Remarques sur l'homologie filtrée;

Par Armand BOREL.

Cet article, publié à la demande de J. Leray, a pour but de préciser et compléter quelques points du Mémoire récent de J. Leray sur l'homologie filtrée ([1]), cité dans la suite par L., auquel nous renvoyons pour les définitions des notions et notations utilisées ici.

Le n° 1 explicite quelques homomorphismes jouant un rôle important dans la théorie, afin de mettre en évidence certaines compatibilités, implicitement utilisées à plusieurs reprises dans L., et en donne des conséquences. Au n° 2 nous énonçons et établissons une condition suffisante pour l'isomorphisme de deux anneaux $\mathcal{H}(\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{B}')$, $\mathcal{H}(\mathcal{K} \bigcirc \mathcal{B})$ ($\mathcal{K}$ complexe fin, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}$ faisceaux propres définis sur un même espace X). Comme application nous donnons au n° 3 (théorèmes 5*b* et 6), une démonstration peut-être plus naturelle que celle de L. du théorème 56.1*a*, *b* de L.; nous y ajoutons le théorème 5*a*, d'énoncé et de démonstration voisins, qui affirme entre autres l'isomorphie des anneaux de cohomologie de Čech à supports compacts d'un espace X localement compact et de son image Y par une application propre, lorsque l'image réciproque de chaque point de Y est cohomologiquement triviale (pour l'anneau de coefficients considéré). Cette dernière proposition, dans le cas où X est compact, est l'objet d'un travail récent de E. G. Begle ([2]).

([1]) J. Leray, *Journ. math. pur. appl.*, 9e série, t. 29, 1950, p. 1-139.

([2]) E. G. Begle, *The Vietoris mapping theorem for bicompact spaces* [*Ann. Math.*, (2), 51, 1950, p. 534-543.

1. Dans ce numéro, $\mathcal{K}$ désigne un anneau canonique sans torsion (L., p. 25, 30).

LEMME 1. — *Soit $\mathcal{K}$ un anneau différentiel-filtré; si $\mathcal{K}$ a une différentielle nulle, on a*

$$a. \qquad \mathcal{C}_r^p(\mathcal{K}^l \otimes \mathfrak{A}) = \sum_s (\mathcal{K}^{[s]l} \otimes \mathcal{C}_r^{p-sl}\mathfrak{A}),$$

$$b. \qquad \mathcal{D}_r^p(\mathcal{K}^l \otimes \mathfrak{A}) = \sum_s (\mathcal{K}^{[s]l} \otimes \mathcal{D}_r^{p-sl}\mathfrak{A}).$$

a. On a, tout d'abord,

$$(1) \qquad \mathcal{K}^{[s]l} \otimes \mathcal{C}_r^{p-sl}\mathfrak{A} = \mathcal{C}_r^p(\mathcal{K}^{[s]l} \otimes \mathfrak{A}),$$

en effet, le premier membre est visiblement contenu dans le deuxième. Pour obtenir l'inclusion contraire, on remarque comme dans L. p. 31 (preuve du lemme 17.1), qu'il suffit de l'établir si $\mathcal{K}^{[s]} = Z$ = groupe des entiers, mais dont les éléments ont ici le degré sl. Dans ce cas, $m \otimes a \to ma$ est un isomorphisme de $\mathcal{K}^{[s]l} \otimes \mathcal{C}_r^{p-sl}\mathfrak{A}$ sur $\mathcal{C}_r^{p-sl}\mathfrak{A}$ diminuant la filtration de sl et $a \to 1 \otimes \mathfrak{A}$ un isomorphisme de $\mathfrak{A}$ sur $\mathcal{K}^{[s]l} \otimes \mathfrak{A}$ augmentant la filtration de sl, d'où

$$\mathcal{C}_r^{p-sl}\mathfrak{A} \simeq \mathcal{C}_r^p(\mathcal{K}^{[s]l} \otimes \mathfrak{A}).$$

En combinant ces isomorphismes on voit que l'injection de $\mathcal{K}^{[s]l} \otimes \mathcal{C}_r^{p-sl}\mathfrak{A}$ dans $\mathcal{C}_r^p(\mathcal{K}^{[s]l} \otimes \mathfrak{A})$ est un isomorphisme sûr.

a est une conséquence immédiate de (1); la démonstration de b est analogue.

