

Berechnung von Differentialgleichungen

Vorkenntnisse

Im Folgenden wird angenommen, dass der Leser mit einigen Konzepten vertraut ist. Diese beinhalten:

- Differentialrechnung
- Integralrechnung
- Komplexe Zahlen

Differentialgleichungen identifizieren

Differentialgleichungen sind Gleichungen, für die keine Zahl, sondern eine Funktion gesucht wird.

Es werden folgende Notationen verwendet:

$$\begin{aligned}f(x) &= y \\f(x)' &= y' = y^{(1)} \\f(x)'' &= y'' = y^{(2)} \\&\dots\end{aligned}$$

Ein Beispiel einer Differentialgleichung:

$$y' = y$$

Es muss also gelten, dass die erste Ableitung unserer gesuchten Funktion der Funktion selbst gleicht. Wer sich bereits mit Ableitungen beschäftigt hat, weiss dass $f(x) = e^x$ diese Voraussetzung erfüllt und somit unsere Lösung für die obige Gleichung ist.

Differentialgleichungen identifizieren

Zunächst sollten wir die Differentialgleichung klassifizieren, indem wir sie auf Linearität und Ordnung untersuchen.

Der erste Schritt besteht darin, zu erkennen ob die Differentialgleichung eine *gewöhnliche Differentialgleichung* (*Ordinary Differential Equation, ODE*) ist. Diese hat die allgemeine Form.

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Falls es nicht möglich ist, die Differentialgleichung in diese Form zu bringen, ist es eine *partielle Differentialgleichung*.

Die *Ordnung* der Differentialgleichung wird bestimmt durch die höchste vorkommende Ableitung der zu findenden Funktion. In der obigen allgemeinen Form ist die Ordnung somit n .

Als Nächstes untersuchen wir die Differentialgleichung auf Linearität. Dazu bringen wir sie in folgende Form:

$$y^{(k)} + a_{(k-1)}(x)y^{(k-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

Wobei $b, a_0, \dots, a_{(k-1)}$ differenzierbar sind.

Falls es möglich ist, die Differentialgleichung in diese Form zu bringen, nennen wir sie eine *lineare Differentialgleichung*.

Wenn für die lineare Differentialgleichung gilt, dass $b(x) = 0$, ist die Differentialgleichung *homogen*, ansonsten ist sie *inhomogen*.

Einige Beispiele:

Gleichung	Gewöhnlich	Linear	Linear homogen
$f'(x) = f(x+1)$	Nein, da f und f' an verschiedenen Punkten ausgewertet werden.	Nein, da nicht gewöhnlich.	Nein, da nicht lösbar.
$y^2 = y'y''$	Ja	Nein, da y^2 in der Gleichung vorkommt.	Nein, da nicht linear.
$y'' + \cos(y)y' + y = x^2$	Ja	Nein, da $\cos(y)$ in der Gleichung vorkommt.	Nein, da nicht linear.
$y'' + 2y = -e^{x^2}$	Ja	Ja	Nein, da $-e^{x^2}$ in der Gleichung vorkommt.
$y^{(3)} + 6y' + y = 0$	Ja	Ja	Ja

Differentialgleichungen berechnen

Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Sämtliche lineare Differentialgleichungen erster Ordnung können in die folgende Form gebracht werden:

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Betrachten wir die entsprechende homogene Gleichung und versuchen wir, diese zu lösen:

$$y' + a(x)y = 0$$

$$y' = -a(x)y$$

$$\frac{y'}{y} = -a(x)$$

$$\log(|y|)' = -a(x)$$

$$\log(|y|) = -\int a(x)dx + c$$

$$\log(|y|) = -A(x)$$

$$y = ze^{-A(x)}$$

Wobei z und z konstant sind. Somit ist $y = ze^{-A(x)}$ unsere allgemeine Lösung für homogene lineare Differentialgleichungen erster Ordnung. Diese Lösung nennen wir die *homogene Lösung*.

Zu beachten ist, dass die triviale Lösung $y = 0$ immer eine Lösung der homogenen Gleichung ist.

