Berechung von Differentialgleichungen

Vorkenntnisse

Im Folgenden wird angenommen, dass der Leser mit einigen Konzepten vertraut ist. Diese beinhalten:

- Differentialrechnung
- Integralrechnung

Differentialgleichungen identifizieren

Differentialgleichungen sind Gleichungen, für die keine Zahl, sondern eine Funktion gesucht wird.

Es werden folgende Notationen verwendet:

$$
\begin{gathered}
f(x) = y \\
f(x)' = y' = y^{(1)} \\
f(x)'' = y'' = y^{(2)} \\
...
\end{gathered}
$$

Ein Beispiel einer Differentialgleichung:

$$y' = y$$

Es muss also gelten, das die erste Ableitung unserer gesuchten Funktion der Funktion selbst gleicht. Wer sich bereits mit Ableitungen beschäftigt hat, weiss dass $f(x) = e^x$ diese Voraussetzung erfüllt und somit unsere Lösung für die obige Gleichung ist.

Differentialgleichungen identifizieren

Zunächst sollten wir die Differentialgleichung klassifizieren, indem wir sie auf Linearität und Ordnung untersuchen.

Der erste Schritt besteht darin, zu erkennen ob die Differentialgleichung eine *gewöhnliche Differentialgleichung (Ordinary Differential Equation, ODE)* ist. Diese hat die allgemeine Form.

$$f(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

Falls es nicht möglich ist, die Differentialgleichung in diese Form zu bringen, ist es eine *partielle Differentialgleichung*.

Die *Ordnung* der Differentialgleichung wird bestimmt durch die höchste vorkommende Ableitung der zu findenden Funktion. In der obigen allgemeinen Form ist die Ordnung somit n.

Als Nächstes untersuchen wir die Differentialgleichung auf Linearität. Dazu bringen wir sie in folgende Form:

$$y^{(k)} + a_{(k-1)}(x)y^{(k-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

Wobei $b, a_0, ..., a_{(k-1)}$ differenzierbar sind.

Falls es möglich ist, die Differentialgleichung in diese Form zu bringen, nennen wir sie eine *lineare Differentialgleichung*.

Wenn für die lineare Differentialgleichung gilt, dass $b(x) = 0$, ist die Differentialgleichung *homogen*, ansonsten isNein, da $-e^{x^2}$ in der Gleichung vorkommt.t sie *inhomogen*.

Einige Beispiele:

Gleichung	Gewöhnlich	Linear	Linear homogen
$f'(x) = f(x+1)$	Nein, da f und f' an verschieden Punkten ausgewertet werden.	Nein, da nicht gewöhnlich.	Nein, da nicht liLösennear.
$y^2 = y'y''$	Ja	Nein, da y^2 in der Gleichung vorkommt.	Nein, da nicht linear.
$y'' + cos(y)y' + y = x^2$	Ja	Nein, da $cos(y)$ in der Gleichung vorkommt.	Nein, da nicht linear.
$y'' + 2y = -e^{x^2}$	Ja	Ja	Nein, da $-e^{x^2}$ in der Gleichung vorkommt.
$y^{(3)} + 6y' + y = 0$	Ja	Ja	Ja

Differentialgleichungen berechnen

Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Sämtliche lineare Differentialgleichungen erster Ordung können in die folgende Form gebracht werden:

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Betrachten wir die entsprechende homogene Gleichung und versuchen wir, diese zu lösen:

$$
\begin{gathered}
y' + a(x)y = 0 \\
y' = -a(x)y \\
\frac{y'}{y} = -a(x) \\
log(|y|)' = -a(x) \\
log(|y|) = -\int a(x)dx + c \\
log(|y|) = -A(x) \\
y = ze^{-A(x)}
\end{gathered}
$$

Wobei z und z konstant sind. Somit ist $y = ze^{-A(x)}$ unsere allgemeine Lösung für homogene lineare Differentialgleichungen erster Ordnung. Diese Lösung nennen wir die *homogene Lösung*.

Um inhomogene Differentialgleichungen erster Ordnung zu Lösen, verwenden wir eine Methode namens *Variation der Konstanten*. Dazu setzen wir die homogene Lösung in die inhomogene Differentialgleichung ein, ersetzen aber die Konstante z mit einer Funktion $z(x)$, wir setzen also $y = z(x)e^{-A(x)}$ ein:

$$
\begin{gathered}
y' + a(x)y = b(x) \\
(z(x)e^{-A(x)})' + a(x)z(x)e^{-A(x)} = b(x) \\
z(x)'e^{-A(x)} + z(x)(-a(x))e^{-A(x)} + a(x)z(x)e^{-A(x)} = b(x) \\
z(x)'e^{-A(x)} - a(x)z(x)e^{-A(x)} + a(x)z(x)e^{-A(x)} = b(x) \\
z(x)'e^{-A(x)} = b(x) \\
z(x)' = b(x)e^{A(x)} \\
z(x) = \int b(x)e^{A(x)}dx
\end{gathered}
$$

Wenn wir jetzt diese Lösung in $y = z(x)e^{-A(x)}$ einsetzen, erhalten wir unsere allgemeine Lösung für lineare Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$
y = (\int b(x)e^{A(x)}dx)e^{(-A(x))}
$$

Ein Trick, den man anwenden kann für Differentialgleichungen mit der Form:

$$
y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)
$$

Wenn wir die Lösungen y_1 für $y' + ay = b_1$ und y_2 für $y' + ay = b_2$ kennen, dann ist die Lösung der obigen Gleichung $y = y_1 + y_2$.

Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten haben die Form:

$$y^{(k)} + a_{(k-1)}y^{(k-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

Zu beachten ist, dass $a_i, i \in \{0, ..., (k-1)\}$ keine Funktionen, sondern Konstanten sind, $b(x)$ aber immer noch eine Funktion sein kann.

Zunächst lösen wir wieder die entsprechende homogene Gleichung:

$$y^{(k)} + a_{(k-1)}y^{(k-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0$$