

Proyección del PIB: Análisis del Gasto en Consumo Final mediante Modelos SARIMA

Fabian Barrios y Camilo Lozano

Universidad de Córdoba

24 de junio de 2024



Contenido

- Introducción
- 2 Planteamiento del problema
- 3 Objetivo general
- Datos Empleados
- S Resultados del modelado
- **6** Conclusión
- Bibliografía



Introducción

Introducción

Nos centramos en modelar y predecir el Producto Interno Bruto (PIB) de Colombia, específicamente el gasto de consumo final, utilizando análisis de series temporales. El PIB, como indicador crítico, refleja el valor total de la producción económica, mientras que el gasto de consumo final revela el nivel de actividad económica generado por los hogares en sectores esenciales como alimentos, vivienda y salud. Mediante el análisis de series temporales, buscamos identificar patrones estacionales, tendencias a largo plazo y cambios estructurales en la economía colombiana. Este enfoque nos permite comprender mejor los impulsores del crecimiento económico y anticipar posibles desafíos económicos futuros.



Planteamiento del problema

El Producto Interno Bruto es un indicador del flujo de la economía para un país en un periodo de tiempo determinado ([?]3). Sin embargo, la volatilidad del entorno económico limita la precisión de las predicciones basadas en indicadores tradicionales como las tesorerías nacionales([?]4). Los modelos estadísticos, como el ARIMA, ofrecen herramientas confiables para prever el PIB utilizando datos históricos([?]1). Aunque se ha investigado la aplicación del ARIMA para varias naciones, cada país presenta condiciones únicas que requieren modelos adaptados. Por tanto, es crucial desarrollar modelos específicos de ARIMA para predecir con precisión el PIB, considerando las particularidades económicas de cada país([?]2).



Objetivo general

El objetivo principal de este estudio es desarrollar un modelo de pronóstico del gasto en consumo final utilizando la metodología de Box-Jenkins para la predicción de series de tiempo. Empleando datos trimestrales del gasto en consumo final recopilados desde el primer trimestre de 2005 hasta el segundo trimestre de 2023, este modelo generará predicciones de alta precisión y gran utilidad. Estas predicciones estarán destinadas a mejorar significativamente la capacidad de planificación y toma de decisiones estratégicas, proporcionando a los responsables políticos, economistas y empresas una herramienta eficaz para anticipar y adaptarse a las tendencias futuras del consumo.



Datos Empleados

La serie temporal empleada para este análisis corresponde al Producto Interno Bruto (PIB) de Colombia, específicamente a la variable gasto de consumo final([?]5), identificada como Serie 1.02 dentro del Grupo Serie del PIB. Esta variable contiene un total de 74 observaciones, recopiladas trimestralmente desde el año 2005 hasta el año 2023. Los datos, expresados en miles de millones de pesos colombianos, han sido recopilados por el Departamento Administrativo Nacional de Estadísticas (DANE)([?]6), la fuente oficial de datos estadísticos del país. Con un rango de disponibilidad desde el 31 de marzo de 2005 hasta el 30 de junio de 2023, esta serie temporal ofrece una perspectiva amplia y detallada de la evolución económica de Colombia a lo largo de casi dos décadas.



Análisis gráfico de la serie

Evolución temporal del gasto en consumo final desde el año 2005 hasta el segundo trimestre de 2023.

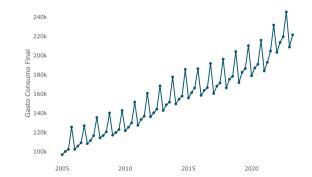
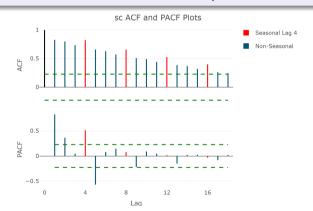


Figura 1: Serie temporal del gasto en consumo final del PIB de Colombia 🔻 😩 🔻 😩 🔻 🔊

Para una serie estacionaria, el ACF caerá a cero con relativa rapidez.



Series de tiempo

Figura 2: Gráfico de correlación temporal de la serie

Estabilización de Varianza

Reducimos la escala de valores de nuestros datos

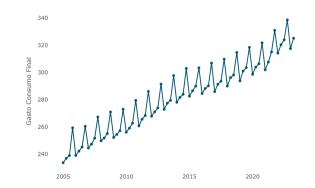


Figura 3: Gráfico de la serie temporal con varianza estabilizada.



