

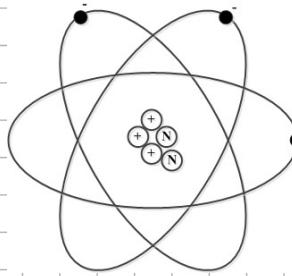
Grundbegriffe

Ladung

$$[q] = As = C$$

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19} As$$

Ladung Elektron: $-e$



Strom

$$[I] = \frac{As}{s} = A$$

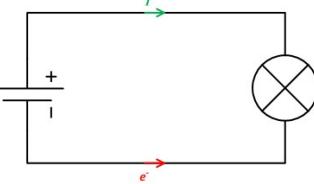
$$I(t) = \dot{Q}(t) \quad \text{falls } I(t) \text{ konstant: } I(t) = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

transportierte Ladung nach Medium:

Metalle: Elektronen

Halbleiter: Elektronen und Löcher

Elektrolyte: Ionen



Strom \rightarrow gerichtete Größe (Betrag & Richtung)

Teilchendichte $n \rightarrow$ viele Teilchen pro Volumen (z.B. Elektronen, Löcher, Ionen)

$$[n] = \frac{1}{m^3}$$

Elektronendichte Metall: $\gg 1 e^-/\text{Atom}$

Driftgeschwindigkeit $v_d \rightarrow$ mittlere Geschw. (beschleunigt durch E-Feld, abgebremst durch Kollision)

$$|I| = \frac{|Q|}{t} = \frac{ALne}{\frac{L}{v_d}} = Ane v_d$$

$$j = \frac{|I|}{A} = ne v_d \quad [j] = \frac{A}{m^2}$$

Transportmechanismen

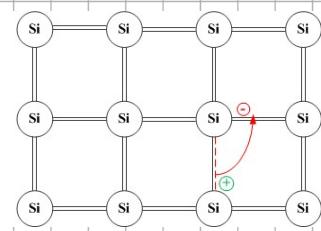
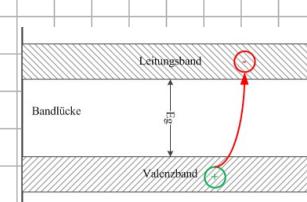
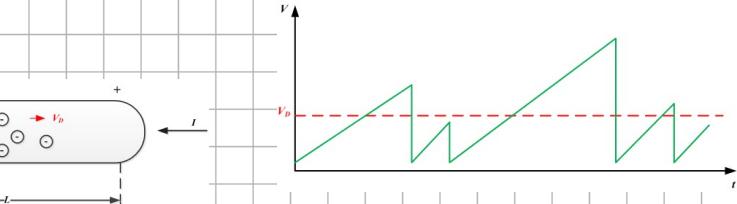
metallische Löcher \rightarrow ein Teil d. e^- quasi ungebunden und frei beweglich

Halbleiter (Si, Ge, Se, Br etc.)

spez. Widerstand grösser als Metalle, kleinere als Isolatoren

$T=0 \rightarrow$ alle e^- gebunden, $T>0 \rightarrow$ einige e^- vom Valenz- ins Leitungsband \Rightarrow Loch & freies e^-

e^- können nicht beliebige (kin.) E haben, sondern erlaubte & verbotene E-Bänder



Leitfähigkeit durch Anzahl freier e^- und Löcher bestimmt \rightarrow stark temp. abhängig
 \hookrightarrow durch Dotierung mit Fremdatomen kann man Anzahl der zur Verfügung stehenden Ladungsträger erhöhen

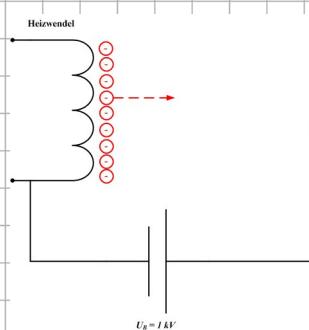
N-Dotierung: mehr e^- als Löcher \Rightarrow mehrere Schichten kombinieren
 p-Dotierung: mehr Löcher als e^- \Rightarrow \hookrightarrow Transistor

Spannung

$$[U] = V$$

$$W_{el} = q \cdot U \Rightarrow [U] = \left[\frac{F \cdot L}{q} \right] = \frac{Nm}{C} = \frac{kg \cdot m^2}{As^3}$$

$$W_m = F \cdot L$$

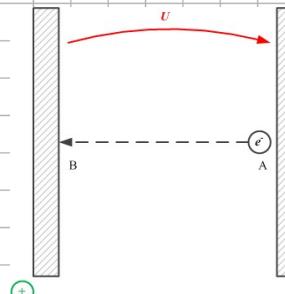


kathodenstrahlröhre:

$$E_{kin} = W_{el}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = eU$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$



Techn. Möglichkeiten zur Erzeugung von Spannung

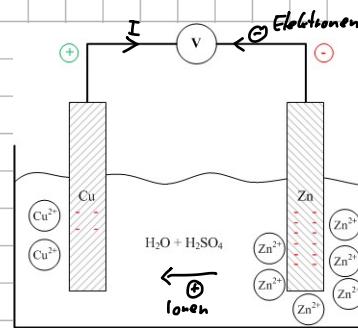
viele, einige Verfahren:

• chem. Vorgänge

↳ galvanische Elemente und Batterien

edleres Metall \rightarrow Pluspol

unedleres Metall \rightarrow Minuspol
unedlere Elektrode lässt sich auf und scheidet sich an edleren ab



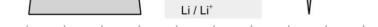
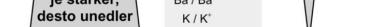
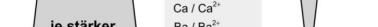
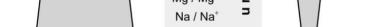
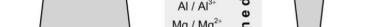
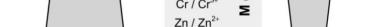
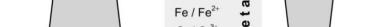
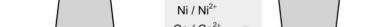
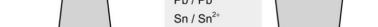
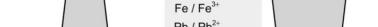
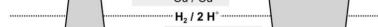
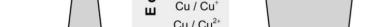
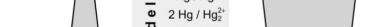
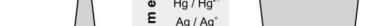
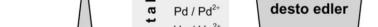
Neigung zur Oxidation



je stärker, desto edler



Neigung zur Reduktion



• Wärme-Thermoelement

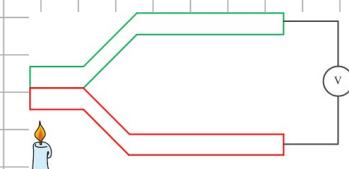
2 verschiedene Metalle an einer Seite verbinden

Erwärmung Kontaktstelle \Rightarrow (Thermo) Spannung

ΔT zwischen freien Enden & Kontaktstelle entscheidend

Materialabhängig

\rightarrow Temperaturfühlig



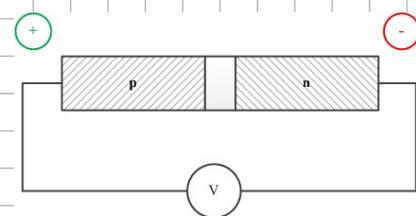
• Licht

pn-Übergang mit Licht bestrahlen \Rightarrow Spannung

1 γ kann 1 e^- freisetzen

\rightarrow Fotolelement (Detektion von Licht)

\rightarrow Solarzelle

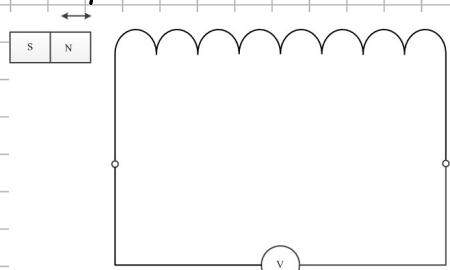


• Induktion

zeitveränderlicher magnetischer Fluss \Rightarrow Induktionsspannung

$$B \sim I$$

$$U = \frac{dB}{dt}$$



Ohmscher Widerstand

$U-I$ -Kennlinie Gerade durch Nullpunkt

$$R = \frac{U}{I} \quad [R] = \frac{V}{A} = \Omega \quad \text{Widerstand}$$

$$G = \frac{I}{U} \quad [G] = \frac{A}{V} = S \quad \text{Leitwert}$$

$$R \sim \frac{L}{A}, \quad R = \rho \frac{L}{A}$$

$$\rho = \frac{RA}{L} \quad [\rho] = \frac{\Omega m^2}{m} = \Omega m \quad \text{spezifischer Widerstand}$$

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad [\sigma] = \frac{1}{\Omega m} = \frac{S}{m} \quad \text{elektrische Leitfähigkeit}$$

$$G = \sigma \frac{A}{L} \quad (R = \rho \frac{L}{A} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{\rho} \frac{A}{L} = \sigma \frac{A}{L})$$

oft stark T -abhängig (außer gewisse Speziallegierungen)

höhere $T \Rightarrow$ stärkere Gitterzerrung $\Rightarrow e^-$ werden auf Weg durch Metall behindert

$$\rho(T) = \rho_{20} (1 + \alpha_{20} (T - 293K))$$

$\alpha_{20} \rightarrow$ wie stark vergrößert sich Widerstand pro $1K$

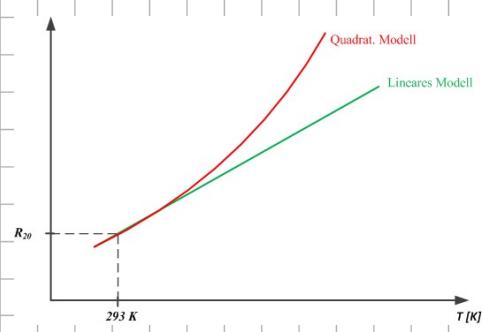
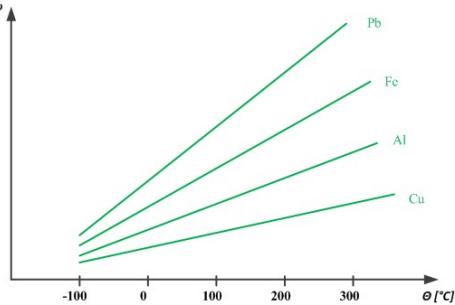
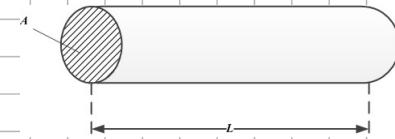
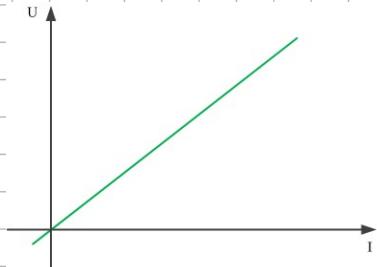
$$[\alpha_{20}] = \frac{1}{K} \quad (\text{oft in ppm} (10^{-6}))$$

$$R(T) = R_{20} (1 + \alpha_{20} (T - 293K))$$

erweitertes T -Modell:

$$R(T) = R_{20} (1 + \alpha_{20} \Delta T + \beta_{20} (\Delta T)^2)$$

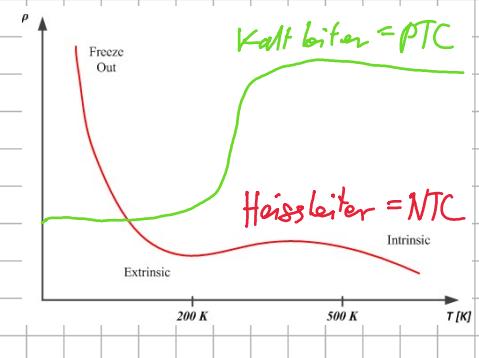
$$[\beta_{20}] = \frac{1}{K^2}$$



Halbleiter \Rightarrow andere T-Abhängigkeit

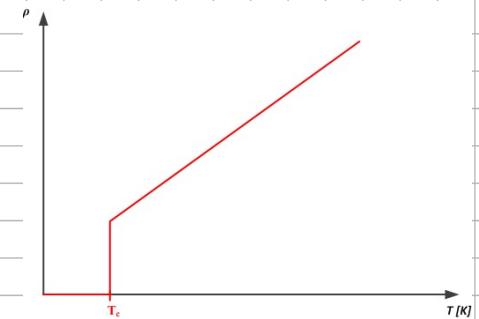
Z gegenüberliegende Effekte:

mit steigender Temperatur mehr bewegliche Ladungsträger aber das Gitter schwächt stark ab und sie werden stärker behindert



Supraleitung

spezifischer Widerstand fällt unterhalb einer krit. Schmelztemperatur T_c quasi auf 0
 (in der Regel sehr tief)
 \rightarrow Kühlung mit flüssigem Helium



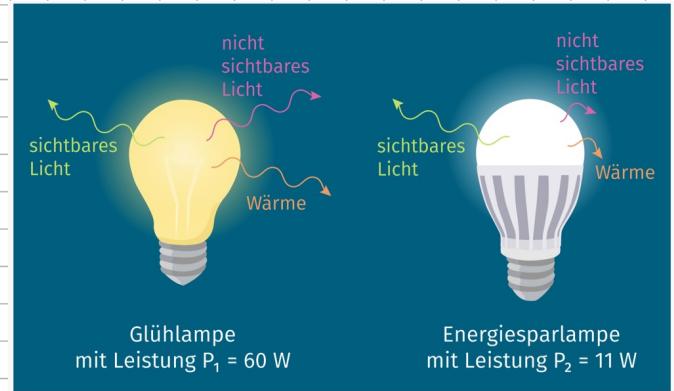
Energie und Leistung (Gleichstrom)

$$W = UQ \quad [W] = VAs = WS = J$$

$$P = \frac{dW}{dt} = Vi \quad [P] = W$$

falls I konstant:

$$P = \frac{W}{t} = U \frac{Q}{t} = UI \quad P = UI$$



Brückensatz zur Mechanik:

$$W_m = Fs = Fvt$$

$$\Rightarrow P_m = \frac{W_m}{t} = Fv$$

$$\text{für Drehbewegung: } P_m = \vec{M} \cdot \vec{\omega} \quad (\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F})$$

Zusammenfassung

Typ	Symbol	Einheit
Ladung	$q ; Q$	As; C
Strom	I	A
Spannung	U	V
Arbeit	W	J ; kWh; VAs
Leistung	P	W
Widerstand	R	$\Omega ; V/A$
Leitwert	G	$S ; A/V$

Elektrische Bauelemente

Zweipol

Bauteil, das über genau 2 Komponenten nach außen zugänglich ist

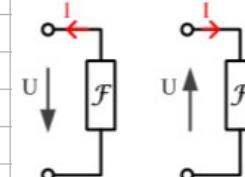
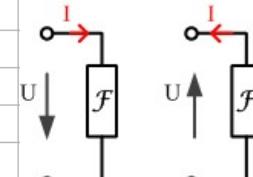
Zählpfeilsysteme

Verbraucher - Zählpfeilsystem

U und I in gleiche Richtung

Ereigner (bzw. Generator) - Zählpfeilsystem

U und I in gegenseitige Richtung

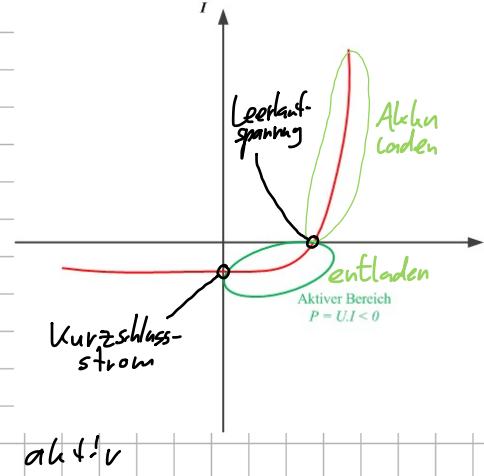
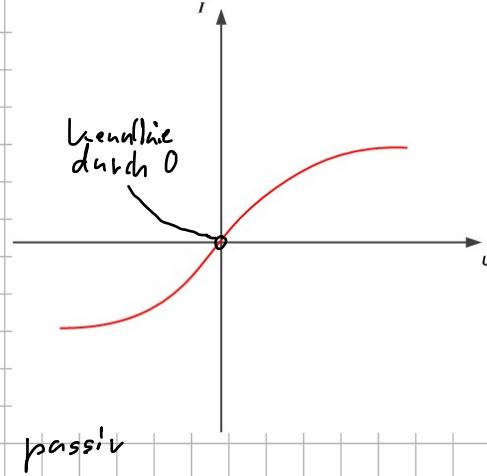


Klassifikation von Bauelementen (Zweipolen) durch ihre Kennlinie im Verbrauchersystem
 $\hookrightarrow U \& I$ gleiche Richtung

