Tema 2 Expresiones Algebraicas

L3 | 2.1 - 2.5

2. **Expresiones Algebraicas**

2.1 Concepto de variable, constante real y definición de expresión algebraica.

2.2 Valor numérico de una expresión algebraica

2.3 Definición de monomio. Operaciones con monomios

2.4 Definición de polinomios en n variables y en una variable.
Operaciones con polinomios(suma resta multiplicación y división)
División sintética

2.5 Ceros de un polinomio. División sintética

Ejercicios 1.2

1. Determine el resultado de cada una de las siguientes expresiones aritméticas.

   a) $-\left\{-6\left[\left(-3^4 \div 27\right)^2 - \left(4^0 - 8 \cdot -2\right)\right]\right\}$ R/ -48.

   b) $\dfrac{\dfrac{3}{4}\cdot 2 - 3}{4 - 8 \div \left(3 + \dfrac{2}{3}\right)}$ R/ $\dfrac{-33}{40}$.

   c) $\left(\dfrac{3^{-1}\cdot 2 \cdot (-1)^{-2}}{2^{-5}\cdot 2 \cdot 3^{-3}}\right)^{-1}$ R/ $\dfrac{1}{288}$.

   d) $1 \div \left(-4 + 4 \cdot \dfrac{1}{3}\right)^{-1} - \dfrac{35}{5}\cdot(-7)^{-1}$ R/ $\dfrac{-5}{3}$.

   e) $\dfrac{\dfrac{11}{3}\cdot\left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{21}{3}\right)}{2 + \dfrac{5}{3}} + \dfrac{-2}{3}\cdot 2 + 8$ R/ $\dfrac{1}{3}$.

   f) $\dfrac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{7}}{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{7}}\left(1 + \dfrac{21}{24}\right)\cdot 9^{-2}$ R/ $\dfrac{1}{24}$.

   g) $\left(-1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(-2 + \dfrac{1}{2}\right)^{-2} + \dfrac{7}{4}$ R/ $\dfrac{13}{12}$.

2.1 Concepto de variable, constante real y definición de expresión algebraica.

Constante. Una constante se define como un valor permanente que no puede modificarse en el contexto en el cual se definió. Si la constante es un numero real se llama constante real.

Variable. Se denomina variable a un símbolo utilizado dentro de un mismo contexto que Puede tomar diferentes valores en un conjunto específico. Se llama variable real si se toman los valores en el conjunto $\mathbb{R}$. Se denotan con literales x, y z,

Expresión Algebraica. Es una expresión finita de variables y constantes reales relacionadas Entre sí por medio de las operaciones aritmética de $\mathbb{R}$. $3y^2 + 6y$ $\quad 2(x-1)^2 + \frac{(y-3)^2}{2}$

2.2 Valor numérico de una expresión algebraica

Valor numérico de una expresión algebraica. Es el número real obtenido al sustituir las variables de una expresión algebraica por números reales y efectuar las operaciones indicadas.

1. Determine el valor numérico de la expresión algebraica dada por $\frac{x^{-2}+y^{-1}}{2x+3(x-y)^{-1}}$ cuando: x = -2 ; y = 1/3

$$\frac{(-2)^{-2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}{2\cdot -2+3\left(-2-\frac{1}{3}\right)^{-1}} = \frac{\frac{1}{(-2)^2}+3}{-4+3\cdot\left(\frac{-6-1}{3}\right)^{-1}} = \frac{\frac{1}{(-2)^2}+3}{-4+3\cdot\left(\frac{-7}{3}\right)^{-1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}+3}{-4+3\cdot\frac{-3}{7}} = \frac{\frac{1+12}{4}}{-4+\frac{-9}{7}} = \frac{\frac{13}{4}}{\frac{-28-9}{7}}$$

$$= \frac{\frac{13}{4}}{\frac{-37}{7}} = -\frac{91}{148}$$

2. Determine el valor numérico de la expresión algebraica dada por cuando: a = 5, b= 4 y c= -1

$$q(a, b, c) = 2\sqrt{a}\left(a\sqrt{b^2} - b\sqrt{5ab}\right)^c \div \frac{-b^{14}}{a^{-2a}(abc)^{11}} + a^{3/2}b^{3c}$$

