcal{H}_r$ est de degré nul pour $l<r$; donc, puisque $0 \leqq l$, $\delta_r = 0$ pour $l<r$; d'après la proposition précédente $\mathcal{H}_r\mathcal{A} = \mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{A}$; donc $\mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{A}$ est de degré nul : en notant $\mathcal{H}$ l'anneau filtré $\mathcal{H}\mathcal{A}$, on a

$$\dots \mathcal{H}^{(2)} = \mathcal{H}^{(1)} \subset \mathcal{H}^{(0)} = \mathcal{H}^{(-1)} = \dots = \mathcal{H}.$$

Or, vu la proposition 10.1, $\mathcal{H}^{(p)} = 0$ quand p dépasse la borne supérieure de la filtration de $\mathcal{A}$; donc

$$\mathcal{H}^{(1)} = 0; \qquad \mathcal{G}\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(0)} = \mathcal{H}^{(-1)} = \dots \mathcal{H}.$$

Définition 10.1. — *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ deux anneaux différentiels-filtrés; soit λ un homomorphisme de $\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{A}$ possédant les propriétés suivantes :*

$$f(\lambda) \geqq 0 \quad (\text{définition } 5.2); \qquad \lambda\delta a' = \delta\lambda a' \quad \textit{quand} \quad a' \in \mathcal{A}'.$$

Cet homomorphisme λ définit un homomorphisme, que nous noterons également λ, de $\mathcal{H}\mathcal{A}'$ et $\mathcal{H}_r\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H}\mathcal{A}$ et $\mathcal{H}_r\mathcal{A}'$; en effet

$$\lambda\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}, \qquad \lambda\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}, \qquad \lambda\mathcal{C}'^p_r \subset \mathcal{C}^p_r, \qquad \lambda\mathcal{D}'^p_r \subset \mathcal{D}^p_r.$$

Nota. — *$\lambda\delta_r = \delta_r\lambda$; $\lambda\varkappa_s^r h_r = \varkappa_s^r\lambda h_r$ quand $\varkappa_s^r h_r$ est défini; λ ne diminue pas la filtration de $\mathcal{H}\mathcal{A}'$ et conserve le degré de $\mathcal{H}_r\mathcal{A}'$; λ applique $\lim_{r\to+\infty} \mathcal{H}\mathcal{A}'_r$ et son sous-anneau $\mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{A}'$ dans $\lim_{r\to+\infty} \mathcal{H}_r\mathcal{A}$ et $\mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{A}$.*

Cette définition permet d'apporter à la proposition 10.4 le complément suivant, qu'utilisera le n° **46**.

Proposition 10.5. — *Soit un anneau différentiel-filtré $\mathcal{A}$ vérifiant les hypothèses de la proposition 10.4; soit $\mathcal{A}'$ l'anneau $\mathcal{A}$ muni de la filtration f' suivante :*

$$\text{si} \quad f(a) < 0, \qquad f'(a) = 0; \qquad \textit{sinon} \quad f'(a) = f(a) \geqq 0.$$

Alors $\mathcal{A}'$ vérifie aussi les hypothèses de la proposition 10.4; l'isomorphisme canonique de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}'$ définit un isomorphisme de $\mathcal{H}_r\mathcal{A}$ sur $\mathcal{H}_r\mathcal{A}'$ pour $l<r$.

Preuve. — $\mathcal{D}^p_r \subset \mathcal{D}'^p_r$ car, $f(a) \leqq f'(a)$; si $p > 0$ et $p+r>0$, $\mathcal{C}^p_r = \mathcal{C}'^p_r$; par suite, en posant $\mathcal{H}_r\mathcal{A} = \mathcal{H}_r$ et $\mathcal{H}_r\mathcal{A}' = \mathcal{H}'_r$,

$$\mathcal{H}'^{[p]}_r = \mathcal{C}'^p_r/(\mathcal{C}'^{p+1}_{r-1} + \mathcal{D}'^p_{r-1}) = \mathcal{C}^p_r/(\mathcal{C}^{p+1}_{r-1} + \mathcal{D}'^p_{r-1})$$

est une image de

$$\mathcal{H}^{[p]}_r = \mathcal{C}^p_r/(\mathcal{C}^{p+1}_{r-1} + \mathcal{D}^p_{r-1})$$

or $\mathcal{H}^{[p]}_r$ est nul pour $p>0$, $r>l$ (proposition 10.4); donc $\mathcal{H}'^{[p]}_r = 0$ pour $p>0$, $r>l$. D'après la proposition 10.1

$$\mathcal{H}'^{[p]}_r = 0 \quad \text{si} \quad p<0, \qquad \text{car} \quad f' \geqq 0.$$

$\mathcal{A}'$ vérifie donc les hypothèses de la proposition 10.4, d'après laquelle

$$\mathcal{H}_r\mathcal{A}' = \mathcal{H}\mathcal{A}', \qquad \mathcal{H}_r\mathcal{A} = \mathcal{H}\mathcal{A} \qquad \text{pour} \quad l<r; \tag{10.1}$$

l'isomorphisme canonique de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}'$ définit l'isomorphisme canonique de $\mathcal{H}\mathcal{A}$ sur $\mathcal{H}\mathcal{A}'$ et par suite, vu (10.1), un isomorphisme de $\mathcal{H}_r\mathcal{A}$ sur $\mathcal{H}_r\mathcal{A}'$ pour $l<r$.

Proposition 10.6. — *a. Soient $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{A}$ deux anneaux différentiels-filtrés; soit λ un homomorphisme de $\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{A}$ tel que*

$$f(\lambda) \geqq 0; \qquad \lambda\delta a' = \delta\lambda a' \qquad \textit{quand} \quad a' \in \mathcal{A}'.$$

Supposons que, pour un entier l donné, λ définisse un isomorphisme de $\mathcal{H}_{l+1}\mathcal{A}'$ sur $\mathcal{H}_{l+1}\mathcal{A}$. Alors λ définit un isomorphisme de $\mathcal{H}_r\mathcal{A}'$ sur $\mathcal{H}_r\mathcal{A}$ pour $l<r$ et un homomorphisme de $\mathcal{H}\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{H}\mathcal{A}$ respectant la filtration.

b. Supposons en outre que les filtrations de $\mathcal{A}'$ et de $\mathcal{A}$ soient bornées supérieurement. Alors λ définit un isomorphisme, respectant la filtration, de $\mathcal{H}\mathcal{A}'$ sur $\mathcal{H}\mathcal{A}$.

Preuve de a. — Puisque $\mathcal{H}_r$ est l'anneau d'homologie de $\mathcal{H}_{r-1}$, une récurrence relative à r prouve que λ définit un isomorphisme de $\mathcal{H}_r\mathcal{A}'$ sur $\mathcal{H}_r\mathcal{A}$ quand $l<r$. Donc λ définit un isomorphisme de $\lim_{r\to+\infty} \mathcal{H}_r\mathcal{A}'$ sur $\lim_{r\to+\infty} \mathcal{H}_r\mathcal{A}$, et par suite un isomorphisme de $\mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{A}$; d'après la proposition 6.1, l'homomorphisme de $\mathcal{H}\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{H}\mathcal{A}$ que définit λ conserve donc la filtration.

Preuve de b. — D'après les propositions 10.2 et 10.6*a*, λ définit un isomorphisme de $\mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{A}$ sur $\mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{A}'$; il suffit d'appliquer la proposition 6.2.

Proposition 10.7. — *Soient, sur un anneau filtré $\mathcal{A}$, deux différentiations (α, ∂) et (α', ∂'). Si $f(\partial\text{-}\partial') = l$ est fini, alors :*

a. $\mathcal{H}_r\mathcal{A} = \mathcal{H}'_r\mathcal{A}$ *pour* $r \leqq l$*;*
b. $\partial_r = \partial'_r$ *pour* $r < l$*;*
c. $\partial_l - \partial'_l$ *se définit comme suit : soit* $h_l^p = c_l^p \bmod (\mathcal{C}'^{p+1}_{l-1} + \mathcal{D}'^p_{l-1})$;

$$(\partial_l - \partial'_l)\, h_l^p = (\partial - \partial')\, c_l^p \bmod (\mathcal{C}'^{p+l+1}_{l-1} + \mathcal{D}'^{p+l}_{l-1}).$$

Autrement dit : $\partial - \partial'$ définit une application linéaire de $\mathcal{H}_l\mathcal{A}$ en lui-même : cette application est $\partial_l - \partial'_l$.

Preuve. — Il suffit évidemment de prouver pour $r \leqq l$, que

(10.2) $$\mathcal{C}'^p_r = \mathcal{C}^p_r;$$
(10.3) $$\mathcal{C}'^{p+1}_{r-1} + \mathcal{D}'^p_{r-1} \subset \mathcal{C}^{p+1}_{r-1} + \mathcal{D}^p_{r-1}.$$

L'hypothèse $r \leqq l$ signifie

(10.4) $$(\partial - \partial')\mathcal{A}^{(p)} \subset \mathcal{A}^{(p+r)};$$

de cette relation résulte (10.2). Différentions l'identité $\mathcal{C}'^p_{r-1} = \mathcal{C}^p_{r-1}$ en tenant compte de (10.4), il vient

$$\mathcal{D}'^{p+r-1}_{r-1} \subset \mathcal{A}^{(p+r)} + \mathcal{D}^{p+r-1}_{r-1},$$

c'est-à-dire

(10.5) $$\mathcal{D}'^p_{r-1} \subset \mathcal{A}^{(p+1)} + \mathcal{D}^p_{r-1};$$

or, d'après (9.4),

$$\mathcal{D}'^p_{r-1} \subset \mathcal{C}'^p_r = \mathcal{C}^p_r;$$

cette relation et (10.5) donnent

$$\mathcal{D}'^p_{r-1} \subset \mathcal{C}^p_r \cap (\mathcal{A}^{(p+1)} + \mathcal{D}^p_{r-1}),$$

c'est-à-dire, vu (4.1), (9.4) et (9.5),

$$\mathcal{D}'^p_{r-1} \subset \mathcal{C}^{p+1}_{r-1} + \mathcal{D}^p_{r-1};$$

d'où (10.3), vu (10.2).

Proposition 10.8. — *Si $f(\partial) = l$ est fini, alors*

$$\mathcal{H}_r\mathcal{A} = \mathcal{G}\mathcal{A} \quad \textit{pour } r \leqq l; \qquad \partial_r = 0 \quad \textit{pour } r < l;$$

δ_l *se définit comme suit*

$$\delta_l(a^{(p)} \bmod \mathcal{A}^{(p+1)}) = (\delta a^{(p)}) \bmod \mathcal{A}^{(p+l+1)}, \qquad \text{où} \quad a^{(p)} \in \mathcal{A}^{(p)}.$$

Preuve. — On choisit $\delta' = 0$ dans la proposition 10.7.

PROPOSITION 10.9. — *Soit $\mathcal{A}$ un anneau différentiel-gradué, dont la différentielle est homogène de degré l; on a, en utilisant sur $\mathcal{A}$ la filtration associée au degré : $\mathcal{H}_r\mathcal{A} = \mathcal{A}$ pour $r \leqq l$; $\mathcal{H}_r\mathcal{A} = \mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{A} = \mathcal{H}\mathcal{A}$ pour $l < r$; $\delta_r = 0$ pour $r \neq l$; $\delta_l = \delta$. La filtration de $\mathcal{H}\mathcal{A}$ est associée au degré de $\mathcal{H}\mathcal{A}$.*

Preuve. — D'après le n° 6, $\mathcal{G}\mathcal{A} = \mathcal{A}$; donc, d'après la proposition 10.8, $\mathcal{H}_r\mathcal{A} = \mathcal{A}$ pour $r \leqq l$, $\delta_r = 0$ pour $r < l$, $\delta_l = \delta$; par suite, $\mathcal{H}_{l+1}\mathcal{A} = \mathcal{H}\mathcal{A}$. Supposons $l < r$; puisque δ est homogène de degré l, $\mathcal{C}_r^p = \mathcal{C}^p + \mathcal{C}_{r-1}^{p+1}$ et par suite, vu (9.11), $\delta_r = 0$; d'où $\mathcal{H}_r = \mathcal{H}_{r+1}$. La filtration de $\mathcal{H}\mathcal{A}$ est, comme celle de $\mathcal{A}$, associée au degré; donc $\mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{A} = \mathcal{H}\mathcal{A}$.

11. ANNEAU D'HOMOLOGIE D'UN ANNEAU DIFFÉRENTIEL-GRADUÉ-FILTRÉ. — Soit $\mathcal{A}$ un anneau différentiel-gradué-filtré (n° 7) *dont la différentielle est homogène de degré l;* l'anneau spectral d'homologie $\mathcal{H}_r\mathcal{A}$ de $\mathcal{A}$ est un anneau bigradué, dont la différentielle est homogène de degrés l et r; le degré de $\mathcal{H}_r\mathcal{A}$ correspondant à la filtration de $\mathcal{A}$ sera dit *degré filtrant*; l'anneau d'homologie $\mathcal{H}\mathcal{A}$ de $\mathcal{A}$ est un anneau gradué-filtré, dont l'anneau bigradué $\mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{A}$ est sous-anneau de $\lim\limits_{r \to +\infty} \mathcal{H}_r\mathcal{A}$; le degré de $\mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{A}$ correspondant à la filtration de $\mathcal{A}$ est dit *degré filtrant*.

Remarque. — Si l'on augmente la filtration $\mathcal{A}$ de n fois son degré, alors $\mathcal{H}_r\mathcal{A}$ subit la seule modification suivante : son degré filtrant est augmenté de n fois l'autre degré; r est augmenté de nl

Preuve. — Tous les sous-groupes qu'envisage le n° 9 sont sommes directes de sous-groupes homogènes.

III. — Produit tensoriel.

12. ANNEAU CANONIQUE. DÉFINITION 12.1. — *Nous nommerons anneau canonique tout anneau différentiel-gradué $\mathcal{K}$ ayant les propriétés suivantes :*

1° *la différentielle de $\mathcal{K}$ est homogène de degré* $+1$;
2° $\alpha k^{[p]} = (-1)^p k^{[p]}$, *$k^{[p]}$ désignant un élément de $\mathcal{K}$ de degré p.*

Nota. — Ces deux propriétés impliquent la relation (8.1) : $\alpha\delta + \delta\alpha = 0$.

Exemple. — Les formes différentielles extérieures d'une variété différentiable constituent un anneau canonique.

Nous nommerons *anneau canonique-filtré* tout anneau différentiel-gradué-filtré qui, comme anneau différentiel-gradué, est canonique. Nous nommerons *anneau canonique-gradué* tout anneau différentiel-bigradué qui est canonique relativement à l'un de ses degrés, nommé degré canonique. Soit $\mathcal{A}$ un anneau canonique-filtré; $\mathcal{H}_r\mathcal{A}$ et $\mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{A}$ sont des anneaux canoniques-gradués, dont les deux degrés sont respectivement nommés *degré canonique* et *degré filtrant*; $\mathcal{H}\mathcal{A}$ est un anneau gradué-filtré.

13. Définition (¹) du produit tensoriel $\mathcal{K} \otimes \mathcal{A}$ d'un anneau canonique $\mathcal{K}$ et d'un anneau différentiel $\mathcal{A}$. — Soit $\mathfrak{T}$ l'algèbre (²) sur l'anneau des entiers qui a pour base les couples $k \times a$ d'un élément k de $\mathcal{K}$ et d'un élément a de $\mathcal{A}$ et qui a pour table de multiplication

$$(k \times a)(k_1 \times a_1) = \sum_p k\,k^{[p]} \times \alpha^{-p} a . a_1, \qquad \text{où} \quad k_1 = \sum_p k^{[p]};$$

(¹) A une légère modification près de la loi de multiplication, cette définition équivaut à celle de [2], Chap. III. La notion du produit tensoriel a été introduite en Algèbre par Whitney.

(²) *Voir* [2], Chap. III, nᵒˢ 1 et 2 : les éléments de cette Algèbre sont les symboles

$$\sum_\mu m_\mu (k_\mu \times a_\mu),$$

où $\sum_\mu$ est une somme finie, m_μ un entier, $k_\mu \in \mathcal{K}$, $a_\mu \in \mathcal{A}$;

$$\sum_\mu m_\mu (k_\mu \times a_\mu) + \sum_\mu m'_\mu (k_\mu \times a_\mu) = \sum_\mu (m_\mu + m'_\mu)(k_\mu \times a_\mu);$$

$\sum_\mu m_\mu (k_\mu \times a_\mu) = 0$ équivaut à $m_\mu = 0$ si les couples $k_\mu \times a_\mu$ sont deux à deux distincts.

on vérifie l'associativité de cette multiplication en constatant que

$$(k\times a)(k^{[p]}\times a_1)(k^{[q]}\times a_2)=k\,k^{[p]}\,k^{[q]}\times \alpha^{-p-q}a.\alpha^{-q}a_1.a_2.$$

Les combinaisons linéaires à coefficients entiers des éléments

$$k\times a+k\times a_1-k\times(a+a_1);\qquad k\times a+k_1\times a-(k+k_1)\times a;$$
$$m(k\times a)-(mk)\times a;\qquad m(k\times a)-k\times(ma)$$
$$(m:\text{entier})$$

constituent un idéal $\mathfrak{Q}$ de $\mathfrak{T}$; $\mathfrak{T}/\mathfrak{Q}$ est un anneau qu'on note $\mathcal{K}\otimes\mathcal{A}$ et qu'on nomme produit tensoriel de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{A}$; l'image de $k\times a$ dans $\mathcal{K}\otimes\mathcal{A}$ est notée $k\otimes a$; *les règles de calcul dans l'anneau $\mathcal{K}\otimes\mathcal{A}$ sont donc les suivantes* : m est un entier; $a, a_1, a_2\in\mathcal{A}$; $k, k_1, k_2, k^{[p]}\in\mathcal{K}$, $k^{[p]}$ étant de degré p; $k\otimes a$ est toujours défini :

(13.1) $$k\otimes a+k\otimes a_1=k\otimes(a+a_1);$$

(13.2) $$k\otimes a+k_1\otimes a=(k+k_1)\otimes a;$$

(13.3) $$m(k\otimes a)=(mk)\otimes a=k\otimes(ma);$$

(13.4) $$(k\otimes a)(k^{[p]}\otimes a_1)=k\,k^{[p]}\otimes\alpha^{-p}a.a_1.$$

Nous définirons une *différentiation* sur $\mathcal{K}\otimes\mathcal{A}$ en posant

(13.5) $$\alpha(k^{[p]}\otimes a)=(-1)^p k^{[p]}\otimes\alpha a;\qquad \partial(k^{[p]}\otimes a)=\partial k^{[p]}\otimes a+(-1)^p k^{[p]}\otimes\partial a.$$

Justification. — α et ∂ sont des opérations univoques, car on obtient le même résultat en les appliquant aux deux membres d'une des relations (13.1), (13.2), (13.3); il est évident que α est un automorphisme de $\mathcal{K}\otimes\mathcal{A}$ et que $\partial^2=0$, $\alpha\partial+\partial\alpha=0$; pour vérifier la troisième des conditions (8.1), calculons

$$\begin{aligned}\partial[(k\otimes a)(k^{[p]}\otimes a_1)]&=\partial[k\,k^{[p]}\otimes\alpha^{-p}a.a_1]\\&=\partial k.k^{[p]}\otimes\alpha^{-p}a.a_1+\alpha k.\partial k^{[p]}\otimes\alpha^{-p}a.a_1\\&\quad+\alpha(k\,k^{[p]})\otimes\partial\alpha^{-p}a.a_1+\alpha(k\,k^{[p]})\otimes\alpha^{1-p}a.\partial a_1\\&=(\partial k\otimes a)(k^{[p]}\otimes a_1)+(\alpha k\otimes\alpha a)(\partial k^{[p]}\otimes a_1)\\&\quad+(\alpha k\otimes\partial a)(k^{[p]}\otimes a_1)+(\alpha k\otimes\alpha a)(\alpha k^{[p]}\otimes\partial a_1)\\&=\partial(k\otimes a).(k^{[p]}\otimes a_1)+\alpha(k\otimes a).\partial(k^{[p]}\otimes a_1).\end{aligned}$$

14. Le produit tensoriel gradué ou filtré $\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A}$. Définition 14.1. — *Soient un anneau canonique $\mathcal{K}$, un entier l et un anneau gradué $\mathcal{A}$. Convenons que, si $k^{[p]}\in\mathcal{K}$ et $a^{[q]}\in\mathcal{A}$ ont les degrés respectifs p et q, alors $k^{[p]}\otimes a^{[q]}$ est homogène de degré $lp+q$; $\mathcal{K}\otimes\mathcal{A}$, muni de ce degré, sera noté $\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A}$.*

Si $\mathcal{A}$ possède une différentielle homogène de degré l, alors la différentielle de $\mathcal{K}^l \otimes \mathcal{A}$ est homogène de degré l.

DÉFINITION 14.2. — *Soient un anneau canonique $\mathcal{K}$, un entier l et un anneau filtré $\mathcal{A}$; posons*

$$f'\left(\sum_{\mu,p} k_\mu^{[p]} \otimes a_{\mu,p}\right) = \operatorname*{Min.}_{\mu,p}[lp + f(a_{\mu,p})], \tag{14.1}$$

nous définissons ainsi sur $\mathcal{K} \otimes \mathcal{A}$ une fonction multiforme à valeurs entières; soit f la borne supérieure des valeurs prises par f' sur un élément donné de $\mathcal{K} \otimes \mathcal{A}$; nous allons prouver que f est une filtration de $\mathcal{K} \otimes \mathcal{A}$ qui, muni de cette filtration, sera noté $\mathcal{K}^l \otimes \mathcal{A}$.

Preuve. — Soient x et $x_1 \in \mathcal{K} \otimes \mathcal{A}$; supposons $f(x) \geqq p$ et $f(x_1) \geqq p_1$, p et p_1 étant entiers : il existe des valeurs de $f'(x)$ et $f'(x_1)$ vérifiant les inégalités

$$f'(x) \geqq p, \qquad f'(x_1) \geqq p_1;$$

d'où, vu (14.1) et (5.1), des valeurs de $f'(x - x_1)$ et $f'(x\,x_1)$ telles que

$$f'(x - x_1) \geqq \text{Min.}[p, p_1], \qquad f'(x\,x_1) \geqq p + p_1,$$

donc

$$f(x - x_1) \geqq \text{Min.}[p, p_1], \qquad f(x\,x_1) \geqq p + p_1.$$

Remarque. — Si $\mathcal{A}$ est gradué-filtré, alors $\mathcal{K}^l \otimes \mathcal{A}$ est gradué-filtré. Si $\mathcal{A}$ est filtré et a le degré nul, alors la filtration de $\mathcal{K}^l \otimes \mathcal{A}$ est celle de $\mathcal{K}^0 \otimes \mathcal{A}$ augmentée de l fois le degré de $\mathcal{K}^1 \otimes \mathcal{A}$.

15. PRODUIT TENSORIEL DE PLUSIEURS ANNEAUX. — *a*. Soient deux anneaux canoniques $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}'$; $\mathcal{K} \otimes \mathcal{K}'$ et $\mathcal{K}' \otimes \mathcal{K}$ sont canoniques et isomorphes, moyennant les conventions suivantes : $k^{[p]} \otimes k'^{[q]}$ est de degré $p + q$ et correspond à $(-1)^{pq}\, k'^{[q]} \otimes k^{[p]}$.

b. Soit un anneau différentiel-filtré $\mathcal{A}$; une convention évidente permet d'écrire

$$(\mathcal{K} \otimes \mathcal{K}')^l \otimes \mathcal{A} = \mathcal{K}^l \otimes (\mathcal{K}'^l \otimes \mathcal{A}) = \mathcal{K}^l \otimes \mathcal{K}'^l \otimes \mathcal{A}.$$

L'isomorphisme de $\mathcal{K} \otimes \mathcal{K}'$ sur $\mathcal{K}' \otimes \mathcal{K}$ que définit 15.*a* définit un isomorphisme respectant la filtration de

$$\mathcal{K}^l \otimes \mathcal{K}'^l \otimes \mathcal{A} \qquad \text{sur} \qquad \mathcal{K}'^l \otimes \mathcal{K}^l \otimes \mathcal{A}.$$

16. Les anneaux canoniques d'Alexander et de Čech. — Nous allons donner deux exemples d'anneaux canoniques qu'utiliseront les nos 38 et 39.

Définition 16.1. — *L'anneau d'Alexander [de Čech] attaché à un ensemble [totalement ordonné] X d'éléments x a pour éléments homogènes de degré p les fonctions $k(x_0, x_1, \ldots, x_p)$ à valeurs entières dont les arguments sont $p+1$ éléments de X [tels que $x_0 < x_1 < \ldots < x_p$]. La somme deux tels éléments k et k_1 de degré p est l'élément de degré p*

$$(16.1)\qquad k_2(x_0, \ldots, x_p) = k(x_0, \ldots, x_p) + k_1(x_0, \ldots, x_p).$$

Le produit de deux tels éléments k et k_1, de degrés p et q, est l'élément de degré $p+q$

$$(16.2)\qquad k_2(x_0, \ldots, x_{p+q}) = k(x_0, \ldots, x_p)\, k_1(x_p, \ldots, x_{p+q}).$$

La différentielle d'un tel élément k est l'élément $\dot{k} = \delta k$ que voici :

$$(16.3)\qquad \dot{k}(x_0, x_1, \ldots, x_{p+1}) = \sum_{0 \leq \mu \leq p+1} (-1)^\mu k\left(x_0, x_1, \ldots, \widehat{x_\mu}, \ldots, x_{p+1}\right),$$

$\left(x_0, x_1, \ldots, \widehat{x_\mu}, \ldots, x_{p+1}\right)$ représentant la suite $(x_0, x_1, \ldots, x_{p+1})$ dont on a enlevé x_μ.

On constate aisément que ces règles définissent bien un anneau canonique.

Proposition 16.1. — *Soit $\mathcal{K}$ l'anneau d'Alexander [de Čech] attaché à un ensemble non vide X [totalement ordonné]; $\mathcal{H}\mathcal{K}$ est homogène, de degré nul et isomorphe à l'anneau des entiers.*

Preuve quand $\mathcal{K}$ est l'anneau d'Alexander. — Soit c un cycle de degré p ; on a, vu (16.3),

$$(16.4)\qquad \sum_{0 \leq \mu \leq p+1} (-1)^\mu c\left(x_0, x_1, \ldots, \widehat{x_\mu}, \ldots, x_{p+1}\right) = 0.$$

Supposons $p > 0$; donnons-nous un élément x de X et définissons

$$(16.5)\qquad k(x_1, x_2, \ldots, x_p) = c(x, x_1, x_2, \ldots, x_p);$$

(16.4) s'écrit, en faisant $x_0 = x$,

$$c(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) = \sum_{0 \leq \mu \leq p} (-1)^\mu k\left(x_1, \ldots, \widehat{x_{\mu+1}}, \ldots, x_{p+1}\right),$$

c'est-à-dire

(16.6) $$c = \delta k;$$

donc $c \sim 0$.

Supposons $p=0$; d'après (16.4), $c(x_0)=c(x_1)$: $c(x_0)$ est un entier indépendant de x_0; $c \not\sim 0$ si cet entier $\neq 0$.

Preuve quand $\mathcal{K}$ est l'anneau de Čech. — Nous noterons $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}'$ les anneaux d'Alexander et de Čech attachés à X; à chaque élément homogène $k'(x_0, \ldots, x_p)$ de $\mathcal{K}'$ associons comme suit un élément $k(x_0, \ldots, x_p)$ de $\mathcal{K}$

$$k(x_0, \ldots, x_p) = k'(x_0, \ldots, x_p) \quad \text{quand} \quad x_0 < x_1 < \ldots < x_p;$$

$k(x_0, \ldots, x_p)$ est antisymétrique (¹).

Nous définissons ainsi une application canonique de $\mathcal{K}'$ *sur* l'ensemble des éléments antisymétriques de $\mathcal{K}$; cette application est linéaire, biunivoque : elle ne respecte pas la multiplication; mais elle respecte la différentiation : soient $\dot{k}$ et $\dot{k}'$ les différentielles de k et k' dans $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}'$; d'après (16.3)

$$\dot{k}(x_0, x_1, \ldots, x_{p+1}) = \dot{k}'(x_0, x_1, \ldots, x_{p+1}) \quad \text{quand} \quad x_0 < x_1 < \ldots x_{p+1};$$

d'après (16.3) et l'antisymétrie de k, $\dot{k}$ est antisymétrique; $\dot{k}$ est donc l'image de $\dot{k}'$. Soit c' un cycle de $\mathcal{K}'$ de degré > 0; soit c son image dans $\mathcal{K}$; c est antisymétrique; l'élément k de $\mathcal{K}$ que définit (16.5) est antisymétrique; il est donc l'image d'un élément k' de $\mathcal{K}'$; d'après (16.6), $c' = \delta k'$; donc $c' \sim 0$. Si c' est un cycle de $\mathcal{K}'$ de degré nul, $\delta c' = 0$ exprime que $c'(x_0) = c'(x_1)$: $c'(x_0)$ est un entier indépendant de x_0; $c' \not\sim 0$ si cet entier $\neq 0$.

IV. — Anneau d'homologie et anneau spectral d'homologie d'un produit tensonriel.

17. Propriétés de l'anneau filtré $\mathcal{K}' \otimes \mathcal{A}$; calcul de $\mathcal{H}_{l+1}(\mathcal{K}' \otimes \mathcal{A})$. $\mathcal{K}$ désigne un anneau canonique et $\mathcal{A}$ un anneau différentiel-filtré.

(¹) C'est-à-dire : la valeur de $k(x_0, \ldots, x_p)$ est multipliée par -1 quand on transpose deux des arguments; elle est en particulier nulle quand deux des arguments sont égaux.

Il est aisé d'établir les quatre propositions suivantes : *voir* [2], Chap. III, § 1, n° 3.

PROPOSITION 17.1. — *a. Si $\mathcal{K}$ est l'anneau des entiers, dotés d'un degré nul et d'une différentielle nulle, il existe un isomorphisme canonique de $\mathcal{K}' \otimes \mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}$.*

b. Si $\mathcal{A}$ est l'anneau des entiers, dotés d'une filtration et d'une différentielle nulle, il existe un isomorphisme cononique de $\mathcal{K}' \otimes \mathcal{A}$ sur $\mathcal{K}$ muni de la filtration associée à son degré multiplié par l.

Cas a. — Soit u l'unité de $\mathcal{K}$; on associe a à $u \otimes a$.
Cas b. — Soit u l'unité de $\mathcal{A}$; on associe k à $k \otimes u$.

PROPOSITION 17.2. — *$\mathcal{K}' \otimes \mathcal{A}$ dépend additivement de $\mathcal{K}$ et de $\mathcal{A}$: si $\mathcal{K} = \sum_\mu \mathcal{K}_\mu$ et $\mathcal{A} = \sum_\nu \mathcal{A}_\nu$ (sommes directes) alors*

$$\mathcal{K}' \otimes \mathcal{A} = \sum_{\mu,\nu} \mathcal{K}'_\mu \otimes \mathcal{A}_\nu \qquad \textit{(somme directe)}.$$

PROPOSITION 17.3. — *Si $\mathcal{A}'$ est un sous-anneau de $\mathcal{A}$, il existe un homomorphisme canonique de filtration positive, de $\mathcal{K}' \otimes \mathcal{A}'$ dans $\mathcal{K}' \otimes \mathcal{A}$.*

PROPOSITION 17.4. — *Si $\mathcal{J}$ est un idéal de $\mathcal{A}$, l'image canonique de $\mathcal{K}' \otimes \mathcal{J}$ dans $\mathcal{K}' \otimes \mathcal{A}$ est un idéal de $\mathcal{K}' \otimes \mathcal{A}$; le quotient de $\mathcal{K}' \otimes \mathcal{A}$ par cet idéal est l'anneau filtré $\mathcal{K}' \otimes (\mathcal{A}/\mathcal{J})$.*

DÉFINITION 17.1. — *Soit a un élément de l'anneau $\mathcal{A}$; a est dit d'ordre infini si $ma \neq 0$ quel que soit l'entier $m \neq 0$; sinon a est dit d'ordre m, m étant le plus petit entier > 0 tel que $ma = 0$. L'ensemble des éléments a de $\mathcal{A}$ d'ordres finis constitue un idéal noté $\mathfrak{T}\mathcal{A}$ et nommé idéal de torsion de $\mathcal{A}$. Nous dirons que $\mathcal{A}$ est sans torsion quand $\mathfrak{T}\mathcal{A} = 0$, c'est-à-dire quand $\mathcal{A}$ est un module libre relativement à l'anneau des entiers.*

LEMME 17.1. — *Si $\mathcal{K}$ est sans torsion et si $\mathcal{A}'$ est un sous-anneau de $\mathcal{A}$, l'homomorphisme canonique de $\mathcal{K}' \otimes \mathcal{A}'$ dans $\mathcal{K}' \otimes \mathcal{A}$ est un isomorphisme conservant la filtration. On peut donc convenir que*

$$\mathcal{K}' \otimes \mathcal{A}' \subset \mathcal{K}' \otimes \mathcal{A} \tag{17.1}$$

et énoncer comme suit la proposition 17.4 : *si* $\mathcal{J}$ *est un idéal de* $\mathcal{A}$,

$$(\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A})/(\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{J}) = \mathcal{K}^l\otimes(\mathcal{A}/\mathcal{J}). \tag{17.2}$$

Preuve. — Si l'affirmation à prouver (l'homomorphisme canonique de $\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A}$ est un isomorphisme) était fausse, cette affirmation serait encore fausse quand, faisant abstraction des propriétés de multiplication et de différentiation, on remplacerait $\mathcal{K}$ par un de ses sous-groupes à nombre fini de générateurs; d'après le théorème fondamental de la théorie des groupes abéliens (¹), un tel sous-groupe est somme directe de sous-groupes isomorphes à l'anneau des entiers; vu la proposition 17.2, l'affirmation à prouver serait donc fausse quand $\mathcal{K}$ est l'anneau des entiers; or elle résulte alors de la proposition 17.1 *a*.

Lemme 17.2. — *Si* $\mathcal{K}$ *est sans torsion et si sa différentielle est nulle, on a, en remplaçant dans les notations du* nº 9 $\mathcal{C}_r^p$, $\mathcal{D}_r^p$ *par* $\mathcal{C}_r^p\mathcal{A}$, $\mathcal{D}_r^p\mathcal{A}$:

$$\mathcal{C}_r^p(\mathcal{K}^0\otimes\mathcal{A}) = \mathcal{K}^0\otimes\mathcal{C}_r^p\mathcal{A}; \tag{17.3}$$

$$\mathcal{D}_r^p(\mathcal{K}^0\otimes\mathcal{A}) = \mathcal{K}^0\otimes\mathcal{D}_r^p\mathcal{A}. \tag{17.4}$$

Preuve. — Identique à la précédente.

Lemme 17.3. — *Si* $\mathcal{K}$ *est sans torsion et si sa différentielle est nulle, alors*

$$\mathcal{H}_r(\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A}) = \mathcal{K}^l\otimes\mathcal{H}_r\mathcal{A}. \tag{17.5}$$

Preuve pour $l=0$. — On utilise la définition (9.9) de $\mathcal{H}_r$ et les formules (17.2), (17.3) et (17.4).

Preuve pour $l\neq 0$. — Donnons à $\mathcal{A}$ un degré nul; augmentons la filtration de $\mathcal{K}^0\otimes\mathcal{A}$ de l fois le degré de $\mathcal{K}^1\otimes\mathcal{A}$; on obtient la filtration de $\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A}$, vu la remarque du nº **14**, et la formule (17.5), vu la remarque du nº **11**.

Proposition 17.5. — *Si* $\mathcal{K}$ *est un anneau canonique sans torsion et* $\mathcal{A}$ *un anneau différentiel-filtré,*

$$\boxed{\mathcal{H}_{l+1}(\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A}) = \mathcal{H}(\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{H}_l\mathcal{A});} \tag{17.6}$$

(¹) [15], Chap. XV, § 109 : *Hauptsatz über abelsche Gruppen.*

les deux membres sont gradués; la différentielle ∂ est utilisée sur $\mathcal{K}$ et la différentielle ∂_l sur $\mathcal{H}_l\mathcal{A}$; $\mathcal{K}'\otimes\mathcal{H}_l\mathcal{A}$ a donc une différentielle homogène de degré l.

Preuve. — Définissons une différentielle ∂' sur $\mathcal{K}'\otimes\mathcal{A}$ en posant

$$\partial' = 0 \text{ sur } \mathcal{K}; \qquad \partial' = \partial \text{ sur } \mathcal{A}.$$

On a $f(\partial - \partial') = l$; donc, vu la proposition 10.7 *a*

$$\mathcal{H}_l(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{A}) = \mathcal{H}'_l(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{A}),$$

c'est-à-dire, vu le lemme 17.3,

$$\mathcal{H}_l(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{A}) = \mathcal{K}'\otimes\mathcal{H}_l\mathcal{A};$$

d'après la proposition 10.7 *c*, ∂_l s'obtient en utilisant au second membre ∂ sur $\mathcal{K}$ et ∂_l sur $\mathcal{H}_l\mathcal{A}$; d'où (17.6), puisque $\mathcal{H}_{l+1}$ est l'anneau d'homologie de $\mathcal{H}_l$.

Proposition 17.6. — *Si $\mathcal{K}$ est sans torsion et possède une unité u qui n'est divisible par aucun entier, alors $u\otimes a$, où $a\in\mathcal{A}$, constitue un isomorphisme de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{K}'\otimes\mathcal{A}$.*

Preuves. — u est un cycle de degré nul d'après les remarques des nos **4** et **8**. Nous pouvons donc faire abstraction des propriétés multiplicatives, des propriétés de différentiation et remplacer $\mathcal{K}$ par un de ses sous-groupes additifs de degré nul à nombre fini de générateurs. D'après un théorème classique [1] ce groupe a une base constituée par des éléments linéairement indépendants dont l'un est u. Vu la proposition 17.2, il suffit donc de prouver la proposition 17.6 quand $\mathcal{K}$ est l'ensemble des multiples entiers de u; dans ce cas la proposition 17.6 s'identifie à la proposition 17.1 *a*.

18. Relations entre $\mathcal{H}(\mathcal{K}\otimes\mathcal{A})$, $\mathcal{H}\mathcal{K}$ et $\mathcal{H}\mathcal{A}$ quand $\mathcal{K}$ est sans torsion [2]. — Lemme 18.1. — *Soient un anneau canonique $\mathcal{K}$ et un anneau différentiel sans torsion $\mathcal{A}$. Soit Π l'homomorphisme canonique de*

---

(1) [15], Chap. XV, § 108, *Elementarteilersatz*.

(2) Le théorème 18.1 figure dans un article à paraître de H. Cartan et Eilenberg; ayant besoin de l'appliquer, nous en donnons rapidement une démonstration, qui indique à quelle filtration il se rattache. L'emploi d'autres

$\mathcal{H}\mathcal{K}\otimes\mathcal{H}\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H}(\mathcal{K}\otimes\mathcal{A})$ qui s'obtient en associant à l'élément $h\otimes h'$ de $\mathcal{H}\mathcal{K}\otimes\mathcal{H}\mathcal{A}$ la classe d'homologie de $c\otimes c'$, c et c' étant des cycles des classes h et h'.

a. Π *est un isomorphisme de $\mathcal{H}\mathcal{K}\otimes\mathcal{H}\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H}(\mathcal{K}\otimes\mathcal{A})$; on peut donc convenir que*

$$\mathcal{H}\mathcal{K}\otimes\mathcal{H}\mathcal{A}\subset\mathcal{H}(\mathcal{K}\otimes\mathcal{A}).$$

b. Le $\mathcal{H}\mathcal{K}\otimes\mathcal{H}\mathcal{A}$-module $\mathcal{H}(\mathcal{K}\otimes\mathcal{A})/\mathcal{H}\mathcal{K}\otimes\mathcal{H}\mathcal{A}$ ne dépend que de $\mathcal{H}\mathcal{K}$ et $\mathcal{A}$ et en dépend additivement :

si $\mathcal{H}\mathcal{K}=\sum_{\mu}\mathcal{H}\mathcal{K}_{\mu}$ *et* $\mathcal{A}=\sum_{\nu}\mathcal{A}_{\nu}$ (sommes directes) *et si* $\delta\mathcal{A}_{\nu}\subset\mathcal{A}_{\nu}$, *alors*

$$\mathcal{H}(\mathcal{K}\otimes\mathcal{A})/\mathcal{H}\mathcal{K}\otimes\mathcal{H}\mathcal{A}=\sum_{\mu,\nu}\mathcal{H}(\mathcal{K}_{\mu}\otimes\mathcal{A}_{\nu})/\mathcal{H}\mathcal{K}_{\mu}\otimes\mathcal{H}\mathcal{A}_{\nu}\qquad\text{(somme directe).}$$

c. Le groupe additif $\mathcal{H}(\mathcal{K}\otimes\mathcal{A})/\mathcal{H}\mathcal{K}\otimes\mathcal{H}\mathcal{A}$ ne dépend que de $\mathcal{A}$ et du groupe de torsion de $\mathcal{H}\mathcal{K}$; il en dépend additivement.

Preuve. — Soit $\mathcal{C}$ l'anneau des cycles de $\mathcal{A}$; utilisons la filtration de $\mathcal{A}$ qui vaut -1 sauf sur $\mathcal{C}$ où elle vaut zéro; $f(\delta)=1$; d'après la proposition 10.8, $\mathcal{H}_1\mathcal{A}$ est l'anneau gradué :

$$\mathcal{E}=\mathcal{E}^{[-1]}+\mathcal{E}^{[0]};\qquad \mathcal{E}^{[-1]}=\mathcal{A}/\mathcal{C};\qquad \mathcal{E}^{[0]}=\mathcal{C};$$

$\mathcal{E}$ est sans torsion, car $\mathcal{A}$ est sans torsion, $\mathcal{C}\subset\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ est isomorphe à $\delta\mathcal{A}\subset\mathcal{A}$; $\mathcal{E}$ a une différentielle homogène de degré 1 :

$$\delta(a \bmod \mathcal{C})=\delta a\in\mathcal{C};\qquad \delta a=0\quad\text{si}\quad a\in\mathcal{C}.$$

D'après la proposition 10.8

$$\mathcal{H}_0(\mathcal{K}^0\otimes\mathcal{A})=\mathcal{K}\otimes\mathcal{A})/(\mathcal{K}\otimes\mathcal{C})+\mathcal{K}\otimes\mathcal{C},$$

c'est-à-dire, vu la proposition 17.4,

$$\mathcal{H}_0(\mathcal{K}^0\otimes\mathcal{A})=\mathcal{K}^0\otimes\mathcal{E};$$

---

filtrations fournirait des isomorphismes non canoniques de $\mathcal{H}(\mathcal{K}\otimes\mathcal{A})$ sur $\mathcal{H}\mathcal{K}\otimes\mathcal{H}\mathcal{A}+\mathcal{H}(\mathcal{K}\otimes\mathcal{A})/\mathcal{H}\mathcal{K}\otimes\mathcal{H}\mathcal{A}$ dans les deux cas suivants :

1° $\mathcal{K}$ et $\mathcal{A}$ on des bases (finies ou non);

2° $\mathcal{K}$ a une base; $\delta=0$ sur $\mathcal{A}$.

Ce dernier cas a été traité par Čech (*Fundamenta math.*, t. 25, 1935, p. 33).

vu la proposition 10.8, la différentielle ∂_0 de $\mathcal{H}_0$ s'obtient en convenant que

$$\partial_0 = \partial \text{ sur } \mathcal{K}; \qquad \partial_0 = 0 \text{ sur } \mathcal{E}.$$

Puisque $\mathcal{H}_1$ est l'anneau d'homologie de $\mathcal{H}_0$ et que $\mathcal{E}$ est sans torsion, on a, d'après le lemme 17.3, où l'on peut intervertir les rôles de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{H}_1(\mathcal{K}^0 \otimes \mathcal{A}) = (\mathcal{H}\mathcal{K})^0 \otimes \mathcal{E}.$$

On déduit aisément de la définition (9.11) de ∂_r que ∂_1 s'obtient en convenant que

$$\partial_1 = 0 \text{ sur } \mathcal{H}\mathcal{K}; \qquad \partial_1 = \partial \text{ sur } \mathcal{E};$$

puisque le degré de $\mathcal{H}_r(\mathcal{K}^0 \otimes \mathcal{A})$ est -1 ou 0 quand $r > 1$, sa différentielle ∂_r est nulle; donc, vu la proposition 10.3,

$$\mathcal{H}[(\mathcal{H}\mathcal{K})^0 \otimes \mathcal{E}] = \mathcal{G}\mathcal{H}(\mathcal{K}^0 \otimes \mathcal{A}).$$

D'après la proposition 17.4, l'ensemble des termes de degré nul de $\mathcal{H}[(\mathcal{H}\mathcal{K})^0 \otimes \mathcal{E}]$ est $\mathcal{H}\mathcal{K} \otimes \mathcal{H}\mathcal{A}$; la relation précédente signifie donc ceci :

1° $\mathcal{H}\mathcal{K} \otimes \mathcal{H}\mathcal{A}$ est l'ensemble $\mathcal{H}^{(0)}(\mathcal{K}^0 \otimes \mathcal{A})$ des termes de $\mathcal{H}(\mathcal{K}^0 \otimes \mathcal{A})$ dont la filtration est 0.

2° $\mathcal{H}(\mathcal{K} \otimes \mathcal{A})/\mathcal{H}\mathcal{K} \otimes \mathcal{H}\mathcal{A}$ est l'ensemble $\mathcal{H}^{(-1)}[(\mathcal{H}\mathcal{K})^0 \otimes \mathcal{E}]$ des termes de degré -1 de $\mathcal{H}[(\mathcal{H}\mathcal{K})^0 \otimes \mathcal{E}]$.

1° prouve que $\overline{\Pi}$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}\mathcal{K} \otimes \mathcal{H}\mathcal{A}$ sur $\mathcal{H}^{(0)}(\mathcal{K} \otimes \mathcal{A})$;

2° prouve *b*.

Pour prouver *c* il suffit de prouver que l'isomorphisme canonique de $\mathfrak{T}\mathcal{H}\mathcal{K}$ dans $\mathcal{H}\mathcal{K}$ définit un isomorphisme du groupe $\mathcal{H}^{(-1)}[(\mathfrak{T}\mathcal{H}\mathcal{K})^0 \otimes \mathcal{E}]$ sur $\mathcal{H}^{(-1)}[(\mathcal{H}\mathcal{K})^0 \otimes \mathcal{E}]$. Si cette affirmation était fausse, elle serait fausse quand on remplacerait $\mathcal{H}\mathcal{K}$ par un de ses sous-groupes additifs à nombre fini de générateurs; un tel sous-groupe est somme directe de sous-groupes monogènes ([1]); d'après la proposition 17.2, l'affirmation serait donc fausse quand $\mathcal{H}\mathcal{K}$ est monogène; or elle est évidente si $\mathcal{H}\mathcal{K}$ est fini, car $\mathfrak{T}\mathcal{H}\mathcal{K} = \mathcal{H}\mathcal{K}$; si $\mathcal{H}\mathcal{K}$ est monogène et n'est

---

([1]) [15], Chap. XV, § 109.

pas fini, $\mathcal{HK}$ est le groupe additif des entiers; d'après la proposition 17.1 *b*

$$\mathcal{H}^{(-1)}[(\mathcal{HK})^0 \otimes \mathcal{E}] = \mathcal{H}^{(-1)}(\mathcal{E}) = 0; \qquad \mathcal{THK} = 0;$$

l'affirmation est encore exacte.