(i) Leistungsanfuhrme

$$P = UI, \quad P < 0 \Rightarrow \text{Leistungsabgabe}$$

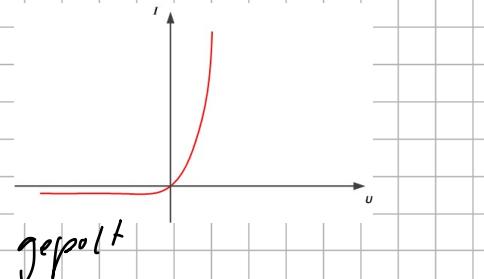
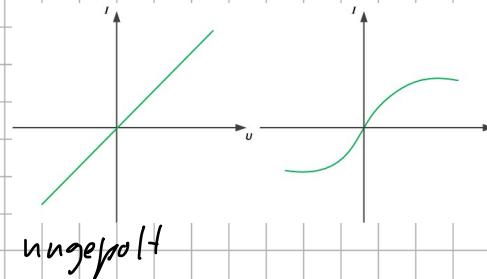
falls Punkte auf Kennlinie wo $P < 0$ \Rightarrow aktives Bauelement, sonst passiv



(ii) Polung

falls Kennlinie punktsymmetrisch \Rightarrow Bauteil un gepolt, sonst gepolt

un gepolt = egal wie rum, immer gleiche Funktionsweise



Passive elektrische Zweipole

→ am besten im Verbraucherzählpfeilsystem

lineare passive Zweipole - der Ohm'sche Widerstand
Geade durch Nullpunkt

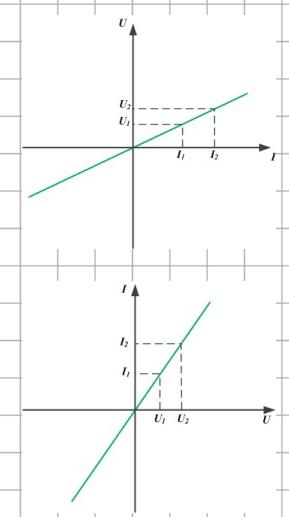
$$U = RI \Leftrightarrow R = \frac{U}{I} = \text{const.}$$

$$R = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{I_2} = \frac{\Delta U}{\Delta I}$$

$$I = GU \Leftrightarrow G = \frac{I}{U} = \text{const.}$$

$$G = \frac{I_1}{U_1} = \frac{I_2}{U_2} = \frac{\Delta I}{\Delta U}$$

ungepolt



nichtlineare passive Zweipole - 2 Bsp
Kurve durch Nullpunkt

(i) pn-Diode

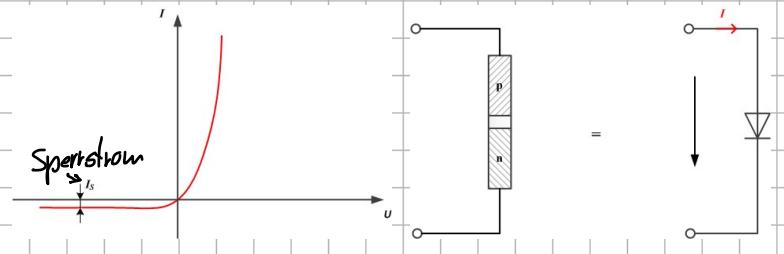


Halbleiter-Bauelement

$$I(U) = I_s \left(\exp\left(\frac{eU}{k_B T}\right) - 1 \right)$$

Widerstand stark spannungsabhängig

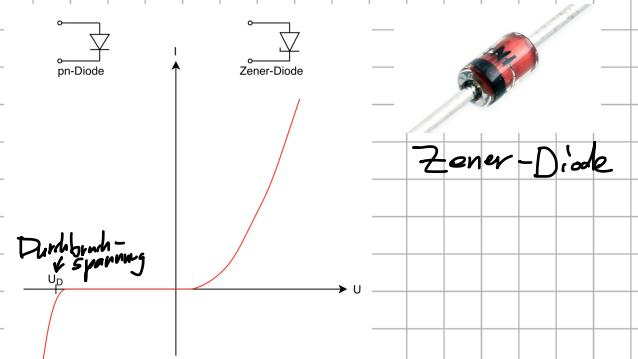
passiv, gepolt



Durchbruch: Rückwärtsgerichtete Spannung sehr hoch → Strom steigt stark an

→ PN-Diode → zerstört

→ Z-Diode → Durchbruch reversibel
↳ für Rückwärtsbetrieb konzipiert



(ii) Tunnel-Diode

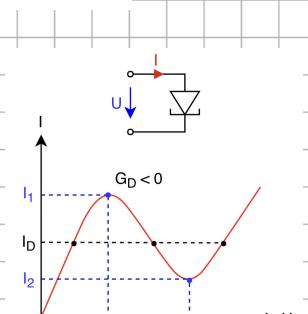


Spannungs-, aber nicht strangstromorientiert:

U bekannt ⇒ I eindeutig definiert, aber nicht umkehrbar

Einsatz für Oszillationen und als Verstärker

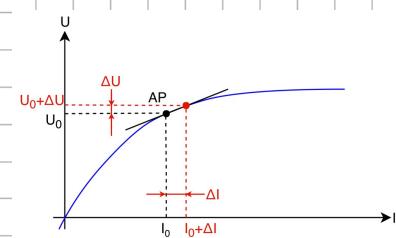
negativer differentieller Widerstand zwischen U_1 & U_2



Ausblick: Differentieller (dynamischer) Widerstand

→ Tangente an die Kurve
im Arbeitspunkt

$$r = \frac{dU}{dI} \approx \frac{\Delta U}{\Delta I}$$

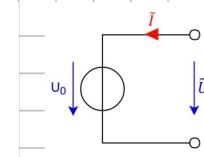
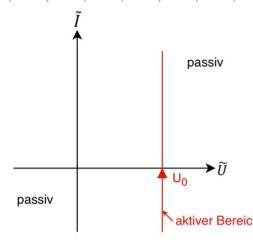


Aktive Zweipole

ideale Spannungsquelle

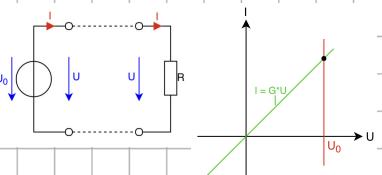
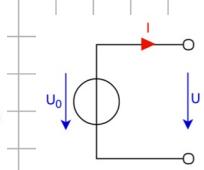
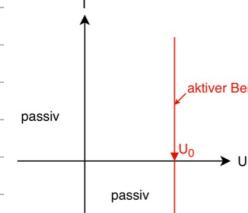
Konstante Leerlaufspannung

Verbrauchersystem:



Erzeugersystem:

↳ meist praktischer

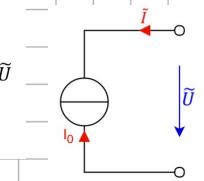
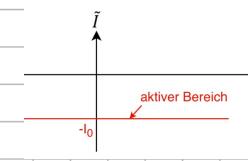


Arbeitspunkt der belasteten Quelle bestimmen

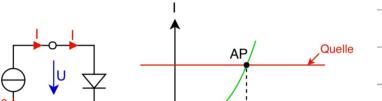
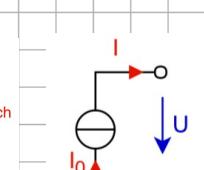
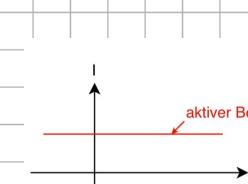
ideale Stromquelle

Konstanter Quellenstrom

Verbrauchersystem



Erzeugersystem

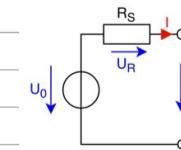
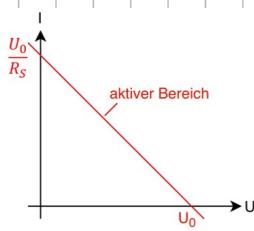
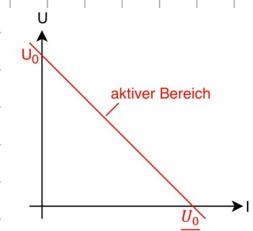


Arbeitspunkt der Quelle bestimmen

reale Spannungsquelle

$$U_0 = U_R + U = R_S I + U$$

$$\Rightarrow U = U_0 - R_S I$$

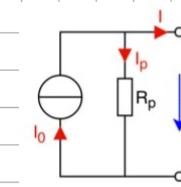
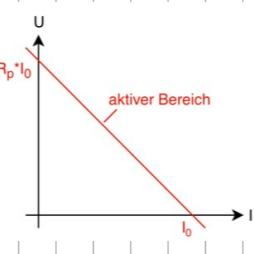
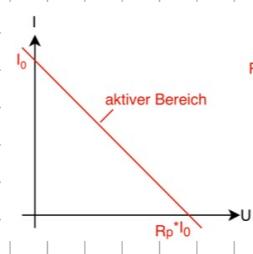


reale Stromquelle

$$I_0 = I_p + I = \frac{U}{R_p} + I$$

$$\Rightarrow I = I_0 - \frac{1}{R_p} U$$

$$= I_0 - G_p U$$



Aquivalenz der beiden Quellenschaltungen

$$\text{reale Spannungsquelle: } U = U_0 - R_s I$$

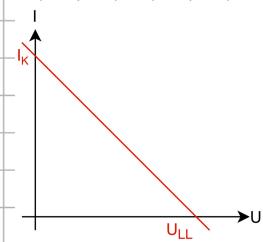
$$\text{reale Stromquelle: } I = I_0 - G_p U \Leftrightarrow U = R_p I_0 - R_p I$$

\Rightarrow falls $U_0 = R_p I_0$ und $R_s = R_p$ \Rightarrow beide Quellen selbe Kennlinie
 \Rightarrow kann man von aussen nicht unterscheiden

ans realen Quelle ideale machen:

$$\text{Spannungsquelle: } R_i \rightarrow 0$$

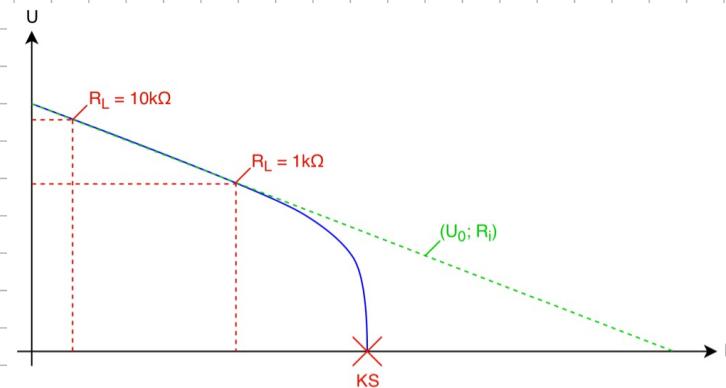
$$\text{Stromquelle: } R_i \rightarrow \infty$$



lineare Quelle durch U_{LL} und I_{KS} charakterisiert

in Praxis Messung dieser Größen nur bedingt möglich

- KS kann zu hohe Belastung der Bauteile darstellen
- viele Schaltungen nur in gewissen Bereich linear, bei U_{LL} & KS typisch nicht



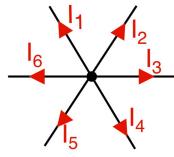
nicht-lineare Quelle, die sich im kleinen Arbeitsbereich linear verhält
 für Lastbereich $1k\Omega < R_L < 10k\Omega$
 kann man dann schon den AP berechnen, weil da angeföhrt linear
 \hookrightarrow mit KS völlig falsches Ergebnis

Gleichstrom-Netzwerke

Kirchhoff'schen Gesetze

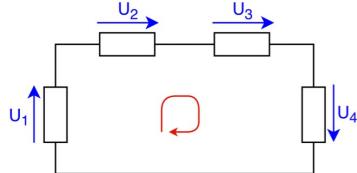
Knotensatz

$$\sum_k I_k = 0$$



Maschenatz

$$\sum_k U_k = 0$$



Serienschaltung von Widerständen

Ersatzwiderstand

$$U = \sum R_i I = (\sum R_i) I = \tilde{R} I$$

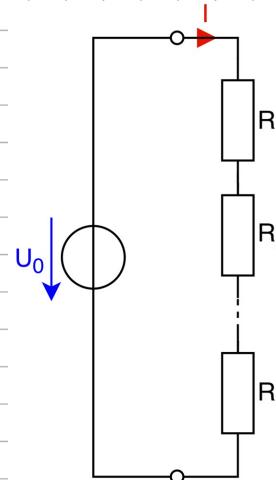
$$\Rightarrow \tilde{R} = \sum R_i$$

Spannungsteiler

$$\tilde{R} = \sum R_i \Rightarrow I = \frac{U_0}{\tilde{R}}$$

$$U_i = R_i I = \frac{R_i}{\tilde{R}} U_0$$

$$\Rightarrow \frac{U_i}{U_j} = \frac{R_i}{R_j}$$



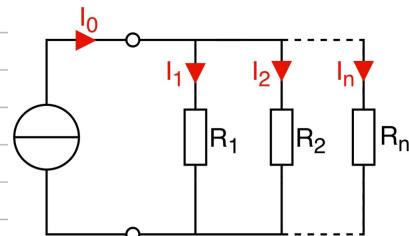
Parallelschaltung von Widerständen

Ersatzwiderstand

$$I = \sum G_i U = (\sum G_i) U = \tilde{G} U$$

$$\Rightarrow \tilde{G} = \sum G_i \Leftrightarrow \frac{1}{\tilde{R}} = \sum \frac{1}{R_i}$$

$$R_1 \parallel R_2 = \tilde{R} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$



Stromteiler

$$\tilde{G} = \sum G_i \Rightarrow U = \frac{I_0}{\tilde{G}}$$

$$I_i = G_i U = \frac{G_i}{\tilde{G}} I_0$$

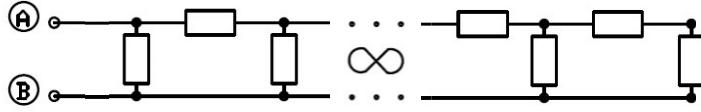
$$\Rightarrow \frac{I_i}{I_0} = \frac{G_i}{\tilde{G}} = \frac{R_i}{R}$$

Analyse einfacher Schaltungen mithilfe der Kirchhoff-Gleichungen

$$R \tilde{I} = \tilde{U}$$

Kettenbruchschaltung

$$\tilde{R}_{n+1} = \frac{(\tilde{R}_n + R)R}{(\tilde{R}_n + R) + R} = \frac{\tilde{R}_n R + R^2}{\tilde{R}_n + 2R}$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{R}_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{R}_n R + R^2}{\tilde{R}_n + 2R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{R}_n$$

$$R \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{R}_n + R^2}{\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{R}_n + 2R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{R}_n =: \tilde{R}$$

$$\Rightarrow R \tilde{R} + R^2 = \tilde{R}^2 + 2R \tilde{R}$$

$$0 = \tilde{R}^2 + R \tilde{R} - R^2$$

$$0 = (\tilde{R} + \frac{1}{2}R)^2 - \frac{1}{4}R^2 - R^2$$

$$\pm \frac{\sqrt{5}}{2}R = \tilde{R} + \frac{1}{2}R$$

$$\tilde{R} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}R$$

$$\Rightarrow \tilde{R} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}R \approx 0.618R$$

Alternativ:

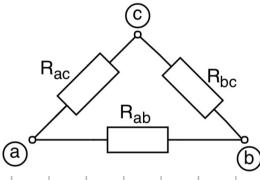
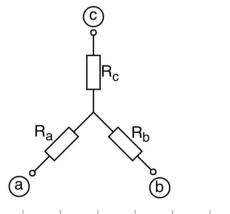
$$\tilde{R} = R \parallel (R + \tilde{R})$$

$$= \frac{\tilde{R}R + R^2}{\tilde{R} + 2R}$$

$$\Rightarrow \tilde{R}^2 + 2R \tilde{R} = R \tilde{R} + R^2$$

$$0 = \tilde{R}^2 + R \tilde{R} - R^2$$

Stern-Dreieck-Transformation



4.5.1 Umwandlung Stern → Dreieck

$$\tilde{R} = R_a R_b + R_a R_c + R_b R_c$$

$$R_{ab} = \frac{\tilde{R}}{R_c}; \quad R_{ac} = \frac{\tilde{R}}{R_b}; \quad R_{bc} = \frac{\tilde{R}}{R_a}$$

Nimm \tilde{R} und Teile durch den Widerstand, der der gewünschte Kante gegenüber liegt

4.5.2 Umwandlung Dreieck → Stern

$$\hat{R} = R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}$$

$$R_a = \frac{R_{ab} R_{ac}}{\hat{R}}; \quad R_b = \frac{R_{ab} R_{bc}}{\hat{R}}; \quad R_c = \frac{R_{ac} R_{bc}}{\hat{R}}$$