LEMME 2. — *Soit $\mathfrak{A}$ un anneau différentiel-filtré. On a*

$$a. \qquad \mathcal{C}_r^p(\mathcal{K}^l \otimes \mathfrak{A}) = \sum_s (\mathcal{K}^{[s]l} \otimes \mathcal{C}_r^{p-sl}\mathfrak{A}) \qquad (r \leq l);$$

$$b. \qquad (\mathcal{C}_{r-1}^{p+1} + \mathcal{D}_{r-1}^p)(\mathcal{K}^l \otimes \mathfrak{A}) = \sum_s [\mathcal{K}^{[s]l} \otimes (\mathcal{C}_{r-1}^{p+1-sl} + \mathcal{D}_{r-1}^{p-sl})\mathfrak{A}] \qquad (r \leq l);$$

$$c. \qquad \mathcal{H}_l(\mathcal{K}^l \otimes \mathfrak{A}) = \mathcal{K}^l \otimes \mathcal{H}_l\mathfrak{A} \quad (^4).$$

---

(4) En remontant à la définition du produit dans $\mathcal{H}_l(\mathcal{K}^l \otimes \mathfrak{A})$ et $\mathcal{K}^l \otimes \mathcal{H}_l\mathfrak{A}$, on voit qu'il est conservé par γ.

Soit ∂ la différentielle de $\mathcal{K}\otimes\mathcal{A}$; on en définit une deuxième ∂' par $\partial'(k\otimes a)=k\otimes\partial a$; alors $f(\partial-\partial')=l$; a et b sont conséquences du lemme 10.7, p. 23 (égalités 10.2, 10.3) de L. et du lemme 1; c s'en déduit immédiatement.

Soit $c\in\mathcal{C}_l^p(\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A})$ de filtration p. En lui faisant correspondre son image $h\in\mathcal{H}_l^{[p]}(\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A})$ par l'homomorphisme canonique de $\mathcal{C}_l^p$ sur son quotient $\mathcal{H}_l^{[p]}$, on définit une application α de $\mathrm{U}_p\mathcal{C}_l^p(\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A})$ sur $\mathcal{H}_l(\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A})$; on définit aussi de façon évidente une application β de $\mathrm{U}_p\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{C}_l^p\mathcal{A}$ sur $\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{H}_l\mathcal{A}$; vu le lemme 2, β peut être envisagé comme application de $\mathcal{C}_l^p(\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A})$ dans $\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{H}_l\mathcal{A}$ ayant $\mathcal{C}_{l-1}^{p+1}(\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A})$ et $\mathcal{D}_{l-1}^p(\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A})$ dans son noyau (p quelconque), d'où un homomorphisme γ de $\mathcal{H}_l(\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A})$ dans $\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{H}_l\mathcal{A}$ [3]. On a évidemment $\alpha\circ\partial=\partial_l\circ\alpha$; soit, d'autre part, $\bar{\partial}$ la différentielle du produit tensoriel des anneaux *différentiels* $\mathcal{K}^l$ et $\mathcal{H}_l\mathcal{A}$. Les définitions de $\bar{\partial}$ (L. p. 26) et de β montrent que $\beta\circ\partial=\bar{\partial}\circ\beta$, d'où $\gamma\circ\partial_l=\bar{\partial}\circ\gamma$.

Du lemme 2 et de ce qui précède on tire le

LEMME 3. — *γ est un isomorphisme de $\mathcal{H}_l(\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A})$ sur $\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{H}_l\mathcal{A}$. On a le diagramme de compatibilités suivant :*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A} \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ \mathcal{H}_l(\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A}) \arrow[rr, "\gamma"] & & \mathcal{K}^l\otimes\mathcal{H}_l\mathcal{A}. \end{tikzcd}$$

De plus, $\gamma\circ\partial_l=\bar{\partial}\circ\gamma$, où $\bar{\partial}$ est la différentielle du produit tensoriel $\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{H}_l\mathcal{A}$, donc γ induit un isomorphisme de $\mathcal{H}_{l+1}(\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A})$ sur $\mathcal{H}(\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{H}_l\mathcal{A})$ [4].

THÉORÈME 1. — *Soient $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}$ deux anneaux différentiels, γ un homomorphisme de $\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{A}$, introduisant un isomorphisme de $\mathcal{H}\mathcal{A}'$ sur $\mathcal{H}\mathcal{A}$. Si le degré de $\mathcal{K}$ a une borne supérieure finie, λ induit un isomorphisme de $\mathcal{H}(\mathcal{K}\otimes\mathcal{A}')$ sur $\mathcal{H}(\mathcal{K}\otimes\mathcal{A})$.*

Ce sera une conséquence du

THÉORÈME 1'. — *Soient $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}$ deux anneaux différentiels-filtrés,*

---

[4] *Cf.* L., Prop., 17.5, p. 31.