LEMME 18.2. — *Soient un anneau canonique sans torsion $\mathcal{K}$ et un anneau différentiel $\mathcal{A}$; l'énoncé du lemme* 18.1 *vaut quand on y permute les rôles de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{A}$.*

Preuve. — $\mathcal{K}$ et $\mathcal{A}$ ont dans $\mathcal{K} \otimes \mathcal{A}$ des rôles symétriques.

LEMME 18.3. — *Tout anneau $\mathcal{H}$ est l'anneau d'homologie d'un anneau sans torsion $\mathcal{A}$.*

Preuve. — Soit un système de générateurs h_μ de l'anneau $\mathcal{H}$: tout élément de $\mathcal{H}$ est somme de produits de h_μ; soient l_μ des symboles correspondant biunivoquement aux h_μ; les combinaisons linéaires à coefficients entiers des produits des l_μ, aucune relation ne liant les l_μ, constituent un anneau (¹) sans torsion $\mathcal{L}^{[0]}$; soit $\mathcal{J}$ l'idéal de $\mathcal{L}^{[0]}$ qu'annule l'application $l_\mu \to h_\mu$ de $\mathcal{L}^{[0]}$ sur $\mathcal{H}$; soit $\mathcal{L}^{[-1]}$ un $\mathcal{L}^{[0]}$-module isomorphe à $\mathcal{J}$ et soit δ l'isomorphisme de $\mathcal{L}^{[-1]}$ sur $\mathcal{J}$; δ est une différentielle de degré 1 de l'anneau gradué $\mathcal{L}^{[-1]} + \mathcal{L}^{[0]}$ qui est sans torsion et dont l'anneau d'homologie est $\mathcal{H}$.

PROPOSITION 18.1. — *Soient un anneau canonique sans torsion $\mathcal{K}$ et un anneau différentiel $\mathcal{A}$.*

a. On obtient un isomorphisme canonique $\overline{\Pi}$ de $\mathcal{HK} \otimes \mathcal{HA}$ dans $\mathcal{H}(\mathcal{K} \otimes \mathcal{A})$ en associant à l'élément $h \otimes h'$ de $\mathcal{HK} \otimes \mathcal{HA}$ la classe d'homologie de $c \otimes c'$, c et c' étant des cycles des classes h et h' : on peut donc convenir que

$$\mathcal{HK} \otimes \mathcal{HA} \subset \mathcal{H}(\mathcal{K} \otimes \mathcal{A}),$$

b. Le $\mathcal{HK} \otimes \mathcal{HA}$-module $\mathcal{H}(\mathcal{K} \otimes \mathcal{A})/\mathcal{HK} \otimes \mathcal{HA}$ ne dépend que de $\mathcal{HK}$ et $\mathcal{HA}$ et en dépend additivement : si $\mathcal{HK}$ et $\mathcal{HA}$ sont isomorphes à des sommes directes $\sum_\mu \mathcal{HK}_\mu$ et $\sum_\nu \mathcal{HA}_\nu$, alors $\mathcal{H}(\mathcal{K} \otimes \mathcal{A})/\mathcal{HK} \otimes \mathcal{HA}$

(¹) L'algèbre stricte, sur l'anneau des entiers, du monoïde libre déduit de l'ensemble des l_μ : [2], Chap. II, § 7, n° 9.

est isomorphe à la somme directe

$$\sum_{\mu,\nu} \mathcal{H}(\mathcal{K}_\mu \otimes \mathcal{A}_\nu)/\mathcal{H}\mathcal{K}_\mu \otimes \mathcal{H}\mathcal{A}_\nu.$$

Nota. — On ne suppose pas les $\mathcal{K}_\mu$ et $\mathcal{A}_\nu$ sous-anneaux de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{A}$.

c. Le groupe additif $\mathcal{H}(\mathcal{K} \otimes \mathcal{A})/\mathcal{H}\mathcal{K} \otimes \mathcal{H}\mathcal{A}$ *ne dépend que des groupes de torsion de* $\mathcal{H}\mathcal{K}$ *et* $\mathcal{H}\mathcal{A}$ *et en dépend additivement. En particulier :*

d. Si $\mathcal{H}\mathcal{K}$ *ou* $\mathcal{H}\mathcal{A}$ *est sans torsion,*

$$\mathcal{H}(\mathcal{K} \otimes \mathcal{A}) = \mathcal{H}\mathcal{K} \otimes \mathcal{H}\mathcal{A}.$$

e. Si $\mathcal{T}\mathcal{H}\mathcal{K}$ *et* $\mathcal{T}\mathcal{H}\mathcal{A}$ *sont monogènes d'ordres* m *et* n, *alors* $\mathcal{H}(\mathcal{K} \otimes \mathcal{A})/\mathcal{H}\mathcal{K} \otimes \mathcal{H}\mathcal{A}$ *est monogène d'ordre* (m, n), *plus grand commun diviseur de* m *et* n.

Preuve de a. — Lemme 18.2.

Preuve de b, c et d. — D'après le lemme 18.2, le module

$$\mathcal{H}(\mathcal{K} \otimes \mathcal{A})/\mathcal{H}\mathcal{K} \otimes \mathcal{H}\mathcal{A}$$

ne dépend que de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{H}\mathcal{A}$; le lemme 18.3 permet de remplacer $\mathcal{A}$ par un anneau différentiel sans torsion; on peut alors appliquer simultanément les lemmes 18.1 et 18.2.

Preuve de e. — Il suffit de vérifier e dans un cas particulier : supposons que $\mathcal{K}$ ait une base constituée par une unité u et un élément k de degré -1, tel que $\delta k = mu$; supposons que $\mathcal{A}$ soit gradué et ait une base analogue : v, a, $\delta a = nv$, degré $a = -1$; $\mathcal{K}^1 \otimes \mathcal{A}$ n'a pas de cycle de degré -2; ses cycles de degré -1 sont les multiples de

$$\frac{m}{(m, n)} u \otimes a - \frac{n}{(m, n)} k \otimes v = \frac{1}{(m, n)} \delta(k \otimes a).$$

ses classes d'homologie de degré 0 constituent $\mathcal{H}\mathcal{K} \otimes \mathcal{H}\mathcal{A}$.

19. Calcul de $\mathcal{H}_r(\mathcal{K}' \otimes \mathcal{A})$ et $\mathcal{H}(\mathcal{K}' \otimes \mathcal{A})$ quand $\mathcal{K}$ et $\mathcal{H}\mathcal{K}$ sont sans torsion. — $\mathcal{K}$ désigne un anneau canonique et $\mathcal{A}$ un anneau différentiel-filtré.

Proposition 19.1. — *Si* $\mathcal{K}$ *est sans torsion, il existe un homomor-*

phisme canonique $\overline{\Pi}$ *de* $(\mathcal{H}\mathcal{K})'\otimes\mathcal{H}_r\mathcal{A}\,(l<r)$ *et* $(\mathcal{H}\mathcal{K})'\otimes\mathcal{H}\mathcal{A}$ *dans* $\mathcal{H}_r(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{A})$ *et* $\mathcal{H}(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{A})$; $\overline{\Pi}$ *conserve le degré*, $f(\overline{\Pi})\geqq 0$; $\overline{\Pi}$ *commute avec* δ_r *et* $\varkappa_s^r$; $\overline{\Pi}$ *applique* $(\mathcal{H}\mathcal{K})'\otimes\lim\limits_{r\to+\infty}\mathcal{H}_r\mathcal{A}$ *et* $(\mathcal{H}\mathcal{K})'\otimes\mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{A}$ *dans* $\lim\limits_{r\to+\infty}\mathcal{H}_r(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{A})$ *et son sous-anneau* $\mathcal{G}\mathcal{H}(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{A})$; *la restriction de* $\overline{\Pi}$ *à* $(\mathcal{H}\mathcal{K})'\otimes\mathcal{H}_{l+1}\mathcal{A}$ *est l'isomorphisme* $\overline{\Pi}$, *que définit la proposition* 18.1 *a, de cet anneau dans*

$$\mathcal{H}(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{H}_l\mathcal{A})=\mathcal{H}_{l+1}(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{A});$$

la restriction de $\overline{\Pi}$ *à* $(\mathcal{H}\mathcal{K})'\otimes\mathcal{H}\mathcal{A}$ *est l'isomorphisme* $\overline{\Pi}$, *que définit la proposition* 18.1 *a, de cet anneau dans* $\mathcal{H}(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{A})$.

Preuve. — Contentons-nous de définir $\overline{\Pi}$ sur $(\mathcal{H}\mathcal{K})'\otimes\mathcal{H}_r\mathcal{A}$: les propositions énoncées résultent aisément de cette définition. Dans les notations du n° **9** remplaçons $\mathcal{C}_r^p$, etc., par $\mathcal{C}_r^p\mathcal{A}$, etc.; soit $\mathcal{C}^{[p]}\mathcal{K}$ (et $\mathcal{D}^{[p]}\mathcal{K}$) l'ensemble des cycles de $\mathcal{K}$, homogènes de degré p et ~ 0); on a les formules analogues à (9.7) et (9.8) :

$$(19.1)\quad \mathcal{C}^{[p]}\mathcal{K}\otimes\mathcal{C}_r^q\mathcal{A}\subset\mathcal{C}_r'^{p+q}(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{A});\qquad \mathcal{C}^{[p]}\mathcal{K}\otimes\mathcal{D}_r^q\mathcal{A}\subset\mathcal{D}_r'^{p+q}(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{A});$$

$$(19.2)\quad \mathcal{D}^{[p]}\mathcal{K}\otimes\mathcal{C}_r^q\mathcal{A}\subset\mathcal{C}_{r-1}'^{p+q+1}(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{A})+\mathcal{D}_{r-1}'^{p+q}(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{A})\qquad\text{où}\quad l<r.$$

Soient $h^{[p]}\in\mathcal{H}\mathcal{K}$, de degré p; $h_r^{[q]}\in\mathcal{H}_r\mathcal{A}$ de degré q; on a

$$h^{[p]}=c^p \bmod \mathcal{D}^{[p]}\mathcal{K},\ \text{où}\quad c^p\in\mathcal{C}^{[p]}\mathcal{K};$$

$$h_r^{[q]}=c_r^q \bmod (\mathcal{C}_{r-1}^{q+1}\mathcal{A}+\mathcal{D}_{r-1}^q\mathcal{A}),\qquad\text{où}\quad c_r^q\in\mathcal{C}_r^q\mathcal{A};$$

(19.1) et (19.2) justifient la définition suivante de l'homomorphisme $\overline{\Pi}$:

$$\overline{\Pi}(h^{[p]}\otimes h_r^{[q]})=c^p\otimes c_r^q \bmod \{\mathcal{C}_{r-1}'^{p+q+1}(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{A})+\mathcal{D}_{r-1}'^{p+q}(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{A})\}\in\mathcal{H}_r(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{A}).$$

Proposition 19.2. — *Faisons l'une des deux hypothèses suivantes :*

1° $\mathcal{K}$ *et* $\mathcal{H}\mathcal{K}$ *sont sans torsion;*

2° $\mathcal{K}$, $\mathcal{H}_r\mathcal{A}\,(l<r)$ *et* $\mathcal{H}\mathcal{A}$ *sont sans torsion.*

Alors l'homomorphisme canonique $\overline{\Pi}$ (*proposition* 19.1) *est un isomorphisme, conservant le degré et la filtration, de* $(\mathcal{H}\mathcal{K})'\otimes\mathcal{H}_r\mathcal{A}\,(l<r)$ *et* $(\mathcal{H}\mathcal{K})'\otimes\mathcal{H}\mathcal{A}$ *sur* $\mathcal{H}_r(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{A})$ *et* $\mathcal{H}(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{A})$.

Preuve. — D'après la proposition 18.1 *d*, $\overline{\Pi}$ applique isomorphiquement l'anneau $(\mathcal{H}\mathcal{K})'\otimes\mathcal{H}_{l+1}\mathcal{A}$ sur $\mathcal{H}(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{H}_l\mathcal{A})=\mathcal{H}_{l+1}(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{A})$, par suite son anneau d'homologie $(\mathcal{H}\mathcal{K})'\otimes\mathcal{H}_{l+2}\mathcal{A}$ sur $\mathcal{H}_{l+2}(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{A})$, et plus généralement $(\mathcal{H}\mathcal{K})'\otimes\mathcal{H}_r\mathcal{A}$ sur $\mathcal{H}_r(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{A})$; donc Π applique isomorphiquement $(\mathcal{H}\mathcal{K})'\otimes \lim\limits_{r\to+\infty}\mathcal{H}_r\mathcal{A}$ sur $\lim\limits_{r\to+\infty}\mathcal{H}_r(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{A})$ et par suite $(\mathcal{H}\mathcal{K})'\otimes\mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{A}=\mathcal{G}[(\mathcal{H}\mathcal{K})'\otimes\mathcal{H}\mathcal{A}]$ (proposition 17.4) dans $\mathcal{G}\mathcal{H}(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{A})$; les propositions 6.1 et 18.1*d* achèvent la preuve.

20. Calcul de $\mathcal{H}_r(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{A})$ et $\mathcal{H}(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{A})$ quand $\mathcal{A}$ est une algèbre sur un corps. — Définition. — *Soit $\mathfrak{M}$ un anneau commutatif possédant une unité. Nous dirons qu'un anneau différentiel, gradué ou filtré $\mathcal{A}$ est une algèbre différentielle graduée ou filtrée sur $\mathfrak{M}$ quand l'anneau $\mathcal{A}$ est une algèbre sur $\mathfrak{M}$ (voir [2]) et que*

$$\delta(ma)=m\,\delta a;\qquad \text{degré } ma=\text{degré } a;$$
$$f(ma)\geq f(a)\qquad \text{si}\quad m\in\mathfrak{M}\quad a\in\mathcal{A}.$$

Le produit tensoriel d'algèbres sur $\mathfrak{M}$, que nous noterons $\overset{\mathfrak{M}}{\otimes}$, se définit en remplaçant au n° **15** *la condition que m est entier par la condition $m\in\mathfrak{M}$. Soit $\mathcal{K}$ un anneau canonique; $\mathcal{K}\otimes\mathfrak{M}$ est une algèbre canonique sur $\mathfrak{M}$; soit $\mathcal{A}$ une algèbre différentielle-filtrée ou différentielle-graduée sur $\mathfrak{M}$; il existe un isomorphisme canonique de $(\mathcal{K}\otimes\mathfrak{M})'\overset{\mathfrak{M}}{\otimes}\mathcal{A}$ sur $\mathcal{K}'\otimes\mathcal{A}$: c'est*

$$(k\otimes m)\overset{\mathfrak{M}}{\otimes}a\to k\otimes ma. \tag{20.1}$$

Les raisonnements et conclusions des n$^{\text{os}}$ **17**, **18** et **19** subsistent quand on remplace les anneaux par des algèbres sur un même *corps* commutatif $\mathfrak{M}$, $\otimes$ par $\overset{\mathfrak{M}}{\otimes}$, les groupes abéliens à nombre fini de générateurs par les espaces vectoriels sur $\mathfrak{M}$ de dimension finie et tous les idéaux de torsion par zéro : compte tenu de l'isomorphisme (20.1), la proposition 19.2 devient donc, quand on y remplace l'anneau canonique $\mathcal{K}$ par l'algèbre canonique $\mathcal{K}\otimes\mathfrak{M}$ et $\mathcal{A}$ par une algèbre sur $\mathfrak{M}$:

Proposition 20.1. — *Si $\mathcal{K}$ est un anneau canonique et $\mathcal{A}$ une algèbre différentielle-filtrée sur un corps commutatif $\mathfrak{M}$, il existe un isomorphisme canonique, conservant le degré et la filtration, de $\mathcal{H}_r(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{A})$, où $l<r$, et $\mathcal{H}(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{A})$ sur*

$$[\mathcal{H}(\mathcal{K}\otimes\mathfrak{M})]'\overset{\mathfrak{M}}{\otimes}\mathcal{H}_r\mathcal{A}\qquad\text{et}\qquad[\mathcal{H}(\mathcal{K}\otimes\mathfrak{M})]'\overset{\mathfrak{M}}{\otimes}\mathcal{H}\mathcal{A}.$$

21. Cas où la filtration de $\mathcal{C}$ est nulle. — Lemme 21.1. — *Soient un anneau canonique sans torsion $\mathcal{K}$ et un anneau différentiel $\mathcal{C}$. Utilisons sur $\mathcal{C}$ un degré nul. Soit $l \neq 0$. Étant donné $x \in \mathcal{K}^l \otimes \mathcal{C}$ tel que la $q^{\text{ième}}$ composante homogène* (n° 4) *de δx soit nulle, il existe y et $z \in \mathcal{K}^l \otimes \mathcal{C}$ tels que : $x = y + z$; δy (et δz) est la somme des composantes homogènes de δx de degrés inférieurs (et supérieurs) à q; les composantes homogènes de y (et z) sont de degrés $\leqq q$ (et $\geqq q$).*

Preuve. — En divisant tous les degrés par l ramenons-nous au cas $l = 1$. Soit $x^{[p]}$ la composante homogène de x de degré p; soit

$$x^{[q-1]} = \sum_\mu k_\mu^{[q-1]} \otimes a_\mu; \qquad x^{[q]} = \sum_\nu k_\nu^{[q]} \otimes a'_\nu;$$

par hypothèse

$$\sum_\mu \delta k_\mu^{[q-1]} \otimes a_\mu + (-1)^q \sum_\nu k_\nu^{[q]} \otimes \delta a'_\nu = 0;$$

cette relation vaut quand on remplace $\mathcal{K}$ par un de ses sous-groupes additifs de degré q à base finie; nous pouvons supposer (¹) que les $k_\nu^{[q]}$ constituent cette base et que les combinaisons linéaires des $\delta k_\mu^{[q-1]}$ sont les combinaisons linéaires des $m_\nu k_\nu^{[q]}$ (m_ν entier). Il existe des $k_\nu^{[q-1]}$ tels que $\delta k_\nu^{[q-1]} = m_\nu k_\nu^{[q]}$; tout $k_\mu^{[q-1]}$ est somme de $k_\nu^{[q-1]}$ et d'un cycle $c_\mu^{[q-1]}$; en résumé :

(20.1) $$x^{[q-1]} = \sum_\mu c_\mu^{[q-1]} \otimes a_\mu + \sum_\nu k_\nu^{[q-1]} \otimes a_\nu;$$

(20.2) $$x^{[q]} = \sum_\nu k_\nu^{[q]} \otimes a'_\nu;$$

(20.3) $$\delta c_\mu^{[q-1]} = 0;$$

(20.4) $$\delta k_\nu^{[q-1]} = m_\nu k_\nu^{[q]};$$

(20.5) $$\sum_\nu k_\nu^{[q]} \otimes (m_\nu a_\nu + (-1)^q \delta a'_\nu) = 0.$$

(20.5) vaut dans $\mathcal{K}' \otimes \mathcal{C}$, $\mathcal{K}'$ ayant pour base les $k_\nu^{[q]}$; donc, vu les propositions 17.1 *a* et 17.2,

$$m_\nu a_\nu + (-1)^q \delta a'_\nu = 0.$$

(¹) [15] *Elementarteilersatz*, Chap. XV, § 108.

D'après (20.4), $k_\nu^{[q]}$ est un cycle $c_\nu^{[k]}$ si $m_\nu \neq 0$. Soient σ les ν tels que $m_\sigma \neq 0$ et τ les ν tels que $m_\nu = 0$; on peut choisir $k_\tau^{[q-1]} = 0$. Les relations précédentes deviennent

$$(20.6)\qquad \left\{\begin{array}{l} x^{[q-1]} = \sum_\mu c_\mu^{[q-1]} \otimes a_\mu + \sum_\sigma k_\sigma^{[q-1]} \otimes a_\sigma ; \\ x^{[q]} = \sum_\sigma c_\sigma^{[q]} \otimes a'_\sigma + \sum_\tau k_\tau^{[q]} \otimes a'_\tau ; \\ \delta c_\mu^{[q-1]} = 0 ; \qquad \delta k_\sigma^{[q-1]} = m_\sigma c_\sigma^{[q]} ; \qquad \delta c_\sigma^{[q]} = 0 ; \\ \qquad \delta a'_\sigma = (-1)^{q-1} m_\sigma a_\sigma ; \qquad \delta a'_\tau = 0. \end{array}\right.$$

Soit

$$y = \sum_{p<q-1} x^{[p]} + \sum_\mu c_\mu^{[q-1]} \otimes a_\mu + \sum_\sigma (k_\sigma^{[q-1]} \otimes a_\sigma + c_\sigma^{[q]} \otimes a'_\sigma);$$
$$z = \sum_\tau k_\tau^{[q]} \otimes a'_\tau + \sum_{p>q} x^{[p]};$$

les propriétés énoncées résultent de (20.6).

PROPOSITION 21.1. — *Soient un anneau canonique sans torsion $\mathcal{K}$, un anneau différentiel $\mathcal{A}$ de filtration nulle et un entier $l > 0$.*

a. La filtration des éléments non nuls de $\mathcal{H}(\mathcal{K}^l \otimes \mathcal{A})$ est finie;

b. $\delta_r = 0$, $\mathcal{H}_r(\mathcal{K}^l \otimes \mathcal{A}) = \mathcal{G}\mathcal{H}(\mathcal{K}^l \otimes \mathcal{A}) = \mathcal{H}(\mathcal{K}^l \otimes \mathcal{H}\mathcal{A})$ pour $l < r$.

Preuve de a. — Nous utiliserons sur $\mathcal{A}$ un degré nul; la filtration de $\mathcal{K}^l \otimes \mathcal{A}$ est la filtration associée à son degré (n° 6). Soit $h \in \mathcal{H}(\mathcal{K}^l \otimes \mathcal{A})$ tel que $f(h) = +\infty$; soit c un cycle de $\mathcal{K} \otimes \mathcal{A}$ appartenant à la classe d'homologie h; soit $q-1$ le degré maximum des composantes homogènes non nulles de c, puisque $f(h) = +\infty$, il existe, vu la formule (8.3), un cycle c' de la classe h tel que $f(c') > q$: les composantes homogènes de c' sont de degré $> q$ et $c - c' = \delta x$; d'après le lemme 21.1, il existe y tel que $\delta y = c$; donc $h = 0$.

Preuve de b. — D'après les propositions 10.1 et 10.4, $\mathcal{H}_l\mathcal{A} = \mathcal{H}\mathcal{A}$; donc, vu la formule (17.6),

$$\mathcal{H}_{l+1}(\mathcal{K}^l \otimes \mathcal{A}) = \mathcal{H}(\mathcal{K}^l \otimes \mathcal{H}\mathcal{A}).$$

Soit $x \in \mathcal{C}^p_{l+1}(\mathcal{K}' \otimes \mathcal{A})$; on a $\delta x \in \mathcal{O}^{p+l+1}(\mathcal{K}' \otimes \mathcal{A})$; appliquons le lemme 20.1 en choisissant $q = p+1$: il vient

$$x = y + z, \qquad y \in \mathcal{C}^p(\mathcal{K}' \otimes \mathcal{A}), \qquad z \in \mathcal{C}^{p+1}_l(\mathcal{K}' \otimes \mathcal{A});$$

donc

$$\mathcal{C}^p_{l+1}(\mathcal{K}' \otimes \mathcal{A}) = \mathcal{C}^p(\mathcal{K}' \otimes \mathcal{A}) + \mathcal{C}^{p+1}_l(\mathcal{K}' \otimes \mathcal{A});$$

donc, vu (9.14), $\varkappa^{l+1}_\infty$ est défini sur $\mathcal{H}_{l+1}(\mathcal{K}' \otimes \mathcal{A})$; donc $\delta_r = 0$ pour $l < r$; donc

$$\mathcal{H}_{l+1}(\mathcal{K}' \otimes \mathcal{A}) = \mathcal{H}_r(\mathcal{K}' \otimes \mathcal{A})$$

et tout élément de $\lim\limits_{r \to +\infty} \mathcal{H}_r(\mathcal{K}' \otimes \mathcal{A})$ appartient à

$$\mathcal{H}_\infty(\mathcal{K}' \otimes \mathcal{A}) = \mathcal{G}\mathcal{H}(\mathcal{K}' \otimes \mathcal{A}) \qquad [\text{formule } (9.16)].$$

CHAPITRE II.

ANNEAU SPECTRAL ET ANNEAU FILTRÉ D'HOMOLOGIE, RELATIFS A UN FAISCEAU DIFFÉRENTIEL-FILTRÉ, D'UN ESPACE LOCALEMENT COMPACT ET D'UNE APPLICATION CONTINUE.

I. — Espace localement compact.

22. Tous les espaces envisagés seront *localement compacts* [1]. Soit X un tel espace; nous nommerons [2] *voisinage ouvert de l'*∞ toute partie de X dont le complémentaire est compact; nous nommerons *voisinage de l'*∞ toute partie de X contenant un voisinage ouvert de l'∞; si X est compact, chacune de ses parties est donc un voisinage de l'∞. Si $Y \subset X$, nous nommerons *voisinage de* $Y \cup \infty$ toute partie de X qui est à la fois voisinage de Y et voisinage de l'∞; si X est compact, les voisinages de $Y \cup \infty$ ne sont autres que les voisinages de Y.

---

(1) [3], Chap. I; tout espace localement compact est par définition séparé (c'est-à-dire de Hausdorff); il est même régulier ([3], Chap. I, § 10, proposition 9).

(2) [3], Chap. I, § 10, Immersion d'un espace localement compact dans un espace compact (Alexandroff).

Nous utiliserons les propositions que voici :

Proposition 22.1. — *Une application continue transforme un compact en un compact* (¹).

Proposition 22.2. — *Si* F *est une partie fermée et* K *une partie compacte d'un espace* X *et si* $F \cap K = \emptyset$, *il existe :*

a. un voisinage compact W *de* K *tel que* $F \cap W = \emptyset$;
b. un voisinage fermé V *de* $F \cup \infty$ *tel que* $V \cap K = \emptyset$.

Preuve de a. — Tout point x de K possède un voisinage compact ne contenant aucun point de F; on peut recouvrir K avec un nombre fini de tels voisinages.

Preuve de b. — V est l'adhérence du complémentaire de W.

Proposition 22.3. — *Étant donnés une application continue* θ *d'un espace* X' *dans un espace* X, *une partie fermée* F *de* X *et un voisinage* V' *de* $\overset{-1}{\theta}(F) \cup \infty$, *il existe un voisinage fermé* V *de* $F \cup \infty$ *tel que* $\overset{-1}{\theta}(V) \subset V'$.

Preuve. — Nous pouvons supposer V' ouvert; son complémentaire $\complement V'$ est compact; $\theta(\complement V')$ est donc compact, vu la proposition 22.1. Par hypothèse $\overset{-1}{\theta}(F) \subset V'$ donc $F \cap \theta(\complement V') = \emptyset$. La condition à réaliser, $\overset{-1}{\theta}(V) \subset V'$ équivaut à la suivante : $V \cap \theta(\complement V') = \emptyset$. On la réalise en choisissant dans la proposition 22.2*b*, $K = \theta(\complement V')$.

Définition 22.1. — *Nous dirons que l'application continue* θ *de l'espace* X' *dans l'espace* X *est propre quand elle possède les trois propriétés suivantes, dont l'équivalence se vérifie aisément :*

a. $\overset{-1}{\theta}$ *applique toute partie compacte de* X *sur une partie compacte de* X';
b. θ *applique toute partie fermée de* X' *sur une partie fermée de* X *et* $\overset{-1}{\theta}(x)$ *est compact, quel que soit* $x \in X$;
c. ou bien X' *est compact; ou bien* X' *et* X *ne sont pas compacts et si nous adjoignons à* X (*et à* X') *un point à l'infini,* ω (*et* ω'), *en sorte*

(¹) [3] Chap. I, § 10, théorème 1.

que $X \cup \omega$ (*et* $X' \cup \omega'$) *est compact* (¹), *si nous posons* $\theta(\omega') = \omega$, *alors* θ *est une application continue de* $X' \cup \omega'$ *dans* $X \cup \omega$.

PROPOSITION 22.4. — *Étant donnés une application propre* θ *de* X' *dans* X, *une partie compacte* K *de* X *et un voisinage* V' *de* $\overset{-1}{\theta}(K)$, *il existe un voisinage compact* V *de* K *tel que* $\overset{-1}{\theta}(V) \subset V'$.

Preuve. — On peut supposer V' ouvert; $\theta(\complement V')$ est fermé, étranger à K; on choisit pour V un voisinage compact de K étranger à $\theta(\complement V')$ (proposition 22.2*a*).

II. — Faisceau.

23. DÉFINITIONS D'UN FAISCEAU, D'UN FAISCEAU CONTINU, D'UN FAISCEAU PROPRE. — Un *faisceau* $\mathcal{B}$ sera défini sur un espace X par les données suivantes :

a. un *anneau* $\mathcal{B}(F)$ associé à chaque partie fermée F de X;
b. un *homomorphisme* de $\mathcal{B}(F)$ dans $\mathcal{B}(F_1)$ quand F_1 est une partie fermée de F; cet homomorphisme est nommé *section* par F_1; on notera $F_1 b$ l'élément de $\mathcal{B}(F_1)$ en lequel il transforme l'élément b de $\mathcal{B}(F)$.

Ces données sont assujetties aux deux conditions suivantes :

c. $\mathcal{B}(\emptyset) = 0$;
d. Si $F_2 \subset F_1 \subset F$ et si $b \in \mathcal{B}(F)$, alors $F_2(F_1 b) = F_2 b$.

La relation

$$\lim_{V \succ F} \mathcal{B}(V) = \mathcal{B}(F) \qquad \left[\lim_{V \succ F \cup \infty} \mathcal{B}(V) = \mathcal{B}(F)\right]$$

signifiera que les deux propriétés suivantes ont lieu : étant donné $b_F \in \mathcal{B}(F)$, il existe un voisinage fermé V de F [de $F \cup \infty$] et un élément b_V de $\mathcal{B}(V)$ tel que $b_F = F b_V$; étant donnés un voisinage fermé V de F [de $F \cup \infty$] et un élément b_V de $\mathcal{B}(V)$ tels que $F b_V = 0$, il existe un voisinage fermé V_1 de F [de $F \cup \infty$] tel que $V_1 \subset V$ et $V_1 b_V = 0$. La relation $\lim\limits_{V \succ \infty} \mathcal{B}(V) = 0$ signifiera ceci : étant donné un voisinage

(¹) [3] Chap. I. § 10, Immersion d'un espace localement compact dans un espace compact (Alexandroff).

fermé V de l'∞ et $b_V \in \mathcal{B}(V)$, il existe un voisinage fermé V_1 de l'∞ tel que $V_1 \subset V$ et $V_1 b_V = 0$; c'est toujours le cas quand X est compact : on prend $V_1 = \emptyset$.

Nota. — Les limites ainsi définies sont évidemment des *limites directes.*

Un *faisceau continu* sera un faisceau $\mathcal{B}$ possédant les deux propriétés suivantes, dont la première a toujours lieu quand X est compact.

e. $\lim\limits_{V \succ \infty} \mathcal{B}(V) = 0$;

f. $\lim\limits_{V \succ F \cup \infty} \mathcal{B}(V) = \mathcal{B}(F)$, quelle que soit la partie fermée F de X.

Un *faisceau propre* sera un faisceau $\mathcal{B}$ possédant les trois propriétés suivantes :

e. $\lim\limits_{V \succ \infty} \mathcal{B}(V) = 0$;

g. $\lim\limits_{V \succ F \cup \infty} \mathcal{B}(V) = \mathcal{B}(F)$, quand F est une partie fermée, non compacte de X;

h. $\lim\limits_{V \succ K} \mathcal{B}(V) = \mathcal{B}(K)$, quand K est une partie compacte de X.

Les propositions suivantes sont évidentes.

Proposition 23.1. — *Tout faisceau continu est propre.*

Proposition 23.2. — *Sur un espace compact, tout faisceau propre est continu.*

24. Transformé d'un faisceau $\mathcal{B}'$, défini sur un espace X', par une application continue θ de X' dans un espace X. — Posons $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}'\left[\overset{-1}{\theta}(F)\right]$, quelle que soit la partie fermée F de X; posons $F_1 b = \overset{-1}{\theta}(F_1) b$, si $b \in \mathcal{B}(F)$ et si $F_1 \subset F$; soit $\mathcal{B}$ l'ensemble de ces anneaux $\mathcal{B}(F)$ et de ces sections; il est évident que $\mathcal{B}$ est un faisceau. Ce faisceau sera nommé *transformé* de $\mathcal{B}'$ par θ; il sera noté $\theta\mathcal{B}'$.

Proposition 24.1. — *Une application continue transforme un faisceau continu en un faisceau continu.*

Preuve. — Proposition 22.3.

PROPOSITION 24.2. — *Une application propre transforme un faisceau propre en un faisceau propre.*

Preuve. — Propositions 22.3 et 22.4.

25. FAISCEAU GRADUÉ, FILTRÉ, DIFFÉRENTIEL, SPECTRAL. — *Faisceau gradué.* — Nous dirons que le faisceau $\mathcal{B}$ est gradué si $\mathcal{B}(F)$ est gradué et si toute section transforme un élément homogène en un élément homogène de même degré.

Faisceau filtré. — $\mathcal{B}$ sera dit filtré s'il possède les propriétés que voici :

a. $\mathcal{B}(F)$ est filtré;
b. chaque section est un homomorphisme de filtration $\geqq 0$.

Les $\mathcal{G}\mathcal{B}(F)$ constituent un faisceau gradué, noté $\mathcal{G}\mathcal{B}$ et nommé faisceau gradué de $\mathcal{B}$.

Faisceau filtré-continu, filtré propre. — Soit un faisceau filtré $\mathcal{B}$; ses éléments de filtrations $\geqq p$ constituent, abstraction faite des propriétés multiplicatives, un sous-faisceau $\mathcal{B}^{(p)}$; $\mathcal{B}$ est dit filtré-continu (filtré-propre) s'il est continu (propre) ainsi que $\mathcal{B}^{(p)}$ quel que soit l'entier p.

Faisceau différentiel. — $\mathcal{B}$ sera dit différentiel si $\mathcal{B}(F)$ possède une différentiation commutant avec toute section.

Faisceau spectral. — $\mathcal{B}_r$ sera dit spectral si $\mathcal{B}_r(F)$ est un anneau spectral et si toute section commute avec les différentiations δ_r et les homomorphismes $\varkappa_s^r$. On définit aisément le faisceau $\lim\limits_{r \to +\infty} \mathcal{B}_r$.

Si θ est une application continue de l'espace X dans un autre espace, si $\mathcal{B}$ est un faisceau gradué, filtré, différentiel ou spectral défini sur X, alors $\theta\mathcal{B}$ est un faisceau de même nature.

26. HOMOMORPHISME; QUOTIENT; HOMOLOGIE. — Un *homomorphisme* λ d'un faisceau $\mathcal{B}'$ dans un faisceau $\mathcal{B}$ défini sur un même espace sera constitué par des homomorphismes λ de $\mathcal{B}'(F)$ dans $\mathcal{B}(F)$ permutables avec chaque section. Un *sous-faisceau* $\mathcal{B}'$ d'un faisceau $\mathcal{B}$ sera constitué par des sous-anneaux $\mathcal{B}'(F)$ de $\mathcal{B}(F)$ tels que, si $F_1 \subset F$,

alors $F_1 \mathcal{B}'(F) \subset \mathcal{B}'(F_1)$. Si chacun des $\mathcal{B}'(F)$ est un idéal de $\mathcal{B}(F)$, le faisceau $\mathcal{B}'$ sera dit *idéal* de $\mathcal{B}$.

Soit $\mathcal{B}$ un faisceau (gradué, filtré); soit $\mathcal{B}'$ un ideal bilatère de $\mathcal{B}$ (gradué si $\mathcal{B}$ est gradué); posons $\mathcal{B}''(F) = \mathcal{B}(F)/\mathcal{B}'(F)$; définissons la section de $\mathcal{B}''(F)$ par F_1 comme l'image de la section de $\mathcal{B}(F)$ par F_1; soit $\mathcal{B}''$ l'ensemble de ces anneaux $\mathcal{B}''(F)$ et de ces sections; $\mathcal{B}''$ est un faisceau (gradué, filtré) qui sera nommé *quotient* de $\mathcal{B}$ par $\mathcal{B}'$ et noté $\mathcal{B}/\mathcal{B}'$.

PROPOSITION 26.1. — *Si $\mathcal{B}'$ est un idéal continu (propre, filtré-continu, filtré-propre) du faisceau $\mathcal{B}$ continu (propre, filtré-continu, filtré-propre), alors $\mathcal{B}/\mathcal{B}'$ est un faisceau continu (propre, filtré-continu, filtré-propre).*

Preuve. — $\lim\limits_{V \to \infty} \mathcal{B}''(V) = 0$, puisque $\lim\limits_{V \to \infty} \mathcal{B}(V) = 0$. De même étant donnés F et $b''_F \in \mathcal{B}''(F)$, il existe un voisinage fermé V de $F \cup \infty$ (de F compact) et un élément b''_V de $\mathcal{B}(V)$ tel que $b''_F = F b''_V$, puisque $\mathcal{B}$ est continu (propre). Il reste à prouver ceci : soient V un voisinage fermé de $F \cup \infty$ (de F compact) et un élément b''_V de $\mathcal{B}''(V)$ tels que $F b''_V = 0$; il existe un voisinage fermé V_1 de $F \cup \infty$ (de F) tel que $V_1 \subset V$ et $V_1 b''_V = 0$. Soit b_V l'un des éléments de $\mathcal{B}(V)$ dont b''_V est l'image; $F b_V \in \mathcal{B}'(F)$; puisque $\mathcal{B}'$ est continu (propre), il existe donc un voisinage fermé V_2 de $F \cup \infty$ (de F) et $b'_2 \in \mathcal{B}'(V_2)$ tels que $V_2 \subset V$, $F(V_2 b_V - b'_2) = 0$; puisque $\mathcal{B}$ est continu (propre), il existe un voisinage fermé V_1 de $F \cup \infty$ (de F) tel que $V_1 \subset V_2$ et $V_1(V_2 b_V - b'_2) = 0$; cette relation s'écrit $V_1 b_V = V_1 b'_2$; d'où $V_1 b''_V = 0$. Donc $\mathcal{B}$ est continu (propre). Supposons $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ filtrés-continus (filtrés-propres); soient $\mathcal{B}^{(p)}$, $\mathcal{B}'^{(p)}$, $\mathcal{B}''^{(p)}$ les sous-faisceaux constitués par les éléments de $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ de filtration $\geqq p$; $\mathcal{B}''^{(p)} = \mathcal{B}^{(p)}/\mathcal{B}'^{(p)}$ (proposition 5.2); par hypothèse $\mathcal{B}^{(p)}$ et $\mathcal{B}'^{(p)}$ sont continus (propres); donc $\mathcal{B}''^{(p)}$ est continu (propre).

En particulier : *si $\mathcal{B}$ est filtré-continu (filtré propre), $\mathcal{G}\mathcal{B}$ est continu (propre).*

Soit $\mathcal{B}$ un faisceau différentiel (-filtré, continu, propre, -filtré-continu, -filtré-propre); les cycles des anneaux de $\mathcal{B}(F)$ constituent un faisceau (de même nature); les cycles homologues à zéro constituent un idéal (de même nature) de ce faisceau; les anneaux d'homologie $\mathcal{H}\mathcal{B}(F)$ constituent donc un faisceau (filtré, continu, propre, filtré-continu, filtré-propre) que nous nommerons *faisceau d'homologie* de $\mathcal{B}$ et que nous noterons $\mathcal{F}\mathcal{B}$. Soit $\mathcal{B}$ un faisceau différentiel-filtré (-continu, -propre); les anneaux spectraux d'homologie $\mathcal{H}_r\mathcal{B}(\mathrm{F})$ constituent de même un faisceau spectral (continu, propre) que nous nommerons faisceau spectral d'homologie de $\mathcal{B}$ et que nous noterons $\mathcal{F}_r\mathcal{B}$. Soit X l'espace sur lequel $\mathcal{B}$ est défini; soit θ une application continue de X dans un autre espace; on a

(26.1) $$\mathcal{F}\theta\mathcal{B} = \theta\mathcal{F}\mathcal{B}; \qquad \mathcal{F}_r\theta\mathcal{B} = \theta\mathcal{F}_r\mathcal{B}.$$

III. — Complexe.

27. Définition. — Un *complexe* $\mathcal{K}$ sera défini sur un espace X par la donnée d'un *anneau différentiel* et d'une loi associant à chaque élément k de cet anneau une partie fermée de X, nommée *support* de k et notée $\mathrm{S}(k)$; cette loi est assujettie aux règles suivantes :

(27.1) $\mathrm{S}(k-k_1)\subset\mathrm{S}(k)\cup\mathrm{S}(k_1)$; $\quad \mathrm{S}(kk_1)\subset\mathrm{S}(k)\cap\mathrm{S}(k_1)$; $\quad \mathrm{S}(0)=\emptyset$;

(27.2) $k=0 \quad \text{si} \quad \mathrm{S}(k)=\emptyset$;

(27.3) $\mathrm{S}(\partial k)\subset\mathrm{S}(k)$; $\quad \mathrm{S}(\alpha k)=\mathrm{S}(k)$.

Si la condition (27.2) n'est pas vérifiée, nous dirons que $\mathcal{K}$ *n'est pas séparé;* les éléments à support vide constituent alors un idéal $\mathcal{J}$ de l'anneau $\mathcal{K}$; d'après (27.1) et (27.3)

$$\mathrm{S}(k)=\mathrm{S}(k_1) \quad \text{quand} \quad k=k_1 \bmod \mathcal{J}; \qquad \partial\mathcal{J}\subset\mathcal{J};$$

le complexe que constituent l'anneau différentiel $\mathcal{K}/\mathcal{J}$ et les supports

$$\mathrm{S}(k \bmod \mathcal{J})=\mathrm{S}(k)$$

sera nommé : *complexe associé au complexe non séparé* $\mathcal{K}$.

Si $\mathrm{S}(k)$ est compact quel que soit $k\in\mathcal{K}$, nous dirons que $\mathcal{K}$ est *à supports compacts*.

Exemple. — X est une variété différentiable; k est une forme différentielle extérieure définie sur X; $x\in\mathrm{S}(k)$ si cette forme n'est pas identiquement nulle au voisinage de x.

28. Opérations sur un complexe. — Soit θ une application continue de l'espace X′ dans l'espace X; le complexe associé au complexe non séparé que constituent l'anneau $\mathcal{K}$ et les supports $\overset{-1}{\theta}[S(k)]$ sera noté $\overset{-1}{\theta}\mathcal{K}$ et nommé *transformé de* $\mathcal{K}$ *par* $\overset{-1}{\theta}$; $\overset{-1}{\theta} k$ désignera le transformé de k :

(28.1) $S(\overset{-1}{\theta} k) = \overset{-1}{\theta}[S(k)]$; $\quad \theta k = 0 \quad$ si $\quad S(k) \cap \theta(X') = \emptyset$ et réciproquement.

Soit X_1 un sous-espace de X; soit θ l'application canonique de X_1 dans X; $\overset{-1}{\theta}\mathcal{K}$ sera nommé *section* de $\mathcal{K}$ par X_1 et noté $X_1\mathcal{K}$; de même $\overset{-1}{\theta} k$ sera noté $X_1 k$:

(28.2) $S(X_1 k) = X_1 \cap S(k)$; $\quad X_1 k = 0 \quad$ si $\quad X_1 \cap S(k) = \emptyset$ et réciproquement.

Soit $\mathcal{K}'$ un complexe *à supports compacts* défini sur l'espace X', que l'application continue θ applique dans l'espace X; le complexe défini par l'anneau de $\mathcal{K}'$ et les supports $\theta[S(k')]$, qui sont compacts, vu la proposition 22.1, sera noté $\theta\mathcal{K}'$ et nommé *transformé de* $\mathcal{K}'$ *par* θ; $\theta k'$ sera l'élément de $\theta\mathcal{K}'$ correspondant à l'élément k' de $\mathcal{K}'$:

(28.3) $\begin{cases} S(\theta k') = \theta[S(k')]; \quad \theta k' \neq 0 \quad \text{si} \quad k' \neq 0; \\ \theta\mathcal{K}' \text{ est à supports compacts.} \end{cases}$

Les conventions suivantes sont faciles à légitimer :

(28.4) $\overset{-1}{\theta} X_1 \mathcal{K} = \overset{-1}{\theta}(X_1) . \overset{-1}{\theta}\mathcal{K} \quad$ si $\quad X_1 \subset X$;

(28.5) $\theta(F') . \mathcal{K} = \theta\left(F' \overset{-1}{\theta}\mathcal{K}\right) \quad$ si F' est une partie compacte de X';

(28.6) $F\theta\mathcal{K}' = \theta\left[\overset{-1}{\theta}(F) . \mathcal{K}'\right] \quad$ si $\mathcal{K}'$ est à supports compacts et si F est fermé;

(28.7) $\overset{-1}{\tau}\overset{-1}{\theta}\mathcal{K} = \overset{-1}{\widehat{\theta\tau}}\mathcal{K}$; $\quad$ en particulier $\quad X_2 X_1 \mathcal{K} = X_2\mathcal{K} \quad$ si $\quad X_2 \subset X_1 \subset X$;

(28.8) $\theta(\tau\mathcal{K}') = (\theta\tau)\mathcal{K}' \quad$ si $\mathcal{K}'$ est à supports compacts.

Soit $\mathcal{K}$ un complexe défini sur un espace X; les sections $F\mathcal{K}$ de $\mathcal{K}$ par les parties fermées F de X constituent un faisceau $\mathcal{B}$ qui sera dit *faisceau associé au complexe* $\mathcal{K}$; $\mathcal{F}\mathcal{B}$ sera noté $\mathcal{F}\mathcal{K}$ et nommé *faisceau d'homologie du complexe* $\mathcal{K}$.

Proposition 28.1. — *Si le complexe* $\mathcal{K}'$ *est à supports compacts,* $\mathcal{F}\mathcal{K}$ *est continu et* $\mathcal{F}\theta\mathcal{K}' = \theta\mathcal{F}\mathcal{K}'$.

Preuve. — Le faisceau $\mathcal{B}'$ associé à $\mathcal{K}'$ est continu, d'après la proposition 22.2 b; il est évident que $\theta\mathcal{B}'$ est le faisceau associé à $\theta\mathcal{K}'$; on utilise les propriétés de $\mathcal{F}\mathcal{B}'$ énoncées à la fin du n° 26.

