90-minütige Klausur zur Vorlesung „Fortgeschrittene mathematische Methoden in der Statistik“ (Wintersemester 2024/25)

Prof. Dr. Thomas Nagler, Jana Gauss Klausur am 24.03.2025

Vorname:	
Nachname:	
Matrikelnummer:	
Studiengang + PO:	
Unterschrift:	

- **Überprüfen Sie, ob Ihre Angabe vollständig ist.** Sie sollte **4** Aufgaben auf **10** Seiten umfassen.
- Füllen Sie bitte das obenstehende Formular umgehend aus. Schreiben Sie bitte leserlich.
- Halten Sie für die Kontrolle bitte einen Lichtbildausweis und Ihren Studierendenausweis bereit.
- Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**. Es ist keine vorzeitige Abgabe möglich.
- Verwenden Sie für die Bearbeitung ausschließlich die Ihnen zur Verfügung gestellten Papierbögen. Kennzeichnen Sie jedes zur Abgabe vorgesehene Blatt mit Namen und Matrikelnummer.
- Alle Lösungen müssen nachvollziehbar sein. Dazu gehört auch lesbare Schrift. Ergebnisse müssen klar erkennbar und zuzuordnen sein. Falls der Platz auf einem Blatt nicht ausreicht, muss auf dem betreffenden Blatt ein Verweis zur Lösung zu finden sein.
- **Machen Sie kenntlich, falls Sie mit einem Ersatzergebnis weiterrechnen!**
- Es dürfen nur **dokumentenechte Stifte** und keine roten Stifte verwendet werden.
- Zugelassene Hilfsmittel: 1 beidseitig (analog oder digital) beschriftetes DIN A4-Papier
- Bei Unterschleif erfolgt eine Meldung an das Prüfungsamt. Sie sind verpflichtet, durch Ihr Verhalten jegliche Missverständnisse diesbezüglich auszuschließen. Sorgen Sie insbesondere dafür, dass sich keinerlei Mobiltelefone und Uhren an Ihrem Arbeitsplatz befinden.
- Verlassen Sie den Prüfungsraum erst, nachdem Sie der Aufsicht die Klausur persönlich übergeben haben. Für den Eingang der kompletten Klausur bei der Aufsicht sind Sie selbst verantwortlich.

	mögliche Punkte	erreichte Punkte
1. Aufgabe	17	
2. Aufgabe	10	
3. Aufgabe	10	
4. Aufgabe	8	
Summe	45	

NAME:

Aufgabe 1

(a) Gib eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an, die konvex, aber nicht strikt konvex ist (ohne Begründung). (2 Punkte)

(b) Beweise, dass die Menge aller stochastischen $n \times n$ Matrizen konvex ist. Eine stochastische Matrix ist eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit den Eigenschaften

(i) $a_{ij} \geq 0$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$ und

(ii) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ für alle $i = 1, \ldots, n$ (d.h. alle Zeilensummen sind 1). (4 Punkte)

(c) Berechne die Ableitung $\dfrac{\partial f(A)}{\partial A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ der Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}, A \mapsto \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2.$$

(3 Punkte)

NAME:

(d) Berechne die relative Konditionszahl von $f(x) = \frac{1}{x}$. (3 Punkte)

(e) Finde für die gegebenen Folgen a_n jeweils eine möglichst einfache Folge b_n, sodass $a_n = O(b_n)$.

(i) $a_n = n^{10} + 10^n + \exp(n)$

(ii) $a_n = \frac{3}{n} + \frac{5}{\ln(n)}$

(iii) $a_n = c_n + d_n + 4$, wobei $c_n = o(1)$ und $d_n = O(1)$

(iv) Gilt die Aussage $a_n = c_n + \frac{1}{n} = O(1/n)$, wenn wir nur $c_n = o(1)$ wissen? Begründe deine Antwort. (5 Punkte)

2+4+3+3+5=17 PUNKTE

NAME:

Aufgabe 2

(a) Zeige mithilfe der Jensen-Ungleichung, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

für alle $x_1, \ldots x_n \in \mathbb{R}$ gilt.

Hinweis: Die Jensen-Ungleichung besagt, dass für jede konvexe Funktion $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \boldsymbol{x}_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} w_i f(\boldsymbol{x}_i) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \boldsymbol{x}_i \in \mathcal{X}, w_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

gilt. (5 Punkte)

NAME:

(b) Sei $\mathcal{F}$ ein Vektorraum von Funktionen $f\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ ($\mathcal{X}$ ist eine beliebige Menge) mit $\|f\| = \sup_{x\in\mathcal{X}} |f(x)|$ und sei $\tilde{x} \in \mathcal{X}$ fest. Wir betrachten die Abbildung

$$\Phi\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}, f \mapsto f(\tilde{x}).$$

(i) Zeige, dass die Abbildung $\Phi(f)$ konvex ist.

(ii) Was ist die Fréchet-Ableitung $D_f\Phi(h)$ der Abbildung $\Phi(f)$? Begründe deine Antwort. Zeige auch die Beschränktheit der Ableitung, d.h. zeige, dass es ein $M < \infty$ gibt, sodass $|D_f\Phi(h)| \leq M\|h\| \quad \forall h \in \mathcal{F}$.

(5 Punkte)

5+5=10 PUNKTE

NAME:

Aufgabe 3

(a) Gesucht ist das Minimum der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}, \boldsymbol{\beta} \mapsto (\boldsymbol{Y} - X\boldsymbol{\beta})^T(\boldsymbol{Y} - X\boldsymbol{\beta}) + \lambda\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\beta}$$

mit $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^n, X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ und einem Skalar $\lambda > 0$. Berechne die Lösung $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ des Optimierungsproblem.

Hinweis: Du musst die Definitheit der Hessematrix nicht prüfen. Matrizen der Form $X^TX + \lambda I_p$ sind immer invertierbar. (5 Punkte)

NAME:

(b) Das Minimum $\boldsymbol{x}^* = \arg\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})$ einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ soll durch ein iteratives Verfahren bestimmt werden. Dabei soll in der $k+1$-ten Iteration $f(\boldsymbol{x})$ an der Stelle $\boldsymbol{x}_k$ quadratisch approximiert werden und $\boldsymbol{x}_{k+1}$ ist das Minimum dieser quadratischen Approximation. Leite die Iterationsvorschrift her, d.h.

1. Schreibe $f(\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{h})$ als Taylorapproximation zweiter Ordnung.
2. Bestimme das $\boldsymbol{h}$, das die Approximation minimiert, und setze $\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{h}$.

Hinweis: Du darfst annehmen, dass die Hessematrix $H_f(\boldsymbol{x})$ immer positiv definit ist. (5 Punkte)

5+5=10 PUNKTE

NAME:

Aufgabe 4

Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ und $k, n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n$. Angenommen wir wissen, dass A besonders strukturiert ist, so dass $a_{ij} = 0$ für alle $i < j$ und alle $i \geq j + k$. Eine solche Matrix A könnte mit $n = 6, k = 3$ zum Beispiel so aussehen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Gib einen möglichst effizienten Algorithmus zum Lösen des LGS $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ an und leite dessen Laufzeitkomplexität in Abhängigkeit von n und k her. Wie verhält sich die Komplexität im Vergleich zur Situation, wenn

(i) über die Struktur von A nichts bekannt ist,

(ii) A eine untere Dreiecksmatrix ist.

(8 Punkte)

8=8 PUNKTE

NAME:

Zusatzblatt

NAME:

Zusatzblatt