λ un homomorphisme de $\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{A}$ de filtration $\geqq 0$; on suppose que pour un certain indice l, λ induit un isomorphisme de $\mathcal{H}_l\mathcal{A}'$ sur $\mathcal{H}_l\mathcal{A}$.

a. λ induit un isomorphisme de $\mathcal{H}_r(\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A}')$ sur $\mathcal{H}_r(\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A})$ $(r\geqq l)$ et un homomorphisme de $\mathcal{H}(\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A})$ dans $\mathcal{H}(\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A})$ conservant la filtration.

b. Si les filtrations de $\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A}'$ et $\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A}$ ont des bornes supérieures finies [5] *λ définit un isomorphisme de $\mathcal{H}(\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A}')$ sur $\mathcal{H}(\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A})$ respectant la filtration.*

Démonstration. — Soient α', β', γ' les homomorphismes relatifs à $\mathcal{A}'$ analogues à α, β, γ; on a le diagramme de compatibilités suivant :

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{K}^l \otimes \mathcal{A}' \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dl, "\beta'"'] \arrow[d, "\alpha'"] & & \mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A} \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"] \\
\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{H}_l\mathcal{A}' \arrow[r, "(\gamma')^{-1}"] & \mathcal{H}_l(\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A}') \arrow[r, "\lambda"] & \mathcal{H}_l(\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A}) \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{K}^l\otimes\mathcal{H}_l\mathcal{A}.
\end{tikzcd}$$

Le produit tensoriel de l'application identique de $\mathcal{K}$ et de λ : $\mathcal{H}_l\mathcal{A}'\to\mathcal{H}_l\mathcal{A}$ est un homomorphisme μ de $\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{H}_l\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{H}_l\mathcal{A}$ qui est un isomorphisme sûr par suite de l'hypothèse. Or, il est immédiat que $\mu=\beta\circ\lambda\circ(\beta')^{-1}$; donc $\gamma\circ\lambda\circ(\gamma')^{-1}$ est un isomorphisme sur et il en est de même de $\lambda:\mathcal{H}_l(\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A}')\to\mathcal{H}_l(\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A})$. Les autres affirmations du théorème 1′ résultent alors de la proposition 10.6, p. 22, de L.

Démonstration du théorème 1. — On donne à $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{A}$ la filtration nulle, d'où $\mathcal{H}_1\mathcal{A}'=\mathcal{H}\mathcal{A}'$, $\mathcal{H}_1\mathcal{A}=\mathcal{H}\mathcal{A}$; on applique le théorème 1′ au cas $l=1$.

Théorème 2. — *Soient $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}$ deux anneaux différentiels-filtrés, λ un homomorphisme de $\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{A}$ de filtration $\geqq 0$; on suppose que pour un indice l, λ induit un isomorphisme de $\mathcal{H}_{l+1}\mathcal{A}'$ sur $\mathcal{H}_{l+1}\mathcal{A}$.*

a. Si le degré de $\mathcal{K}$ a une borne supérieure finie, λ induit un isomorphisme de $\mathcal{H}_r(\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A}')$ sur $\mathcal{H}_r(\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A})$ $(r\geqq l+1)$ et un homomorphisme de $\mathcal{H}(\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A}')$ dans $\mathcal{H}(\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A})$ conservant la filtration.

b. Si, en outre, les filtrations de $\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A}'$ et $\mathcal{K}^l\otimes\mathcal{A}$ ont des bornes supé-

[5] On dit que la filtration f de d a une borne supérieure finie k si $f(a)\leqq k$ pour tout $a\neq 0$ (L., p. 12).

rieures finies, λ *induit un isomorphisme de* $\mathcal{H}(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{A}')$ *sur* $\mathcal{H}(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{A})$ *conservant la filtration.*

Démonstration. — On applique le théorème 1 à $\lambda : \mathcal{H}_l\mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{H}_l\mathcal{A}$; l'homomorphisme μ de la démonstration précédente donne donc un isomorphisme de $\mathcal{H}(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{H}_l\mathcal{A}')$ sur $\mathcal{H}(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{H}_l\mathcal{A})$; par conséquent l'homomorphisme $\gamma\bigcirc\lambda\bigcirc(\gamma')^{-1}$ de la démonstration du théorème 1′ induit un isomorphisme de $\mathcal{H}(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{H}_l\mathcal{A}')$ sur $\mathcal{H}(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{H}_l\mathcal{A})$, d'où l'on tire que $\lambda : \mathcal{H}_{l+1}(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{A}') \rightarrow \mathcal{H}_{l+1}(\mathcal{K}'\otimes\mathcal{A})$ est un isomorphisme sûr; on applique ensuite la proposition 10.6 de L.