29. Complexe gradué, canonique, filtré, sans torsion. — *Complexe gradué, canonique.* — Nous dirons que le complexe $\mathcal{K}$ défini sur l'espace X est gradué (canonique) si son anneau est différentiel-gradué (canonique) et si

$$(29.1)\qquad x\sum_p k^{[p]}=0 \quad \text{entraîne} \quad xk^{[p]}=0 \quad (k^{[p]} \text{ homogène de degré } p;\ x\in X).$$

Cette condition (29.1) peut encore s'énoncer

$$(29.1\ bis)\qquad S\left(\sum_p k^{[p]}\right)=\bigcup_p S(k^{[p]}).$$

Les transformés et les sections de $\mathcal{K}$ sont alors gradués (canoniques); le faisceau associé à $\mathcal{K}$ est gradué (canonique).

Complexe sans torsion. — Le complexe $\mathcal{K}$ est dit sans torsion si l'anneau de $x\mathcal{K}$ est sans torsion quel que soit $x\in X$; autrement dit

$$(29.2)\qquad S(mk)=S(k) \text{ quels que soient } k\in\mathcal{K} \text{ et } m=\text{entier}\neq 0.$$

L'anneau de $\mathcal{K}$ est alors sans torsion. Les transformés et les sections de $\mathcal{K}$ sont des complexes sans torsion.

Complexe filtré. — Le complexe $\mathcal{K}$ défini sur l'espace X est dit filtré s'il possède les propriétés suivantes :

a. Quel que soit $x\in X$, $x\mathcal{K}$ est *filtré;*

b. Quel que soit $k\in\mathcal{K}$, $S(k)$ est *compact*, de même que l'ensemble $S^{(p)}(k)$ des points x tels que $f(xk)\leqq p$ (p entier).

Nous filtrerons l'anneau de $\mathcal{K}$ en définissant

$$(29.3)\qquad f(k)=\operatorname*{Borne\,inf.}_{x\in X} f(xk),$$

cette borne est atteinte en un point x de $S(k)$, vu b et [3], Chap. I, § 10, ($\mathcal{C}''$) : puisque l'intersection des $S^{(p)}(k)$ est vide, l'un d'eux est vide.

$F\mathcal{K}$ et $0\mathcal{K}$ sont des complexes filtrés; le faisceau $\mathcal{B}$ associé à $\mathcal{K}$ est un faisceau différentiel-filtré-continu d'après la proposition 22.2; son faisceau spectral d'homologie $\mathcal{F}_r\mathcal{B}$ sera noté $\mathcal{F}_r\mathcal{K}$ et nommé *faisceau spectral d'homologie* du complexe $\mathcal{K}$.

Proposition 29.1. — *Si le complexe $\mathcal{K}$ est filtré, son faisceau d'homologie $\mathcal{F}\mathcal{K}$ est filtré-continu, son faisceau spectral d'homologie $\mathcal{F}_r\mathcal{K}$ est continu;*

$$(29.4)\qquad \mathcal{F}0\mathcal{K} = 0\mathcal{F}k; \qquad \mathcal{F}_r0k = 0\mathcal{F}_r\mathcal{K}.$$

Preuve. — Le faisceau différentiel-filtré-continu $\mathcal{B}$ a les propriétés énoncées à la fin du n° **26**.

30. Le complexe $\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{K}^\star$, intersection des complexes $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}^\star$. — Soient $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}^\star$ deux complexes définis sur un même espace X, $\mathcal{K}$ étant *canonique;* soit $\mathcal{K} \otimes \mathcal{K}^\star$ le produit tensoriel des anneaux de $\mathcal{K}$ et de $\mathcal{K}^\star$; soit x un point de X; nommons section de $\mathcal{K} \otimes \mathcal{K}^\star$ par x l'homomorphisme de $\mathcal{K} \otimes \mathcal{K}^\star$ sur $x\mathcal{K} \otimes x\mathcal{K}^\star$ qui transforme l'élément $\sum_\mu k_\mu \otimes k^\star_\mu$ de $\mathcal{K} \otimes \mathcal{K}^\star$ en l'élément $\sum_\mu (xk_\mu) \otimes (xk^\star_\mu)$ de $(x\mathcal{K}) \otimes (x\mathcal{K}^\star)$; nommons *support* d'un élément de $\mathcal{K} \otimes \mathcal{K}^\star$ l'ensemble des points x tels que la section de cet élément par x ne soit pas nulle; prouvons que ce support est fermé en établissant la proposition suivante :

Si

$$(30.1)\qquad \sum_\mu (xk_\mu) \otimes (xk^\star_\mu) = 0,$$

il existe un voisinage fermé V de x tel que

$$(30.2)\qquad \sum_\mu (\mathrm{V}k_\mu) \otimes (\mathrm{V}k^\star_\mu) = 0.$$

Preuve. — (30.1) résulte d'un nombre fini de relations entre des éléments de $x\mathcal{K}$ et de $x\mathcal{K}^\star$; chacune de ces relations exprime que x n'appartient pas au support d'un certain élément de $\mathcal{K}$ ou de $\mathcal{K}^\star$; ce support est fermé; toutes ces relations subsistent donc quand on remplace x par un de ses voisinages convenables V; V vérifie donc (30.2).

$\mathcal{K} \otimes \mathcal{K}^\star$ muni de ces supports est un complexe en général non séparé. Le complexe séparé associé sera noté $\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{K}^\star$ et nommé intersection de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}^\star$; l'image de $\sum_\mu k_\mu \otimes k_\mu^\star$ dans $\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{K}^\star$ sera notée $\sum_\mu k_\mu \bigcirc k_\mu^\star$.

Avec ces notations l'équivalence de (30.1) et (30.2) s'énonce comme suit :

LEMME 30.1. — *Si $x\left(\sum_\mu k_\mu \bigcirc k_\mu^\star\right)=0$, il existe un voisinage fermé* V *du point x tel que*

$$\sum_\mu (\mathrm{V} k_\mu) \otimes (\mathrm{V} k_\mu^\star) = 0.$$

Les formules suivantes sont évidentes :

$$x(\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{K}^\star) = (x\mathcal{K}) \otimes (x\mathcal{K}^\star); \tag{30.3}$$

$$\mathrm{S}(k \bigcirc k^\star) \subset \mathrm{S}(k^\star) \cap \mathrm{S}(k^\star); \tag{30.4}$$

$$\mathrm{F}(\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{K}^\star) = (\mathrm{F}\mathcal{K}) \bigcirc (\mathrm{F}\mathcal{K}^\star) = (\mathrm{F}\mathcal{K}) \bigcirc \mathcal{K}^\star = \mathcal{K} \bigcirc \mathrm{F}\mathcal{K}^\star; \tag{30.5}$$

$$\overset{-1}{\theta}(\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{K}^\star) = \overset{-1}{\theta}\mathcal{K} \bigcirc \overset{-1}{\theta}\mathcal{K}^\star. \tag{30.6}$$

PROPOSITION 30.1. — *$\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{K}^\star$ est à supports compacts si $\mathcal{K}^\star$ est à supports compacts.*

Cette proposition résulte de (30.4).

PROPOSITION 30.2. — *Si $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}'$ sont deux complexes canoniques, alors $\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{K}'$ et $\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{K}$ sont canoniques et isomorphes : l'élément $k^{(p)} \bigcirc k'^{(q)}$ est homogène, de degré $p+q$; il lui correspond dans $\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{K}$ l'élément $(-1)^{pq} k'^{(q)} \bigcirc k^{(p)}$.*

Cette proposition résulte de (30.3) et du n° 15 *a*.

PROPOSITION 30.3. — *Si $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$ et $\mathcal{K}^\star$ sont trois complexes, $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}'$ étant canoniques, alors*

$$(\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{K}') \bigcirc \mathcal{K}^\star = \mathcal{K} \bigcirc (\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{K}^\star).$$

Cette proposition résulte de (30.3) et du n° 15 *b*.

31. DÉFINITION DU COMPLEXE GRADUÉ OU FILTRÉ $\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{K}^\star$. — DÉFINITION 31.1. — *Soient un complexe canonique $\mathcal{K}$, un entier l et un complexe gradué $\mathcal{K}^\star$, $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}^\star$ étant définis sur un même espace.*

Convenons que, si $k^{[p]} \in \mathcal{K}$ et $k^{\star[q]} \in \mathcal{K}^\star$ ont les degrés respectifs p et q, alors $k^{[p]} \bigcirc k^{\star[q]}$ est homogène de degré $lp+q$; $\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{K}^\star$, muni de ce degré est un complexe gradué, que nous noterons $\mathcal{K}^l \bigcirc \mathcal{K}^\star$. Si la différentielle de $\mathcal{K}^\star$ est homogène de degré l, alors celle de $\mathcal{K}^l \bigcirc \mathcal{K}^\star$ est homogène de degré l,

Définition 31.2. — *Soient un complexe canonique $\mathcal{K}$, un entier l et un complexe filtré $\mathcal{K}^\star$, $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}^\star$ étant définis sur un même espace* X; *nous désignerons par $\mathcal{K}^l \bigcirc \mathcal{K}^\star$ le complexe $\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{K}^\star$ filtré par la règle suivante :*

$$x(\mathcal{K}^l \bigcirc \mathcal{K}^\star) = (x\mathcal{K})^l \otimes x\mathcal{K}^\star, \tag{31.1}$$

le lemme suivant justifie cette définition :

Lemme 31.1. — *Étant donnés le point x de* X, *l'élément $\sum_\mu k_\mu \bigcirc \mathcal{K}^\star_\mu$ de $\mathcal{K}^l \bigcirc \mathcal{K}^\star$ et un entier p tel que*

$$f\left(x \sum_\mu k_\mu \bigcirc k^\star_\mu\right) \geqq p, \tag{31.2}$$

il existe un voisinage fermé V *de x tel que*

$$f\left(\sum_\mu (\mathrm{V} k_\mu) \otimes (\mathrm{V} k^\star_\mu)\right) \geqq p. \tag{31.3}$$

Nota. — Si l'égalité a lieu dans (31.2) elle a évidemment lieu dans (31.3).

La preuve de ce lemme est analogue à celle du lemme 30.1 et est un cas particulier du raisonnement du n° 35 qui déduit (35.2) de (35.1).

Propriétés. — La définition précédente équivaut aux règles de calcul suivantes : $k \bigcirc k^\star$ est toujours défini;

$$k \bigcirc k^\star + k \bigcirc k^\star_1 = k \bigcirc (k^\star + k^\star_1); \qquad k \bigcirc k^\star + k_1 \bigcirc k^\star = (k + k_1) \bigcirc k^\star; \tag{31.4}$$

$$m(k \bigcirc k^\star) = mk \bigcirc k^\star = k \bigcirc mk^\star; \tag{31.5}$$

$$(k \bigcirc k^\star)(k^{[p]} \bigcirc k^\star_1) = k k^{[p]} \bigcirc \alpha^{-p} k^\star . k^\star_1; \tag{31.6}$$

$$\alpha(k^{[p]} \bigcirc k^\star) = (-1)^p k^{[p]} \bigcirc \alpha k^\star; \tag{31.7}$$

$$\delta(k^{[p]} \bigcirc k^\star) = \delta k^{[p]} \bigcirc k^\star + (-1)^p k^{[p]} \bigcirc \delta k^\star; \tag{31.8}$$

$$x(k \bigcirc k^\star) = xk \otimes xk^\star; \tag{31.9}$$

(31.10) $\sum_\mu k_\mu \bigcirc k_\mu^* = 0$ si et seulement si $x \sum_\mu k_\mu \bigcirc k_\mu^* = 0$ quel que soit $x \in X$;

(31.11) $$f\left(\sum_\mu k_\mu \bigcirc k_\mu^*\right) = \operatorname*{Min.}_{x \in X} f\left(x \sum_\mu k_\mu \bigcirc k_\mu^*\right).$$

PROPOSITION 31.1. — *Si $\mathcal{K}$ contient une unité u telle que xu n'est divisible par aucun entier, quel que soit $x \in X$, alors $u \bigcirc k^*$ est un isomorphisme, respectant support, degré et filtration, de $\mathcal{K}^*$ dans $\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{K}^*$.*

Preuve. — On utilise la proposition 17.6 et la remarque du n° 4.

32. COMPLEXE FIN. — DÉFINITION. — *Soit un complexe $\mathcal{K}$, défini sur un espace X; $\mathcal{K}$ sera dit fin si, quel que soit le recouvrement* [1] *fini, ouvert de $X \cup \infty$:*

$$\bigcup_\nu V_\nu = X,$$

il existe des applications linéaires λ_ν de $\mathcal{K}$ en lui-même telles que

(32.1) $$\sum_\nu \lambda_\nu k = k;$$

(32.2) $$S(\lambda_\nu k) \subset \overline{V}_\nu \cap S(k);$$

où $k \in \mathcal{K}$, $\overline{V}_\nu$ = adhérence de V_ν.

En général $\partial \lambda_\nu k \neq \lambda_\nu \partial k$.

Quand nous parlerons de *complexe gradué-fin* ou *canonique-fin*, il sera convenu que les λ_ν transforment un élément homogène de $\mathcal{K}$ en un élément homogène de même degré; quand nous parlerons de *complexe filtré-fin*, il sera convenu que

(32.3) $$f(\lambda_\nu k) \geq f(\overline{V}_\nu k).$$

Quand $\mathcal{K}$ possède une unité u (de filtration nulle), la condition

---

[1] Un recouvrement fini ouvert de $X \cup \infty$ est constitué par un nombre fini de parties ouvertes V_ν de X, dont l'une est un voisinage de l'∞ et dont la réunion est X. Si X_1 est un sous-espace de X, tout recouvrement fini, ouvert de $X_1 \cup \infty$ se compose des intersections par X_1 des éléments d'un recouvrement fini, ouvert de $X \cup \infty$.

que $\mathcal{K}$ est un complexe (gradué-, filtré-) fin s'énonce comme suit : quel que soit le recouvrement fini ouvert V_ν de $X \cup \infty$, il existe des éléments u_ν de $\mathcal{K}$ (de degré nul, de filtration $\geqq 0$) tels que

$$(32.4)\qquad \sum_\nu u_\nu = u; \qquad S(u_\nu) \subset \overline{V}_\nu.$$

Soit X_1 un sous-espace de X; définissons

$$(32.5)\qquad \lambda_\nu X_1 k = X_1 \lambda_\nu k$$

cette définition n'est pas ambiguë, car si $X_1 k = 0$, alors $X_1 \lambda_\nu k = 0$, d'après (32.2); cette définition prouve que $X_1 \mathcal{K}$ *est fin.*

D'après (32.2) et (32.5)

$$(32.6)\qquad \lambda_\nu X_1 \mathcal{K} = \lambda_\nu \mathcal{K} \qquad \text{si} \quad \overline{V}_\nu \subset X_1.$$

Soit $\mathcal{K}'$ un complexe canonique; les λ_ν opèrent sur $\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{K}$ qui est donc fin; si $\mathcal{K}$ est filtré-fin, $\mathcal{K}'' \bigcirc \mathcal{K}$ l'est aussi.

Supposons $\mathcal{K}$ canonique-fin; $\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{K}^\star$ est fin; $\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{K}^\star$ est gradué-fin ou filtré-fin, quand $\mathcal{K}^\star$ est gradué ou filtré.

$0\mathcal{K}$ est un complexe (gradué-, filtré-) fin si $\mathcal{K}$ est un complexe (gradué-, filtré-) fin, à supports compacts.

Proposition 32.1. — *a. Soit $\mathcal{K}$ un complexe fin sur l'espace* X; *soit* $x \in X$; *soit* V' *un voisinage de* x; *soit* $\mathcal{K}'$ *le sous-complexe de* $\mathcal{K}$ *que constituent les éléments* k' *de* $\mathcal{K}$ *tels que* $S(k') \subset V'$; *on a* : $x\mathcal{K} = x\mathcal{K}'$.

b. Soit $\mathcal{K}$ *un complexe fin; soit* $\mathcal{K}^\star$ *le sous-complexe que constituent ses éléments à supports compacts; on a* $x\mathcal{K} = x\mathcal{K}^\star$.

c. Si $\mathcal{K}$ *est un complexe filtré-fin et si* $\delta\lambda_\nu = \lambda_\nu\delta$, *on a, en remplaçant dans les notations du* n° **9**, $\mathcal{C}_r^p, \ldots$, par $\mathcal{C}_r^p(\mathfrak{A}), \ldots$

$$(32.7)\qquad \mathcal{C}_r^p(x\mathcal{K}) = x\,\mathcal{C}_r^p(\mathcal{K});$$
$$(32.8)\qquad \mathcal{D}_r^p(x\mathcal{K}) = x\,\mathcal{D}_r^p(\mathcal{K});$$
$$(32.9)\qquad \mathcal{C}\,(x\mathcal{K}) = x\,\mathcal{C}\,(\mathcal{K});$$
$$(32.10)\qquad \mathcal{D}\,(x\mathcal{K}) = x\,\mathcal{D}\,(\mathcal{K}).$$

Preuve de a. — Soit V_1 un voisinage ouvert de x tel que $\overline{V}_1 \subset V'$; soit V_2 un voisinage de l'∞ tel que $V_1 \cup V_2 = X$ et que $\overline{V}_2$ ne contienne pas x; soit $k \in \mathcal{K}$; on a, puisque $\mathcal{K}$ est fin,

$$k = \lambda_1 k + \lambda_2 k; \qquad S(\lambda_1 k) \subset \overline{V}_1; \qquad S(\lambda_2 k) = \overline{V}_2;$$

d'où $x\lambda_2 k = 0$, puisque $x \cap \overline{V}_2 = \emptyset$; donc

$$xk = x\lambda_1 k; \qquad S(\lambda_1 k) \subset V',$$

c'est-à-dire

$$xk \in x\mathcal{K}'.$$

Preuve de b. — La proposition *b* s'obtient en choisissant, dans la proposition *a*, V' compact.

Preuve de (32.7). — Il est évident que $x\mathcal{C}_r^p(\mathcal{K}) \subset \mathcal{C}_r^p(x\mathcal{K})$. Réciproquement soient $x \in X$ et $k \in \mathcal{K}$ tels que $xk \in \mathcal{C}_r^p(x\mathcal{K})$; d'après la définition d'un complexe filtré (n° **29**), x possède un voisinage fermé V' tel que $V'k \in \mathcal{C}_r^p(V'\mathcal{K})$; d'où, vu (32.3), en définissant λ_1 et λ_2 comme dans la preuve de *a*,

$$xk = x\lambda_1 k; \qquad \lambda_1 k \in \mathcal{C}_r^p(\mathcal{K}),$$

c'est-à-dire

$$xk \in x\,\mathcal{C}_r^p(\mathcal{K}).$$

Les preuves de (32.8), (32.9) et (32.10) sont analogues.

Lemme 32.1. — *Soit un complexe $\mathcal{K}$ à supports compacts; soit $\mathcal{K}'$ un sous-complexe fin de $\mathcal{K}$, tel que $x\mathcal{K}' = x\mathcal{K}$, quel que soit $x \in X$; on a $\mathcal{K}' = \mathcal{K}$.*

Preuve. — Soit $k \in \mathcal{K}$; à tout point x de X associons un élément k'_x de $\mathcal{K}'$ tel que

$$xk'_x = xk;$$

soit V_x un voisinage ouvert de x tel que $\overline{V}_x$ n'ait pas de point commun avec $S(k - k'_x)$:

$$yk'_x = yk \qquad \text{si} \quad y \in V_x;$$

on peut recouvrir $S(k)$, qui est compact, avec un nombre fini de tels voisinages, les $V_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, \omega)$:

$$(32.11) \qquad yk'_\nu = yk \qquad \text{si} \qquad y \in V_\nu.$$

Soit V_0 un voisinage ([1]) de l'∞ tel que $\overline{V}_0 \cap S(k) = \emptyset$ et $\bigcup_{0 \leq \nu \leq \omega} V_\nu = X$;

([1]) V_0 s'obtient en appliquant la proposition 22.2 *b* au complémentaire F de $\bigcup_{0 < \nu \leq \omega} V_\nu$ et à $K = S(k)$.

posons $k'_0 = 0$; (32.11) vaut pour $0 \leqq \nu \leqq \omega$. Utilisons l'hypothèse que $\mathcal{K}'$ est fin et transformons (32.11) par λ_ν : il vient

$$\lambda_\nu y k'_\nu = \lambda_\nu y k \quad \text{si} \quad y \in \overline{V}_\nu; \tag{32.12}$$

sinon $\lambda_\nu y k'_\nu$ et $\lambda_\nu y k$ sont nuls, car ils ont d'après (32.2) des supports vides; (32.12) vaut donc quel que soit y; sommons (32.12) par rapport à ν; posons $\sum_\nu \lambda_\nu k'_\nu = k'$; il vient d'après (32.1) et (32.5)

$$y k' = y k, \quad \text{c'est-à-dire} \quad k' = k.$$

Proposition 32.2. — *Soient sur un même espace* X, *un complexe gradué-filtré-fin $\mathcal{K}'$ et un complexe gradué-filtré $\mathcal{K}$; soit un homomorphisme λ de l'anneau de $\mathcal{K}'$ dans l'anneau de $\mathcal{K}$; supposons que λ définisse, quel que soit $x \in X$, un isomorphisme, respectant le degré et la filtration, de $x\mathcal{K}'$ sur $x\mathcal{K}$. Alors λ est un isomorphisme de $\mathcal{K}'$ sur $\mathcal{K}$; cet isomorphisme n'altère ni le support, ni le degré, ni la filtration.*

Preuve. — Par hypothèse, k' et $\lambda k'$ ont même support, même degré et même filtration; on peut donc identifier $\mathcal{K}'$ à un sous-complexe de $\mathcal{K}$; il suffit d'appliquer le lemme 32.1 à ce complexe et à ce sous-complexe.

Lemme 32.2. — *Soient $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}^*$ deux complexes définis sur un même espace* X; *supposons $\mathcal{K}$ canonique et* $S(k) = X$, *si* $k \neq 0$; *supposons $\mathcal{K}^*$ gradué-filtré-fin; alors l'anneau de $\mathcal{K}^l \bigcirc \mathcal{K}^*$ est le produit tensoriel $\mathcal{K}^l \otimes \mathcal{K}^*$ des anneaux de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}^*$.*

Preuve. — Il est évident que si

$$\sum_\mu k_\mu \otimes k^*_\mu = 0 \quad \text{ou} \quad f\Big(\sum_\mu k_\mu \otimes k^*_\mu\Big) \geqq p \quad (p : \text{entier}), \tag{32.13}$$

alors

$$\sum_\mu k_\mu \bigcirc k^*_\mu = 0 \quad \text{ou} \quad f\Big(\sum_\mu k_\mu \bigcirc k^*_\mu\Big) \geqq p. \tag{32.14}$$

Il s'agit de prouver la réciproque : supposons (32.14) vérifié, on a pour tout $x \in X$

$$x\Big(\sum_\mu k_\mu \bigcirc k^*_\mu\Big) = 0 \quad \text{ou} \quad f\Big(x \sum_\mu k_\mu \bigcirc k^*_\mu\Big) \geqq p;$$

d'après le lemme 30.1 ou 31.1 tout $x \in X$ possède un voisinage ouvert V tel que

$$\sum_\mu \overline{V} k_\mu \otimes \overline{V} k_\mu^\star = 0 \quad \text{ou} \quad f\left(\sum_\mu \overline{V} k_\mu \otimes \overline{V} k_\mu^\star\right) \geqq p;$$

donc, puisque $S(k_\mu) = X$ si $k_\mu \neq 0$,

$$\sum_\mu k_\mu \otimes \overline{V} k_\mu^\star = 0 \quad \text{ou} \quad f\left(\sum_\mu k_\mu \otimes \overline{V} k_\mu^\star\right) \geqq p.$$

On peut recouvrir $\bigcup_\mu S(k_\mu^\star)$ qui est compact, avec un nombre fini de tels voisinages, les $V_\nu (1 \leqq \nu \leqq \omega)$. Soit V_0 un voisinage de l'∞ tel que $\overline{V}_0 \cap \bigcup_\mu S(k_\mu^\star) = \emptyset$ et $\bigcup_{0 \leqq \nu \leqq \omega} V_\nu = X$; on a

$$\sum_\mu k_\mu \otimes \overline{V}_\nu k_\mu^\star = 0 \quad \text{ou} \quad f\left(\sum_\mu k_\mu \otimes \overline{V}_\nu k_\mu^\star\right) \geqq p \qquad (0 \leqq \nu \leqq \omega);$$

utilisons l'hypothèse que $\mathcal{K}^\star$ est fin et la formule (32.6); il vient

$$\sum_\mu k_\mu \otimes \lambda_\nu k_\mu^\star = 0 \quad \text{ou} \quad f\left(\sum_\mu k_\mu \otimes \lambda_\nu k_\mu^\star\right) \geqq p$$

d'où (32.13), en sommant par rapport à ν, puisque $\sum_\nu \lambda_\nu$ est l'identité.

PROPOSITION 32.3. — *Si $\mathcal{K}$ est un complexe canonique sur un espace X, si $\mathcal{K}^\star$ est un complexe gradué-filtré-fin sur un espace $X^\star$ et si θ est une application continue de $X^\star$ dans X, alors*

$$\theta(\overset{-1}{\theta}\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{K}^\star) = \mathcal{K}' \bigcirc \theta\mathcal{K}^\star. \tag{32.15}$$

Preuve. — Pour légitimer (32.15), il faut prouver que

$$\theta\left(\sum_\mu \overset{-1}{\theta} k_\mu \bigcirc k_\mu^\star\right) \quad \text{et} \quad \sum_\mu k_\mu \bigcirc \theta k_\mu^\star$$

ont même support, même degré et même filtration; il suffit de montrer que, quels que soient le point x de X et l'entier p, la condition

$$\overset{-1}{\theta}(x)\left(\sum_\mu \overset{-1}{\theta} k_\mu \bigcirc k_\mu^\star\right) = 0 \quad \text{ou} \quad f\left[\overset{-1}{\theta}(x)\left(\sum_\mu \overset{-1}{\theta} k_\mu \bigcirc k_\mu^\star\right)\right] \geqq p$$

équivaut à

$$x\Big(\sum_{\mu} k_{\mu} \bigcirc \theta k_{\mu}^{*}\Big) = 0 \qquad \text{ou} \qquad f\Big[x\Big(\sum_{\mu} k_{\mu} \bigcirc \theta k_{\mu}^{*}\Big)\Big] \geqq p;$$

autrement dit, il suffit d'établir la proposition quand X est un point x; or dans ce cas la proposition s'identifie au lemme 32.2.

33. Définition de l'anneau $\mathcal{K} \otimes \mathcal{B}$, produit tensoriel du complexe canonique $\mathcal{K}$ et du faisceau $\mathcal{B}$ (*cf.* n° **15**). — Soient $\mathcal{K}$ et $\mathcal{B}$ un complexe canonique et un faisceau définis sur un même espace X. Soit $\mathfrak{T}$ l'algèbre sur l'anneau des entiers, qui a pour base les couples $k \times b$ d'un élément k de $\mathcal{K}$ et d'un élément b de $\mathcal{B}$ tels que $b \in \mathcal{B}(\mathrm{F})$, $\mathrm{S}(k) \subset \mathrm{F}$ et qui a pour table de multiplication

$$(k \times b)(k_1 \times b_1) = \sum_{p} k k_1^{[p]} \times \mathrm{S}(k k_1^{[p]})\, \alpha^{-p} b . \mathrm{S}(k k_1^{[p]})\, b_1, \qquad \text{où} \quad k_1 = \sum_{p} k_1^{[p]};$$

on vérifie aisément l'associativité de cette multiplication.

Les combinaisons linéaires à coefficients entiers des éléments :

$$k \times b + k \times b_1 - k \times [\mathrm{S}(k)\, b + \mathrm{S}(k)\, b_1]; \qquad k \times b + k_1 \times b - (k + k_1) \times b;$$
$$m(k \times b) - (mk) \times b; \qquad m(k \times b) - k \times mb \qquad (m : \text{entier}),$$

constituent un idéal $\mathfrak{Q}$ de l'anneau $\mathfrak{T}$; $\mathfrak{T}/\mathfrak{Q}$ est un anneau, que nous noterons $\mathcal{K} \otimes \mathcal{B}$ et que nous nommerons produit tensoriel de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{B}$; l'image de $k \times b$ dans $\mathcal{K} \otimes \mathcal{B}$ est notée $k \otimes b$; *les règles de calcul dans l'anneau $\mathcal{K} \otimes \mathcal{B}$ sont donc les suivantes :*

$k \otimes b$ est défini si $k \in \mathcal{K}$, $b \in \mathcal{B}(\mathrm{F})$ et $\mathrm{S}(k) \subset \mathrm{F}$;

si le premier membre est défini, on a

(33.1) $$k \otimes b + k_1 \otimes b = (k + k_1) \otimes b;$$

(33.2) $$k \otimes b + k \otimes b_1 = k \otimes [\mathrm{S}(k)\, b + \mathrm{S}(k)\, b_1]; \qquad \text{en particulier :}$$

(33.3) $$k \otimes b = k \otimes \mathrm{S}(k)\, b;$$

(33.4) $$m(k \otimes b) = (mk) \otimes b = k \otimes mb \qquad (m : \text{entier});$$

(33.5) $$(k \otimes b)(k^{[p]} \otimes b_1) = k k^{[p]} \otimes \mathrm{S}(k k^{[p]})\, \alpha^{-p} b . \mathrm{S}(k k^{[p]})\, b_1.$$

Si le faisceau $\mathcal{B}$ est différentiel, on définit une différentiation sur $\mathcal{K} \otimes \mathcal{B}$ en posant

(33.6) $$\begin{cases} \alpha(k^{[p]} \otimes b) = (-1)^{p}\, k^{[p]} \otimes \alpha b; \\ \partial(k^{[p]} \otimes b) = \partial k^{[p]} \otimes b + (-1)^{p}\, k^{[p]} \otimes \partial b; \end{cases}$$

la différentiation ainsi définie vérifie les conditions énoncées au n° **8** : on le prouve par des calculs identiques à ceux du n° **15**.

34. L'ANNEAU GRADUÉ-FILTRÉ $\mathcal{K}^l \otimes \mathcal{B}$, $\mathcal{K}$ ÉTANT BASIQUE ET $\mathcal{B}$ GRADUÉ-FILTRÉ. — DÉFINITION. — *Le complexe gradué $\mathcal{K}$ est dit basique quand il contient des éléments homogènes $k_\mu^{[p]}$ possédant les propriétés suivantes :*

1° *tout $k \in \mathcal{K}$ est une combinaison linéaire unique des $k_\mu^{[p]}$:* $k = \sum_{p,\beta} m_{p,\beta} k_\beta^{[p]}$ ($m_{p,\beta}$: entier, nul sauf pour un nombre fini d'indices);

2° $\mathrm{S}\left(\sum_{p,\beta} m_{p,\beta} k_\beta^{[p]}\right) = \bigcup_{m_{p,\beta} \neq 0} \mathrm{S}(k_\beta^{[p]})$.

Remarque. — Un complexe basique est évidemment sans torsion.

Soient un complexe canonique basique $\mathcal{K}$, un faisceau gradué-filtré $\mathcal{B}$ et un entier l; tout élément de $\mathcal{K} \otimes \mathcal{B}$ se met d'une façon unique sous la forme

$$\sum_{p,\mu} k_\mu^{[p]} \otimes b_{p,\mu}, \qquad \text{où} \quad b_{p,\mu} \in \mathcal{B}[\mathrm{S}(k_\mu^{[p]})];$$

nous définirons un degré et une filtration sur $\mathcal{K} \otimes \mathcal{B}$ en posant

$$(34.1) \quad \text{degré}\,(k^{[p]} \otimes b^{[q]}) = lp + q; \qquad f\left(\sum_{p,\mu} k_\mu^{[p]} \otimes b_{p,\mu}\right) = \operatorname*{Min.}_{p,\mu}[lp + f(b_{p,\mu})];$$

l'anneau $\mathcal{K} \otimes \mathcal{B}$ ainsi gradué et filtré sera noté $\mathcal{K}^l \otimes \mathcal{B}$. Il possède une différentielle homogène de degré l quand $\mathcal{B}$ possède une telle différentielle.

LEMME 34.1. — *Soient un complexe canonique basique $\mathcal{K}$, un complexe gradué-filtré $\mathcal{K}^*$ et le faisceau $\mathcal{B}^*$ associé à $\mathcal{K}^*$; l'anneau de $\mathcal{K}^l \bigcirc \mathcal{K}^*$ est $\mathcal{K}^l \otimes \mathcal{B}^*$.*

LEMME 34.2. — *Soient un complexe canonique basique $\mathcal{K}$ et un faisceau différentiel-filtré $\mathcal{B}$; si $\delta = 0$ sur $\mathcal{K}$,*

$$\mathcal{H}_r(\mathcal{K}^l \otimes \mathcal{B}) = \mathcal{K}^l \otimes \mathcal{F}_r\mathcal{B}.$$

Preuve des lemmes 1 et 2. — $\mathcal{K}$ est somme directe des sous-complexes que constituent les multiples entiers de l'un de ses éléments de base;

il suffit de prouver les lemmes quand on remplace $\mathcal{K}$ par l'un de ces sous-complexes; alors le lemme 34.1 est évident, le lemme 34.2 résulte du lemme 17.3.

PROPOSITION 34.1. — *a. Soient, sur un même espace* X, *un complexe basique* $\mathcal{K}$ *et un faisceau différentiel-filtré* $\mathcal{B}$; *on a*

$$(34.2) \qquad \boxed{\mathcal{H}_{l+1}(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{B}) = \mathcal{H}(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{F}_l\mathcal{B}),}$$

$\mathcal{F}_l\mathcal{B}$ *étant muni de sa différentielle* δ_l;

b. Soient, sur un même espace X, *un complexe basique* $\mathcal{K}$ *et un complexe filtré* $\mathcal{K}^\star$; *on a*

$$(34.3) \qquad \boxed{\mathcal{H}_{l+1}(\mathcal{K}'\bigcirc\mathcal{K}^\star) = \mathcal{H}(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{F}_l\mathcal{K}^\star),}$$

$\mathcal{F}_l\mathcal{K}^\star$ *étant muni de sa différentielle* δ_l.

Nota. — On opposera cette formule aux formules (36.6) et (36.7).

Preuve de a. — Soit δ' la différentielle nulle sur $\mathcal{K}$, égale sur $\mathcal{B}$ à celle de $\mathcal{B}$; sur $\mathcal{K}'\otimes\mathcal{B}$, $f(\delta-\delta') = l$; d'après la proposition 10.7 et le lemme 34.2,

$$\mathcal{H}_l(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{B}) = \mathcal{K}'\otimes\mathcal{F}_l\mathcal{B};$$

d'après la proposition 10.7 la différentielle δ_l de $\mathcal{H}_l(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{B})$ s'obtient en utilisant δ sur $\mathcal{K}$ et δ_l sur $\mathcal{F}_l\mathcal{B}$; d'où la formule (34.2), puisque $\mathcal{H}_{l+1}$ est l'anneau d'homologie de $\mathcal{H}_l$.

Preuve de b. — b résulte de a et du lemme 34.1.

35. DÉFINITION DU COMPLEXE GRADUÉ-FILTRÉ $\mathcal{K}'\bigcirc\mathcal{B}$ INTERSECTION DU COMPLEXE CANONIQUE $\mathcal{K}$ ET DU FAISCEAU DIFFÉRENTIEL-GRADUÉ-FILTRÉ-PROPRE $\mathcal{B}$. — LEMME 35.1. — *Soient un complexe canonique* $\mathcal{K}$ *et un faisceau différentiel-gradué-filtré-propre* $\mathcal{B}$, *définis sur un espace* X; *soient* $k\in\mathcal{K}$ *et* $b\in\mathcal{B}[S(k)]$; *posons*

$$x(k\otimes b) = xk\otimes xb \quad \text{si} \quad x\in S(k);$$
$$x(k\otimes b) = 0 \quad \text{sinon.}$$

Je dis que l'ensemble $S\left(\sum_\mu k_\mu \otimes b_\mu\right)$ *des points* x *tels que* $x\left(\sum_\mu k_\mu \otimes b_\mu\right) \neq 0$ *et que l'ensemble* $S^{(p)}\left(\sum_\mu k_\mu \otimes b_\mu\right)$ *des points* x *tels que* $f\left[x\left(\sum_\mu k_\mu \otimes b_\mu\right)\right] \leqq p$ *sont compacts.*

Preuve. — D'après les conditions e et g du n° **25**, xb_μ n'est défini et non nul que si x appartient à une partie compacte K_μ de $S(k_\mu)$; donc

$$S^p\left(\sum_\mu k_\mu \otimes b_\mu\right) \subset S\left(\sum_\mu k_\mu \otimes b_\mu\right) \subset \bigcup_\mu K_\mu$$

pour prouver que $S^{(p)}\left(\sum_\mu k_\mu \otimes b_\mu\right)$ et $S\left(\sum_\mu b_\mu \otimes b_\mu\right)$ sont compacts il suffit donc de prouver qu'ils sont fermés, c'est-à-dire de prouver la proposition suivante : *Si*

$$(35.1) \qquad x\left(\sum_\mu k_\mu \otimes b_\mu\right) = 0 \quad \text{ou} \quad f\left[x\left(\sum_\mu k_\mu \otimes b_\mu\right)\right] \geqq p,$$

il existe un voisinage V *de* x *tel que*

$$(35.2) \qquad y\left(\sum_\mu k_\mu \otimes b_\mu\right) = 0 \quad \text{ou} \quad f\left[y\left(\sum_\mu k_\mu \otimes b_\mu\right)\right] \geqq p \quad \text{pour } y \in V.$$

Nous ne modifions pas le fait à démontrer en supprimant les k_μ dont le support ne contient pas x et, vu les conditions g et h du n° **25**, en supposant

$$b_\mu \in \mathcal{B}[S(k_\mu) \cup W],$$

W étant un voisinage convenable de x; l'hypothèse (35.1) s'écrit

$$\sum_\mu (xk_\mu) \otimes xb_\mu = 0 \quad \text{ou} \quad f\left[\sum_\mu (xk_\mu) \otimes xb_\mu\right] \geqq p;$$

elle résulte :

1° d'un nombre fini de relations entre des éléments de $x\mathcal{K}$ et de $x\mathcal{B}(W)$;

2° des filtrations d'un nombre fini d'éléments de $x\mathcal{B}(\mathrm{W})$.

Ces relations expriment que x n'appartient pas aux supports de certains éléments de $\mathcal{K}$ et que la section de certains éléments de $\mathcal{B}(\mathrm{W})$ par x est nulle; puisque les supports des éléments de $\mathcal{K}$ sont fermés et que $\mathcal{B}$ est propre, on n'altère pas ces relations et l'on ne diminue pas ces filtrations en remplaçant x par un point arbitraire y d'un voisinage convenable de x; (35.2) est donc exact.

Définition 35.1. — *Soient un complexe canonique $\mathcal{K}$ et un faisceau différentiel propre, définis sur un espace X; nous nommerons $\mathcal{K}\bigcirc\mathcal{B}$ le complexe associé au complexe non sévaré que constituent l'anneau $\mathcal{K}\otimes\mathcal{B}$ et les supports compacts $\mathrm{S}\left(\sum_\mu k_\mu\otimes b_\mu\right)$ définis par le lemme 35.1; $x(\mathcal{K}\bigcirc\mathcal{B})\subset x\mathcal{K}\otimes\mathcal{B}(x)$; l'élément associé à $k\otimes b$ est noté $k\bigcirc b$. Supposons $\mathcal{B}$ différentiel-gradué-filtré-propre; utilisons sur $x(\mathcal{K}\bigcirc\mathcal{B})$ la filtration de $(x\mathcal{K})^l\otimes\mathcal{B}(x)$* (n° **14**); *nous définissons ainsi, d'après le lemme 35.1, une filtration du complexe $\mathcal{K}\bigcirc\mathcal{B}$; posons*

$$\text{degré }(k^{[p]}\bigcirc b^{[q]}) = lp+q,$$

si p et q sont les degrés de $k^{[p]}$ et *$b^{[q]}$; $\mathcal{K}\bigcirc\mathcal{B}$, ainsi gradué et filtré, sera noté $\mathcal{K}^l\bigcirc\mathcal{B}$.*

Remarque. — Si $\mathcal{B}$ est filtré et a le degré nul, alors la filtration de $\mathcal{K}^l\bigcirc\mathcal{B}$ est celle de $\mathcal{K}^0\bigcirc\mathcal{B}$ augmentée de l fois le degré de $\mathcal{K}^1\bigcirc\mathcal{B}$.

Propriétés de $\mathcal{K}^l\bigcirc\mathcal{B}$. — La définition précédente équivaut aux règles de calcul suivantes : $k\bigcirc b$ est défini si $k\in\mathcal{K}$, $b\in\mathcal{B}(\mathrm{F})$, $\mathrm{S}(k)\subset\mathrm{F}$; si le premier membre est défini,

$$k\bigcirc b+k_1\bigcirc b=(k+k_1)\bigcirc b; \tag{35.3}$$

$$k\bigcirc b+k\bigcirc b_1=k\bigcirc[\mathrm{S}(k)b+\mathrm{S}(k)b_1]; \tag{35.4}$$

$$k\bigcirc b=k\bigcirc[\dot{\mathrm{S}}(k)b]; \tag{35.5}$$

$$m(k\bigcirc b)=(mk)\bigcirc b=k\bigcirc mb \qquad (m\text{ ; entier}); \tag{35.6}$$

$$(k\bigcirc b)(k^{[p]}\bigcirc b_1)=kk^{[p]}\bigcirc \mathrm{S}(kk^{[p]})\alpha^{-q}b.\mathrm{S}(kk^{[p]})b_1; \tag{35.7}$$

$$\alpha(k^{[p]}\bigcirc b)=(-1)^p k^{[p]}\bigcirc \alpha b; \tag{35.8}$$

$$\partial(k^{[p]}\bigcirc b)=\partial k^{[p]}\bigcirc b+(-1)^p k^{[p]}\bigcirc \partial b; \tag{35.9}$$

$$\begin{cases} x(k\bigcirc b)=xk\otimes xb & \text{si } x\in\mathrm{S}(k); \\ x(k\bigcirc b)=0 & \text{sinon } (x\in\mathrm{X}); \end{cases} \tag{35.10}$$

(35.11) $\sum_\mu k_\mu \bigcirc b_\mu = 0$ si et seulement si $x \sum_\mu k_\mu \bigcirc b_\mu = 0$ quel que soit $x \in X$;

(35.12) $$f\left(\sum_\mu k_\mu \bigcirc b_\mu\right) = \text{Borne inf.}_{x\in X}\, f\left[x\left(\sum_\mu k_\mu \bigcirc b_\mu\right)\right];$$

(35.13) degré $k^{(p)} \bigcirc b^{(q)} = lp + q$.

PROPOSITION 35.1. — *Si $\mathcal{K}$ est un complexe canonique, si $\mathcal{K}^*$ est un complexe à supports compacts et si $\mathcal{B}^*$ est le faisceau associé à $\mathcal{K}^*$; alors*

$$\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{B}^* = \mathcal{K} \bigcirc \mathcal{K}^*;$$

si $\mathcal{K}^*$ est gradué-filtré, alors

$$\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}^* = \mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{K}^*.$$

Preuve. — On identifie aisément la définition et les règles de calcul de $\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{B}^*$ et $\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{K}^*$.

36. PROPRIÉTÉS DE $\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}$, QUAND $\mathcal{K}$ EST FIN. — PROPOSITION 36.1. — *Soient, sur un même espace X, un complexe canonique-fin $\mathcal{K}$ et un faisceau différentiel-gradué-filtré-propre $\mathcal{B}$:*

a. $\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}$ est un complexe gradué-filtré-fin.

b. $x(\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}) = (x\mathcal{K})' \otimes \mathcal{B}(x)$.

c. Si $\mathcal{B}'$ est un second faisceau différentiel-gradué-filtré-propre défini sur X, si λ est un homomorphisme de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$ et si λ constitue, quel que soit $x \in X$, un isomorphisme, respectant le degré et la filtration, de $\mathcal{B}'(x)$ sur $\mathcal{B}(x)$; alors λ définit un isomorphisme de $\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}'$ sur $\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}$; cet isomorphisme respecte le degré et la filtration.

d. Si $\mathcal{K}'$ est un complexe canonique, défini sur X,

$$(\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{K})' \bigcirc \mathcal{B} = \mathcal{K}'' \bigcirc (\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}).$$

e. Si F est une partie fermée de X,

$$F(\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}) = (F\mathcal{K})' \bigcirc \mathcal{B}.$$

f. Si G est une partie ouverte de X et si $\mathcal{B}(F) = 0$ sauf si F est une partie compacte de G,

$$\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B} = (G\mathcal{K})' \bigcirc \mathcal{B}.$$

g. Si $\mathcal{K}^*$ est le sous-complexe de $\mathcal{K}$ constitué par les éléments de $\mathcal{K}$ dont le support est compact, $\mathcal{K}^*$ est un complexe canonique fin et

$$\mathcal{K}^{*\prime} \bigcirc \mathcal{B} = \mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}.$$

Preuve de a. — On pose

$$\lambda_y(k \bigcirc b) = (\lambda_y k) \bigcirc b.$$

Preuve de b. — Par définition

$$x(\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}) \subset (x\mathcal{K})' \otimes \mathcal{B}(x).$$

Il s'agit donc, étant donnés $k \in \mathcal{K}$ et $b \in \mathcal{B}(x)$, de prouver que

$$(xk) \otimes b \in x(\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{B}).$$

Puisque $\mathcal{B}$ est propre, il existe un voisinage fermé V' de x et un élément b' de $\mathcal{B}(V')$ tels que $b = xb'$; d'après la proposition 32.1 *a* il existe un élément k' de $\mathcal{K}$ tel que

$$S(k') \subset V', \qquad xk' = xk,$$

d'où

$$(xk) \otimes b = (xk') \otimes (xb') = x(k' \bigcirc b') \in x(\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{B}).$$

Preuve de c. — λ définit un homomorphisme de l'anneau de $\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}'$ dans l'anneau de $\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}$ et, vu *b*, un isomorphisme, respectant degré et filtration, de $x(\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}') = (x\mathcal{K})' \otimes \mathcal{B}'(x)$ sur $x(\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}) = (x\mathcal{K})' \otimes \mathcal{B}(x)$, quel que soit $x \in X$. Pour conclure il suffit d'appliquer les propositions *a* et 32.2.

Preuve de d. — D'après *b* et la formule (30.3),

$$x[\mathcal{K}'' \bigcirc (\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B})] = (x\mathcal{K}')' \otimes (x\mathcal{K})\mathcal{K}' \otimes \mathcal{B}(x) = x[(\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{K})' \bigcirc \mathcal{B}],$$

l'homomorphisme

$$k' \bigcirc (k \bigcirc b) \to (k' \bigcirc k) \bigcirc b$$

définit donc un isomorphisme de $x[\mathcal{K}'' \bigcirc (\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B})]$ sur $x[(\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{K}')' \bigcirc \mathcal{B}]$; pour conclure il suffit d'appliquer la proposition 32.2, en notant que $\mathcal{K}'' \bigcirc (\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B})$ est gradué-filtré-fin.