Nimm die am Knoten anliegenden Widerstände, multipliziere sie und teile durch \hat{R}

Quellenbehaftete Schaltungen

Leistung $P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}$

$$P_L = R_L I^2 = R_L \left(\frac{U_0}{R_i + R_L} \right)^2$$

$$P_i = R_i I^2 = R_i \left(\frac{U_0}{R_i + R_L} \right)^2$$

$$P_{\text{tot}} = (R_i + R_L) \frac{U_0^2}{(R_i + R_L)^2} = \frac{U_0^2}{R_i + R_L}$$

$$\begin{aligned} P_L &\geq 0 \\ R_L = 0 &\Rightarrow P_L = 0 \\ R_L \rightarrow \infty &\Rightarrow P_L = 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} P_L \text{ muss ein} \\ \text{Max. haben} \end{array} \right\}$$

$$P_L(R_L) = \frac{R_L}{(R_i + R_L)^2} U_0^2$$

$$\frac{dP_L}{dR_L} = \frac{(R_i + R_L)^2 - R_L 2(R_i + R_L)}{(R_i + R_L)^4} U_0^2 = \frac{R_i^2 - R_L^2}{(R_i + R_L)^4} = \frac{R_i - R_L}{(R_i + R_L)^3}$$

$$\frac{dP_L}{dR_L} = 0 \Rightarrow R_L = R_i = R_m$$

bei R_m wird die in der Last umgesetzte Leistung Maximal \rightarrow Leistungsanpassung

$$P_m = P_L(R_m) = \frac{R_i}{(R_i + R_m)^2} U_0^2 = \frac{U_0^2}{4R_i}$$

Wirkungsgrad:

$$\eta = \frac{P_L}{P_{\text{tot}}} = \frac{R_L}{R_i + R_L}$$

$$\eta = 0 \Rightarrow R_L = 0$$

$$\eta = 1 \Rightarrow R_L = \infty$$

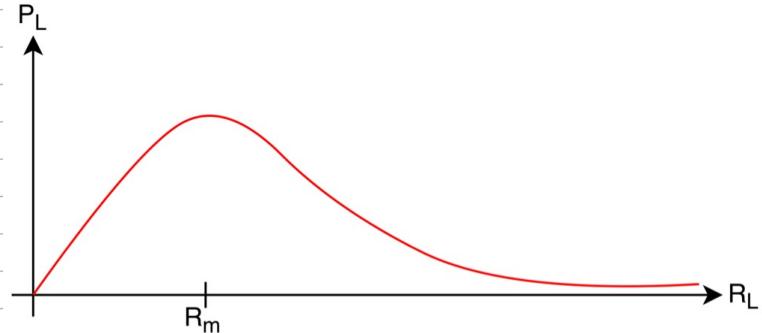
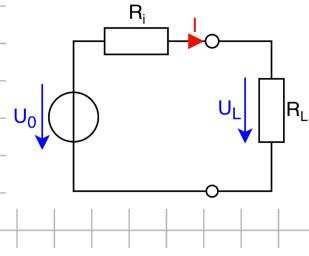
$$\text{bei Leistungsanpassung } \eta = \frac{R_i}{R_i + R_m} = 1/2$$

Leistungsanpassung ist erforderlich, wenn Quelle nur geringe Leistung abgeben kann, die möglichst umfassend genutzt werden soll

- Antennen
- Solarzellen
- bestimmte Sensoren

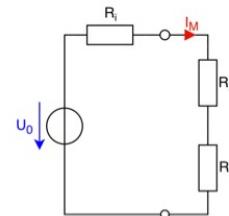
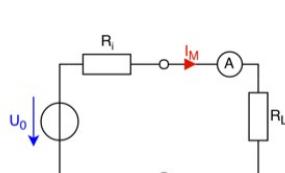
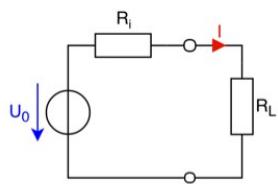
Oft soll jedoch der Wirkungsgrad möglichst hoch sein

- el. Maschinen
- Antriebe



Messung elektrischer Größen

Strommessung mit Ampermeter



$$I = \frac{U_0}{R_i + R_L}, \quad I_M = \frac{U_0}{R_i + R_L + R_A}$$

gemessene Strom zu klein

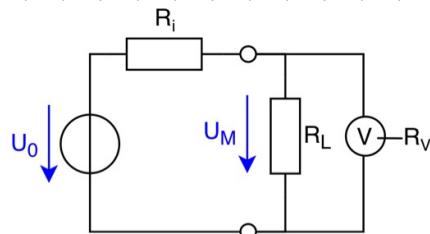
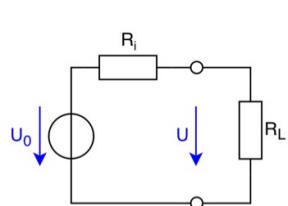
$$\Delta I = I_M - I$$

$$\delta I = \frac{\Delta I}{I} = \frac{R_A}{R_i + R_L + R_A}$$

- $|\delta I|$ steigt monoton mit $R_A \Rightarrow$ Ströme niedrigohmig messen
- $R_A = 0 \Rightarrow |\delta I| = 0\%$
- $R_A = \infty \Rightarrow |\delta I| = 100\%$

falls R_A bekannt \Rightarrow nachträglich korrigieren (weil systematisch falsch)

Spannungsmessung mit Voltmeter



$$U = \frac{R_L}{R_i + R_L} U_0, \quad U_M = \frac{R_L \parallel R_V}{R_i + R_L \parallel R_V} U_0 \quad \text{gemessene Spannung zu klein}$$

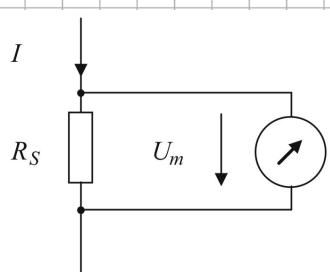
$$\Delta U = U_M - U$$

$$\delta U = \frac{\Delta U}{U} = - \frac{R_L \parallel R_i}{R_V + R_L \parallel R_i}$$

- $|\delta U|$ sinkt mit steigendem $R_V \Rightarrow$ Spannungen hochohmig messen

falls R_V bekannt \Rightarrow nachträglich korrigieren (weil systematisch falsch)

Strommessung mit Shuntwiderständen

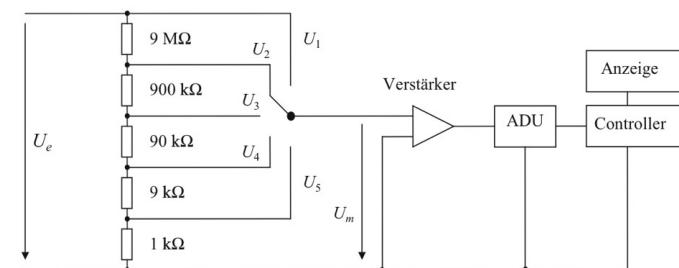
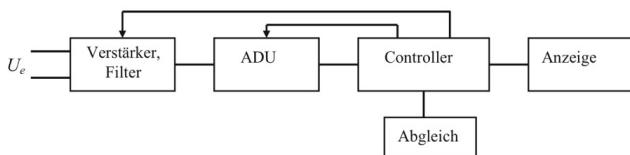


R_S = Shuntwiderstand

U_m = Spannungsabfall über R_S (unten gemessen)

$$I = \frac{U_m}{R_S}$$

Digitale Strom- und Spannungsmessgeräte



Eingangssignal wird entkoppelt, gefiltert und an Eingangsspannungsbereich des ADU (Analog-Digital-Umsetzer) angepasst

ADU typischerweise 16- bis 24-bit Umsetzer

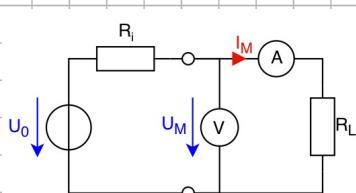
Ströme häufig mit Shunt-Widerständen gemessen

Precisionsteiler wird verwendet, um gemessene Spannung möglichst gut an Eingangsspannungsbereich des ADU anzupassen

Simultane Messung von Strom und Spannung

oft möchte man bei einem Bauteil beides gleichzeitig messen, bspw um Widerstand oder dissipierte Leistung eines Bauteils zu bestimmen

(i) stromrichtig



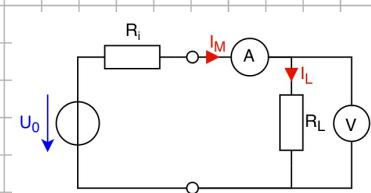
$$I_m = I_L$$

$$U_m = U_L + I_m R_A > U_L$$

(ii) spannungsrichtig

$$U_m = U_L$$

$$I_m = I_L + \frac{U_m}{R_V} > I_L$$



Widerstand bestimmen

$$R_m = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_L}{I_m} + R_A = R_L + R_A > R_L$$

$$\Rightarrow \Delta R = R_A \text{ konstant}$$

$$\Rightarrow \delta R = \frac{\Delta R}{R_L} = \frac{R_A}{R_L}$$

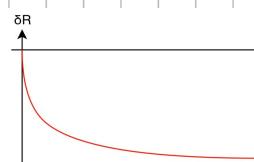
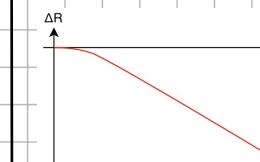
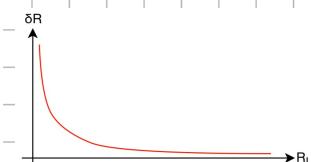
↳ für hohe R_L klein

$$R_m = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_L}{I_L + \frac{U_m}{R_V}} = \frac{R_L R_V}{R_V + R_L} = R_L \parallel R_V < R_L$$

$$\Rightarrow \Delta R = -\frac{R_L^2}{R_L + R_V} \text{ beliebig gross}$$

$$= \delta R = \frac{\Delta R}{R_L} = -\frac{R_L}{R_L + R_V}$$

↳ für kleine R_L klein



Messverfahren wechseln, wenn relative Fehler betragsmäßig gleich:

$$|\delta R_1| \stackrel{!}{=} |\delta R_2| \Rightarrow \frac{R_L}{R_L + R_V} = \frac{R_A}{R_L} \Rightarrow 0 = R_L^2 - R_A R_L - R_A R_V$$

$$\Rightarrow R_L = \frac{R_A \pm \sqrt{R_A^2 + 4 R_A R_V}}{2}$$

$$R_L > 0 \Rightarrow R_L = \frac{1}{2} (R_A + \sqrt{R_A^2 + 4 R_A R_V})$$

für $R_V \gg R_A$:

$$R_L \approx \sqrt{R_A R_V} \quad \begin{cases} R_L > \sqrt{R_A R_V} \Rightarrow \text{stromrichtig} \\ R_L < \sqrt{R_A R_V} \Rightarrow \text{spannungsrichtig} \end{cases}$$

Leistung bestimmen

$$P_M = U_M I_M = R_L I_L^2 + R_A I_L^2$$

$$\Rightarrow \Delta P = R_A R_L^2$$

$$\Rightarrow \delta P = \frac{R_A}{R_L}$$

$$\left| \begin{array}{l} P_M = U_M I_M = U_L^2 \frac{R_L + R_V}{R_L R_V} \\ \Rightarrow \Delta P = \frac{U_L^2}{R_V} \\ \Rightarrow \delta P = \frac{R_L}{R_V} \end{array} \right.$$

Messverfahren wechseln, wenn relative Fehler betragsmäßig gleich:

$$|\delta P_1| \stackrel{!}{=} |\delta P_2| \Rightarrow \frac{R_A}{R_L} = \frac{R_L}{R_V} \Rightarrow R_L = \sqrt{R_A R_V}$$

$$R_L = \sqrt{R_A R_V} \quad \begin{cases} R_L > \sqrt{R_A R_V} \Rightarrow \text{stromrichtig} \\ R_L < \sqrt{R_A R_V} \Rightarrow \text{spannungsrichtig} \end{cases}$$

Lineare Netzwerke

Motivation

Lineares Netzwerk: beliebige Verbindung von Endpolen, bei denen jeder für sich eine lineare U-I-Kennlinie hat
→ besteht aus

- Ohm'schen Widerständen
- idealen Quellen



Gründe:

- praktische Eigenschaften (\rightarrow Schaltungsanalyse)
- manchmal kann man ein Netzwerk mit nicht-linearen Bauelementen in einen linearen und einen nicht-linearen Teil zerlegen

Superpositionsprinzip (Überlagerungsatz)

in linearen, eindeutig lösbarer Netzwerk setzt sich jede (Teil-)Spannung und jeder (Teil-)Strom aus der Summe der Reaktionen auf die einzelnen unabhängigen Quellen zusammen

→ Folge der Linearität

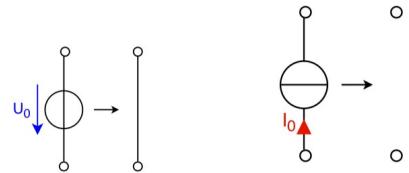
resultierende Ströme und Spannungen berechnen:

Schaltung für jede Quelle einzeln analysieren (andere Quellen auf 0 setzen) und dann Teilergebnisse addieren

Nullquelle:

Spannungsquelle \rightarrow Kurzschluss ($U=0$)

Stromquelle \rightarrow Leerlauf ($I=0$)

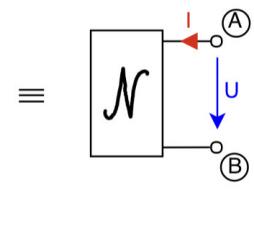
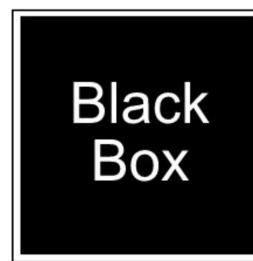


(a) Kurzschluss ($U = 0$) (b) Leerlauf ($I = 0$)

Zweipol-Ersatzschaltung

Voraussetzung:

es liegt beliebige lineare Schaltung vor, die über genau 1 Klammerpaar nach außen zugänglich ist

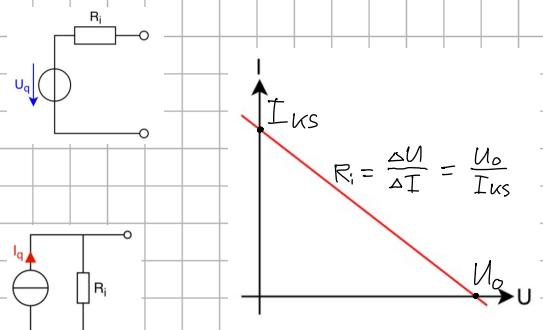


Ziel:

über Klammerpaar \textcircled{A} , \textcircled{B} in Schaltung linearisieren und U - I -Kennlinie bestimmen

Theoreme:

- Thévenin: elektrische Verhalten entspricht reellen Spannungsquelle mit (unbekannten) Parametern ($U_0; R_i$)



- Norton: elektrische Verhalten entspricht reellen Stromquelle mit (unbekannten) Parametern ($I_0; R_i$)

beide Theoreme sind äquivalent und folgen aus Superpositionsprinzip
zentrale Aussage: lineare U - I -Kennlinie

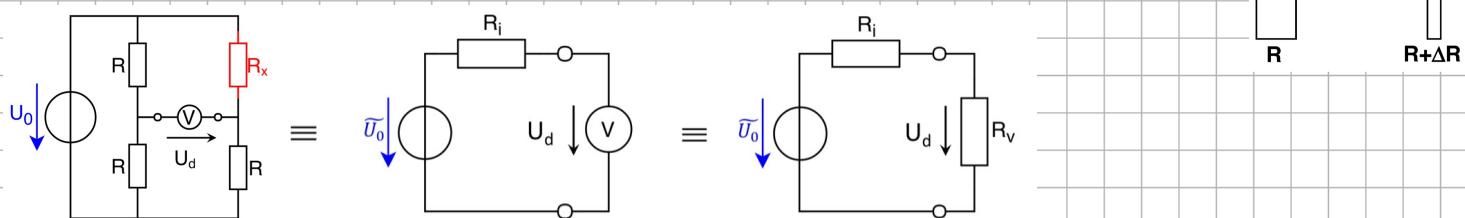
Weg 1: U_0 & I_{Lvs} bestimmen

Weg 2: U_0 & R_i bestimmen

Weg 3: Quellenwandlung: R_i bleibt gleich, $U_0 = R_i I_0$ resp $I_0 = \frac{U_0}{R_i}$