Solución: al sustituir en las variables de la expresión algebraica por los números dados se obtiene: q =q(5, 4, -1) de donde:

$$\begin{aligned}
q &= 2\sqrt{5}\left(5\sqrt{4^2} - 4\sqrt{5\cdot 5\cdot 4}\right)^{-1} \div \frac{-4^{14}}{5^{-2\cdot 5}(5\cdot 4\cdot(-1))^{11}} + 5^{3/2}\cdot 4^{3\cdot -1} \\
&= 2\sqrt{5}\,(5\cdot 4 - 4\cdot 5\cdot 2)^{-1} \div \frac{-4^{14}}{5^{-10}\cdot 5^{11}\cdot 4^{11}\cdot(-1)^{11}} + \sqrt{5^2\cdot 5}\cdot 4^{-3} \\
&= 2\sqrt{5}\,(20 - 40)^{-1} \div \frac{-4^{14}}{5^{-10}\cdot -(5^{11}\cdot 4^{11})} + 5\sqrt{5}\cdot 4^{-3} \\
&= \frac{2\sqrt{5}}{-20}\cdot\frac{-5\cdot 4^{11}}{-4^{14}} + \frac{5\sqrt{5}}{4^3} = \frac{-\sqrt{5}}{10}\cdot\frac{5}{4^3} + \frac{5\sqrt{5}}{4^3} \\
&= \frac{-\sqrt{5}}{2\cdot 4^3} + \frac{5\sqrt{5}}{4^3} = \frac{-\sqrt{5} + 10\sqrt{5}}{2\cdot 4^3} = \frac{9\sqrt{5}}{128}
\end{aligned}$$

2.3 Definición de monomio. Operaciones con monomios

<u>Monomio</u>. Un monomio es una expresión algebraica en donde aparece únicamente multiplicación de números reales, llamados coeficientes, y una o más variables con exponentes naturales llamada parte literal del monomio.

$\frac{2}{3}x^2y^3$ es un monomio con coeficiente $\frac{2}{3}$ y parte literal x^2y^3

No son monomios: $3x^{1/2}$, $\frac{2y^3z^2}{3x}$, $2x^2y^3+7x^5a^2b$

<u>Monomios semejantes</u> .

Dos monomios son semejantes si tienen la misma parte literal.

La **suma o resta** de monomios semejantes se realiza así:

$$C_1P_L + C_2P_L = (C_1 + C_2)P_L$$

$$C_1P_L - C_2P_L = (C_1 - C_2)P_L$$

Realice las operaciones indicadas para simplificar la expresión:

$$2x^2y + 3xy - 2x^2y + 3y - \frac{5}{4}xy$$

Realice las operaciones indicadas para simplificar la expresión:

$$2x^2y + 3xy - 2x^2y + 3y - \frac{5}{4}xy$$

★ **Solución:**

$$\begin{aligned}
& 2x^2y + 3xy - 2x^2y + 3y - \frac{5}{4}xy \\
= \;& 2x^2y - 2x^2y + 3xy - \frac{5}{4}xy + 3y && \text{Conmutatividad de la adición.} \\
= \;& (2x^2y - 2x^2y) + \left(3xy - \frac{5}{4}xy\right) + 3y && \text{Asociatividad de la adición.} \\
= \;& (-2+2)x^2y + \left(3 - \frac{5}{4}\right)xy + 3y && \text{Distributividad.} \\
= \;& 0x^2y + \frac{7}{4}xy + 3y \\
= \;& \frac{7}{4}xy + 3y
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la expresión $2x^2y + 3xy - 2x^2y + 3y - \frac{5}{4}xy$ equivale a $\frac{7}{4}xy + 3y$.

<u>Multiplicación y división de monomios</u> .La multiplicación y la división de monomios se realiza según la propiedad conmutativa y asociativa de la multiplicación; así como las leyes de potencias referentes a la multiplicación y división de potencias de igual base.