Preuve de e. — On applique de même la proposition 32.2 à l'homomorphisme

$$F(k \bigcirc b) \to (Fk) \bigcirc b.$$

Preuve de f. — D'après la proposition 22.2 *a*, $\mathcal{B}$ constitue un faisceau propre sur le sous-espace G; $(G\mathcal{K})' \bigcirc \mathcal{B}$ est donc défini. D'autre part les supports de tous les éléments de $\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}$ appartiennent à G et par suite $\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B} = G(\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B})$. On applique la proposition 32.2 à l'homomorphisme

$$G(k \bigcirc b) \rightarrow (Gk) \bigcirc b.$$

Preuve de g. — La proposition 32.1 *b* permet d'appliquer la proposition 32.2 à l'homomorphisme canonique de $\mathcal{K}^{*\prime} \bigcirc \mathcal{B}$ dans $\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}$.

LEMME 36.1. — *Soient, sur un espace* X, *un complexe canonique fin sans torsion* $\mathcal{K}$ *et un faisceau gradué-fitré-propre* $\mathcal{B}$;

a. si $\mathcal{B}'$ *est un sous-faisceau propre de* $\mathcal{B}$,

$$\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}' \subset \mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}; \tag{36.1}$$

b. si $\mathcal{B}'$ *est un idéal propre de* $\mathcal{B}$ *on a, entre les anneaux de* $\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}$, $\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}'$ *et* $\mathcal{K}' \bigcirc (\mathcal{B}/\mathcal{B}')$ *la relation*

$$\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B} / \mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}' = \mathcal{K}' \bigcirc (\mathcal{B}/\mathcal{B}'). \tag{36.2}$$

Preuve de a. — L'homomorphisme canonique de $\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}'$ dans $\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}$ est un isomorphisme respectant support, degré et filtration, car, vu (17.1) et la proposition 36.1 *b*,

$$x(\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}') = (x\mathcal{K})' \otimes \mathcal{B}'(x) \subset (x\mathcal{K})' \otimes \mathcal{B}(x) = x(\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}).$$

Preuve de b. — Soit λ l'homomorphisme canonique de $\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}$ dans $\mathcal{K}' \bigcirc (\mathcal{B}/\mathcal{B}')$; soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}$ que λ annule; vu *a*

$$\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}' \subset \mathcal{N};$$

d'après la proposition 36.1 *b* et la formule (17.2)

$$x(\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}') = (x\mathcal{K})' \otimes \mathcal{B}'(x) = x\mathcal{N};$$

donc, vu le lemme 32.1,

$$\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}' = \mathcal{N}.$$

LEMME 36.2. — *Remplaçons dans les définitions du* n° 9 *l'anneau différentiel-filtré* $\mathcal{A}$ *par un faisceau différentiel-filtré* $\mathcal{B}$ *ou un complexe* *filtré* $\mathcal{K}^*$; $\mathcal{C}^p_r$, $\mathcal{D}^p_r$ *deviennent (abstraction faite de la différentiation et de la multiplication) des sous-faisceaux de* $\mathcal{B}$, *que nous noterons* $\mathcal{C}^p_r\mathcal{B}$, $\mathcal{D}^p_r\mathcal{B}$, *ou des sous-complexes de* $\mathcal{K}^*$, *que nous noterons* $\mathcal{C}^p_r\mathcal{K}^*$, $\mathcal{D}^p_r\mathcal{K}^*$. *Soient sur un espace* X *un complexe canonique-fin sans torsion* $\mathcal{K}$ *et un faisceau différentiel-filtré-propre* $\mathcal{B}$; *si* $\delta = 0$ *sur* $\mathcal{K}$, *on a*

$$\mathcal{C}^p_r(\mathcal{K}^0 \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{K}^0 \bigcirc \mathcal{C}^p_r\mathcal{B}; \tag{36.3}$$

$$\mathcal{D}^p_r(\mathcal{K}^0 \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{K}^0 \bigcirc \mathcal{D}^p_r\mathcal{B}. \tag{36.4}$$

Preuve. — $\mathcal{K}^0 \bigcirc \mathcal{C}^p_r\mathcal{B} \subset \mathcal{C}^p_r(\mathcal{K}^0 \bigcirc \mathcal{B})$ d'après le lemme 36.1 *a*; d'après les formules (32.7), (17.3) et la proposition 36.1 *b*,

$$x(\mathcal{K}^0 \bigcirc \mathcal{C}^p_r\mathcal{B}) = x\mathcal{C}^p_r(\mathcal{K}^0 \bigcirc \mathcal{B});$$

d'où (36.3), vu le lemme 32.1. On prouve de même (36.4).

Lemme 36.3. — *Soient sur un espace* X *un complexe canonique-fin sans torsion* $\mathcal{K}$ *et un faisceau différentiel-filtré-propre* $\mathcal{B}$; *si* $\delta = 0$ *sur* $\mathcal{K}$, *on a*

$$\mathcal{H}_r(\mathcal{K}^l \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{K}^l \bigcirc \mathcal{F}_r\mathcal{B}. \tag{36.5}$$

Preuve pour $l = 0$. — On porte (36.3) et (36.4) dans la définition (9.9) de $\mathcal{H}_r$; on utilise le lemme 36.1 *b*.

Preuve pour $l \neq 0$. — Donnons à $\mathcal{B}$ un degré nul; sur $\mathcal{K}^1 \bigcirc \mathcal{B}$, δ est homogène de degré nul; augmentons la filtration de $\mathcal{K}^0 \bigcirc \mathcal{B}$ de l fois le degré de $\mathcal{K}^1 \bigcirc \mathcal{B}$: on obtient la filtration de $\mathcal{K}^l \bigcirc \mathcal{B}$ vu la remarque du n° **55** et la formule (36.5) vu la remarque du n° **11**.

Proposition 36.2. — *a. Soient sur un espace* X *un complexe canonique-fin sans torsion* $\mathcal{K}$ *et un faisceau différentiel-filtré-propre* $\mathcal{B}$; *on a*

$$\boxed{\mathcal{H}_{l+1}(\mathcal{K}^l \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}(\mathcal{K}^l \bigcirc \mathcal{F}_l\mathcal{B}),} \tag{36.6}$$

$\mathcal{F}_l$ *étant muni de sa différentielle* δ_l;

b. Soient sur un espace X *un complexe canonique-fin sans torsion* $\mathcal{K}$ *et un complexe filtré* $\mathcal{K}^*$; *on a*

$$\boxed{\mathcal{H}_{l+1}(\mathcal{K}^l \bigcirc \mathcal{K}^*) = \mathcal{H}(\mathcal{K}^l \bigcirc \mathcal{F}_l\mathcal{K}^*),} \tag{36.7}$$

$\mathcal{F}_l$ *étant muni de sa différentielle* δ_l.

Preuve de a. — Soit δ' la différentielle de $\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}$ nulle sur $\mathcal{K}$, égale à δ sur $\mathcal{B}$; $f(\delta - \delta') = l$; donc, vu la proposition 10.7 *a*,

$$\mathcal{H}_l(\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}'_l(\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}),$$

c'est-à-dire, vu (36.5)

$$\mathcal{H}_l(\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{F}_l \mathcal{B}.$$

D'après la proposition 10.7 *c*, δ_l s'obtient en utilisant au second membre δ sur $\mathcal{K}$ et δ_l sur $\mathcal{F}_l \mathcal{B}$; d'où (36.6), puisque $\mathcal{H}_{l+1}$ est l'anneau d'homologie de $\mathcal{H}_l$.

Preuve de b. — On utilise *a* et la proposition 35.1.

IV. — Couverture.

37. Définition et propriétés des couvertures. — Définition. — *Nous nommerons couverture d'un espace* X *tout complexe* $\mathcal{K}$ *défini sur* X *ayant les propriétés que voici :*

a. $\mathcal{K}$ *est un complexe canonique, sans torsion, dont le degré est* $\geqq 0$;

b. $\mathcal{K}$ *possède une unité* u *telle que* $S(u) = X$;

c. quel que soit $x \in X$, *les éléments de* $\mathcal{H}x\mathcal{K}$ *sont les multiples entiers de la classe d'homologie contenant* xu.

Proposition 37.1. — *u est un cycle homogène de degré nul; la classe d'homologie v de u est une unité de $\mathcal{H}\mathcal{K}$; si $m =$ entier $\neq 0$, alors $mu \neq 0$, $mv \neq 0$, $mxu \neq 0$, $mxv \neq 0$, où $x \in X$; u, v, xu, xv ne sont divisibles par aucun entier autre que* ± 1.

Preuve. — u est un cycle de degré nul d'après la remarque du n° 4. $mxu \neq 0$, car $\mathcal{K}$ est sans torsion. Si $mxv = 0$, alors $mxu \sim 0$, c'est-à-dire, vu que u est de degré minimum et δ de degré $+1$, $mxu = 0$, ce qui ne se peut. Supposons $xv = mh$, où $h \in \mathcal{H}x\mathcal{K}$; on peut remplacer h par sa composante homogène de degré nul; d'après *c*, il existe un entier n tel que $h = nxv$; d'où $mn = 1$, $m = \pm 1$. Supposons $xu = mk$, où $k \in x\mathcal{K}$; on a $m\delta k = 0$, donc $\delta k = 0$; soit h la classe d'homologie de k; $xv = mh$; donc $m = \pm 1$.

Proposition 37.2. — *Si $\mathcal{K}$ est une couverture de l'espace* X, *si* θ *est une application continue d'un espace* X' *dans* X, *alors* $\overset{-1}{\theta}\mathcal{K}$ *est une couverture de* X'.

Cette proposition est évidente; elle a pour cas particulier la suivante :

Proposition 37.3. — *Si $\mathcal{K}$ est une couverture de l'espace* X, *si* X_1 *est est un sous-espace de* X, $X_1\mathcal{K}$ *est une couverture de* X.

Proposition 37.4. — *Si $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}'$ sont deux couvertures d'un espace* X, $\mathcal{K}\bigcirc\mathcal{K}'$ *et* $\mathcal{K}'\bigcirc\mathcal{K}$ *sont deux couvertures de* X, *canoniquement isomorphes.*

Preuve. — $\mathcal{K}\bigcirc\mathcal{K}'$ est canonique, d'après la proposition 30.2, et possède l'unité $u\bigcirc u'$. D'après (30,3),

$$x(\mathcal{K}\bigcirc\mathcal{K}')=(x\mathcal{K})\otimes(x\mathcal{K}'), \tag{37.1}$$

$x\mathcal{K}$ et $x\mathcal{K}'$ sont sans torsion; on déduit aisément des propositions 17.1 et 17.2 que le produit tensoriel de deux anneaux sans torsion est sans torsion; donc $x(\mathcal{K}\bigcirc\mathcal{K}')$ est sans torsion; donc $\mathcal{K}\bigcirc\mathcal{K}'$ est sans torsion. Enfin (37.1) et la proposition 18.1 *d* prouvent que

$$\mathcal{H}[x(\mathcal{K}\bigcirc\mathcal{K}')]=\mathcal{H}(x\mathcal{K})\otimes\mathcal{H}(x\mathcal{K}');$$

$\mathcal{H}[x(\mathcal{K}\bigcirc\mathcal{K}')]$ est donc l'ensemble des multiples entiers de la classe d'homologie contenant $x(u\bigcirc u')$. La proposition 30.2 prouve que $\mathcal{K}\bigcirc\mathcal{K}'$ et $\mathcal{K}'\bigcirc\mathcal{K}$ sont canoniquement isomorphes, cet isomorphisme conservant degré et supports.

Proposition 37.5. — *Si $\mathcal{K}$ est une couverture de* X, *si u est l'unité de* $\mathcal{K}$ *et si* $\mathcal{K}^\star$ *est un complexe gradué-filtré défini sur* X, *alors* $u\bigcirc k^\star$ *est un isomorphisme canonique, respectant support, degré et filtration, de* $\mathcal{K}^\star$ *dans* $\mathcal{K}'\bigcirc\mathcal{K}^\star$.

Preuve. — On utilise les propositions 31.1 et 37.1.

Lemme 37.1. — *Soit $\mathcal{K}$ une couverture de* X; *soit u son unité; soit* $\mathcal{K}^\star$ *un complexe défini sur* X, *fin, à supports compacts, sur lequel* $\delta=0$.

L'isomorphisme canonique de $\mathcal{K}^*$ *dans* $\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{K}^*$ (proposition 37.5) *définit un isomorphisme canonique de* $\mathcal{K}^*$ *sur* $\mathcal{H}(\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{K}^*)$.

Preuve. — Étant donné un cycle c de $\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{K}^*$, il s'agit de prouver qu'il existe un élément unique k^* de $\mathcal{K}^*$ tel que

$$c \sim u \bigcirc k^*. \tag{37.2}$$

Soit $x \in X$; d'après (30.3) et la proposition 18.1 *d*

$$\mathcal{H}[x(\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{K}^*)] = \mathcal{H}(x\mathcal{K}) \otimes x\mathcal{K}^*; \tag{37.3}$$

il existe donc un élément *unique* xk_x^* de $x\mathcal{K}^*$ tel que

$$xc \sim x(u \bigcirc k_x^*); \tag{37.4}$$

d'après le lemme 30.1, x possède un voisinage ouvert V_x tel que

$$\overline{V}_x c \sim \overline{V}_x(u \bigcirc k_x^*);$$

on peut recouvrir $S(c)$, qui est compact d'après la proposition 30.1, avec un nombre fini de tels voisinages, les $V_\nu(\nu = 1, 2, \ldots, \omega)$;

$$\overline{V}_\nu c \sim \overline{V}_\nu(u \bigcirc k_\nu^*); \tag{37.5}$$

d'après la proposition 22.2 *b*, il existe une partie ouverte V_0 de X telle que $\overline{V_0} \cap S(c) = \emptyset$ et que $\bigcup\limits_{0 \leqq \nu \leqq \omega} V_\nu = X$; soit $k_0^* = 0$; (37.5) vaut pour $0 \leqq \nu \leqq \omega$. Utilisons l'hypothèse que $\mathcal{K}^*$ est fin, la formule (32.6) et le fait que les λ_ν respectent δ et les homologies, car $\delta\mathcal{K}^* = 0$; (37.5) donne

$$\lambda_\nu c \sim u \bigcirc \lambda_\nu k_\nu^*, \tag{37.6}$$

d'où résulte (37.2), puisque $\sum\limits_\nu \lambda_\nu$ est l'identité. Il reste à prouver que (37.2) détermine k^* sans ambiguité; de (37.2) et (37.4) résulte

$$xk^* = xk_x^*; \tag{37.7}$$

xk_x^* est déterminé sans ambiguité; donc xk^* et par suite k^* sont déterminés sans ambiguité.

Proposition 37.6. — *Soit* $\mathcal{K}$ *une couverture d'un espace* X; *soit* $\mathcal{K}^*$ *un complexe défini sur* X, *fin et à supports compacts. L'isomorphisme cano-*

nique λ de $\mathcal{K}^*$ dans $\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{K}^*$ (proposition 37.5) *définit un isomorphisme de $\mathcal{H}\mathcal{K}^*$ sur $\mathcal{H}(\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{K}^*)$.*

Preuve. — Utilisons sur $\mathcal{K}^*$ une filtration nulle; soit δ' la différentielle égale à δ sur $\mathcal{K}$ et à o sur $\mathcal{K}^*$; d'après le lemme 37.1 et la proposition 10.9, λ définit un isomorphisme de $\mathcal{K}^*$ sur $\mathcal{H}'(\mathcal{K}^{-1} \bigcirc \mathcal{K}^*) = \mathcal{K}'_0(\mathcal{K}^{-1} \bigcirc \mathcal{K}^*)$; donc, vu la proposition 10.7, λ définit un isomorphisme de $\mathcal{K}^*$ sur $\mathcal{H}_0(\mathcal{K}^{-1} \bigcirc \mathcal{K}^*)$; λ définit donc (proposition 10.6) un isomorphisme de $\mathcal{H}_1\mathcal{K}^* = \mathcal{H}\mathcal{K}^*$ sur $\mathcal{H}_1(\mathcal{K}^{-1} \bigcirc \mathcal{K}^*)$, qui est donc de degré nul et par suite (proposition 10.4) identique à $\mathcal{H}(\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{K}^*)$.

Proposition 37.7. — *Tout espace* X (*de dimension n*) *possède une couverture fine* (*dont le degré a pour maximum n*).

Cette proposition résulte des exemples de couvertures fines donnés aux n^{os} **38** et **40**.

38. Couvertures fines d'Alexander et de Cech. — Définition. — *Étant donné un espace* X [*dont les points sont totalement ordonnés*] *envisageons* (n° **16**) *l'anneau d'Alexander* [*de Čech*] $\mathcal{K}$ *attaché à* X : *ses éléments homogènes de degré p sont les fonctions $k(x_0, x_1, \ldots, x_p)$ des points $x_0, x_1, \ldots, x_p$ de* X [*tels que $x_0 < x_1 < \ldots < x_p$*]. *Définissons* S(k) *comme l'ensemble des points x de* X *dont tout voisinage contient $p+1$ points $x_0, x_1, \ldots, x_p$ tels que $k(x_0, x_1, \ldots, x_p) \neq 0$* [*et $x_0 < x_1 < \ldots < x_p$*]. *Cet anneau muni de ces supports constitue un complexe non séparé. Le complexe séparé $\mathfrak{X}$ associé à $\mathcal{K}$ sera nommé couverture fine d'Alexander* [*de Čech*] (¹) *de l'espace* X.

Justification. — $\mathfrak{X}$ est canonique, sans torsion; ses éléments sont de degrés ≥ 0; $\mathfrak{X}$ possède une unité : la fonction $u(x_0) = 1$; S(k) est fermé. Il faut prouver que $\mathcal{H}(x\mathfrak{X})$ se réduit aux multiples entiers de la classe d'homologie de xu : soit xk l'image canonique de k dans $x\mathfrak{X}$, si xk est un cycle, c'est que δk est nul quand ses arguments appartiennent à un voisinage de x; donc d'après la proposition 16.1 :

si $p > 0$, k est égal à une différentielle au voisinage de x et $xk \sim 0$;

(¹) Notre définition s'inspire d'Alexander et de Čech, [1].

si $p=0$, k est constant au voisinage de x et xk est un multiple entier de xu.

Il reste à prouver que $\mathfrak{L}$ est fin : soient $V_\nu(\nu=1, 2, \ldots, \omega)$ des parties ouvertes de X telles que $\bigcup_\nu V_\nu = X$; soit $u_\nu(x_0)$ la fonction égale à 1 en les points de V_ν n'appartenant pas à $V_1, V_2, \ldots, V_{\nu-1}$, nulle ailleurs; les relations (32.4) sont satisfaites.

39. Couverture et complexe basique de Čech attachés à un recouvrement fermé, localement fini R. — Définition 39.1. — *Soit un espace* X. *Soit un recouvrement fermé, localement fini, totalement ordonné* R *de* X : *c'est un ensemble totalement ordonné de parties fermées* F_μ *de* X *ayant les propriétés suivantes* : $\bigcup_\mu F_\mu = X$; *les* F_μ *rencontrant une partie compacte de* X *sont en nombre fini. Envisageons l'anneau de Čech* ([2]) *attaché à l'ensemble* R *des* F_μ : *ses éléments homogènes de degré* p *sont les fonctions* $k(F_0, F_1, \ldots, F_p)$ *de* $p+1$ *éléments de* R *tels que* $F_0 < F_1 < \ldots < F_p$. *Définissons* $S(k)$ *comme l'ensemble des points* x *de* X *appartenant à* $p+1$ *éléments* $F_0, F_1, \ldots, F_p$ *de* X *tels que* $F_0 < F_1 < \ldots < F_p$ *et* $k(F_0, F_1, \ldots, F_p) \neq 0$. *Cet anneau, muni de ces supports, est un complexe non séparé. Le complexe séparé associé,* $\mathcal{K}$, *sera nommé couverture de Čech de* X *attachée au recouvrement* R. Pour que l'image de k dans $\mathcal{K}$ soit nulle il faut et il suffit que $k(F_0, F_1, \ldots, F_p) = 0$ chaque fois que $F_0 < F_1 < \ldots < F_p$ et $F_0 \cap F_1 \cap \ldots \cap F_p \neq \emptyset$. On peut donc convenir que *les éléments homogènes de* $\mathcal{K}$ *sont les fonctions à valeurs entières* $k(F_0, F_1, \ldots, F_p)$ *qui sont définies quand* $F_0 < F_1 < \ldots < F_p$ *et* $F_0 \cap F_1 \cap \ldots \cap F_p \neq \emptyset$.

Justification. — $S(k)$ est la réunion des $F_0 \cap F_1 \cap \ldots \cap F_p$ tels que $F_0 < F_1 < \ldots < F_p$ et $k(F_0, F_1, \ldots, F_p) \neq 0$; puisque R localement fini, $S(k)$ est donc fermé. L'anneau $x\mathcal{K}$ est l'anneau de Čech défini par l'ensemble des xF_μ non vides; vu la proposition 16.1, $\mathcal{H}(x\mathcal{K})$ est donc l'anneau des entiers.

([2]) En utilisant un anneau d'Alexander, on définirait la couverture d'Alexander attachée à R; son emploi est moins avantageux : elle a des éléments non nuls de tous les degrés ≥ 0, alors que la couverture de Čech vérifie la proposition 39.1.

Définition 39.2. — *Nous nommerons complexe basique de Čech, attaché au recouvrement* R, *le sous-complexe* $\mathcal{K}^\star$ *de la couverture de Čech* $\mathcal{K}$ *attachée à* R *qu'engendrent les fonctions* $k(F_0, F_1, \ldots, F_p)$ *qui ne diffèrent de* 0 *que pour un nombre fini de systèmes d'arguments* : une base de $\mathcal{K}^\star$ est constituée par les fonctions $k(F_0, F_1, \ldots, F_p)$ valant 1 pour un système d'arguments, 0 pour les autres. $\mathcal{K} = \mathcal{K}^\star$ *lorsque* R *est fini.*

La proposition suivante est évidente :

Proposition 39.1. — *Le maximum du degré de la couverture et du complexe basique de Čech attachés au recouvrement* K *est* $n-1$, *n étant l'ordre de* R, *c'est-à-dire le plus petit entier tel que l'intersection de* $n+1$ *éléments de* R *soit toujours vide.*

Proposition 39.2. — *Soient* $\mathcal{K}$ *et* $\mathcal{K}^\star$ *la couverture et le complexe basique de Čech attachés à un recouvrement d'un espace* X; *soit* $\mathcal{K}'$ *un complexe gradué-filtré défini sur* X; *on a*

$$\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{K}' = \mathcal{K}^{\star\prime} \bigcirc \mathcal{K}'. \tag{39.1}$$

Preuve. — Étant donné $k \in \mathcal{K}$ et $k' \in \mathcal{K}'$, il existe $k^\star \in \mathcal{K}^\star$ tel que $k \bigcirc k' = k^\star \bigcirc k'$ puisque $S(k')$ est compact.

40. Couverture fine de degré n d'un espace a n dimensions. — Rappelons trois définitions importantes des espaces à n dimensions; l'équivalence de ces trois définitions est classique [1] :

Définition 40.1 (Lebesgue). — *Un espace est de dimension* $\leqq n$ *quand il est métrique* [2], *séparable* [3], *et qu'à chacun de ses recouvrements*

---

(1) *Voir :* Hurewicz et Wallman, *Dimension theory* [*Princeton Univ. Press*, 1941, (théor. V 5 et V 8, ex. III 6)]. Une partie de cette théorie est exposée dans la *Topologie* d'Alexandroff et Hopf : Chap. IX, §. 3. Il existe d'autres définitions de la dimension : *voir* Alexandroff, Hopf et Pontrjagin, *Comp. Math.*, t. 4, p. 239-255.

(2) Un espace X est métrique quand sa topologie peut être définie à l'aide d'une distance $\rho(x, y)$: si $x, y, z \in X$,

$$\rho(x, y) \geqq 0; \qquad \rho(x, y) > 0 \quad \text{si} \quad x \neq y; \qquad \rho(x, y) = \rho(y, x);$$
$$\rho(x, z) \leqq \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

(3) Un espace séparable est la fermeture d'une des ses parties dénombrables.

finis ouverts peut-être associé un recouvrement fini ouvert, plus fin (¹), *d'ordre* $\leqq n+1$.

DÉFINITION 40.2 (Menger-Urysohn). — *Un espace est de dimension* $\leqq n$ *quand il est métrique, séparable et que chacun de ses points possède des voisinages arbitrairement petits dont les frontières sont de dimensions* $< n$. *L'espace vide est de dimension* -1.

DÉFINITION 40.3 (Menger-Nöbeling). — *Soit* E_{2n+1} *l'espace euclidien à* $2n+1$ *dimensions; un espace* X *est de dimension* $\leqq n$ *s'il est homéomorphe à une partie fermée de* E_{2n+1} *ne contenant aucun point ayant plus de n coordonnées rationnelles.*

Remarque 40.1. — Si X est de dimension n et si $X \subset E_{2n+1}$, l'un au moins des points de X a n coordonnées rationnelles.

PROPOSITION 40.1. — *Un espace de dimension n possède une couverture fine dont le degré a pour maximum n.*

Nous déduirons cette proposition de la définition 40.3 et des deux lemmes suivants :

LEMME 40.1. — *La droite euclidienne* E_1 *possède une couverture fine* $\mathcal{E}_1$, *dont le degré vaut* 0 *ou* 1, *et telle que la réunion des supports des éléments homogènes de degré* 1 *de* $\mathcal{E}_1$ *est l'ensemble des points de* E_1 *d'abscisses rationnelles.*

Preuve. — Définissons $\mathcal{E}_1$ comme suit : L'anneau des éléments de $\mathcal{E}_1$ de degré 0 est l'anneau des fonctions $k(x)$ du type suivant : $x \in E_1$; $k(x)$ est défini sur E_1 sauf (¹) pour un nombre fini de valeurs rationnelles de x : $x_1, x_2, \ldots, x_m$; $k(x)$ a une valeur entière constante sur chacun des intervalles : $x < x_1$, $x_1 < x < x_2$, ..., $x_m < x$. Le groupe des éléments de $\mathcal{E}_1$ de degré 1 est constitué par le groupe additif des

(¹) Le recouvrement R′ est plus fin que le recouvrement R si tout élément de R′ est compris dans au moins un élément de R.

(¹) On convient d'identifier $k(x)$ et $k_1(x)$ si $k(x) = k_1(x)$ sauf pour un nombre fini de valeurs de x.

fonctions $l(x)$, nulles sauf en un nombre fini de valeurs rationnelles de x.

Soit :

$$\varepsilon > 0, \qquad \varepsilon \to 0; \qquad k(x-0) = \lim k(x-\varepsilon); \qquad k(x+0) = \lim k(x+\varepsilon);$$

définissons comme suit le produit et la différentiation de $\mathcal{E}_1$:

$$l(x)\,k(x) = l(x)\,k(x+0); \qquad k(x)\,l(x) = k(x-0)\,l(x); \qquad l(x)\,l_1(x) = 0;$$
$$\delta k(x) = k(x+0) - k(x-0); \qquad \delta l = 0;$$

nous obtenons un anneau canonique; en effet

$$\begin{aligned}\delta(kk_1) &= k(x+0)\,k_1(x+0) - k(x-0)\,k_1(x-0)\\ &= [k(x+0) - k(x-0)]\,k_1(x+0) + k(x-0)\,[k_1(x+0) - k_1(x-0)]\\ &= \delta k.k_1 + k.\delta k_1.\end{aligned}$$

Soit $S(k)$ l'ensemble des points de E_1 dont tout voisinage contient un point x tel que $k(x) \neq 0$; soit $S(l)$ l'ensemble des points de E_1 où $l(x) \neq 0$. Le complexe $\mathcal{E}_1$ ainsi défini est évidemment une couverture fine de E_1.

LEMME 40.2. — *L'espace euclidien à m dimensions* E_m *possède une couverture fine* $\mathcal{E}_m$ *dont le maximum du degré est m, et telle que la réunion des supports des éléments homogènes de degré p de* $\mathcal{E}_m$ *est l'ensemble des points de* E_m *ayant au moins p coordonnées rationnelles.*

Preuve. — E_m est le produit $E_1 \times E_{m-1}$; soient φ_1 et φ_{m-1} les projections canoniques de E_m sur E_1 et E_{m-1}; on prend

$$\mathcal{E}_m = \overset{-1}{\varphi}(\mathcal{E}_1) \bigcirc \overset{-1}{\varphi}(\mathcal{E}_{m-1});$$

$\mathcal{E}_m$ est une couverture de E_m, vu les propositions 37.2 et 37.4; on vérifie aisément qu'elle est fine.

Preuve de la propositon 40.1. — La définition 40.3 permet de supposer que l'espace à n dimensions envisagé est une partie fermée X de E_{2n+1} ne contenant aucun point ayant plus de n coordonnées rationnelles; d'après la remarque 40.1 l'un au moins des points de X a n coordonnées rationnelles; $X\mathcal{E}_{2n+1}$ est donc une couverture fine de X dont le maximum du degré est n.

V. — Les anneaux d'homologie d'un espace.

41. L'ANNEAU D'HOMOLOGIE $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$ D'UN ESPACE X RELATIF A UN FAISCEAU DIFFÉRENTIEL PROPRE $\mathcal{B}$. — Soit X un espace localement compact; soit $\mathcal{B}$ un faisceau différentiel propre défini sur X; soient $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_3$ trois couvertures fines de X; soient u_1, u_2, u_3 leurs unités et k_1, k_2, k_3 leurs éléments; envisageons les isomorphismes canoniques (propositions 37.5 et 37.4) λ^1_{21} de $\mathfrak{X}_1$ *dans* $\mathfrak{X}_2 \bigcirc \mathfrak{X}_1$, λ^2_{12} de $\mathfrak{X}_2$ *dans* $\mathfrak{X}_1 \bigcirc \mathfrak{X}_2$, λ^{12}_{21} de $\mathfrak{X}_1 \bigcirc \mathfrak{X}_2$ *sur* $\mathfrak{X}_2 \bigcirc \mathfrak{X}_1$:

$$\lambda^1_{21} k_1 = u_2 \bigcirc k_1; \qquad \lambda^2_{12} k_2 = u_1 \bigcirc k_2; \qquad \lambda^{12}_{21}(k_1 \bigcirc k_2) = (-1)^{pq} k_2 \bigcirc k_1,$$

si k_1 et k_2 sont homogènes, de degrés p et q; d'après les propositions 36.1 *a* et 37.6, λ^1_{21} définit un isomorphisme λ'^1_{21} de $\mathcal{H}(\mathfrak{X}_1 \bigcirc \mathcal{B})$ *sur* $\mathcal{H}(\mathfrak{X}_2 \bigcirc \mathfrak{X}_1 \bigcirc \mathcal{B})$ et λ^2_{12} définit un isomorphisme λ'^2_{12} de $\mathcal{H}(\mathfrak{X}_2 \bigcirc \mathcal{B})$ *sur* $\mathcal{H}(\mathfrak{X}_1 \bigcirc \mathfrak{X}_2 \bigcirc \mathcal{B})$; λ^{12}_{21} définit un isomorphisme λ'^{12}_{21} de $\mathcal{H}(\mathfrak{X}_1 \bigcirc \mathfrak{X}_2 \bigcirc \mathcal{B})$ *sur* $\mathcal{H}(\mathfrak{X}_2 \bigcirc \mathfrak{X}_1 \bigcirc \mathcal{B})$; $\lambda'^2_1 = (\lambda'^1_{21})^{-1} \lambda'^{12}_{21} \lambda'^2_{12}$ est donc un isomorphisme canonique de $\mathcal{H}(\mathfrak{X}_2 \bigcirc \mathcal{B})$ *sur* $\mathcal{H}(\mathfrak{X}_1 \bigcirc \mathcal{B})$. En permutant les rôles de $\mathfrak{X}_1$ et $\mathfrak{X}_2$ on définit l'isomorphisme canonique $\lambda'^1_2 = (\lambda'^2_{12})^{-1} \lambda'^{21}_{12} \lambda'^1_{21}$, qui est $(\lambda'^2_1)^{-1}$, car $(\lambda^{12}_{21})^{-1} = \lambda^{21}_{12}$.

Prouvons que

$$\lambda'^2_3 \lambda'^1_2 = \lambda'^1_3. \tag{41.1}$$

Définissons les isomorphismes $\lambda^\mu_{123} (\mu = 1, 2, 3)$ de $\mathfrak{X}_\mu$ dans $\mathfrak{X}_1 \bigcirc \mathfrak{X}_2 \bigcirc \mathfrak{X}_3$:

$$\lambda^1_{123} k_1 = k_1 \bigcirc u_2 \bigcirc u_3; \qquad \lambda^2_{123} k_2 = u_1 \bigcirc k_2 \bigcirc u_3; \qquad \lambda^3_{123} k_3 = u_1 \bigcirc u_2 \bigcirc k_3;$$

λ^μ_{123} définit un isomorphisme de $\mathcal{H}(\mathfrak{X}_\mu \bigcirc \mathcal{B})$ *sur* $\mathcal{H}(\mathfrak{X}_1 \bigcirc \mathfrak{X}_2 \bigcirc \mathfrak{X}_3 \bigcirc \mathcal{B})$; on vérifie aisément la formule

$$\lambda'^\mu_\nu = (\lambda'^\nu_{123})^{-1} \lambda'^\mu_{123},$$

qui établit (41.1).

A un isomorphisme canonique près, *l'anneau $\mathcal{H}(\mathfrak{X} \bigcirc \mathcal{B})$ est donc indépendant du choix de la couverture fine $\mathfrak{X}$ de X. Cet anneau sera noté $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$ et nommé anneau d'homologie de X relatif au faisceau différentiel propre $\mathcal{B}$.*

Plus généralement le faisceau d'homologie (n° **28**) $\mathcal{F}(\mathfrak{X} \bigcirc \mathcal{B})$ du complexe $\mathcal{X} \bigcirc \mathcal{B}$ est indépendant du choix de la couverture fine $\mathcal{X}$ de X; il sera noté $\mathcal{F}(X \bigcirc \mathcal{B})$ et nommé *faisceau d'homologie de* X *relatif au faisceau différentiel propre* $\mathcal{B}$; *il est constitué par les anneaux d'homologie* $\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{B})$ *des parties fermées* F *de* X; *il est continu* (proposition 28.1) et par suite propre (proposition 23.1).

THÉORÈME 41.1. — *Si* X *est un point* x, *alors* $\mathcal{H}(x \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}\mathcal{B}(x)$.

Preuve. — Il existe une couverture fine $\mathcal{X}$ de x constituée par une unité et ses multiples entiers; $\mathcal{X} \bigcirc \mathcal{B} = \mathcal{B}(x)$ d'après les propositions 17.1 *a* et 36.1 *b*.

LEMME 41.1. — *Soient* F *une partie fermée de* X *et* $h \in \mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$, *tels que* $Fh = 0$; *soit* $\mathcal{X}$ *une couverture fine de* X. *La classe d'homologie* h *contient un cycle* c *appartenant à* $\mathcal{X} \bigcirc \mathcal{B}$ *et tel que* $F \cap S(c) = \emptyset$.

Preuve. — Soit c_1 un cycle de $\mathcal{X} \bigcirc \mathcal{B}$ appartenant à h; $F\mathcal{X}$ est une couverture fine de F (n° **32** et proposition 37.3); Fc_1 est donc la différentielle d'un élément de $F(\mathcal{X} \bigcirc \mathcal{B}) = (F\mathcal{X}) \bigcirc \mathcal{B}$ (proposition 36.1 *e*): $Fc_1 = F\delta a$; on choisit $c = c_1 - \delta a$.

THÉORÈME 41.2. — *Soit* $h \in \mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$; *si* xh *est nilpotent quel que soit* $x \in X$, *alors* h *est nilpotent* (c'est-à-dire : il existe un exposant entier $q > 0$ tel que $h^q = 0$).

Preuve. — Soit $x \in X$; il existe par hypothèse un entier $q_x > 0$ tel que $xh^{q_x} = 0$. Soit $\mathcal{X}$ une couverture fine de X; d'après le lemme 41.1, il existe un cycle c_x de $\mathcal{X} \bigcirc \mathcal{B}$ tel que

$$c_x \in h^{q_x}, \qquad x \cap S(c_x) = \emptyset.$$

Donc $\bigcap_{x \in X} S(c_x) = \emptyset$; or les $S(c_x)$ sont compacts; donc ([3], Chap. I, § 10, C'') il existe un nombre fini de c_x, les c_ν ($\nu = 1, \ldots, \omega$) tels que $\bigcap_{1 \leq \nu \leq \omega} S(c_\nu) = \emptyset$; d'où $S\left(\prod_{1 \leq \nu \leq \omega} c_\nu\right) = \emptyset$; d'où $\prod_{1 \leq \nu \leq \omega} c_\nu = 0$; d'où $h^q = 0$, pour $q = \sum_{1 \leq \nu \leq \omega} q_\nu$.

42. L'ANNEAU D'HOMOLOGIE GRADUÉ $\mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{B})$ D'UN ESPACE X RELATIF A UN FAISCEAU DIFFÉRENTIEL-GRADUÉ PROPRE $\mathcal{B}$. — Si $\mathcal{B}$ est un faisceau gradué propre, $\mathfrak{X}^l \bigcirc \mathcal{B}$ est un complexe gradué (définition 35.1); *si* $\mathcal{B}$ *a une différentielle homogène de degré* l, $\mathfrak{X}^l \bigcirc \mathcal{B}$ a une différentielle homogène de même degré; $\mathcal{H}(\mathfrak{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$ est donc gradué (n° **8**) : c'est $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$ muni d'un degré; ce degré ne dépend pas du choix de $\mathfrak{X}$, car les isomorphismes $\lambda_2^{\prime 1}$ du n° **41** conservent le degré, vu la proposition 37.1; $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$ *ainsi gradué sera noté* $\mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{B})$.

THÉORÈME 42.1. — *Si* X *est un point* x, *alors* $\mathcal{H}(x^l \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}\mathcal{B}(x)$.

Preuve. — Identique à celle du théorème 41.1.

THÉORÈME 42.2. — *Soit* $\mathcal{B}$ *un faisceau différentiel-gradué propre, défini sur l'espace* X, *et dont la différentielle est homogène de degré* l.

a. Le degré de $\mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{B})$ *est minoré et majoré par les Bornes inf. et sup. de*

$$lp + \text{degré } b,$$

où

$$0 \leqq p \leqq \dim X, \qquad b \in \mathcal{B}(x), \qquad x \in X.$$

b. Supposons $l \neq 0$, $h \in \mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{B})$, $xh = 0$ *quel que soit* $x \in X$ *et degré* $h = \underset{x\in X}{\text{Borne inf.}}$ *degré* $\mathcal{B}(x)$ *si* $l > 0$, *degré* $h = \underset{x\in X}{\text{Borne sup.}}$ *degré* $\mathcal{B}(x)$ *si* $l < 0$; *alors* $h = 0$.

c. Si, quel que soit $x \in X$, *les éléments de* $\mathcal{H}\mathcal{B}(x)$ *homogènes de degré* p *sont nilpotents, alors les éléments de* $\mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{B})$ *homogènes de degré* p *sont nilpotents.*

Preuve de a. — Soit $\mathfrak{X}$ une couverture fine de X dont le maximum du degré est dim X (proposition 37.7). D'après la définition 35.1, le degré de $\mathfrak{X}^l \bigcirc \mathcal{B}$ est compris entre

$$\text{Borne inf. degré } \mathcal{B}(x) \quad \text{et} \quad l \dim X + \text{Borne sup. degré } \mathcal{B}(x) \quad \text{si} \quad l \geqq 0,$$
$$l \dim X + \text{Borne inf. degré } \mathcal{B}(x) \text{ et Borne sup. degré } \mathcal{B}(x) \text{ si } l \leqq 0.$$

Preuve de b. — Supposons $l > 0$: le cas $l < 0$ se ramène au cas $l > 0$ en changeant le signe du degré. Soit $\mathfrak{X}$ une couverture fine de X; soit c un cycle de $\mathfrak{X}^l \bigcirc \mathcal{B}$ appartenant à la classe h; $xc \sim 0$ et le degré de c est le minimum du degré du complexe $\mathfrak{X}^l \bigcirc \mathcal{B}$, dont la différentielle est homogène de degré > 0; donc $xc = 0$; donc $S(c) = 0$; donc $c = 0$.

Preuve de c. — Théorèmes 42.1 et 41.2.

Définition 42.1. — Soit $\mathcal{B}$ un *faisceau canonique* propre défini sur un espace X; nous nommerons *degré canonique de* $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$ le degré de $\mathcal{H}(X^1 \bigcirc \mathcal{B})$: le complexe $\mathcal{X}^1 \bigcirc \mathcal{B}$ est en effet canonique.

Théorème 42.3. — *Soit $\mathcal{B}$ un faisceau canonique propre défini sur un espace* X *et tel que*

$$bb_1 = (-1)^{pq} b_1 b, \tag{42.1}$$

quels que soient b et $b_1 \in \mathcal{B}(x)$, homogènes de degrés arbitraires p et q; alors

$$hh_1 = (-1)^{rs} h_1 h, \tag{42.2}$$

quels que soient h et $h_1 \in \mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$, homogènes de degrés canoniques r et s.

Preuve. — Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$ deux couvertures fines de X, u et u' leurs unités, $k^{[p]} \in \mathcal{X}$, $b^{[q]} \in \mathcal{B}[S(k^{[p]})]$, $k'^{[r]} \in \mathcal{X}'$, $b'^{[s]} \in \mathcal{B}[S(k'^{[r]})]$, homogènes de degrés p, q, r, s; soit λ l'isomorphisme canonique de $\mathcal{X} \bigcirc \mathcal{X}' \bigcirc \mathcal{B}$ sur $\mathcal{X}' \bigcirc \mathcal{X} \bigcirc \mathcal{B}$ (proposition 37.4); d'après (31.6), (31.7), (35.7) (35.8) et (42.1)

$$\begin{aligned}\lambda[(k^{[p]} \bigcirc u' \bigcirc b^{[q]})(u \bigcirc k'^{[r]} \bigcirc b'^{[s]})] \\ = (-1)^{(p+q)(r+s)}(k'^{[r]} \bigcirc u \bigcirc b'^{[s]})(u' \bigcirc k^{[p]} \bigcirc b^{[q]}),\end{aligned}$$

cette formule a pour conséquence (42.2), puisque λ définit, d'après les conventions du n° **41**, l'isomorphisme identique de $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$ sur lui-même.

43. L'anneau spectral $\mathcal{H}_r(X^l \bigcirc \mathcal{B})$ et l'anneau filtré $\mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{B})$ d'homologie d'un espace X relatifs a un faisceau différentiel-filtré-propre $\mathcal{B}$. — Soit X un espace localement compact; soit $\mathcal{B}$ un faisceau différentiel-filtré-propre défini sur X; soient $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ deux couvertures fines de X; l'isomorphisme canonique λ_{21}^1 de $\mathcal{X}_1$ dans $\mathcal{X}_2 \bigcirc \mathcal{X}_1$ définit un isomorphisme, conservant la filtration, de $\mathcal{X}_1^l \bigcirc \mathcal{B}$ dans $\mathcal{X}_2^l \bigcirc \mathcal{X}_1^l \bigcirc \mathcal{B}$ (proposition 37.5); d'après le n° **41**, λ_{21}^1 définit un isomorphisme

$$\begin{aligned}&\text{de } \mathcal{H}_{l+1}(\mathcal{X}_1^l \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}(\mathcal{X}_1^l \bigcirc \mathcal{F}_l\mathcal{B}) \qquad (\text{proposition } 36.2a) \\ &\quad \text{sur } \mathcal{H}_{l+1}(\mathcal{X}_2^l \bigcirc \mathcal{X}_1^l \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}(\mathcal{X}_2^l \bigcirc \mathcal{X}_1^l \bigcirc \mathcal{F}_l\mathcal{B})\end{aligned}$$

et de $\mathcal{H}(\mathcal{X}_1 \bigcirc \mathcal{B})$ sur $\mathcal{H}(\mathcal{X}_2 \bigcirc \mathcal{X}_1 \bigcirc \mathcal{B})$; donc, vu la proposition 10.6*a*, λ_{21}^1 définit un isomorphisme, respectant le degré, de $\mathcal{H}_r(\mathcal{X}_1^l \bigcirc \mathcal{B})$

sur $\mathcal{H}_r(\mathfrak{X}_2^l \bigcirc \mathfrak{X}_1^l \bigcirc \mathcal{B})$ pour $l < r$ et un isomorphisme, respectant la filtration, de $\mathcal{H}(\mathfrak{X}_1^l \bigcirc \mathcal{B})$ sur $\mathcal{H}(\mathfrak{X}_2^l \bigcirc \mathfrak{X}_1^l \bigcirc \mathcal{B})$. On en déduit, comme au n° **41**, un isomorphisme canonique $\lambda_2^{\prime 1}$, vérifiant (41.1), de l'anneau spectral $\mathcal{H}_r(\mathfrak{X}_1^l \bigcirc \mathcal{B})$ sur l'anneau spectral $\mathcal{H}_r(\mathfrak{X}_2^l \bigcirc \mathcal{B})$, si $l < r$, et de l'anneau filtré $\mathcal{H}(\mathfrak{X}_1^l \bigcirc \mathcal{B})$ sur l'anneau filtré $\mathcal{H}(\mathfrak{X}_2^l \bigcirc \mathcal{B})$; $\lambda_2^{\prime 1}$ respecte degré et filtration.

A un isomorphisme canonique près, *l'anneau spectral* $\mathcal{H}_r(\mathfrak{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$, *où* $l < r$, *et l'anneau filtré* $\mathcal{H}(\mathfrak{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$ *sont donc indépendants du choix de la couverture fine* $\mathfrak{X}$ *de* X. *Ces anneaux seront notés* $\mathcal{H}_r(\mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$, *où* $l < r$, *et* $\mathcal{H}(\mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$; *ils seront nommés anneau spectral et anneau filtré d'homologie de* X *relatifs à l'entier* l *et au faisceau différentiel-filtré-propre* $\mathcal{B}$. On a, d'après les formules (36.6) et (9.17),

$$\boxed{\mathcal{H}_{l+1}(\mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}(\mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{F}_l \mathcal{B}),} \tag{43.1}$$

$\mathcal{F}_l \mathcal{B}$ *étant muni de sa différentielle* δ_l;

$$\boxed{\mathcal{G}\mathcal{H}(\mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{B}) \subset \lim_{r \to +\infty} \mathcal{H}_r(\mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{B}).} \tag{43.2}$$

L'ensemble des anneaux $\mathcal{H}_r(\mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$ *et* $\mathcal{H}(\mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$ *sera noté* $\mathcal{H}_*(\mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$.

