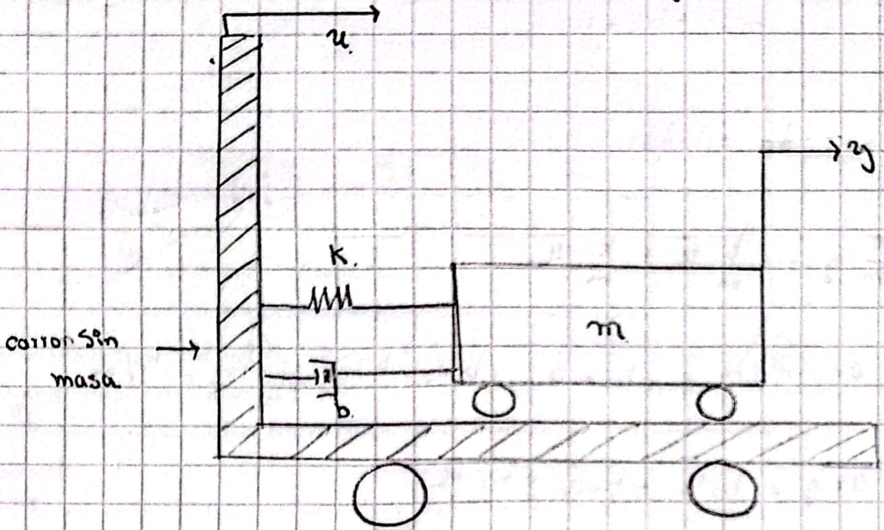
• Primer Punto Parcial.

exomple 3-3.

- Expresión en el espacio de estados
- Diagrama de Bloques
- Diagrama de Flujo de Señal

Considere un Sistema resorte - masa - Amortiguador montado en un carro sin masa



- Consideraciones

carro parado $t < 0$

$u \rightarrow$ desplazamiento del carro y entrada.

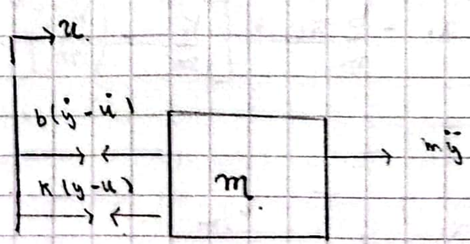
$t = 0$ Se mueve a velocidad constante.

$y \rightarrow$ Salida

- $F_b = \dot{y} - \dot{u}$
- $F_k = y - u$

- Siguiendo la Segunda ley de Newton

$$ma = \sum F$$



- $m\ddot{y} = -b\,(\dot{y} - \dot{u}) - k\,(y - u)$

$$m\ddot{y} + b\,\dot{y} + ky = b\dot{u} + ku.$$

- Asumiendo condición inicial cero y Laplace.

$$(ms^2 + bs + K)\,Y(s) = (bs + K)\,U(s)$$

- Función de transferencia

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs + K}{ms^2 + bs + K}$$

- Expresión en el espacio de estados

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{K}{m}y = \frac{b}{m}\dot{u} + \frac{K}{m}u.$$

asignar $a_1 = b/m$, $a_2 = K/m$, $b_0 = 0$, $b_1 = b/m$, $b_2 = K/m$

Reemplazar. $\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = b_0\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_2 u.$

- Ecuaciones

$$\beta_0 = b_0 = 0 \qquad \beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 = b/m \qquad \beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 = \frac{K}{m} - \frac{b^2}{m^2}.$$

$$x_1 = y - \beta_0 u = y$$

$$x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \frac{b}{m}u.$$

- $\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u = x_2 + \frac{b}{m}u.$

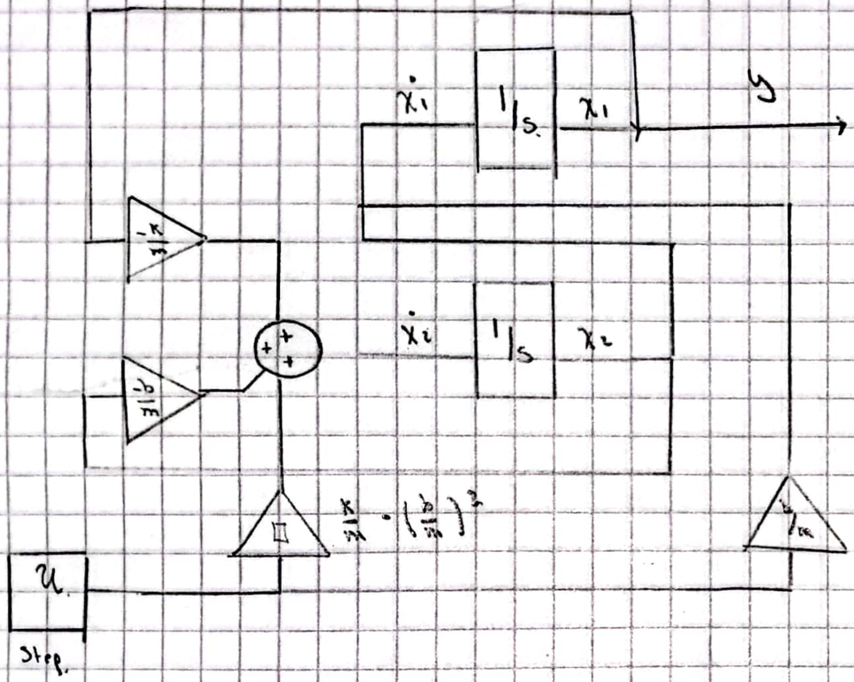
$$\dot{x}_2 = -a_2 x_1 - a_1 x_2 + \beta_2 u = -\frac{K}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \left[\frac{K}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2\right]u.$$

- Forma Matricial

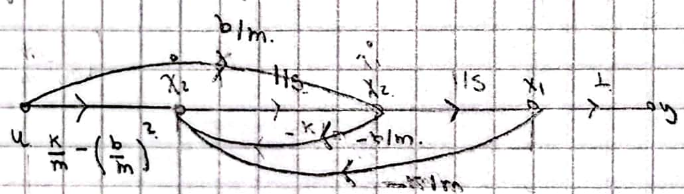
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{K}{m} & -\frac{b}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b/m\\ \frac{K}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2\end{bmatrix}u.$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

- Diagrama de Bloques



- Diagrama de Flujo de Señal



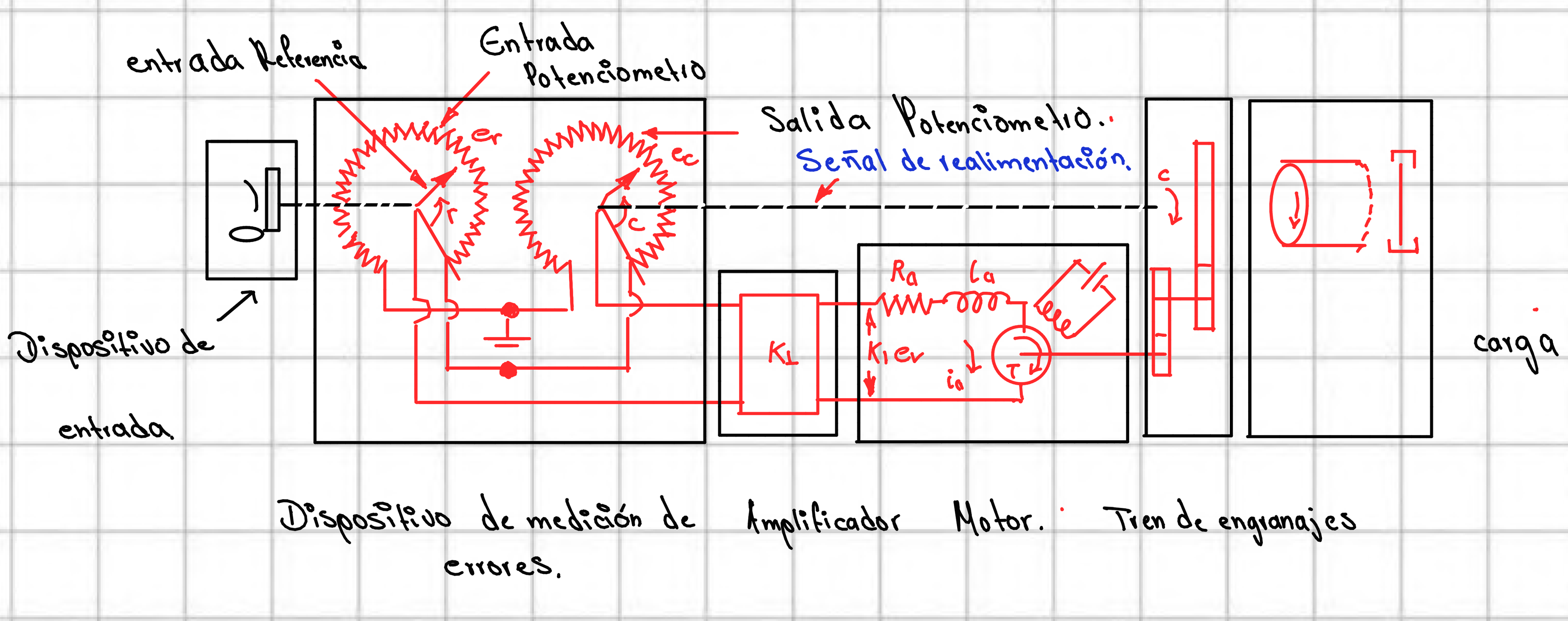
- Punto 2°

• Punto 2:

Diagrama de Bloques, Flujo de Señal, Representación Espacio de estado.

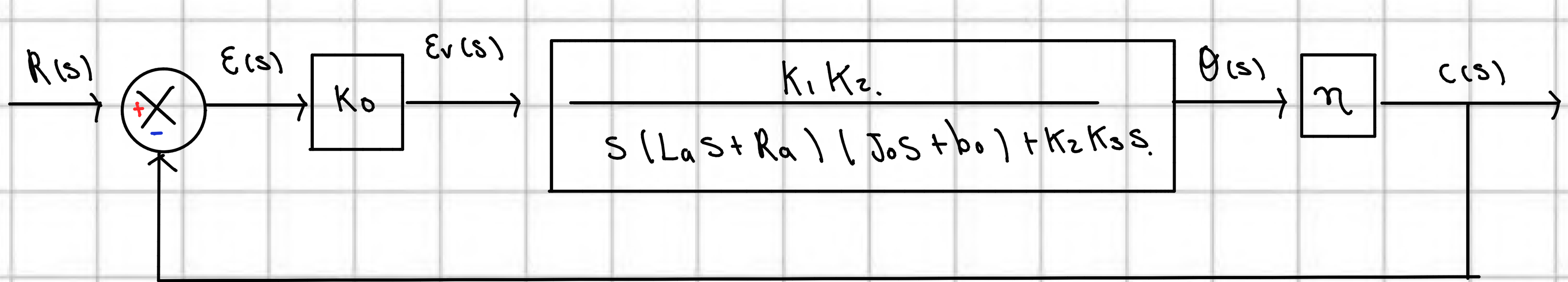
• Pag 106 ⟶ motoreductor. . ejercicio A-39.

⟶ considere el Servosistema que se muestra

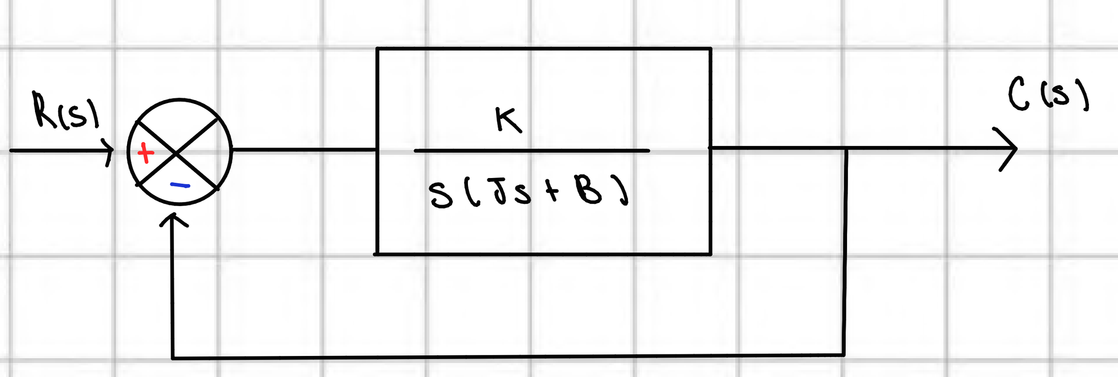


• Diagrama Esquemático del Servo Sistema

⟶ Diagrama de Bloques para el Sistema



• Diagrama de Bloques. Simplificado



⟶ El motor que se muestra es un Servomotor.