Wheatstone - Messbrücken

Ziel: Widerstandsänderungen detektieren \rightarrow Sensoren, z.B. DMS



$$\tilde{U}_0 = U_0 - U_d = U_0 \frac{R}{2R} - U_0 \frac{R}{R+R_x} = \frac{U_0}{2} \frac{R_x - R}{R_x + R} = \frac{U_0}{2} \frac{\Delta R}{2R + \Delta R} = \frac{U_0}{2} \frac{\delta R}{2 + \delta R}, \quad -\frac{U_0}{2} \leq \tilde{U}_0 \leq \frac{U_0}{2}$$

$$R_i = R \parallel R_x + R \parallel R = (R \parallel R + \Delta R) + (R \parallel R) = R \left(\frac{1 + \frac{3}{2} \delta R}{1 + \frac{1}{2} \delta R} \right)$$

$$U_d = \tilde{U}_0 - R_i \cdot I = \tilde{U}_0 - R_i \cdot \frac{\tilde{U}_0}{R_i + R_v} = \tilde{U}_0 \left(\frac{R_i + R_v - \tilde{U}_0}{R_i + R_v} \right) = \tilde{U}_0 \frac{R_v}{R_i + R_v} = \frac{U_0}{2} \frac{\delta R}{2 + \delta R} \frac{R_v}{R_i + R_v}$$

für $|5R| < 10\% \Rightarrow R_i \approx R = \text{const.}$

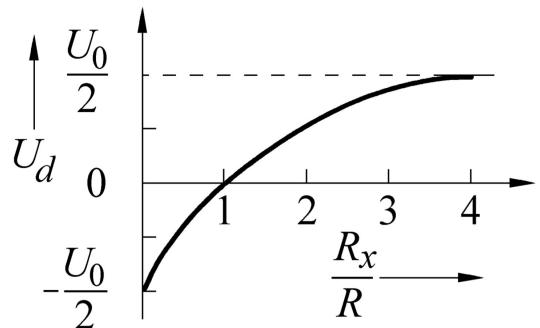
$$\Rightarrow U_d = \tilde{U}_0 \frac{R_v}{R_i + R_v} = \frac{U_0}{2} \frac{\delta R}{2 + \delta R} \frac{R_v}{R_i + R_v}$$

da Voltmeter hochohmig $\Rightarrow R_v \gg R$

$$\Rightarrow U_d \approx \tilde{U}_0 = \frac{U_0}{2} \frac{R_x - R}{R_x + R} = \frac{U_0}{2} \frac{\frac{R_x}{R} - 1}{\frac{R_x}{R} + 1} = \frac{U_0}{2} \frac{\Delta R}{2R + \Delta R}$$

falls ΔR klein (bei 0V) gilt Näherungsweise:

$$U_d \approx \frac{U_0}{2} \frac{R_x - R}{2R} = \frac{U_0}{4} \left(\frac{R_x}{R} - 1 \right) = \frac{U_0}{4} \frac{\Delta R}{R}$$



alternative Ausführungen der Wheatstone-Brücke

oft hilfreich Zahl d. Sensoren zu erhöhen,
da mit Anzahl Sensoren die
Empfindlichkeit steigt

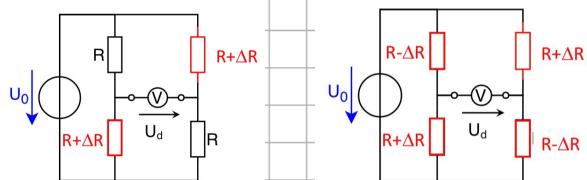


Abbildung 169: Halbbrücke.

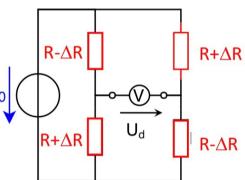


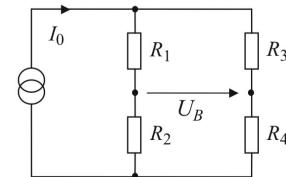
Abbildung 170: Vollbrücke.

stromgespeiste Messbrücken

$$U_0 = I_0 (R_1 + R_2) \parallel (R_3 + R_4) = I_0 \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$$

$$U_B = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$$

manchmal vorteilhaft \rightarrow bei Halbbrücke linearer Zusammenhang zw. U_B & ΔR



Analyse einfacher nicht-lineare Schaltungen - stückweise lineare Kennlinie

gesucht: Spannung über R_L als Funktion von R_L , $R_L \in [R_{L,\min}, \infty)$

Schritt 1: Ersatzschaltbild

$$U_{LL} = \frac{R_L}{R_L + R_V} U_0 = U_{LL}(R_L)$$

$$U_{LL,\min} = U_{LL}(R_{L,\min})$$

$$U_{LL,\max} = U_{LL}(\infty)$$

$$I_{KS} = \frac{U_0}{R_V} = \text{const.}$$

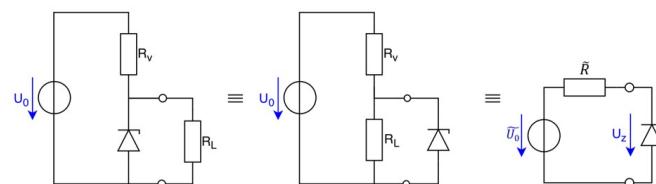


Abbildung 172: Nicht-lineare Beispielschaltung

Schritt 2: Kennlinienfeld der Quelle und der Diode

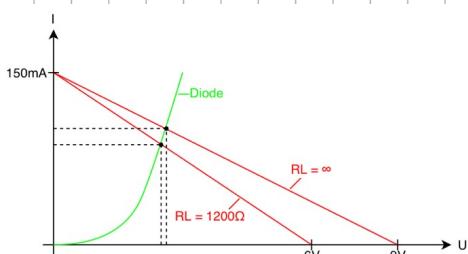


Abbildung 173: Skizze zur graphischen Ermittlung des Arbeitspunktes

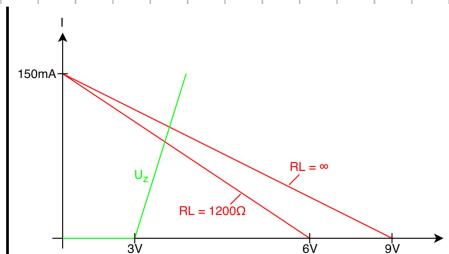


Abbildung 174: Schaltung mit stückweise linearer Kennlinie

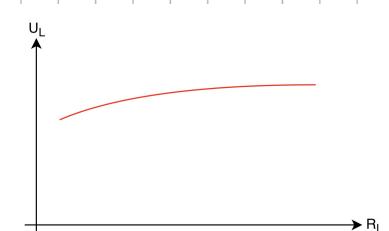


Abbildung 175: Lastspannung als Funktion des Lastwiderstands

allgemeine Analyseverfahren

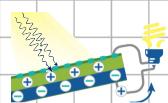
normalerweise 2 Schritte:

- Beschreibung Schaltungstopologie (Verbindungsstruktur)
- Beschreibung Bauelemente

Photodioden, Solarzellen, LED photoelektrischer Effekt

Photon kann ein Elektron aus der Bindung zu einem Atom lösen, wenn es genügend Energie hat

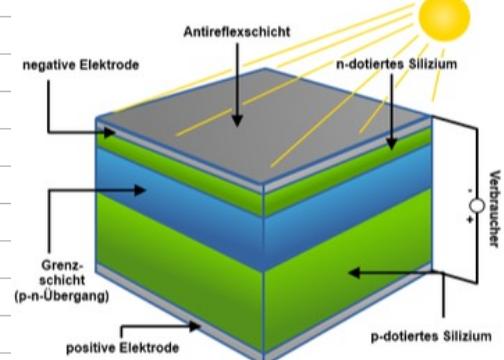
photovoltaische Effekt



bei Halbleitern mit Raumladungszone (pn-Übergang) kann beim Eintreffen eines Photons ein Elektron-Loch-Paar entstehen

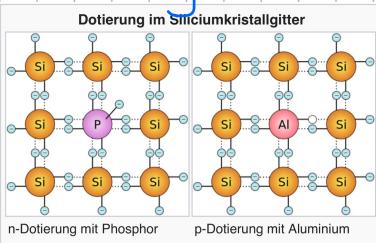
wegen Raumladung driften Elektronen in ins n-dotierte Material und Löcher ins p-dotierte, wodurch zwischen p- und n-Anschluss eine Spannung entsteht

es wird somit Licht in el. E. umgewandelt



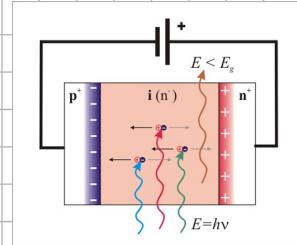
Bauteil, das photovoltaischen Effekt nutzt

Dotierung



Einfügen von Fremdatomen in einen Halbleiterkristall

→ elektrische, optische, strukturelle Eigenschaften werden geändert



In den nachstehenden Tabelle wird der Effekt an einem Halbleiter-Modell erklärt.

In untenstehender Tabelle verwendete Symbole	Negativ geladen	Positiv geladen
Bewegliche Ladungsträger	\ominus = Elektron	\oplus = Loch
Im Kristallgitter verankerte (festsitzende) Atomrumpfe	-	+

Situation	Halbleiter-Modell	Interpretation
Je ein n-dotierter und p-dotierter Halbleiter-Kristall, die sich nicht berühren	 n-dotiert p-dotiert	Die beweglichen Ladungsträger sind gleichmäßig verteilt. Somit sind beide Kristalle elektrisch überall neutral.
Die n- und p-dotierten Gebiete sind im selben Halbleiter-Kristall	 n-dotiert Kathode p-dotiert Anode	Bewegliche Elektronen im n-Material werden von festsitzenden negativen Atomrumpfen im p-Material abgestossen. Analog ist es für Löcher im n-Material. Die Mitte ist nun ohne bewegliche Ladungsträger. Sie wird darum Sperrschicht genannt. Festsitzende geladene Atomrumpfe bewirken ein elektrisch nicht neutrales Gebiet in der Sperrschicht. Sie wird darum auch Raumladungszone genannt.
Eine Spannung wird angelegt: + an n-Seite - an p-Seite	 n-dotiert Kathode p-dotiert Anode	Die extern angelegte Spannung zieht die beweglichen Ladungsträger von der Raumladungszone weg, diese wird breiter. Ohne bewegliche Ladungsträger kann kein Strom fließen, der pn-Übergang sperrt. Die Diode ist in Sperrrichtung gepolt.

Die Spannung wird umgepolzt: - an n-Seite + an p-Seite	 n-dotiert Kathode p-dotiert Anode	Die externe Spannung stößt die beweglichen Ladungsträger in die Raumladungszone hinein. Bei genügend hoher Spannung wandern die beweglichen Ladungsträger bis ins andere Gebiet. Trifft ein Elektron auf ein Loch, re kombinieren diese und es gibt Platz für nachfolgende Ladungsträger: Strom fließt. Die Diode ist in Durchlassrichtung gepolt. Bei der Rekombination wird Energie frei. Leuchtdioden strahlen dabei ein Photon ab, normale Dioden erwärmen sich.
Ein Photon γ trifft auf den Halbleiter	 n-dotiert Kathode p-dotiert Anode	Ein Photon kann seine Energie an ein Elektron abgeben, welches aufgrund seiner nun höheren kinetischen Energie den Platz im Kristall verlassen und ein Loch hinterlassen kann. Wegen der Raumladung, verursacht durch die festsitzenden Atomrumpfe, wandert das Elektron zur Kathode und das Loch zur Anode. Das Elektron kann über das extern mit Drähten angeschlossene Messinstrument zur Anode fließen, wo es mit einem Loch rekombiniert. Der Strom ist proportional zur Anzahl Photonen. Der photovoltaische Effekt wird bei Photodioden und Solarzellen genutzt.

einfarbige LED

Farbe hängt von Bandlücke des Halbleiters ab
gibt Zusammenhang zwischen Lichtfarbe (= Photonen-Energie) und minimal nötigen Spannung

je nach Halbleiter ist Durchlassspannung verschieden

weisse LED

RGB-LED

Mischlicht wird als weisses Licht wahrgenommen



Vorteil: alle RGB-Farben durch Anpassen der Ströme

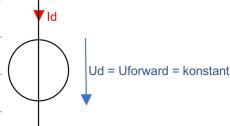
Infrarot-LED

für Datenkommunikation: Lichtwellenleiter haben bei Infrarot geringere Dämpfungsneusten

Lineare Ersatzschaltungen

je nach benötigter Genauigkeit kann Exp.-F. durch lin. Ersatzsch. ersetzt werden,
ungefähr: Durchlassspannung konstant

→ ideale Spannungsquelle:
Forward Voltage (Durchlassspannung)



falls erwartete Strom stark vom Strom (Forward Current) der Durchlassspannung abweicht
→ Spannung aus Kennlinie grafisch ablesen

genauer: nicht konstant

→ lineare Spannungsquelle:



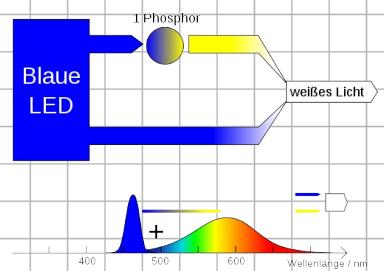
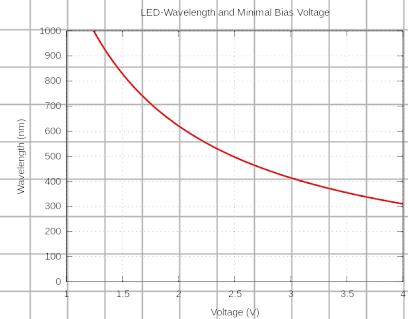
$U_{Qd} = x\text{-Achsenabschn.}$

$$R_{id} = \text{Steigung } \frac{\Delta U}{\Delta I}$$

allgemeine Analyseverfahren

normalerweise 2 Schritte:

- Beschreibung Schaltungstopologie (Verbindungsstruktur)
- Beschreibung Bauelemente



blaue LED mit Phosphor

ein Teil des Lichts wird durch Phosphor absorbiert und als gelbes Licht wieder abgestrahlt

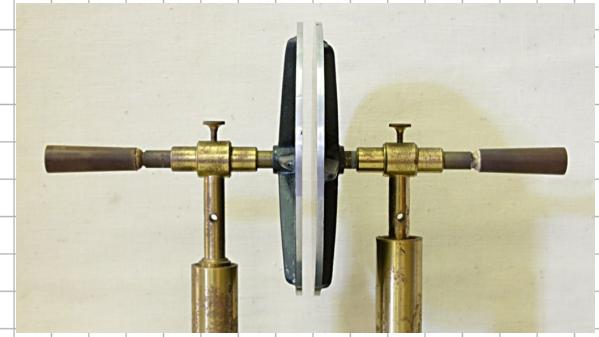
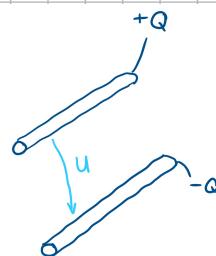
über Dicke d. Phosphorschicht kann Lichttemperatur angepasst werden

Kondensator und Kapazität

Kapazität

$$C = \frac{Q}{U}$$

$$[C] = F = \frac{As}{V}$$



Kondensator

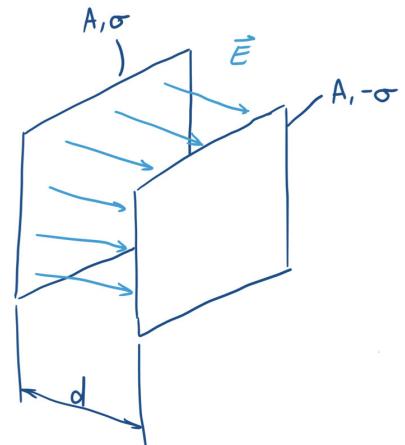
Anordnung von 2 isolierten Leitern, welche entgegengesetzt gleich grosse Ladungen tragen

Beschränkung auf Plattenkondensator $\rightarrow \vec{E}$ -Feld homogen

$$E = \frac{Q}{A\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$U = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$$

$$C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$



gespeicherte elektrische Energie

$$dW = U dQ$$

$$dW = \frac{Q}{C} dQ$$

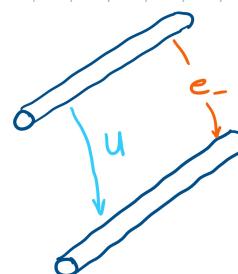
$$W = \int_0^{Q_0} \frac{1}{C} Q dQ = \frac{1}{2C} Q^2 \Big|_0^{Q_0} = \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{1}{2} C U^2$$

$$i(t) = C \cdot \frac{dU(t)}{dt}$$

Strom \propto Spannungsänderung

Eel verlustlos gespeichert

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{R} \cdot U(t) \\ \text{Strom jederzeit } &\propto \text{Spannung} \\ \text{Eel} \rightarrow &\text{Wärme} \end{aligned}$$