Plus généralement le faisceau spectral d'homologie (n° **29**) $\mathcal{F}_r(\mathfrak{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$ du complexe filtré $\mathfrak{X}^l \bigcirc \mathcal{B}$ et son faisceau filtré d'homologie $\mathcal{F}(\mathfrak{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$ sont indépendants du choix de la couverture fine $\mathfrak{X}$ de X; on les notera $\mathcal{F}_r(\mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$, où $l < r$, et $\mathcal{F}(\mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$; on les nommera *faisceau spectral d'homologie de* X *et faisceau filtré d'homologie de* X *relatifs à l'entier* l *et au faisceau différentiel-filtré-propre* $\mathcal{B}$; ils sont respectivement constitués par les anneaux $\mathcal{H}_r(\mathrm{F}^l \bigcirc \mathcal{B})$ et $\mathcal{H}(\mathrm{F}^l \bigcirc \mathcal{B})$, où F est une partie fermée quelconque de X; ils sont respectivement *gradué continu* et *filtré-continu* (n° **26**); on a

$$\boxed{\mathcal{F}_{l+1}(\mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{F}(\mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{F}_l \mathcal{B}),} \tag{43.3}$$

$\mathcal{F}_l \mathcal{B}$ *étant muni de sa différentielle* δ_l;

$$\boxed{\mathcal{G}\mathcal{F}(\mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{B}) \subset \lim_{r \to +\infty} \mathcal{F}_r(\mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{B}),} \tag{43.4}$$

l'ensemble des faisceaux $\mathcal{F}_r(\mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$ *et* $\mathcal{F}(\mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$ *sera noté* $\mathcal{F}_*(\mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$.

THÉORÈME 43.1. — *Les deux membres de* (43.2) *sont égaux, ainsi que les deux membres de* (43.4), *quand les deux conditions suivantes sont simultanément réalisées :*

1° *la filtration de* $\mathcal{B}(x)$ *est bornée supérieurement;*
2° *ou bien* $\dim X$ *est finie, ou bien* $l \leqq 0$.

Preuve. — Propositions 10.2 et 37.7; définition 35.1.

THÉORÈME 43.2. — *Si* X *est un point* x, *alors* $\mathcal{H}_*(x' \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}_* \mathcal{B}(x)$. $\mathcal{H}_* \mathcal{B}(x)$ *désignant l'anneau spectral* $\mathcal{H}_r \mathcal{B}(x)$, *où* $l < r$, *et l'anneau filtré* $\mathcal{H}\mathcal{B}(x)$.

Preuve. — Identique à celle du théorème 41.1.

THÉORÈME 43.3. — *Le degré et la filtration de* $\mathcal{H}_*(X' \bigcirc \mathcal{B})$ *sont minorés et majorés par les bornes inf. et sup. de*

$$lp + f(b),$$

où

$$0 \leqq p \leqq \dim X, \qquad b \in \mathcal{B}(x), \qquad x \in X.$$

Preuve. — Propositions 10.1, 37.7 et définition 35.1.

THÉORÈME 43.4. — *a. Supposons qu'il existe un entier p tel que les éléments de* $\mathcal{H}\mathcal{B}(x)$, *dont la filtration* $> p$, *soient nilpotents; alors les éléments de* $\mathcal{H}(X' \bigcirc \mathcal{B})$, *dont la filtration* $> p$, *sont nilpotents.*

b. Supposons qu'il existe un entier q tel que les éléments de $\mathcal{H}_{l+1} \mathcal{B}(x)$ *homogènes de degré q soient nilpotents; alors les éléments de* $\mathcal{H}_r(X' \bigcirc \mathcal{B})$ *homogènes de degré q sont nilpotents.*

Preuve de a. — Théorèmes 41.2 et 43.2.

Preuve de b pour $r = l + 1$. — On applique le théorème 41.2 à $\mathcal{H}(X' \bigcirc \mathcal{F}_l \mathcal{B})$, compte tenu de la formule (43.1) et du théorème 43.2.

Preuve de b pour $r > l + 1$. — $\mathcal{H}_r$ est image d'un sous-anneau de $\mathcal{H}_{l+1}$ (n° **9**).

(*à suivre*).

L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue

(suite);

PAR JEAN LERAY.

44. L'ANNEAU CANONIQUE-SPECTRAL $\mathcal{H}_r(X^l \bigcirc \mathcal{B})$ ET L'ANNEAU GRADUÉ-FILTRÉ $\mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{B})$ D'HOMOLOGIE D'UN ESPACE X RELATIFS A UN FAISCEAU CANONIQUE-FILTRÉ-PROPRE $\mathcal{B}$. — Soit X un espace localement compact; soit $\mathcal{B}$ un faisceau canonique-filtré-propre défini sur X; soit un entier l; soit $\mathfrak{X}$ une couverture fine de X; soit $\mathfrak{X}^l \bigcirc \mathcal{B}$ le complexe canonique-filtré qui s'obtient en utilisant sur $\mathfrak{X} \bigcirc \mathcal{B}$ le degré de $\mathfrak{X}^l \bigcirc \mathcal{B}$ et la filtration de $\mathfrak{X}^l \bigcirc \mathcal{B}$; les raisonnements des n^os **42** et **43** prouvent que $\mathcal{H}_r(\mathfrak{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$ et $\mathcal{H}(\mathfrak{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$ sont, à un isomorphisme près, indépendants du choix de $\mathfrak{X}$; nous les noterons $\mathcal{H}_r(X^l \bigcirc \mathcal{B})$ et $\mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{B})$; vu les n^os **11** et **12**, $\mathcal{H}_r(X^l \bigcirc \mathcal{B})$ *est un anneau canonique-gradué; ses deux degrés seront nommés : degré canonique et degré filtrant; sa différentielle* δ_r *est homogène, de degré canonique* $+1$ *et de degré filtrant* r*;* $\mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{B})$ *est un anneau gradué-filtré; son degré sera encore nommé canonique*. L'ensenble des anneaux $\mathcal{H}_r(X^l \bigcirc \mathcal{B})$ et $\mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{B})$ sera noté $\mathcal{H}_*(X^l \bigcirc \mathcal{B})$.

THÉORÈME 44.1. — *Soit* $\mathcal{B}$ *un faisceau canonique-filtré-propre, défini sur un espace* X; *si* $h \in \mathcal{H}_*(X^l \bigcirc \mathcal{B})$, *si* $xh = 0$ *quel que soit* $x \in X$ *et si le degré canonique de* h *est la borne inférieure du degré canonique de* $\mathcal{B}(x)$, *alors* $h = 0$.

Preuve. — Soit p ce degré minimum; puisque δ_r est de degré canonique $+1$, la restriction de $\varkappa_r^{l+1}$ (n° **9**) à l'ensemble des éléments de $\mathcal{H}_{l+1}(X^l \bigcirc \mathcal{B})$ de degré canonique p en lesquels $\varkappa_r^{l+1}$ est défini, est un isomorphisme sur l'ensemble des éléments de $\mathcal{H}_r(\mathrm{X}'\bigcirc \mathcal{B})$ de degré canonique p; il suffit donc de prouver le théorème quand

$$h \in \mathcal{H}_{l,1}(\mathrm{X}'\bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}(\mathrm{X}'\bigcirc \mathcal{F}_l \mathcal{B})$$

et quand $h \in \mathcal{H}(\mathrm{X}'\bigcirc \mathcal{B})$; il résulte alors du théorème 42.2*b*, le degré employé étant le degré canonique.

THÉORÈME 44.2. — *Soit $\mathcal{B}$ un faisceau canonique-filtré-propre, défini sur un espace* X *et tel que*

$$bb_1 = (-1)^{pq} b_1 b, \tag{44.1}$$

quels que soient b et $b_1 \in \mathcal{B}(x)$, homogènes, de degrés canoniques p *et* q*; on a*

$$hh_1 = (-1)^{rs} h_1 h, \tag{44.2}$$

si h et h_1 sont des éléments de $\mathcal{H}_*(\mathrm{X}'\bigcirc \mathcal{B})$, homogènes de degrés canoniques r et s.

Preuve. — Identique à celle du théorème 42.3.

45. MODIFICATIONS DE L'ESPACE X N'ALTÉRANT PAS $\mathcal{H}_*(\mathrm{X}'\bigcirc \mathcal{B})$. — THÉORÈME 45.1. — *Soient un espace* X *et une partie fermée* F *de* X; *soit $\mathcal{B}$ un faisceau différentiel-filtré-propre ou canonique-filtré-propre, défini sur* X *et tel que $\mathcal{B}(x) = 0$ quand $x \in \mathrm{X}$, $\notin \mathrm{F}$*; on a

$$\mathcal{H}_*(\mathrm{X}'\bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}_*(\mathrm{F}'\bigcirc \mathcal{B}). \tag{45.1}$$

Preuve. — Soit $\mathfrak{X}$ une couverture fine de X; les supports des éléments de $\mathfrak{X}\bigcirc \mathcal{B}$ appartiennent à F; donc

$$\mathfrak{X}'\bigcirc \mathcal{B} = \mathrm{F}(\mathfrak{X}'\bigcirc \mathcal{B}),$$

d'où, vu la proposition 36.1*c*,

$$\mathfrak{X}'\bigcirc \mathcal{B} = (\mathrm{F}\mathfrak{X})'\bigcirc \mathcal{B};$$

or $\mathrm{F}\mathfrak{X}$ est une couverture fine de F (nº **32** et proposition 37.3).

THÉORÈME 45.2. — *Soient un espace* X *et une partie ouverte* G *de* X; *soit $\mathcal{B}$ un faisceau différentiel-filtré-propre ou canonique-filtré-propre,* *défini sur* X *et tel que* $\mathcal{B}(\mathrm{F}) = 0$ *quand* F *n'est pas une partie compacte de* G (*cf.* corollaire 46.2); *on a*

$$\mathcal{H}_*(\mathrm{X}' \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}_*(\mathrm{G}' \bigcirc \mathcal{B}). \tag{45.2}$$

Preuve. — Soit $\mathfrak{X}$ une couverture fine de X; $\mathrm{G}\mathfrak{X}$ est une couverture fine de G (nº **32**, proposition 37.3); d'après la proposition 36.1 *f*,

$$\mathfrak{X}' \bigcirc \mathcal{B} = (\mathrm{G}\mathfrak{X})' \bigcirc \mathcal{B}.$$

46. Modifications du faisceau $\mathcal{B}$ n'altérant pas $\mathcal{H}_*(\mathrm{X}' \bigcirc \mathcal{B})$. — Théorème 46.1. — *Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux faisceaux différentiels-filtrés-propres définis sur un espace* X; *soit λ un homomorphisme de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$; supposons que λ définisse un isomorphisme, respectant la filtration, de $\mathcal{B}'(x)$ sur $\mathcal{B}(x)$, quel que soit $x \in \mathrm{X}$; alors λ définit un isomorphisme de $\mathcal{H}_*(\mathrm{X}' \bigcirc \mathcal{B}')$ sur $\mathcal{H}_*(\mathrm{X}' \bigcirc \mathcal{B})$.*

Preuve. — Proposition 36.1 *c*.

Corollaire 46.1. — *Si $\mathcal{B}'$ est un sous-faisceau propre de $\mathcal{B}$ tel que $\mathcal{B}'(x) = \mathcal{B}(x)$ quel que soit $x \in \mathrm{X}$, alors*

$$\mathcal{H}_*(\mathrm{X}' \bigcirc \mathcal{B}') = \mathcal{H}_*(\mathrm{X}' \bigcirc \mathcal{B}).$$

Corollaire 46.2. — *Soit $\mathcal{B}'$ le faisceau qui se déduit de $\mathcal{B}$ en annulant $\mathcal{B}(\mathrm{F})$ quand* F *n'est pas compact,*

$$\mathcal{H}_*(\mathrm{X}' \bigcirc \mathcal{B}') = \mathcal{H}_*(\mathrm{X}' \bigcirc \mathcal{B}).$$

Théorème 46.2. — *Soit $\mathcal{B}$ un faisceau différentiel-gradué-propre défini sur un espace* X *et possédant les propriétés suivantes : le degré des éléments de $\mathcal{B}$ est borné inférieurement; la différentielle de $\mathcal{B}$ est homogène de degré > 0; $\mathcal{H}\mathcal{B}(x)$ est homogène de degré nul quel que soit $x \in \mathrm{X}$. On a*

$$\mathcal{H}(\mathrm{X} \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}(\mathrm{X} \bigcirc \mathcal{F}\mathcal{B}). \tag{46.1}$$

Preuve. — Utilisons sur $\mathcal{B}$ la filtration associée au degré changé de signe (nº **6**); d'après la proposition 10.9, $\mathcal{F}_0\mathcal{B} = \mathcal{F}\mathcal{B}$, $\delta_0 = 0$; donc d'après (43.1),

$$\mathcal{H}_1(\mathrm{X}^0 \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}(\mathrm{X}^0 \bigcirc \mathcal{F}\mathcal{B});$$

cet anneau est de degré nul, vu le théorème 42.2 *a*; d'où, vu la proposition 10.4, la formule (46.1).

THÉORÈME 46.3. — *Soit* $\mathcal{B}$ *un faisceau différentiel-filtré-propre défini sur un espace* X; *soit un entier* $l > 0$; *supposons la filtration de* $\mathcal{B}(x)$ *bornée supérieurement, le degré de* $\mathcal{H}_l\mathcal{B}(x)$ *borné inférieurement et le degré de* $\mathcal{H}_{l+1}\mathcal{B}(x)$ *nul en chaque point* x *de* X. *On ne modifie pas* $\mathcal{H}_*(X' \bigcirc \mathcal{B})$ *en remplaçant la filtration de* $\mathcal{B}$ *par la filtration nulle.*

Preuve. — La formule (43.1) et le théorème précédent donnent

$$\mathcal{H}_{l+1}(X' \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}(X' \bigcirc \mathcal{F}_{l+1}\mathcal{B}). \tag{46.2}$$

Soit $\mathcal{B}'$ le faisceau $\mathcal{B}$ muni de la filtration f' suivante :

$$\text{si } f(b) \geqq 0, \quad f'(b) = 0; \qquad \text{sinon } f'(b) = f(b) \leqq 0;$$

soit λ l'isomorphisme canonique de $\mathcal{B}'$ sur $\mathcal{B}$; sa filtration est $\geqq 0$; d'après la proposition 10.5, $\mathcal{B}'$ vérifie les conditions imposées à $\mathcal{B}$ et λ définit un isomorphisme de $\mathcal{H}_{l+1}\mathcal{B}'(x)$ sur $\mathcal{H}_{l+1}\mathcal{B}(x)$; donc, vu (46.2) et le théorème 46.1, λ définit un isomorphisme de $\mathcal{H}_{l+1}(X' \bigcirc \mathcal{B}')$ sur $\mathcal{H}_{l+1}(X' \bigcirc \mathcal{B})$; donc, vu la proposition 10.6 *a*, λ définit un isomorphisme, respectant filtration et degré, de $\mathcal{H}_*(X' \bigcirc \mathcal{B}')$ sur $\mathcal{H}_*(X' \bigcirc \mathcal{B})$. Soit $\mathcal{B}''$ le faisceau $\mathcal{B}$ muni de la filtration nulle; soit λ' l'isomorphisme canonique de $\mathcal{B}'$ sur $\mathcal{B}''$; sa filtration est $\geqq 0$; d'après les propositions 10.4 et 10.9, λ' définit un isomorphisme de $\mathcal{H}_{l+1}\mathcal{B}'(x)$ sur $\mathcal{H}_{l+1}\mathcal{B}''(x)$; donc, vu (46.2) et le théorème 46.1, λ' définit un isomorphisme de $\mathcal{H}_{l+1}(X' \bigcirc \mathcal{B}')$ sur $\mathcal{H}_{l+1}(X' \bigcirc \mathcal{B}'')$; donc, vu la proposition 10.6 *a*, λ' définit un isomorphisme, respectant la filtration et le degré, de $\mathcal{H}_*(X' \bigcirc \mathcal{B}')$ sur $\mathcal{H}_*(X' \bigcirc \mathcal{B}'')$. D'où un isomorphisme canonique de $\mathcal{H}_*(X' \bigcirc \mathcal{B})$ sur $\mathcal{H}_*(X' \bigcirc \mathcal{B}'')$.

THÉORÈME 46.4. — *Soit* $\mathcal{B}$ *un faisceau canonique-filtré-propre défini sur un espace* X *et possédant les propriétés suivantes : la filtration de* $\mathcal{B}(x)$ *est bornée supérieurement; le degré de* $\mathcal{B}(x)$ *est borné inférieurement; le degré canonique de* $\mathcal{H}_{l+1}\mathcal{B}(x)$ *est nul. On ne modifie pas* $\mathcal{H}_*(X' \bigcirc \mathcal{B})$ *en remplaçant* $\mathcal{B}$ *par* $\mathcal{F}\mathcal{B}$.

Nota. — Le faisceau $\mathcal{F}\mathcal{B}$ est gradué-filtré-propre.

Preuve. — D'après la formule (43.1)

$$\mathcal{H}_{l+1}(X^l \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{F}_l \mathcal{B});$$

$\mathcal{H}_l \mathcal{B}(x)$ a une différentielle homogène de degré canonique $+1$ et le degré canonique de $\mathcal{H}_{l+1}\mathcal{B}(x)$ est nul; donc, vu (46.1),

$$\mathcal{H}_{l+1}(X^l \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{F}_{l+1} \mathcal{B}). \tag{46.3}$$

Soit $r > l$; le degré canonique de $\mathcal{H}_r \mathcal{B}(x)$ est nul; δ_r, qui est homogène de degré canonique 1 (n^os **11** et **12**), est donc nul sur $\mathcal{H}_r \mathcal{B}(x)$; donc, vu la proposition 10.3,

$$\mathcal{H}_{l+1}\mathcal{B}(x) = \mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{B}(x). \tag{46.4}$$

Le théorème 46.1 permet de déduire de (46.3) et (46.4) que

$$\mathcal{H}_{l+1}(X^l \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{B}). \tag{46.5}$$

De (46.4) résulte que le degré canonique de $\mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{B}(x)$ est nul; donc, vu la définition de $\mathcal{G}$, puisque la filtration de $\mathcal{H}\mathcal{B}(x)$ est bornée supérieurement, le degré canonique de $\mathcal{H}\mathcal{B}(x)$ est nul; d'où, vu (46.1),

$$\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{F}\mathcal{B}). \tag{46.6}$$

Soit $\mathcal{B}'$ le sous-faisceau de $\mathcal{B}$ que constituent les éléments de $\mathcal{B}$ de degrés négatifs et les cycles de $\mathcal{B}$ de degré nul; $\mathcal{B}'$ vérifie les conditions imposées à $\mathcal{B}$, car le groupe additif des éléments de $\mathcal{F}_r\mathcal{B}'$ homogène de degré canonique p est nul si $p > 0$, est celui de $\mathcal{F}_r\mathcal{B}$ si $p < 0$, vu la définition 9.9; soit λ l'isomorphisme canonique de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$; λ définit un isomorphisme, respectant la filtration, de $\mathcal{F}\mathcal{B}'$ sur $\mathcal{F}\mathcal{B}$; donc, vu (46.5), (46.6) et la proposition 10.6 *a*, un isomorphisme, respectant la filtration et le degré, de $\mathcal{H}_*(X^l \bigcirc \mathcal{B}')$ sur $\mathcal{H}_*(X^l \bigcirc \mathcal{B})$.

Soit λ' l'homomorphisme de $\mathcal{B}'$ sur $\mathcal{F}\mathcal{B}' = \mathcal{F}\mathcal{B}$ qui annule les éléments de $\mathcal{B}'$ de degrés < 0 et qui applique sur leur classe d'homologie les éléments de $\mathcal{B}'$ de degré nul; puisque (46.5) et (46.6) valent quand on remplace $\mathcal{B}$ par $\mathcal{B}'$, λ' applique identiquement $\mathcal{H}_{l+1}(X^l \bigcirc \mathcal{B}')$ et $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B}')$ sur $\mathcal{H}_{l+1}(X^l \bigcirc \mathcal{F}\mathcal{B})$ et $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{F}\mathcal{B})$, donc, vu la proposition 10.6 *a*, $\mathcal{H}_*(X^l \bigcirc \mathcal{B}')$ sur $\mathcal{H}_*(X^l \bigcirc \mathcal{F}\mathcal{B})$.

D'où un isomorphisme canonique de $\mathcal{H}_*(X^l \bigcirc \mathcal{B})$ sur $\mathcal{H}_*(X^l \bigcirc \mathcal{F}\mathcal{B})$.

47. L'homomorphisme $\overset{-1}{\theta}$ réciproque de l'application continue θ. — Soit θ une application continue d'un espace X' dans un espace X; soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux faisceaux différentiels-filtrés-propres, définis respectivement sur X et sur X', tels que

$$\theta\mathcal{B}' = \mathcal{B} \qquad \text{sur } \overline{\theta(X')};$$

ceci signifie que $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}'\left[\overset{-1}{\theta}(F)\right]$ quand F est une partie fermée de l'adhérence $\overline{\theta(X')}$ de $\theta(X')$. Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$ deux couvertures fines de X et X'; soient u et u' leurs unités; soit $k \bigcirc b \in \mathcal{X} \bigcirc \mathcal{B}$: $k \in \mathcal{X}$, $b \in \mathcal{B}[S(k)]$; l'homomorphisme

$$k \bigcirc b \to u' \bigcirc \overset{-1}{\theta} k \bigcirc b', \qquad \text{où} \quad b' = [S(k) \cap \overline{\theta(X')}]b \in \mathcal{B}'\left[\overset{-1}{\theta}\left(S(k)\right)\right]$$

est un homomorphisme de $\mathcal{X}' \bigcirc \mathcal{B}$ dans $\left(\mathcal{X}' \bigcirc \overset{-1}{\theta}\mathcal{X}\right)' \bigcirc \mathcal{B}'$; sa filtration est $\geqq 0$; il définit donc (définition 10.1 et n° **45**) un *homomorphisme, de filtration* $\geqq 0$, *conservant le degré, de* $\mathcal{H}_*(X' \bigcirc \mathcal{B})$ *dans* $\mathcal{H}_*(X'' \bigcirc \mathcal{B}')$; *cet homomorphisme sera noté* $\overset{-1}{\theta}$ *et nommé homomorphisme réciproque de l'application* θ; les raisonnements du n° **41** prouvent qu'il est indépendant des choix des couvertures fines $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$.

Théorème 47.1. — *a. Si* θ' *applique* X'' *dans* X', *si* θ *applique* X' *dans* X *et si* $\theta'\mathcal{B}'' = \mathcal{B}'$ *sur* $\overline{\theta'(X'')}$, $\theta\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ *sur* $\overline{\theta(X')}$ *et* $\theta\theta'\mathcal{B}'' = \mathcal{B}$ *sur* $\overline{\theta\theta'(X)}$, *alors* $\theta\theta'$ *a pour homomorphisme réciproque l'homomorphisme composé* $\overset{-1}{\theta'}\overset{-1}{\theta}$.

b. Si θ *est l'application canonique dans* X *de la partie fermée* F *de* X, *alors* $\overset{-1}{\theta}$ *est la section par* F *de* $\mathcal{H}_*(X' \bigcirc \mathcal{B})$.

Preuves de *a* : formule (30.6); de *b* : proposition 36.1 *e*.

Ce théorème justifie la remarque suivante :

Remarque 47.1. — L'homomorphisme $\overset{-1}{\theta}$ de $\mathcal{H}_*(F' \bigcirc \mathcal{B})$ dans $\mathcal{H}_*(F'' \bigcirc \mathcal{B}')$, où F est une partie fermée de X et $F' = \overset{-1}{\theta}(F)$ constitue un *homomorphisme* canonique de $\mathcal{F}_*(X' \bigcirc \mathcal{B})$ dans $\theta\mathcal{F}_*(X'' \bigcirc \mathcal{B}')$.

48. L'homomorphisme canonique II de $\mathcal{H}_*\mathcal{B}(X)$ dans $\mathcal{H}_*(X' \bigcirc \mathcal{B})$. — Définition 48.1. — Soit un faisceau différentiel-filtré-propre $\mathcal{B}$, défini sur un espace X; soit π l'application de X sur un point y; d'après le théorème 43.2, $\mathcal{H}_*(y'\bigcirc \pi \mathcal{B}) = \mathcal{H}_*\mathcal{B}(X)$; $\overset{-1}{\pi}$ constitue donc *un homomorphisme canonique, que nous noterons* Π, *de* $\mathcal{H}_*\mathcal{B}(X)$ *dans* $\mathcal{H}_*(X'\bigcirc \mathcal{B})$.

Π *conserve le degré; sa filtration est* $\geqq 0$,

$$x\Pi h = xh, \quad \text{si} \quad x \in X, \quad h \in \mathcal{H}_*\mathcal{B}(X), \tag{48.1}$$

vu le théorème 43.2.

Théorème 48.1. — *Supposons* $\mathcal{B}$ *canonique-filtré-propre;* Π *conserve le degré canonique; si* $h \in \mathcal{H}_*\mathcal{B}(X)$ *a pour degré canonique la borne inférieure du degré de* $\mathcal{B}(x)$, *alors la condition* $\Pi h = 0$ *équivaut à* $xh = 0$ *quel que soit* $x \in X$.

Preuve. — Théorème 44.1.

Définition 48.2. — *Quand* Π *est un isomorphisme de* $\mathcal{H}\mathcal{B}(X)$ *sur* $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$ *ou un isomorphisme de* $\mathcal{H}_*\mathcal{B}(X)$ *sur* $\mathcal{H}_*(X'\bigcirc \mathcal{B})$ *nous écrirons*

$$\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}\mathcal{B}(X), \qquad \mathcal{H}_*\mathcal{B}(X) = \mathcal{H}_*(X'\bigcirc \mathcal{B}).$$

Théorème 48.2. — *Pour que* $\mathcal{H}_*(X'\bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}_*\mathcal{B}(X)$, *il faut et il suffit que*

$$\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{F}_l\mathcal{B}) = \mathcal{H}_{l+1}\mathcal{B}(X) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}\mathcal{B}(X).$$

Preuve. — Proposition 10.6 *a*.

Théorème 48.3. — $\mathcal{H}_*(X'\bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}_*\mathcal{B}(X)$ *quand les conditions suivantes sont simultanément réalisées :* $\mathcal{H}(X'\bigcirc \mathcal{F}_l\mathcal{B}) = \mathcal{H}_{l+1}\mathcal{B}(X)$; *la filtration de* $\mathcal{B}$ *est bornée supérieurement; ou bien* X *est de dimension finie, ou bien* $l \leqq 0$.

Preuve. — Soit $\mathfrak{X}$ une couverture fine de X, ayant un degré borné si $l > 0$ (proposition 37.7); Π est défini par un homomorphisme de $\mathcal{B}(X)$ dans $\mathfrak{X}'\bigcirc \mathcal{B}$; on applique la proposition 10.6 à cet homomorphisme.

Définition 48.3. — *Soit* F *une partie fermée quelconque de* X; *l'homomorphisme* Π *de* $\mathcal{H}_*\mathcal{B}(F)$ *dans* $\mathcal{H}_*(F'\bigcirc \mathcal{B})$ *constitue un homomorphisme, que nous noterons également* Π, *de* $\mathcal{F}_*\mathcal{B}$ *dans* $\mathcal{F}_*(X'\bigcirc \mathcal{B})$.

49. Relation entre l'anneau d'homologie d'un espace et les anneaux d'homologie des intersections des éléments d'un recouvrement fermé, localement fini de cet espace. — Définition 49.1. — *Soit un faisceau différentiel-filtré-propre défini sur un espace* X; *soit* $\mathcal{K}^*$ *le complexe basique de Čech* (n° **39**) *défini par un recouvrement fermé, localement fini, ordonné de* X; *soient deux entiers :* $l < m$. *Ces données définissent un anneau spectral, noté* $\mathcal{H}_r(\mathcal{K}^{*m} \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B})$ $(l < m < r)$ *tel que*

$$(49.1) \qquad \mathcal{H}_{m+1}(\mathcal{K}^{*m} \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}[\mathcal{K}^{*m} \otimes \mathcal{F}_m(X^l \bigcirc \mathcal{B})];$$

$$(49.2) \qquad \mathcal{G}\mathcal{H}(\mathcal{K}^{*m} \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}) \subset \lim_{r \to +\infty} \mathcal{H}_r(\mathcal{K}^{*m} \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B});$$

$\mathcal{H}(\mathcal{K}^{*m} \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B})$ *désignant* $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$ *muni d'une filtration définie par ces données.*

L'ensemble des anneaux $\mathcal{H}_r(\mathcal{K}^{*m} \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B})$ et $\mathcal{H}(\mathcal{K}^{*m} \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B})$ sera noté $\mathcal{H}_*(\mathcal{K}^{*m} \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B})$.

Remarque 49.1. — Les deux membres de (49.2) sont égaux quand les trois conditions suivantes sont simultanément réalisées :

1° la filtration de $\mathcal{B}(x)$ est bornée supérieurement;
2° ou bien dim X est finie, ou bien $l \leq 0$;
3° ou bien l'ordre de $\mathcal{K}^*$ est fini, ou bien $m \leq 0$.

Remarque 49.2. — Soient F_μ les parties fermées de X constituant le recouvrement qui définit $\mathcal{K}^*$; la donnée des anneaux

$$\mathcal{H}_m[(F_{\mu_1} \cap F_{\mu_2} \cap \ldots \cap F_{\mu_p})^l \bigcirc \mathcal{B}]$$

et de leurs sections par les F_μ définit $\mathcal{K}^{*m} \otimes \mathcal{F}_m(X^l \bigcirc \mathcal{B})$; le théorème 49.1 établit donc une relation entre ces données et $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$.

Preuve. — Soit $\mathcal{X}$ une couverture fine de X; vu les propositions 34.1 *b*, 39.2 et le n° **41**, les anneaux

$$\mathcal{H}_{m+1}(\mathcal{K}^{*m} \bigcirc \mathcal{X}^l \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}[\mathcal{K}^{*m} \otimes \mathcal{F}_m(\mathcal{X}^l \bigcirc \mathcal{B})] = \mathcal{H}[\mathcal{K}^{*m} \otimes \mathcal{F}_m(X^l \bigcirc \mathcal{B})]$$

et

$$\mathcal{H}(\mathcal{K}^* \bigcirc \mathcal{X} \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}(\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{X} \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$$

sont indépendants du choix de $\mathcal{X}$. Les raisonnements du n° **41** et la proposition 10.6 *a* permettent d'en déduire que l'anneau spectral et l'anneau filtré, $\mathcal{H}_r(\mathcal{K}^{*m} \bigcirc \mathfrak{X}' \bigcirc \mathcal{B})$ $(l < m < r)$ et $\mathcal{H}(\mathcal{K}^{*m} \bigcirc \mathfrak{X}' \bigcirc \mathcal{B})$, sont indépendants de ce choix; nous substituons dans leurs notations X à $\mathfrak{X}$. La remarque 1 résulte des propositions 10.2, 37.7 et 39.1.

Explicitons la définition 49.1 dans le cas le plus simple : le recouvrement n'a que deux éléments; la filtration de $\mathcal{B}$ est nulle; $l = 0$; $m = 1$. On obtient, compte tenu de la proposition 10.3, une proposition connue (¹).

Théorème 49.1. — *Soit un faisceau différentiel-filtré-propre défini sur un espace* X; *soient* F_1 *et* F_2 *deux parties fermées de* X *telles que* $F_1 \cup F_2 = X$. *Il existe une filtration de* $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$, *de valeurs* 0 *et* 1, *telle que* $\mathcal{G}\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$ *soit l'anneau d'homologie de l'anneau canonique que constituent le groupe additif*

$$\underset{(\text{degré } 0)}{\mathcal{H}(F_1 \bigcirc \mathcal{B})} + \underset{(\text{degré } 0)}{\mathcal{H}(F_2 \bigcirc \mathcal{B})} + \underset{(\text{degré } 1)}{\mathcal{H}[(F_1 \cap F_2) \bigcirc \mathcal{B}]}$$

et les règles de multiplication et de différentiation suivantes : soient

$$h_1 \in \mathcal{H}(F_1 \bigcirc \mathcal{B}), \qquad h_2 \in \mathcal{H}(F_2 \bigcirc \mathcal{B}), \qquad h_{12} \in \mathcal{H}[(F_1 \cap F_2) \bigcirc \mathcal{B}];$$

on garde la loi de multiplication de $\mathcal{H}(F_1 \bigcirc \mathcal{B})$ *et celle de* $\mathcal{H}(F_2 \bigcirc \mathcal{B})$; *on pose*

$$h_1 h_2 = h_2 h_1 = 0;$$
$$h_{12} h_1 = h_2 h_{12} = 0; \qquad h_1 h_{12} = [(F_1 \cap F_2) h_1] . h_{12}; \qquad h_{12} h_2 = h_{12} . [(F_1 \cap F_2) h_2],$$

les seconds membres étant calculés suivant la loi de multiplication de $\mathcal{H}[(F_1 \cap F_2) \bigcirc \mathcal{B}]$; *on pose*

$$\partial h_1 = -(F_1 \cap F_2) h_1; \qquad \partial h_2 = (F_1 \cap F_2) h_2; \qquad \partial h_{12} = 0.$$

Définition 49.2. — Soit un faisceau différentiel-filtré-propre $\mathcal{B}$ défini sur un espace X; soit un *recouvrement* de X, fermé, localement fini : $\bigcup_\mu F_\mu = X$. Soient $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}^*$ la couverture de Čech et le complexe basique de Čech définis par ce recouvrement, soit u l'unité d'une couverture fixe $\mathfrak{X}$ de X; l'homomorphisme λ

$$k \otimes b \to k \bigcirc u \bigcirc b$$

(¹) Théorème d'addition de Mayer-Vietoris. *Cf.* Alexandroff et Hopf, *Topologie*, Chap. VII, § 2; [9], p. 179-183.

de $\mathcal{K}^\star \otimes \mathcal{B}$ dans $\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{X} \bigcirc \mathcal{B}$ définit évidemment *un homomorphisme canonique de* $\mathcal{H}_*(\mathcal{K}^{\star m} \otimes \mathcal{B})$ *dans* $\mathcal{H}_*(X^m \bigcirc \mathcal{B})$; *cet homomorphisme conserve le degré; sa filtration est* $\geqq 0$. Quand cet homomorphisme est un *isomorphisme* de $\mathcal{H}_*(\mathcal{K}^{\star m} \otimes \mathcal{B})$ sur $\mathcal{H}_*(X^m \bigcirc \mathcal{B})$, nous écrirons

(49.3) $$\mathcal{H}_*(\mathcal{K}^{\star m} \otimes \mathcal{B}) = \mathcal{H}_*(X^m \bigcirc \mathcal{B});$$

quand c'est un *isomorphisme* de $\mathcal{H}(\mathcal{K}^\star \otimes \mathcal{B})$ sur $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$, nous écrirons

(49.4) $$\mathcal{H}(\mathcal{K}^\star \otimes \mathcal{B}) = \mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B}).$$

Théorème 49.2. — *Supposons que le recouvrement* $\bigcup_\mu F_\mu = X$, *auquel* $\mathcal{K}$ *est associé, soit d'ordre fini :*

a. Si $\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}\mathcal{B}(F)$ *quand* F *est une intersection non vide de* F_μ, *alors*

$$\mathcal{H}(\mathcal{K}^\star \otimes \mathcal{B}) = \mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B}).$$

b. S'il existe un entier l tel que $\mathcal{H}_*(F^l \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}_*\mathcal{B}(F)$ *quand* F *est une intersection non vide de* F_μ, *alors*

$$\mathcal{H}_*(\mathcal{K}^{\star m} \otimes \mathcal{B}) = \mathcal{H}_*(X^m \bigcirc \mathcal{B}) \quad \text{si} \quad l < m.$$

Preuve de a. — Utilisons la filtration nulle de $\mathcal{B}$; d'après la proposition 10.9,

$$\mathcal{H}_1\mathcal{B}(F) = \mathcal{H}_1(F^0 \bigcirc \mathcal{B}),$$

quand F est une intersection de F_μ; donc, vu les formules (34.2) et (49.1), λ définit un isomorphisme de $\mathcal{H}_2(\mathcal{K}^{\star 1} \otimes \mathcal{B})$ sur $\mathcal{H}_2(\mathcal{K}^{\star 1} \bigcirc X^0 \bigcirc \mathcal{B})$; vu les propositions 10.6*b* et 39.1, λ définit donc un isomorphisme de $\mathcal{H}(\mathcal{K}^{\star 1} \otimes \mathcal{B})$ sur $\mathcal{H}(\mathcal{K}^{\star 1} \bigcirc X^0 \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$.

Preuve de b. — D'après *a*, λ définit un isomorphisme de $\mathcal{H}(\mathcal{K}^\star \otimes \mathcal{F}_m\mathcal{B})$ sur $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{F}_m\mathcal{B})$, c'est-à-dire, vu les formules (34.2) et (43.1), de $\mathcal{H}_{m+1}(\mathcal{K}^{\star m} \otimes \mathcal{B})$ sur $\mathcal{H}_{m+1}(X^m \bigcirc \mathcal{B})$; d'après *a*, λ définit un isomorphisme $\mathcal{H}(\mathcal{K}^\star \otimes \mathcal{B})$ sur $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$; la proposition 10.6*a* achève la preuve.

VI. — Les anneaux d'homologie d'une application continue.

50. Définition. — Soient un espace localement compact X, un faisceau différentiel-filtré-propre $\mathcal{B}$ défini sur X, une application continue ξ de X dans un espace localement compact Y et deux entiers $l < m$. Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ deux couvertures fines de X et Y ; envisageons le complexe filtré (*voir* proposition 32.3)

(50.1) $$\mathcal{Y}^m \bigcirc \xi(\mathfrak{X}^l \odot \mathcal{B}) = \xi(\overset{-1}{\xi}\mathcal{Y}^m \bigcirc \mathfrak{X}^l \bigcirc \mathcal{B}).$$

D'après les propositions 37.2 et 37.4, $\overset{-1}{\xi}\mathcal{Y} \bigcirc \mathfrak{X}$ est une couverture fine de X ; donc $\mathcal{H}(\overset{-1}{\xi}\mathcal{Y}^m \bigcirc \mathfrak{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$ est $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$ muni d'une certaine filtration, qu'on augmente en remplaçant l par m, qu'on diminue en remplaçant m par l : cette filtration est inférieure à celle de $\mathcal{H}(X^m \bigcirc \mathcal{B})$ et est supérieure à celle de $\mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{B})$. D'après la formule (50.1) et la proposition 36.2 b

$$\mathcal{H}_{m+1}(\overset{-1}{\xi}\mathcal{Y}^m \bigcirc \mathfrak{X}^l \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}_{m+1}[\mathcal{Y}^m \bigcirc \xi(\mathfrak{X}^l \bigcirc \mathcal{B})] =$$
$$\mathcal{H}[\mathcal{Y}^m \bigcirc \xi\mathcal{F}_m(\mathfrak{X}^l \bigcirc \mathcal{B})] = \mathcal{H}[Y^m \bigcirc \xi\mathcal{F}_m(X^l \bigcirc \mathcal{B})], \quad \text{puisque} \quad l < m.$$

Ainsi $\mathcal{H}(\overset{-1}{\xi}\mathcal{Y} \bigcirc \mathfrak{X} \bigcirc \mathcal{B})$ et $\mathcal{H}_{m+1}(\overset{-1}{\xi}\mathcal{Y}^m \bigcirc \mathfrak{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$ sont, au sens des n^{os} **41** et **45**, indépendants des choix de $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{Y}$; vu la proposition 10.6 a, l'anneau spectral $\mathcal{H}_r(\overset{-1}{\xi}\mathcal{Y}^m \bigcirc \mathfrak{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$ $(l < m < r)$ et l'anneau filtré $\mathcal{H}(\overset{-1}{\xi}\mathcal{Y}^m \bigcirc \mathfrak{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$ sont donc indépendants du choix de $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{Y}$; aussi les noterons-nous $\mathcal{H}_r(\overset{-1}{\xi}Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B})$ et $\mathcal{H}(\overset{-1}{\xi}Y^m \bigcirc X \bigcirc \mathcal{B})$. L'ensemble de ces anneaux sera noté $\mathcal{H}_*(\overset{-1}{\xi}Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B})$.

En résumé :

La donnée de l'application continue ξ *de* X *dans* Y, *du faisceau différentiel-filtré-propre* $\mathcal{B}$ *sur* X *et des deux entiers* $l < m$ *définit un anneau spectral* $\mathcal{H}_r(\overset{-1}{\xi}Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B})$ $(l < m < r)$ *nommé anneau spectral d'homologie de* ξ ;

(50.2) $$\boxed{\mathcal{H}_{m+1}(\overset{-1}{\xi}Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}[Y^m \bigcirc \xi\mathcal{F}_m(X^l \bigcirc \mathcal{B}],}$$

$\mathcal{F}_m$ *étant muni de sa différentielle* δ_m ;

(50.3) $$\boxed{\mathcal{G}\mathcal{H}(\overset{-1}{\xi}Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}) \subset \lim_{r \to +\infty} \mathcal{H}_r(\overset{-1}{\xi}Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}),}$$

où $\mathcal{H}\left(\overset{-1}{\xi}\, Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\right)$ *désigne* $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$ *muni d'une filtration dépendant de* ξ, l, m*; cette filtration est supérieure ou égale à celle de* $\mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{B})$, *inférieure ou égale à celle de* $\mathcal{H}(X^m \bigcirc \mathcal{B})$.

Plus généralement les faisceaux $\mathcal{F}\left(\overset{-1}{\xi}\, \mathcal{Y}^m \bigcirc \mathcal{X}^l \bigcirc \mathcal{B}\right)$ et $\mathcal{F}_r\left(\overset{-1}{\xi}\, \mathcal{Y}^m \bigcirc \mathcal{X}^l \bigcirc \mathcal{B}\right)$ $(l < m < r)$ sont indépendants des choix de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$; on les notera $\mathcal{F}\left(\overset{-1}{\xi}\, Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\right)$ et $\mathcal{F}_r\left(\overset{-1}{\xi}\, Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\right)$. L'ensemble de ces faisceaux sera noté $\mathcal{F}_*\left(\overset{-1}{\xi}\, Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\right)$.

Ce sont des faisceaux filtré-continu et gradué-continu définis sur X; *ils sont constitués par les anneaux*

$$\mathcal{H}\left(\overset{-1}{\xi}_F\, Y^m \bigcirc F^l \bigcirc \mathcal{B}\right) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{H}_r\left(\overset{-1}{\xi}_F\, Y^m \bigcirc F^l \bigcirc \mathcal{B}\right),$$

où F *désigne une partie fermée de* X *et* ξ_F *la restriction de* ξ *à* F;

$$(50.4) \qquad \xi\mathcal{F}_{m+1}\left(\overset{-1}{\xi}\, Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\right) = \mathcal{F}[Y^m \bigcirc \xi\mathcal{F}_m(X^l \bigcirc \mathcal{B})],$$

$\mathcal{F}_m$ *étant muni de la différentielle* ∂_m;

$$(50.5) \qquad \mathcal{G}\mathcal{F}\left(\overset{-1}{\xi}\, Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\right) \subset \lim_{r \to +\infty} \mathcal{F}_r\left(\overset{-1}{\xi}\, Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\right),$$

où $\mathcal{F}\left(\overset{-1}{\xi}\, Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\right)$ *désigne* $\mathcal{F}(X \bigcirc \mathcal{B})$ *muni d'une filtration dépendant de* ξ, l, m*; cette filtration est supérieure ou égale à celle de* $\mathcal{F}(X^l \bigcirc \mathcal{B})$, *inférieure ou égale à celle de* $\mathcal{F}(X^m \bigcirc \mathcal{B})$.

Remarque. — Les seconds membres de (50.2) et (50.4) ont un sens vu la continuité de $\mathcal{F}_*(X^l \bigcirc \mathcal{B})$ (nº **45**), les propositions 24.1 et 23.1.

Théorème 50.1. — *Les deux membres de* (50.3) *sont égaux, ainsi que les deux membres de* (50.5), *quand les trois conditions suivantes sont simultanément réalisées :*

1º *la filtration de* $\mathcal{B}(x)$ *est bornée supérieurement;*
2º *ou bien dim.* X *est finie, ou bien* $l \leqq 0$;
3º *ou bien dim.* Y *est finie, ou bien* $m \leqq 0$.

Preuve. — Propositions 10.2 et 37.7.

Théorème. 50.2 — *a. Si l'application* ξ *est constante,*

$$\mathcal{H}_*\left(\overset{-1}{\xi}\, Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\right) = \mathcal{H}_*(X^l \bigcirc \mathcal{B}).$$

b. *Si* $X = Y$ *et si* ξ *est l'identité,*

$$\mathcal{H}_*\left(\overset{-1}{\xi}\, Y''' \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{B}\right) = \mathcal{H}_*(X''' \bigcirc \mathcal{B}).$$

c. *Si* X *est un point* x,

$$\mathcal{H}_*\left(\overset{-1}{\xi}\, Y''' \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{B}\right) = \mathcal{H}_*(x).$$

Preuve de a. — Le théorème 52.1.*c* permet de supposer que Y est un point; on choisit $\mathcal{Y}$ identique à l'anneau des entiers; on utilise la proposition 17.1.

Preuve de b. — L'homomorphisme Π (n° **48**) de $\mathcal{F}_m\mathcal{B}$ dans $\mathcal{F}_m(X' \bigcirc \mathcal{B})$ définit un isomorphisme de $\mathcal{H}_m\mathcal{B}(x)$ sur $\mathcal{H}_m(x' \bigcirc \mathcal{B})$, donc, vu le théorème 46.1, un isomorphisme de $\mathcal{H}(X''' \bigcirc \mathcal{F}_m\mathcal{B})$ sur $\mathcal{H}[X''' \bigcirc \mathcal{F}_m(X' \bigcirc \mathcal{B})]$, c'est-à-dire de $\mathcal{H}_{m+1}(X''' \bigcirc \mathcal{B})$ sur $\mathcal{H}_{m+1}(X''' \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{B})$; la proposition 10.6 *a* achève la preuve.

Preuve de c. — *a*. et le théorème 43.2.

THÉORÈME 50.3. — *La filtration de* $\mathcal{H}\left(\overset{-1}{\xi}\, Y''' \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{B}\right)$ *est majorée et minorée par :*

a. Borne inf. $[lp + f(b)]$ *et* Borne sup. $[mp + f(b)]$, *où* $0 \leqq p \leqq \dim X$, $b \in \mathcal{B}(x)$, $x \in X$;

b. Borne inf. $[lp + mq + f(b)]$ *et* Borne sup. $[lp + mq + f(b)]$, *où* $0 \leqq p \leqq \underset{y \in Y}{\text{Borne sup.}} \dim \overset{-1}{\xi}(y)$, $0 \leqq q \leqq \dim Y$, $b \in \mathcal{B}(x)$, $x \in X$.

Nota. — La majoration *b* suppose cette filtration finie; c'est par exemple le cas quand la majoration *a* est finie.