2. Dans ce numéro $\mathcal{K}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ désignent respectivement un complexe canonique-fin sans torsion (L., p. 47, 49, 53) et des faisceaux propres (L., p. 43) définis sur un espace localement compact X.

Dans les parties III et IV du Chapitre II de L., on peut distinguer deux catégories principales de théorèmes : d'une part, des théorèmes « locaux » qui traitent des sections par un point de complexes ou de faisceaux; ils permettent en particulier, sous des hypothèses convenables, de remplacer les sections par un point d'intersections de complexes et de faisceaux par des produits tensoriels. D'autre part, on a des théorèmes de « passage du local au global » affirmant sous certaines conditions que si les sections par chaque point de deux complexes sont isomorphes ou ont même anneau d'homologie, il en est de même pour les complexes eux-mêmes (par exemple prop. 32.2, 36*c*, 37.6). On peut ranger dans cette catégorie les théorèmes 3, 3′ et 4 ci-dessous; 3 et 3′ ont déjà été indiqués par Leray dans sa Conférence au *Colloque de Topologie algébrique* de Paris, 1947 [6].

Lemme 4. — *Soit* $\mathcal{B}$ *un faisceau différentiel-filtré-propre; si* $\mathcal{K}$ *a une différentielle nulle :*

a. $$\mathcal{C}_r^p(\mathcal{K}'\bigcirc\mathcal{B}) = \sum_s (\mathcal{K}^{[s]\prime}\bigcirc\mathcal{C}_r^{p-s\prime}\mathcal{B});$$

b. $$\mathcal{D}_r^p(\mathcal{K}'\bigcirc\mathcal{B}) = \sum_s (\mathcal{K}^{[s]\prime}\bigcirc\mathcal{D}_r^{p-s\prime}\mathcal{B}).$$

[6] Ils ne figurent plus dans le texte remanié de cette Conférence publiée par le C. N. R. S. (*Topologie algébrique,* Paris 1947, p. 61-82).

Les deux membres a sont des complexes fins à supports compacts. Le deuxième est contenu dans le premier et son injection dans ce complexe induit un isomorphisme de leurs sections par tout point $x \in X$, en vertu des formules

$$x\left(\sum \mathcal{K}^{[s]l} \bigcirc \mathcal{C}_r^{p-sl}\mathcal{B}\right) = \sum_s x(\mathcal{K}^{[s]l} \bigcirc \mathcal{C}_r^{p-sl}\mathcal{B}) = \sum_s x\mathcal{K}^{[s]l} \otimes \mathcal{C}_r^{p-sl}\mathcal{B}(x)$$

$$x\mathcal{C}_l^p(\mathcal{K}^l \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{C}_l^p[x(\mathcal{K}^l \bigcirc \mathcal{B})] = \mathcal{C}_l^p[(x\mathcal{K})^l \otimes \mathcal{B}(x)],$$

(*cf.* L., prop. 36.1*b*, 32.1*c*) et du lemme 1. L'injection est donc un isomorphisme sur d'après la proposition 32.2, p. 56 de L.

Même démonstration pour b.

On procède ensuite comme au nº 1 et l'on établit des égalités qui s'écrivent à partir de celles du lemme 2 en remplaçant $\mathcal{A}$ par $\mathcal{B}$, $\otimes$ par $\bigcirc$ et $\mathcal{H}_l\mathcal{A}$ par $\mathcal{F}_l\mathcal{B}$, d'où la définition d'applications α, β de $\mathcal{C}_l^p(\mathcal{K}^l \bigcirc \mathcal{B})$ sur $\mathcal{H}_l(\mathcal{K}^l \bigcirc \mathcal{B})$, resp. $\mathcal{K}^l \bigcirc \mathcal{F}_l\mathcal{B}$ et d'un isomorphisme γ de $\mathcal{H}_l(\mathcal{K}^l \bigcirc \mathcal{B})$ sur $\mathcal{K}^l \bigcirc \mathcal{F}_l\mathcal{B}$ vérifiant

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{K}^l \bigcirc \mathcal{B} & \\ & \alpha \swarrow \quad \searrow \beta & \\ \mathcal{H}_l(\mathcal{K}_l \bigcirc \mathcal{B}) & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{K}^l \bigcirc \mathcal{F}_l\mathcal{B}. \end{array}$$

THÉORÈME 3. — *Soient $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}$ deux faisceaux différentiels-propres et λ un homomorphisme de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$ induisant un isomorphisme de $\mathcal{H}\mathcal{B}'(x)$ sur $\mathcal{H}\mathcal{B}(x)$ pour tout $x \in X$.*

Si le degré de $\mathcal{K}$ a une borne supérieure finie, λ induit un isomorphisme de $\mathcal{H}(\mathcal{K}^l \bigcirc \mathcal{B}')$ sur $\mathcal{H}(\mathcal{K}^l \bigcirc \mathcal{B})$.

