Tema 3 Ecuaciones

L9 Retomar L8, 3.1 – 3.5

3. Ecuaciones

3.1 Definición de ecuación. Solución de una ecuación.

3.2 Ecuación lineal.

3.3 Problemas que involucran ecuaciones lineales

3.4 Ecuación cuadrática.

3.5 Problemas que involucran ecuaciones cuadráticas.

3.1 Definición de ecuación. Solución de una ecuación.

Definición 1 (Ecuación algebraica)
Una ecuación algebraica es una igualdad entre dos expresiones algebraicas denominadas miembros de la ecuación y en la que aparece datos conocidos tales como constantes reales y datos desconocidos llamados incógnitas y representados como variables o expresiones literales que denotan valores reales no conocidos.

$$\boxed{E_i(x) = E_d(x)} \quad (1)$$

Son ecuaciones algebraicas:

$$5x - 2 = 8x + 9$$

$$\frac{ax-b}{bx-c} - \frac{b}{3} = a$$

$$2\sqrt{3x} = 2x^2 + 1$$

$\boxed{=}$ Es la comparación entre las Expresiones algebraicas.

$\boxed{<}$ Si la comparación fuera con una desigualdad obtenemos;

$\boxed{E_i(x) < E_d(x)}$ y se llama inecuación

Definición 2 (Solución de una ecuación)
Dada una ecuación algebraica con una incógnita, y dado un número real α, se dice que α es una solución de la ecuación, si al sustituir α en la incógnita de la ecuación, se genera una identidad numérica, es decir, una igualdad verdadera.

$$\boxed{E_i(x) = E_d(x)}$$

Al sustituir la variable x se obtiene una igualdad verdadera o no ?

Definición 3 (Conjunto solución de una ecuación)
Dada una ecuación algebraica en una variable, se define el conjunto solución de la ecuación y se denota por S como el conjunto formado por todas las soluciones reales de la ecuación.

Resolver una ecuación se interpretará como encontrar el conjunto solución; por lo que en adelante, cada vez que se pide resolver una ecuación, se debe dar el conjunto solución como respuesta.

5 es una solución de $x^2 - 5 = 4x$, porque la sustitución nos da
LI: $5^2 - 5 = 25 - 5 = 20$ y
LD: $4 \cdot 5 = 20$,
y $20 = 20$ es un enunciado verdadero.

Las ecuaciones (1) y (2) tienen las mismas soluciones, son equivalentes (lineal y canónica) Despejar la variable

3.2 Ecuación lineal.

Una ecuación que se puede escribir de la forma $ax + b = 0$, donde $a \neq 0$	$4x + 5 = 0$ $4x = -5$ $x = -\frac{5}{4}$

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones

$$\text{si} \quad \overset{(1)}{ax + b = 0}, \quad \text{entonces} \quad \overset{(2)}{x = -\frac{b}{a}}$$

Resolvemos una ecuación al hacer una lista de ecuaciones equivalentes, cada una más sencilla que la precedente, terminando la lista con una ecuación de soluciones fáciles.

Resolver la ecuación $6x - 7 = 2x + 5$

SOLUCIÓN Las ecuaciones de la lista siguiente son equivalentes:

$6x - 7 = 2x + 5$	enunciado
$(6x - 7) + 7 = (2x + 5) + 7$	sumar 7
$6x = 2x + 12$	simplificar
$6x - 2x = (2x + 12) - 2x$	restar $2x$
$4x = 12$	simplificar
$\dfrac{4x}{4} = \dfrac{12}{4}$	dividir entre 4
$x = 3$	simplificar

Prueba $x = 3$ LI: $6(3) - 7 = 18 - 7 = 11$

LD: $2(3) + 5 = 6 + 5 = 11$

Como $11 = 11$ es un enunciado verdadero, $x = 3$ es prueba de solución.