Preuve de a. — La filtration de $\mathcal{H}\left(\overset{-1}{\xi}\, Y''' \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{B}\right)$ est minorée et majorée par celles de $\mathcal{H}(X' \bigcirc \mathcal{B})$ et $\mathcal{H}(X''' \bigcirc \mathcal{B})$, auxquelles s'applique le théorème 43.3.

Preuve de b. — D'après le théorème 43.3, le degré de $\mathcal{H}_m\left[\left(\overset{-1}{\xi}(y)\right)' \bigcirc \mathcal{B}\right]$ est minoré et majoré par les bornes inférieure et supérieure de $lp + f(b)$; vu la proposition 37.7, le degré de $\mathcal{Y}''' \bigcirc \xi\, \mathcal{F}_m(X' \bigcirc \mathcal{B})$ est donc minoré et majoré par les bornes inférieure et supérieure de $lp+mq+f(b)$; vu les formules (50.2) et (50.3), le degré de $\mathcal{G}\mathcal{H}(\overset{-1}{\xi}\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$ est minoré et majoré par ces bornes; d'ou b si la filtration de $\mathcal{H}(\overset{-1}{\xi}\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$ est finie.

THÉORÈME 50.4. — *a. Supposons qu'il existe un entier p tel que les éléments de $\mathcal{H}\mathcal{B}(x)$, dont la filtration est $>p$, soient nilpotents; alors les éléments de $\mathcal{H}(\overset{-1}{\xi}\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$, dont la filtration est $>p$, sont nilpotents.*

b. Supposons qu'il existe un entier q tel que les éléments de $\mathcal{H}_{l+1}\mathcal{B}(x)$ homogènes de degré q soient nilpotents; alors les éléments de $\mathcal{H}_r(\overset{-1}{\xi}\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$ homogènes de degré q sont nilpotents.

Preuve de a. — Soit $h\in\mathcal{H}(\mathrm{X}\bigcirc\mathcal{B})$; si sa filtration dans $\mathcal{H}(\overset{-1}{\xi}\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$ est $>p$, alors sa filtration dans $\mathcal{H}(\mathrm{X}^m\bigcirc\mathcal{B})$ est $>p$ et il est nilpotent d'après le théorème 43.4 *a*.

Preuve de b. — D'après le théorème 43.4 *b*, les éléments de $\mathcal{F}_{m+1}(\mathrm{X}^l\bigcirc\mathcal{B})$ de degré q sont nilpotents; donc, vu les théorèmes 42.1 et 42.2 *c*, les éléments de $\mathcal{H}[\mathrm{Y}^m\bigcirc\xi\mathcal{F}_m(\mathrm{X}^l\bigcirc\mathcal{B})]$ de degré q sont nilpotents. Or $\mathcal{H}_r(\overset{-1}{\xi}\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$ est une image de $\mathcal{H}[\mathrm{Y}^m\bigcirc\xi\mathcal{F}_m(\mathrm{X}^l\bigcirc\mathcal{B})]$.

51. CAS OU $\mathcal{B}$ EST UN FAISCEAU CANONIQUE-FILTRÉ-PROPRE. — $\overset{-1}{\xi}\mathcal{Y}^m\bigcirc\mathcal{X}^l\bigcirc\mathcal{B}$ est un complexe canonique-filtré (*cf.* n° **44**); donc $\mathcal{H}_r(\overset{-1}{\xi}\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$ *est un anneau canonique-gradué; ses deux degrés sont nommés : degré canonique et degré filtrant; sa différentielle δ_r est homogène, de degré canonique $+1$ et de degré filtrant r;* $\mathcal{H}(\overset{-1}{\xi}\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$ *est un anneau gradué-filtré, dont le degré sera encore nommé canonique.*

On étend aisément les théorèmes du n° **44** :

THÉORÈME 51.1. — *Si $h\in\mathcal{H}_*(\overset{-1}{\xi}\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$, si $xh=0$ quel que soit $x\in\mathrm{X}$ et si le degré canonique de h est la borne inférieure du degré canonique de $\mathcal{B}(x)$, alors $h=0$.*

THÉORÈME 51.2. — *Si* $bb_1 = (-1)^{pq} b_1 b$, *quels que soient* b *et* $b_1 \in \mathcal{B}(x)$, *de degrés* p *et* q, *alors* $hh_1 = (-1)^{rs} h_1 h$, *quels que soient* h *et* $h_1 \in \mathcal{H}_*\left(\overset{-1}{\xi}\, Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\right)$, *de degrés canoniques* r *et* s.

52. MODIFICATIONS DE X ET Y N'ALTÉRANT PAS $\mathcal{H}_*\left(\overset{-1}{\xi}\, Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\right)$. — THÉORÈME 52.1. — *On ne modifie pas* $\mathcal{H}_*\left(\overset{-1}{\xi}\, Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\right)$:

a. en remplaçant X *par* F, *quand* F *est une partie fermée de* X *telle que* $\mathcal{B}(x) = 0$ *si* x *est un point du complémentaire de* F;

b. en remplaçant X *par* G, *quand* G *est une partie ouverte de* X *telle que* $\mathcal{B}(F) = 0$ *quand* F *n'est pas une partie compacte de* G;

c. en remplaçant Y *par un de ses sous-espaces contenant* $\xi(X)$.

Preuve de a. — Celle du théorème 45.1.

Preuve de b. — Celle du théorème 45.2.

Preuve de c. — Le complexe $\mathcal{Y} \bigcirc \xi(\mathcal{X} \bigcirc \mathcal{B})$ est identique à sa section par un de ses sous-espaces contenant $\xi(X)$.

53. MODIFICATION DE $\mathcal{B}$ N'ALTÉRANT PAS $\mathcal{H}_*\left(\overset{-1}{\xi}\, Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\right)$. — On généralise aisément le n° **46** :

THÉORÈME 53.1. — *On ne modifie pas* $\mathcal{H}_*\left(\overset{-1}{\xi}\, Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\right)$:

a. en remplaçant $\mathcal{B}$ *par un sous-faisceau propre* $\mathcal{B}'$ *tel que* $\mathcal{B}(x) = \mathcal{B}'(x)$ *quel que soit* $x \in X$;

b. en remplaçant la filtration de $\mathcal{B}$ *par la filtration nulle quand toutes les conditions suivantes sont réalisées :* $l > 0$; *la filtration de* $\mathcal{B}(x)$ *est bornée supérieurement; le degré de* $\mathcal{H}_l \mathcal{B}(x)$ *est borné inférieurement; le degré de* $\mathcal{H}_{l+1} \mathcal{B}(x)$ *est nul;*

c. en remplaçant $\mathcal{B}$ *par* $\mathcal{F}\mathcal{B}$ *quand toutes les conditions suivantes sont réalisées :* $\mathcal{B}$ *est un faisceau canonique-filtré-propre; la filtration de* $\mathcal{B}(x)$ *est bornée supérieurement; le degré de* $\mathcal{B}(x)$ *est borné inférieurement; le degré canonique de* $\mathcal{H}_{l+1} \mathcal{B}(x)$ *est nul.*

54. L'HOMOMORPHISME $\overset{-1}{\theta}$ RÉCIPROQUE DE LA REPRÉSENTATION CONTINUE θ D'UNE APPLICATION CONTINUE ξ' DANS UNE APPLICATION CONTINUE ξ. — *Soient une appli-*

cation continue ξ d'un espace X dans un espace Y et une application continue ξ' d'un espace X' dans un espace Y'; nous nommerons représentation continue de ξ' dans ξ toute application continue θ de X' dans X à laquelle on peut associer une application continue τ de Y' dans Y telle que

$$\tau\xi' = \xi\theta, \tag{54.1}$$

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux faisceaux différentiels-filtrés-propres, définis

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\xi'"'] & X \arrow[d, "\xi"] \\ Y' \arrow[r, "\tau"] & Y \end{tikzcd}$$

θ représente ξ' dans ξ.

Fig. 1.

sur X et X', tels que $\theta\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ sur $\overline{\theta(X')}$. Soient $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{X}', \mathfrak{Y}'$ des couvertures fines de X, Y, X', Y'; soient u, v, u', v' leurs unités; soit

$$\overset{-1}{\xi} l \bigcirc k \bigcirc b \in \overset{-1}{\xi} \mathfrak{Y} \bigcirc \mathfrak{X} \bigcirc \dot{\mathcal{B}} : k \in \mathfrak{X},\ l \in \mathfrak{Y},\ b \in \mathcal{B}[S(k)];$$

soit

$$b' = [S(k) \cap \overline{\theta(X')}]\, b \in \mathcal{B}'[\overset{-1}{\theta} S(k)];$$

l'homomorphisme

$$\overset{-1}{\xi} l \bigcirc k \bigcirc b \to \overset{-1}{\xi'} v' \bigcirc \overset{-1}{\theta}\, \overset{-1}{\xi} \dot{l} \bigcirc u' \bigcirc \overset{-1}{\theta} k \bigcirc b', \tag{54.2}$$

c'est-à-dire, vu (54.1) et (28.7),

$$\overset{-1}{\xi} l \bigcirc k \bigcirc b \to \overset{-1}{\xi'} (v' \bigcirc \overset{-1}{\tau} l) \bigcirc (u' \bigcirc \overset{-1}{\theta} k) \bigcirc b' \tag{54.3}$$

est un honomorphisme de $\overset{-1}{\xi} \mathfrak{Y}^m \bigcirc \mathfrak{X}^l \bigcirc \mathcal{B}$ dans

$$\overset{-1}{\xi'} (\mathfrak{Y}' \bigcirc \overset{-1}{\tau} \mathfrak{Y})^m \bigcirc (\mathfrak{X}' \bigcirc \overset{-1}{\theta} \mathfrak{X})^l \bigcirc \mathcal{B}';$$

sa filtration est $\geqq 0$; il définit donc (définition 10.1 et n° **30**) *un homomorphisme de filtration $\geqq 0$, conservant le degré, de $\mathcal{H}_*(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B})$*

dans $\mathcal{H}_*\big(\overset{-1}{\xi'} Y''' \bigcirc X'' \bigcirc \mathcal{B}'\big)$; *cet homomorphisme sera noté* $\overset{-1}{\theta}$ *et nommé homomorphisme réciproque de la représentation* θ. Il est indépendant du choix des couvertures fines et, vu (54.2), du choix de l'application τ associée à θ [D'ailleurs (54.1) définit τ sans embiguïté sur $\overline{\xi'(X')}$].

Remarque 54.1. — L'homomorphisme $\overset{-1}{\theta}$, que définit le nº **47**, de $\mathcal{H}(X'' \bigcirc \mathcal{B})$ dans $\mathcal{H}(X''' \bigcirc \mathcal{B}')$ et l'homomorphisme $\overset{-1}{\theta}$, que nous venons de définir, de $\mathcal{H}\big(\overset{-1}{\xi} Y''' \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{B}\big)$ dans $\mathcal{H}\big(\overset{-1}{\xi'} Y''' \bigcirc X'' \bigcirc \mathcal{B}\big)$ constituent le même homomorphisme de l'anneau $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$ dans l'anneau $\mathcal{H}(X' \bigcirc \mathcal{B}')$.

Remarque 54.2. — L'homomorphisme canonique de $\mathcal{F}_m(X' \bigcirc \mathcal{B})$ dans $\theta\mathcal{F}_m(X'' \bigcirc \mathcal{B}')$ (remarque 47.1) définit un homomorphisme canonique de $\xi\mathcal{F}_m(X' \bigcirc \mathcal{B})$ dans $\xi\theta\mathcal{F}_m(X'' \bigcirc \mathcal{B}')$, c'est-à-dire, vu (54.1), dans $\tau\xi'\mathcal{F}_m(X'' \bigcirc \mathcal{B}')$; d'où un homomorphisme canonique de $\mathcal{H}[Y \bigcirc \xi\mathcal{F}_m(X' \bigcirc \mathcal{B})]$ dans $\mathcal{H}[Y \bigcirc \tau\xi'\mathcal{F}_m(X'' \bigcirc \mathcal{B}')]$; en composant cet homomorphisme et l'homomorphisme $\overset{-1}{\tau}$ de $\mathcal{H}[Y \bigcirc \tau\xi'\mathcal{F}_m(X'' \bigcirc \mathcal{B}')]$, on obtient un homomorphisme de $\mathcal{H}[Y \bigcirc \xi\mathcal{F}_m(X' \bigcirc \mathcal{B})]$ dans $\mathcal{H}[Y' \bigcirc \xi'\mathcal{F}_m(X'' \bigcirc \mathcal{B}')]$, c'est-à-dire, vu (50.2), de $\mathcal{H}_{m+1}\big(\overset{-1}{\xi} Y''' \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{B}\big)$ dans $\mathcal{H}_{m+1}\big(\overset{-1}{\xi'} Y''' \bigcirc X'' \bigcirc \mathcal{B}'\big)$; l'homomorphisme ainsi obtenu est $\overset{-1}{\theta}$, comme on le voit en explicitant les définitions de ces divers homomorphismes.

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[r, "\theta'"] \arrow[d, "\xi''"'] & X' \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\xi'"'] & X \arrow[d, "\xi"'] \\ Y'' \arrow[r, "\tau'"] & Y' \arrow[r, "\tau"] & Y \end{tikzcd}$$

θ' représente ξ'' dans ξ'; θ représente ξ' dans ξ;
$\theta\theta'$ représente ξ'' dans ξ.

Fig. 2.

THÉORÈME 54.1. — *a. Si* θ' *représente* ξ'' *dans* ξ', *si* θ *représente* ξ' *dans* ξ *et si* $\theta'\mathcal{B}'' = \mathcal{B}'$ *sur* $\overline{\theta'(X'')}$, $\theta(\mathcal{B}') = \mathcal{B}$ *sur* $\overline{\theta(X')}$ *et* $\theta\theta'\mathcal{B}'' = \mathcal{B}$

sur $\overline{\theta\theta'(\mathrm{X})}$, *alors la représentation composée* $\theta\theta'$ *a pour homomorphisme réciproque l'homomorphisme composé* $\overset{-1}{\theta'}\,\overset{-1}{\theta}$ (*fig.* 2).

b. Si ξ' *est la restriction de* ξ *à une partie fermée* F *de* X *et si* θ *est la représentation canonique de* ξ' *dans* ξ (*c'est-à-dire la représentation que définit l'application canonique de* F *dans* X), *alors* $\overset{-1}{\theta}$ *est la section par* F *de* $\mathcal{H}_*\big(\overset{-1}{\xi}\,\mathrm{Y}'''\bigcirc \mathrm{X}'\bigcirc \mathcal{B}\big)$.

55. Les homomorphismes canoniques Φ, Ψ et Ω de $\mathcal{H}_*(\mathrm{X}'\bigcirc\mathcal{B})$, $\mathcal{H}_*(\mathrm{Y}'''\bigcirc\xi\mathcal{B})$ et $\mathcal{H}_*\mathcal{B}(\mathrm{X})$ dans $\mathcal{H}_*\big(\overset{-1}{\xi}\,\mathrm{Y}'''\bigcirc \mathrm{X}'\bigcirc \mathcal{B}\big)$. — Soient une application continue ξ d'un espace X dans un espace Y et un faisceau différentiel-filtré-propre $\mathcal{B}$ défini sur X.

Définition 55.1 (*fig.* 3). — Soient $y\in \mathrm{Y}$, ξ' la restriction de ξ à $\overset{-1}{\xi}(y)$, ρ la représentation canonique de ξ' dans ξ, π l'application

$$\begin{tikzcd}
\overset{-1}{\xi}(y) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\xi'"'] & \mathrm{X} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\xi"'] & \mathrm{Y} \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\pi"'] & y \arrow[d, "\eta"'] \\
y \arrow[r] & \mathrm{Y} \arrow[r] & y \arrow[r] & y
\end{tikzcd}$$

Fig. 3.

de X sur y, φ la représentation de ξ dans π définie par l'application identique de X sur lui-même. Vu le théorème 50.2*a*, $\overset{-1}{\varphi}$ est *un homomorphisme canonique, que nous noterons* Φ, *de* $\mathcal{H}_*(\mathrm{X}'\bigcirc\mathcal{B})$ *dans* $\mathcal{H}_*\big(\overset{-1}{\xi}\,\mathrm{Y}'''\bigcirc \mathrm{X}'\bigcirc \mathcal{B}\big)$ et $\overset{-1}{\rho}$ est un homomorphisme de $\mathcal{H}_*\big(\overset{-1}{\xi}\,\mathrm{Y}'''\bigcirc \mathrm{X}'\bigcirc \mathcal{B}\big)$ dans $\mathcal{H}_*\big(\overset{-1}{\xi}\,y'\bigcirc \mathcal{B}\big)$; d'après le théorème 54.1*a*, l'homomorphisme composé $\overset{-1}{\rho}\,\overset{-1}{\varphi}$ est la section de $\mathcal{H}_*(\mathrm{X}'\bigcirc\mathcal{B})$ par $\overset{-1}{\xi}(y)$; d'où, vu les remarques 54.1, 54.2 :

Théorème 55.1. — *a. La restriction de* Φ *à* $\mathcal{H}(\mathrm{X}'\bigcirc\mathcal{B})$ *est l'application identique de cet anneau sur l'anneau* $\mathcal{H}\big(\overset{-1}{\xi}\,\mathrm{Y}'''\bigcirc \mathrm{X}'\bigcirc \mathcal{B}\big)$, (*qui ne diffère, rappelons-le, du précédent que par sa filtration*).

b. La restriction de Φ *à* $\mathcal{H}_{m+1}(X' \bigcirc \mathcal{B})$ *est l'homomorphisme canonique* II [*définition* 48.1, *où l'on remplace* X *par* Y *et* $\mathcal{B}$ *par* $\xi\mathcal{F}_m(X' \bigcirc \mathcal{B})$] *de* $\mathcal{H}_{m+1}(X' \bigcirc \mathcal{B})$ *dans*

$$\mathcal{H}[Y^m \bigcirc \xi\mathcal{F}_m(X' \bigcirc \mathcal{B})] = \mathcal{H}_{m+1}\left(\overset{-1}{\xi}\, Y^m \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{B}\right).$$

c. Si $h \in \mathcal{H}_*(X' \bigcirc \mathcal{B})$ *est tel que* $\Phi h = 0$, *alors* $\overset{-1}{\xi}(y)h = 0$ *quel que soit* $y \in Y$.

DÉFINITION 55.2 (*fig.* 4). — Supposons $\xi\mathcal{B}$ *propre*. Cette hypothèse est réalisée en particulier dans chacun des deux cas suivants : ξ est propre (proposition 24.2); $\mathcal{B}$ est continu (propositions 24.1 et 23.1).

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\iota"'] & X \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\xi"'] & Y \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\chi"'] & y \arrow[d, "\eta"'] \\
X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Y \arrow[r] & y
\end{tikzcd}$$

Fig. 4.

Soient ι et χ les applications identiques de X et Y sur eux-mêmes; soit σ la représentation de ι dans ξ définie par l'application identique de X sur lui-même; soit ψ la représentation de ξ dans χ que définit ξ. Vu le théorème 50.2*b*, $\overset{-1}{\psi}$ est un *homomorphisme canonique, que nous noterons* Ψ, *de* $\mathcal{H}_*(Y^m \bigcirc \xi\mathcal{B})$ *dans* $\mathcal{H}_*\left(\overset{-1}{\xi}\, Y^m \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{B}\right)$ et $\overset{-1}{\sigma}$ est un homomorphisme de $\mathcal{H}_*\left(\overset{-1}{\xi}\, Y^m \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{B}\right)$ dans $\mathcal{H}_*(X^m \bigcirc \mathcal{B})$; d'après le théorème 54.1*a*, l'homomorphisme composé $\overset{-1}{\sigma}\,\overset{-1}{\psi}$ est l'homomorphisme $\overset{-1}{\xi}$ de $\mathcal{H}_*(Y^m \bigcirc \xi\mathcal{B})$ dans $\mathcal{H}_*(X^m \bigcirc \mathcal{B})$; d'où, vu les remarques 54.1 et 54.2 :

THÉORÈME 55.2. — *a. La restriction de* Ψ *à* $\mathcal{H}(Y^m \bigcirc \xi\mathcal{B})$ *est l'homomorphisme* $\overset{-1}{\xi}$ *de* $\mathcal{H}(Y \bigcirc \xi\mathcal{B})$ *dans* $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$.

b. La restriction de Ψ *à* $\mathcal{H}_{m+1}(Y^m \bigcirc \xi\mathcal{B}) = \mathcal{H}(Y^m \bigcirc \xi\mathcal{F}_m\mathcal{B})$ *est l'homomorphisme de* $\mathcal{H}(Y^m \bigcirc \xi\mathcal{F}_m\mathcal{B})$ *dans* $\mathcal{H}[Y^m \bigcirc \xi\mathcal{F}_m(X' \bigcirc \mathcal{B})]$ *que définit l'homomorphisme* II *de* $\mathcal{F}_m\mathcal{B}$ *dans* $\mathcal{F}_m(X' \bigcirc \mathcal{B})$ (*définition* 48.3).

c. Si $h \in \mathcal{H}_*(\mathrm{Y}^m \bigcirc \xi\mathcal{B})$ *est tel que* $\Psi h = 0$, *alors* $\overset{-1}{\xi} h = 0$.

Définition 55.3 (*fig.* 3 et 4). — Soit η l'application de y sur y; soit ω la représentation de ξ sur η; vu le théorème 50.2*c*, $\overset{-1}{\omega}$ est *un homomorphisme canonique, que nous noterons* Ω, *de* $\mathcal{H}_*\mathcal{B}(\mathrm{X})$ *dans* $\mathcal{H}_*\left(\overset{-1}{\xi}\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{X}' \bigcirc \mathcal{B}\right)$. Soit θ la représentation de π dans η; $\overset{-1}{\theta}$ est l'homomorphisme canonique Π_{X} (définition 48.1) de $\mathcal{H}_*\mathcal{B}(\mathrm{X})$ dans $\mathcal{H}_*(\mathrm{X}' \bigcirc \mathcal{B})$; or $\omega = \theta\varphi$; donc, vu le théorème 54.1*a*, $\Omega = \Phi\Pi_{\mathrm{X}}$. Soit τ la représentation de χ dans η; $\overset{-1}{\tau}$ est l'homomorphisme canonique Π_{Y} de $\mathcal{H}_*\mathcal{B}(\mathrm{X})$ dans $\mathcal{H}_*(\mathrm{Y}^m \bigcirc \xi\mathcal{B})$; or $\omega = \tau\psi$; donc $\Omega = \Psi\Pi_{\mathrm{Y}}$. D'où :

Théorème 55.3. — *a*. $\Omega = \Phi\Pi_{\mathrm{X}}$, Π_{X} *étant l'homomorphisme canonique de* $\mathcal{H}_*\mathcal{B}(\mathrm{X})$ *dans* $\mathcal{H}_*(\mathrm{X}' \bigcirc \mathcal{B})$.

b. Si $\xi\mathcal{B}$ *est propre*, $\Omega = \Psi\Pi_{\mathrm{Y}}$, Π_{Y} *étant l'homomorphisme canonique de* $\mathcal{H}_*\mathcal{B}(\mathrm{X})$ *dans* $\mathcal{H}_*(\mathrm{Y}^m \bigcirc \xi\mathcal{B})$.

Ce théorème prouve que les conventions suivantes sont compatibles avec la définition 48.2 :

Définition 55.4. — *Quand* Φ *est un isomorphisme de* $\mathcal{H}_*(\mathrm{X}' \bigcirc \mathcal{B})$ *sur* $\mathcal{H}_*\left(\overset{-1}{\xi}\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{X}' \bigcirc \mathcal{B}\right)$, *nous écrirons*

$$\mathcal{H}_*(\mathrm{X}' \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}_*\left(\overset{-1}{\xi}\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{X}' \bigcirc \mathcal{B}\right); \tag{55.1}$$

pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit (proposition 10.6*a) que* Φ *soit un isomorphisme de* $\mathcal{H}_{m+1}(\mathrm{X}' \bigcirc \mathcal{B})$ *sur* $\mathcal{H}_{m+1}\left(\overset{-1}{\xi}\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{X}' \bigcirc \mathcal{B}\right)$. *Quand* Ψ *est un isomorphisme de* $\mathcal{H}_*(\mathrm{Y}^m \bigcirc \xi\mathcal{B})$ *sur* $\mathcal{H}_*\left(\overset{-1}{\xi}\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{X}' \bigcirc \mathcal{B}\right)$, *nous écrirons*

$$\mathcal{H}_*(\mathrm{Y}^m \bigcirc \xi\mathcal{B}) = \mathcal{H}_*\left(\overset{-1}{\xi}\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{X}' \bigcirc \mathcal{B}\right). \tag{55.2}$$

Quand Ω *est un isomorphisme de* $\mathcal{H}_*\mathcal{B}(\mathrm{X})$ *sur* $\mathcal{H}_*\left(\overset{-1}{\xi}\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{X}' \bigcirc \mathcal{B}\right)$, *nous écrirons*

$$\mathcal{H}_*\mathcal{B}(\mathrm{X}) = \mathcal{H}_*\left(\overset{-1}{\xi}\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{X}' \bigcirc \mathcal{B}\right). \tag{55.3}$$

56. Cas ou $\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}\mathcal{B}(F)$ quand $F = \overset{-1}{\xi}(y)$, $y \in Y$. — Lemme 56.1. — *Si* $\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{F}_l\mathcal{B}) = \mathcal{H}_{l+1}\mathcal{B}(F)$ *quand* $F = \overset{-1}{\xi}(y)$, $y \in Y$, *alors*

$$\mathcal{H}_{m+1}\left(\overset{-1}{\xi}\, Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\right) = \mathcal{H}_{m+1}(Y^m \bigcirc \xi\mathcal{B}).$$

Preuve. — L'hypothèse signifie que H est un isomorphisme de $\mathcal{H}_{l+1}\mathcal{B}(F)$ sur $\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{F}_l\mathcal{B}) = \mathcal{H}_{l+1}(F^l \bigcirc \mathcal{B})$; donc, vu la proposition 10.6, H est un isomorphisme de $\mathcal{H}_m\mathcal{B}(F)$ sur $\mathcal{H}_m(F^l \bigcirc \mathcal{B})$; donc, vu le théorème 46.1, H définit un isomorphisme de $\mathcal{H}(Y \bigcirc \xi\mathcal{F}_m\mathcal{B})$ sur $\mathcal{H}[Y \bigcirc \xi\mathcal{F}_m(X^l \bigcirc \mathcal{B})]$, c'est-à-dire de $\mathcal{H}_{m+1}(Y^m \bigcirc \xi\mathcal{B})$ sur $\mathcal{H}_{m+1}\left(\overset{-1}{\xi}\, Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\right)$; le théorème 55.2*b* prouve que cet isomorphisme est Ψ.

Théorème 56.1. — *Soit* ξ *une application continue d'un espace* X *dans un espace* Y, *dont la dimension est finie; soit* $\mathcal{B}$ *un faisceau différentiel-filtré-propre, défini sur* X*; supposons* $\xi\mathcal{B}$ *propre.*

a. Si $\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}\mathcal{B}(F)$ *quand* $F = \overset{-1}{\xi}(y)$, $y \in F$, *alors* $\overset{-1}{\xi}$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{H}(Y \bigcirc \xi\mathcal{B})$ *sur* $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$.

Si $\mathcal{H}_*(F^l \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}_*\mathcal{B}(F)$ *quand* $F = \overset{-1}{\xi}(y)$, $y \in Y$, *alors*

b. $\overset{-1}{\xi}$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{H}_*(Y^l \bigcirc \xi\mathcal{B})$ *sur* $\mathcal{H}_*(X^l \bigcirc \mathcal{B})$*;*

c. $\mathcal{H}_*(Y^m \bigcirc \xi\mathcal{B}) = \mathcal{H}_*\left(\overset{-1}{\xi}\, Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\right)$, *quel que soit* $m > l$.

Preuve de a. — Choisissons $l = 0$, $m = 1$, la filtration de $\mathcal{B}$ nulle; vu la proposition 10.9, l'hypothèse s'énonce

$$\mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{F}_0\mathcal{B}) = \mathcal{H}_1\mathcal{B}(F);$$

donc, vu le lemme 56.1,

$$\mathcal{H}_2\left(\overset{-1}{\xi}\, Y^1 \bigcirc X^0 \bigcirc \mathcal{B}\right) = \mathcal{H}_2(Y^1 \bigcirc \xi\mathcal{B});$$

d'où, vu les propositions 10.6 *b* et 37.7,

$$\mathcal{H}_*\left(\overset{-1}{\xi}\, Y^1 \bigcirc X^0 \bigcirc \mathcal{B}\right) = \mathcal{H}_*(Y^1 \bigcirc \xi\mathcal{B});$$

la définition 55.4 et le théorème 55.2 *a* achèvent la preuve.

Preuve de b. — D'après *a*, $\overset{-1}{\xi}$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}(Y \bigcirc \xi\mathcal{B})$, et $\mathcal{H}(Y \bigcirc \xi\mathcal{F}_l\mathcal{B})$ sur $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$ et $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{F}_l\mathcal{B})$; on applique la proposition 10.6 *a*.

Preuve de c. — D'après *a* et le théorème 55.2 *a*, Ψ applique isomorphiquement $\mathcal{H}(Y^m \bigcirc \xi\mathcal{B})$ sur $\mathcal{H}\left(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\right)$; d'après le lemme 56.1, Ψ applique isomorphiquement $\mathcal{H}_{m+1}(Y^m \bigcirc \xi\mathcal{B})$ sur $\mathcal{H}_{m+1}\left(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\right)$; donc, vu la proposition 10.6 *a*, Ψ est un isomorphisme, respectant le degré et la filtration, de $\mathcal{H}_*(Y^m \bigcirc \xi\mathcal{B})$ sur $\mathcal{H}_*\left(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X^l \bigcirc B\right)$.

57. Relation entre les anneaux d'homologie d'une application et les anneaux d'homologie de ses restrictions aux intersections des éléments d'un recouvrement de l'espace sur lequel elle est définie. — On généralise aisément la définition 49.2 :

Définition 57.1. — *Soient un espace* X, *un faisceau différentiel-filtré-propre* $\mathcal{B}$ *défini sur* X, *une application continue* ξ *de* X *dans un espace* Y *et le complexe basique de Čech* $\mathcal{K}^*$ (*n°* **59**) *défini par un recouvrement fermé, localement fini, ordonné de* Y; *soient deux entiers* $l < m$. *Il existe un homomorphisme canonique, conservant le degré et de filtration* $\geqq 0$, *des anneaux* $\mathcal{H}_*\left(\overset{-1}{\xi} \mathcal{K}^{*m} \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\right)$ *dans les anneaux* $\mathcal{H}_*\left(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\right)$.

Quand cet homomorphisme est un *isomorphisme* des premiers anneaux sur les seconds (il conserve alors la filtration, vu la proposition 10.6 *a*), nous écrirons

$$(57.3) \qquad \mathcal{H}_*\left(\overset{-1}{\xi} \mathcal{K}^{*m} \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\right) = \mathcal{H}_*\left(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\right).$$

Rappelons que $\mathcal{H}\left(\overset{-1}{\xi} \mathcal{K}^{*m} \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\right)$ désigne $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$ muni d'une filtration que minore et majore celles de $\mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{B})$ et $\mathcal{H}(X^m \bigcirc \mathcal{B})$.

Théorème 57.1. — (57.3) *a lieu lorsque les deux conditions suivantes sont réalisées : le recouvrement* $\bigcup_\mu F_\mu = Y$, *auquel* $\mathcal{K}^*$ *est associé, est* *d'ordre fini; quand* F *est une intersection non vide de* $\overset{-1}{\xi}(F_\mu)$, *on a*, ξ_F *désignant la restriction de* ξ *à* F,

$$\mathcal{H}_*(\overset{-1}{\xi_F} Y^m \bigcirc F' \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}_*(F' \bigcirc \mathcal{B}) \qquad \text{(au sens de la définition 55.4).}$$

Preuve. — Soit I une intersection non vide de F_μ; soit $F = \overset{-1}{\xi}(I)$. Par hypothèse :

$$\mathcal{H}[Y \bigcirc \xi_F \mathcal{F}_m(F' \bigcirc \mathcal{B})] = \mathcal{H}_{m+1}(F' \bigcirc \mathcal{B}),$$

d'où, vu le théorème 45.1 :

$$\mathcal{H}[I \bigcirc \xi \mathcal{F}_m(X' \bigcirc \mathcal{B})] = \mathcal{H}_{m+1}(F' \bigcirc \mathcal{B}).$$

Le théorème 49.2 *a* s'applique donc quand on remplace dans son énoncé F par I et $\mathcal{B}$ par $\xi \mathcal{F}_m(X' \bigcirc \mathcal{B})$; il donne

$$\mathcal{H}[\mathcal{K}^* \otimes \xi \mathcal{F}_m(X' \bigcirc \mathcal{B})] = \mathcal{H}[X \bigcirc \xi \mathcal{F}_m(X' \bigcirc \mathcal{B})],$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{H}_{m+1}(\overset{-1}{\xi} \mathcal{K}^{*m} \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}_{m+1}(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{B});$$

pour en conclure que l'homomorphisme canonique des anneaux $\mathcal{H}_*(\overset{-1}{\xi} \mathcal{K}^{*m} \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{B})$ dans les anneaux $\mathcal{H}_*(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{B})$ est un isomorphisme des premiers sur les seconds, il suffit d'utiliser les propositions 10.6 *b* et 39.1.

VII. — Les anneaux d'homologie d'une application composée.

58. Soient une application continue ξ d'un espace X dans un espace Y, une application continue η de Y dans un espace Z, un faisceau différentiel-filtré-propre $\mathcal{B}$ défini sur X et trois entiers $l < m < n$; une généralisation aisée du n° **50** définit un anneau spectral

$$\mathcal{H}_r(\overset{-1}{\xi}\ \overset{-1}{\eta} Z^n \bigcirc \overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{B}) \qquad (l < m < n < r),$$

que nous nommerons *anneau spectral d'homologie de l'application composée* $\eta\xi$; on a

$$\mathcal{H}_{n+1}(\overset{-1}{\xi}\ \overset{-1}{\eta} Z^n \bigcirc \overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}\left[Z^n \bigcirc \eta\xi \mathcal{F}_n(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{B})\right];$$

$$\mathcal{G}\mathcal{H}(\overset{-1}{\xi}\ \overset{-1}{\eta} Z^n \bigcirc \overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{B}) \subset \lim_{r \succ +\infty} \mathcal{H}_r(\overset{-1}{\xi}\ \overset{-1}{\eta} Z^n \bigcirc \overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{B});$$

où $\mathcal{H}(\overset{-1}{\xi}\,\overset{-1}{\eta}\,Z^n \bigcirc \overset{-1}{\xi}\,Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B})$ désigne $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$ muni d'une filtration dépendant des données. Les propriétés des anneaux d'homologie d'une application s'étendent aisément aux anneaux d'homologie d'une application composée.

En particulier, étant donnée une application continue ξ de X en lui-même et un faisceau différentiel-filtré-propre $\mathcal{B}$ défini sur X, on pourra donc envisager $\mathcal{H}_*(\ldots \bigcirc \overset{-q}{\xi}\,X^n \bigcirc \overset{-p}{\xi}\,X^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B})$, où $l < m < n \ldots$; p et q sont des entiers > 0; $\overset{-q}{\xi}$ est le réciproque de ξ^q.

VIII. — Cas où la différentielle et la filtration du faisceau sont nulles.

Nous conviendrons que $\mathcal{B}$ *est canonique, le degré canonique de tous ses éléments étant nul.*

59. Propriétés de $\mathcal{H}_*(X^l \bigcirc \mathcal{B})$. — $\mathcal{X}^l \bigcirc \mathcal{B}$ est canonique-filtré; sa filtration est associée à l fois le degré canonique; d'après la proposition 10.9

$$\mathcal{H}_r(X^l \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{G}\mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{B}).$$

$\mathcal{H}_r(X^l \bigcirc \mathcal{B})$ *est canonique-gradué, le degré filtrant étant l fois le degré canonique;* $\mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{B})$ *est gradué-filtré, la filtration étant associée à l fois le degré.*

Les théorèmes 42.2 et 44.1 donnent :

Théorème 59.1. — *Supposons $\delta\mathcal{B} = 0$; utilisons sur $\mathcal{B}$ un degré canonique nul.*

a. Le degré canonique de $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$ est minoré par 0, *majoré par* dim X.

b. Si $h \in \mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$ est de degré canonique nul et si $xh = 0$ quel que soit $x \in X$, alors $h = 0$.

c. Les éléments de $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$ dont le degré canonique est > 0 sont nilpotents. Si tout élément de $\mathcal{B}(x)$ est nilpotent, quel que soit $x \in X$, alors tout élément de $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$ est nilpotent.

Puisque $\mathcal{F}\mathcal{B} = \mathcal{B}$, Π *est un homomorphisme de* $\mathcal{B}(X)$ *dans* $\mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{B})$.

Soit $b \in \mathcal{B}(X)$*;* $\mathrm{H}b$ *a un degré et une filtration nuls.* D'après le théorème 48.1 :

Théorème 59.2. — *Supposons* $\delta\mathcal{B} = 0$. *Soit* $b \in \mathcal{B}(X)$*; pour que* $\mathrm{H}b = 0$, *il faut et il suffit que* $xb = 0$ *quel que soit* $x \in X$.

60. Propriétés de $\mathcal{H}_*\big(\overset{-1}{\xi}\,Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\big)$. — *Vu le n°* **31**, $\mathcal{H}_r\big(\overset{-1}{\xi}\,Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\big)$ *est canonique-gradué;* δ_r *a le degré canonique* 1 *et le degré filtrant* r. $\mathcal{H}\big(\overset{-1}{\xi}\,Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\big)$ *est gradué-filtré; son degré sera encore nommé canonique; ce degré canonique est minoré par* 0, *majoré par dim* X. *L'automorphisme* α (*n°* **8**) *multiplie par* $(-1)^p$ *un élément homogène de degré canonique* p. Multiplier l et m par un entier $n > 0$ revient à multiplier par n la filtration, le degré filtrant et l'indice r; ajouter 1 à l et m revient à ajouter 1 à l'indice r et à augmenter du degré canonique la filtration et le degré filtrant (n° **7**); *on pourra donc toujours supposer,* ce qui simplifie le théorème 60.1 :

$l = 0$, $m = 1$ [alors, vu le théorème 50.3 : *la filtration et le degré filtrant sont minorés par* 0, *majorés par dim* Y *et, sur les éléments homogènes,* $\leq$ *degré canonique*];

ou, ce qui simplifie le théorème 60.2 :

$l = -1$, $m = 0$ [alors *la filtration et le degré filtrant sont minorés par* $-$ Borne $\sup\limits_{y \in Y}$. dim $\overset{-1}{\xi}(y)$, *majorés par* 0 *et, sur les éléments homogènes,* $\geq -$ *degré canonique*].

La formule (50.2) se réduit à

$$\boxed{\mathcal{H}_{m+1}\big(\overset{-1}{\xi}\,Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\big) = \mathcal{H}[Y^m \bigcirc \xi\mathcal{F}(X^l \bigcirc \mathcal{B})];} \tag{60.1}$$

d'après le théorème 50.1,

$$\boxed{\mathcal{G}\mathcal{H}\big(\overset{-1}{\xi}\,Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\big) = \lim_{r \to +\infty} \mathcal{H}_r\big(\overset{-1}{\xi}\,Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\big).}$$

L'étude des homomorphismes Φ et Ψ se réduit à celle de leurs restrictions $\underline{\Phi}$ et $\underline{\Psi}$ définies ci-dessous.

LEMME 60.1. — *Soit* $h \in \mathcal{H}_{m+1}(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B})$; *si* h *est homogène de degré canonique* p *et de degré filtrant* lp, *les trois conditions suivantes sont équivalentes;*

a. h *a une image canonique nulle dans* $\mathcal{G}\mathcal{H}(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B})$;

b. $\overset{-1}{\xi}(y).h = 0$ *quel que soit* $y \in Y$;

c. $h = 0$.

Preuve. — Nous prouverons que a entraîne b et que b entraîne c; puisque c entraîne évidemment a, le lemme sera prouvé.

a entraîne b. — D'après le théorème 50.2 *a* et le n° **59**, les sections par $\overset{-1}{\xi}(y)$ de $\mathcal{H}_{m+1}(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B})$ et $\mathcal{G}\mathcal{H}(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B})$ sont canoniquement isomorphes.

b entraîne c. — Retranchons de la filtration l fois le degré canonique; les hypothèses deviennent :

$h \in \mathcal{H}_{m-l+1}(\overset{-1}{\xi} Y^{m-l} \bigcirc X^0 \bigcirc \mathcal{B})$; $\overset{-1}{\xi}(y).h = 0$ si $y \in Y$; le degré filtrant de h est nul;

c'est-à-dire :

$h \in \mathcal{H}[Y \bigcirc \xi\mathcal{F}(X \bigcirc \mathcal{B})]$; $yh = 0$ si $y \in Y$; le degré de h est nul quand on utilise le degré canonique de Y et un degré nul sur $\xi\mathcal{F}(X \bigcirc \mathcal{B})$.

Ces hypothèses entraînent a d'après le théorème 59.1 *b*.

THÉORÈME 60.1. — *Supposons* $\delta\mathcal{B} = 0$ *et la filtration de* $\mathcal{B}$ *nulle; soit* Φ *l'homomorphisme canonique de* $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$ *dans* $\overline{\mathcal{H}[Y \bigcirc \xi\mathcal{F}(X \bigcirc \mathcal{B})]}$, [*c'est-à-dire : l'homomorphisme* II *de la définition* 48.1, *où l'on remplace* X *par* Y *et* $\mathcal{B}$ *par* $\xi\mathcal{F}(X \bigcirc \mathcal{B})$; *c'est-à-dire, vu le théorème* 55.1 *b, la restriction à* $\mathcal{H}_{m+1}(X^l \bigcirc \mathcal{B})$ *de l'homomorphisme* Φ *du* n° **55**]. *Soit* $h \in \mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$, *homogène de degré canonique* p; *sa filtration dans* $\mathcal{H}(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B})$ *est*

$$f(h) \geqq lp. \tag{60.2}$$

a. $\underline{\Phi} h$ *a pour degré canonique* p *et pour degré filtrant* lp; $\underline{\Phi} h$ *a une* *image canonique* (n° **9**, *homomorphisme* $\varkappa_s^r$) *dans* $\mathcal{G}\mathcal{H}(\overset{-1}{\xi}\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$; *cette image est*

$$h \bmod \mathcal{H}^{(lp+1)}(\overset{-1}{\xi}\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{B}),$$

$\mathcal{H}^{(lp+1)}(\dots)$ *représentant les termes de* $\mathcal{H}(\dots)$ *dont la filtration est* $> lp$.

b. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

$$\underline{\Phi} h = 0; \qquad \overset{-1}{\xi}(y).h = 0 \text{ quel que soit } y \in \mathrm{Y}; \qquad f(h) > lp.$$

c. $\underline{\Phi}\mathcal{H}(\mathrm{X} \bigcirc \mathcal{B})$ *est le sous-anneau de* $\mathcal{H}[\mathrm{Y} \bigcirc \xi\mathcal{F}(\mathrm{X} \bigcirc \mathcal{B})]$ *engendré par les éléments homogènes de cet anneau qui possèdent simultanément les deux propriétés suivantes : leur degré filtrant est l fois leur degré canonique; ils ont une image canonique dans* $\mathcal{G}\mathcal{H}(\overset{-1}{\xi}\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$.

Preuve de (60.2). — La filtration de h dans $\mathcal{H}(\mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$ est lp (n° **59**); $\underline{\Phi}$ ne diminue pas la filtration.

Preuve de a. — D'après le n° **59** : $h \in \mathcal{H}_{m+1}(\mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$; h a pour degrés canonique et filtrant p et lp; l'image de h dans $\mathcal{G}\mathcal{H}(\mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$ est

$$h \bmod \mathcal{H}^{(lp+1)}(\mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{B}).$$

L'homomorphisme $\underline{\Phi}$ transforme ces propriétés en les suivantes : $\underline{\Phi} h$ a pour degrés canonique et filtrant p et lp; l'image de $\underline{\Phi} h$ dans $\mathcal{G}\mathcal{H}(\overset{-1}{\xi}\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$ est vu le théorème 55.1 *a*,

$$h \bmod \mathcal{H}^{(lp+1)}(\overset{-1}{\xi}\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{B}).$$

Preuve de b. — *a* et le lemme 60.1 prouvent l'équivalence des trois conditions :

$$f(h) > lp; \qquad y\underline{\Phi} h = 0 \text{ quel que soit } y \in \mathrm{Y}; \qquad \underline{\Phi} h = 0.$$

$y\underline{\Phi} h = \overset{-1}{\xi}(y).h$ d'après la formule (48.1).

Preuve de c. — Soit $\mathcal{H}'$ le sous-anneau de $\mathcal{H}[\mathrm{Y} \bigcirc \xi\mathcal{F}(\mathrm{X} \bigcirc \mathcal{B})]$ que *c* affirme être identique à $\underline{\Phi}\mathcal{H}(\mathrm{X} \bigcirc \mathcal{B})$; soit $\mathcal{G}'$ le sous-anneau de l'anneau $\mathcal{G}\mathcal{H}(\overset{-1}{\xi}\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$ qu'engendrent les éléments homogènes de cet anneau dont le degré filtrant est l fois le degré canonique; d'après a, $\underline{\Phi}\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B}) \subset \mathcal{H}'$ et $\underline{\Phi}\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$ est appliqué canoniquement *sur* $\mathcal{G}'$; d'après le lemme 60.1, l'application canonique de $\mathcal{H}'$ dans $\mathcal{G}'$ est un *isomorphisme*; donc $\underline{\Phi}\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}'$.

THÉORÈME 60.2. — *Supposons* $\delta\mathcal{B} = 0$, *la filtration de* $\mathcal{B}$ *nulle et* $\xi\mathcal{B}$ *propre; l'homomorphisme canonique* Π *de* $\mathcal{B}$ *dans* $\mathcal{F}(X \bigcirc \mathcal{B})$ (*définition* 48.3, *où* $\mathcal{F}\mathcal{B} = \mathcal{B}$) *définit un homomorphisme canonique* $\underline{\Psi}$ *de* $\mathcal{H}(Y \bigcirc \xi\mathcal{B})$ *dans* $\mathcal{H}[Y \bigcirc \xi\mathcal{F}(X \bigcirc \mathcal{B})]$ [*vu le théorème* 55 2*b*, $\underline{\Psi}$ *est la restriction à* $\mathcal{H}_{m+1}(Y^m \bigcirc \xi\mathcal{B})$ *de l'homomorphisme* Ψ *du* n° **55**]. *Soit* $h \in \mathcal{H}(Y \bigcirc \xi\mathcal{B})$, *homogène de degré canonique* p; *la filtration de* $\overset{-1}{\xi} h$ *dans* $\mathcal{H}\left(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\right)$ *est*

$$f\left(\overset{-1}{\xi} h\right) = mp, \qquad \text{si} \quad \overset{-1}{\xi} h \neq 0. \tag{60.3}$$

a. $\underline{\Psi} h$ *a pour degré canonique* p *et pour degré filtrant* mp; $\underline{\Psi} h$ *a une image canonique* (n° **9**) *dans* $\mathcal{G}\mathcal{H}\left(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\right)$; *cette image est*

$$\overset{-1}{\xi} h \bmod \mathcal{H}^{(mp+1)}\left(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\right).$$

b. *Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

$\overset{-1}{\xi} h = 0$; *l'image canonique de* $\underline{\Psi} h$ *dans* $\mathcal{H}_r\left(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B}\right)$ *est nulle quand* r *est suffisamment grand.*

Remarque. — Le théorème 65.2 déterminera, dans un cas particulier, $\underline{\Psi}\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{B})$ et $\overset{-1}{\xi}\mathcal{H}(Y \bigcirc \xi\mathcal{B})$.

