Wahrscheinlichkeit und Statistik

Wahrscheinlichkeiten

Grundbegriffe

Ereignisraum Ω: Menge aller möglichen elementaren Ereignissen.

Beispiel: Bei einem Würfelwurf sind die Elementarereignisse $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ **oder** 2^Ω: Menge aller Teilmengen von Ω.

Klasse aller beobachtbaren Ereignisse $\mathcal{F}$: $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathcal{F}$ ist eine σ-Algebra. Bei diskreten, d.h. endlichen bzw. abzählbaren Wahrscheinlichkeitsräumen wird $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ gewählt.

σ**-Algebra**: $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ist eine σ-Algebra, wenn gilt:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$
3. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, A_n \in \mathcal{F} \implies \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Beispiel: Jemand wirft einen Würfel und teilt uns mit, ob die gewürfelte Zahl gerade oder ungerade ist.

Wir könnten den Grundraum $\Omega_1 = \{G, U\}$ wählen mit G für gerade und U für ungerade. In diesem Fall wäre $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega_1, \{G\}, \{U\}\}$.

Jedoch könnten wir auch den Grundraum $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ wählen. Dann wäre $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega_2, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}\} \neq \mathcal{P}(\Omega_2)$, da beispielsweise das prinzipielle Ereignis $\{1\}$ nie beobachtbar ist.

Wahrscheinlichkeitsmass $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$: $P[A] \in \mathcal{F}] \in [0, 1]$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt. Dabei muss gelten:

1. $\forall A \in \mathcal{F} : P[A] \geq 0$
2. $P[\Omega] = 1$
3. $P[\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i] = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P[A_i]$, sofern die $A_i \in \mathcal{F}$ paarweise disjunkt sind.

Folgende Rechenregeln lassen sich herleiten:

1. $P[A^c] = 1 - P[A]$
2. $P[\emptyset] = 0$

3. Für $A \subseteq B$ gilt $P[A] \leq P[B]$
4. Additionsregel: $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Bei diskreten, d.h. endlichen bzw. abzählbaren Wahrscheinlichkeitsräumen gilt $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $P[A] = \sum\limits_{w_i \in A} P[\{w_i\}]$.

Laplace-Raum: Ω ist endlich alle Elementarereignisse $\Omega = \{w_1, \ldots, w_N\}$ sind gleich wahrscheinlich mit $p_1 = \cdots = p_N = \frac{1}{N}$.

Diskrete Gleichverteilung: In einem Laplace-Raum gilt für beliebige $A \subseteq \Omega$: $P[A] = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Beispiel: Beim zweimaligen Münzwurf ist $\Omega = \{KK, KZ, ZK, ZZ\}$, also $|\Omega| = 4$ und damit $p_i = \frac{1}{4}$. Dann ist $P[\text{Mindestens einmal Kopf}] = P[\{KK, KZ, ZK\}] = \frac{3}{4}$.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Unabhängigkeit

Diskrete Zufallsvariablen und Verteilungen

Grundbegriffe

Diskrete Zufallsvariable: Funktion $X : \Omega -> \mathbb{R}$, $W(X)$: Wertebereich von X.

Verteilungsfunktion $F_x : \mathbb{R} \to [0,1]$: $F_X(t) := P[X \leq t] := P[\{w \mid X(w) \leq t\}]$.

Gewichtsfunktion $F_x : \mathbb{W}(X) \to [0,1]$: $p_X(x_k) := P[X = x_k] = P[\{w \mid X(w) = x_k\}]$.

Erwartungswerte

Erwartungswert: $E[X] := \sum\limits_{x_k \in W(X)} x_k p_X(x_k)$. Es gilt:

1. Monotonie: Ist $X \leq Y$ (d.h. $\forall w : X(w) \leq Y(w)$), so gilt auch $E[X] \leq E[Y]$
2. Linearität: $E[aX + b] = aE[X] + b$
3. Falls $X \geq 0$, so gilt $E[X] = \sum\limits_{j=1}^{\infty} P[X \geq j]$

Varianz: $\mathrm{Var}[X] := E[(X - E[X])^2]$. Es gilt:

1. $\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2$
2. $\mathrm{Var}[aX + b] = a^2 \mathrm{Var}[X]$

Standardabweichung: $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$.

Gemeinsame Verteilungen und unabhängige Zufallsvariablen