Funcionamiento:

• Un par de potenciometros actuán como un dispositivo medición de errores. convierten las posiciones de entrada y Salida en Señales electricas

• La Señal de entrada determina r la posición angular
• El potencial eléctrico del brazo es. ⟶ posición angular del Brazo
• El eje de Salida Determina c : posición angular del Brazo.

① Formula

$e = r - c$

Señal de error. ; r ⟶ Posición angular de entrada ; c ⟶ Posición angular de Salida

② Formula

$e_r - e_c = e_v$. • la diferencia de potencial es la tensión de error

↓ ↓

Proporcional (r, c)

• $e_r = K_0 r$ • $e_c = K_0 c$.

• La tensión de error que aparece en los potenciometros

Amplificada por una Ganancia K_1

⟶ El voltaje de Salida de este amplificador. Se aplica al circuito de inducido del motor CC.

• Para una corriente de campo constante.

Torque desarrollado por el motor $T = K_2 i_a$

K_2 ⟶ constante del motor ; i_a ⟶ corriente del inducido

• La armadura esta Girando

$e_b = K_3 \frac{d\theta}{dt}$; $\frac{d\theta}{dt}$ ⟶ Velocidad angular. ; K_3 ⟶ CONST Electromotriz.

e_b ↓ Voltaje del inducido

• Desarrollo

• Obtenga la función de transferencia entre $\theta(s)/E_v(s)$

• Diagrama de bloques para el Sistema

• Diagrama de bloques Simplificado

• **Solución:** Obtenga la función de transferencia entre $\theta(s)/e_v(s)$

La Velocidad de un Servomotor de CC. controlado por el inducido

* $e_a = k_1 e_v$ • Salida del amplificador.

• la ecuación diferencial para el circuito de la armadura:

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b = e_a^{*}$$ cambiar

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_3 \frac{d\theta}{dt} = k_1 e_v$$ ecuación ①

• La ecuación para el torque en equilibrio es:

$$J_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} + b_0 \frac{d\theta}{dt} = T = K_2 i_a$$ ecuación ②

inercia. coeficiente de fricción.

• $L_a \dot{x}_1 + R_a x_1 + K_3 \dot{x}_2 = K_1 e_v$

$J_0 \ddot{x}_2 + b_0 \dot{x}_2 = K_2 x_1$.

eliminando i_a

$$\frac{\theta(s)}{E_v(s)} = \frac{K_1 K_2}{s(L_a s + R_a)(J_0 s + b_0) + K_2 K_3 s}$$

• Relación de transmisión del tren de engranajes.

• $C(s) = n\,\theta(s)$

• Relación entre: $E_v(s), R(s)$ y $C(s)$ es:

$$E_v(s) = K_0[R(s) - C(s)] = K_0 E(s)$$

• La ecuación de diagrama del Bloques:

$$G(s) = \frac{C(s)}{\theta(s)} \cdot \frac{\theta(s)}{E_v(s)} \cdot \frac{E_v(s)}{E(s)} = \frac{K_0 K_1 K_2 n}{s[(L_a s + R_a)(J_0 s + b_0) + K_2 K_3]}$$

Cuando La es pequeño se puede despreciar

$$G(s) = \frac{K_0 K_1 K_2 n}{s[(\cancel{L_a} s + R_a)(J_0 s + b_0) + K_2 K_3]}$$

$$G(s) = \frac{K_0 K_1 K_2 n / R_a}{J_0 s^2 + \left(b_0 + \frac{K_2 K_3}{R_a}\right)s}$$

• Simplificar:

. $J = J_0 / n^2$

$B = [b_0 + (K_2 K_3 / R_a)] / n^2$

$K = K_0 K_1 K_2 / n R_a$.

$$G(s) = \frac{K}{J s^2 + B s} \quad o \quad \frac{K_m}{s(T_m s + 1)}.$$

• Cuando: $K_m = \frac{K}{B}$, $T_m = \frac{J}{B} = \frac{R_a J_0}{R_a b_0 + K_2 K_3}$.

• Desarrollo.

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_0 K_1 K_2 n / R_a}{J_0 s^2 + \left(b_0 + \frac{K_2 K_3}{R_a}\right)s}$$

$$Y(s)\, J_0 s^2 + \left(b_0 + \frac{K_2 K_3}{R_a}\right)s = X(s)\, K_0 K_1 K_2 n / R_a.$$

$$J_0 \ddot{y} + \left(b_0 + \frac{K_2 K_3}{R_a}\right)\dot{y} = K_0 K_1 K_2 n / R_a \; u$$

• $x_1 = y$. $x_2 = \dot{y}$ $x_3 = \ddot{y}$

$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$

$\dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3$

$\dot{x}_3 = \dddot{y}$

$$J_0 \dot{x}_2 + \left(b_0 + \frac{K_2 K_3}{R_a}\right) x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{-\,b_0 + \frac{K_2 K_3}{R_a}}{J_0}\, x_2$$

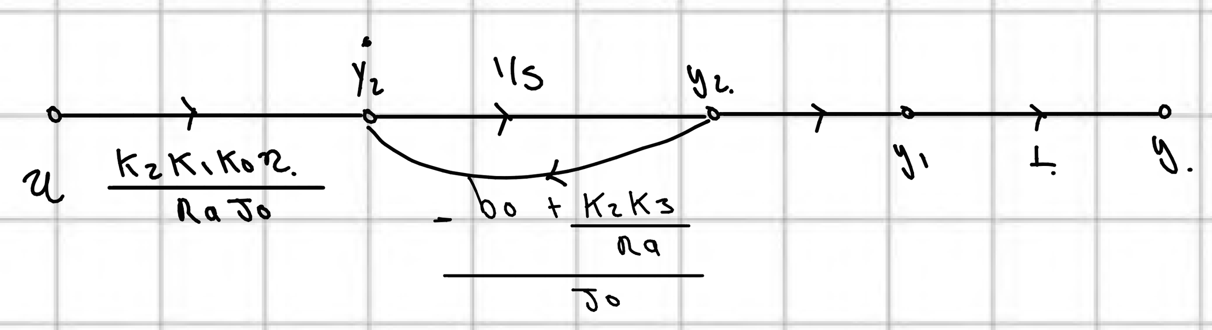
$$\boxed{\begin{matrix} \dot{x}_1 = \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 = \dot{y}_2 \end{matrix}}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \overset{-K/J}{0} & \overset{-B/J}{-\frac{b_0 + \frac{K_2 K_3}{R_a}}{J_0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \overset{K/J.}{\frac{K_1 K_1 K_0 n}{R_a J_0}} \end{bmatrix} u$$

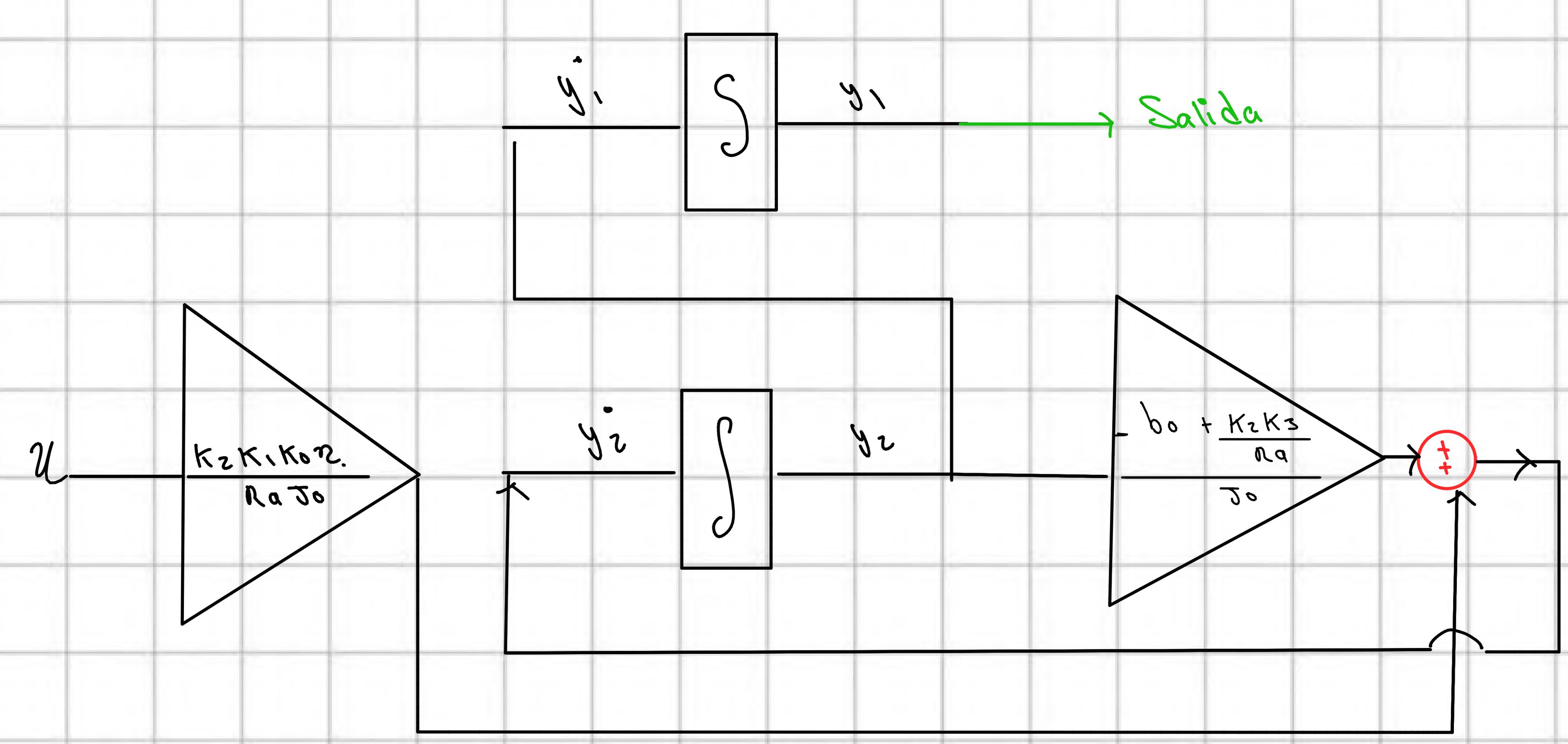
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

o caso cuando aproxima

- Diagrama de flujo de Señal



- Diagrama de Bloques.



$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{b_0 + \frac{K_2 K_3}{R_a}}{J_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{K_1 K_1 K_0 R}{R_a J_0} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

