# Theoretische Informatik Serie 4

*Benjamin Simmonds, Dario Näpfer, Fabian Bösiger*

## Aufgabe 10

### (a)

Wir führen zunächst einen Beweis durch Widerspruch und nehmen an, dass *L*1 regulär ist. Es existiert also ein endlicher Automat *M* mit den Zuständen *Q*, der die Sprache *L*1 akzeptiert.

Betrachten wir im Anschluss die Wörter *b*, *b*2, ..., *bm*, wobei *m* = |*Q*| + 1. Somit existieren mehr Wörter als *M* Zustände hat, dass heisst es existieren *i*, *j* mit *i* ≠ *j*, so dass *δ̂*(*q*0, *bi*) = *δ̂*(*q*0, *bj*). Nach Lemma 3.3 gilt also, dass ∀*z* ∈ {*a*, *b*}+ : *biz* ∈ *L*1 ⇔ *bjz* ∈ *L*1.

Für *z* = *ab*(2*i*+ 1) gilt *biz* = *biab*(2*i*+ 1) ∈ *L*1, jedoch ist *bjz* = *bjab*(2*i*+ 1) ∉ *L*1, da *i* ≠ *j*. Dies ist ein Widerspruch zur Aussage ∀*z* ∈ {*a*, *b*}+ : *biz* ∈ *L*1 ⇔ *bjz* ∈ *L*1, die Annahme ist somit falsch und es folgt, dass *L*1 nicht regulär ist.

Die entsprechende direkte Argumentation ist, dass der Automat *M*, der die Sprache *L*1 erkennt, eine Möglichkeit haben muss, sich das Wort *ω* zu merken. Da die Länge von *ω* beliebig gross werden kann, muss der Automat folgendermassen beliebig viele Zustände haben, was nicht möglich ist, da wir die Länge von *ω* immer |*ω*| = |*Q*| + 1 wählen können. Für jeden Automaten, der *L*1 erkennt, muss somit gelten, dass *δ̂*(*q*0, *bi*) ≠ *δ̂*(*q*0, *bj*), oder in anderen Worten ∀*z* ∈ {*a*, *b*}+ : *biz* ∈ *L*1 ⇎ *bjz* ∈ *L*1. Nach Lemma 3.3 kann der Automat *M* also kein endlicher Automat sein und die Sprache *L*1 ist somit nicht regulär.

### (b)

Wir nehmen an, *L*2 sei regulär und führen einen Beweis durch Widerspruch.

Nach dem Pumping-Lemma existiert für *L*2 eine Konstante *n*0 ∈ ℕ, so dass sich jedes Wort *ω* ∈ *Σ*\* mit |*ω*| ≥ *n*0 zerlegen lässt in *ω* = *yxz*, wobei:

1. |*yx*| ≤ *n*0
2. |*x*| ≥ 1
3. Entweder {*yxkz* ∣ *k* ∈ ℕ} ⊆ *L*2 oder {*yxkz* ∣ *k* ∈ ℕ} ∩ *L*2 = ∅

Wir betrachten das Wort *ω* = *anbnc*4*n*2, das offensichtlich in *L*2 enthalten ist. Wir teilen *ω* in die Teilwörter *ω* = *yxz*. Da nach Aussage 1. des Pumping-Lemmas gilt, dass |*yx*| ≤ *n*0, und nach Aussage 2. |*x*| ≥ 1, muss *x* für alle möglichen Zerlegungen mindestens ein *a* enthalten.

Da offensichtlich gilt, dass {*yxkz* ∣ *k* = 1} ∩ *L*2 ≠ ∅, muss nach Aussage 3. des Pumping-Lemmas gelten, dass {*yxkz* ∣ *k* ∈ ℕ} ⊆ *L*2. Jedoch ist *an*− 1*a*2*bnc*4*n*2 = *an*+ 1*bnc*4*n*2 ∈ {*yxkz* ∣ *k* = 2} nicht in *L*2 enthalten, da $n+1 + n = 2n + 1 \nleq \sqrt{4n^2}$. Somit ist dies ein Widerspruch zur Annahme, und es folgt, dass *L*2 nicht regulär ist.