Preuve de (60.3). — D'après le n° **59**, la filtration de h dans $\mathcal{H}(Y^m \bigcirc \xi\mathcal{B})$ est mp; Ψ ne diminue pas la filtration; donc $f\left(\overset{-1}{\xi} h\right) \geq mp$. D'après le n° **50**, $f\left(\overset{-1}{\xi} h\right)$ est au plus égal à la filtration de $\overset{-1}{\xi} h$ dans $\mathcal{H}(X^m \bigcirc \mathcal{B})$; celle-ci est mp si $\overset{-1}{\xi} h \neq 0$, vu le n° **59**.

Preuve de a. — D'après le n° **59** : $h \in \mathcal{H}_{m+1}(Y^m \bigcirc \xi\mathcal{B})$; h a pour degrés canonique et filtrant p et mp; h a pour image dans $\mathcal{G}\mathcal{H}(Y^m \bigcirc \xi\mathcal{B})$

$$h \bmod \mathcal{H}^{(mp+1)}(Y^m \bigcirc \xi\mathcal{B}).$$

L'homomorphisme $\underline{\Psi}$ transforme ces propriétés en les suivantes : $\underline{\Psi} h$ a pour degrés canonique et filtrant p et mp; $\underline{\Psi} h$ a pour image dans $\mathcal{G}\mathcal{H}(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{B})$, vu le théorème 55.2 *a*.

$$\overset{-1}{\xi} h \bmod \mathcal{H}^{(mp+1)}(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{B}).$$

Preuve de b. — Supposons $\overset{-1}{\xi} h = 0$; d'après *a*, $\underline{\Psi} h$ a une image canonique nulle dans $\mathcal{G}\mathcal{H}(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{B})$, donc dans

$$\lim_{r \to +\infty} \mathcal{H}_r(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{B}),$$

donc dans $\mathcal{H}_r(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{B})$ pour r suffisamment grand. Réciproquement, supposons nulle l'image canonique de $\underline{\Psi}$ dans

$$\mathcal{G}\mathcal{H}(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{B});$$

d'après *a*, $f(\overset{-1}{\xi} h) > mp$; donc, vu (60.3), $\overset{-1}{\xi} h = 0$.

Le théorème 55.3 devient :

THÉORÈME 60.3. — *Supposons* $\delta\mathcal{B} = 0$, *la filtration de* $\mathcal{B}$ *nulle et* $\xi\mathcal{B}$ *propre; soient* Π_X *et* Π_Y *les homomorphismes canoniques de* $\mathcal{B}(X)$ *dans* $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$ *et* $\mathcal{H}(Y \bigcirc \xi\mathcal{B})$; *on a*

$$\underline{\Phi} \Pi_X = \underline{\Psi} \Pi_Y.$$

61. CAS OU $\mathcal{B}$ EST COMMUTATIF. — Les théorèmes 44.2 et 51.2 donnent :

THÉORÈME 61.1. — *Si* $bb_1 = b_1 b$ *quels que soient* b *et* $b_1 \in \mathcal{B}(x)$, *alors* $hh_1 = (-1)^{pq} h_1 h$, *quand* h *et* h_1 *sont des éléments de* $\mathcal{H}_*(X' \bigcirc \mathcal{B})$ *ou de* $\mathcal{H}_*(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{B})$ *homogènes de degrés canoniques* p *et* q.

CHAPITRE III.

INVARIANTS TOPOLOGIQUES DES ESPACES LOCALEMENT COMPACTS, DE LEURS APPLICATIONS CONTINUES ET DES CLASSES D'HOMOTOPIE DE CES APPLICATIONS.

$\mathcal{H}_*(X' \bigcirc \mathcal{B})$ *est un invariant topologique de l'espace* X, $\mathcal{H}_*(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{B})$ est *un invariant topologique de l'application continue* ξ de X dans Y,

$\mathcal{H}_*(\overset{-1}{\xi}\,\overset{-1}{\eta} Z^n \bigcirc \overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B})$ *est un invariant topologique de l'application composée* $\eta\xi$ de X dans Z quand on choisit *le faisceau* $\mathcal{B}$ *identique à un anneau* (§ I) *ou localement isomorphe à un anneau* (§ II).

I. — Faisceau identique à un anneau.

62. Définition. — Le *faisceau* différentiel-gradué-filtré $\mathcal{B}$, défini sur l'espace X, sera dit *identique à un anneau* différentiel-gradué-filtré quand il possédera les propriétés suivantes :

$\mathcal{B}(F) = 0$ quand F est une partie fermée non compacte de X;

si K_1 et K sont deux parties compactes non vides de X et si $K_1 \subset K$, la section de $\mathcal{B}(K)$ par K_1 est un isomorphisme, respectant la différentiation, le degré et la filtration, de $\mathcal{B}(K)$ sur $\mathcal{B}(K_1)$.

On peut donc convenir que $\mathcal{B}(K)$ est un anneau différentiel-gradué-filtré $\mathcal{A}$ indépendant du choix de K, la section de $\mathcal{B}(K)$ par K_1 étant l'application identique de $\mathcal{A}$ sur lui-même : on dira que $\mathcal{B}$ *est identique à* $\mathcal{A}$ et l'on écrira

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}.$$

Les propriétés suivantes sont évidentes, vu les définitions des nos **23**, **24** et le théorème 45.1.

Le faisceau $\mathcal{A}$, *défini sur l'espace* X *et identique à l'anneau* $\mathcal{A}$, *est propre.*

Soit ξ *une application propre de* X *dans un espace* Y : $\xi(X)$ *est fermé; le faisceau* $\xi\mathcal{A}$ *est propre;* $\xi\mathcal{A} = \mathcal{A}$ *sur* $\xi(X)$ (*au sens du* n° **47**);

$$\mathcal{H}_*(Y^l \bigcirc \xi\mathcal{A}) = \mathcal{H}_*(F^l \bigcirc \mathcal{A}) \qquad \text{où} \quad F = \xi(X).$$

Remarques. — Le faisceau $\mathcal{A}$ n'est continu que si X est compact; le faisceau $\xi\mathcal{A}$ n'est propre que si ξ est propre.

63. Relation entre $\mathcal{H}(X)$, $\mathcal{H}_*(\mathcal{A})$ et $\mathcal{H}_*(X^l \bigcirc \mathcal{A})$ quand $\mathcal{A}$ est un anneau différentiel-filtré. — Lemme 63.1. — *Soit, sur un espace* X, *un faisceau identique à un anneau différentiel-filtré* $\mathcal{A}$. *Soit* $\mathfrak{X}$ *une couverture fine de* X; *soit* $\mathfrak{X}^\star$ *l'anneau que constituent les éléments de* $\mathfrak{X}$ *à support compact;* $\mathfrak{X}^\star \otimes \mathcal{A}$ *désignant le produit tensoriel des anneaux* $\mathfrak{X}^\star$ *et* $\mathcal{A}$, *on a*

$$\mathcal{H}_*(X^l \bigcirc \mathcal{A}) = \mathcal{H}_*(\mathfrak{X}^{\star l} \otimes \mathcal{A}).$$

Preuve. — Il existe un homomorphisme canonique évident, dont la filtration est $\geqq 0$, de l'anneau $\mathcal{X}^{*\prime}\otimes\mathfrak{A}$ sur l'anneau du complexe $\mathcal{X}'\bigcirc\mathfrak{A}$; nous allons prouver que cet homomorphisme est un isomorphisme respectant la filtration. Autrement dit, k_μ désignant des éléments homogènes à support compact de $\mathcal{X}$, nous allons prouver que si

$$(63.1)\qquad \sum_\mu (xk_\mu)\otimes a_\mu = 0 \quad \text{ou} \quad f\Big[\sum_\mu (xk_\mu)\otimes a_\mu\Big]\geqq p \quad \text{quel que soit } x\in X$$

alors

$$(63.2)\qquad \sum_\mu k_\mu\otimes a_\mu = 0 \quad \text{ou} \quad f\Big(\sum_\mu k_\mu\otimes a_\mu\Big)\geqq p.$$

Les relations (63.1) résultent d'un nombre fini de relations entre les xk_μ; ces relations expriment que x n'appartient pas aux supports d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{X}$; soit V un voisinage de x dont l'adhérence est étrangère à ces supports; on a

$$\sum_\mu (\overline{V}k_\mu)\otimes a_\mu = 0 \quad \text{ou} \quad f\Big[\sum_\mu (\overline{V}k_\mu)\otimes a_\mu\Big]\geqq p$$

On peut recouvrir $\bigcup_\mu S(k_\mu)$, qui est compact, avec un nombre fini de tels voisinages, les $V_\nu(1\leqq\nu\leqq\omega)$. Soit V_0 un voisinage de l'∞ tel que $\overline{V}_0\cap\bigcup_\mu S(k_\mu)=\emptyset$ et $\bigcup_{0\leq\nu\leq\omega} V_\nu = X$; on a

$$\sum_\mu (\overline{V}_\nu k_\mu)\otimes a_\mu = 0 \quad \text{ou} \quad f\Big[\sum_\mu (\overline{V}_\nu k_\mu)\otimes a_\mu\Big]\geqq p \qquad (0\leqq\nu\leqq\omega).$$

Utilisons l'hypothèse que $\mathcal{X}$ est fin et la formule (32.6); il vient

$$\sum_\mu \lambda_\nu k_\mu\otimes a_\mu = 0 \quad \text{ou} \quad f\Big[\sum_\mu \lambda_\nu k_\mu\otimes a_\mu\Big]\geqq p;$$

d'où (63.2), en sommant par rapport à ν, puisque $\sum_\nu \lambda_\nu$ est l'identité.

Le lemme 63.1, vu les propositions 18.1, 19.1, 19.2 et 20.1, a les conséquences suivantes :

Définition 63.1. — *$\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ sera noté $\mathcal{H}X$ quand $\mathcal{A}$ est l'anneau des entiers* ($\delta\mathcal{A} = 0$); *d'après le lemme* 63.1, $\mathcal{H}X = \mathcal{H}\mathcal{X}^\star$.

Théorème 63.1. — *Soit $\mathcal{A}$ un anneau différentiel.*

a. Il existe un homomorphisme canonique $\overline{\Pi}$ de $\mathcal{H}X \otimes \mathcal{H}\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$; on peut donc convenir que

$$\mathcal{H}X \otimes \mathcal{H}\mathcal{A} \subset \mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A}).$$

[*Faisons dans le* n° **48** $\mathcal{B} = \mathcal{A}$: *si* X *est compact,* $\mathcal{H}X$ *a une unité u* (*proposition* 37.1, *et remarque* 8.1) *et l'homomorphisme que le* n° **48** *nomme* Π *est la restriction à* $u \otimes \mathcal{H}\mathcal{A}$ *de l'isomorphisme* $\overline{\Pi}$; *si* X *n'est pas compact,* $\mathcal{H}X$ *n'a pas d'unité et* Π *a un champ de définition nul*].

b. Le $\mathcal{H}X \otimes \mathcal{H}\mathcal{A}$- module $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})/\mathcal{H}X \otimes \mathcal{H}\mathcal{A}$ ne dépend que de $\mathcal{H}X$ et $\mathcal{H}\mathcal{A}$ et en dépend additivement : si $\mathcal{K}_\mu$ et $\mathcal{A}_\nu$ sont des anneaux canoniques sans torsion et des anneaux différentiels tels que $\mathcal{H}X = \sum_\mu \mathcal{H}\mathcal{K}_\mu$ et $\mathcal{H}\mathcal{A} = \sum_\nu \mathcal{H}\mathcal{A}_\nu$, alors

$$\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})/\mathcal{H}X \otimes \mathcal{H}\mathcal{A} = \sum_{\mu,\nu} \mathcal{H}(\mathcal{K}_\mu \otimes \mathcal{A}_\nu)/\mathcal{H}\mathcal{K}_\mu \otimes \mathcal{H}\mathcal{A}_\nu \qquad \text{(sommes directes).}$$

c. Le groupe additif $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})/\mathcal{H}X \otimes \mathcal{H}\mathcal{A}$ ne dépend que des groupes de torsion de $\mathcal{H}X$ et $\mathcal{H}\mathcal{A}$ et en dépend additivement.

d. En particulier, si $\mathcal{H}X$ ou $\mathcal{H}\mathcal{A}$ est sans torsion

$$\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A}) = \mathcal{H}X \otimes \mathcal{H}\mathcal{A}.$$

Théorème 63.2. — *Soit $\mathcal{A}$ un anneau différentiel-filtré. Il existe un homomorphisme canonique $\overline{\Pi}$ de $(\mathcal{H}X)^l \otimes \mathcal{H}_*\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H}_*(X^l \bigcirc \mathcal{A})$; la restriction de $\overline{\Pi}$ à l'anneau $(\mathcal{H}X)^l \otimes \mathcal{H}_{l+1}\mathcal{A}$ est l'isomorphisme $\overline{\Pi}$ du théorème* 63.1 *a de cet anneau dans $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{H}_l\mathcal{A}) = \mathcal{H}_{l+1}(X^l \bigcirc \mathcal{A})$; la restriction de $\overline{\Pi}$ à l'anneau $(\mathcal{H}X)^l \otimes \mathcal{H}\mathcal{A}$ est l'isomorphisme $\overline{\Pi}$ du théorème* 63.1 *a.*

Théorème 63.3. — *Soit $\mathcal{A}$ un anneau différentiel-filtré.*
Si $\mathcal{H}X$ ou $\mathcal{H}_*\mathcal{A}$ est sans torsion,

$$\mathcal{H}_*(X^l \bigcirc \mathcal{A}) = (\mathcal{H}X^l) \otimes \mathcal{H}_*\mathcal{A}.$$

THÉORÈME 63.4. — *Si $\mathcal{A}$ est une algèbre différentielle-filtrée sur un corps commutatif $\mathcal{M}$,*

$$\mathcal{H}_*(X'\bigcirc\mathcal{A}) = [\mathcal{H}(X\bigcirc\mathcal{M})]'\overset{\mathcal{M}}{\otimes}\mathcal{H}_*\mathcal{A}.$$

64. RELATION ENTRE $\mathcal{H}(X)$, $\mathcal{H}_*(Y'\bigcirc\mathcal{A})$ ET $\mathcal{H}_*[(X\times Y)'\bigcirc\mathcal{A}]$. — Soient θ et ϖ les projections canoniques sur X et Y du produit $X\times Y$ de ces deux espaces; soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ des couvertures fines de X et Y; soient $\mathcal{X}^\star$ et $\mathcal{Y}^\star$ les anneaux que constituent les éléments de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ à supports compacts; on prouve aisément que $\overset{-1}{\theta}\mathcal{X}\bigcirc\overset{-1}{\varpi}\mathcal{Y}$ est une couverture fine de $X\times Y$ et que ses éléments à supports compacts constituent l'anneau $\mathcal{X}^\star\otimes\mathcal{Y}^\star$; d'où, vu le lemme 63.1,

$$\mathcal{H}_*[(X\times Y)'\bigcirc\mathcal{A}] = \mathcal{H}_*(\mathcal{X}^{\star\prime}\otimes\mathcal{Y}^{\star\prime}\otimes\mathcal{A}).$$

De cette formule et des propositions 18.1, 19.1, 19.2 et 20.1 résultent les extensions suivantes des théorèmes précédents.

THÉORÈME 64.1. — *Soit $\mathcal{A}$ un anneau différentiel*

$$\mathcal{H}X\otimes\mathcal{H}(Y\bigcirc\mathcal{A})\subset\mathcal{H}(X\times Y\bigcirc\mathcal{A}).$$

Le $\mathcal{H}X\otimes\mathcal{H}(Y\bigcirc\mathcal{A})$-module $\mathcal{H}(X\times Y\bigcirc\mathcal{A})/\mathcal{H}X\otimes\mathcal{H}(Y\bigcirc\mathcal{A})$ ne dépend que de $\mathcal{H}X$ et $\mathcal{H}(Y\bigcirc\mathcal{A})$ et en dépend additivement; en tant que groupe additif, il ne dépend que des groupes de torsion de $\mathcal{H}X$ et $\mathcal{H}(Y\bigcirc\mathcal{A})$. Si $\mathcal{H}X$ ou $\mathcal{H}(Y\bigcirc\mathcal{A})$ est sans torsion,

$$\mathcal{H}(X\times Y\bigcirc\mathcal{A}) = \mathcal{H}X\otimes\mathcal{H}(Y\bigcirc\mathcal{A}).$$

THÉORÈME 64.2. — *Soit $\mathcal{A}$ un anneau différentiel-filtré; il existe un homomorphisme canonique de $(\mathcal{H}X)'\otimes\mathcal{H}_*(Y'\bigcirc\mathcal{A})$ dans $\mathcal{H}_*[(X\times Y)'\bigcirc\mathcal{A}]$; il a pour restrictions les isomorphismes canoniques (théorème 64.1) de $(\mathcal{H}X)'\otimes\mathcal{H}_{l+1}(Y'\bigcirc\mathcal{A}) = (\mathcal{H}X)'\otimes\mathcal{H}(Y'\bigcirc\mathcal{H}_l\mathcal{A})$ dans*

$$\mathcal{H}[(X\times Y)'\bigcirc\mathcal{H}_l\mathcal{A}] = \mathcal{H}_{l+1}[(X\times Y)'\bigcirc\mathcal{A}]$$

et de $(\mathcal{H}X)'\otimes\mathcal{H}(Y'\bigcirc\mathcal{A})$ dans $\mathcal{H}[(X\times Y)'\bigcirc\mathcal{A}]$.

THÉORÈME 64.3. — *Soit $\mathcal{A}$ un anneau différentiel-filtré. Si $\mathcal{H}X$ ou $\mathcal{H}_*(Y'\bigcirc\mathcal{A})$ est sans torsion,*

$$\mathcal{H}_*[(X\times Y)'\bigcirc\mathcal{A}] = (\mathcal{H}X)'\otimes\mathcal{H}_*(Y'\bigcirc\mathcal{A}).$$

THÉORÈME 64.4. — *Si $\mathcal{A}$ est une algèbre différentielle-filtrée sur un corps commutatif $\mathcal{M}$*

$$\mathcal{H}_*[(X \times Y)' \bigcirc \mathcal{A}] = [\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{M})]' \overset{\mathcal{M}}{\otimes} [(\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{M})]' \overset{\mathcal{M}}{\otimes} \mathcal{H}_* \mathcal{A}.$$

65. CAS OU $\mathcal{A}$ EST UN ANNEAU DE DIFFÉRENTIELLE NULLE ET DE FILTRATION NULLE. — C'est un cas particulier de celui qu'étudient les nos **59, 60** et **61**; nous allons préciser les propriétés de Π et $\underline{\Psi}$. Le théorème 59.2 s'énonce comme suit : *si* X *est compact,* Π *est un isomorphisme de l'anneau* $\mathcal{A}$ *dans le sous-anneau* $\mathcal{H}^{[0]}(X \bigcirc \mathcal{A})$ *que constituent les éléments de* $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ *dont le degré canonique est nul.* Ce théorème peut être complété comme suit :

THÉORÈME 65.1. — *Supposons* $\delta\mathcal{A} = 0$ *et la filtration de* $\mathcal{A}$ *nulle.*

a. Si X *est compact et connexe,* Π *est un isomorphisme de* $\mathcal{A}$ *sur* $\mathcal{H}^{[0]}(X \bigcirc \mathcal{A})$.

b. Si aucune composante connexe de X ([3], Chap. I, § 11) *n'est compacte, alors*

$$\mathcal{H}^{[0]}(X \bigcirc \mathcal{A}) = 0.$$

Nous déduirons ce théorème du lemme suivant :

LEMME 65.1. — *Soit* $h \in \mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$; xh *est une fonction de* $x \in X$ *prenant ses valeurs dans* $\mathcal{A}$; *je dis que cette fonction est constante au voisinage de chaque point de* X.

Preuve du lemme 65.1. — Remplaçons X par un voisinage compact d'un de ses points et h par sa section par ce voisinage : nous sommes ramenés au cas où X est compact. D'après la formule 48.1,

$$x\Pi a = a; \tag{65.1}$$

d'où

$$x(h - \Pi x h) = 0;$$

vu la continuité de $\mathcal{F}(X \bigcirc \mathcal{A})$, x possède un voisinage V tel que

$$y(h - \Pi x h) = 0 \quad \text{quand} \quad y \in V;$$

d'où, vu (65.1),

$$yh = xh \quad \text{quand} \quad y \in V.$$

Preuve du théorème 65.1 *a.* — Soit $h \in \mathcal{H}^{[0]}(X \bigcirc \mathcal{A})$. Puisque X est connexe, le lemme 65.1 prouve que xh a une valeur a indépendante de x :

$$x(h - \mathrm{II}a) = 0 \qquad \text{quel que soit } x \in X;$$

d'où vu le théorème 59.1 *b*

$$h = \mathrm{II}a,$$

Preuve du théorème 65.1 *b.* — Soit $h \in \mathcal{H}^{[0]}(X \bigcirc \mathcal{A})$; d'après le lemme 65.1, xh est constant sur chaque composante connexe de X; vu la continuité de $\mathcal{F}(X \bigcirc \mathcal{A})$, $xh = 0$ au voisinage de l'∞; donc $xh = 0$ quel que soit $x \in X$; le théorème 59.1 *b* achève la preuve.

L'homomorphisme $\underline{\Psi}$ (théorème 60.2) n'est défini que si $\xi\mathcal{A}$ est propre, c'est-à-dire (n° **62**) si ξ est *propre*; rappelons que $\overset{-1}{\xi}(y)$ est alors compact quel que soit $y \in Y$.

THÉORÈME 65.2. — *Supposons $\delta\mathcal{A} = 0$, la filtration de $\mathcal{A}$ nulle, ξ propre, $Y = \xi(X)$ et $\overset{-1}{\xi}(y)$ connexe quel que soit $y \in Y$. Alors :*

a. $\underline{\Psi}$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$ sur le sous-anneau de l'anneau

$$\mathcal{H}_{m+1}\big(\overset{-1}{\xi}Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{A}\big) = \mathcal{H}[Y \bigcirc \xi\mathcal{F}(X \bigcirc \mathcal{A})]$$

qu'engendrent ses éléments homogènes de degré canonique p et de degré filtrant mp (p arbitraire).

b. Le sous-anneau $\overset{-1}{\xi}\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$ de l'anneau $\mathcal{H}\big(\overset{-1}{\xi}Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{A}\big)$ est le sous-anneau qu'engendrent les éléments de cet anneau dont le degré canonique est p et la filtration mp (p arbitraire).

Diminuons la filtration de m fois le degré canonique : nous nous trouvons ramené au cas $l < 0$, $m = 0$.

Preuve de a. — D'après le théorème 65.1 *a*, II est un isomorphisme de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{H}^{[0]}(F \bigcirc \mathcal{A})$ quand $F = \overset{-1}{\xi}(y)$, $y \in Y$; donc $\underline{\Psi}$, vu sa définition (théorème 60.2) et le théorème 46.1, est un isomorphisme de $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$ sur $\mathcal{H}[Y \bigcirc \xi\mathcal{F}^{[0]}(X \bigcirc \mathcal{A})]$.

Preuve de b. — D'après *a* tout élément de $\mathcal{H}_1\big(\overset{-1}{\xi}Y^0 \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{A}\big)$, dont le degré filtrant est nul, est du type $\underline{\Psi}h$ où $h \in \mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$; donc, tout élément de $\mathcal{G}\mathcal{H}(\overset{-1}{\xi}Y^0 \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{A})$, dont le degré filtrant est nul, est image d'un $\overline{\Psi h}$, c'est-à-dire, vu le théorème 60.2a, est du type $\overset{-1}{\xi} h \bmod \mathcal{H}^{(1)}(\overset{-1}{\xi}Y^0 \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{A})$; cela signifie que tout élément de $\mathcal{H}(\overset{-1}{\xi}Y^0 \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{A})$ dont la filtration est nulle est du type $\overset{-1}{\xi} h$. Réciproquement $f(\overset{-1}{\xi} h) = 0$ d'après (60.3).

66. Cas où $\mathcal{A}$ est un anneau différentiel muni d'une filtration nulle. — Le lemme 63.1 et la proposition 21.1 ont la conséquence suivante :

Théorème 66.1. — *Soit $\mathcal{A}$ un anneau différentiel muni d'une filtration nulle; la filtration des éléments non nuls de $\mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{A})$ est finie; $\delta_r = 0$; $\mathcal{H}_r(X^l \bigcirc \mathcal{A}) = \mathcal{G}\mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{A}) = \mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{H}\mathcal{A})$ si $0 < l < r$.*

Les propriétés d'homomorphisme canonique Π et de l'ensemble $\mathcal{H}^{(1)}(X^l \bigcirc \mathcal{A})$ des éléments de $\mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{A})$ de filtration > 0 sont les suivantes :

Théorème 66.2. — *Soit $\mathcal{A}$ un anneau différentiel muni d'une filtration nulle; soit $l > 0$.*

a. Si X est compact, Π est un isomorphisme de $\mathcal{H}\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{A})$; la filtration est nulle sur $\Pi\mathcal{H}\mathcal{A}$.

b. Si X est compact et connexe,

$$\mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{A}) = \Pi\mathcal{H}\mathcal{A} + \mathcal{H}^{(1)}(X^l \bigcirc \mathcal{A}) \qquad (\textit{somme directe}).$$

c. Si aucune composante connexe de X n'est compacte,

$$\mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{A}) = \mathcal{H}^{(1)}(X^l \bigcirc \mathcal{A}).$$

Preuve de a. — D'après le n° **65**, Π est un isomorphisme, conservant le degré, de $\mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{A} = \mathcal{H}\mathcal{A}$ dans $\mathcal{G}\mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{A}) = \mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{H}\mathcal{A})$; vu la proposition 6.1, Π est donc un homomorphisme, respectant la filtration, de $\mathcal{H}\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{A})$, et par suite un isomorphisme, vu le théorème 66.1.

Preuve de b. — Soit $h \in \mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{A})$; posons

$$h' = h \bmod \mathcal{H}^{(1)}(X^l \bigcirc \mathcal{A}) \in \mathcal{H}^{[0]}(X^l \bigcirc \mathcal{H}\mathcal{A}) = \mathcal{H}\mathcal{A} \qquad (\text{théorème } 65.1\,a);$$

on a

$$h - \Pi h' \in \mathcal{H}^{(1)}(X^l \bigcirc \mathcal{A}).$$

Preuve de c. — D'après le théorème 65.1*b*,

$$\mathcal{G}\mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{A}) = \mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{H}\mathcal{A})$$

n'a pas de terme de degré nul.

Supposons $0 < l < m$; d'après le théorème 66.1, la formule (50.2) se réduit à

$$(66.1) \qquad \boxed{\mathcal{H}_{m+1}(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{A}) = \mathcal{H}[Y \bigcirc \xi\mathcal{F}(X \bigcirc \mathcal{H}\mathcal{A})] \qquad (0 < l < m),}$$

le *degré filtrant* du second membre s'obtient en utilisant m fois le degré canonique sur Y et l fois le degré canonique sur X; $\mathcal{F}(X \bigcirc \mathcal{H}\mathcal{A})$ a un degré canonique, qui s'obtient en convenant que le degré canonique de $\mathcal{H}\mathcal{A}$ est nul; l'anneau (66.1) a donc *un degré canonique;* mais en général δ_{m+1} n'est pas homogène par rapport au degré canonique qui ne peut donc en général pas être défini sur $\mathcal{H}_r(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{A})$ pour $r > m+1$.

L'étude des homomorphismes Φ et Ψ (nº **55**) se réduit à celle de leurs restrictions $\underline{\Phi}$ et $\underline{\Psi}$ définies ci-dessous; nous n'énoncerons que les conclusions de cette étude, qui est identique à celle que développe le nº **60**; la preuve du théorème 66.4*c* est identique à celle du théorème 65.2*a*.

Théorème 66.3. — *Soit $\mathcal{A}$ un anneau différentiel muni de la filtration nulle; soit $0 < l < m$; soit $\underline{\Phi}$ l'homomorphisme canonique de $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{H}\mathcal{A})$ dans $\mathcal{H}[Y \bigcirc \xi\mathcal{F}(X \bigcirc \mathcal{H}\mathcal{A})]$ [c'est-à-dire : l'homomorphisme* II *(définition* 48.1*), où l'on remplace* X *par* Y *et $\mathcal{B}$ par $\xi\mathcal{F}(X \bigcirc \mathcal{H}\mathcal{A})$; c'est-à-dire la restriction à $\mathcal{H}_{m+1}(X^l \bigcirc \mathcal{A})$ de Φ]. Soit $h \in \mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{H}\mathcal{A})$, homogène de degré canonique p; $h \in \mathcal{G}\mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{A})$; il existe donc $h' \in \mathcal{H}^{(lp)}(X^l \bigcirc \mathcal{A})$ tel que*

$$h = h' \bmod \mathcal{H}^{(lp+1)}(X^l \bigcirc \mathcal{A});$$

$f(h')$ désignera la filtration de h' dans $\mathcal{H}(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{A})$;

$$f(h') \geqq lp.$$

a. Φh *a pour degré canonique p et pour degré filtrant lp;* Φh *a une image canonique dans* $\mathcal{G}\mathcal{H}\left(\overset{-1}{\xi}\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{A}\right)$; *c'est*

$$h' \bmod \mathcal{H}^{(lp+1)}\left(\overset{-1}{\xi}\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{A}\right).$$

b. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

$$\Phi h = 0; \qquad \overset{-1}{\xi}(y)\, h = 0 \text{ quel que soit } y \in \mathrm{Y}; \qquad f(h') > lp.$$

Théorème 66.4. — *Soit* $\mathcal{A}$ *un anneau différentiel muni de la filtration nulle; soit* $0 < l < m$, *supposons* ξ *propre et* $\mathrm{Y} = \xi(\mathrm{X})$; *l'homomorphisme canonique* Π *du faisceau de* X *identique à* $\mathcal{H}\mathcal{A}$ *dans le faisceau* $\mathcal{F}(\mathrm{X} \bigcirc \mathcal{H}\mathcal{A})$ *définit un homomorphisme canonique* $\underline{\Psi}$ *de* $\mathcal{H}(\mathrm{Y} \bigcirc \mathcal{H}\mathcal{A})$ *dans* $\mathcal{H}[\mathrm{Y} \bigcirc \xi\mathcal{F}(\mathrm{X} \bigcirc \mathcal{H}\mathcal{A})]$ $[\underline{\Psi}$ *est la restriction à* $\mathcal{H}_{m+1}(\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathcal{A})$ *de* $\Psi]$. *Soit* $h \in \mathcal{H}(\mathrm{Y} \bigcirc \mathcal{H}\mathcal{A})$, *homogène de degré canonique p;* $h \in \mathcal{G}\mathcal{H}(\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathcal{A})$; *il existe donc* $h' \in \mathcal{H}^{(mp)}(\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathcal{A})$ *tel que*

$$h = h' \bmod \mathcal{H}^{(mp+1)}(\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathcal{A});$$

la filtration de $\overset{-1}{\xi} h'$ *dans* $\mathcal{H}\left(\overset{-1}{\xi}\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{A}\right)$ *est*

$$f\left(\overset{-1}{\xi} h'\right) \geq mp.$$

a. $\underline{\Psi} h$ *a pour degré canonique p et pour degré filtrant mp;* $\underline{\Psi} h$ *a une image canonique dans* $\mathcal{G}\mathcal{H}\left(\overset{-1}{\xi}\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{A}\right)$; *c'est*

$$\overset{-1}{\xi} h' \bmod \mathcal{H}^{(mp+1)}\left(\overset{-1}{\xi}\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{A}\right).$$

b. Supposons X *compact; soient* Π_{X} *et* Π_{Y} *les homomorphismes canoniques de* $\mathcal{H}\mathcal{A}$ *dans* $\mathcal{H}(\mathrm{X} \bigcirc \mathcal{H}\mathcal{A})$ *et* $\mathcal{H}(\mathrm{Y} \bigcirc \mathcal{H}\mathcal{A})$;

$$\underline{\Phi}\Pi_{\mathrm{X}} = \underline{\Psi}\Pi_{\mathrm{Y}}.$$

c. Supposons $\xi(y)$ *connexe quel que soit* $y \in \mathrm{Y}$; *alors* $\underline{\Psi}$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{H}(\mathrm{Y} \bigcirc \mathcal{H}\mathcal{A})$ *sur le sous-anneau de l'anneau* $\mathcal{H}[\mathrm{Y} \bigcirc \xi\mathcal{F}(\mathrm{X} \bigcirc \mathcal{H}\mathcal{A})]$ *qu'engendrent ses éléments homogènes de degré canonique p et de degré filtrant mp.*

67. Homomorphisme réciproque d'une application propre; rétracte; homotopie. — Soit une application propre θ d'un espace X' dans un espace X; soit un anneau différentiel-filtré $\mathcal{A}$; le n° **47** définit, vu le n° **62**, un homomorphisme $\overset{-1}{0}$ de $\mathcal{H}_*(X' \bigcirc \mathcal{A})$ dans $\mathcal{H}_*(X'' \bigcirc \mathcal{A})$; *cet homomorphisme* ne diminue pas la filtration et conserve le degré; nous allons prouver qu'*il ne dépend que de la classe d'homotopie de* 0 (*théorème* 67.1).

LEMME 67.1. — *Soient deux anneaux $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{A}$ et un homomorphisme λ_t de $\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{A}$ possédant les propriétés suivantes :*

a. λ_t dépend du paramètre t qui décrit un espace connexe T;

b. Si $s \in$ T, si $a' \in \mathcal{A}'$ et si $\lambda_s a' = 0$, il existe un voisinage V *de s tel que $\lambda_t a' = 0$ quand $t \in$* V;

c. Il existe un homomorphisne λ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}'$ tel que $\lambda_t \lambda a = a$, quels que soient $t \in$ T *et $a \in \mathcal{A}$.*

Je dis que λ_t est indépendant de t.

Preuve. — Soient $a' \in \mathcal{A}'$, $a \in \mathcal{A}$ et $s \in$ T tels que $\lambda_s a' = a$; on a $\lambda_s(a' - \lambda a) = 0$; donc $\lambda_t(a' - \lambda a) = 0$ quand t appartient à un voisinage convenable V de s; c'est-à-dire $\lambda_t a' = a$ pour $t \in$ V. Étant donnés $a' \in \mathcal{A}'$ et $a \in \mathcal{A}$ l'ensemble des points t de T tels que $\lambda_t a' = a$ est donc ouvert. Si $\lambda_t a'$ n'est pas indépendant de t, T est donc la réunion de plusieurs ensembles ouverts non vides, n'ayant deux à deux aucun point commun; T n'est donc pas connexe.

LEMME 67.2. — *Soient deux espaces* X′ *et* T (T *compact, connexe*) *et leur produit* $X = X' \times T$; $\zeta_t(x') = x' \times t$ *est, pour chaque valeur de t, une application propre de* X′ *dans* X. *Soit un anneau différentiel-filtré $\mathcal{A}$. Je dis que l'homomorphisme $\overset{-1}{\zeta_t}$ de $\mathcal{H}_*(X' \bigcirc \mathcal{A})$ dans $\mathcal{H}_*(X'' \bigcirc \mathcal{A})$ est indépendant de t.*

Preuve. — Soit $\varpi(x', t) = x'$ la projection de X sur X′; $\varpi\zeta_t(x') = x'$; donc, d'après le théorème 47.1*a*, l'homomorphisme $\overset{-1}{\zeta_t}\overset{-1}{\varpi}$ de $\mathcal{H}(X'' \bigcirc \mathcal{A})$ en lui-même est l'identité. Pour prouver que l'homomorphisme $\overset{-1}{\zeta_t}$ de $\mathcal{H}_*(X' \bigcirc \mathcal{A})$ dans $\mathcal{H}_*(X'' \bigcirc \mathcal{A})$ est indépendant de t il suffit donc, vu le lemme 67.1, de prouver la proposition suivante :

Si $s \in \mathrm{T}$, si $h \in \mathcal{H}_*(\mathrm{X}' \bigcirc \mathcal{C})$ et si $\overset{-1}{\zeta}_s h = 0$, alors s possède un voisinage V tel que $\overset{-1}{\zeta}_t h = 0$ pour $t \in \mathrm{V}$.

Soit X_t l'ensemble des points $x' \times t$, x' décrivant X', t étant fixe; la condition $\overset{-1}{\zeta}_t h = 0$ équivaut à $\mathrm{X}_t h = 0$ d'après le théorème 47.1*b*. La proposition à prouver peut donc s'énoncer comme suit :

Si $s \in \mathrm{T}$, si $h \in \mathcal{H}_*(\mathrm{X}' \bigcirc \mathcal{C})$ et si $\mathrm{X}_s h = 0$, alors s possède un voisinage V tel que $\mathrm{X}_t h = 0$ pour $t \in \mathrm{V}$. Puisque $\mathcal{F}(\mathrm{X}' \bigcirc \mathcal{C})$ est continu, il existe un voisinage ouvert W de $\mathrm{X}_s \cup \infty$ tel que $\overline{\mathrm{W}} h = 0$; le complémentaire de W est compact et a sur T une projection compacte (proposition 22.1) ne contenant pas s; V sera le complémentaire de cette projection.

Définition 67.1. — *Soient $\theta_1(x')$ et $\theta_2(x')$ deux applications propres d'un espace X' dans un espace X; on dit que θ_1 et θ_2 sont homotopes dans X lorsqu'il existe un espace compact et connexe T, une application propre $\theta(x', t)$ du produit $\mathrm{X}' \times \mathrm{T}$ dans X et deux points t_1 et t_2 de T tels que $\theta_1(x') = \theta(x', t_1)$ et $\theta_2(x') = \theta(x', t_2)$.*

Théorème 67.1. — *Si $\theta_1(x')$ et $\theta_2(x')$ sont deux applications propres de X' dans X et si elles sont homotopes entre elles dans X, alors les homomorphismes $\overset{-1}{\theta}_1$ et $\overset{-1}{\theta}_2$ de $\mathcal{H}_*(\mathrm{X}' \bigcirc \mathcal{C})$ dans $\mathcal{H}_*(\mathrm{X}'' \bigcirc \mathcal{C})$ coïncident.*

Preuve. — Soit $\zeta_t(x') = x' \times t$; on a

$$\theta_1(x') = \theta\zeta_{t_1}(x'), \qquad \theta_2(x') = \theta\zeta_{t_2}(x');$$

les homomorphismes réciproques des applications θ_1 et θ_2 sont donc

$$\overset{-1}{\theta}_1 = \overset{-1}{\zeta}_{t_1}\overset{-1}{\theta}, \qquad \overset{-1}{\theta}_2 = \overset{-1}{\zeta}_{t_2}\overset{-1}{\theta},$$

or l'homomorphisme ζ_t est indépendant de t d'après le lemme 67.2.

Définition 67.2. — *On dit qu'une partie F d'un espace X est un rétracte de X lorsqu'il existe une application propre $\theta(x)$ de X sur F telle que $\theta(x) = x$ quand $x \in \mathrm{F}$; $\theta(x)$ est nommée rétraction de X sur* F. D'après le n° **22** F *est fermé;* F *est compact si et seulement si* X *est compact.*

Définition 67.3. — *On dit qu'un espace X est homotope en lui-même* *à l'une de ses parties* F *lorsque* F *est un rétracte de* X *et que la rétraction de* X *sur* F *est homotope dans* X *à l'application identique de* X *sur lui-même.*

THÉORÈME 67.2. — *Soient un anneau différentiel-filtré* $\mathcal{A}$, *un espace* X *et un rétracte* F *de* X*; soit* θ *la rétraction de* X *sur* F.

a. $F\overset{-1}{\theta}$ *est l'isomorphisme identique de* $\mathcal{H}_*(F' \bigcirc \mathcal{A})$*;*

b. $\mathcal{H}_*(X' \bigcirc \mathcal{A})$ *est somme directe du sous-anneau* $\overset{-1}{\theta}\mathcal{H}_*(F' \bigcirc \mathcal{A})$, *qui est isomorphe à* $\mathcal{H}_*(F' \bigcirc \mathcal{A})$, *et de l'idéal constitué par les éléments de* $\mathcal{H}_*(X' \bigcirc \mathcal{A})$ *dont la section par* F *est nulle.*

Preuve de a. — Soit φ l'application canonique de F dans X ; $\overset{-1}{\varphi}\ \overset{-1}{\theta}$ est l'identité et est identique à $F\overset{-1}{\theta}$ d'après le théorème 47.1.

Preuve de b. — Les composantes de $h \in \mathcal{H}(X' \bigcirc \mathcal{A})$ sont

$$\overset{-1}{\theta}Fh \quad \text{et} \quad h - \overset{-1}{\theta}Fh.$$

THÉORÈME 67.3. — *Soient un anneau différentiel-filtré* $\mathcal{A}$ *et un espace* X, *homotope en lui-même à l'une de ses parties* F. *La section par* F *est un isomorphisme, respectant la filtration et le degré, de* $\mathcal{H}_*(X' \bigcirc \mathcal{A})$ *sur* $\mathcal{H}_*(F' \bigcirc \mathcal{A})$.

Preuve. — Soit θ la rétraction de X sur F ; l'homomorphisme $\overset{-1}{\theta}F$ est l'isomorphisme identique, puisque $\varphi\theta$ est homotope à l'identité ; $F\overset{-1}{\theta}$ est également l'isomorphisme identique, d'après le théorème 67.2 *a*.

L'isomorphisme réciproque de la section par F est $\overset{-1}{\theta}$, qui est identique à II (n° **48**) si F est un point ; donc, vu la définition 48.2.

COROLLAIRE 67.1. — *Si l'espace* X (*nécessairement compact*) *est homotope en lui-même à un point, alors* $\mathcal{H}_*(X' \bigcirc \mathcal{A}) = \mathcal{H}_*\mathcal{A}$.

68. HOMOMORPHISME RÉCIPROQUE D'UNE REPRÉSENTATION PROPRE ; RÉTRACTE ; HOMOTOPIE. — Soient une application continue ξ d'un espace X dans un espace Y et une application continue ξ' d'un espace X' dans un espace Y' ; soit une représentation θ de ξ' dans ξ ; supposons θ *propre*, c'est-à-dire définie par une application propre de X' dans X ; le n° **54**, où l'on choisit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ identiques à un anneau différentiel-filtré $\mathcal{A}$

(n° 55), définit un homomorphisme $\overset{-1}{\theta}$ de $\mathcal{H}_*(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{A})$ dans $\mathcal{H}_*(\overset{-1}{\xi'} Y'^m \bigcirc X'' \bigcirc \mathcal{A})$; *cet homomorphisme* ne diminue pas la filtration et conserve le degré; nous allons prouver qu'*il ne change pas quand on modifie* ξ *continûment.*

Lemme 68.1. — *Soient une application* ξ' *de l'espace* X' *dans l'espace* Y'*; soit un espace* T *connexe; posons*

$$X' \times T = X, \qquad Y' \times T = Y, \qquad \xi'(x') \times t = \xi(x' \times t);$$

$\zeta_t(x') = x' \times t$ *est, pour chaque valeur de* t*, une représentation propre de* ξ' *dans* ξ. *Je dis que l'homomorphisme* $\overset{-1}{\zeta_t}$ *de* $\mathcal{H}_*(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{A})$ *dans* $\mathcal{H}_*(\overset{-1}{\xi'} Y'^m \bigcirc X'' \bigcirc \mathcal{A})$ *est indépendant de* t.

Preuve. — Analogue à celle du lemme 67.2 : la projection $\varpi(x', t) = x'$ de X sur X' est une représentation de ξ dans ξ'; $\varpi\zeta_t$ est la représentation identique de ξ' sur elle-même; donc, vu le théorème 54.1*a*, l'homomorphisme $\overset{-1}{\zeta_t}\,\overset{-1}{\varpi}$ est l'identité; pour prouver que l'homomorphisme $\overset{-1}{\zeta_t}$ est indépendant de t, il suffit donc, vu le lemme 67.1, de prouver la proposition suivante.

Si $s \in T$, si $h \in \mathcal{H}_*(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{A})$ et si $\overset{-1}{\zeta_s} h = 0$, alors s possède un voisinage V tel que $\overset{-1}{\zeta_t} h = 0$ pour $t \in V$. Or $\overset{-1}{\zeta_t} h$ est la section de h par $X' \times t$ d'après le théorème 54.1*b*; la proposition énoncée résulte donc de la continuité du faisceau $\mathcal{F}_*(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{A})$.

Définition 68.1. — *Soient une application continue* ξ *d'un espace* X *dans un espace* Y *et une application continue* ξ' *d'un espace* X' *dans un espace* Y'*; soient* $\theta_1(x')$ *et* $\theta_2(x')$ *deux représentations propres de* ξ' *dans* ξ*; nous dirons que* $\theta_1(x')$ *et* $\theta_2(x')$ *sont homotopes dans* ξ *lorsqu'il existe un espace compact et connexe* T, *une représentation propre* $\theta(x', t)$ *de l'application* $\xi'(x') \times t$ *dans l'application* $\xi(x)$ *et deux points* t_1 *et* t_2 *de* T *tels que* $\theta_1(x') = \theta(x', t_1)$, $\theta_2(x') = \theta(x', t_2)$.

Théorème 68.1. — *Si* $\theta_1(x')$ *et* $\theta_2(x')$ *sont deux applications propres de l'application* ξ' *dans l'application* ξ *et si elles sont homotopes entre* *elles dans* ξ, *alors les homomorphismes* $\overset{-1}{\theta}_1$ *et* $\overset{-1}{\theta}_2$ *de* $\mathcal{H}_*(\overset{-1}{\xi}\,\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{A})$ *dans* $\mathcal{H}_*(\overset{-1}{\xi'}\,\mathrm{Y}'^m \bigcirc \mathrm{X}''\bigcirc \mathcal{A})$ *coïncident.*

Preuve. — Identique à celle du théorème 67.1 : $\overset{-1}{\theta}_1 = \overset{-1}{\zeta}_{t_1}\overset{-1}{\theta}$, $\overset{-1}{\theta}_2 = \overset{-1}{\zeta}_{t_2}\overset{-1}{\theta}$; $\overset{-1}{\zeta}_t$ est indépendant de t d'après le lemme 68.1.