Validación Cruzada y Diferenciación

La división de los datos nos permite entrenar nuestro modelo y evaluar su ajuste utilizando los datos de entrenamiento. Aplicaremos técnicas de diferenciación estacional y regular para estabilizar la media de la serie, eliminando así cambios en el nivel y la estacionalidad de la misma, facilitando el ajuste de un modelo eficiente para realizar pronósticos.

En este análisis, tomaremos dos horizontes de pronóstico: uno de 2 trimestres y otro de 4 trimestres. Dado que nuestra serie es trimestral, estos horizontes equivalen a medio año y un año de datos respectivamente. Posteriormente, verificaremos la estacionariedad de la serie diferenciada y procederemos con la selección del modelo más adecuado para nuestras predicciones.



Análisis de Serie Temporal con Diferenciación Regular y Estacional

Aplicamos diferenciación regular(d = 1) y estacional(D = 1) a nuestros datos de entrenamiento utilizando las funciones ndiff y nsdiff.



Figura 4: Gráfico de serie temporal con estabilidad en varianza y media.

Prueba de Raíz Unitaria: KPSS Test for Level Stationarity

La prueba KPSS es adecuada para verificar la presencia de una raíz unitaria en una serie temporal, corrigiendo automáticamente posibles autocorrelaciones y heterocedasticidades en los errores.

- **Hipótesis nula** (H_0): La serie temporal es estacionaria en nivel.
- **Hipótesis alternativa** (H_1): La serie temporal no es estacionaria en nivel.

Después de realizar la prueba, obtuvimos un valor p de 0.1. Basándonos en este resultado, no rechazamos H_0 y concluimos que la serie es estacionaria en nivel. Con los datos de entrenamiento estacionarios, exploraremos el orden del modelo final **SARIMA(p, 1, q)(P, 1, Q)**[4].



Variable respuesta final

Después de todo el proceso anterior, la variable de respuesta final es y_t , que ha sido diferenciada tanto regular como estacionalmente:

$$\nabla^d \nabla^D_s y_t \tag{1}$$

donde:

- $\nabla_s^D = (1 B^S)^D$ representa la diferencia estacional de orden D.
- $\nabla^d = (1 B)^d$ representa la diferencia regular de orden d.

Identificación de P y Q

Utilizaremos el análisis de ACF y PACF para determinar los valores óptimos de los componentes AR(P) y MA(Q) en la parte estacional.

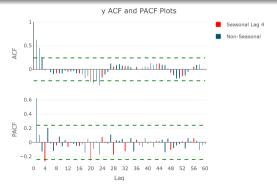


Figura 5: Gráfico de correlación temporal de la serie diferenciada



14/38

Identificación de P y Q

Después de completar el análisis detallado de ACF y PACF, nuestro modelo SARIMA se define como:

Ahora utilizaremos el EACF (Extended Autocorrelation Function) para identificar los órdenes p y q en nuestros modelos ARMA. Nos enfocaremos en dos horizontes de pronóstico: 2 y 4 periodos.

Identificación de p y q mediante EACF para Horizontes de Pronóstico

Identificaremos modelos (p, q) significativos según el EACF y revisaremos si algunos relevantes fueron omitidos por estar bajo el umbral de 0.2425 y 0.2461 o fuera del triángulo. Ajustaremos el umbral del EACF aumentándolo en 0.07 para evaluar nuevos modelos, especialmente para h=2 y h=4.

Figura 6: eacf para h=2.

Figura 7: eacf para h=4.



Selección de Modelos para Horizontes de Pronóstico

A continuación, se presentan los modelos candidatos seleccionados manualmente para el análisis de nuestra serie, junto con el modelo identificado mediante la función auto.arima.

Tabla 1: Modelos seleccionados	oara horizontes de	pronóstico $h=2$	y h = 4
--------------------------------	--------------------	------------------	---------

Horizonte	Modelos Seleccionados	Sum Coef AR	AIC
h = 2	SARIMA(0,1,2)(1,1,0) ₄	0	242.8664
	SARIMA(1,1,3)(1,1,0)₄	0.80278	243.3044
	SARIMA(1,0,2)(0,1,1) ₄	0.80409	243.7608
h=4	SARIMA(1,1,0)(1,1,0) ₄	-0.31730	238.9632
	SARIMA(0,1,1)(1,1,0)₄	0	241.4121
	SARIMA(1,0,2)(0,1,1) ₄	0.83992	238.3389

- Estos modelos fueron seleccionados utilizando el método de estimación de Máxima Verosimilitud (ML).
- Además, para cada horizonte también se seleccionó un modelo utilizando la función auto.arima el
 cual fue el mismo para ambos horizontes y es: SARIMA(1,0,2)(1,1,0)4.