## Aufgabe 11

### (a)

Wir führen einen Beweis durch Widerspruch und nehmen an, dass *L*3 = {0*n*! ∣ *n* ∈ ℕ} regulär ist. Sei *y*1,*k* = 0(*k*+ 1)! −*k*! das erste Wort in der Sprache *Lk*! = {*y* ∣ 0*k*!*y* ∈ *L*3}.

Nach Satz 3.1 folgt, dass eine Konstante *c* existiert, die unabhängig von *k* ist, so dass die Kolmogorov-Komplexität *K*(0(*k*+ 1)! −*k*!) ≤ ⌈*log*2(1 + 1)⌉ + *c* = 1 + *c* = *d*. Somit gilt *K*(0(*k*+ 1)! −*k*!) ≤ *d* für alle *k* ∈ ℕ. Dies ist aber nicht möglich, weil die Anzahl aller Programme, deren Länge kleiner oder gleich *d* sind, höchstens 2*d* und somit endlich ist, die Menge {0(*k*+ 1)! −*k*! ∣ *k* ∈ ℕ} jedoch unendlich gross ist. Es kann nicht sein, dass unendlich viele Wörter eine endliche Kolmogorov-Komplexität besitzen. Aus diesem Widerspruch folgt, dass *L*3 nicht regulär ist.

### (b)

Wir führen einen Beweis durch Widerspruch unter der Verwendung von Lemma 3.3 und nehmen an, dass *L*4 regulär ist, was bedeutet dass ein endlicher Automat *M* mit den Zuständen *Q* existiert, welcher *L*4 akzeptiert.

Betrachten wir im Anschluss die Wörter 0, 1, 10, 11, ..., *Bin*(*m*), wobei *m* = |*Q*| + 1. Somit existieren mehr Wörter als *M* Zustände hat, dass heisst es existieren 0 ≤ *i*, *j* ≤ *m* mit *i* ≠ *j*, so dass *δ̂*(*q*0, *Bin*(*i*)) = *δ̂*(*q*0, *Bin*(*j*)). Nach Lemma 3.3 gilt also, dass ∀*z* ∈ {0, 1}+ : *Bin*(*i*)#*z* ∈ *L*4 ⇔ *Bin*(*j*)#*z* ∈ *L*4.

Für *z* = 0*i* gilt *Bin*(*i*)#0*i* ∈ *L*4, jedoch ist *Bin*(*j*)#0*i* ∉ *L*4, da *i* ≠ *j* und deshalb *Nummer*(*Bin*(*j*)) = *j* ≠ |0*i*|. Dies ist ein Widerspruch zur Aussage ∀*z* ∈ {0, 1}+ : *Bin*(*i*)#*z* ∈ *L*4 ⇔ *Bin*(*j*)#*z* ∈ *L*4, die Annahme ist somit falsch und es folgt, dass *L*4 nicht regulär ist.

## Aufgabe 12

Wir führen einen Beweis durch Widerspruch und nehmen an, dass *L* = {*ωi* ∣ *i* ∈ ℕ} regulär ist. Sei *y*1,*k* = 0|*ωk*+ 1| − |*ωk*| das erste Wort in der Sprache *Lk* = {*y* ∣ *ωiy* ∈ *L*}.

Nach Satz 3.1 folgt, dass eine Konstante *c* existiert, die unabhängig von *k* ist, so dass die Kolmogorov-Komplexität *K*(0|*ωk*+ 1| − |*ωk*|) ≤ ⌈*log*2(1 + 1)⌉ + *c* = 1 + *c* = *d*. Somit gilt *K*(0|*ωk*+ 1| − |*ωk*|) ≤ *d* für alle *k* ∈ ℕ. Die Anzahl aller Programme mit Länge *d* ist höchstens 2*d* und somit endlich. Da gemäss Aufgabenstellung |*ωk*+ 1| − |*ωk*| ≥ *log*2*log*2*k*, und *log*2*log*2*k* streng monoton wachsend ist, folgt dass die Menge {0|*ωk*+ 1| − |*ωk*| ∣ *k* ∈ ℕ} unendlich gross ist. Es kann aber nicht sein, dass unendlich viele Wörter eine endliche Kolmogorov-Komplexität besitzen. Aus diesem Widerspruch folgt, dass *L* nicht regulär sein kann.