1. Realice las operaciones indicadas y simplifique el resultado de:

$$\boxed{\frac{-1}{2}x^2yw^3 \cdot \frac{4}{3}x^5yz}$$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{-1}{2}x^2yw^3 \cdot \frac{4}{3}x^5yz &= \frac{-1}{2} \cdot x^2 \cdot y \cdot w^3 \cdot \frac{4}{3} \cdot x^5 \cdot y \cdot z \\ &= \left(\frac{-1}{2} \cdot \frac{4}{3}\right)(x^2 \cdot x^5)(y \cdot y)zw^3 \\ &= \frac{-2}{3}x^7y^2zw^3\end{aligned}$$

Por lo que la expresión $\frac{-1}{2}x^2yw^3 \cdot \frac{4}{3}x^5yz$ equivale a $\frac{-2}{3}x^7y^2zw^3$.

2. Realice la siguiente división: $\boxed{(-9t^2s^3) \div (3ts^2)}$

R/ $(-9t^2s^3) \div (3ts^2) = \dfrac{-9t^2s^3}{3ts^2} = \dfrac{-9}{3} \cdot \dfrac{t^2}{t} \cdot \dfrac{s^3}{s^2} = -3ts$

2.4 Definición de polinomios en n variables y en una variable.
Operaciones con polinomios(suma resta multiplicación y división)
División sintética

Polinomios . La suma de dos o más monomios no semejantes se llama binomio o polinomio.

Polinomio en una variable de grado n. Un polinomio en una variable x y de grado n es una expresión de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

En donde, $n \in \mathbb{N}$, a_k son constantes reales para k = 0,1,2,3,...,n y son llamados los coeficientes del polinomio; a_n se llama el coeficiente principal del polinomio y no es 0.

Ejemplo $P(x) = 3x^5 + 2x^3 - x^2 + x + 1$ Var: x

$P(x) = 3x^5 + 0x^4 + 2x^3 - x^2 + x + 1.$ Grado: 5

Operaciones con polinomios(suma resta multiplicación y división)

<u>suma y resta</u> Se agrupan los monomios semejantes y se suman o restan

En el caso de la resta $P(x) - Q(x)$ se toma en cuenta que:

$$P(x) - Q(x) = P(x) + -Q(x) = P(x) + -1 \cdot Q(x),$$

Por lo que se debe proceder a aplicar la propiedad distributiva para multiplicar el - 1 por Q(x) antes de agrupar los monomios semejantes.

Considere los polinomios $P(x) = 2x^2 + 3x + 1$ y $Q(x) = x^2 - x + 3$. Calcule y simplifique $P(x) + Q(x)$.

Solución:

$$\begin{aligned}
P(x) + Q(x) &= (2x^2 + 3x + 1) + (x^2 - x + 3) \\
&= (2x^2 + 3x + 1) + (x^2 + -x + 3) && \text{Definición de sustracción.} \\
&= 2x^2 + 3x + 1 + x^2 + -x + 3 && \text{Asociatividad de } (+). \\
&= \overbrace{2x^2 + x^2}^{\text{semejantes}} + \overbrace{3x + -x}^{\text{semejantes}} + 1 + 3 && \text{Conmutatividad de } (+). \\
&= 3x^2 + 2x + 4
\end{aligned}$$

Determine el polinomio que resulta de la resta de $M(y) = 2y^4 + 3y^2 + y - 1$ y $N(y) = y^3 + y^2 + 4y^4 - 8$.

Solución: Se debe determinar el polinomio $M(y) - N(y)$

$$\begin{array}{rll}
& M(y) - N(y) & \\
= & (2y^4 + 3y^2 + y - 1) - (y^3 + y^2 + 4y^4 - 8) & \\
= & (2y^4 + 3y^2 + y - 1) + -1 \cdot (y^3 + y^2 + 4y^4 - 8) & \text{Definición de sustracción.} \\
= & (2y^4 + 3y^2 + y - 1) + (-y^3 - y^2 - 4y^4 + 8) & \text{Distributividad.} \\
= & 2y^4 + 3y^2 + y + -1 + -y^3 + -y^2 + -4y^4 + 8 & \text{Asociatividad de } (+). \\
= & \overbrace{2y^4 + -4y^4}^{\text{semejantes}} + -y^3 + \overbrace{3y^2 + -y^2}^{\text{semejantes}} + y + (-1 + 8) & \text{Conmuta. y asocia. de } (+). \\
= & -2y^4 + -y^3 + 2y^2 + y + 7 &
\end{array}$$

Por lo que $M(y) - N(y) = -2y^4 - y^3 + 2y^2 + y + 7$.