Estimación de los parámetros del modelo **SARIMA** para **h=2**

Tabla 2: Pruebas de significancia de los coeficientes para modelos de h=2

Modelo	Coeficiente	Estimación	Error Estándar	Valor-z	$\Pr(> z)$
SARIMA (1,1,3)(1,1,0) ₄	ar1	0.80278	0.11158	7.1945	6.271e-13 ***
	ma1	-1.14808	0.13526	-8.4879	2,2e-16 ***
	ma2	0.62687	0.17667	3.5482	0.0003879 ***
	ma3	-0.47879	0.13928	-3.4375	0.0005871 ***
	sar1	-0.47886	0.14678	-3.2625	0.0011045 **
SARIMA (0,1,2)(1,1,0) ₄	ma1	-0.22410	0.11225	-1.9965	0.045884 *
	ma2	0.37703	0.13560	2.7805	0.005428 **
	sar1	-0.56914	0.12296	-4.6288	3.678e-06 ***

Estadísticamente, los modelos anteriores muestran coeficientes significativos, lo que indica que los términos son fundamentales para un ajuste efectivo. Las pruebas de significancia (Pr(>|z|) < 0.05) sugieren que estos modelos capturan bien las características de la serie temporal.



Estimación de los parámetros del modelo AutoARIMA(1,0,2)(0,1,1) para h=2

Tabla 3: Pruebas de significancia de los coeficientes para autoArima con h=2

Coeficiente	Estimación	Error Estándar	Valor-z	$\Pr(> z)$
ar1	0.80409	0.10688	7.5236	5.33e-14 ***
ma1	-0.17918	0.13745	-1.3036	0.1923757
ma2	0.40215	0.15273	2.6331	0.0084606 **
sma1	-0.52386	0.14673	-3.5703	0.0003566 ***
drift	1.19693	0.11880	10.0750	2.2e-16 ***

todos los coeficientes son estadísticamente significativos (Pr(>|z|) < 0.05), excepto el coeficiente ma del modelo, que no es significativo (p - valor = 0.1923757). Esto indica que este coeficiente no contribuye significativamente al modelo.



Estimación de los parámetros del modelo **SARIMA** para **h=4**

Tabla 4: Pruebas de significancia de los coeficientes para modelos de h=4

Modelo	Coeficiente	Estimación	Error Estándar	Valor-z	$\Pr(> z)$
SARIMA(1,1,0)(1,1,0) ₄	ar1	-0.31730	0.11725	-2.7063	0.006805 **
	sar1	-0.47111	0.14435	-3.2637	0.001100 **
SARIMA(0,1,1)(1,1,0) ₄	ma1	-0.21130	0.09730	-2.1716	0.029882 *
	sar1	-0.46935	0.14443	-3.2496	0.001156 **

Estadísticamente, los modelos anteriores muestran coeficientes significativos, lo que indica que los términos son fundamentales para un ajuste efectivo. Las pruebas de significancia (Pr(>|z|)<0.05) sugieren que estos modelos capturan bien las características de la serie temporal.

Estimación de los parámetros del modelo AutoARIMA(1,0,2)(0,1,1) para h=4

Tabla 5: Pruebas de significancia de los coeficientes para autoArima con h=4

Coeficiente	Estimación	Error Estándar	Valor-z	$\Pr(> z)$
ar1	0.83992	0.11024	7.6189	2.558e-14 ***
ma1	-0.21134	0.14033	-1.5061	0.132053
ma2	0.40844	0.15171	2.6922	0.007099 **
sma1	-0.49211	0.16686	-2.9493	0.003185 **
drift	1.23460	0.16144	7.6472	2.053e-14 ***

todos los coeficientes son estadísticamente significativos (Pr(>|z|) < 0.05), excepto el coeficiente ma del modelo, que no es significativo (p-valor = 0.132053). Esto indica que este coeficiente no contribuye significativamente al modelo.

Evaluación y diagnóstico de los modelos

Prueba de hipótesis sobre la media de los residuos: One Sample t-test

Prueba de Hipótesis

- **Hipótesis nula (H**₀): La media de los residuos es igual a cero ($\mu = 0$).
- **Hipótesis alternativa** (H_1): La media de los residuos es diferente de cero ($\mu \neq 0$).