Ce sera une conséquence du

THÉORÈME 3'. — *Soient $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}$ deux faisceaux différentiels-filtrés-propres, λ un homomorphisme de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$ de filtration $\geqq 0$; on suppose que pour un indice l et pour tout $x \in X$, λ induit un isomorphisme de $\mathcal{H}_l\mathcal{B}'(x)$ sur $\mathcal{H}_l\mathcal{B}(x)$.*

a. λ induit un isomorphisme de $\mathcal{H}_r(\mathcal{K}^l \bigcirc \mathcal{B}')$ sur $\mathcal{H}_r(\mathcal{K}^l \bigcirc \mathcal{B})$ $(r \geqq l)$ et un homomorphisme de $\mathcal{H}(\mathcal{K}^l \bigcirc \mathcal{B}')$ dans $\mathcal{H}(\mathcal{K}^l \bigcirc \mathcal{B})$ conservant la filtration.

b. Si les filtrations de $\mathcal{K}^l \bigcirc \mathcal{B}'$ et $\mathcal{K}^l \bigcirc \mathcal{B}$ ont des bornes supérieures *finies, λ induit un isomorphisme de $\mathcal{H}(\mathcal{K}'\bigcirc\mathcal{B}')$ sur $\mathcal{H}(\mathcal{K}\bigcirc\mathcal{B})$ respectant la filtration.*

Démonstration. — Le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{K}' \bigcirc \mathcal{B}' & & & \xrightarrow{\lambda} & & & \mathcal{K}'\bigcirc\mathcal{B} \\
\beta'\downarrow & & \downarrow\alpha' & & \alpha\downarrow & & \downarrow\beta \\
\mathcal{K}'\bigcirc\mathcal{F}_l\mathcal{B}' & \xrightarrow{(\gamma')^{-1}} & \mathcal{H}_l(\mathcal{K}'\bigcirc\mathcal{B}') & \xrightarrow{\lambda} & \mathcal{H}_l(\mathcal{K}'\bigcirc\mathcal{B}) & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{K}'\bigcirc\mathcal{F}_l\mathcal{B}
\end{array}$$

montre que $\mu=\gamma\bigcirc\lambda\bigcirc(\gamma')^{-1}$ est l'homomorphisme produit tensoriel de l'identité de $\mathcal{K}$ et de λ : $\mathcal{F}_l\mathcal{B}'\to\mathcal{F}_l\mathcal{B}$; comme $\mathcal{F}_l\mathcal{B}'$ et $\mathcal{F}_l\mathcal{B}$ sont propres et que λ est un isomorphisme de $\mathcal{F}_l\mathcal{B}'(x)=\mathcal{H}_l\mathcal{B}'(x)$ sur $\mathcal{F}_l\mathcal{B}(x)=\mathcal{H}_l\mathcal{B}(x)$ pour tout $x\in X$, μ est un isomorphisme de $\mathcal{K}'\bigcirc\mathcal{F}_l\mathcal{B}'$ sur $\mathcal{K}'\bigcirc\mathcal{F}_l\mathcal{B}$ (L., prop. 36.1 c) et ainsi λ :

$$\mathcal{H}_l(\mathcal{K}'\bigcirc\mathcal{B}')\to\mathcal{H}_l(\mathcal{K}'\bigcirc\mathcal{B})$$

est un isomorphisme sur. On utilise ensuite la proposition 10.6 de L.

Démonstration du théorème 3. — On donne à $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$ la filtration nulle. Alors $\mathcal{F}\mathcal{B}'=\mathcal{F}_1\mathcal{B}$, $\mathcal{F}\mathcal{B}=\mathcal{F}_1\mathcal{B}$ et l'on applique 3' au cas $l=1$.