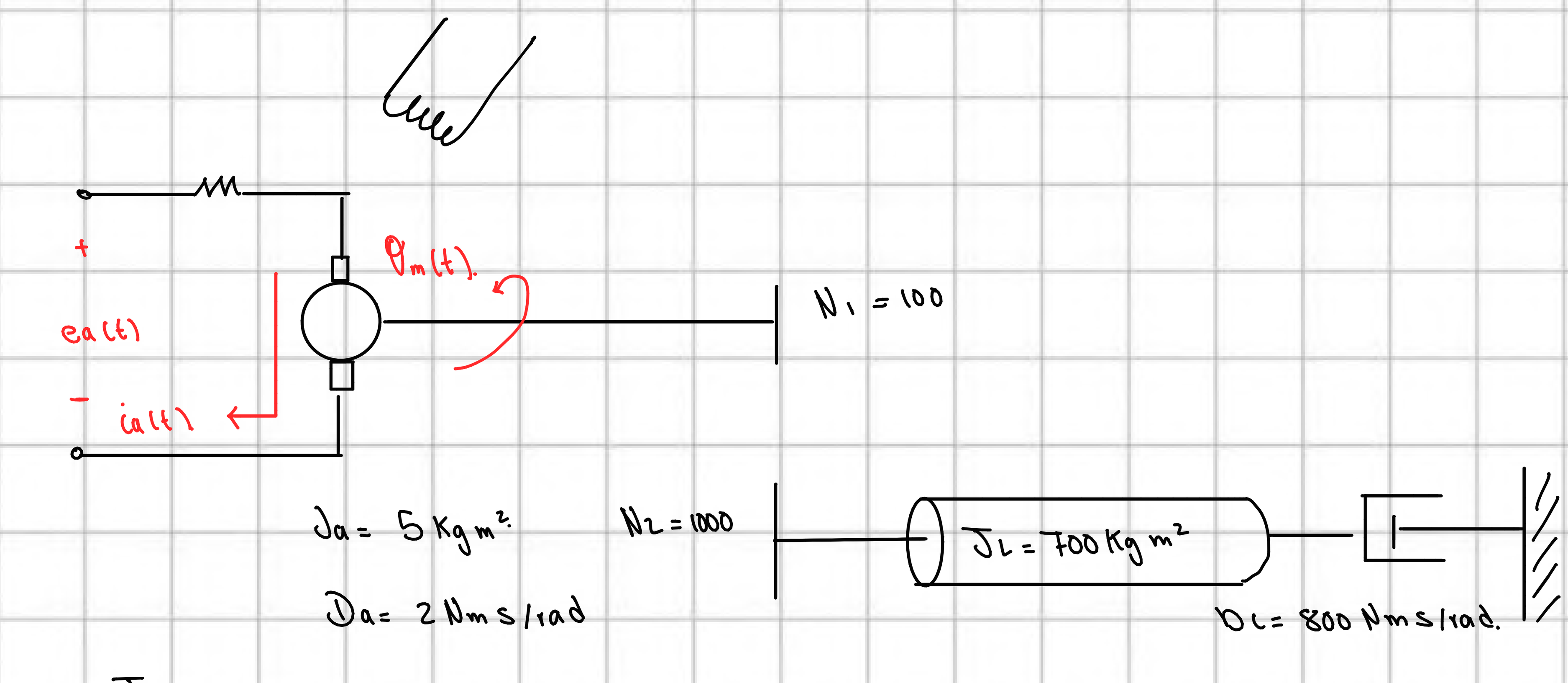
- Ponto 3°

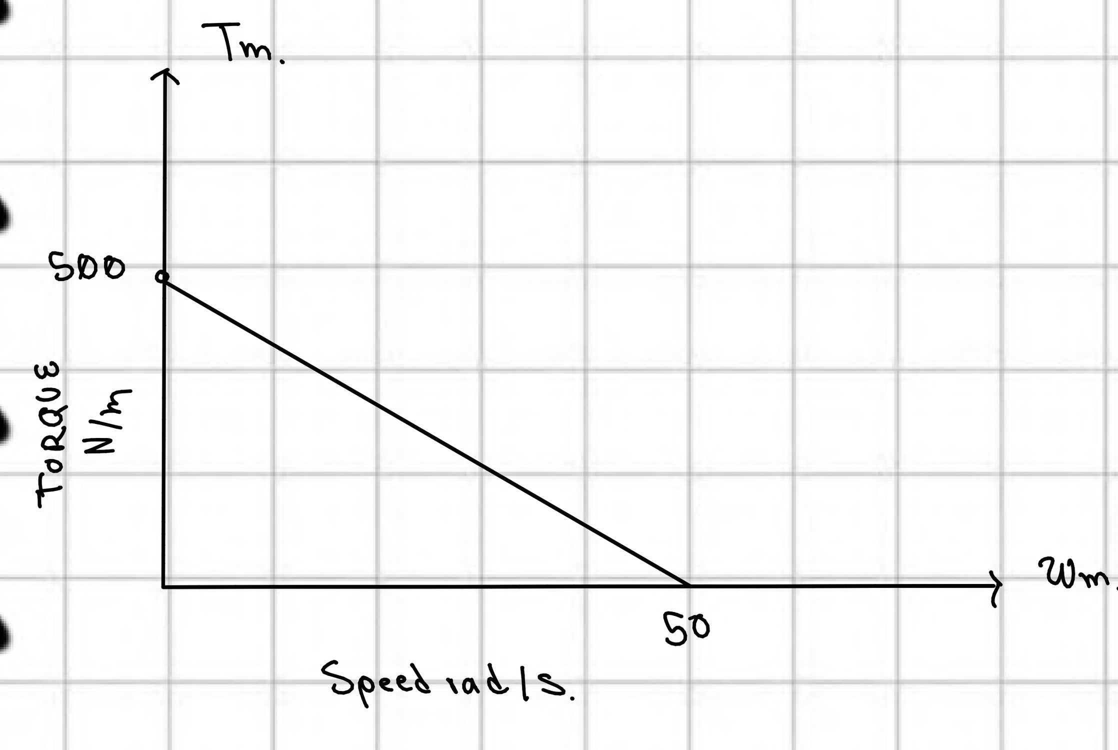
- Norman pág 102. Ejemplo 2.23 motor corriente Directa.

- Generar el modelo de estados, Diagrama de Bloques, Flujo de Señal

- Dado el Sistema y la curva de torque – Velocidad
  - Función de transferencia: $\theta(s) / E_a(s)$.

- 1. Encontrar las constantes mecanicas J_m y D_m.





- Inercia total en la armadura del motor.

$$J_m = J_a + J_L \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = 5 + 700 \left(\frac{1}{10}\right)^2 = 12.$$

- total del amortiguamiento en la armadura

$$D_m = D_a + D_L \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = 2 + 800 \left(\frac{1}{10}\right)^2 = 10$$

- $$E_a(s) \longrightarrow \boxed{\frac{0{,}0417}{s(s+1{,}667)}} \longrightarrow \theta_c(s)$$

- Encontrar las constantes Electricas.
  - $K_t = R_a$ y K_b.
  - Estas Salen apartir de la curva velocidad – torque.

$T_{stall} = 500$

$W_{no\text{-}load} = 50$

$e_a = 100$

- Constantes

$$\frac{K_t}{R_a} = \frac{T_{stall}}{e_a} = \frac{500}{100} = 5.$$

$$K_b = \frac{e_a}{W_{no-load}} = \frac{100}{50} = 2.$$

- con todos los Datos Reemplazamos

$$\frac{\theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{K_t / R_a J_m}{s\left[s + \frac{1}{J_m}\left(D_m + \frac{K_t K_b}{R_a} \right)\right]}$$

$$\frac{\theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{5/12}{s\left[s + \frac{1}{12}\left[10 + (5)(2) \right]\right]} = \frac{0{,}417}{s(s+1{,}667)}$$

- Desarrollo

$$\frac{\theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{0{,}417}{s(s+1{,}667)}$$

$$\theta_m(s)\,(s^2 + 1{,}667s) = 0{,}417\, E_a(s).$$

$$\ddot{y} + 1{,}667\dot{y} = 0{,}417\, u, \qquad y = \theta_m(s) = y_1$$

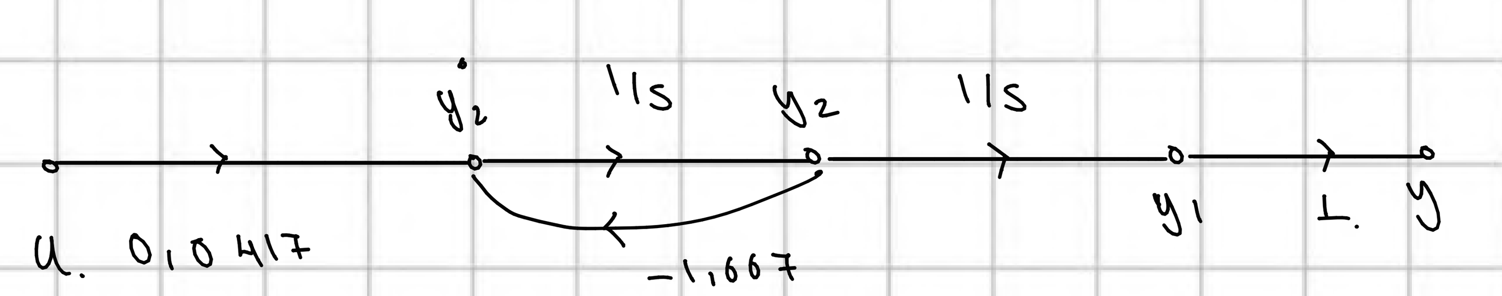
$$\dot{y}_1 = \dot{y} = y_2.$$

$$u = E_a(s).$$

- Formato Matricial.

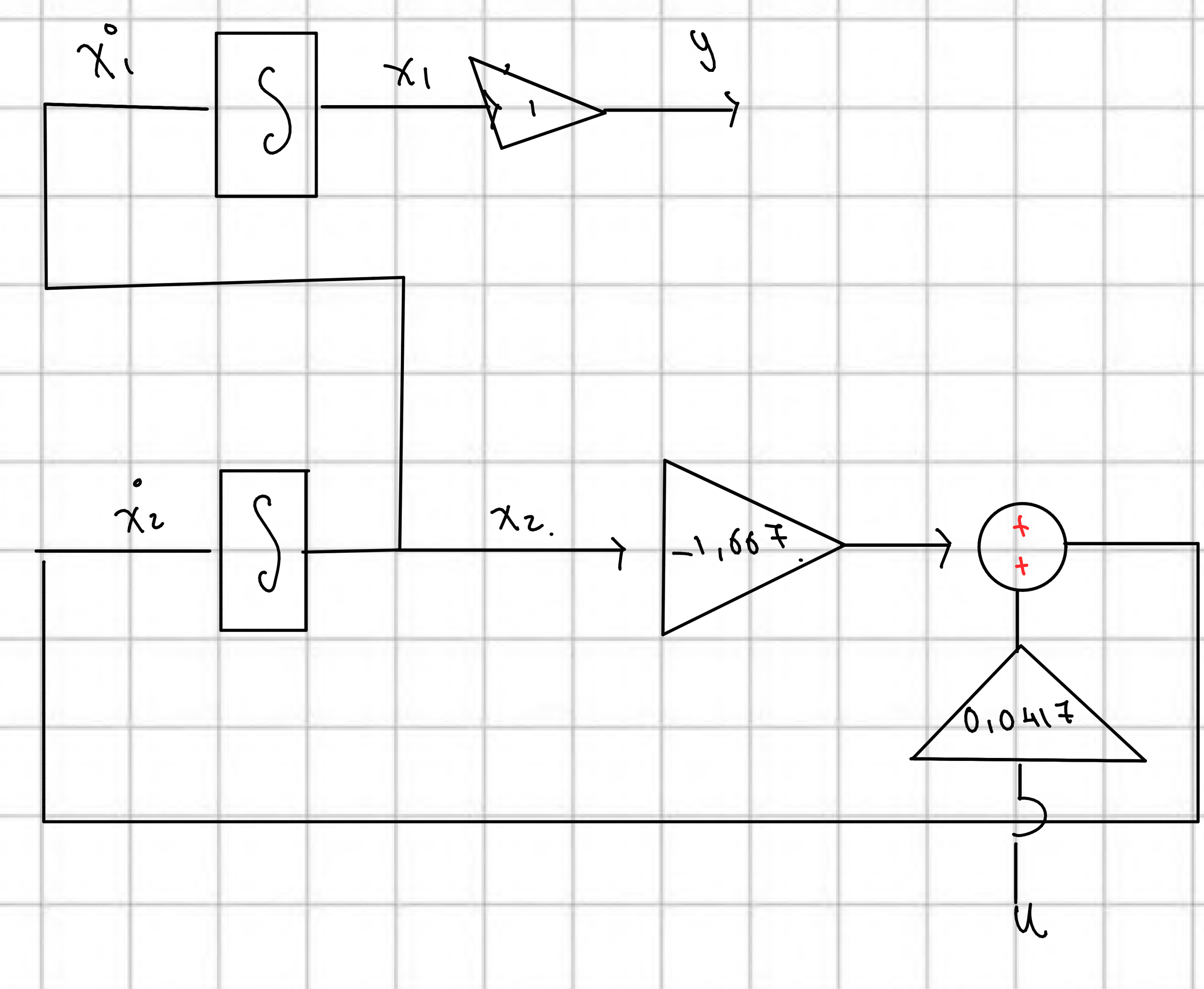
$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1{,}667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}0417 \end{bmatrix} u.$$

- Diagrama de Flujo de Señal



$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

- Diagrama de Bloques



- Comparación Punto 4:

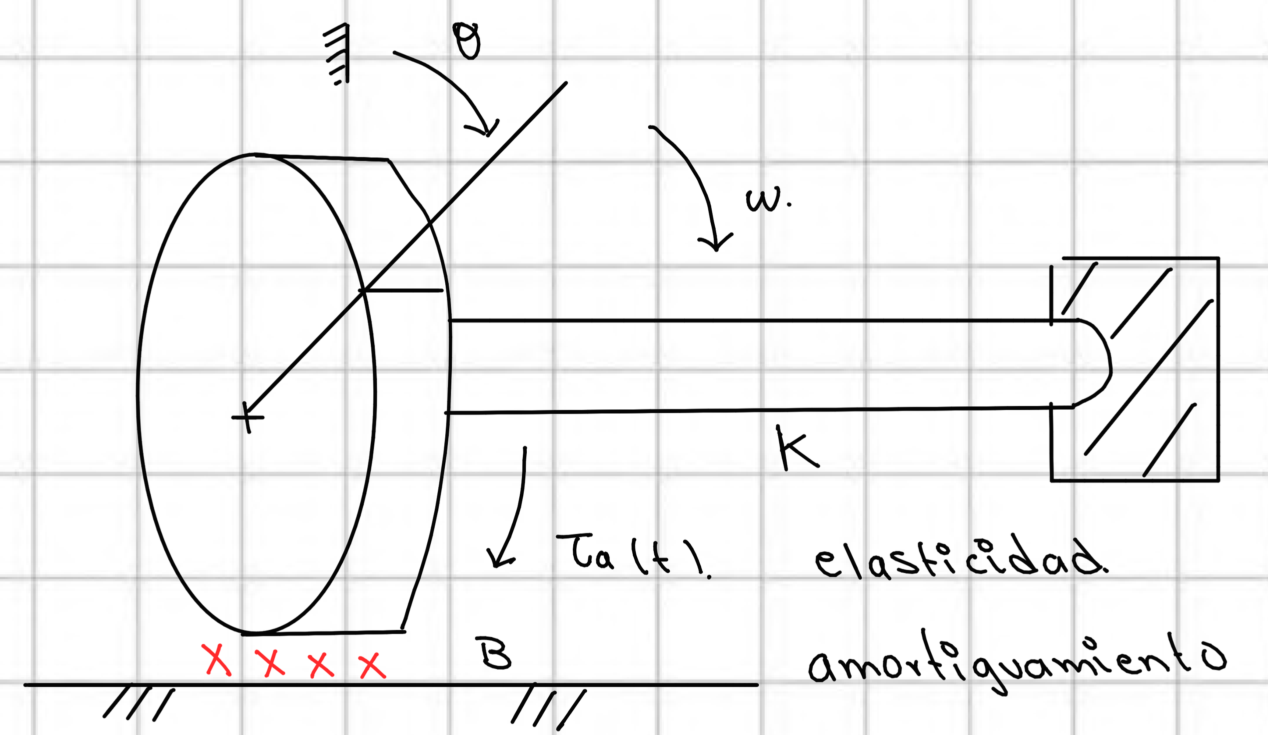
- Teniendo el punto de vista de dos autores como lo son Norman y Ogata donde se da un análisis similar en la consideraciones mécanicas y electricas del sistema. Sin embargo, en el ejercicio del Autor Norman Nise se tiene un sistema compuesto solamente con un motor cc diferenciando con el Sistema del Servo motor el cual cuenta con un sistema de engranaje de realimentación. Este sistema permite al estado del potenciometro de control modificando la realimentación del Sistema y pueda cambiar su posición como lo requiera la Carga.

Lo que más se destaca es el uso de la realimentación en el ejercicio del autor Ogata el cual primero comienza su analisis en la función de transferencia del motor cc para luego si considerar esta realimentación.

Parcial Sistemas Dinamicos.

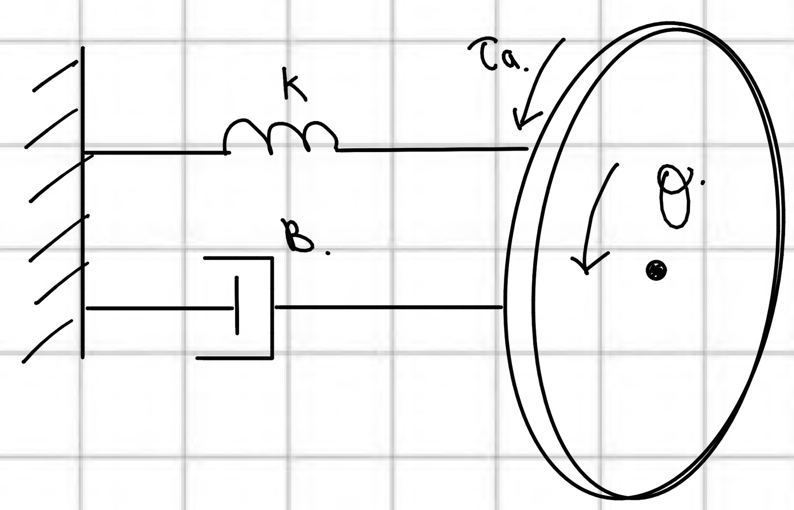
Para el sistema rotacional en la figura determine.

a. La respresentación en el espacio de estados.
b. junto a su diagrama de Bloques
c. así como el diagrama de flujo de Señal



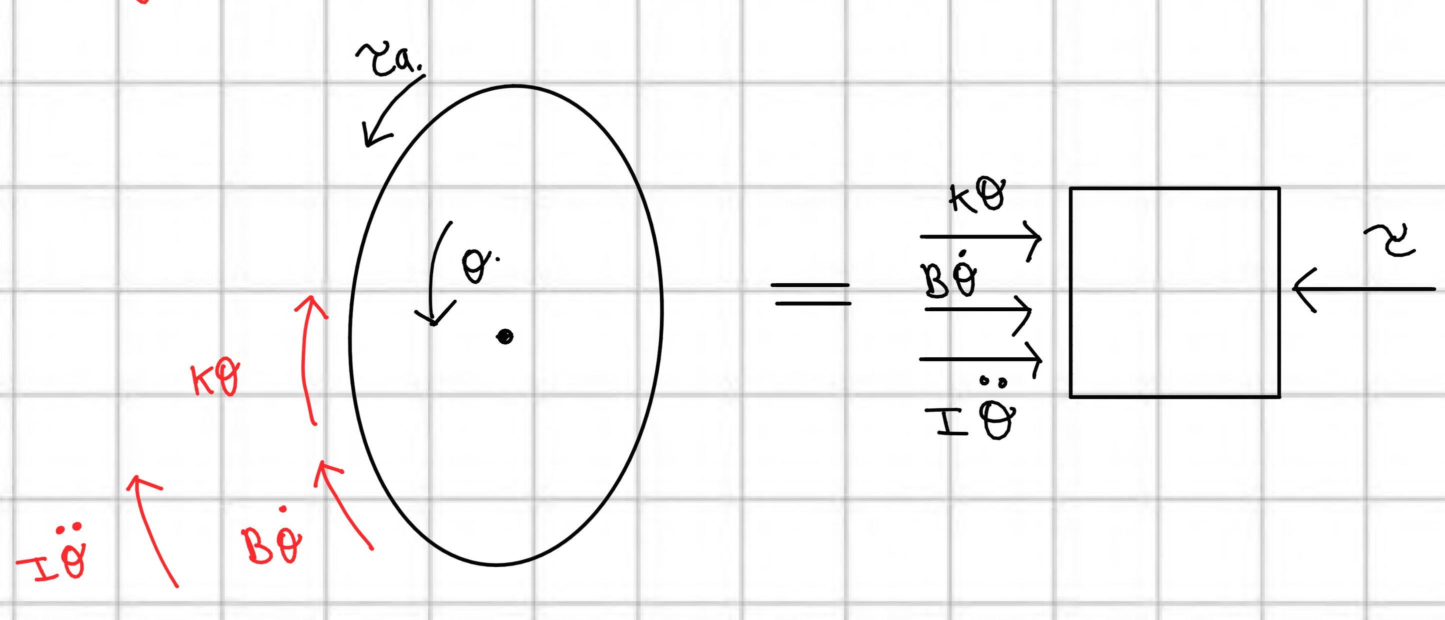
elasticidad
amortiguamiento

- Sistema equivalente.



θ: rotación
τa: torque

- Diagrama de cuerpo libre



- Ecuaciones de movimiento

$$I_0\ddot{\theta} + \underbrace{B\dot{\theta} + K\theta}_{} = \tau_a.$$

masa inercial

Variable de estado

$q_1 = \theta$

$q_2 = \dot{\theta}$

- Derivar

$\dot{q}_1 = \dot{\theta} = q_2$

$\dot{q}_2 = \ddot{\theta}$ despejar

Reemplazar

$I_0\,\dot{q}_2 + B\,q_2 + K\,q_1 = \tau_a.$

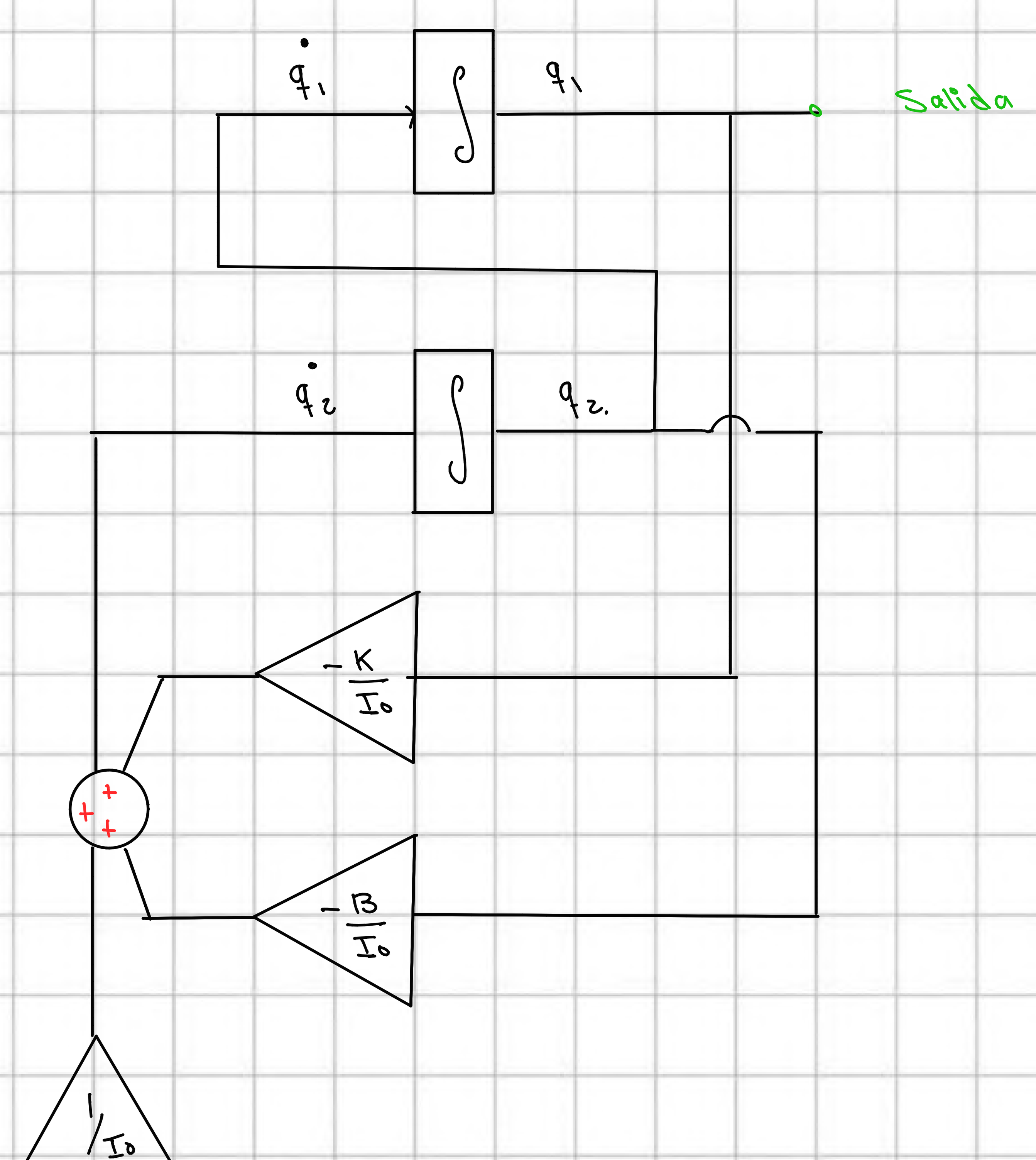
$\dot{q}_2 = \dfrac{\tau_a}{I_0} - \dfrac{Bq_2}{I_0} - \dfrac{Kq_1}{I_0}$

- expresión en espacio de estado

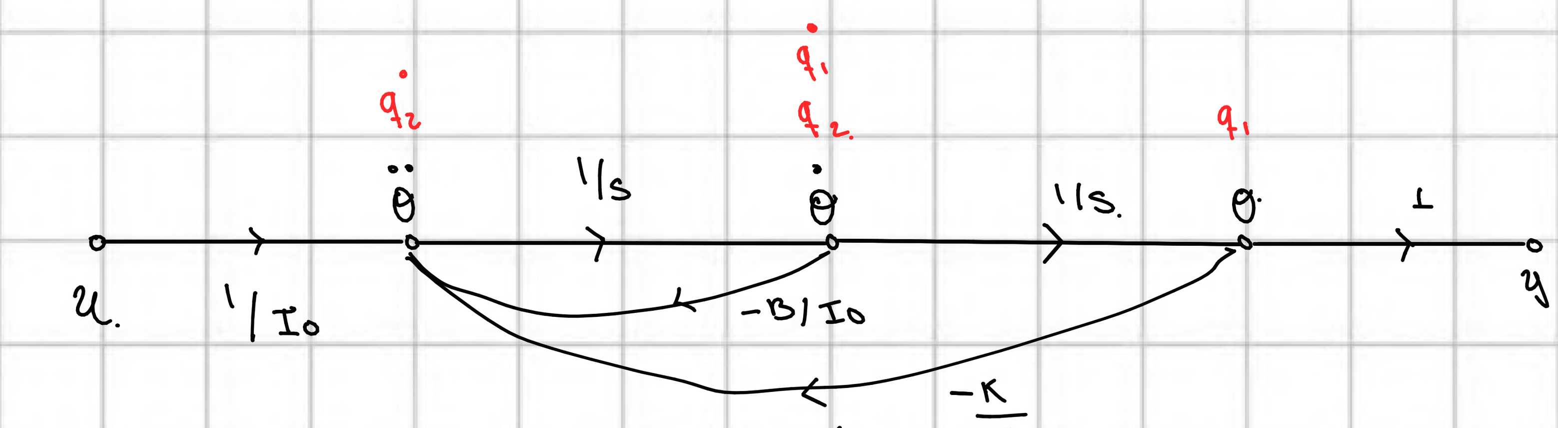
$$\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{K}{I_0} & -\frac{B}{I_0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{I_0}\end{bmatrix}\tau_a \qquad q_1 = \theta$$

$$\theta = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\end{bmatrix}$$ Salida la posición.