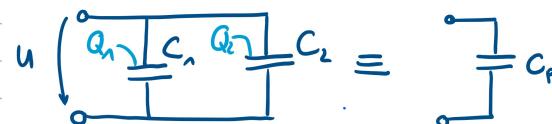


Verschaltung von Kondensatoren

parallel

$$Q = \sum C_i U = (\sum C_i) U = C_p U$$

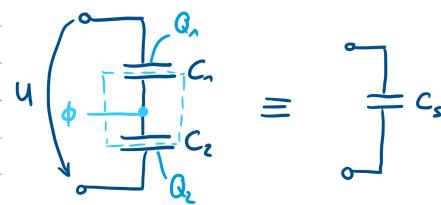
$$\Rightarrow C_p = \sum C_i$$



seriell

$$U = \sum \frac{Q}{C_i} = Q \left(\sum \frac{1}{C_i} \right) = \frac{Q}{C_s}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C_s} = \sum \frac{1}{C_i}$$



Kondensatoren und Dielektrika

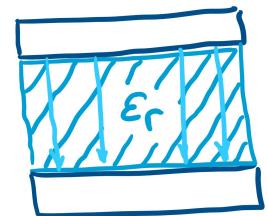
Permittivität ϵ_r gibt an, um welchen Faktor sich elektrische Feldstärke im Kondensator nach Einbringen des Dielektrums reduziert
 \hookrightarrow Isolator

für die meisten Dielektrika $1 < \epsilon_r < 100$

für Luft $\epsilon_r \approx 1 \Rightarrow$ unsere Überlegungen weiterhin gültig

ϵ_r ist Materialeigenschaft

ϵ_r ist frequenzabhängig



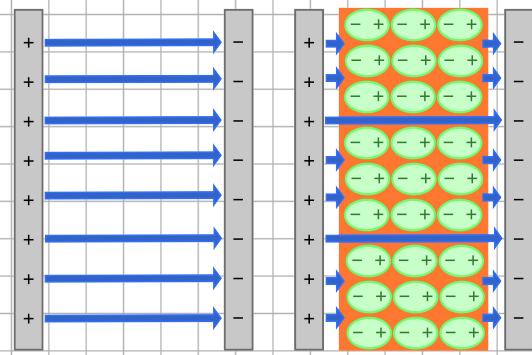
$$\tilde{U} = \frac{U_0}{\epsilon_r}$$

$$\tilde{C} = \frac{Q}{\tilde{U}} = \frac{Q}{U_0} \epsilon_r$$

$$\tilde{C} = \epsilon_r C_0$$

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}$$

→ Kapazität wird erhöht



weitere Zusammenhänge

$$C^2 = \frac{1}{\epsilon_0 M_0} \Leftrightarrow C^2 \epsilon_0 M_0 = 1$$

ϵ_0 : elektrische Feldkonstante

$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$: Permittivität

M_0 : magnetische Feldkonstante

$M = M_0 M_r$: magnetische Permeabilität

Brechungsexponent $n = \sqrt{\epsilon_r M_r}$

c = Lichtgeschwindigkeit im Vakuum

bei transparenten Materialien: $M_r \approx 1$

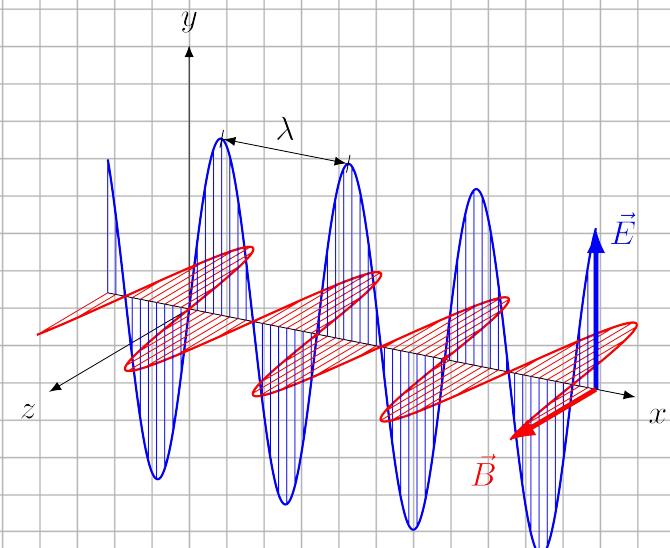
$$\Rightarrow n \approx \sqrt{\epsilon_r}$$

Maxwell-Gleichungen:

Name	Differential form	Integral form
Gauss's law	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q(V)}{\epsilon_0}$
Gauss's law for magnetism	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$
Maxwell-Faraday equation (Faraday's law of induction)	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi_{B,S}}{\partial t}$
Ampère's circuital law (with Maxwell's correction)	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_S + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_{E,S}}{\partial t}$

Dieses gekoppelte System von partiellen Differentialgleichungen beschreibt die zeitliche Entwicklung von elektromagnetischen Feldern im Raum.

Die Maxwell-Gleichungen gehören zu den grundlegendsten und wichtigsten Gleichungen in der Physik.

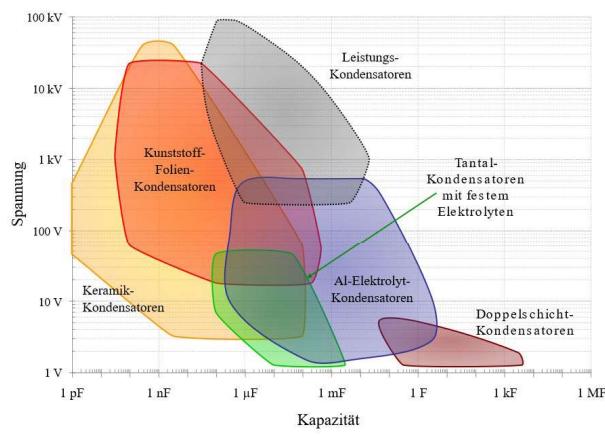


reale Kondensatoren

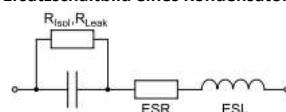
Kondensatoren	Keramik-Kondensator			Elektrolyt-K.	Super-K.	Folien-K.	
Dielektrikum	NPO/COG	X7R	Y5V	Aluminiumoxid	Doppelschicht-K.	Kunststofffolie	
Bauform							
Toleranz	$\pm 1\% - \pm 10\%$	$\pm 20\%$		$\pm 20\%$	$\pm 20\%$	$\pm 1\% - \pm 10\%$	
Kapazität	$1\text{pF} - 1\mu\text{F}$	$< 10\mu\text{F}$	$< 100\mu\text{F}$	$1\mu\text{F} - 10'000\mu\text{F}$	$0.1\text{F} - 10'000\text{F}$	$100\text{pF} - 10\mu\text{F}$	
Nennspannung	10V - 500V			4V - 630V	2.5V (bis 160V als Modul)	20V - 1000V	
Strombelastbarkeit	Hoch, ist nicht der begrenzende Faktor			1A bei festem Elektrolyt = wichtiges Kriterium	Gering verglichen mit Elko Hoch verglichen mit Akku	Sehr hoch, hohe Impulsfestigkeit	
Spannungs-abhängigkeit	<p>Graph showing the relative change in capacitance ($\Delta C/C_0$ %) versus applied DC voltage (U/U_0 %). The curves for NPO and X7R are relatively flat, while Z5U and Y5V show significant negative temperature coefficient (NTC) behavior at higher voltages.</p>			Gering verglichen mit der Herstellertoleranz			
Frequenz-abhängigkeit	<p>Graph showing the relative change in capacitance ($\Delta C/C_0$ %) versus frequency (kHz). The curves for NPO and X7R are relatively flat, while Y5V shows a sharp decrease at higher frequencies.</p>					gering	
Temperatur-abhängigkeit	<p>Graph showing the relative change in capacitance ($\Delta C/C_0$ %) versus temperature (°C). The curves for NPO and X7R are relatively flat, while Y5V shows a sharp increase at higher temperatures.</p>				Gering verglichen mit der Herstellertoleranz		

Kondensatoren	Keramik-Kondensator			Elektrolyt-K.	Super-K.	Folien-K.
ESR = equivalent series resistor	Sehr klein, meist vernachlässigbar			50mΩ = wichtiges Kriterium	1mΩ - 10mΩ	1Ω
Selbstentladung	Vernachlässigbar, da mehrere GΩ			Hoch, im μA-Bereich	Über Wochen	Vernachlässigbar, GΩ
Preis bei 1000 St.	CHF 0.01 1nF/50Vdc	CHF 0.01 100nF/50Vdc	CHF 0.01 10μF/50Vdc	CHF 0.30 1000μF/10Vdc	CHF 5.00 1F/5Vdc	10.00 10μF/400Vac CHF 0.10 1nF/50Vdc
	Frequenzgang-Filter Hochfrequenz	Block-C DC-Entkopplung Filter mit geringen Ansprüchen	Stütz-C	Stütz-Kondensatoren DC-Entkopplung Überbrücken Stromausfall bis 1s	 Wirkungsgrad: Elko 99%, Super-C 95%, Akku 90%	Hohe Spannungen Hohe Stromspitzen Frequenzgang-Filter Hochfrequenz

Kapazitäts- und Spannungsbereiche verschiedener Kondensator-Technologien



Ersatzschaltbild eines Kondensators



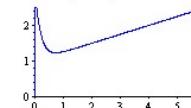
Symbol

PID

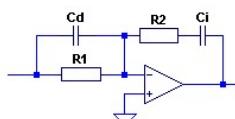
Reglergleichung

$$y(t) = K_p \cdot e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

Sprungantwort



Elektrische Schaltung:



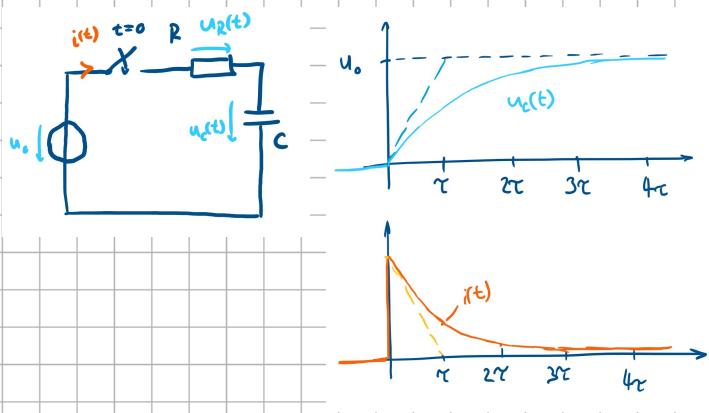
$$K_p = \frac{R2}{R1} + \frac{Cd}{Ci}$$

$$Ki = \frac{1}{R1 \cdot Ci}$$

$$Kd = R2 \cdot Cd$$

Schaltverhalten Kondensator

Laden Kondensator



$$u_q(t) = u_R(t) + u_C(t)$$

$$q(t) = C \cdot u_C(t)$$

$$u_R(t) = R \cdot i(t)$$

$$i(t) = C \cdot \dot{u}_C(t)$$

$$\Rightarrow C \cdot \dot{u}_C(t) = \frac{U_d - u_C(t)}{R} = \frac{U_d - U_0 e^{-\frac{t}{RC}}}{R}$$

$$\Rightarrow \dot{u}_C(t) = -\frac{1}{RC} u_C(t) + \frac{U_d}{RC}$$

homogen:

$$\dot{u}_C(t) = -\frac{1}{RC} u_C(t)$$

$$\Rightarrow u_C(t) = K e^{-\frac{t}{RC}}$$

inhomogen:

$$u_C(t) = K(t) e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\Rightarrow \dot{u}_C(t) = K'(t) e^{-\frac{t}{RC}} + K(t) \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

einsetzen:

$$K'(t) e^{-\frac{t}{RC}} + K(t) \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{1}{RC} K(t) e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{U_d}{RC}$$

$$K'(t) = \frac{U_d}{RC} e^{\frac{t}{RC}}$$

$$K(t) = \int K'(t) dt = U_d e^{\frac{t}{RC}} + \tilde{C}$$

$$\Rightarrow u_C(t) = (U_d e^{\frac{t}{RC}} + \tilde{C}) e^{-\frac{t}{RC}} = U_d + \tilde{C} e^{-\frac{t}{RC}}$$

mit $u_C(t) = 0$ für $t=0$:

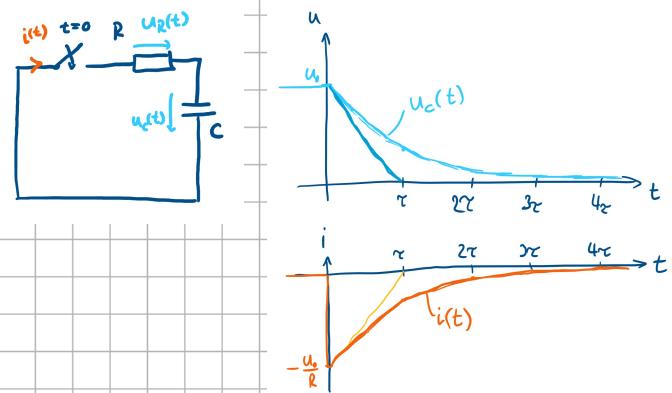
$$u_C(0) = 0 = U_d + \tilde{C} \cdot 1 \Rightarrow \tilde{C} = -U_d$$

$$\Rightarrow u_C(t) = U_d (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

$$q(t) = C u_C (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

$$i(t) = \dot{q}(t) = \frac{U_d}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Entladen Kondensator



$$u_R(t) = -u_C(t)$$

$$q_C(t) = C u_C(t)$$

$$u_R(t) = R \cdot i(t)$$

$$i(t) = C \dot{u}_C(t)$$

$$\Rightarrow C \cdot \dot{u}_C(t) = \frac{u_R(t)}{R} = \frac{-u_C(t)}{R}$$

$$\Rightarrow \dot{u}_C(t) = -\frac{1}{RC} u_C(t)$$

$$\Rightarrow u_C(t) = K e^{-\frac{t}{RC}}$$

mit $u_C(t) = U_0$ für $t=0$:

$$u(0) = U_0 = K \cdot 1 \Rightarrow K = U_0$$

$$\Rightarrow u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$q(t) = C U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = \dot{q}(t) = -\frac{U_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Praxis: Vorgang nach 5τ fertig

$$\tau = RC$$

Kondensator bei sinusförmiger Anregung

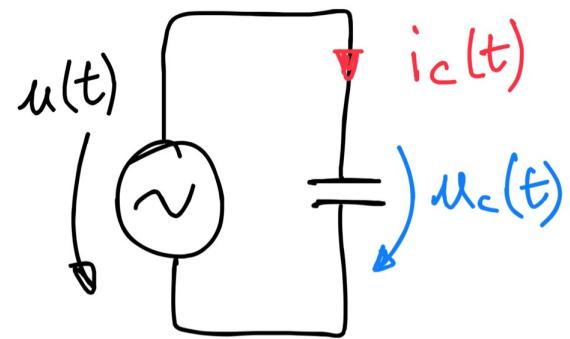
Baufeilgleichung Kondensator

$$q(t) = C \cdot u(t) / \frac{d}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} q(t) = \frac{d}{dt} [C \cdot u(t)]$$

$$i(t) = C \cdot \frac{d}{dt} u(t)$$

\Rightarrow gilt für $u(t), i(t)$
 \Rightarrow gleicher Scheitelpunkt wie $U = R \cdot I$



Kreisfrequenz ω

$$f = \frac{1}{T}$$

$$[f] = \frac{1}{s} = \text{Hz}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$[\omega] = \text{Hz}$$

Amplitude

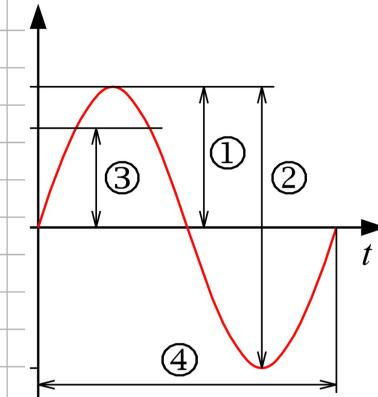
$$A = \text{Amplitude} = \text{Scheitelpunkt} = \text{Spitzenwert} \quad ①$$

Effektivwert Arms

quadratisches Mittel

$$\text{bei } \sin, \cos: A_{\text{rms}} = \frac{\hat{A}}{\sqrt{2}} \quad ③$$

Spitzen-Spitzenwert (2)



Kondensator an sinusf. Wechselstrom

$$u_c(t) = u(t) = \hat{U} \cos(\omega t)$$

$$i_c(t) = C \cdot \frac{d}{dt} u_c(t)$$

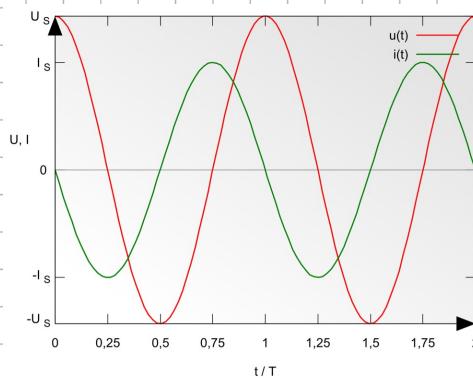
$$\Rightarrow i_c(t) = C \cdot \frac{d}{dt} [\hat{U} \cos(\omega t)]$$

$$\Leftrightarrow i_c(t) = \hat{I} \omega C \cdot (-\sin(\omega t))$$

$$\Leftrightarrow i_c(t) = \hat{I} \omega C \cdot \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$i(t) = \hat{I} \cdot \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$\hat{I} = \hat{I} \omega C \quad [\hat{I}] = V \text{ Hz} \frac{C}{V} = \frac{VA_s}{sV} = A$$



Kondensator-Strom eilt vor.

