Wahrscheinlichkeit und Statistik
Prüfungsnotizen

Fabian Bösiger

Inhalt

- Wahrscheinlichkeiten . . . 3
  - Grundbegriffe . . . 3
  - Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume . . . 4
  - Bedingte Wahrscheinlichkeiten . . . 4
  - Unabhängigkeit . . . 4
- Diskrete Zufallsvariablen und Verteilungen . . . 5
  - Grundbegriffe . . . 5
  - Erwartungswerte . . . 5
  - Gemeinsame Verteilungen und unabhängige Zufallsvariablen . . . 6
  - Funktionen von mehreren Zufallsvariablen . . . 6
  - Bedingte Verteilungen . . . 7
- Wichtige diskrete Verteilungen . . . 7
- Allgemeine Zufallsvariablen . . . 8
  - Grundbegriffe . . . 8
  - Wichtige stetige Verteilungen . . . 9
  - Gemeinsame Verteilungen und unabhängige Zufallsvariablen . . . 10
  - Funktionen und Transformationen von Zufallsvariablen . . . 10
- Ungleichungen und Grenzwertsätze . . . 10
  - Ungleichungen . . . 10
  - Das Gesetz der grossen Zahlen . . . 10
  - Der Zentrale Grenzwertsatz . . . 11
  - Grosse Abweichungen und Chernoff-Schranken . . . 11
- Schätzer . . . 11
  - Grundbegriffe . . . 11

Die Maximum-Likelihood-Methode 12
Verteilungsaussagen 12
Tests 12

Wahrscheinlichkeiten

Grundbegriffe

Ereignisraum Ω: Menge aller möglichen elementaren Ereignissen.

Beispiel: Bei einem Würfelwurf sind die Elementarereignisse $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ oder 2^Ω: Menge aller Teilmengen von Ω.

Klasse aller beobachtbaren Ereignisse $\mathcal{F}$: $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathcal{F}$ ist eine σ-Algebra. Bei diskreten, d.h. endlichen bzw. abzählbaren Wahrscheinlichkeitsräumen wird $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ gewählt.

σ-Algebra: $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ist eine σ-Algebra, wenn gilt:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$
3. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, A_n \in \mathcal{F} \implies \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Beispiel: Jemand wirft einen Würfel und teilt uns mit, ob die gewürfelte Zahl gerade oder ungerade ist.

Wir könnten den Grundraum $\Omega_1 = \{G, U\}$ wählen mit G für gerade und U für ungerade. In diesem Fall wäre $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega_1, \{G\}, \{U\}\}$.

Jedoch könnten wir auch den Grundraum $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ wählen. Dann wäre $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega_2, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}\} \neq \mathcal{P}(\Omega_2)$, da beispielsweise das prinzipielle Ereignis $\{1\}$ nie beobachtbar ist.

Wahrscheinlichkeitsmass $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$: $P[A] \in \mathcal{F}] \in [0, 1]$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt. Dabei muss gelten:

1. $\forall A \in \mathcal{F} : P[A] \geq 0$
2. $P[\Omega] = 1$
3. $P[\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i] = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P[A_i]$, sofern die $A_i \in \mathcal{F}$ paarweise disjunkt sind.

Folgende Rechenregeln lassen sich herleiten:

1. $P[A^c] = 1 - P[A]$
2. $P[\emptyset] = 0$
3. Für $A \subseteq B$ gilt $P[A] \leq P[B]$

4. Additionsregel: $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Bei diskreten, d.h. endlichen bzw. abzählbaren Wahrscheinlichkeitsräumen gilt $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $P[A] = \sum\limits_{w_i \in A} P[\{w_i\}]$.

Laplace-Raum Ω ist endlich und ich alle Elementarereignisse $\Omega = \{w_1, \dots, w_N\}$ sind gleich wahrscheinlich mit $p_1 = \dots = p_N = \frac{1}{N}$.