3.4 Ecuación cuadrática en x

Definición	Ejemplos
Una ecuación que puede escribirse en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$	$4x^2 = 8 - 11x$ $x(3 + x) = 5$ $4x = x^2$

Teorema del factor cero

Si p y q son expresiones algebraicas, entonces

$$pq = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad p = 0 \quad \text{o} \quad q = 0.$$

Se deduce que si $ax^2 + bx + c$ se puede escribir como un producto de dos polinomios de primer grado, entonces se pueden hallar soluciones al igualar a 0 cada uno de los factores

EJEMPLO 1 Resolución de una ecuación por factorización

Resuelva la ecuación $3x^2 = 10 - x$

$3x^2 = 10 - x$	enunciado
$3x^2 + x - 10 = 0$	sumar $x - 10$
$(3x - 5)(x + 2) = 0$	factorizar
$3x - 5 = 0, \quad x + 2 = 0$	teorema del factor cero
$x = \frac{5}{3}, \qquad x = -2$	despejar x

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación dada son $\frac{5}{3}$ y -2.

Si $x^2 = d$, entonces $x = \pm\sqrt{d}$.

Resolución de una ecuación cuadrática al completar el cuadrado

Resuelva la ecuación $x^2 - 5x + 3 = 0$

$x^2 - 5x + 3 = 0$	enunciado
$x^2 - 5x = -3$	reste 3
$x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -3 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$	completar el cuadrado, sumando $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ a *ambos* lados
$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$	ecuación equivalente
$x - \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{13}{4}}$	tome la raíz cuadrada
$x = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$	sumar $\frac{5}{2}$

Entonces, las soluciones de la ecuación son $\left(5 + \sqrt{13}\right)/2 \approx 4.3$ y $\left(5 - \sqrt{13}\right)/2 \approx 0.7$

Si $a \neq 0$, las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Resolver la ecuación dada por: $21x^2 - 13x - 20 = 0$

Usando la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4(21)(-20)}}{2(21)}$$

$$= \frac{13 \pm \sqrt{169 + 1680}}{42} = \frac{13 \pm \sqrt{1849}}{42}$$

$$x = \frac{13 \pm 43}{42}$$

$$x = \frac{13 + 43}{42} = \frac{4}{3};$$

$$x = \frac{13 - 43}{42} = -\frac{5}{7}$$

Factores: $3 \cdot 7\left(x - \frac{4}{3}\right)\left(x + \frac{5}{7}\right) = (3x - 4)(7x + 5)$

Sistema de ecuaciones lineales

Toda igualdad de la forma ax +by = c donde a, b, c Є R es una ecuación lineal con dos incógnitas.

Un sistema 2x2, pues está formado por dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. La solución de un sistema es la pareja (x , y) que satisface las dos ecuaciones simultáneamente.

Para resolver un sistema 2x2 utilizamos el procedimiento despeje y sustitución, esto es: de una ecuación despejamos una variable y la sustituimos en la otra ecuación.

Ejemplo: Resolver el sistema:

$$3x - y = 7 \quad (1)$$

$$2x + y = 8 \quad (2)$$

De (1) despejamos Y y luego Se sustituye en (2)

3.3 Problemas que involucran ecuaciones lineales

1. Problemas con sistemas:

1) Un cable de $42\,m$ de longitud es dividido en dos partes, de modo que una parte es dos veces la longitud de la otra. Halle la longitud de cada pieza.

3) El ganador de la lotería quiere invertir su premio de \$100 000 en dos inversiones, una al 8% la otra al 10% anuales. ¿Cuánto debería invertir en cada una de ellas, si desea ingresos anuales por \$8 500?

22) Seiscientas personas asisten al estreno de una película. Los boletos para adultos cuestan \$5 y los de niños \$2. Si la taquilla recibe un total de \$2 400, ¿cuántos niños asistieron al estreno?

Ejemplo 48 (Velocidad)

Un tren emplea cierto tiempo en recorrer 240 km. Si la velocidad media hubiera sido 20 km/h mayor a la velocidad media real del tren, el mismo hubiera tardado dos horas menos en recorrer dicha distancia.¿Cuánto tiempo tardó el tren en recorrer los 240km?