Tabla 6: P-valores de la prueba t para los modelos SARIMA

Modelo SARIMA	P-valor
SARIMA(1,1,3)(1,1,0) ₄	0.9045
SARIMA(0,1,2)(1,1,0) ₄	0.8195
AutoARIMAh2(1,0,2)(0,1,1)	0.9824
SARIMA(1,1,0)(1,1,0) ₄	0.4907
SARIMA(0,1,1)(1,1,0) ₄	0.5252
AutoARIMAh4(1,0,2)(0,1,1)	0.986

Basado en las pruebas de hipótesis, no se encontró evidencia para rechazar H_0 , indicando que los que los modelos capturan adecuadamente las variaciones en los datos de la serie temporal y que la media de los errores en los modelos es constante.

Prueba sobre la homocedasticidad de los residuos: ARCH LM-test

Prueba de Hipótesis

- Hipótesis nula (H₀): Los residuos son homocedásticos (la varianza de los residuos es constante).
- Hipótesis alternativa (H₁): Los residuos son heterocedásticos.

Tabla 7: P-valores de la prueba ARCH para los modelos SARIMA

Modelo SARIMA	P-valor
SARIMA(1,1,3)(1,1,0) ₄	0.9855
SARIMA(0,1,2)(1,1,0) ₄	0.9926
AutoARIMAh2(1,0,2)(0,1,1)	0.9979
SARIMA(1,1,0)(1,1,0) ₄	0.9835
SARIMA(0,1,1)(1,1,0) ₄	0.9891
AutoARIMAh4(1,0,2)(0,1,1)	0.9985

No se encontró evidencia estadísticamente significativa para rechazar la hipótesis nula de ausencia de efectos ARCH en los residuos de los modelos SARIMA evaluados y el modelo AutoARIMA. Esto indica que los residuos de los modelos son homocedasticos.

Prueba de Normalidad de los Residuos: Kolmogorov-Smirnov test

Prueba de Hipótesis

- **Hipótesis nula (H**₀): Los residuos siguen una distribución normal.
- Hipótesis alternativa (H₁): Los residuos no siguen una distribución normal.

Tabla 8: P-valores de la prueba de Kolmogorov-Smirnov para normalidad de los residuos

Modelo SARIMA	P-valor
SARIMA(1,1,3)(1,1,0) ₄	0.5126
SARIMA(0,1,2)(1,1,0) ₄	0.5089
AutoARIMAh2(1,0,2)(0,1,1) ₄	0.8342
SARIMA(1,1,0)(1,1,0) ₄	0.6266
SARIMA(0,1,1)(1,1,0) ₄	0.6564
AutoARIMAh4(1,0,2)(0,1,1) ₄	0.893

No se encontró evidencia estadísticamente significativa para rechazar la hipótesis nula de normalidad de los residuos según la prueba de Kolmogorov-Smirnov para todos los modelos SARIMA evaluados y el modelo AutoARIMA.

Independencia de los Residuos: Ljung-Box

Prueba de Hipótesis

- Hipótesis nula (H₀): No hay autocorrelación en los residuos hasta el lag especificado.
- Hipótesis alternativa (H₁): Existe autocorrelación en los residuos hasta el lag especificado..

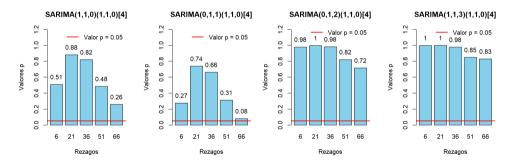


Figura 8: Ljung-Box p-values: h = 4



Evaluación y diagnóstico de los modelos

Independencia de los Residuos: Ljung-Box

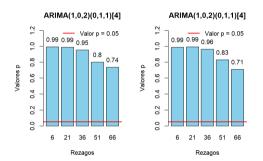


Figura 10: Ljung-Box p-values:autoARIMA h = 2 y h = 4

Los residuos de todos los modelos son independientes.

Dependencias No Lineales: Prueba BDS

Prueba de Hipótesis

- Hipótesis nula (H₀):Los residuos de la serie temporal son independientes.
- Hipótesis alternativa (H₁): Los residuos de la serie temporal no son independientes.