Diskrete Gleichverteilung In einem Laplace-Raum gilt für beliebige $A \subseteq \Omega$: $P[A] = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Beispiel: Beim zweimaligen Münzwurf ist $\Omega = \{KK, KZ, ZK, ZZ\}$, also $|\Omega| = 4$ und damit $p_i = \frac{1}{4}$. Dann ist $P[\text{Mindestens einmal Kopf}] = P[\{KK, KZ, ZK\}] = \frac{3}{4}$.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Bedingte Wahrscheinlichkeit Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt, unter der Bedingung, dass A eintritt: $P[B \mid A] := \frac{P[B \cap A]}{P[A]}$.

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit (Satz 1.1) Sei $A_1, \dots, A_n$ eine Zerlegung von Ω in paarweise disjunkte Ereignisse, dann gilt für beliebiege Ereignisse B: $P[B] = \sum\limits_{i=1}^{n} P[B \mid A_i] P[A_i]$.

Formel von Bayes (Satz 1.2) Ist $A_1, \dots, A_n$ eine Zerlegung von Ω mit $P[A_i] > 0$ und B ein Ereignis mit $P[B] > 0$, so gilt für jedes k: $P[A_k \mid B] = \frac{P[B|A_k]P[A_k]}{\sum\limits_{i=1}^{n} P[B|A_i]P[A_i]}$.

Unabhängigkeit

Stochastische Unabhängigkeit Zwei Ereignisse A, B heissen stochastisch unabhängig, falls $P[A \cap B] = P[A]P[B]$.

Allgemeiner: Zwei Ereignisse A, B heissen stochastisch unabhängig, wenn für jede endliche Teilfamile $\{k_1, \dots, k_m\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ gilt, dass

$P\left[\bigcap_{i=1}^{m} A_{k_i}\right] = \prod_{i=1}^{m} P[A_{k_i}]$.

Ist $P[A] = 0$ oder $P[B] = 0$, so sind A und B immer unabhängig.

Für $P[A] \neq 0$ gilt: A, B unabhängig $\iff P[B \mid A] = P[B]$.

Diskrete Zufallsvariablen und Verteilungen

Grundbegriffe

Diskrete Zufallsvariable Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $W(X)$: Wertebereich von X.

Indikatorfunktion Für jede Teilmente $A \subset \Omega$ gilt: $I_A(w) := \begin{cases} 1 & w \in A \\ 0 & w \in A^c \end{cases}$

Verteilungsfunktion $F_x : \mathbb{R} \to [0,1]$, $F_X(t) := P[X \leq t] = P[\{w \mid X(w) \leq t\}]$.

Gewichtsfunktion $p_x : W(X) \to [0,1]$, $p_X(x_k) := P[X = x_k] = P[\{w \mid X(w) = x_k\}]$.

Es gilt $F_X(t) = P[X \leq t] = \sum_{x_k \leq t} p_X(x_k)$

Erwartungswerte

Erwartungswert $E[X] := \sum_{x_k \in W(X)} x_k p_X(x_k)$. Es gilt:

1. Monotonie: Ist $X \leq Y$ (d.h. $\forall w : X(w) \leq Y(w)$), so gilt auch $E[X] \leq E[Y]$
2. Linearität: $E[aX + b] = aE[X] + b$
3. Falls $X \geq 0$, so gilt $E[X] = \sum_{j=1}^{\infty} P[X \geq j]$

Varianz $\mathrm{Var}[X] := E[(X - E[X])^2]$. Es gilt:

1. $\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2$
2. $\mathrm{Var}[aX + b] = a^2 \mathrm{Var}[X]$

Standardabweichung $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$.