Multiplicación

(9) La multiplicación es **distributiva** sobre la adición.	$a(b+c) = ab + ac$ y $(a+b)c = ac + bc$

$$(p+q)(r+s) = pr + ps + qr + qs$$

Simplifique la siguiente expresión: $-3m^2n(3m^2n + 4m^2 - 3mn^2)$

R/

$$\begin{aligned}
& -3m^2n(3m^2n + 4m^2 - 3mn^2) & \\
= \ & -3m^2n(3m^2n + 4m^2 + -3mn^2) & \text{Definición de resta} \\
= \ & (-3m^2n)(3m^2n) + (-3m^2n)(4m^2) + (-3m^2n)(-3mn^2) & \text{Distributividad} \\
= \ & -3m^2n3m^2n + -3m^2n4m^2 + -3m^2n \cdot -3mn^2 & \text{Asociatividad} \\
= \ & -9m^4n^2 - 12m^4n + 9m^3n^3 &
\end{aligned}$$

Por lo que $-3m^2n \cdot (3m^2n + 4m^2 - 3mn^2) = -9m^4n^2 - 12m^4n + 9m^3n^3$.

Determine el resultado de multiplicar $(2x+y)(x-y)$.

R/ $(2x+y)(x-y) = 2x \cdot x + 2x \cdot -y + y \cdot x + y \cdot -y$

$$= (2x^2 - 2xy) + (yx + -y^2)$$

$$= 2x^2 + \overbrace{-2xy + yx}^{\text{semejantes}} + -y^2 = 2x^2 + -yx + -y^2$$

Fórmulas Notables

	Multiplicación		Producto notables
1)	$(a+b)^2$	$=$	
2)	$(a-b)^2$	$=$	
3)	$(a+b)(a-b)$	$=$	
4)	$(a+b)^3$	$=$	
5)	$(a-b)^3$	$=$	
6)	$(a+b)(a^2-ab+b^2)$	$=$	
7)	$(a-b)(a^2+ab+b^2)$	$=$	

	Multiplicación		Producto notables
1)	$(a+b)^2$	$=$	$a^2+2ab+b^2$
2)	$(a-b)^2$	$=$	$a^2-2ab+b^2$
3)	$(a+b)(a-b)$	$=$	a^2-b^2
4)	$(a+b)^3$	$=$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
5)	$(a-b)^3$	$=$	$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
6)	$(a+b)(a^2-ab+b^2)$	$=$	a^3+b^3
7)	$(a-b)(a^2+ab+b^2)$	$=$	a^3-b^3

Realice el siguiente producto y simplifique el resultado

$\left(4x^2y + \frac{1}{2}\right)^2$ Solución: En este caso $a = 4x^2y$ y $b = \frac{1}{2}$

Utilizando el producto notable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\left(4x^2y + \frac{1}{2}\right)^2 &= \overbrace{\left(4x^2y\right)^2}^{a^2} + 2 \cdot \overbrace{\left(4x^2y\right)}^{a} \cdot \overbrace{\frac{1}{2}}^{b} + \overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^2}^{b^2} \\
&= \left(4x^2y\right)^2 + \cancel{2}\left(4x^2y\right) \cdot \frac{1}{\cancel{2}} + \frac{1}{4} \\
&= 16x^4y^2 + 4x^2y + \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

por lo que $\left(4x^2y + \frac{1}{2}\right)^2 = 16x^4y^2 + 4x^2y + \frac{1}{4}$.

División de polinomios

Se debe recordar que el algoritmo de la división, para números naturales, que establece:

dados M y D, con $D \neq 0$, entonces existen únicos números naturales R y C que satisfacen simultáneamente: $M = C \cdot D + R$ con $R < D$

M se denomina dividendo, D divisor, C cociente y R residuo de la división.