Induktivität-Strom zu spät.

- $\propto \hat{U}$: höhere Spannung \Rightarrow höherer Strom
- $\propto C$: größerer Kond. \Rightarrow höherer Strom
- $\propto \omega$: höhere Frequenz \Rightarrow höherer Strom

$$f=0 \text{ (DC)} \Rightarrow \hat{I}=0, \quad f \rightarrow \infty \Rightarrow \text{KS}$$

Induktion und Selbstinduktion

Grösse	Formelzeichen, Formel	Einheit bzw. Wert
Magnetische Flussdichte	B	Vs/m ² = Tesla = T
Magnetische Erregung	$H = B / \mu$	A/m
Permeabilität	μ	Vs/(Am) = H/m
Vakuumpermeabilität	μ_0	$4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ H/m
Relative Permeabilität	$\mu_r = \mu / \mu_0$	Zahlenwert > 0



Unter «magnetischen Feldstärke» wird je nach Quelle die Flussdichte oder die Erregung verstanden.

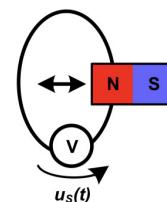
Weiter gelte folgende Konvention:

Bezeichnung	Bedeutung
B	Magnetfeld ist homogen im dargestellten Raum, d.h. die Stärke und Richtung sind unabhängig vom Raumpunkt. Beispiel: Erdmagnetfeld im Laborraum
B_i	Magnetfeld erzeugt durch den Strom i
B_M	Magnetfeld erzeugt durch den dargestellten Magneten

$u_s(t)$: Induktionsspannung

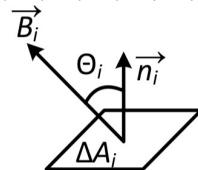
Spannungsstoß: $\int u_s(t) dt$ (Zeit-Spannungsfläche)

→ bei gegebenem Magnet & Schleife konstant



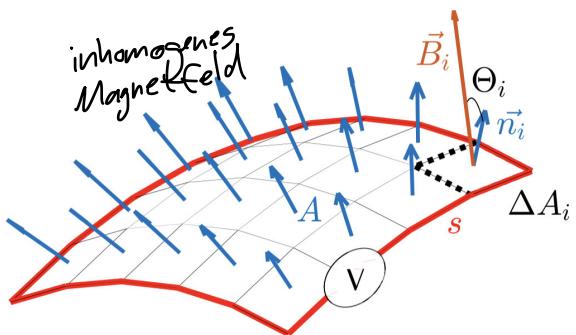
magnetischer Fluss ϕ

$$\phi_{\Delta A_i} = B_i \cdot \Delta A_i \cdot \cos \Theta_i$$



$$\phi = \sum B_i \cdot \Delta A_i \cdot \cos \Theta_i$$

$$\phi = \iint \vec{B} d\vec{A} \quad [\phi] = \text{Tm}^2 = \text{Vs} = \text{Wb} = \text{Wb}$$



A : beliebig geformte Oberfläche

S : Leiterschleife

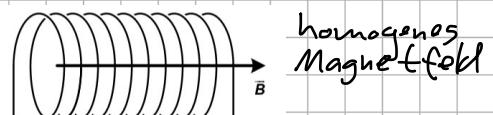
ΔA_i : quasi-ebares Teilstück

B_i : homogenes Magnetfeld in Teilstück

$$|\vec{n}| = \Delta A_i$$

magn. Fluss bei Spule <verketteter Fluss>

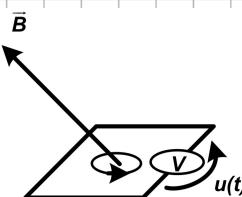
$$\Psi = N \cdot \phi = N \cdot B \cdot A \cdot \cos \theta$$



Induktions-Gesetz von Faraday

$$u_s(t) = -N \cdot \frac{d\phi(t)}{dt} = -\frac{d\Psi(t)}{dt}$$

$u_s(t)$: Induktionsspannung einer Spule



Induktion durch...

Feldänderung \Rightarrow Transformat.-Spannung

$$\phi(t) = \vec{B}(t) \cdot A \cdot \cos \theta$$

Änderung d. Stärke d. B -Feldes

\hookrightarrow Transformat.

Bewegung \Rightarrow Bewegungsspannung

$$\phi(t) = \vec{B} \cdot A \cdot \cos \theta(t)$$

Drehung d. Fläche in Bezug auf Magnetfeldrichtung

\hookrightarrow Generatoren / Motoren

Änderung d. Fläche

aufgrund schwieriger Realisierung keine bekannte Anwendung

Wirbelstrom

auch bei VS induzierte Spannung

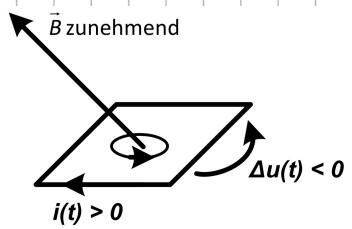
\hookrightarrow über jedem gleich langen Abschnitt dieselbe Spannung

daher fließt Strom (bewirkt durch induzierte Spannung)

Wirbelstrom \Rightarrow el. Feld E_i entlang der Schleife

Feldlinien von E_i müssen s.l. mit Feldlinien der Stromrichtung decken

Feldlinien in s.l. geschlossen



Lenz'sche Regel

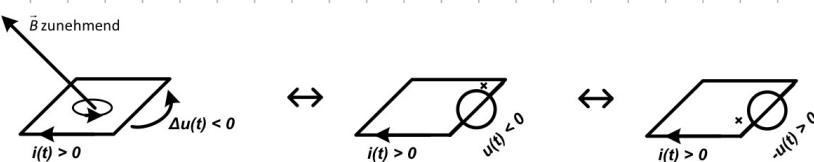
Wirbelstrom bewirkt B_i , welches der Flussänderung entgegen gesetzt ist

\hookrightarrow muss, wegen E-Erhaltung

Mashensatz - Verallgemeinerung

$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = u_i \neq 0 \Rightarrow$ Mashensatz muss erweitert werden:

Ersatzspannungsquelle:



Induktivität

$$L = \frac{\Psi(t)}{i(t)} \quad (\text{nicht } u(t) = R \cdot i(t)) \quad [L] = \frac{Vs}{A} = \text{Henry} = H$$



Zylinderspule: $\Psi = \frac{M \cdot A}{\sqrt{L^2 + d^2}} \cdot N^2 \cdot I$

M: Permeabilität
A: Querschnittsfläche
L: Länge
d: Durchmesser
N: Windungszahl
I: Stromstärke

Falls $L \gg \sqrt{A}$:

$$\Psi \approx \frac{M \cdot A}{L} \cdot N^2 \cdot I$$

$$L \approx \frac{M \cdot A}{L} \cdot N^2$$

Spule als passiver Zweipol

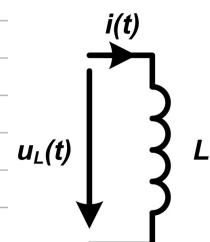
Induktivität- Strom zu spät.

Kondensator- Strom eilt vor.

$$\Psi(t) = L \cdot i(t) \quad \text{wobei } \Psi(t) = N\Phi(t) \quad (\text{verketteter Fluss})$$

$$(u(t) = -\frac{d\Psi(t)}{dt} = -\frac{di(t)}{dt} \cdot L \quad (\text{Erzeugersystem}))$$

$$u_L(t) := -u(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt} = N \cdot \frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{di(t)}{dt} \cdot L \quad (\text{Verbrauchersystem})$$



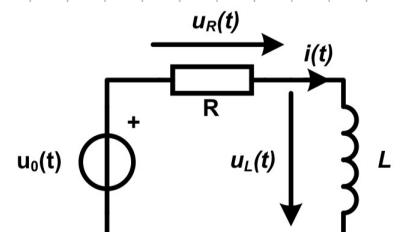
gespeicherte Energie

$$P_L(t) = u_L(t) \cdot i(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \cdot i(t) = \frac{dW_L(t)}{dt}$$

$$W_L(t) = \int P_L(t) dt = \frac{1}{2} L \cdot i(t)^2 + C$$

Falls kein Strom \Rightarrow keine Energie $\Rightarrow C=0$

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L \cdot i(t)^2$$

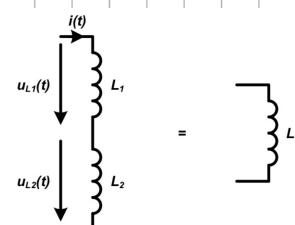


Verschaltung von Spulen

seriell

$$u_0 = \sum L_i \frac{di(t)}{dt} = (\sum L_i) \frac{di(t)}{dt} = L_s \frac{di(t)}{dt}$$

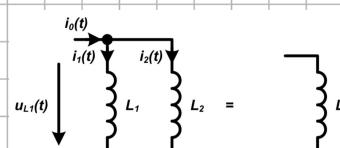
$$\Rightarrow L_s = \sum L_i$$



parallel

$$\frac{di(t)}{dt} = \sum \frac{di_i(t)}{dt} = \sum \frac{u_0}{L_i} = u_0 \left(\sum \frac{1}{L_i} \right) = \frac{u_0}{L_p}$$

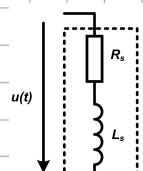
$$\Rightarrow \frac{1}{L_p} = \sum \frac{1}{L_i}$$



reale Spule

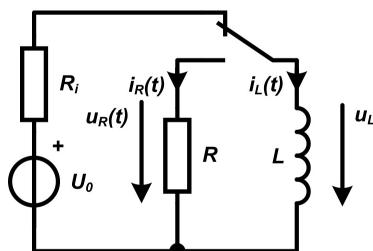
viel Draht \Rightarrow neben induktiven Anteilen auch parasitärer ohmischer Widerstand:

$$\text{Spannung reale Spule: } u(t) = R_s i(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$



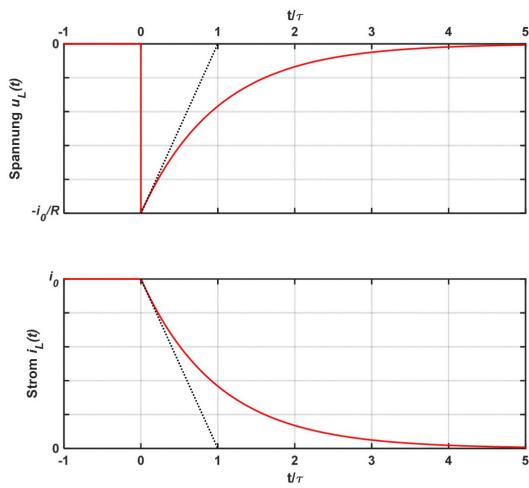
Schaltverhalten Spalte

Ausschaltvorgang



$$u_R(t) = R \cdot i_R(t)$$

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$$



$$u_L(t) - u_R(t) = 0$$

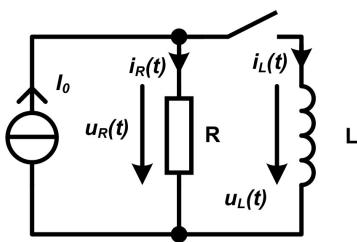
$$L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + R \cdot i_L(t) = 0$$

$$\tau \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = 0$$

$$i_L(t) = i_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau = \frac{L}{R}$$

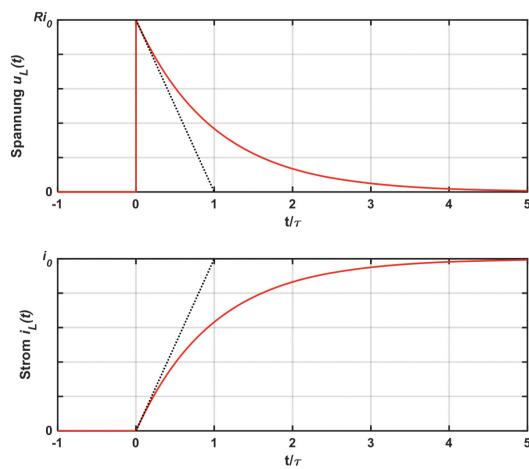
$$u_L(t) = -i_0 R \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Einschaltvorgang



$$u_R(t) = R \cdot i_R(t)$$

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$$



$$u_L(t) - u_R(t) = 0$$

$$i_R(t) + i_L(t) = i_0$$

$$L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} - R \cdot i_R(t) = 0$$

$$\tau \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = i_R(t)$$

$$\tau \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = i_0$$

$$i_L(t) = i_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad \tau = \frac{L}{R}$$

$$u_L(t) = i_0 R \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$U_0 = R \cdot i_0$$

Wechselstromlehre

Drehstrom

besondere Form von Wechselstrom:
3 zeitlich versetzte Wechselstromspannungen



Signal

zeitlicher Verlauf einer physikalischen Größe (hier Spannung oder Stromstärke)

Bedingungen für harmonisches (rein sinusförmiges) Signal in einer el. Schaltung

1. einheitliche, sinusförmige Anregung mit fester Frequenz (müssen nicht synchron sein, Nulldruckphasen können verschieden sein)
2. lineare Schaltung (Nichtlinearitäten erzeugen immer Vielfache der Anregungsfrequenz (Fourier-Reihe))
3. stationärer Zustand erreicht, Einschwingphase abgelaufen (Danach die Einschwingphase nur von Schaltung und nicht von Frequenz abhängig)

Harmonische Signale und ihre Darstellung

Falls elektrische Schaltung mit (freien) Bauteilelementen wie (ideale) Widerstände, Kondensatoren, Spulen mit harmonischen Spannungs- oder Stromquelle betrieben wird
=> Spannungen und Stromstärken in dieser Schaltung nach kurzer Einschwingphase ebenfalls harmonisch.