Gemeinsame Verteilungen und unabhängige Zufallsvariablen

Gemeinsame Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, $F(x_1, \ldots, x_n) := P[X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n]$

Gemeinsame Gewichtsfunktion $p : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, $p(x_1, \ldots, x_n) := P[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n]$

$F(x_1, \ldots, x_n) = P[X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n] = \sum\limits_{y_1 \leq x_1, \ldots, y_n \leq x_n} P[X_1 = y_1, \ldots, X_n = y_n] = \sum\limits_{y_1 \leq x_1, \ldots, y_n \leq x_n} p(y_1, \ldots, y_n)$

Randverteilung Verteilungsfunktion der Randverteilung von X: $F_X(x) := P[X \leq x] = P[X \leq x, Y < \infty] = \lim\limits_{y \to \infty} F(x, y)$

Gewichtsfunktion der Randverteilung von X: $p_X(x) := P[X = x] = \sum\limits_{y_j \in W(Y)} P[X = x, Y = y_j] = \sum\limits_{y_j \in W(Y)} p(x, y_j)$

Unabhängigkeit $X_1, \ldots, X_n$ heissen unabhängig, falls $F(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n)$ beziehungsweise $p(x_1, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1) \cdots p_{X_n}(x_n)$.

Funktionen von mehreren Zufallsvariablen

Linearität (Satz 2.4) Seien $X_1, \ldots, X_n$ diskrete Zufallsvariablen mit endlichen Erwartungswerten. Sei $Y = a + \sum\limits_{l=1}^{n} b_l X_l$ mit Konstanten $a, b_1, \ldots, b_n$. Dann gilt $E[Y] = a + \sum\limits_{l=1}^{n} b_l E[X_l]$.

Kovarianz $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) := E[X_1 X_2] - E[X_1]E[X_2]$

$\mathrm{Cov}(X, X) = Var[X]$

Unkorreliertheit X_1 und X_2 sind unkorreliert, wenn gilt $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$.

Produkte von Zufallsvariablen (Satz 2.5) Seien $X_1, \ldots, X_n$ diskrete Zufallsvariablen mit endlichen Erwartungswerten. Falls $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig sind, so gilt: $E\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right] = \prod_{i=1}^{n} E[X_i]$. Ausserdem sind dann $X_1, \ldots, X_n$ unkorreliert und es gilt: $\operatorname{Var}\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right] = \prod_{i=1}^{n} \operatorname{Var}[X_i]$.

Bedingte Verteilungen

Bedingte Gewichtsfunktion Seien X and Y diskrete Zufallsvariablen mit gemeinsamer Gewichtsfunktion $p(x, y)$. Die bedingte Gewichtsfunktion von X, gegeben dass $Y = y$, is te definiert durch $p_{X|Y}(x \mid y) := P[X = x \mid Y = y] = \frac{P[X=x,Y=y]}{P[Y=y]} = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$ für $p_Y(y) > 0$ und 0 sonst.

Wichtige diskrete Verteilungen

Verteilung	Kurz	Gewichtsfunktion $p_X(k) = P[X = k]$	Erwartungswert $E[X]$	Varianz $\operatorname{Var}[X]$
Diskrete Gleichverteilung		$\frac{1}{N}$		
Bernoulli-Verteilung	$X \sim \operatorname{Be}(p)$	$p^k(1-p)^{1-k}$	p	$p(1-p)$
Binomialverteilung	$X \sim \operatorname{Bin}(n, p)$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Geometrische Verteilung	$X \sim \operatorname{Geom}(p)$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Negativbinomiale Verteilung	$X \sim \operatorname{NB}(r, p)$	$\binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$
Hypergeometrische Verteilung		$\frac{\binom{r}{k}\binom{n-r}{m-k}}{\binom{n}{m}}$		
Poisson-Verteilung	$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ

Allgemeine Zufallsvariablen

Grundbegriffe

	Diskrete Zufallsvariablen	Allgemeine Zufallsvariablen
Zufallsvariable		
Verteilungsfunktion	$F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ $F_X(t) := P[X \leq t] := P[\{w \mid X(w) \leq t\}] = \sum\limits_{x_k \leq t} p_X(x_k)$	$F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ $F_X(t) := P[X \leq t] := P[\{w \mid X(w) \leq t\}] = \int\limits_{-\infty}^{t} f_X(s)ds$
Gemeinsame Verteilungsfunktion	$F : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ $F(x_1, \ldots, x_n) = P[X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n] = \sum\limits_{y_1 \leq x_1, \ldots, y_n \leq x_n} p(y_1, \ldots, y_n)$	$F : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ $F(x_1, \ldots, x_n) = P[X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n] = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \cdots \int\limits_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \ldots, t_n)dt_n \cdots dt_1$
Monoton wachsend	$\forall s \leq t : F_X(s) \leq F_X(t)$	Analog
Rechtsstetig	$\forall u > t, u \to t : F_X(u) \to F_X(t)$	Analog
	$\lim\limits_{t \to \infty} F_X(t) = 1$, $\lim\limits_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$	Analog
Verteilung	$\mu_X(B) := P[X \in B] = \sum\limits_{x_k \in B} p_X(x_k)$	$\mu_X(B) := P[X \in B] = \int\limits_B f_X(s)ds$
Gewichtsfunktion, Dichtefunktion	$p_X(x_k) := P[X = x_k] = P[\{w \mid X(w) = x_k\}]$	$f_X(t) = \frac{d}{dt}F_X(t)$
		$f_X \geq 0$, $f_X = 0$ ausserhalb von $W(X)$ $f(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$, $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ ausserhalb von $W(X_1, \ldots, X_n)$ $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(s)ds = 1$

	Diskrete Zufallsvariablen	Allgemeine Zufallsvariablen
		$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \cdots dx_1$ 1
Erwartungswert	$E[X] = \sum_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$	$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$
Varianz	$\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2$	Analog

Wichtige stetige Verteilungen

Verteilung	Kurz	Wertebereich $W(X)$	Dichtefunktion $f_X(t)$	Verteilungsfunktion $F_X(t)$	Erwartungswert $E[X]$	Varianz $\text{Var}[X]$
Gleichverteilung	$X \sim \mathcal{U}(a, b)$	$[a, b]$	$\begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \leq t \leq b \\ 1 & t > b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	
Exponentialverteilung	$X \sim \text{Exp}(\lambda)$	$[0, \infty)$	$\begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$		
Normalverteilung	$X \sim \mathcal{N}(\lambda, \sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2})$		μ	σ^2

Standard-Normalverteilung Für die Standard-Normalverteilung $\mathcal{N}(0, 1)$ gilt $F_X(t) = \Phi(t)$.

Ist $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, so ist $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

t	$\Phi(t)$

TODO: Tabelle

Abhängige Zufallsvariablen (Satz 4.1) Sei X eine Zufallsvariable und $Y = g(X)$ eine weitere Zufallsvarable. Ist X stetig mit

Dichte $f_X(x)$, so ist $E[Y] = E[g(X)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$.

Gemeinsame Verteilungen und unabhängige Zufallsvariablen

Funktionen und Transformationen von Zufallsvariablen

Ungleichungen und Grenzwertsätze

Ungleichungen

Markov-Ungleichung Sei X eine Zufallsvariable und $g : W(X) - > [0, \infty)$ eine wachsende Funktion. Dann gilt für jedes $c \in \mathbb{R}$ mit $g(c) > 0$: $F[X \geq c] \leq \frac{E[g(X)]}{g(c)}$.

Chebyshev-Ungleichung Sei Y eine Zufallsvariable mit endlicher Varianz. Für jedes $b > 0$ gilt dann:

$$\boxed{P[|Y - E[Y]| \geq b] \leq \frac{Var[Y]}{b^2}}$$

Das Gesetz der grossen Zahlen

Schwaches Gesetz der grossen Zahlen Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit dem gleichen Erwartungswert $E[X_i] = \mu$ und der gleichen Varianz $\mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2$. Sei $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Dann konvergiert $\overline{X}_n$ für $n \to \infty$ stochastisch gegen $\mu = E[X_i]$, d.h.:

$$\boxed{\forall \epsilon > 0 : P[|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon] \xrightarrow{n \to \infty} 0}$$

Beweis mit Chebyshev-Ungleichung.