- Diagrama de bloque.



- Diagrama de flujo de Señal



b. La función de transferencia:

b. La función de transferencia:

$$I_o\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + K\theta = \tau_a \qquad G(s) = \frac{\mathcal{L}(y(t)) \rightarrow \mathcal{L}(\theta(s))}{\mathcal{L}(u(t)) \qquad \mathcal{L}(\tau_a(s))}$$

$$I_o\mathcal{L}(\ddot{\theta}) + B\mathcal{L}(\dot{\theta}) + K\mathcal{L}(\theta) = \mathcal{L}\,u(t)$$

$$I_o s^2 Y(s) + BsY(s) + KY(s) = U(s)$$

$$Y(s)\left[I_o s^2 + Bs + K\right] = U(s)$$

$$\boxed{\frac{\theta(s)}{\tau_a(s)} = \frac{1}{I_o s^2 + Bs + K}}$$

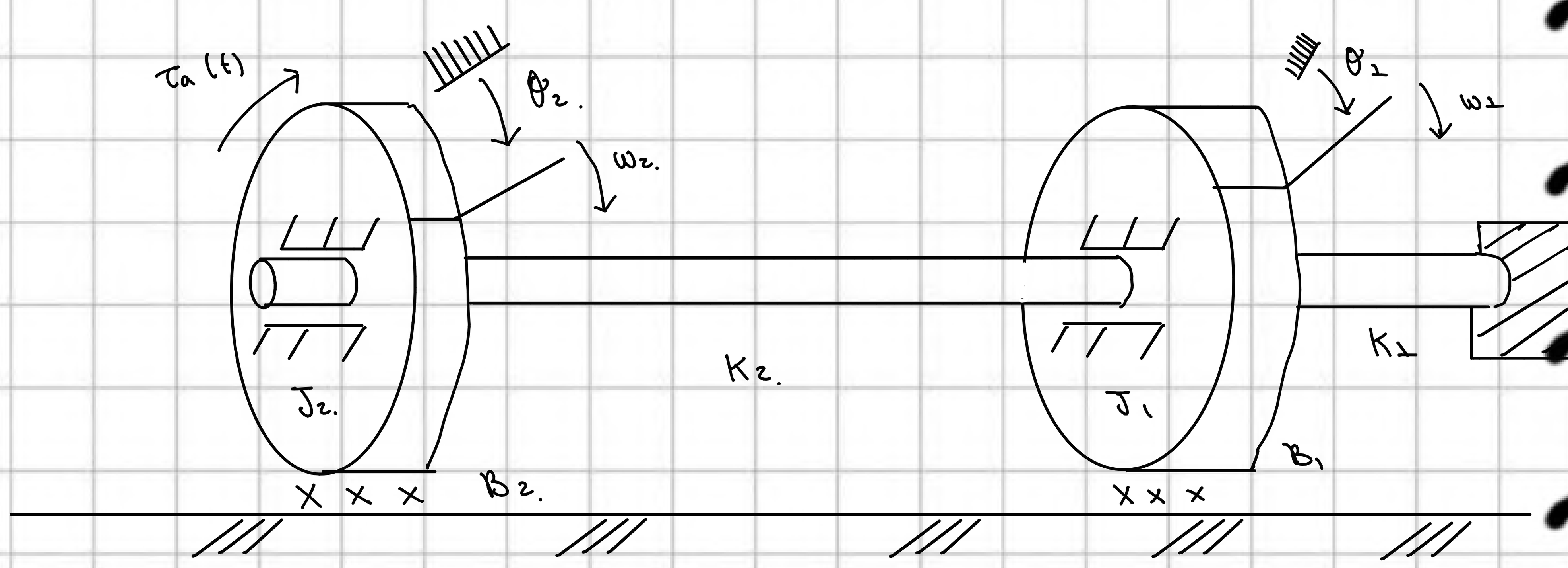
• Punto 2.

Para el sistema rotacional en la figura, asuma $\theta_2 > \theta_1$ y determine:

a. La función de transferencia relacionada θ_2 y τ_a.

b. La representación en el estado de estados.

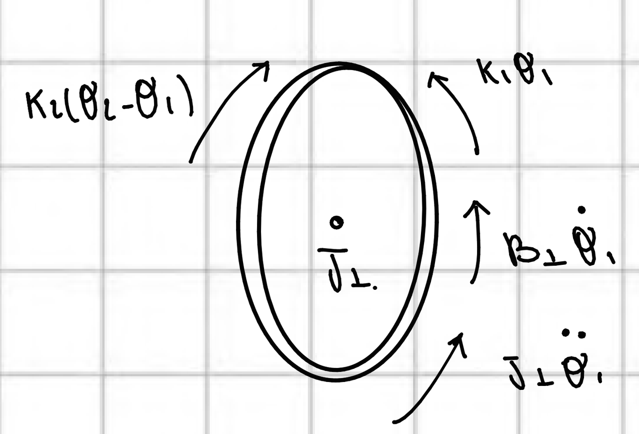
- junto a su diagrama de Bloques.
- así como el diagrama de flujo de Señal
- Todo en terminos de θ_2.

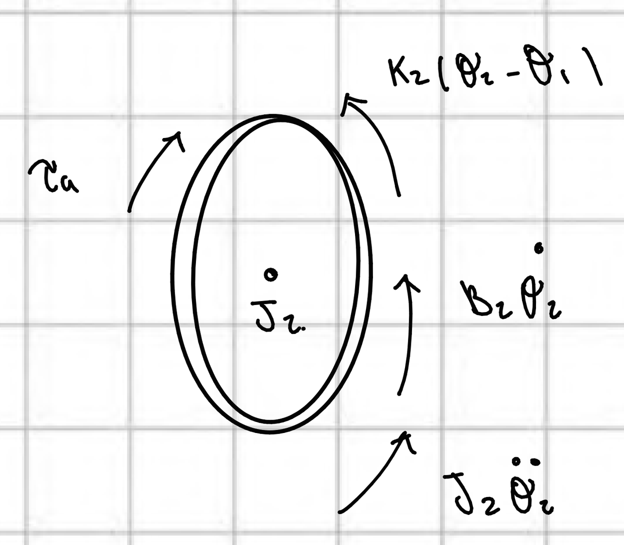


• Sistema mecanico Rotacional.

• condición $\theta_2 >> \theta_1$

• Diagrama de cuerpo libre





• ecuaciones de movimiento

1. $J_1\ddot{\theta}_1 + B_1\dot{\theta}_1 + K_1\theta_1 - K_2(\theta_2-\theta_1) = 0$
2. $J_2\ddot{\theta}_2 + B_2\dot{\theta}_2 + K_2(\theta_2-\theta_1) = \tau_a(t)$

• Sacar la transformada de Laplace

1. $J_1\ddot{\theta}_1 + B_1\dot{\theta}_1 + K_1\theta_1 - K_2(\theta_2-\theta_1) = 0$

$$J_1\ddot{\theta}_1 + B_1\dot{\theta}_1 + K_1\theta_1 - K_2\theta_2 + K_2\theta_1 = 0$$

$$\downarrow \mathcal{L}$$

• $[J_1s^2 + B_1s + K_1 + K_2]\,\theta_1(s) - K_2\theta_2(s) = 0$

$$J_2\ddot{\theta}_2 + B_2\dot{\theta}_2 + K_2(\theta_2-\theta_1) = \tau_a(t)$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 + B_2\dot{\theta}_2 + K_2\theta_2 - K_2\theta_1 = \tau_a(t)$$

$$\downarrow \mathcal{L}$$

• $(J_2s^2 + Bs + K_2)\,\theta_2(s) - K_2\theta_1(s) = \tau_a(s)$

Ecuaciones para la función de transferencia.

• $[J_1s^2 + B_1s + K_1 + K_2]\,\theta_1(s) - K_2\theta_2(s) = 0$ (1)

• $(J_2s^2 + Bs + K_2)\,\theta_2(s) - K_2\theta_1(s) = \tau_a(s)$ (2)

Para ello se debe dejar todo en terminos de θ_2

Despejar $\theta_1(s)$ en (1)

$$[J_1s^2 + B_1s + K_1 + K_2]\,\theta_1(s) - K_2\theta_2(s) = 0$$

• $\theta_1(s) = \dfrac{K_2\theta_2(s)}{J_1s^2 + B_1s + K_1 + K_2}$

• Por lo tanto en la ecuación (2) reemplazar $\theta_1(s)$

$$(J_2s^2 + Bs + K_2)\,\theta_2(s) - K_2\theta_1(s) = \tau_a(s)$$

$$(J_2s^2 + Bs + K_2)\,\theta_2(s) - K_2\left[\frac{K_2\theta_2(s)}{J_1s^2 + B_1s + K_1 + K_2}\right] = \tau_a(s)$$

$$\theta_2(s)\left[(J_2s^2 + Bs + K_2) - \frac{(K_2)^2}{J_1s^2 + B_1s + K_1 + K_2}\right] = \tau_a(s)$$

$$\frac{\tau_a(s)}{\theta_2(s)} = \left[\frac{(J_2s^2 + Bs + K_2)(J_1s^2 + B_1s + K_1 + K_2) - K_2^2}{J_1s^2 + B_1s + K_1 + K_2}\right]$$

$$\frac{\tau_a(s)}{\theta_2(s)} = \left[\frac{(J_2 s^2 + B s + K_2)(J_1 s^2 + B_1 s + K_1 + K_2) - K_2^2}{J_1 s^2 + B_1 s + K_1 + K_2}\right]$$

$$\frac{\theta_2(s)}{\tau_a(s)} = \left[\frac{J_1 s^2 + B_1 s + K_1 + K_2}{\underbrace{(J_2 s^2 + B s + K_2)(J_1 s^2 + B_1 s + K_1 + K_2)}_{\text{Desarrollar Polinomio}} - K_2^2}\right]$$

- $J_1 J_2 S^4 + J_2 B_1 S^3 + J_2 K_1 S^2 + K_2 J_2 S^2 + J_1 B_2 S^3 + B_1 B_2 S^2 + B_2 K_1 S + B_2 K_2 S + K_2 J_1 S^2 + B_1 K_2 S + K_1 K_2 + K_2^2 - K_2^2$

$$\frac{\theta_2(s)}{\tau_a(s)} = \frac{J_1 S^2 + B_1 S + K_1 + K_2}{S^4(J_1 J_2) + S^3(J_2 B_1 + J_1 B_2) + S^2(J_2 K_1 + K_2 J_2 + B_1 B_2 + K_2 J_1) + S(B_2 K_1 + B_2 K_2 + B_1 K_2) + K_1 K_2}$$

a. Solución

- Forma Canónica controlable ...

$$\frac{\theta_2(s)}{\tau_a(s)} = \frac{H_1(s)}{H_2(s)}$$

- Donde.