Escenarios	Distancia	Velocidad	Tiempo
Recorrido Real	240	v	t
Recorrido Supuesto	240	$v+20$	$t-2$

$$\begin{cases} vt = 240 \\ (v+20)(t-2) = 240 \end{cases}$$

$$t = \frac{240}{v+20} + 2 \qquad \frac{240}{v+20} + 2 = \frac{240}{v}$$

$v = 40$ km/h. Luego $t = \frac{t}{v} = \frac{240}{40} = 6$ horas.

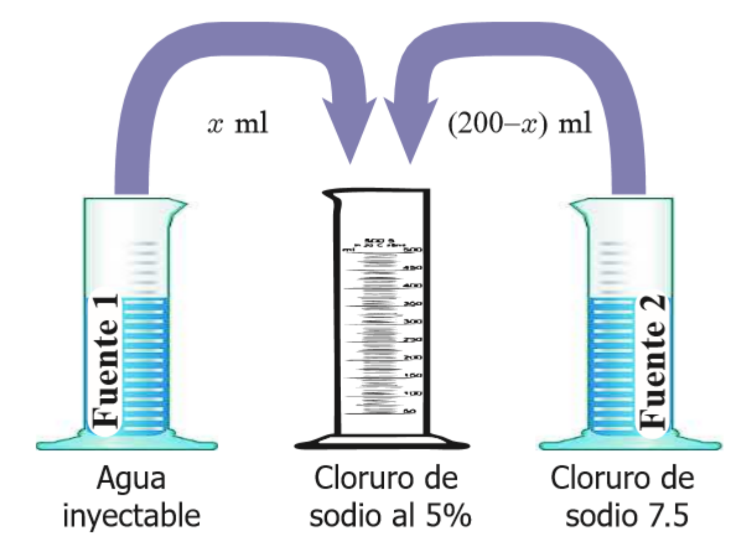
2. Problemas con Mezclas (Sistemas):

25) La plata británica Sterling es una aleación que contiene 7,5% de cobre en peso. ¿Cuántos gramos de cobre puro y cuántos gramos de plata Sterling deben emplearse para preparar 200 g de una aleación de cobre-plata con 10% de cobre en peso?

24) En cierta prueba médica diseñada para medir la tolerancia a los carbohidratos, un adulto ingiere 7 oz (onzas) de una solución de glucosa al 30%; cuando la prueba se aplica a un niño, la concentración de glucosa debe disminuirse al 20%. ¿Cuánta solución de glucosa al 30% y cuánta agua se necesita con el fin de preparar 7 oz de una solución de glucosa al 20%?

Ejemplo 52 (Mezclas químicas)

El **cloruro de sodio 7.5** es una mezcla que contiene agua inyectable y 7.5 % de cloruro de sodio. Está indicada para restablecer las pérdidas de sodio, favorecer el equilibrio electrolítico, incrementar el volumen plasmático y ritmo cardiaco de los bovinos, equinos, ovinos, caprinos y cerdos. Un veterinario requiere obtener 200 ml de una solución de agua inyectable que tenga 5 % de cloruro de sodio. ¿Cuántos mililitros de agua inyectable pura y cuántos mililitros de **cloruro de sodio 7.5** deben emplearse para obtener la solución requerida?



Sea x la cantidad de mililitros de agua inyectable que se requiere para la mezcla, por lo que se requerirá (200 – x) mililitros de la solución de cloruro de sodio 7.5.

	Fuente 1	Fuente 2	Mezcla final
Agua inyectable	$100\,\% \cdot x$ ml	$92.5\,\% \cdot (200 - x)$ ml	$95\,\% \cdot 200$ ml
Cloruro de sodio	$0\,\% \cdot x$ ml	$7.5\,\% \cdot (200 - x)$ ml	$5\,\% \cdot 200$ ml

- **Opción 1:** Igualando cantidades de agua inyectable.

$$100\,\% \cdot x + 92.5\,\%(200 - x) = 95\,\% \cdot 200$$

- **Opción 2:** Igualando las cantidades de cloruro de sodio.

$$0\,\% \cdot x + 7.5\,\%(200 - x) = 5\,\% \cdot 200$$

Respuesta: $x = \frac{200}{3} \approx 66.6667$

3.5 Problemas que involucran ecuaciones cuadráticas.

4) El propietario de un edificio de departamentos puede rentar las 50 habitaciones si la renta es de \$150 al mes por habitación. Por cada incremento de \$5 en la mensualidad de la renta, un departamento quedará vacante sin posibilidad de rentarlo. ¿Qué renta deberá fijar el propietario para obtener un ingreso mensual de \$8 000?