$M = C \cdot D + R$ es equivalente a: $\dfrac{M}{D} = C + \dfrac{R}{D}$

$$\begin{array}{c|c} \text{Dividendo} & \text{Divisor} \\ \cline{2-2} \vdots & \text{Cociente} \\ \vdots & \\ \hline \text{Residuo} & \end{array} \qquad \begin{array}{rr|l} 7 & 3 & 3 \\ \cline{3-3} -6 & & 24 \\ \cline{1-2} 1 & 3 & \\ -1 & 2 & \\ \cline{1-2} & 1 & \end{array} \qquad \frac{73}{3} = 24 + \frac{1}{3}$$

En forma análoga

Dados dos polinomio $P(x)$ y $Q(x)$, con $Q(x) \neq 0$, entonces existen dos polinomios únicos $C(x)$ y $R(x)$, tales que el grado de $R(x)$ es menor que el de $Q(x)$ y se cumple que:

$$P(x) = C(x) \cdot Q(x) + R(x) \qquad \text{o equivalentemente} \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

$P(x)$ se le llama dividendo, $Q(x)$ divisor, $C(x)$ cociente y $R(x)$ residuo

Para el proceso de la división, los polinomios se ordenan de mayor a menor exponente.

Realice la división del polinomio de $P(x) = 4x^4+3x^3+3x+1$ entre $Q(x) = 1-2x^2$.

R/ Los polinomios se ordenan

$$\begin{aligned} P(x) &= 4x^4 + 3x^3 + 0x^2 + 3x + 1 \\ Q(x) &= -2x^2 + 0x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccccccccc|ccccc} \boxed{4x^4} & + & 3x^3 & + & 0x^2 & + & 3x & + & 1 & & \boxed{-2x^2} & + & 0x & + & 1 \\ \cline{11-15} & & & & & & & & & & \boxed{-2x^2} & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc|ccccc} 4x^4 & + & 3x^3 & + & 0x^2 & + & 3x & + & 1 & -2x^2 & + & 0x & + & 1 \\ \cline{10-14} -(4x^2 & - & 0x^3 & - & 2x^2) & & & & & -2x^2 & & & & \\ \cline{1-5} & & 3x^3 & + & 2x^2 & & & & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc|ccccc} 4x^4 & + & 3x^3 & + & 0x^2 & + & \boxed{3x} & + & 1 & -2x^2 & + & 0x & + & 1 \\ \cline{10-14} -4x^2 & + & 0x^3 & + & 2x^2 & & \downarrow & & & -2x^2 & & & & \\ \cline{1-5} & & 3x^3 & + & 2x^2 & + & 3x & & & & & & & \end{array}$$

se repite
el proceso

$$\frac{4x^4 + 3x^3 + 3x + 1}{-2x^2 + 1} = -2x^2 - \frac{3}{2}x - 1 + \frac{\frac{9}{2}x + 2}{-2x^2 + 1}$$

Realice $(x^2+1) \div (x+1)$ R/ Los polinomios se ordenan
$$\begin{aligned} p(x) &= x^2+0x+1 \\ q(x) &= x+1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rr|l} x^2 & +1 & x+1 \\ \cline{3-3} & & x-1 \\ -x^2-x & & \\ \cline{1-2} & -x+1 & \\ & x+1 & \\ \cline{2-2} & 2 & \end{array}$$

por lo tanto: $\dfrac{x^2+1}{x+1} = x-1+\dfrac{2}{x+1}$

Considere los siguientes polinomios: $S(x) = 5x^4 - 7x^3 - 12x^2 - x + 1$

$T(x) = 5x^2 + 8x + 7 \quad N(x) = 12x - 6$

Determine un polinomio $M(x)$ de forma que al dividir el polinomio $S(x)$ entre $M(x)$ se obtenga como cociente a $T(x)$ y como residuo a $N(x)$.