$$\tau_a(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{H_2(s)}} \xrightarrow{\chi_1(s)} \boxed{H_1(s)} \xrightarrow{\theta_2(s)}$$

$$\tau_a(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{\underbrace{S^4(J_1 J_2)}_{\bigcirc} + \underbrace{S^3(J_2 B_1 + J_1 B_2)}_{\bigcirc} + \underbrace{S^2(J_2 K_1 + K_2 J_2 + B_1 B_2 + K_2 J_1)}_{\bigcirc} + \underbrace{S(B_2 K_1 + B_2 K_2 + B_1 K_2)}_{\bigcirc} + \underbrace{K_1 K_2}_{\bigcirc}}} \longrightarrow \chi_1(s)$$

cambio de variables

- $\chi_1(s)\left[S^4 \bigcirc + S^3 \bigcirc + S^2 \bigcirc + S \bigcirc + \bigcirc\right] = \tau_a(s)$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$\ddddot{\chi}_1 \bigcirc + \dddot{\chi}_1 \bigcirc + \ddot{\chi}_1 \bigcirc + \dot{\chi}_1 \bigcirc + \chi_1 \bigcirc$$

- Representación en el espacio de estados.

$$\ddddot{\chi}_1 \bigcirc + \dddot{\chi}_1 \bigcirc + \ddot{\chi}_1 \bigcirc + \dot{\chi}_1 \bigcirc + \chi_1 \bigcirc$$

$X_1 = \chi_1 \quad X_2 = \dot{\chi}_1 \quad X_3 = \ddot{\chi}_1 \quad X_4 = \dddot{\chi}_1$

- Derivar

$\dot{X}_1 = \dot{\chi}_1 = X_2$

$\dot{X}_2 = \ddot{\chi}_1 = X_3$

$\dot{X}_3 = \dddot{\chi}_1 = X_4$

$\dot{X}_4 = \ddddot{\chi}_1$ Despejar

Reemplazar $\ddddot{\chi}_1 \bigcirc + \dddot{\chi}_1 \bigcirc + \ddot{\chi}_1 \bigcirc + \dot{\chi}_1 \bigcirc + \chi_1 \bigcirc = \tau_a$

✓ $\dot{X}_1 = \dot{\chi}_1 = X_2$

✓ $\dot{X}_2 = \ddot{\chi}_1 = X_3$

✓ $\dot{X}_3 = \dddot{\chi}_1 = X_4$

$\dot{X}_4 = \ddddot{\chi}_1$ Despejar

- $\dot{X}_4 \bigcirc + X_4 \bigcirc + X_3 \bigcirc + X_2 \bigcirc + X_1 \bigcirc = \tau_a$

- Despejar $\dot{X}_4$ • $\dot{X}_4 \bigcirc + X_4 \bigcirc + X_3 \bigcirc + X_2 \bigcirc + X_1 \bigcirc = \tau_a$

$$\dot{X}_4 = \frac{\tau_a}{\bigcirc} - \frac{X_4 \bigcirc}{\bigcirc} - \frac{X_3 \bigcirc}{\bigcirc} - \frac{X_2 \bigcirc}{\bigcirc} - \frac{X_1 \bigcirc}{\bigcirc}$$

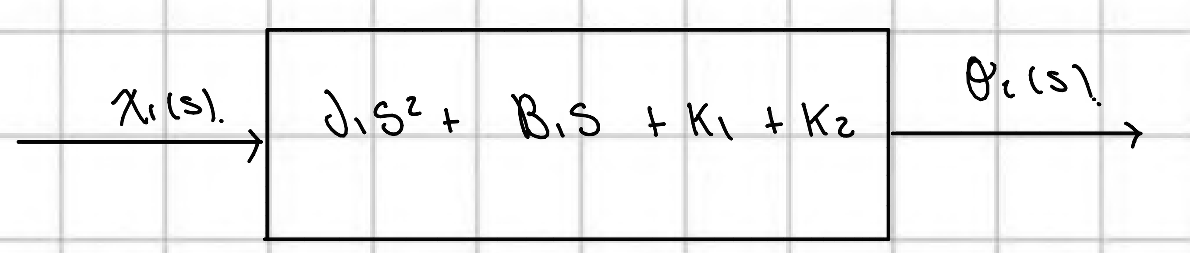
- Formato Matricial:

$$\begin{bmatrix}\dot{X}_1\\ \dot{X}_2\\ \dot{X}_3\\ \dot{X}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -\frac{\bigcirc}{\bigcirc} & -\frac{\bigcirc}{\bigcirc} & -\frac{\bigcirc}{\bigcirc} & -\frac{\bigcirc}{\bigcirc}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\\ X_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1/\bigcirc\end{bmatrix}\tau_a$$

$\bigcirc = J_2 B_1 + J_1 B_2 \qquad \bigcirc = B_2 K_1 + B_2 K_2 + B_1 K_2 \qquad \bigcirc = K_1 K_2$

$\bigcirc = J_1 J_2 \qquad \bigcirc = J_2 K_1 + K_2 J_2 + B_1 B_2 + K_2 J_1$

∘ Para la ecuación de Salida Se tiene.



$$\theta_2(s) = (J_1 S^2 + B_1 S + K_1 + K_2)\, X_1(s).$$

$$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

✓ $\dot{X}_1 = \dot{x}_1 = X_2.$

✓ $\dot{X}_2 = \ddot{x}_1 = X_3$

✓ $\dot{X}_3 = \dddot{x}_1 = X_4$

$\dot{X}_4 = \ddddot{x}_1$ Despejar

$$\theta_2 = J_1\ddot{x}_1 + B_1\dot{x}_1 + K_1 x_1 + K_2 x_1$$

$$\theta_2 = J_1 X_3 + B_1 X_2 + K_1 X_1 + K_2 X_1.$$

$$\theta_2 = \begin{bmatrix} (K_1+K_2) & B_1 & J_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}$$

b. Solución:

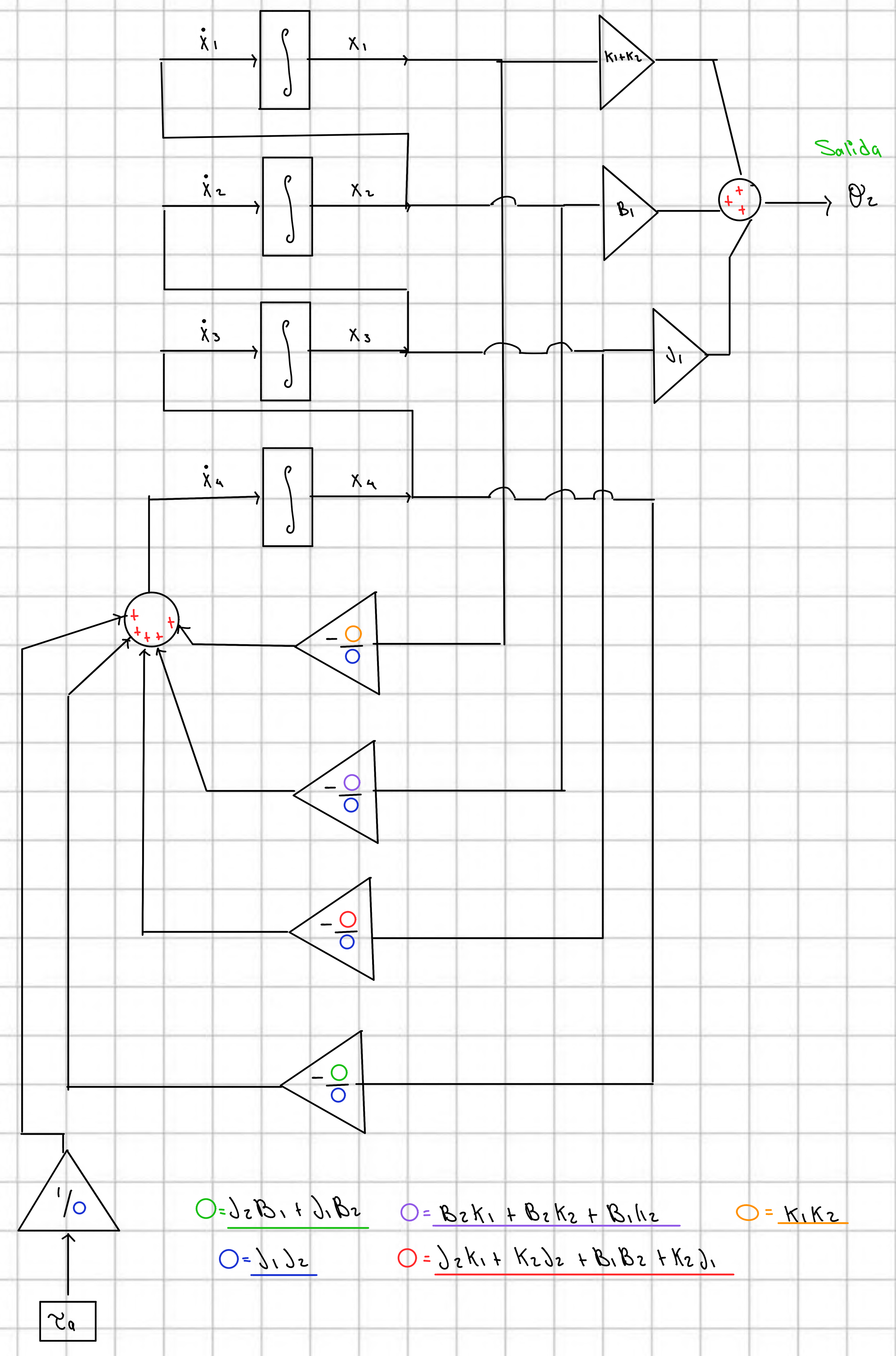
$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\color{orange}{\bigcirc}}{\color{blue}{\bigcirc}} & -\frac{\color{purple}{\bigcirc}}{\color{blue}{\bigcirc}} & -\frac{\color{red}{\bigcirc}}{\color{blue}{\bigcirc}} & -\frac{\color{green}{\bigcirc}}{\color{blue}{\bigcirc}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/\color{blue}{\bigcirc} \end{bmatrix} \tau_a.$$

$$\theta_2 = \begin{bmatrix} (K_1+K_2) & B_1 & J_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}$$

$\color{green}{\bigcirc}$ $= J_2B_1 + J_1B_2$ $\color{purple}{\bigcirc}$ $= B_2K_1 + B_2K_2 + B_1K_2$ $\color{orange}{\bigcirc}$ $= K_1K_2$

$\color{blue}{\bigcirc}$ $= J_1J_2$ $\color{red}{\bigcirc}$ $= J_2K_1 + K_2J_2 + B_1B_2 + K_2J_1$

c) Diagrama de Bloques.



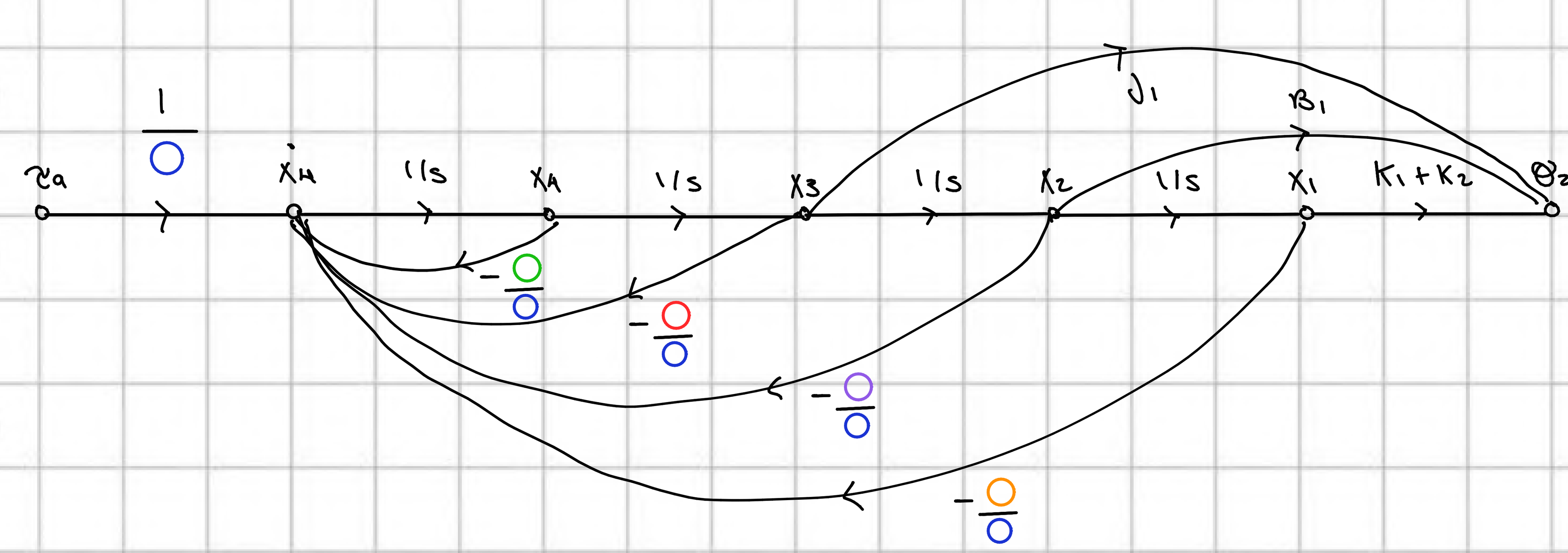
$\color{green}{\bigcirc}$ $= J_2B_1 + J_1B_2$ $\color{purple}{\bigcirc}$ $= B_2K_1 + B_2K_2 + B_1K_2$ $\color{orange}{\bigcirc}$ $= K_1K_2$

$\color{blue}{\bigcirc}$ $= J_1J_2$ $\color{red}{\bigcirc}$ $= J_2K_1 + K_2J_2 + B_1B_2 + K_2J_1$

∘ Diagrama de flujo de Señal

$\color{green}{\bigcirc}$ $= J_2B_1 + J_1B_2$ $\color{purple}{\bigcirc}$ $= B_2K_1 + B_2K_2 + B_1K_2$ $\color{orange}{\bigcirc}$ $= K_1K_2$

$\color{blue}{\bigcirc}$ $= J_1J_2$ $\color{red}{\bigcirc}$ $= J_2K_1 + K_2J_2 + B_1B_2 + K_2J_1$



• Punto 3.