DÉFINITION 68.2. — *Soit* ξ *une application continue d'un espace* X *dans un espace* Y*; soit* F *une partie de* X*; nous dirons que la restriction* ξ_{F} *de* ξ *à* F *est un rétracte de* ξ *quand il existe une rétraction de* X *sur* F *qui représente* ξ *sur* ξ_{F}. On vérifie aisément que ξ_{F} *est propre si et seulement si* ξ *est propre.*

DÉFINITION 68.3. — *Soit* ξ *une application continue d'un espace* X *dans un espace* Y*; soit* F *une partie de* X*; nous dirons que* ξ *est homotope en elle-même à sa restriction* ξ_{F} *à* F *quand* ξ_{F} *est un rétracte de* ξ *et que la rétraction de* ξ *sur* ξ_{F} *est homotope dans* ξ *à la représentation identique de* ξ *sur elle-même.*

On démontre, comme au nº **67**, les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 68.2. — *Supposons que la restriction* ξ_{F} *de* ξ *à* F *soit un rétracte de* ξ *et soit* θ *la rétraction de* ξ *sur* ξ_{F}*;*

a. $\mathrm{F}\overset{-1}{\theta}$ *est l'isomorphisme identique de* $\mathcal{H}_*(\overset{-1}{\xi}_{\mathrm{F}}\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{F}^l \bigcirc \mathcal{A})$.

b. $\mathcal{H}_*(\overset{-1}{\xi}\,\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{A})$ *est somme directe du sous-anneau* $\overset{-1}{\theta}\,\mathcal{H}_*(\overset{-1}{\xi}_{\mathrm{F}}\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{F}^l \bigcirc \mathcal{A})$, *qui est isomorphe à* $\mathcal{H}_*(\overset{-1}{\xi}_{\mathrm{F}}\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{F}^l \bigcirc \mathcal{A})$, *et de l'idéal constitué par les éléments de* $\mathcal{H}_*(\overset{-1}{\xi}\,\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{A})$ *dont la section par* F *est nulle.*

THÉORÈME 68.3. — *Supposons l'application* ξ *homotope en elle-même à sa restriction* ξ_{F} *à* F. *La section par* F *est un isomorphisme, conservant filtration et degré, de* $\mathcal{H}_*(\overset{-1}{\xi}\,\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{A})$ *sur* $\mathcal{H}_*(\overset{-1}{\xi}_{\mathrm{F}}\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{F}^l \bigcirc \mathcal{A})$.

Le nº **76** utilisera le cas particulier suivant :

COROLLAIRE 68.1. — *Si* ξ *est homotope en elle-même à une application constante,*

$$\mathcal{H}_*(\overset{-1}{\xi}\,\mathrm{Y}^m \bigcirc \mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{A}) = \mathcal{H}_*(\mathrm{X}^l \bigcirc \mathcal{A}).$$

Preuve. — Cette application constante est la restriction ξ_F de ξ à une partie fermée F de X; d'après le théorème 50.2*a*

$$\mathcal{H}_*(\overset{-1}{\xi}_F Y^m \bigcirc F' \bigcirc \mathcal{A}) = \mathcal{H}_*(F' \bigcirc \mathcal{A});$$

or la section par F est un isomorphisme de $\mathcal{H}_*(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{A})$ sur $\mathcal{H}_*(\overset{-1}{\xi}_F Y^m \bigcirc F' \bigcirc \mathcal{A})$ (théorème 68.3) et de $\mathcal{H}_*(X' \bigcirc \mathcal{A})$ sur $\mathcal{H}_*(F' \bigcirc \mathcal{A})$ (théorème 67.3).

II. — Faisceau localement isomorphe à un anneau.

69. Définition. — Empruntons les conventions suivantes à la théorie des structures uniformes ([3], Chap. II) : $X \times X$ désigne le produit de l'espace X par lui-même; la diagonale de $X \times X$ est l'ensemble des points $x \times x$ ($x \in X$); V étant un voisinage de la diagonale de $X \times X$, on dit qu'une partie X_1 de X est *petite d'ordre* V quand $X_1 \times X_1 \subset V$; $\overset{2}{V}$ est l'ensemble des couples $x \times x_1$ de points de X tels qu'il existe $x_2 \in X$ vérifiant $x \times x_2 \in V$, $x_2 \times x_1 \in V$.

Continuons à supposer X *localement compact*; supposons en outre X *globalement et localement connexe*. Précisons que X n'est pas supposé muni d'une structure uniforme. Soit $\mathcal{B}$ un faisceau différentiel-gradué-filtré-propre défini sur X; $\mathcal{B}$ sera dit *localement isomorphe à un anneau* différentiel-gradué-filtré quand il existera un voisinage ouvert V de la diagonale de $X \times X$ tel que la propriété suivante ait lieu : si K_1 et K sont deux parties compactes de X, si K est connexe et petit d'ordre V et si $\emptyset \neq K_1 \subset K$, alors la section de $\mathcal{B}(K)$ par K_1 est un isomorphisme de $\mathcal{B}(K)$ sur $\mathcal{B}(K_1)$; cet isomorphisme respecte la différentielle, le degré et la filtration.

Si K est compact, n'est pas vide et appartient à une partie de X compacte, connexe et petite d'ordre V, il existe donc un isomorphisme *non canonique* de $\mathcal{B}(K)$ sur un anneau $\mathcal{A}$ indépendant de K : nous dirons que $\mathcal{B}$ *est isomorphe à* $\mathcal{A}$ *sur chaque partie de* X *compacte, connexe et petite d'ordre* V, ou, de façon moins précise, que $\mathcal{B}$ *est localement isomorphe à* $\mathcal{A}$ *sur* X.

Il est aisé de prouver la proposition suivante :

Théorème 69.1. — *Soit* ξ *une application propre de* X *dans un second* *espace* Y; *supposons que, quel que soit* $y \in Y$, $\overset{-1}{\xi}(y)$ *appartienne à une partie de* X *compacte, connexe et petite d'ordre* V; *soit un faisceau* $\mathcal{B}$ *isomorphe à l'anneau* $\mathcal{A}$ *sur chaque partie de* X *compacte, connexe et petite d'ordre* $\overset{2}{V}$ $\Big[$*ou seulement d'ordre* V *si* $\overset{-1}{\xi}(y)$ *est toujours connexe*$\Big]$. *Alors, sur le sous-espace fermé* $F = \xi(X)$, $\xi\mathcal{B}$ *est localement* (1) *isomorphe à* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{H}_*(Y' \bigcirc \xi\mathcal{B}) = \mathcal{H}_*(F' \bigcirc \xi\mathcal{B})$.

Afin de classer les faisceaux localement isomorphes à $\mathcal{A}$ sur X nous allons définir une topologie sur le groupe fondamental de X.

70. Rappel de la définition du groupe fondamental $\mathfrak{X}(X, x)$ de l'espace X. — Une application continue $\tau(t)$ d'un segment rectiligne orienté T dans l'espace X constitue un *arc* l de X; on convient que deux telles applications $\tau(t)$ et $\tau'(t')$ de T et T' dans X constituent le même arc l quand, il existe une application bicontinue $\theta(t')$ de T' sur T conservant l'orientation et telle que $\tau'(t') = \tau\theta(t')$. On nomme origine et extrémité de l les images de l'origine et de l'extrémité de T. Nous noterons l^- l'arc qui se déduit de l en changeant l'orientation de T. On définit le produit $l'l$ de deux arcs l' et l tels que l'extrémité de l soit l'origine de l' : si l et l' sont définis par l'application $\tau(t)$ des segments $0 \leqq t \leqq 1$ et $1 \leqq t \leqq 2$, $l'l$ est défini par l'application $\tau(t)$ du segment $0 \leqq t \leqq 2$. Si les extrémités de l et l' sont les origines respectives de l' et l'', on a

$$l''(l'l) = (l''l')l = l''l'l; \qquad (l'l)^- = l^-l'^-.$$

Deux arcs l et l' de même origine et de même extrémité sont dits *homotopes* quand on peut trouver une application continue dans X d'un cercle $t^2 + u^2 \leqq 1$ telle que ses restrictions aux demi-circonférences $t^2 + u^2 = 1$, $u \geqq 0$ et $u \leqq 0$ définissent les arcs l et l'. Par exemple $l^- l$ est homotope à l'arc confondu avec l'origine de l.

L'homotopie est une relation d'équivalence (2); on nomme *classes*

(1) Soit V' le voisinage de la diagonale de $Y \times Y$ que constituent les points $y \times y_1$ tels que $\overset{-1}{\xi}(y) \times \overset{-1}{\xi}(y_1)$ appartienne à une partie de X compacte, connexe et petite d'ordre V; on constate que $\xi\mathcal{B}$ est isomorphe à $\mathcal{A}$ sur chaque partie de Y compacte, connexe et petite d'ordre V'.

(2) Bourbaki, *Éléments mathématiques*, Livre I, § 5.

d'arcs les classes qu'elle définit; les arcs d'une même classe ont même origine et même extrémité, nommées origine et extrémité de la classe. Si les arcs l constituent la classe L, les arcs l^- constituent une classe notée L^-. Soient deux classes L et L', l'extrémité de L étant l'origine de L'; les arcs $l'l$, où $l \in L$ et $l' \in L'$, appartiennent à une même classe, qu'on nomme produit des classes L et L' et qu'on note L'L; on a, quand les premiers membres sont définis

$$(70.1) \qquad L''(L'L) = (L''L')L = L''L'L; \qquad (L'L)^- = L^-L'^-;$$

(70.2) L^-L est la classe de l'arc confondu avec l'origine de L.

Les classes ayant pour origine et extrémité un point donné x de X constituent donc un groupe; on le nomme *groupe fondamental* ou *groupe de Poincaré* de X relatif à x; nous le noterons $\mathfrak{L}(X, x)$; la classe de l'arc confondu avec x est l'unité de ce groupe; l'inverse de l'élément L de $\mathfrak{L}(X, x)$ est L^-.

DÉFINITION 70.1. — *L'espace* X *est dit connexe par arcs quand, étant donnés deux de ses points x et y, il existe un arc d'origine x et d'extrémité y.* Il est évident que X est alors connexe.

Supposons X connexe par arcs; soit L une classe d'arcs d'origine x, d'extrémité y; soit L_x (ou L_y) une classe d'arcs d'origine et d'extrémité x (ou y); l'application

$$(70.3) \qquad L_y = L L_x L^-$$

est *un isomorphisme, non canonique, de* $\mathfrak{L}(X, x)$ *sur* $\mathfrak{L}(X, y)$.

71. LA TOPOLOGIE DU GROUPE FONDAMENTAL [1]. — Soit V un *voisinage ouvert de la diagonale de* $X \times X$; nous dirons que deux arcs l et l' sont V-*voisins* quand ils ont même origine, même extrémité et qu'on peut les décomposer en produits

$$l = l_\omega \ldots l_2 l_1, \qquad l' = l'_\omega \ldots l'_2 l'_1,$$

tels que la réunion des points de l_μ et l'_μ appartienne à une partie de X

---

[1] Cette topologie est la topologie discrète quand X est un polyèdre compact ou une multiplicité compacte.

compacte, connexe et petite d'ordre V ($1 \leqq \mu \leqq \omega$); nous dirons que deux arcs l et l' sont V-*homotopes* quand on peut trouver une suite d'arcs $l_1, l_2, \ldots, l_\omega$ tels que

$$(71.1)\quad l_1 = l, \qquad l_\omega = l', \qquad l_\mu \text{ et } l_{\mu+1} \text{ sont V-voisins} \qquad (1 \leqq \mu < \omega);$$

deux arcs V-homotopes ont même origine et même extrémité.

La V-homotopie est une relation d'équivalence; nous nommerons V-*classes d'arcs* les classes qu'elle définit; une V-classe d'arcs L a une extrémité et une origine, qui sont des points; quand l'arc l décrit la V-classe L, l^- décrit une V-classe qui sera notée L^-. Soient deux V-classes L et L′, l'extrémité de L étant l'origine de L′; leur produit L′L est la V-classe qui contient $l'l$ quels que soient $l \in L$, $l' \in L'$; les V-classes possèdent les propriétés (70.1) et (70.2).

Les V-classes ayant pour origine et pour extrémité un point donné x de X constituent un groupe, que nous noterons $\mathfrak{T}(X, V, x)$; quand X est connexe par arcs la formule (70.3), où l'on choisit pour L, L_x et L_y des V-classes, définit un isomorphisme de $\mathfrak{T}(X, V, x)$ sur $\mathfrak{T}(X, V, y)$. Toute classe d'arc fait partie d'une V-classe unique; d'où *un homomorphisme canonique de* $\mathfrak{T}(X, x)$ *sur* $\mathfrak{T}(X, V, x)$; (70.3) transforme cet homomorphisme canonique en celui de $\mathfrak{T}(X, y)$ sur $\mathfrak{T}(X, V, y)$.

Nommons *entourage* W *associé à* V l'ensemble des couples de classes d'arcs appartenant à une même V-classe;

$$(71.2)\quad W = \overset{2}{W} = \overset{-1}{W}; \quad W \subset W' \text{ si } V \subset V' \quad (W \text{ et } W' \text{ sont associés à } V \text{ et } V').$$

L'espace dont les points sont les classes d'arcs de X et en particulier $\mathfrak{T}(X, x)$ seront munis de *la structure uniforme* ([3], Chap. II) dont un système fondamental d'entourages est constitué par les entourages W associés à tous les voisinages ouverts V de la diagonale de $X \times X$. L'isomorphisme (70.3) transforme deux classes d'arcs voisines d'ordre W en deux classes voisines d'ordre W; en particulier *le voisinage d'ordre* W *de l'unité de* $\mathfrak{T}(X, x)$ *est un sous-groupe invariant de* $\mathfrak{T}(X, x)$; $\mathfrak{T}(X, V, x)$ *est le quotient de* $\mathfrak{T}(X, x)$ *par ce sous-groupe.*

Remarque 71.1. — La topologie de $\mathfrak{T}(X, x)$ n'est pas nécessairement séparée; mais l'adhérence de l'unité de $\mathfrak{T}(X, x)$ est identique à la composante connexe de cette unité [1] et est un sous-groupe invariant; le quotient de $\mathfrak{L}(X, x)$ par ce sous-groupe est un espace uniforme séparé; c'est un groupe topologique totalement discontinu, limite projective [2] des groupes $\mathfrak{L}(X, V, x)$.

72. Seconde définition de $\mathfrak{L}(X, V, x)$, quand X est localement connexe par arcs. Définition 72.1. — *L'espace* X *est dit localement connexe par arcs quand la réunion des arcs qui ont pour origine* $x \in X$ *et qui appartiennent à un voisinage donné de* x *est toujours un voisinage de* x; X est alors localement connexe. Si X est connexe et localement connexe par arcs, X est connexe par arcs vu le lemme 72.1; X sera dit *globalement et localement connexe par arcs.*

Lemme 72.1. — *Soit* X *un espace localement connexe par arcs; soit* K *une partie connexe de* X; *soient* x *et* y *deux points de* K *soit* U *un voisinage de* K. *Il existe dans* U *un arc d'origine* x *et d'extrémité* y.

Preuve. — L'existence dans U d'un arc d'origine x et d'extrémité y est une relation d'équivalence qui définit une partition de K en parties ouvertes; puisque K est connexe, cette partition se compose d'une seule partie, identique à K.

Définition 72.2. — Soit V un voisinage ouvert de la diagonale de $X \times X$; un V-*chaînon* l sera constitué par une partie $S(l)$ de X, compacte, connexe, petite d'ordre V et par deux parties compactes, non vides de $S(l)$, nommées l'une origine, l'autre extrémité de l. Le chaînon qui se déduit de l en permutant l'origine et l'extrémité sera noté l^-. Un produit $l_\omega \ldots l_2 l_1$ de V-chaînons sera une suite de V-chaînons l_μ telle que l'extrémité de l_μ soit l'origine de $l_{\mu+1}$ $(1 \leq \mu < \omega)$; ce produit sera nommé V-*chaînage*; son origine sera celle de l_1 et son extrémité celle de l_ω; on pose

$$S(l_\omega \ldots l_2 l_1) = S(l_\omega) \cup \ldots S(l_2) \cup S(l_1); \qquad (l_\omega \ldots l_2 l_1)^- = l_1^- l_2^- \ldots l_\omega^-;$$

---

(1) Vu [3], Chap. II, § 4, proposition 3, car d'après (71.2) toute W-chaîne est petite d'ordre W.

(2) Au sens de A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques* (Hermann, 1940).

le produit de deux V-chaînages l et l' tels que l'extrémité de l soit l'origine de l' est le V-chaînage $l'l$ que constitue la suite des V-chaînons formant l et l'. Deux V-chaînages l et l' sont dits V-*voisins* quand ils ont même origine, même extrémité et qu'on peut les décomposer en produits de V-chaînages

$$l = l_\omega \ldots l_2 l_1, \qquad l' = l'_\omega \ldots l'_2 l'_1,$$

tels que $S(l_\mu) \cup S(l'_\mu)$ appartienne à une partie de X compacte, connexe et petite d'ordre V ($1 \leqq \mu \leqq \omega$); deux V-chaînages l et l' sont dits V-*homotopes* quand on peut trouver une suite de V-chaînages l_1, l_2, ..., l_ω vérifiant (71.1).

La V-homotopie des V-chaînages est une relation d'équivalence; nous nommerons V-classes de V-chaînage les classes qu'elle définit; une V-classe de V-chaînage L a une origine et une extrémité, qui sont des parties compactes de X appartenant chacune à une partie de X compacte, connexe, petite d'ordre V. On définit de façon évidente L^- et $L'L$, quand l'extrémité de L est l'origine de L'.

Proposition 72.1. — *Si* X *est localement connexe par arcs,* $\mathfrak{T}(X, V, x)$ *est canoniquement isomorphe au groupe que constituent les* V-*classes de* V-*chaînages ayant* x *pour origine et pour extrémité.*

Preuve. — Tout arc l peut être décomposée en un produit d'arcs petits d'ordre V; ce produit constitue un V-chaînage; les V-chaînages qu'on déduit ainsi d'un même arc ou de deux arcs V-homotopes sont évidemment V-homotopes. Un homomorphisme canonique de $\mathfrak{T}(X, V, x)$ dans le groupe que constituent les V-classes de V-chaînages, ayant x pour origine et pour extrémité, se trouve ainsi défini. Pour prouver que c'est un isomorphisme de $\mathfrak{T}(X, V, x)$ sur ce groupe il suffit évidemment de prouver ceci :

a. Toute V-classe de V-chaînages, ayant pour origine et pour extrémité des points, contient un produit d'arcs petits d'ordre V.

b. Si deux produits d'arcs petits d'ordre V appartiennent à une même V-classe de V-chaînages, ils appartiennent à une même V-classe d'arcs.

Preuve de a. — Soit un V-chaînage l ayant pour origine et pour extrémité des points; soit L sa V-classe; on ne modifie pas L en remplaçant l'origine et l'extrémité des V-chaînons de l par un de leurs points; on ne modifie pas L en remplaçant, à l'aide du lemme 72.1, chaque V-chaînon l_μ de l par un arc l'_μ, de même origine et de même extrémité, appartenant à un voisinage de (Sl_μ) compact, connexe et petit d'ordre V. Un tel voisinage de $S(l_\mu)$ existe : les voisinages compacts et connexes de tout point de X et par suite ceux de toute partie compacte et connexe de X constituent un système fondamental de voisinages.

Preuve de b. — On constate que deux produits l et l' d'arcs petits d'ordre V sont dans une même V-classe de V-chaînages au moyen d'un nombre fini de V-chaînons, dont certains couples appartiennent à des parties de X compactes, connexes et petites d'ordre V. On peut remplacer par des points les origines et les extrémités de ces V-chaînons; le lemme 72.1 permet alors de remplacer successivement chaque V-chaînon par un arc de même origine et de même extrémité sans altérer la propriété qu'ont ces couples de V-chaînons d'appartenir à de telles parties de X; il devient ainsi évident que l et l' sont dans une même V-classe d'arcs.

Remarque 72.1. — Au lieu de supposer X localement connexe *par arcs* on pourrait procéder comme suit : nommer $\mathfrak{T}(X, V, x)$ le groupe des V-classes de V-chaînages d'origine et d'extrémité x; supposer X localement connexe, ce qui entraîne que, si $V \subset V'$, l'homomorphisme canonique évident de $\mathfrak{T}(X, V, x)$ dans $\mathfrak{T}(X, V', x)$ est un homomorphisme sur $\mathfrak{T}(X, V', x)$; nommer $\mathfrak{T}(X, x)$ la limite inverse des $\mathfrak{T}(X, V, x)$; *supposer* que cette limite inverse est une limite projective ; c'est-à-dire que l'homomorphisme de $\mathfrak{T}(X, x)$ dans $\mathfrak{T}(X, V, x)$ est un homomorphisme *sur* $\mathfrak{T}(X, V, x)$. Le théorème 73.1 subsisterait.

73. Classification, d'après N. E. Steenrod [14], des faisceaux d'un espace donné localement isomorphes a un anneau donné. — Théorème 73.1. *Soit* X *un espace globalement et localement connexe par arcs ; choisissons arbitrairement un point x de* X.

a. A tout faisceau $\mathcal{B}$, localement isomorphe sur X *à un anneau différentiel-gradué-filtré, est canoniquement associé un homomorphisme, loca-*

lement constant (¹), β *du groupe fondamental* $\mathfrak{T}(X, x)$ *dans le groupe des automorphismes de l'anneau* $\mathcal{B}(x)$.

b. Les anneaux d'homologie

(73.1) $$\mathcal{H}_*(X^l \bigcirc \mathcal{B}), \qquad \mathcal{H}_*(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X^l \bigcirc \mathcal{B})$$

ne dépendent que de X, ξ, l, m, $\mathcal{B}(x)$ *et* β.

c. Soit β *un homomorphisme localement constant du groupe* $\mathfrak{T}(X, x)$ *dans le groupe des automorphismes d'un anneau différentiel-gradué-filtré* $\mathcal{A}$; *il existe sur* X *un faisceau, localement isomorphe à* $\mathcal{A}$, *dont l'homomorphisme associé est* β.

Preuve de a. — Par hypothèse $\mathcal{B}$ est isomorphe à un anneau sur chaque partie de X compacte, connexe et petite d'ordre V. Soit un V-chaînon l d'origine K_0 et d'extrémité K_1; soit β_μ la section de $\mathcal{B}[S(l)]$ par $K_\mu(\mu=0,1)$: β_μ est un isomorphisme de $\mathcal{B}[S(l)]$ sur $\mathcal{B}(K_\mu)$; $\beta(l)=\beta_1\beta_0^{-1}$ est donc un isomorphisme de $\mathcal{B}(K_0)$ sur $\mathcal{B}(K_1)$. Soit un produit de V-chaînons : $l=l_\omega\ldots l_2 l_1$; définissons

$$\beta(l)=\beta(l_\omega)\ldots\beta(l_2)\beta(l_1):$$

si K_0 et K_1 sont l'origine et l'extrémité de l, $\beta(l)$ est un isomorphisme de $\mathcal{B}(K_0)$ sur $\mathcal{B}(K_1)$;

$$\beta(l^-)=[\beta(l)]^{-1}; \qquad \beta(l'l)=\beta(l')\beta(l) \qquad \text{si } l'l \text{ est défini.}$$

On vérifie aisément que $\beta(l)$ ne dépend que de la V-classe L du V-chaînage l; définissons $\beta(L)=\beta(l)$; nous avons

(73.2) $$\beta(L^-)=[\beta(L)]^{-1}; \qquad \beta(L'L)=\beta(L')\beta(L) \qquad \text{si } L'L \text{ est défini.}$$

Supposons que l soit un arc; d'après ce qui précède $\beta(l)$ ne dépend que de la classe d'arcs L de l; définissons $\beta(L)=\beta(l)$; les formules (73.2) s'appliquent encore aux classes d'arcs. La restriction de $\beta(L)$ à $\mathfrak{T}(X, x)$ est donc un homomorphisme β de $\mathfrak{T}(X, x)$ dans le groupe

(¹) C'est-à-dire constant au voisinage de chaque point de $\mathfrak{T}(X, x)$; pour que β soit localement constant, il suffit qu'il soit constant au voisinage de l'unité de $\mathfrak{T}(X, x)$; tout homomorphisme est localement constant quand $\mathfrak{T}(X, x)$ a une topologie discrète, donc quand X est un polyèdre compact ou une multiplicité compacte.

des automorphismes de $\mathcal{B}(x)$; β est constant sur chaque partie petite d'ordre W de $\mathfrak{L}(X, x)$; β est indépendant du choix de V, car β ne change évidemment pas quand on remplace V par $V' \supset V$.

Preuve de b. — Soit $\mathcal{B}'$ le sous-faisceau de $\mathcal{B}$ tel que : $\mathcal{B}'(F) = \mathcal{B}(F)$ si F est une partie compacte d'une partie de X compacte, connexe et petite d'ordre V; $\mathcal{B}'(F) = 0$ sinon. $\mathcal{B}'$ est propre, puisque X est localement connexe; donc, vu le corollaire 46.1 et le théorème 53.1*a*, on ne modifie pas les anneaux (73.1) en y remplaçant $\mathcal{B}$ par $\mathcal{B}'$. Soit K une partie compacte d'une partie de X compacte, connexe et petite d'ordre V; puisque X est connexe par arcs, K est l'extrémité d'un V-chaînage d'origine x; donc tout élément non nul de $\mathcal{B}'$ est du type :

$\beta(L)b$, où L est une V-classe de V-chaînages d'origine x et $b \in \mathcal{B}(x)$;

$\beta(L_1)b_1 = \beta(L_2)b_2$ équivaut à $\beta(L_2^{-}L_1)b_1 = b_2$, où $L_2^{-}L_1 \in \mathfrak{L}(X, V, x)$, b_1 et $b_2 \in \mathcal{B}(x)$.

La donnée de $\mathcal{B}(x)$ et de l'homomorphisme β de $\mathfrak{L}(X, V, x)$ dans le groupe des automorphismes de $\mathcal{B}(x)$ détermine donc $\mathcal{B}'$ et par suite les anneaux (73.1). Or la données de β sur $\mathfrak{L}(X, x)$ définit β sur $\mathfrak{L}(X, V, x)$.

Preuve de c. — Soit W un entourage de $\mathfrak{L}(X, x)$ tel que β soit constant sur le voisinage de l'unité d'ordre W; soit V un voisinage de la diagonale de $X \times X$ dont l'entourage associé soit $\subset W$; si $L \in \mathfrak{L}(X, x)$, $\beta(L)$ ne dépend que de la V-classe de L; vu la proposition 72.1, $\beta(L)$ est donc défini quand L est une V-classe de V-chaînages ayant x pour origine et pour extrémité. Soit K une partie compacte de X, appartenant à une partie de X compacte, connexe et petite d'ordre V; à chaque V-classe L de V-chaînages d'origine x et d'extrémité K associons un anneau $\mathcal{B}(K, L)$ isomorphe à $\mathcal{A}$; notons La l'élément de $\mathcal{B}(K, L)$ qui correspond à $a \in \mathcal{A}$; identifions ces divers anneaux en posant

$$L_1 a_1 = L_2 a_2 \quad \text{quand} \quad \beta(L_2^{-}L_1)\, a_1 = a_2;$$

[a_1 et $a_2 \in \mathcal{A}$; $L_2^{-}L_1$ est une V-classe d'origine et d'extrémité x; $\beta(L_2^{-}L_1)$ est un automorphisme de $\mathcal{A}$]; soit $\mathcal{B}(K)$ l'anneau isomorphe à $\mathcal{A}$ auquel se trouvent ainsi identifiés les anneaux $\mathcal{B}(K, L)$. Soit K' une partie compacte de K; soit L′ la V-classe de V-chaînages qui se déduit de L en remplaçant par K′ l'extrémité K des V-chaînages constituant L; en associant $L'a$ à La on définit un isomorphisme de $\mathcal{B}(K)$; sur $\mathcal{B}(K')$, car $L'^{-1}_2 L'_1 = L^{-1}_2 L_1$; nous nommerons cet isomorphisme section de $\mathcal{B}(K)$ par K′. Nous poserons $\mathcal{B}(F) = 0$ quand $F = \emptyset$ et quand F est une partie fermée de X n'appartenant à aucune partie de X compacte, connexe et petite d'ordre V. Le faisceau $\mathcal{B}$ ainsi construit a les propriétés énoncées.

Le théorème 73.1 a pour conséquence immédiate la proposition suivante :

Corollaire 73.1. — *Soit* X *un espace globalement et localement connexe par arcs; soit* $\mathcal{B}$ *un faisceau localement isomorphe sur* X *à un anneau différentiel-filtré* $\mathcal{A}$; *supposons que l'homomorphisme* β *associé à* $\mathcal{B}$ *applique* $\mathfrak{T}(X, x)$ *sur l'automorphisme identique de* $\mathcal{B}(x)$; *c'est par exemple le cas quand* $\mathfrak{T}(X, x)$ *se réduit à son unité, c'est-à-dire quand* X *est « simplement connexe ». On a*

$$\mathcal{H}_*(X' \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}_*(X' \bigcirc \mathcal{A}); \qquad \mathcal{H}_*\left(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{B}\right) = \mathcal{H}_*\left(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{A}\right).$$

III. — Détermination effective des anneaux d'homologie relatifs à un faisceau localement isomorphe ou identique à un anneau.

74. Anneaux d'homologie d'un espace. — Le théorème 49.2 et le corollaire 67.1 ont pour conséquence immédiate le théorème suivant :

Théorème 74.1. — *Soit un espace* X; *soit un voisinage ouvert* V *de la diagonale de* $X \times X$; *soit un faisceau* $\mathcal{B}$ *isomorphe à un anneau sur chaque partie de* X *compacte, connexe et petite d'ordre* V; *supposons que* X *possède un recouvrement compact et d'ordre fini* $\bigcup_\mu F_\mu = X$ *ayant les propriétés suivantes : chaque* F_μ *est petit d'ordre* V; *toute intersection non vide de* F_μ *est homotope en elle-même à un point. Soit* $\mathcal{K}^*$ *le complexe basique de Čech attaché à ce recouvrement, arbitrairement ordonné* (n° **39**); *on a, avec les notations des* n^os **53** *et* **54**,

$$\mathcal{H}_*(X' \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}_*(\mathcal{K}^{*\prime} \otimes \mathcal{B}).$$

Supposons en outre que X soit compact et que le groupe additif de l'anneau auquel $\mathcal{B}$ est localement isomorphe ait un nombre fini de générateurs; le recouvrement est fini, donc les anneaux $\mathcal{H}_*(X' \bigcirc \mathcal{B})$ peuvent être déterminés par un *nombre fini d'opérations* et leurs groupes additifs ont un *nombre fini de générateurs*. Mais ces opérations sont en général inextricables; on obtient pratiquement les anneaux d'homologie des espaces en utilisant le théorème 49.1, ceux des n^{os} **65** à **67** et les propriétés énoncées au n° **1**.*a, f, g*.

75. Cas où l'espace est un polyèdre. — Le théorème 74.1 est toujours applicable quand X est un polyèdre (¹) de dimension finie : X possède une subdivision simpliciale telle que l'étoile barycentrique F_μ de chaque sommet x_μ de cette subdivision soit petite d'ordre V; $F_0 \cap F_1 \cap \ldots \cap F_p$ *est un cône ayant pour sommet le centre de gravité de masses égales placées aux points* $x_0, x_1, \ldots, x_p$, *si ces points sont sommets d'un simplexe de la subdivision; est vide sinon*; les hypothèses du théorème 74.1 sont vérifiées, puisque tout cône compact est homotope en lui-même à son sommet.

Au lieu de dire que les éléments homogènes de $\mathcal{H}^*$ sont les fonctions $k(F_0, F_1, \ldots, F_p)$ qui sont définies quand $F_0 < F_1 < \ldots < F_p$, $F_0 \cap F_1 \cap \ldots \cap F_p \neq 0$ et qui sont nulles sauf pour un nombre fini d'arguments, on peut évidemment faire la convention suivante : les sommets x_μ de la subdivision simpliciale de X utilisée sont ordonnés; les éléments de $\mathcal{H}^*$ homogènes de degré p sont les fonctions $k(x_0, x_1, \ldots, x_p)$ qui sont définies quand $x_0 < x_1 < \ldots < x_p$ sont sommets d'un simplexe de la subdivision et qui sont nulles, sauf pour

---

(¹) Alexandroff et Hopf, *Topologie*, Springer, 1935, Chap. III. X est une partie d'un espace euclidien; le *simplexe* ayant pour *sommets* les $p+1$ points $x_0, x_1, \ldots, x_p$ de cet espace est la plus petite partie convexe de l'espace contenant ces points, qui ne doivent appartenir à aucun sous-espace linéaire de dimension $< p$; *une subdivision simpliciale* de X est un ensemble de simplexes tels que l'intersection de deux d'entre eux soit un simplexe de l'ensemble et que X soit la réunion des simplexes de l'ensemble; les sommets de ces simplexes sont nommés sommets de la subdivision. *L'étoile barycentrique* du sommet x_0 appartient aux simplexes ayant ce sommet; son intersection avec le simplexe de sommets $x_0, x_1, \ldots, x_p$ est l'ensemble des centres de gravité de masses $a_0, a_1, \ldots, a_p$ placées en ces sommets et telles que $0 \leq a_\mu \leq a_0 \neq 0$ $(\mu = 1, \ldots, p)$.

un nombre fini de systèmes d'arguments. Le théorème 74.1 identifie alors nos anneaux d'homologie à ceux de N. E. Steenrod [14]. Quand $\mathcal{B}$ est identique à un anneau $\mathcal{A}$, on peut identifier un élément homogène de $\mathcal{K}^\star \otimes \mathcal{A}$ à une fonction $k(x_0, \ldots, x_p)$ du type précédent, prenant ses valeurs non plus dans l'anneau des entiers, mais dans l'anneau $\mathcal{A}$: on retrouve la définition classique de Čech [1] de l'anneau d'homologie d'un polyèdre.

76. Anneaux d'homologie d'une application continue. — Théorème 76.1. — *Soient un anneau différentiel-filtré $\mathcal{A}$ et une application continue ξ d'un espace* X *dans un espace* Y. *Soit un recouvrement fermé et d'ordre fini* $\bigcup_\nu F_\nu = Y$ *de* Y, *tel que, quand* F *est une intersection non vide de* $\overset{-1}{\xi}(F_\nu)$, *la restriction de* ξ *à* F *soit homotope en elle-même à une appplication constante. Soit* $\mathcal{K}^\star$ *le complexe basique de Čech attaché à ce recouvrement, arbitrairement ordonné; on a*

$$\mathcal{H}_\star\left(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{A}\right) = \mathcal{H}_\star\left(\overset{-1}{\xi} \mathcal{K}^{\star m} \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{A}\right); \tag{76.1}$$

$$\mathcal{H}_{m+1}\left(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{A}\right) = \mathcal{H}\left[\mathcal{K}^{\star m} \otimes \xi \mathcal{F}_m (X' \bigcirc \mathcal{A})\right]. \tag{76.2}$$

Preuve de (76.1). — Théorème 57.1 et corollaire 68.1.

Preuve de (76.2). — Formules (49.1) et (76.1).

Supposons en outre que Y soit compact et que le groupe additif de l'anneau $\mathcal{H}_m(F' \bigcirc \mathcal{A})$ ait un nombre fini de générateurs quand F est une intersection de $\overset{-1}{\xi}(F_\nu)$; la formule (76.2) permet de déterminer $\mathcal{H}_{m+1}\left(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{A}\right)$ par *un nombre fini d'opérations;* les groupes additifs des anneaux $\mathcal{H}_r\left(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{A}\right)$ ont donc *un nombre fini de générateurs.* Plus généralement, on peut déterminer

$$\mathcal{H}_\star\left(\overset{-1}{\xi} Y^m \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{A}\right)$$

par un nombre fini d'opérations, que nous ne décrirons pas, quand ξ satisfait certaines conditions, qui sont vérifiées en particulier par les applications simpliciales des polyèdres finis.

77. Cas où l'application est simpliciale. — Théorème 77.1. — *Supposons que* ξ *soit une application simpliciale d'un polyèdre* X *dans un polyèdre* Y, *de dimension finie : la restriction de* ξ *à chaque simplexe d'une subdivision simpliciale donnée de* X *est une application affine de ce simplexe sur un simplexe d'une subdivision simpliciale donnée de* Y. *Alors les étoiles barycentriques* F_ν *des sommets* y_ν *de* Y *vérifient les hypothèses du théorème* 76.1. *L'emploi de ce théorème est facilité par la propriété que voici : Soient* $F_0, F_1, \ldots, F_p$, $p+1$ *de ces étoiles ayant une intersection non vide; cette intersection est un cône dont le sommet est le centre de gravité* z *de masses égales placées aux points* $y_0, y_1, \ldots, y_p$, *qui sont les sommets d'un simplexe de* Y; $\mathcal{H}_m(F' \bigcirc \mathfrak{A})$ *est alors le même pour*

$$F = \overset{-1}{\xi}(F_0 \cap F_1 \cap \ldots \cap F_p) \qquad \text{et} \qquad F = \overset{-1}{\xi}(z).$$

Preuve. — Soient $x_{\mu,\nu}$ les sommets de X que ξ applique sur le sommet y_ν de Y; ξ étant simpliciale, applique le centre de gravité x de masses $a_{\mu,\nu} \geqq 0$ placées aux sommets $x_{\mu,\nu}$ d'un simplexe de X sur le centre de gravité $\xi(x)$ des masses $a_\nu = \sum_\mu a_{\mu,\nu}$ placées aux sommets y_ν. Supposons $x \in \overset{-1}{\xi}(F_0 \cap F_1 \cap \ldots \cap F_p)$; on a

$$0 \leqq a_\nu \leqq a_0 = a_1 = \ldots = a_p \neq 0;$$

soit $\theta(x, t)$ le centre de gravité des masses $t a_{\mu,\nu}$, $a_{\mu,0}$, $a_{\mu,1}$, $\ldots$, $a_{\mu,p}$ ($\nu \neq 0, 1, \ldots, p$; $0 \leqq t \leqq 1$) placées aux points $x_{\mu,\nu}$, $x_{\mu,0}$, $x_{\mu,1}$, $\ldots$, $x_{\mu,p}$; soit $\tau(x, t)$ le centre de gravité des masses

$$0 \leqq t a_\nu \leqq a_0 = a_1 = \ldots = a_p \qquad (\nu \neq 0, 1, \ldots, p)$$

placées aux points y_ν, y_0, y_1, $\ldots$, y_p; on a

$$\xi\theta(x, t) = \tau[\xi(x), t] \in F_0 \cap F_1 \cap \ldots \cap F_p;$$

$\theta(x, 0)$ et $\theta(x, 1)$ sont donc deux représentations de la restriction de ξ à $\overset{-1}{\xi}(F_0 \cap F_1 \cap \ldots \cap F_p)$ homotopes entre elles dans cette restriction; $\theta(x, 1)$ est la représentation identique de cette restriction sur elle-même; $\theta(x, 0)$ est une rétraction de cette restriction sur la restriction de ξ à $\overset{-1}{\xi}(z)$; vu la définition 68.3, la restriction de ξ

à $\overset{-1}{\xi}(F_0 \cap F_1 \cap \ldots \cap F_p)$ est homotope en elle-même à sa restriction à $\overset{-1}{\xi}(z)$; donc les hypothèses du théorème 76.1 sont vérifiées et $\overset{-1}{\xi}(F_0 \cap F_1 \cap \ldots \cap F_p)$ est homotope en lui-même à $\overset{-1}{\xi}(z)$; on applique le théorème 67.3.

78. Exemple. — Supposons que $\mathfrak{A}$ soit l'anneau des entiers ($f = 0$, $\delta = 0$), que X soit la surface d'un tétraèdre de sommets x_0, x_1, x_2, x_3, que Y soit un segment rectiligne d'extrémités y_0 et y_1 et que ξ soit une application simpliciale telle que $\xi(x_0) = y_0$, $\xi(x_1) = \xi(x_2) = \xi(x_3) = y_1$; ξ est affine sur chaque face du tétraèdre. Les théorèmes 77.1 et 76.1 s'appliquent : $\mathcal{K}^\star$ a une base constituée par deux éléments k_0 et k_1 de degré 0 et un élément l de degré 1; $\delta k_0 = -l$, $\delta k_1 = l$; $S(l)$ est le milieu z de Y; $S(k_0)$ est le segment $y_0 z$; $S(k_1)$ est le segment $z y_1$; $k_0 + k_1$ est l'unité de $\mathcal{K}^\star$. Soit u l'unité de $\mathcal{H}X$; $\mathcal{H}\overset{-1}{\xi}(S(k_\mu))$ a pour base $[\overset{-1}{\xi}(S(k_\mu))]u$ ($\mu = 0, 1$); $\mathcal{H}\overset{-1}{\xi}(z)$ a pour base $\overset{-1}{\xi}(z)u$ et un élément v de degré 1. Donc $\mathcal{K}^\star \otimes \xi\mathcal{F}(X)$ a pour base

$$k_0 \otimes u, \quad k_1 \otimes u, \quad l \otimes u, \quad l \otimes v;$$
$$-\delta(k_0 \otimes u) = \delta(k_1 \otimes u) = l \otimes u; \qquad \delta(l \otimes u) = \delta(l \otimes v) = 0.$$

Donc $\mathcal{H}[\mathcal{K}^{\star 1} \otimes \xi\mathcal{F}(X^0)] = \mathcal{H}_2(\overset{-1}{\xi} Y^1 \bigcirc X^0)$ *a pour base une unité de degrés nuls et un élément de degré canonique* 2, *de degré filtrant* 1; *puisque* δ_r *est homogène de degré filtrant* $r > 1$,

$$\delta_r = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{G}\mathcal{H}(\overset{-1}{\xi} Y^1 \bigcirc X^0) = \mathcal{H}_2(\overset{-1}{\xi} Y^1 \bigcirc X^0) \qquad (\text{n}^\circ\ 60);$$

donc l'anneau gradué-filtré $\mathcal{H}(\overset{-1}{\xi} Y^1 \bigcirc X^0)$ *a une base, constituée par une unité de degré* 0 *et un élément de degré* 2; *ses éléments homogènes de degrés* 0 *et* 2 *ont pour filtrations respectives* 0 *et* 1.

IV. — Invariants topologiques des classes d'homotopie d'applications.

79. Exemple d'applications de X dans Y, homotopes dans Y et n'ayant pas les mêmes anneaux spectraux et filtrés d'homologie. — Soit X la surface d'un tétraèdre; soit Y l'une de ses hauteurs; soit ξ la projection orthogonale de X sur Y; d'après le n° **78** le degré filtrant et la filtration de $\mathcal{H}_*\left(\overset{-1}{\xi}\, Y^1 \bigcirc X^0\right)$ ne sont pas identiquement nuls. Or ξ est homotope dans Y à l'application de X sur un point de Y; d'après le théorème 50.2*a*, quand ξ est cette application

$$\mathcal{H}_*\left(\overset{-1}{\xi}\, Y^1 \bigcirc X^0\right) = \mathcal{H}_*(X^0)$$

a un degré filtrant et une filtration nuls.

80. Indications sommaires sur les invariants topologiques des classes d'homotopie d'applications. — Soient deux espaces X et Y; l'homotopie dans Y (définition 67.1) des applications propres de X dans Y constitue une relation d'équivalence de ces applications; les classes suivant cette relation sont nommées classes d'homotopie des applications de X dans Y; d'après le théorème 67.1, l'homomorphisme $\overset{-1}{\xi}$ de $\mathcal{H}(Y \bigcirc \mathcal{A})$ dans $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{A})$ est un invariant de la classe d'homotopie de ξ.

Soit $\mathcal{B}$ un faisceau localement isomorphe sur X à un anneau différentiel-filtré $\mathcal{A}$; nous venons de voir que les anneaux

$$\mathcal{H}_*\left(\overset{-1}{\xi}\, Y^m \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{B}\right)$$

ne sont pas des invariants de la classe d'homotopie de ξ; cependant, quand $\mathcal{B} = \mathcal{A}$, ces anneaux peuvent servir à déterminer les invariants des classes d'homotopie qu'ont définis H. Hopf, W. Gysin, N. E. Steenrod (¹); d'autre part :

Théorème 80.1. — *Soit $h \in \mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$; soit $f_\xi(h)$ la filtration de h dans $\mathcal{H}\left(\overset{-1}{\xi}\, Y^m \bigcirc X' \bigcirc \mathcal{B}\right)$; quand ξ décrit une classe d'homotopie Ξ d'applications de X dans Y,*

$$f_\Xi(h) = \operatorname*{Borne\ inf.}_{\xi \in \Xi} f_\xi(h)$$

(¹) H. Hopf, *Fundamenta math.*, t. 25, 1935, p. 427-440; W. Gysin, *Comm. math. helv.*, t. 14, 1941, p. 61-122; N. E. Steenrod, *Proc. nat. Acad. Sci. U. S. A.*, t. 33, 1947, p. 124-128.

est une filtration de $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$; cette filtration est évidemment un invariant topologique de Ξ.

Preuve. — Les filtrations $f_\xi(h)$ sont bornées inférieurement par la filtration de h dans $\mathcal{H}(X' \bigcirc \mathcal{B})$; on applique la proposition 5.1.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] ALEXANDER, *Ann. of math*,, t. 37, 1936, p. 698-708; ČECH, *Ibid.*, t. 37, 1936, p. 681-697; E. H. SPANIER, *Ibid.*, t. 49, 1948, p. 407-427.

[2] BOURBAKI, *Éléments de math.*, Livre II, *Algèbre* (Hermann).

[3] BOURBAKI, *Éléments de math.*, Livre III, *Topologie générale* (Hermann).

[4] H. CARTAN, *Colloque de Topologie algébrique* (*C. N. R. S.*, Paris 1949, p. 1-2).

[5] H. CARTAN et J. LERAY, *Colloque de Topologie algébrique*, p. 83-85.

[6] H. CARTAN, *C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 148 et 303.

[7] G. HIRSCH, *C. R. Acad. Sc.*, t. 227, 1948, p. 1328; *Bulletin Soc. Math. de Belgique*. 1948, p. 24-33.

[8] J. L. KOSZUL, *Thèse* (*Bul. Soc. math. de France*, t. 78, p. 1950); *C. R. Acad. Sc.*, t. 225, 1947, p. 217 et 477.

[9] J. LERAY, *Journal de math.*, t. 24, 1945, p. 95-248.

[10] J. LERAY, *C. R. Acad. Sc.*, t. 222, 1946, p. 1366 et 1419.

[11] J. LERAY, *Colloque de Topologie algébrique*, p. 61-82.

[12] J. LERAY, *C. R. Acad. Sc.*, t. 223, 1946, p. 395 et 412; t. 228, 1949, p. 1545, 1784 et 1902; t. 229, 1949, p. 281.

[13] MARSTON MORSE, *Mém. Sc. math.*, t. 92 (Gauthier-Villars); *Amer. math. Soc. Colloq. Publ.*, t. 18, 1934; *Ann. of math.*, t. 38, 1937, p. 386-449.

[14] N. E. STEENROD, *Ann. of math.*, t. 44, 1943, p. 610-627.

[15] VAN DER WAERDEN, *Moderne algebra* (Springer).