Allgemeine Eigenschaften

Diese Spannungs- und Stromverläufe unterscheiden sich nur durch Amplitude und zeitliche Verschiebung
=> können alle durch folgende Formel dargestellt werden

$$x(t) = \hat{X} \cos(\omega t + \varphi) = \hat{X} \cos(2\pi f t + \varphi) \quad (\text{verallgemeinerter Cosinus})$$

Die Gleichung (2.1) enthält drei Parameter welche das Signal eindeutig bestimmen:

Amplitude: $\hat{X} > 0$ mit der Einheit V oder A, je nach der Art des Signals

Nullphasenwinkel: φ Einheit: $[\varphi] = \text{rad}$ (Radian)

Kreisfrequenz: $\omega = 2\pi f$ Einheit: $[\omega] = \text{s}^{-1}$ oder rad/s

Es folgen weitere mit diesen Parametern zusammenhängende Größen:

Frequenz: $f = \frac{1}{T}$ Einheit: $[f] = \text{Hz} = \text{s}^{-1}$

Periodendauer: T Einheit: $[T] = \text{s}$

Zeitpunkt des Scheitelwertes: $t_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$ Einheit: $[t_0] = \text{s}$

Phase: $\omega t + \varphi$ Einheit: $[\omega t + \varphi] = \text{rad}$

$$\varphi = -\omega t_0 = -\frac{2\pi}{f} t_0$$

Harmonische Signale $x(t)$ bekannter (einheitlicher) Frequenz können bereits mit dem Parameterpaar (\hat{X}, φ) eindeutig beschrieben werden. Um diese Äquivalenz dieser Schreibweisen auszudrücken wird der Doppelpfeil \leftrightarrow verwendet:

$$x(t) = \hat{X} \cos(\omega t + \varphi) \leftrightarrow (\hat{X}, \varphi) \quad (2.3)$$

Effektivwert: $X = \frac{\hat{X}}{\sqrt{2}}$

$$\sin(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$$

Zeiger und komplexe Zahlen

Interpretation von (\hat{X}, φ) als Betrag und Winkel einer komplexen Zahl $\underline{\hat{X}}$:

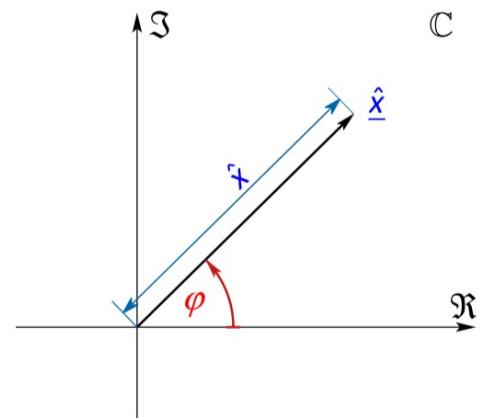
$$\underline{\hat{X}} = \hat{X} e^{j\varphi}$$

Lineare Abbildung

$$x(t) = \hat{X} \cos(\omega t + \varphi) \leftrightarrow \underline{\hat{X}} = \hat{X} e^{j\varphi} = \hat{X} \cos \varphi + j \hat{X} \sin \varphi$$

Homogenität: $y(t) = \alpha x(t) \leftrightarrow \underline{\hat{Y}} = \alpha \underline{\hat{X}}$

Additivität: $y(t) = x_1(t) + x_2(t) \leftrightarrow \underline{\hat{Y}} = \underline{\hat{X}}_1 + \underline{\hat{X}}_2$



harmonische Zeitfunktion aus komplexem Zeiger zusammengesetzt:

$$x(t) = \operatorname{Re}(\underline{\hat{X}} \cdot e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(\hat{X} e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}) = \hat{X} \cdot \operatorname{Re}(e^{j(\omega t + \varphi)}) = \hat{X} \cos(\omega t + \varphi)$$

Ableitung der harmonischen Funktion $x(t)$:

$$y(t) = \dot{x}(t) = \omega \hat{X} \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) \leftrightarrow \underline{\hat{Y}} = \omega \hat{X} e^{j(\varphi + \frac{\pi}{2})} = j\omega \underline{\hat{X}}$$

→ komplexen Zeiger mit $j\omega$ multiplizieren

→ Drehstreckung:

- Streckung um Faktor ω
- Drehung um $\frac{\pi}{2}$ im Gegenuhrrichtsinn

Komplexe Widerstände und Leitwerte

Definitionen

Komplexe Spannungs-Amplitude $\hat{U} = \hat{U} e^{j\varphi_u}$ beschreibt die Zeitfunktion $u(t) = \hat{U} \cos(\omega t + \varphi_u)$

Komplexe Strom-Amplitude $\hat{i} = \hat{i} e^{j\varphi_i}$ beschreibt die Zeitfunktion $i(t) = \hat{i} \cos(\omega t + \varphi_i)$

$$\text{Effektivwert der Spannung: } U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Effektivwert des Stroms: } I = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Komplexer Effektivwertzeiger der Spannung: } \underline{U} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Komplexer Effektivwertzeiger des Stroms: } \underline{I} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Komplexer Widerstand oder Impedanz: } \underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{I} e^{j\varphi} = R + jX$$

Wirkwiderstand oder Resistenz: $R = Z \cos \varphi$
Blindwiderstand oder Reaktanz: $X = Z \sin \varphi$

$$\text{Betrag der Impedanz oder Scheinwiderstand: } Z = |\underline{Z}| = \frac{U}{I} = \frac{\hat{U}}{\hat{i}} = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\text{Komplexer Leitwert oder Admittanz: } \underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{I}{U} e^{-j\varphi} = G + jB$$

Wirkleitwert oder Konduktanz: $G = Y \cos \varphi$
Blindleitwert oder Suszeptanz: $B = -Y \sin \varphi$

$$\text{Betrag der Admittanz oder Scheinleitwert: } Y = |\underline{Y}| = \frac{I}{U} = \frac{\hat{i}}{\hat{U}} = \sqrt{G^2 + B^2}$$

$$\text{Phasenverschiebungswinkel: } \varphi = \varphi_u - \varphi_i = \omega \Delta t = \frac{2\pi}{T} \Delta t, \quad \Delta t = t_{o,i} - t_{o,u}$$

Achtung: Bei den komplexen Größen \underline{Z} und \underline{Y} sind die Realteile R und G nicht reziprok zueinander:

$R \neq 1/G$. Die Symbole dürfen nicht mit den identischen Symbolen für Widerstand und Leitwert verwechselt werden.

Der Winkel φ kann auf vielfache Weise berechnet werden:

$$\begin{aligned} \varphi &= \arg(\underline{Z}) \\ &= -\arg(\underline{Y}) \\ &= \Im(\ln(\underline{Z})) \end{aligned}$$

$$= \arctan\left(\frac{X}{R}\right), \text{ gilt nur für } \underline{Z} = R + jX \text{ im 1. oder 4. Quadranten}$$

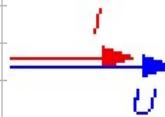
Die Funktion $\arg()$ – welche den Winkel einer komplexen Zahl liefert – heisst in MATLAB `angle()`

Widerstand

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= R = \frac{U(t)}{i(t)} \\ Y &= G = \frac{i(t)}{U(t)} \end{aligned}$$

nur hier, nicht allgemein

$$\varphi = 0, \text{ da } \varphi_u = \varphi_i$$



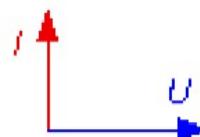
Kapazität

$$i(t) = C \dot{u}(t) \Leftrightarrow I = j\omega C \underline{U}$$

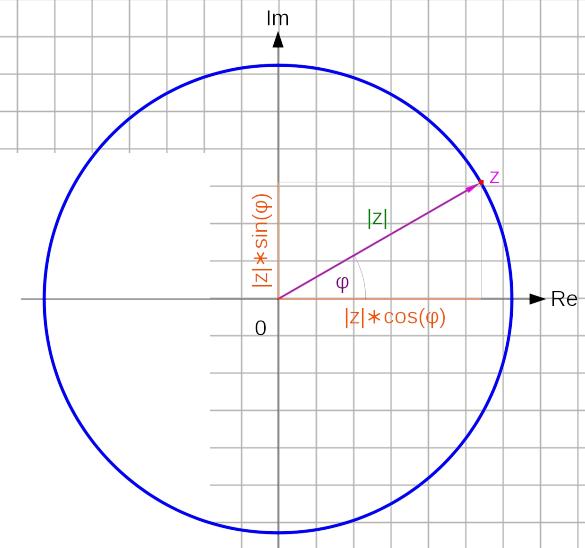
$$\underline{Z} = j \frac{-1}{\omega C} = jX$$

$$Y = j\omega C = jB$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}, \text{ da } \varphi_i = \varphi_u + \frac{\pi}{2}$$



Kondensator- Strom eilt vor.



$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{Z} \\ Y &= \frac{1}{Z} \end{aligned}$$

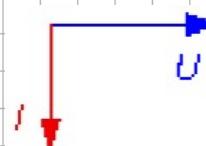
Selbstinduktivität

$$u(t) = L \cdot i(t) \Leftrightarrow U = j\omega L I$$

$$Z = j\omega L = jX$$

$$Y = j \frac{1}{\omega L} = jB$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \text{ da } \varphi_u = \varphi_i + \frac{\pi}{2}$$



Induktivität- Strom zu spät.

Gegeninduktivität

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}(t)}{i_2(t)} ; \text{ erster Index: auf welche Fluss wirkt, zweiter: Quelle des Fluxes}$$

beeinflussen sich gegenseitig \Rightarrow gibt auch L_{21}

bei linearer Kreisen: $L_{12} = L_{21}$

$$u_1(t) = L_1 i_1(t) + L_{12} i_2(t) ; \text{ ind. Spannung im ersten Kreis}$$

$$u_2(t) = L_2 i_2(t) + L_{12} i_1(t) ; \text{ ind. Spannung im zweiten Kreis}$$

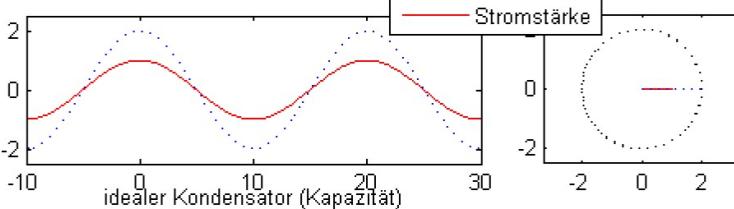
Vorzeichen von L_{12} hängt von Bezugsrichtung der Stromrichten und gegenseitiger Orientierung der Kreise ab

$|L_{12}| \leq \sqrt{L_1 L_2}$; Gleichheit wenn gesamter in Kreis 1 erzeugter Fluss Kreis 2 durchdringt und umgekehrt

Zusammenfassung

Eigenschaft	Widerstand R	Kapazität C	Induktivität L
Impedanz Z	R	$\frac{1}{j\omega C}$	$j\omega L$
Admittanz Y	$G = \frac{1}{R}$	$j\omega C$	$\frac{1}{j\omega L}$

idealer Widerstand



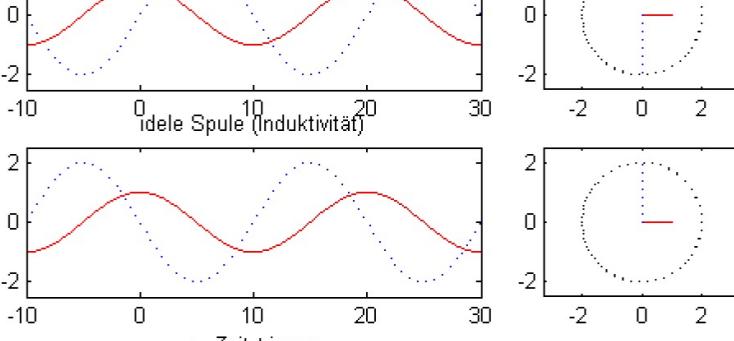
Spannung
Stromstärke

Kondensator- Strom eilt vor.

idealer Kondensator (Kapazität)

ideale Spule (Induktivität)

Zeit t in ms



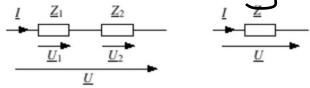
Induktivität- Strom zu spät.

ideale Spule (Induktivität)

Zeit t in ms

Einfache Wechselstromschaltungen

Serienschaltung

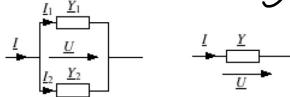


$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \dots + \underline{Z}_n$$

$$\underline{U}_k = \frac{\underline{Z}_k}{\underline{Z}_1 + \dots + \underline{Z}_n} \underline{U}$$



Parallelschaltung



$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \dots + \underline{Y}_n$$

$$\underline{I}_k = \frac{\underline{Y}_k}{\underline{Y}_1 + \dots + \underline{Y}_n} \underline{I}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

Ersatzzweipole

Passive Wechselstromzweipole können aus beliebig vielen linearen R-, L- und C-Elementen bestehen und durch Parallel- und Reihenschaltung in ein Ersatzzweipol zusammengefasst werden. Ihr Klemmenverhalten bei fest gegebener Frequenz kann immer durch die Angabe der Impedanz Z oder der Admittanz Y , beziehungsweise deren Real- und Imaginärteile eindeutig beschrieben werden. Dies führt immer auf eine Kombination von einem Widerstand für den Realteil und einer Kapazität oder Induktivität für den Imaginärteil. Dabei kann ein Serie- oder ein Parallelmodell als Ersatzschaltung gewählt werden.

Diese Umrechnungen gelten nur für die Frequenz bei der sie gemacht wurden!

Resonanz

Unter **Resonanz** eines linearen, elektrischen Zweipols versteht man die besondere Betriebsart bei welcher die **Impedanz** oder die **Admittanz** des Zweipols *rein reell* wird¹². Dies ist dann der Fall, wenn entweder der Imaginärteil oder der Winkel (Argument) der komplexen Größe verschwinden. Dies kann durch entsprechende Wahl der Frequenz der sogenannten **Resonanzfrequenz** oder durch die Festlegung irgendeines anderen Parameters der Schaltung bewirkt werden.

¹² Diese Definition ist auf elektrische lineare Zweipole beschränkt. Je nach Fachgebiet gibt es andere und möglicherweise leicht verschiedene Definitionen.

Leistung

$$\begin{aligned} \text{Momentanleistung: } p(t) &= u(t) \cdot i(t) = \underline{U} \cos(\omega t + \varphi_u) \cdot \underline{I} \cos(\omega t + \varphi_i) \\ &= UI \cos(\varphi_i - \varphi_u) + UI \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) \\ &= \underline{P} + \underline{Q} \cdot \cos(2\omega t + 2\varphi_u) + \underline{S} \cdot \sin(2\omega t + 2\varphi_u) \end{aligned}$$

Wirkleistung Wechselanteil aufgrund Wirkanteil Wechselanteil aufgrund Blindanteil

Wirkleistung

$$P = UI \cos(\varphi) = S \cos(\varphi) = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

Blindleistung

$$Q = UI \sin(\varphi) = S \sin(\varphi)$$

Scheinleistung

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$\underline{S} = S \angle \varphi = P + jQ$$

$$\tan(\varphi) = \frac{Q}{P}$$

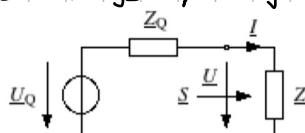
$$\begin{aligned} S &= \underline{U} \underline{I}^* = P + jQ \\ &= (\underline{Z} \cdot \underline{I}) \underline{I}^* = \underline{Z}^2 = RI^2 + jX^2 \\ &= \underline{U} \cdot (\underline{Y} \cdot \underline{U})^* = \underline{Y}^* \underline{U}^2 = GU^2 + j(-BU^2) \end{aligned}$$

$$\text{Leistungsfaktor } \lambda = \cos(\varphi) = \frac{P}{S} \quad (\text{Blindfaktor: } \sin(\varphi) = \frac{Q}{S})$$

Blindleistungskompensation

falls Q gross \rightarrow unnötige Verluste in Zuleitungen, da mehr Strom hin und her fließt als nur für die Wirkleistung benötigt würde
 \rightarrow daher versucht man λ zu maximieren

Leistungsanpassung



Wirkleistungsanpassung (für feste Frequenz):

$$\underline{Z} = \underline{Z}_Q^* \quad (R=R_Q, X=-X_Q) \Rightarrow P = \frac{U_Q^2}{4R_Q}, \quad Q = -\frac{X_Q}{4R_Q^2} U_Q^2$$

Scheinleistungsanpassung (für möglichst grossen Frequenzbereich):

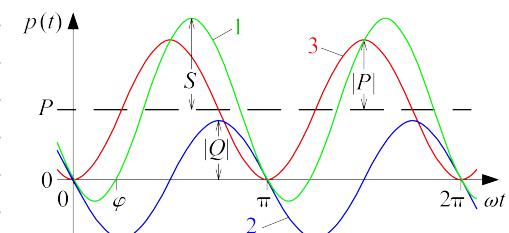
$$\underline{Z} = \underline{Z}_Q \quad (R=R_Q, X=X_Q) \Rightarrow P = \frac{R_Q}{4(R_Q^2 + X_Q^2)} U_Q^2, \quad Q = \frac{X_Q}{4(R_Q^2 + X_Q^2)} U_Q^2$$

$$\text{Wirkungsgrad } \eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}}$$

P_{ab} : abgegebene Leistung (Netzleistung)

P_{zu} : aufgenommene Leistung

$$\text{Verlustleistung } P_v = P_{zu} - P_{ab}$$



1: Momentanleistung

2: Blindanteil

3: Wirkanteil



Scheinleistung
S = U · I [VA]

Blindleistung
Q = U · I · sin φ [var]

$$= I^2 \cdot X$$

$$\begin{aligned} \text{Wirkleistung} \\ P = U \cdot I \cdot \cos \varphi [\text{W}] \\ = I^2 \cdot R \end{aligned}$$

Frequenzverhalten Linearer Netzwerke

Methoden d. Wechselstromlehre auf beliebige periodische Signale erweiterbar

Frequenzgang

Abhängigkeit komplexer Größe von (Kreis-) Frequenz

Frequenzgangsf.

$$H(\omega) = \frac{U_a(\omega)}{U_e(\omega)} \quad (\text{z.B.})$$

Amplituden-/Phasengang

$$|H(\omega)|, \angle H(\omega)$$

Bodediagramm
↳ Z Plots

Amplitudengang log. und Phasengang i.h. gegen Log. darstellung d. (Kreis-) Frequenz