Para el Sistema anterior considere $K_1 = 0$ $\boxed{\text{el analisis Sera igual al Primer Punto.}}$

Considerando las siguiente ecuación :

$$\frac{\theta_2(s)}{T_a(s)} = \frac{J_1S^2 + B_1S + \cancel{K_1}^{0} + K_2}{S^4(J_1J_2) + S^3(J_2B_1 + J_1B_2) + S^2(\cancel{J_2K_1}^{0} + K_2J_2 + B_1B_2 + K_2J_1) + S(\cancel{B_2K_1}^{0} + B_2K_2 + B_1K_2) + \cancel{K_1K_2}^{0}}$$

• Se obtiene.

$$\frac{\theta_2(s)}{\tau_a(s)} = \frac{J_1S^2 + B_1S + K_2}{S^4(J_1J_2) + S^3(J_2B_1 + J_1B_2) + S^2(K_2J_2 + B_1B_2 + K_2J_1) + S(B_2K_2 + B_1K_2)}$$

• Forma Canónica controlable ...

$$\frac{\theta_2(s)}{T_a(s)} = \frac{H_1(s)}{H_2(s)}$$

$\circ$ J_1J_2

$\circ$ $J_2B_1 + J_1B_2$

$\circ$ $K_2J_2 + B_1B_2 + K_2J_1$

$\circ$ $B_2K_2 + B_1K_2$

• Donde.

$$\xrightarrow{\tau_a(s)} \boxed{\frac{1}{H_2(s)}} \xrightarrow{X_1(s)} \boxed{H_1(s)} \xrightarrow{\theta_2(s)}$$

$$\xrightarrow{\tau_a(s)} \boxed{\frac{1}{\underbrace{S^4(J_1J_2)}_{\circ} + \underbrace{S^3(J_2B_1 + J_1B_2)}_{\circ} + \underbrace{S^2(K_2J_2 + B_1B_2 + K_2J_1)}_{\circ} + \underbrace{S(B_2K_2 + B_1K_2)}_{\circ}}} \xrightarrow{X_1(s)}$$

cambio de variables

• $X_1(s)\left[S^4\circ + S^3\circ + S^2\circ + S\circ\right] = \tau_a(s)$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$\ddddot{X}_1\circ + \dddot{X}_1\circ + \ddot{X}_1\circ + \dot{X}_1\circ$$

• Representación en el espacio de estados.

$$\ddddot{X}_1\circ + \dddot{X}_1\circ + \ddot{X}_1\circ + \dot{X}_1\circ + X_1\circ$$

$X_1 = X_1$ $\quad X_2 = \dot{X}_1$ $\quad X_3 = \ddot{X}_1$ $\quad X_4 = \dddot{X}_1$

• Derivar

$\dot{X}_1 = \dot{X}_1 = X_2$

$\dot{X}_2 = \ddot{X}_1 = X_3$

$\dot{X}_3 = \dddot{X}_1 = X_4$

$\dot{X}_4 = \ddddot{X}_1$ Despejar

Reemplazar $\ddddot{X}_1\circ + \dddot{X}_1\circ + \ddot{X}_1\circ + \dot{X}_1\circ = \tau_a$

✓ $\dot{X}_1 = \dot{X}_1 = X_2$

✓ $\dot{X}_2 = \ddot{X}_1 = X_3$ $\quad$ • $\dot{X}_4\circ + X_4\circ + X_3\circ + X_2\circ = \tau_a$

✓ $\dot{X}_3 = \dddot{X}_1 = X_4$

$\dot{X}_4 = \ddddot{X}_1$ Despejar

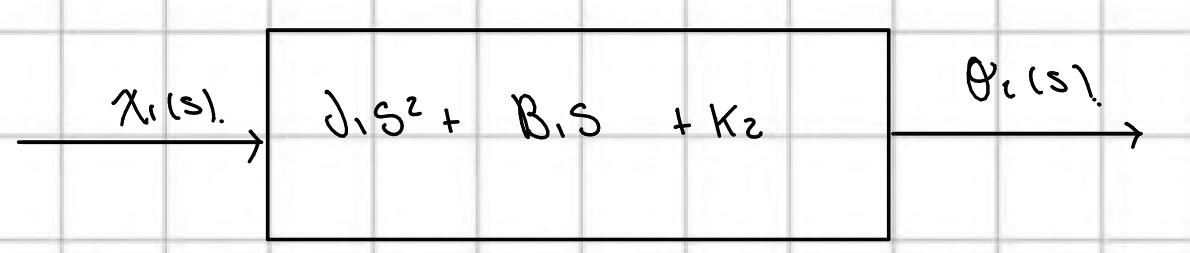
• Despejar $\dot{X}_4$ • $\dot{X}_4\circ + X_4\circ + X_3\circ + X_2\circ = \tau_a$

$$\dot{X}_4 = \frac{\tau_a}{\circ} - \frac{X_4\circ}{\circ} - \frac{X_3\circ}{\circ} - \frac{X_2\circ}{\circ}$$

• Formato Matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\circ}{\circ} & -\frac{\circ}{\circ} & -\frac{\circ}{\circ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/\circ \end{bmatrix} \tau_a.$$

◦ Para la ecuación de Salida se tiene.



$$\theta_2(s) = (J_1 s^2 + B_1 s + K_2)\, X_1(s).$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

✓ $\dot{x}_1 = \dot{x}_1 = x_2$.

✓ $\dot{x}_2 = \ddot{x}_1 = x_3$

✓ $\dot{x}_3 = \dddot{x}_1 = x_4$

$\dot{x}_4 = \ddddot{x}_1$ Despejar

$$\theta_2 = J_1 \ddot{x}_1 + B_1 \dot{x}_1 + K_2 x_1$$

$$\theta_2 = J_1 x_3 + B_1 x_2 + K_2 x_1.$$

$$\theta_2 = \begin{bmatrix} K_2 & B_1 & J_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

b. Solución:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\textcolor{purple}{\circ}}{\textcolor{blue}{\circ}} & -\frac{\textcolor{red}{\circ}}{\textcolor{blue}{\circ}} & -\frac{\textcolor{green}{\circ}}{\textcolor{blue}{\circ}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/\textcolor{blue}{\circ} \end{bmatrix} \tau_a.$$

$$\theta_2 = \begin{bmatrix} K_2 & B_1 & J_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

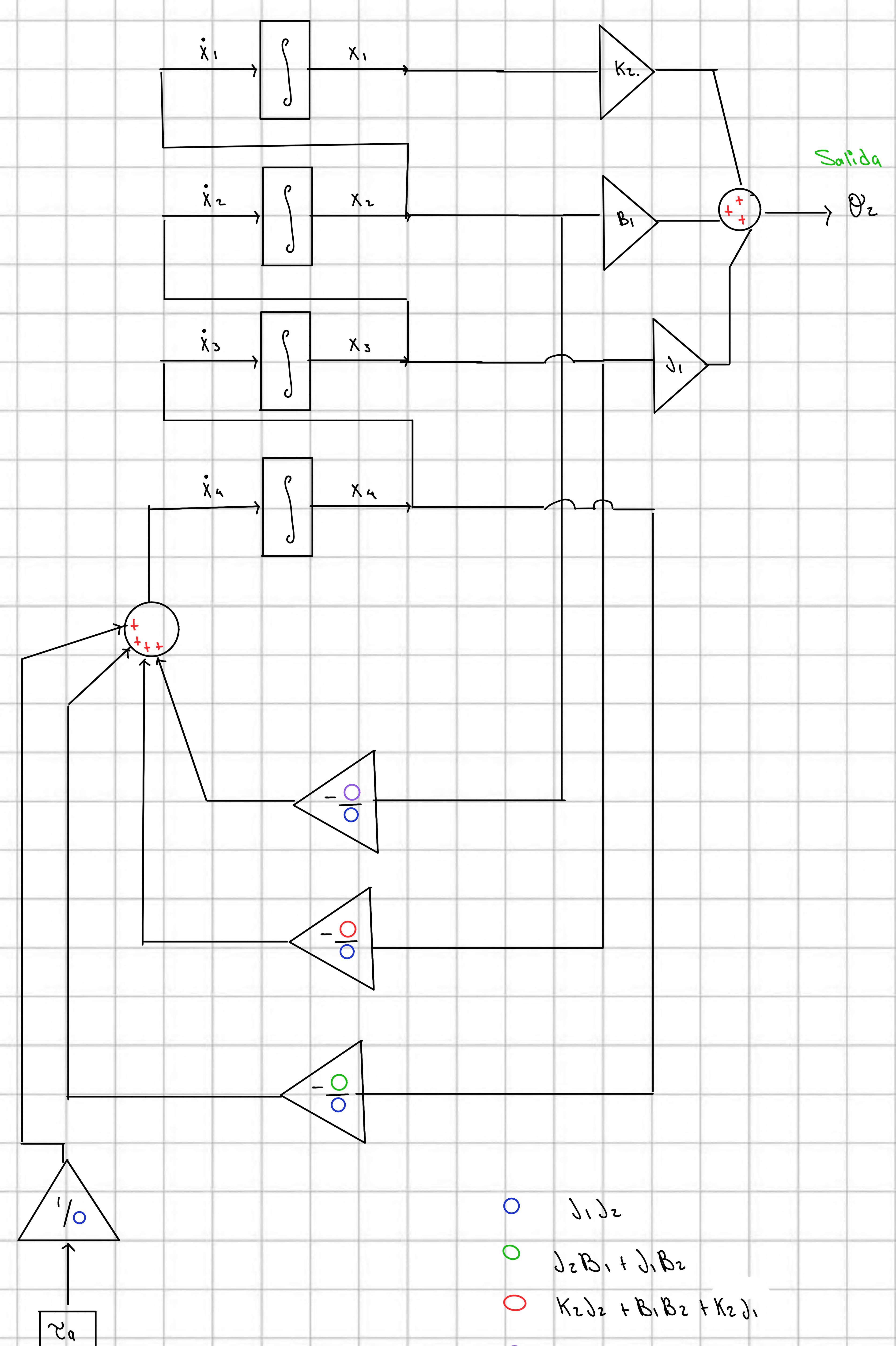
$\textcolor{blue}{\circ}$ $J_1 J_2$

$\textcolor{green}{\circ}$ $J_2 B_1 + J_1 B_2$

$\textcolor{red}{\circ}$ $K_2 J_2 + B_1 B_2 + K_2 J_1$

$\textcolor{purple}{\circ}$ $B_2 K_2 + B_1 K_2$

c) Diagrama de Bloques.