Um inhomogene Differentialgleichungen erster Ordnung zu Lösen, verwenden wir eine Methode namens *Variation der Konstanten*. Dazu setzen wir die homogene Lösung in die inhomogene Differentialgleichung ein, ersetzen aber die Konstante z mit einer Funktion $z(x)$, wir setzen also $y = z(x)e^{-A(x)}$ ein:

$$y' + a(x)y = b(x)$$

$$(z(x)e^{-A(x)})' + a(x)z(x)e^{-A(x)} = b(x)$$

$$z(x)'e^{-A(x)} + z(x)(-a(x))e^{-A(x)} + a(x)z(x)e^{-A(x)} = b(x)$$

$$z(x)'e^{-A(x)} - a(x)z(x)e^{-A(x)} + a(x)z(x)e^{-A(x)} = b(x)$$

$$z(x)'e^{-A(x)} = b(x)$$

$$z(x)' = b(x)e^{A(x)}$$

$$z(x) = \int b(x)e^{A(x)}dx$$

Wenn wir jetzt diese Lösung in $y = z(x)e^{-A(x)}$ einsetzen, erhalten wir unsere allgemeine Lösung für lineare Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$y = (\int b(x)e^{A(x)}dx)e^{(-A(x))}$$

Ein Trick, den man anwenden kann für Differentialgleichungen mit der Form:

$$y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$$

Wenn wir die Lösungen y_1 für $y' + ay = b_1$ und y_2 für $y' + ay = b_2$ kennen, dann ist die Lösung der obigen Gleichung $y = y_1 + y_2$.

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Zunächst bringen wir die Differentialgleichung in die Form:

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

Wir suchen die Basis $(f_1(x), f_2(x))$, indem wir die entsprechende homogene Differentialgleichung lösen:

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

Anschliessend formen wir die *partikuläre Lösung* der homogenen Differentialgleichung:

$$f(x) = z_1(x)f_1(x) + z_2(x)f_2(x)$$

Um $z_1(x)$ und $z_2(x)$ herauszufinden, müssen wir folgendes Gleichungssystem lösen:

$$\begin{aligned} z_1'f_1' + z_2'f_2' &= b \\ z_1'f_1 + z_2'f_2 &= 0 \end{aligned}$$

Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten haben die Form:

$$y^{(k)} + a_{(k-1)}y^{(k-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b(x)$$

Zu beachten ist, dass $a_i, i \in \{0, \dots, (k-1)\}$ keine Funktionen, sondern Konstanten sind, $b(x)$ aber immer noch eine Funktion sein kann.

Zunächst lösen wir wieder die entsprechende homogene Gleichung:

$$y^{(k)} + a_{(k-1)}y^{(k-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

Wir nehmen zudem an, dass die Lösung die Form $y = e^{bx}$ hat. Somit hat die k -te Ableitung die Form $y^{(k)} = b^k e^{bx}$ hat. Wenn wir diese Lösungsform in die allgemeine homogene Gleichung einsetzen, erhalten wir:

$$\begin{aligned} y^{(k)} + a_{(k-1)}y^{(k-1)} + \dots + a_1y' + a_0y &= 0 \\ b^k e^{bx} + a_{(k-1)}b^{(k-1)}e^{bx} + \dots + a_1be^{bx} + a_0e^{bx} &= 0 \\ (b^k + a_{(k-1)}b^{(k-1)} + \dots + a_1b + a_0)e^{bx} &= 0 \end{aligned}$$

Wie vorher ist die triviale Lösung $y = 0$ immer eine Lösung der homogenen Gleichung.

Wir können die obige Gleichung weiter vereinfachen:

$$b^k + a_{(k-1)}b^{(k-1)} + \dots + a_1b + a_0 = 0$$

Diese Gleichung nennen wir die *charakteristische Gleichung* der gewöhnlichen Differentialgleichung. Einige Beispiele:

Differentialgleichung	Charakteristische Gleichung
$y'' + 2y' - 3y = 0$	$b^2 + 2b - 3 = 0$
$y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 0$	$b^3 - 2b^2 - 4b + 8 = 0$

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat dieses *Charakteristische Polynom* im Bereich der komplexen Zahlen mindestens eine Nullstelle. Um die Lösung der charakteristischen Gleichung zu finden, bringen wir es in die folgende Form:

$$(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_k) = 0$$

Die Lösungen der homogenen Differentialgleichung sind somit $y_i = e^{\alpha_i x}$, $1 \leq i \leq k$. Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist folgendermassen:

$$y = z_1 y_1 + \dots + z_k y_k$$

Wobei $z_i, i \in \{1, \dots, k\}$ beliebige komplexe Zahlen sind.

Als nächstens lösen wir die eigentliche inhomogene lineare Differentialgleichung.