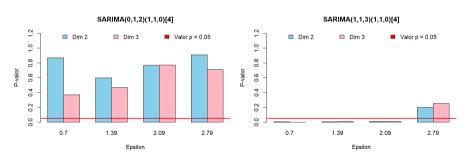


Figura 11: P-valores del Test BDS: h=2

Figura 12: P-valores del Test BDS: h=2

24 de iunio de 2024

Dependencias No Lineales: Prueba BDS

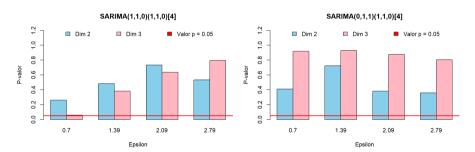


Figura 13: P-valores del Test BDS: h=4

Figura 14: P-valores del Test BDS: h=4



Dependencias No Lineales: Prueba BDS

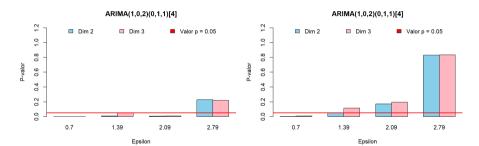


Figura 15: P-valores del Test BDS:autoARIMA Figura 16: P-valores del Test BDS: autoARIMA h=2



Selección del mejor modelo manual en cada horizonte de pronóstico

Para la selección de los modelos SARIMA en los horizontes 2 y 4, se evaluaron distintos criterios bajo supuestos específicos. En el caso del horizonte h=4, ambos modelos considerados cumplieron con los criterios establecidos, pero se seleccionó el modelo final basado en una comparación del AIC. En contraste, para el horizonte h=2, se optó por el modelo que cumplía con todos los supuestos de prueba, en contraposición a otro que falló en uno de ellos.

- Para el horizonte h = 2 el modelo escogido fue: SARIMA(0,1,2)(0,1,1)₄.
- Para el horizonte h = 4
 el modelo escogido fue: SARIMA(1,1,0)(0,1,1)₄.



Evaluación del desempeño del modelo seleccionado y el autoARIMA considerando el horizonte de pronóstico h=2

En las siguientes tablas, se presentarán las métricas de desempeño de los modelos escogidos:

Tabla 9: Métricas de desempeño del modelo manual

Conjunto de datos	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	Theil's U
Entrenamiento	-1885.07	2654.601	1885.07	-0.9021	0.9021	0.001248635
Prueba	53.208	1931.343	1337.642	0.0246	0.8348	0.1105248

Tabla 10: Métricas de desempeño del modelo automático

Conjunto de datos	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	Theil's U
Entrenamiento	-517.5704	2238.368	2177.708	-0.2707	1.0195	0.1295448
Prueba	3.1415	1856.956	1302.961	-0.0006	0.8096	0.1045264

teniendo en cuenta las métricas evaluadas para los datos de entrenamiento y prueba en el horizonte h=2,El modelo automático es superior al manual en el conjunto de prueba por tanto generaliza mejor a nuevos datos, mostrando mejores métricas de ME, RMSE, MAE, MPE, MAPE y Theil's U.

Evaluación del desempeño del modelo seleccionado y el autoARIMA considerando el horizonte de pronóstico h=4

En las siguientes tablas, se presentarán las métricas de desempeño de los modelos escogidos:

Tabla 11: Métricas de desempeño del modelo manual

	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	ACF1	Theil's U
Prueba	194.830	2023.611	1347.582	0.083	0.853	0.128	0.114
Entrenamiento	-5361.013	5872.391	5361.013	-2.433	2.433	0.111	0.252

Tabla 12: Métricas de desempeño del modelo AutoARIMA

	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	ACF1	Theil's U
Prueba	12.191	1867.073	1297.824	-0.005	0.817	0.092	0.105
Entrenamiento	-2901.474	3313.544	2901.474	-1.318	1.318	-0.350	0.136

Teniendo en cuenta las métricas evaluadas; El modelo AutoARIMA es el mejor entre los dos, ya que muestra un mejor desempeño en todas las métricas clave de error (RMSE, MAE, MAPE, ACF1 y Theil's U) para los datos de prueba y entrenamiento.