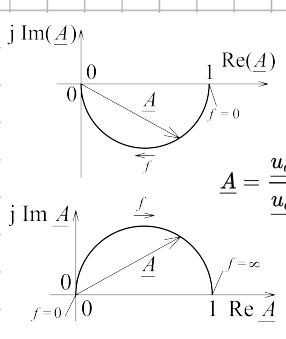
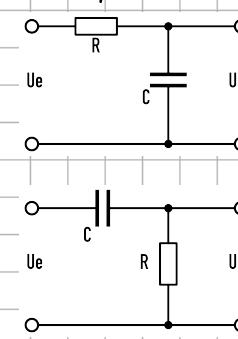
Ortskurve
↳ 1 Plot

komplexe Zahl d. Frequenzgangsfunktion als frequenzabhängiger Punkt in kompl. Ebene, d.h. einzelne markante Punkte werden mit dazugehöriger (Kreis-) Frequenz
→ in Regelungstechnik auch Nyquist-Diagramm genannt

Tiefpassfilter



hohe f gedämpft

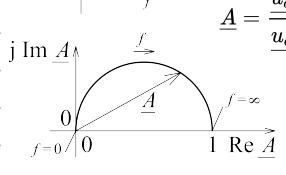
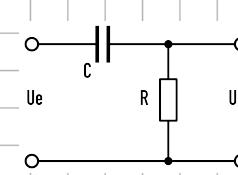


$$A = \frac{u_a(t)}{u_e(t)}$$

Hochpassfilter



tiefe f gedämpft



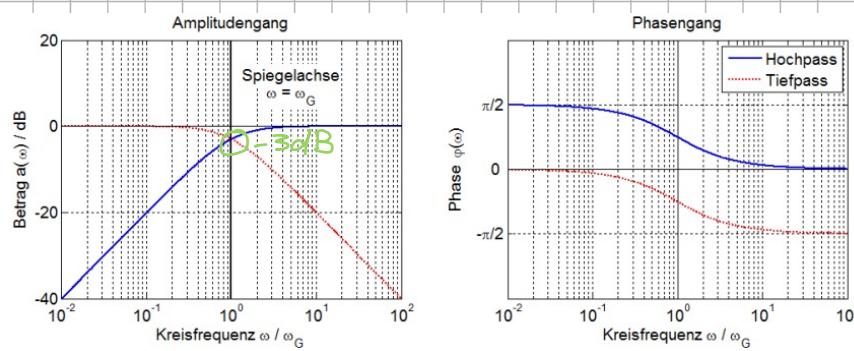
Bandpass



Bandspalte



Bodediagramme



Grenzfrequenz
(cutoff frequency)

bei f_c ist $U_a = \frac{1}{\sqrt{2}} U_b \stackrel{!}{=} -3 \text{dB}$,
für Schaltungen oben ist dies $\frac{1}{2\pi RC}$

elementare zeitliche Beziehungen und ihre Frequenzgangfunktionen

	Zeitbereich	Frequenzbereich		Frequenzen nicht normiert
		Amplitudengang	Phasengang	
Verstärkung / Dämpfung	$y(t) = k \cdot x(t)$	$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$	$ H(\omega) $	$\angle H(\omega)$
	$y(t) = k > 0$	k	k	0
	$y(t) = k < 0$	k	$ k $	$\pm\pi$
Differentiation	$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega$	ω	$\frac{\pi}{2}$
Integration	$y(t) = \int_0^t x(t) dt$ mit $y(0) = 0$	$\frac{1}{j\omega}$	$\frac{1}{\omega}$	$-\frac{\pi}{2}$

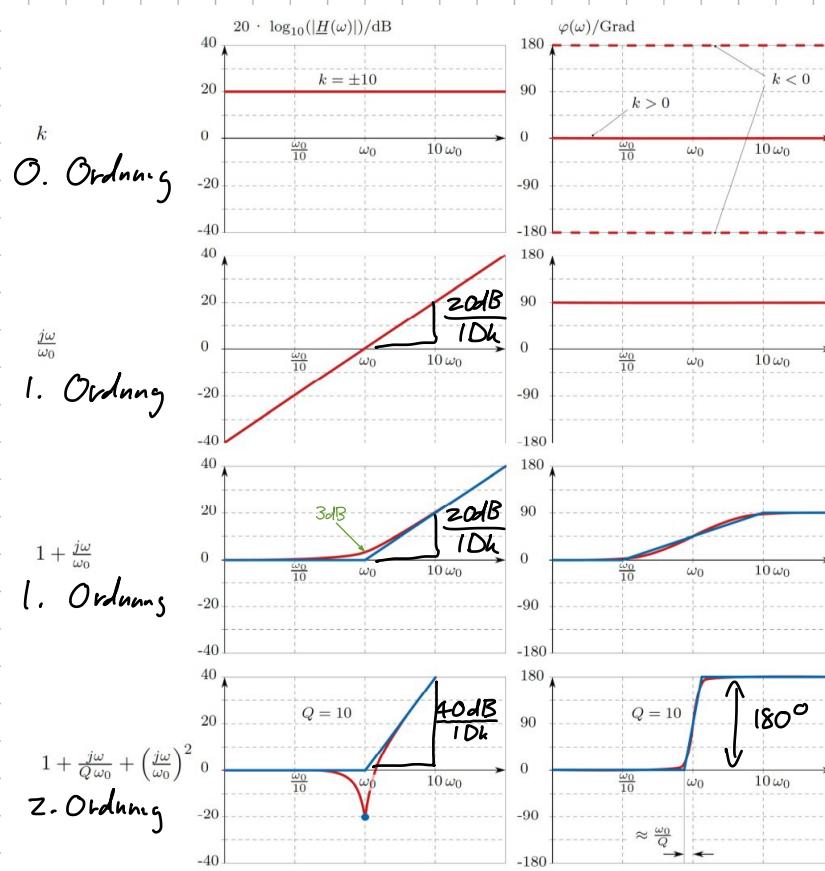
$x(t)$: Eingangsgröße (harmonisch)

$y(t)$: Ausgangsgröße (harmonisch)

Zusammengesetzte Frequenzgangfunktionen

beliebige Frequenzgangf. (Übertragungsf.) lässt sich immer als Produkt von elementaren Frequenzgangf. oder deren Veriproher F. darstellen (Produktform)

elementare Frequenzgangf.



Rot → Kehrwert
Gelb → Multiplikation
Blau → Division

Amplitudengang

Operation	Auswirkung auf den Amplitudengang
Vorzeichen	$\log(-\underline{H}(f)) = \log(\underline{H}(f))$
Kehrwert	$\log\left(\frac{1}{ \underline{H}(f) }\right) = -\log(\underline{H}(f))$
Multiplikation	$\log(\underline{H}_1(f) \cdot \underline{H}_2(f)) = \log(\underline{H}_1(f)) + \log(\underline{H}_2(f))$
Division	$\log\left(\frac{ \underline{H}_1(f) }{ \underline{H}_2(f) }\right) = \log(\underline{H}_1(f)) - \log(\underline{H}_2(f))$

Phasengang

Operation	Auswirkung auf den Phasengang
Vorzeichen	$\text{angle}(-\underline{H}(f)) = \text{angle}(\underline{H}(f)) \pm \pi$
Kehrwert	$\text{angle}\left(\frac{1}{\underline{H}(f)}\right) = -\text{angle}(\underline{H}(f))$
Multiplikation	$\text{angle}(\underline{H}_1(f) \cdot \underline{H}_2(f)) = \text{angle}(\underline{H}_1(f)) + \text{angle}(\underline{H}_2(f))$
Division	$\text{angle}\left(\frac{\underline{H}_1(f)}{\underline{H}_2(f)}\right) = \text{angle}(\underline{H}_1(f)) - \text{angle}(\underline{H}_2(f))$

Reale Bauelemente

Festwiderstände

Chip-W.



Signalverarbeitung (bis hohe f)

MELF-W.



wie Chip-W. aber besser / teurer

bedrahtete W.

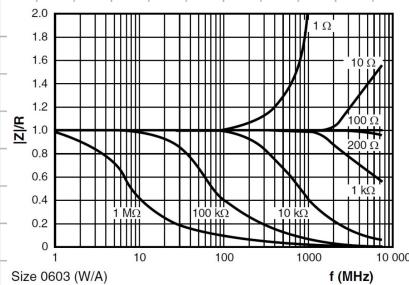


hohes R, mittlere bis sehr grosse Nennleistung (durch niedr. f)

Temperaturabh.

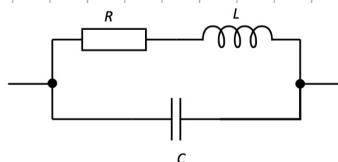
Frequenzabh.

$$R(\theta) = R_{20} (1 + \alpha_{20} (\theta - 20^\circ C))$$



- Chip-Widerstände sind zwar klein, aber je nach Wert weichen sie schon bei relativ tiefen Frequenzen (10 MHz) signifikant vom Nennwert ab
- In den GHz-Bereich kommt man ohne grosse Abweichung vom Nennwert nur mit einem sehr beschränkten Wertebereich um 100 Ω
- Chip-Widerstände mit hohem Wert (ab ca. 1 kΩ) weisen ab einer gewissen, Werte-abhängigen Frequenz zusätzlich kapazitives Verhalten auf: die Impedanz sinkt mit zunehmender Frequenz
- Chip-Widerstände mit kleinem Wert (unter ca. 100 Ω) weisen ab einer gewissen Werte-abhängigen Frequenz zusätzlich induktives Verhalten auf (Impedanz steigt mit zunehmender Frequenz)

Ersatzschaltbild



$$\omega_0 = \frac{R}{L} \text{ bzw. } C_0 = \frac{1}{RC}$$

Kapazität hängt von Auschlusskappen
Induktivität hängt von Zuführung

$$|Z| > R: L = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{\left(\frac{|Z|}{R} \cdot R\right)^2 - R^2}$$

$$|Z| < R: C = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{|Z|}{R} \cdot R\right)^2} - \frac{1}{R^2}}$$

Kondensatoren (fest)

Chip-K.



Dielektrikum	Bauformen	Kapazität	Toleranz
COG, NPO	Chip	47 nF (0805)	1%
X7R	Chip	10 µF (0805)	5%
Tantaloxid	Chip	47 µF (0805)	5%
Aluminiumoxid	Becher	100 µF (Ø 4 mm, 6 mm hoch)	10%
Doppelschicht-Kondensator	Becher	100 mF (Ø 4 mm, 12 mm hoch)	-20%/+50%

Becher-K.



Becher-K.
bedrahtet



Temperaturabh.

$$C(\theta) = C_{20} (1 + \alpha_{20} (\theta - 20^\circ C))$$

Selbstentladung

aufgrund endl. Isolationsw. R_{IS}

Zeitkonst

bei homog. Dielektr. mit Perme. μ und Leitf. γ :

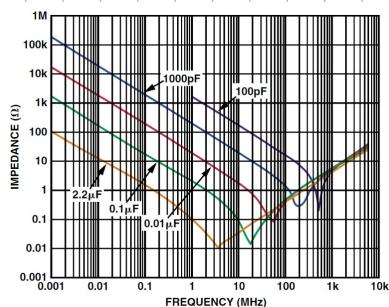
$$\tau = R_{IS} C = \frac{\mu}{\gamma}$$

ESR

Equivalent Series Resistance

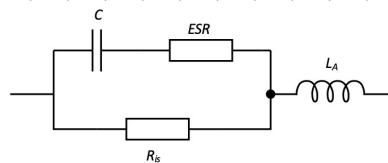
Typ	ESR
Aluminium-Flüssigelektrolyt	0.1 ... 10 Ω ; Steigt mit Frequenz, Alter, Temperatur, Wellengleichs-
	amplitude
Tantal-Mangandioxid	0.1 ... 10 Ω ; Steigt mit der Frequenz
Keramik	0.01 ... 0.1 Ω ; Relativ stabil über alles

Frequenzabh.

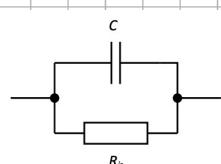


- Bis zu einer gewissen Frequenz verhält sich der Kondensator wie gewollt, die Impedanz fällt mit -20 dB/Dk .
- Bei einer gewissen Frequenz kommt es zur Umkehr: Oberhalb dieser Frequenz verhält sich der Kondensator induktiv.
- Der Wendepunkt ist folglich ein Selbstresonanzpunkt, bei welchem sich die kapazitive und die induktiven Anteile gerade aufheben, man sieht an diesem Punkt den ESR.

Ersatzschaltbild



tiefe f
(unterhalb ω_g)



→ kann bei fester f durch äquivalentes
Serienschaltmodell ersetzt werden

$$\omega_g = \frac{1}{R_S C} \quad \varphi(\omega_g) = \varphi_L - \varphi_i = -\frac{\pi}{4}$$

Gußfaktor

$$Q_C = \frac{B}{G} = \frac{-X}{R} = \frac{-Q}{P} = \frac{-I^2 X_C}{I^2 \cdot ESR} = \frac{1}{\omega C \cdot ESR} \quad \text{frequenzabhängig!}$$

Verlustfaktor

$$d = 1/Q_C$$

Verlustwinkel

$$\delta = \arctan(d)$$

Spulen (fest)



Nennwert

bz. gewisser f und Stromstärke

tiefe f und/oder
Stromstärke

Guß sinkt, nahe Gleichstrom praktisch nur noch
Widerstand

hohe f

verschiedene Effekte:

- Selbstresonanz durch parasitäre Kapazität
- Permeabilität sinkt ab bei gewisser Grenzfrequenz
- Skin-Effekt
- Proximity-Effekt

Induktivitätsfaktor

für eigene Herstellung: $L \approx A_L N^2$

Kernmaterial

- Luft (nur bei hohen f brauchbar)
- Ferrite → geringe Leitfähigkeit, gute Permeabilität

Verluste

Kupferverluste

Kernverluste

Wirbelströme

Hysterese

Trägheit d. Elementarm.

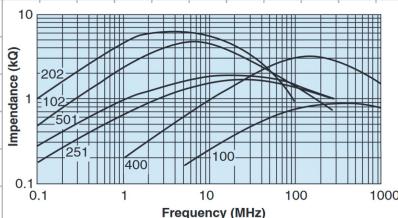
$$P_{cu} = RI^2$$

$$P_w \propto f^2$$

Ummagnetisieren d. Elementarmagnete braucht Energie

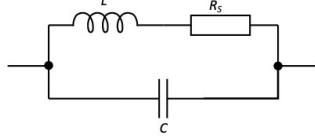
Trägheit d. Elementarm. muss berücksichtigt werden → Permeabilität als komplexe Größe: $M = M_0 M_r$

Frequenzzähln.

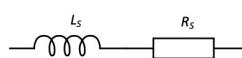


- Bis zu einer gewissen Frequenz verhält sich die Spule wie gewollt, die Impedanz steigt mit etwa 20 dB/Dk
- Bei einer gewissen Frequenz kommt es zur Umkehr: Oberhalb dieser Frequenz verhält sich der die Spule kapazitiv.
- Der Wendepunkt ist folglich ein Selbstresonanzpunkt, bei welchem sich die induktiven und die kapazitiven Anteile gerade aufheben.

Ersatzschaltbild



tiefe f
(unterhalb $\frac{\omega_r}{10}$)



\rightarrow kann bei fester f durch äquivalentes Parallelmodell ersetzt werden

Gütefaktor

$$Q_L = \frac{X}{R} = \frac{-B}{G} = \frac{Q}{P} \quad \text{frequenzabhängig!}$$

Verlustfaktor

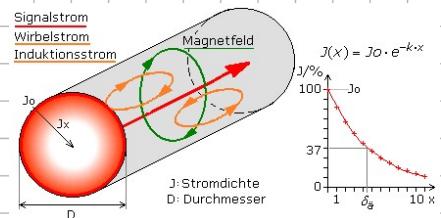
$$\alpha = 1/Q_L$$

Verlustwinkel

$$\delta = \arctan(\alpha)$$

Skin-Effekt

bei Wechselstrom ändert sich Magnetfeld \rightarrow induziert Wirbelströme, welche Signalstrom entgegengesetzt sind (Längs)
 \rightarrow benutzter Leiterquerschnitt \downarrow
 \rightarrow Leiterwiderstand \uparrow



Proximity-Effekt

bei mehreren benachbarten Leitern analog zu Skin-Effekt

Stärke d. Effekts

proportional zu \sqrt{f}

Kernmaterial

bei Spulen mit Kern i.d.R. vernachlässigbar,
da Verluste im Kern proportional zu f^2