$\textcolor{blue}{\circ}$ $J_1 J_2$

$\textcolor{green}{\circ}$ $J_2 B_1 + J_1 B_2$

$\textcolor{red}{\circ}$ $K_2 J_2 + B_1 B_2 + K_2 J_1$

$\textcolor{purple}{\circ}$ $B_2 K_2 + B_1 K_2$

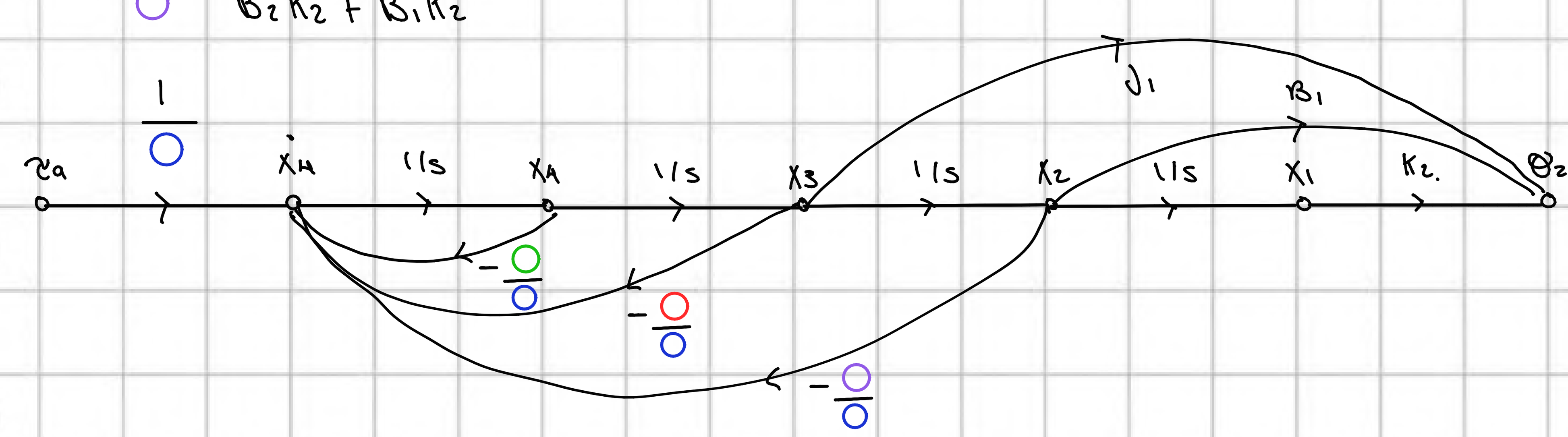
◦ Diagrama de flujo de Señal

$\textcolor{blue}{\circ}$ $J_1 J_2$

$\textcolor{green}{\circ}$ $J_2 B_1 + J_1 B_2$

$\textcolor{red}{\circ}$ $K_2 J_2 + B_1 B_2 + K_2 J_1$

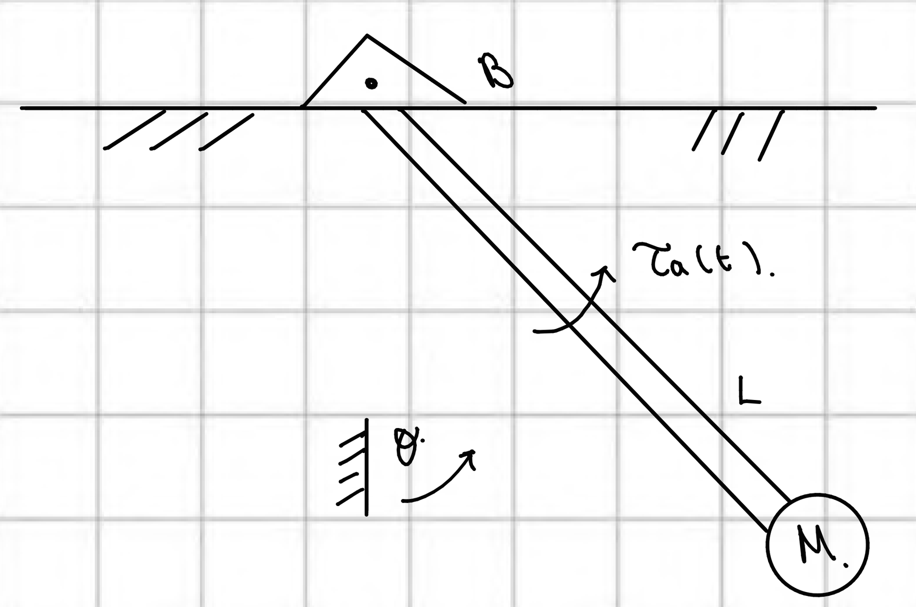
$\textcolor{purple}{\circ}$ $B_2 K_2 + B_1 K_2$



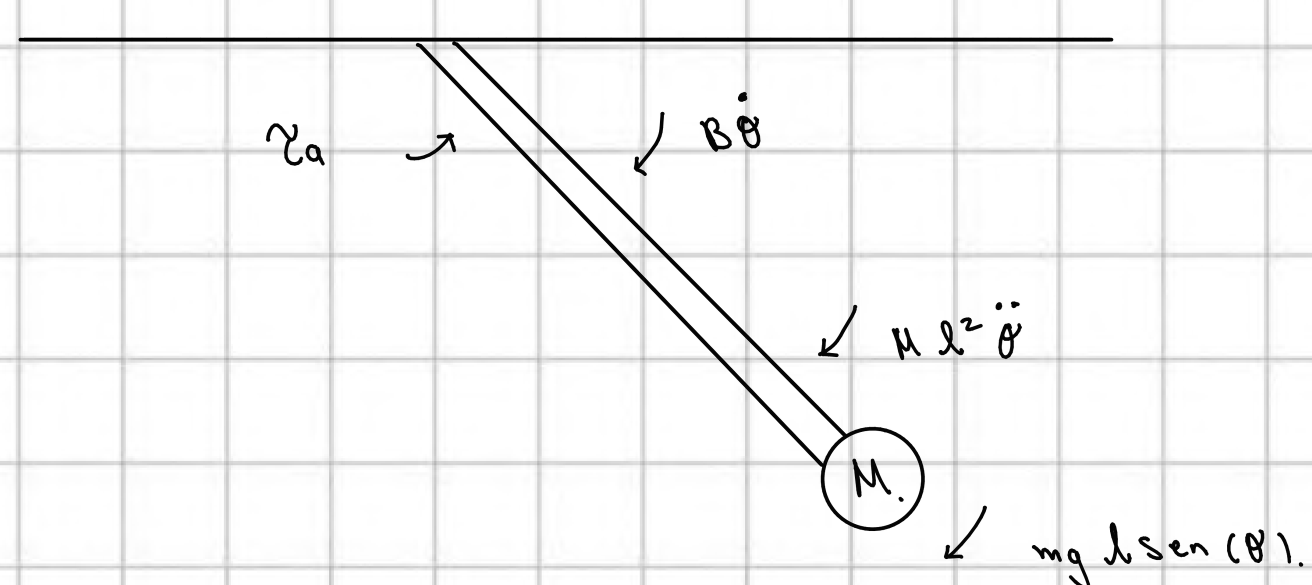
• Punto 5:

Para el Sistema Rotacional en la figura, determine:

a. la función de transferencia relacionada θ y τ_a



• teniendo el diagrama de cuerpo libre.



• la ecuaciones de movimiento.

$$\tau_a = B\dot\theta + Ml^2\ddot\theta + mgl\,\text{sen}(\theta)$$

• Despejando $\ddot\theta$

$$\ddot\theta = \frac{\tau_a}{Ml^2} - \frac{B}{Ml^2}\dot\theta - \frac{g}{l}\,\text{Sen}(\theta).$$

• Tomando la aproximación Si el cambio θ es un ángulo pequeño $\text{Sen}(\theta) \approx \theta$.

$$\ddot\theta = \frac{\tau_a}{Ml^2} - \frac{B}{Ml^2}\dot\theta - \frac{g}{l}\theta.$$

• Apartir de esta ecuación se tiene.

$$\ddot\theta Ml^2 = \tau_a - B\dot\theta - Mgl\theta.$$

• $\ddot\theta Ml^2 + B\dot\theta + Mgl\theta = \tau_a$

• Para encontrar la función de transferencia

• $\ddot\theta Ml^2 + B\dot\theta + Mgl\theta = \tau_a$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}.$$

$$\tau_a(s) = (s^2Ml^2 + Bs + Mgl)\theta(s).$$

• Por lo tanto se tiene que: $\tau_a(s) = (s^2Ml^2 + Bs + Mgl)\theta(s).$

• $$\frac{\theta(s)}{\tau_a(s)} = \frac{1}{s^2Ml^2 + Bs + Mgl}$$ • Solución a.

• $$\boxed{\frac{\theta(s)}{\tau_a(s)} = \frac{1}{s^2 + s\frac{B}{Ml^2} + \frac{g}{l}}}$$

b. La representación en el espacio de estados.

• $\ddot\theta Ml^2 + B\dot\theta + Mgl\theta = \tau_a$

$x_1 = \theta$ $x_2 = \dot\theta$

• Derivar:

$\dot x_1 = \dot\theta = x_2.$

$\dot x_2 = \ddot\theta$ Despejar

• Reemplazando $\dot x_2 Ml^2 + Bx_2 + Mglx_1 = \tau_a$

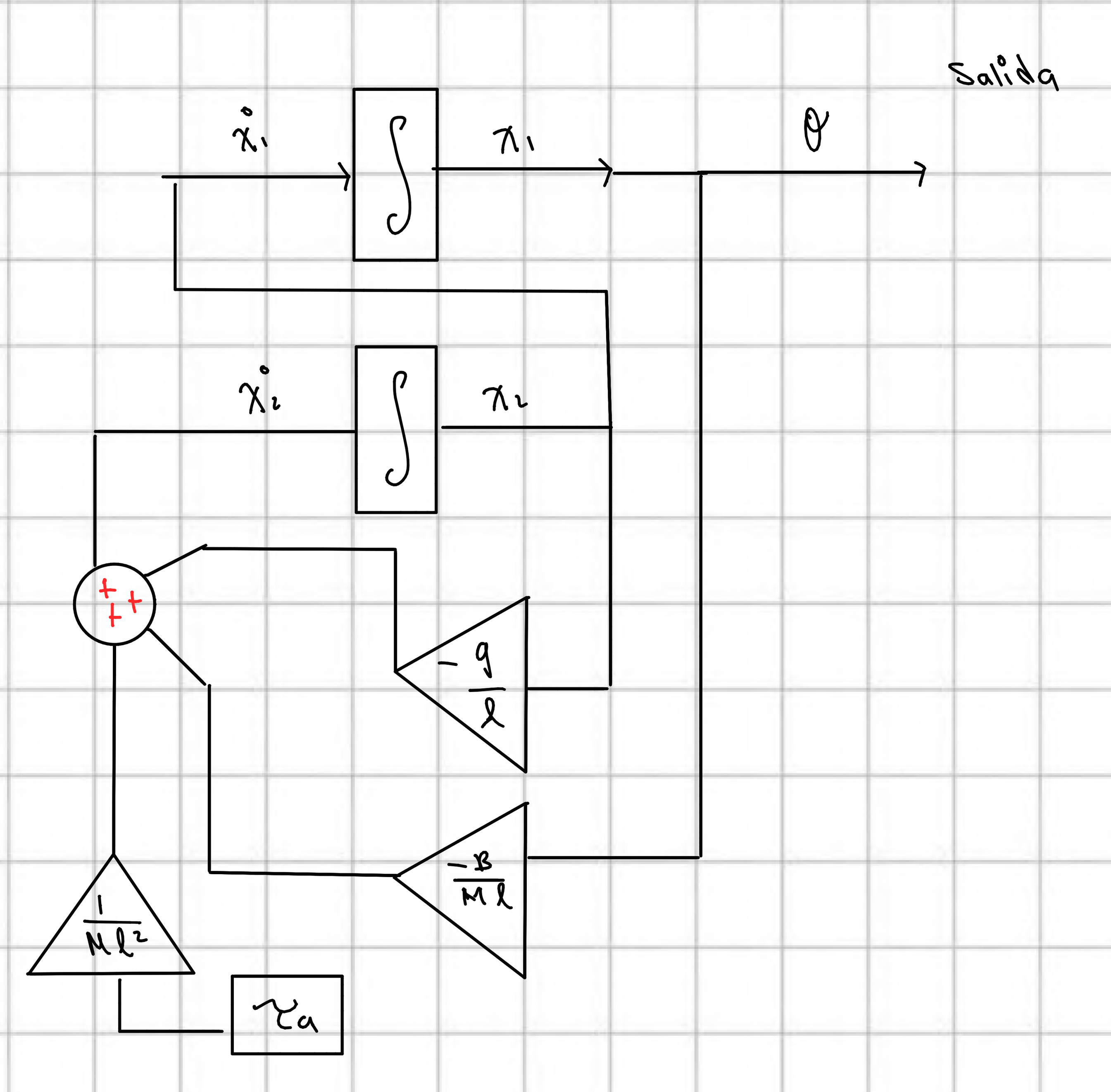
• $$\dot x_2 = \frac{\tau_a}{Ml^2} - \frac{Bx_2}{Ml^2} - \frac{g}{l}x_1$$

Formato Matricial.

$$\begin{bmatrix} \dot x_1 \\ \dot x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g/l & \frac{-B}{Ml^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/Ml^2 \end{bmatrix} \tau_a.$$

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

• Diagrama de Bloques.



- Diagrama de Flujo de Señal