Starkes Gesetz der grossen Zahlen Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit dem gleichen **endlichen** Erwartungswert $E[X_i] = \mu$ und der gleichen Verteilung. Sei $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Dann konvergiert $\overline{X}_n$ für $n \to \infty$ fastsicher gegen $\mu = E[X_i]$, d.h.:

$$\boxed{P[\{\omega \in \Omega \mid \bar{X}_n(\omega) \xrightarrow{n \to \infty} \mu\}] = 1}$$

Der Zentrale Grenzwertsatz

Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $E[X_i] = \mu$ und $\mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2$. Für die Summe $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ gilt dann $\lim_{n \to \infty} P[\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x] = \Phi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

S_n hat den Erwartungswert $E[S_n] = n\mu$ und Varianz $\mathrm{Var}[S_n] = n\sigma^2$. Also ist $S_n^* = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S_n]}}$ die Standartisierung von S_n mit $E[S_n^*] = 0$ und $\mathrm{Var}[S_n] = 1$.

Deshalb gilt $P[S_n^* \leq x] \approx \Phi(x)$, $S_n^* \sim \mathcal{N}(0, 1)$ für grosse n.

Grosse Abweichungen und Chernoff-Schranken

TODO: Ist dieses Kapitel Prüfunsrelevant?

Momenterzeugende Funktion Die momenterzeugende Funktion einer Zufallsvariable X ist $M_X(t) := E[e^{tX}]$ für $t \in \mathbb{R}$.

(Satz 5.6)

Schätzer

Grundbegriffe

Stichprobe Gesamtheit der Beobachungen $x_1, \ldots, x_n$ oder Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$. Die Anzahl n heisst Stichprobenanzahl.

Stochastischer Mechanismus P_ϑ ist ein konkreter stochastischer Mechanismus, der besagt, wie sich $X_1, \ldots, X_n$ verhalten. Dabei wird der Parameter ϑ zu bestimmen versucht.

Schätzer Die Schätzer $T_1, \ldots, T_m$ schätzen die Parameter $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m$. Sie sind Zufallsvariablen mit der Form $T_j = t_j(X_1, \ldots, X_n)$.

Schätzwert $T_j(\omega) = t_j(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ eines konkreten Experiments ω.

Erwartungstreuheit Ein Schätzer T heisst erwartungstreu für $\vartheta \in \Theta$, falls gilt $E_\vartheta[T] = \vartheta$

Bias $E_\vartheta[T] - \vartheta$

Mittlerer quardratischer Schätzfehler $\mathrm{MSE}_\vartheta[T] := E_\vartheta[(T-\vartheta)^2]$ $= Var_\vartheta[T] + (E_\vartheta[T] - \vartheta)^2$

Konsistenz Eine Folge von Schätzern $T^{(n)}$ heisst konsistent für ϑ, falls für jedes $\vartheta \in \Theta$ und jedes $\varepsilon > 0$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} P_\vartheta[|T^{(n)} - \vartheta| > \varepsilon] = 0$.
Beweisen mit Chebychev-Ungleichung.

Die Maximum-Likelihood-Methode

Likelihood-Funktion $L(x_1, \ldots, x_n; \vartheta) := \begin{cases} p(x_1, \ldots, x_n; \vartheta) & \text{Im diskreten Fall} \\ f(x_1, \ldots, x_n; \vartheta) & \text{Im stetigen Fall} \end{cases}$

ML-Schätzer Der ML-Schätzer T für ϑ wird definiert als Maximierung von $L(X_1, \ldots, X_n; \vartheta)$ als Funktion von ϑ.

Momentenschätzer ML-Schätzer für $\vartheta = (\mu, \sigma^2)$ ist $T = (T_1, T_2)$ mit $T_1 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}_n$ und $T_2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1} n(X_i - \overline{X}_n)^2 = \sum\limits_{i=1} nX_i^2 - \overline{X}_n^2$

Verteilungsaussagen

Mehrere Normalverteilte Variablen (Satz 7.1) Seien $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Dann gilt:

1. $\overline{X}_n$ ist normalverteilt gemäss $\sim \mathcal{N}(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2)$, und $\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
2. $\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$ ist $\mathcal{X}^2$-verteilt mit $n-1$ Freiheitsgraden.
3. $\overline{X}_n$ und S^2 sind unabhänging.
4.

Tests