De la même façon que nous avons déduit 2 à partir de 1 et 1', on démontre en utilisant 3 et 3' le

THÉORÈME 4. — *Soient $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}$, deux faisceaux différentiels-filtrés-propres, λ un homomorphisme de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$ de filtration $\geqq 0$; on suppose que pour un indice l et pour tout $x\in X$, λ induit un isomorphisme de $\mathcal{H}_{l+1}\mathcal{B}'(x)$ sur $\mathcal{H}_{l+1}\mathcal{B}(x)$.*

a. Si le degré de $\mathcal{K}$ a une borne supérieure finie, λ induit un isomorphisme de $\mathcal{H}_r(\mathcal{K}'\bigcirc\mathcal{B}')$ sur $\mathcal{H}_r(\mathcal{K}'\bigcirc\mathcal{B})$ $(r\geqq l+1)$ et un homomorphisme de $\mathcal{H}(\mathcal{K}'\bigcirc\mathcal{B}')$ dans $\mathcal{H}(\mathcal{K}'\bigcirc\mathcal{B})$ conservant la filtration.

b. Si, en outre, les filtrations de $\mathcal{K}'\bigcirc\mathcal{B}'$ et $\mathcal{K}'\bigcirc\mathcal{B}$ ont des borne supérieures finies, λ induit un isomorphisme de $\mathcal{H}(\mathcal{K}'\bigcirc\mathcal{B}')$ sur $\mathcal{H}(\mathcal{K}'\bigcirc\mathcal{B})$ conservant la filtration.

Remarque. — Si X est de dimension finie (et est séparable métrique), il possède un complexe canonique-fin sans torsion, et même une couverture fine dont le degré a une borne supérieure finie $\leqq$ dimension X ([7]) (L., n° 40). Le théorème 3 signifie alors que les anneaux de cohomologie de X, relatifs à deux faisceaux différentiels-propres $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}$ sont isomorphes quand il existe un homomorphisme de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$ induisant un isomorphisme de $\mathcal{H}\mathcal{B}'(x)$ sur $\mathcal{H}\mathcal{B}(x)$ pour tout $x \in X$. Il s'agit ici de faisceaux propres, c'est-à-dire de cohomologie à supports compacts; on ne sait pas si un théorème correspondant vaut dans la théorie de H. Cartan des faisceaux et complexes à supports fermés non nécessairement compacts ([8]).

5. Soit X localement compact, u l'unité d'une couverture fine $\mathfrak{X}$ de X; si l'homomorphisme π de $\mathcal{H}\mathcal{B}(X)$ dans $\mathcal{H}(\mathfrak{X} \bigcirc \mathcal{B})$ [de $\mathcal{H}_r\mathcal{B}(X)$ dans $\mathcal{H}_r(\mathfrak{X}' \bigcirc \mathcal{B})$] induit par $b \rightarrow u \bigcirc b$ est un isomorphisme sur, on écrit $\mathcal{H}\mathcal{B}(X) = \mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$ [$\mathcal{H}_r\mathcal{B}(X) = \mathcal{H}_r(X' \bigcirc \mathcal{B})$] (L., définition 48.2, p. 87). En particulier, si $\mathcal{B}$ est un faisceau constant, de différentielle nulle, isomorphe à un anneau $\mathfrak{A}$, $\mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$ est l'anneau de cohomologie de Čech-Alexander à supports compacts (coefficients dans $\mathfrak{A}$) de X. La condition $\mathcal{H}\mathcal{B}(X) = \mathcal{H}(X \bigcirc \mathcal{B})$ signifie alors que X a une cohomologie nulle s'il est non compact et qu'il a une cohomologie triviale s'il est compact [$\mathcal{H}^{[0]}(X \bigcirc \mathcal{B}) = \mathfrak{A}$, $\mathcal{H}^{[p]}(X \bigcirc \mathcal{B}) = 0$ pour $p > 0$].

Théorème 5. — *Soient* X, Y *des espaces localement compacts,* ξ *une application continue de* X *dans* Y, $\mathcal{B}$ *un faisceau différentiel-propre sur* X. *On suppose* $\xi\mathcal{B}$ *propre* ([9]) *et* $\mathcal{H}\mathcal{B}(\mathcal{F}) = \mathcal{H}(\mathcal{F} \bigcirc \mathcal{B})$ *si* $\mathcal{F} = \overset{-1}{\xi}\,\mathcal{Y}\ (y \in Y)$.

Alors $\overset{-1}{\xi}$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{H}(\mathcal{Y} \bigcirc \xi\mathcal{B})$ *sur* $\mathcal{H}(\mathfrak{X} \bigcirc \mathcal{B})$ *si l'une des deux conditions suivantes est réalisée :*

a. $\mathcal{B}$ *a une différentielle nulle.*

([7]) Même si X n'est pas séparable métrique, il possède une couverture fine pour la structure *additive* dont le degré est borné par dim X (*cf.* H. Cartan, Notes polycopiées du *Séminaire de topologie algébrique de l'E. N. S.*, 1948-1949, Exposé XVI, p. 16).