8) Se rodea por un camino de ancho uniforme un terreno rectangular de dimensiones $26\,m$ por $30\,m$. Si se sabe que el área del camino es de $240\,m^2$, determine el ancho del camino.

19) Una bola de beisbol es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de $64\,m/s$. El número de metros m sobre el suelo después de t segundos está dado por la ecuación $m = -16t^2 + 64t$.

(a) ¿En cuánto tiempo alcanza la pelota una altura de $48\,m$ sobre el suelo?

(b) ¿Cuándo regresará al piso?

1. Problemas con economía (costos, ingresos, utilidades).

6) Una compañía fraccionadora compra una parcela en \$7 200. Después de vender todo excepto 20 hectáreas, con una ganancia de \$30 por hectárea sobre su costo original, el costo total de la parcela se recuperó. ¿Cuántas hectáreas fueron vendidas?

13) El costo de instalación de aislantes en una casa particular de dos recámaras es de \$1 080. Los costos actuales de calefacción son, en promedio, de \$60 mensuales, pero se espera que el aislante reduzca los costos de calefacción en un 10%. ¿Cuántos meses se necesitarán para recuperar el costo del aislante?

2. Problemas con trabajo:

Ejemplo 47 (Trabajo conjunto) Andrés y David son dos pintores de brocha gorda. El tiempo que tarda Andrés en pintar un metro cuadrado es un minuto menos que el tiempo que tarda David en pintar la misma cantidad. Trabajando juntos duran exactamente una hora en pintar 27 metros cuadrados. ¿Determine cuanto tiempo tardarían cada uno en pintar los 27 metros cuadrados sin ayuda?

Sea T el tiempo en minutos que tarda Andrés en pintar un metro cuadrado, de este modo David tardaría T +1 minuto en pintar un metro cuadrado

	Andrés	**David**
Tiempo que tarda en pintar 1 m^2	T min	$(T+1)$ min
Rapidez, m^2/min	$\frac{1}{T}$ m^2/min	$\frac{1}{T+1}$ m^2/min

Tabla 1.3: Datos de la rapidez en m^2/min de los pintores

Por tanto, $\frac{1}{T} + \frac{1}{T+1}$ representa la rapidez en m^2/min que tiene los dos pintores trabajando en conjunto. Es decir, la rapidez con que pintan juntos es de $\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T+1}\right)$ m^2/min.

Por otro lado, trabajando juntos duran 60 min pintanto 27 m^2, de donde es posible calcular la velocidad del trabajo en conjunto. Cada minuto se pintará exactamente $\frac{27}{60} = \frac{9}{20}$ m^2, de donde se tiene que la rapidez conjunta del trabajo será $\frac{9}{20}$ m^2/min.