Comparación de los mejores modelos: horizonte 2 vs horizonte 4

Tabla 13: metricas de desempeño para el mejor modelo del Horizonte 2

Tabla 14: metricas de desempeño para el mejor modelo del Horizonte 4

	Prueba	Entrenamiento
ME	3.1415	-517.5704
RMSE	1856.956	2238.368
MAE	1302.961	2177.708
MPE	-0.0006	-0.2707
MAPE	0.8096	1.0195
ACF1	0.0940	-0.5
Theil's U	0.1045	0.1295

	Prueba	Entrenamiento
ME	12.191	-2901.474
RMSE	1867.073	3313.544
MAE	1297.824	2901.474
MPE	-0.005	-1.318
MAPE	0.817	1.318
ACF1	0.092	-0.3502
Theil's U	0.105	0.1356

Teniendo en cuenta las métricas evaluadas, el **el modelo del horizonte 2 es el mejor**, ya que muestra un desempeño superior en términos de RMSE, MAE, MAPE y Theil's U, lo que indica una mejor capacidad predictiva y precisión en la estimación de valores futuros

Mejor Modelo ARIMA: ARMA(3, 3)

- Método de Estimación: Máxima Verosimilitud (ML)
- Razones para la Selección: AIC más bajo.

Evaluación del Modelo:

- Residuos: Media cercana a cero (p-valor = 0.62), distribución normal (p-valor = 0.76), varianza constante (p-valor = 0.56).
- Autocorrelación: No significativa hasta el k-ésimo rezago.
- Independencia: Residuos no muestran dependencias no lineales significativas.

Por tanto, el modelo ARMA(3, 3) cumple con los supuestos necesarios para obtener resultados confiables.



	Prueba	Entrenamiento
ME	3.1415	-517.5704
RMSE	1856.956	2238.368
MAE	1302.961	2177.708
MPE	-0.0006	-0.2707
MAPE	0.8096	1.0195
ACF1	0.0940	-0.5
Theil's U	0.1045	0.1295

Tabla 15: Métricas de desempeño para el mejor SARIMA

Prueba **Entrenamiento** MF 223923.8 0.9744 RMSF 2243166 19.9060 MAF 223923.8 12.2093 -6.1315MPF 99.9892 MAPE 99.9892 27.1341 ACF1 -0.53550.0458 Theil's U 8.8336 0.1838

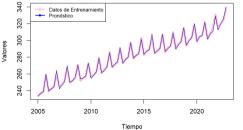
Tabla 16: Métricas de desempeño para el meior ARIMA

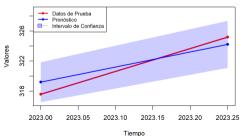
Recomendación del Mejor Modelo

Para pronosticar nuestra serie de tiempo, se recomienda utilizar el modelo SARIMA basado en sus métricas de desempeño superiores en las pruebas de validación y entrenamiento. El SARIMA presenta menores errores de pronóstico (RMSE y MAE más bajos) y mejores estadísticas de ajuste (ACF1 y Theil's U más cercanos a cero).

Ajuste del mejor modelo: SARIMA

Se presenta el ajuste de los datos de entrenamiento y prueba y se comparan con los pronósticos del mejor modelo.





00000000000000000000000

Figura 17: Ajuste del Modelo con Datos de Entrenamiento





Conclusión

Teniendo en cuenta el análisis del modelo SARIMA para pronosticar el gasto en consumo final del Producto Interno Bruto (PIB), este estudio ha logrado cumplir con su objetivo al proporcionar predicciones precisas y estratégicas. Utilizando datos trimestrales desde 2005 hasta 2023, el modelo SARIMA ha demostrado ser un metodo efectivo para anticipar y adaptarse a las variaciones económicas a corto y mediano plazo. Por tanto La implementación del SARIMA permite anticipar y gestionar de manera efectiva las fluctuaciones en el consumo, ofreciendo una herramienta valiosa para economistas, responsables políticos y empresas en la preparación para futuras dinámicas económicas.



Bibliografía

[1]Agrawal, V. (2018). *GDP Modelling and Forecasting Using ARIMA: An Empirical Study from India*. Doctoral Dissertation, Central European University, Budapest.

[2]Irungu, I. (2020). The Drivers of Inflation during the COVID-19 Pandemic. Data Stores, Nairobi.

[3]Mankiw, G. (2014). Macroeconomía. Barcelona: Antonio Bosh.

[4]Innes, N. (2019). Time Series Analysis: Forecasting Treasury Bill Interest Rates. Doctoral Dissertation, Murray State University, Murray. [5]Banco de la República de Colombia (2024). Producto Interno Bruto. Consultado el 23 de junio de 2024.

https://uba.banrep.gov.co/htmlcommons/SeriesHistoricas/producto-interno-bruto.html

[6]Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE) (2023). Cifras de Pobreza en Colombia. Consultado el 23 de junio de 2024. https://www.dane.gov.co/index.php/estadísticas-por-tema/pobreza-y-condiciones-de-vida/cifras-de-pobreza-en-colombia

Bibliografía