([8]) H. Cartan, *loc. cit.*, Exposé XVI, p. 8.

([9]) C'est en particulier le cas, si ξ est une application propre, c'est-à-dire si l'image réciproque de tout compact de Y est un compact de X.

b. Y *est de dimension finie* [10].

Remarque. — Si $\delta\mathcal{B}=0$, si $\mathcal{B}$ est constant et isomorphe à l'anneau $\mathcal{A}$ et si ξ est une application *propre sur* Y, $\xi\mathcal{B}$ est le faisceau constant sur Y, isomorphe à $\mathcal{A}$; $\mathcal{H}(X\bigcirc\mathcal{B})$, $\mathcal{H}(Y\bigcirc\mathcal{B})$ sont les anneaux de cohomologie de Čech à supports compacts, à coefficients dans $\mathcal{A}$, de X et Y; le théorème 5 *a* est bien alors la généralisation du théorème de Begle, mentionnée à la fin de l'Introduction.

Démonstration du théorème 5 *a*. — Soient $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ des couvertures fines de X, resp. Y et $\mathcal{B}^\star$ le faisceau associé au complexe $\mathfrak{X}\bigcirc\mathcal{B}$; $\xi\mathcal{B}^\star$ est associé à $\xi(\mathfrak{X}\bigcirc\mathcal{B})$ et $\mathfrak{Y}\bigcirc\xi\mathcal{B}^\star=\mathfrak{Y}\bigcirc\xi(\mathfrak{X}\bigcirc\mathcal{B})$ (L., prop. 35.1, p. 63), $\mathfrak{X}\bigcirc\mathcal{B}$ étant à supports compacts, $\mathcal{B}^\star$ est continu (L., prop. 28. 1), donc propre, et il en de même pour $\xi\mathcal{B}^\star$. (L., p. 44). Soit u l'unité de $\mathfrak{X}$; la correspondance associant à $b\in\mathcal{B}(F)$ l'élément $Fu\bigcirc b$ de $\mathcal{B}^\star(F)=F(\mathfrak{X}\bigcirc\mathcal{B})=(F\mathfrak{X})\bigcirc\mathcal{B}$ (*cf.* L., prop. 36.1 *e*) est un homomorphisme λ de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}^\star$. Donnons à $\mathcal{B}$ la filtration nulle et à $\mathfrak{X}\bigcirc\mathcal{B}$ la filtration $\mathfrak{X}^{-1}\bigcirc\mathcal{B}$; de $\delta\mathcal{B}=0$ on tire que $\mathcal{F}_0\mathcal{B}=\mathcal{B}=\mathcal{F}\mathcal{B}$ et que $\mathcal{F}_0\mathcal{B}^\star=\mathcal{F}_0(\mathfrak{X}^{-1}\bigcirc\mathcal{B})=\mathcal{F}(\mathfrak{X}^{-1}\bigcirc\mathcal{B})$. L'hypothèse devient : λ induit un isomorphisme de $\mathcal{H}\mathcal{B}(F)$ sur $\mathcal{H}\mathcal{B}^\star(F)$ quand $F=\overset{-1}{\xi}y$; λ induit aussi un homomorphisme de $\xi\mathcal{B}$ dans $\xi\mathcal{B}^\star$ qui, pour tout $y\in Y$, est un isomorphisme de $\mathcal{F}_0\xi\mathcal{B}(y)=\xi\mathcal{F}_0\mathcal{B}(y)=\mathcal{F}_0\mathcal{B}(\overset{-1}{\xi}y)$ sur $\mathcal{F}_0\xi\mathcal{B}^\star(y)=\xi\mathcal{F}_0(\mathfrak{X}^{-1}\bigcirc\mathcal{B})(y)$. D'après le théorème 3', λ donne un isomorphisme de $\mathcal{H}(\mathfrak{Y}^0\bigcirc\xi\mathcal{B})$ sur $\mathcal{H}(\mathfrak{Y}^0\bigcirc\xi\mathcal{B}^\star)$. Or,

$$\mathcal{H}(\mathfrak{Y}^0\bigcirc\xi\mathcal{B}^\star)=\mathcal{H}\big(\mathfrak{Y}^0\bigcirc\xi(\mathfrak{X}^{-1}\bigcirc\mathcal{B})\big)=\mathcal{H}\big(\overset{-1}{\xi}\mathfrak{Y}^0\bigcirc\mathfrak{X}^{-1}\bigcirc\mathcal{B}\big)=\mathcal{H}(\mathfrak{X}\bigcirc\mathcal{B})$$

(L., n° 50) et l'on voit sans peine, en remontant aux définitions, que l'isomorphisme ainsi obtenu de $\mathcal{H}(Y\bigcirc\xi\mathcal{B})$ sur $\mathcal{H}(X\bigcirc\mathcal{B})$ est bien $\overset{-1}{\xi}$.