$\dfrac{S(x)}{M(x)} = T(x) + \dfrac{N(x)}{M(x)}$ Despejando obtenemos: $M(x) = \dfrac{S(x)-N(x)}{T(x)}$

$$\begin{aligned} M(x) &= \frac{(5x^4-7x^3-12x^2-x+1)-(12x-6)}{5x^2+8x+7} \\ &= \frac{5x^4-7x^3-12x^2-13x+7}{5x^2+8x+7} = x^2-3x+1+\cancel{\frac{0}{5x^2+8x+7}} \end{aligned}$$

Nota: *Si al dividir el polinomio $P(x)$ entre el polinomio $Q(x)$ se obtiene un residuo $R(x) = 0$, entonces se dice que el polinomio $P(x)$ es divisible por $Q(x)$ o bien, que $Q(x)$ divide a $P(x)$, lo que significa que $P(x) = Q(x)C(x)$, con $C(x)$ el cociente de la división.*

División sintética: Se utiliza para dividir un polinomio P(x) entre el factor (x-c)

$P(x) = (x - c) \cdot C(x) + R(x)$ El grado de R(x) debe ser 0 luego es una constante.

$$\begin{array}{ccccccc|c} \boxed{a_n} & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 & \\ \downarrow & & & & & & & c \\ \hline \boxed{a_n} & & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc|c} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 & \\ \downarrow & \boxed{c \cdot a_n} & & & & & & \boxed{c} \\ \hline \boxed{a_n} & & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc|c} a_n & \boxed{a_{n-1}} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 & \\ \downarrow & \boxed{c \cdot a_n} & & & & & & c \\ \hline a_n & \boxed{b_{n-2}} & & & & & & \end{array}$$

El segundo término se obtiene después de sumar

Luego se repite el proceso hasta terminar.

Determine el cociente y residuo de la división:

$$(x^4 - x^3 + 2x - 1) \div (x - 3)$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & \\ & 3 & 6 & 18 & 60 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 6 & 20 & 59 & \end{array}$$

cociente: $x^3+2x^2+6x+20$

residuo: 59

2. Considere los polinomios $P(x) = x^3 + ax^2 + 5x + 1$, con a una constante real y $Q(x) = x - 1$.

   a) Utilice división sintética para determinar el valor de a, de forma que el residuo de la división $P(x) \div Q(x)$ sea cero.

   b) Utilice división sintética para determinar el valor de a, de forma que el cociente de la división $P(x) \div Q(x)$ sea $x^3 + 3x + 8$.

Respuesta

2. Considere los polinomios $P(x) = x^3 + ax^2 + 5x + 1$, con a una constante real y $Q(x) = x - 1$.

   a) Utilice división sintética para determinar el valor de a, de forma que el residuo de la división $P(x) \div Q(x)$ sea cero. R/ $a = -7$.

   b) Utilice división sintética para determinar el valor de a, de forma que el cociente de la división $P(x) \div Q(x)$ sea $x^3 + 3x + 8$.R/ $a = 2$.

2.5 Ceros de un polinomio. División sintética

Cero de un polinomio.

Sea $P(x)$ un polinomio de grado n en una variable, y sea c un número real, se dice que c es un cero del polinomio $P(x)$, si y solo si, $P(c) = 0$.

Ejemplo

Considere el polinomio $P(x) = 6x^3 - 18x^2 + 4x - 12$, verifique que 3 es un cero del polinomio dado.

Respuesta:
$$\begin{aligned} P(3) &= 6(3)^3 - 18(3)^2 + 4(3) - 12 \\ &= 6 \cdot 27 - 18 \cdot 9 + 12 - 12 \\ &= 162 - 162 + 12 - 12 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $P(3) = 0$, así 3 es un cero del polinomio.

Considere el polinomio $Q(x) = x^2 - x - 1$.

Verifique que $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ son ceros de $Q(x)$.

Solución

$$\begin{aligned}
Q\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - 1 = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{4} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 \\
&= \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 \\
&= \frac{6}{4} + \frac{2\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} - 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) &= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - 1 = \frac{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}{4} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} - 1 \\
&= \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} - 1 \\
&= \frac{6}{4} - \frac{2\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ son ceros de $Q(x)$.

Presentación realizada por Gilberto Vargas Mathey

Apuntes tomados de:

Expresiones algebraicas
Jeffry Chavarría folleto de Matemática General Julio 2016

Programa Geógebra para la elaboración de diagramas y dibujos varios

Apuntes no digitalizados para las lecciones del curso de matemática General
Profesor. Gilberto Vargas Mathey