$$\frac{1}{T} + \frac{1}{T+1} = \frac{9}{20}$$

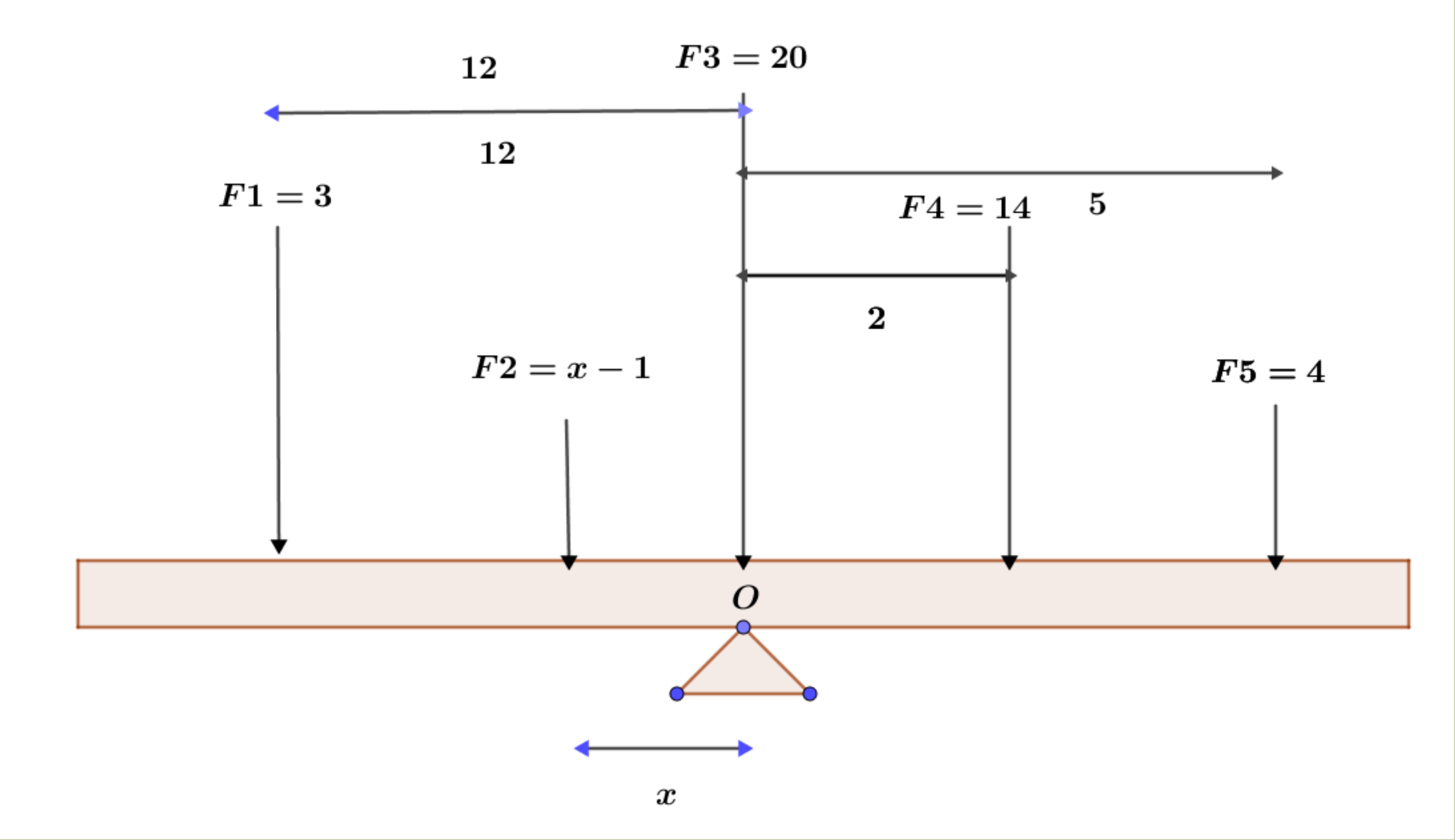
$$\begin{aligned} &\Longrightarrow && -9T^2 + 31T + 20 = 0 \\ &\Longleftrightarrow && (9T+5)(-T+4) = 0 \\ &\Longleftrightarrow && T = \frac{-5}{9} \quad \vee \quad T = 4 \end{aligned}$$

Como el tiempo debe ser positivo,

Andrés pinta un metro cuadrado en 4 min y David dura 5 min pintando la misma área.

Andrés durará 1 hora y 48 minuto en pintar los 27 m^2.

Determine el valor de x para obtener el equilibrio.



Aplicación a la física

Presentación realizada por Gilberto Vargas Mathey

Apuntes tomados de:

https://juguemate.blogspot.com/2009/05/sistemas-de-ecuaciones-lineales
2x2_6343.html

Expresiones algebraicas
Jeffry Chavarría folleto de Matemática General Julio 2016

Swokowski /, Cole, Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. 12ª Edición

Programa Geógebra para la elaboración de diagramas y dibujos varios

Prácticas de matemática General Cristhian Páez

Apuntes no digitalizados para las lecciones del curso de matemática General
Profesor. Gilberto Vargas Mathey