Démonstration du théorème 5 *b*. — Nous avons ici $\mathcal{F}_1\mathcal{B}=\mathcal{F}\mathcal{B}$, $\mathcal{F}_1(\mathfrak{X}^{-1}\bigcirc\mathcal{B})=\mathcal{F}(\mathfrak{X}^{-1}\bigcirc\mathcal{B})$ ($\mathcal{B}$ a toujours la filtration nulle). On déduit alors du théorème 3' l'isomorphisme de $\mathcal{H}(\mathfrak{Y}^1\bigcirc\xi\mathcal{B})$ sur $\mathcal{H}(\mathfrak{Y}^1\bigcirc\xi\mathcal{B}^\star)$, donc aussi sur $\mathcal{H}(\mathfrak{X}\bigcirc\mathcal{B})$, d'après les égalités rappelées

[10] *Cf.* L., Théorème 56.1 *a*, *b*, p. 101.

plus haut, où l'on remplace zéro par 1. On prend naturellement une couverture fine $\mathcal{Y}$ dont le degré a une borne supérieure finie.

THÉORÈME 6. — *Soient* X, Y *localement compacts,* ξ *une application continue de* X *dans* Y, $\mathcal{B}$ *un faisceau différentiel-filtré-propre sur* X. *On suppose* $\xi\mathcal{B}$ *propre,* $\mathcal{H}\mathcal{B}(F) = \mathcal{H}(F \bigcirc \mathcal{B})$ *et l'existence de* l *tel que* $\mathcal{H}_{l+1}\,\mathcal{B}(F) = \mathcal{H}_{l+1}(F^l \bigcirc \mathcal{B})$ $\left(si\ F = \overset{-1}{\xi} y\right)$.

Si Y *est de dimension finie,* $\overset{-1}{\xi}$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{H}_r(Y^l \bigcirc \xi\mathcal{B})$ *sur* $\mathcal{H}_r(X^l \bigcirc \mathcal{B})$ $(r \geqq l+1)$ *et de* $\mathcal{H}(Y^l \bigcirc \xi\mathcal{B})$ *sur* $\mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{B})$ *conservant la filtration* ([10]).

Soit $\mathcal{B}^\star$ associé à $(\mathcal{X}^l \bigcirc \mathcal{B})$. A l'aide du théorème $4a$, on montre que λ (démonstration précédente) est un isomorphisme de $\mathcal{H}_r(\mathcal{Y}^l \bigcirc \xi\mathcal{B})$ sur $\mathcal{H}_r(\mathcal{Y}^l \bigcirc \xi\mathcal{B}^\star)$ $(r \geqq l+1)$ et un homomorphisme de $\mathcal{H}(\mathcal{Y}^l \bigcirc \xi\mathcal{B})$ dans $\mathcal{H}(\mathcal{Y}^l \bigcirc \xi\mathcal{B}^\star)$ conservant la filtration; par ailleurs, on sait que ce dernier est un isomorphisme sûr (démonstration du théorème $5b$).

L'isomorphisme de $\mathcal{H}_r(\mathcal{Y}^l \bigcirc \xi\mathcal{B}^\star)$ sur $\mathcal{H}_r(X^l \bigcirc \mathcal{B})$ $(r \geqq l+1)$ impliqué par les égalités (L., n° 50)

$$\mathcal{H}_*(\mathcal{Y}^l \bigcirc \xi\mathcal{B}^\star) = \mathcal{H}_*(\mathcal{Y}^l \bigcirc \xi(\mathcal{X}^l \bigcirc \mathcal{B}) = \mathcal{H}_*\left(\overset{-1}{\xi}\mathcal{Y}^l \bigcirc \mathcal{X}^l \bigcirc \mathcal{B}\right) = \mathcal{H}_*(X^l \bigcirc \mathcal{B}),$$

conserve le degré et celui de $\mathcal{H}(\mathcal{Y}^l \bigcirc \xi\mathcal{B}^\star)$ sur $\mathcal{H}(X^l \bigcirc \mathcal{B})$ conserve la filtration, d'où le théorème 6.