Tema 2 Expresiones Algebraicas

L5	Retomar L4, 2.7

2. **Expresiones Algebraicas**

2.7 Factorización de polinomios. Completetación de cuadrados, fórmula general, polinomios de grado mayor a 2, división sintética. Segunda parte

Factorización de polinomios de segundo grado en una variable.

Una función polinomial de la forma $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

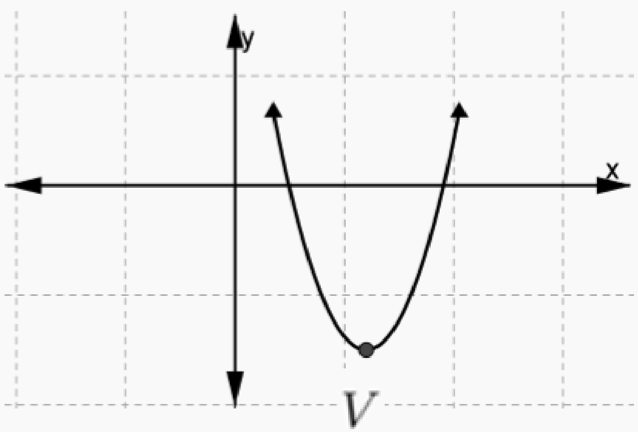
$$f(x) = ax^2 + bx + c;\ a, b, c, \in \mathbb{R},\ a \neq 0$$

recibe el nombre de función cuadrática

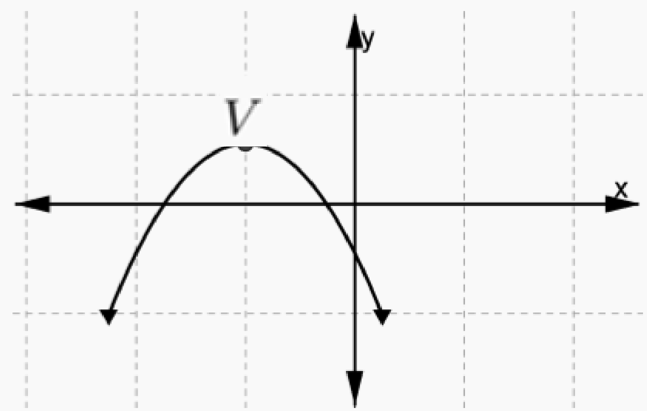
Gráfica de la función cuadrática

La gráfica de la función cuadrática describe una parábola que puede ser:

Convexa si $a > 0$ y tiene un punto mínimo



Cóncava si $a < 0$ y tiene un punto máximo



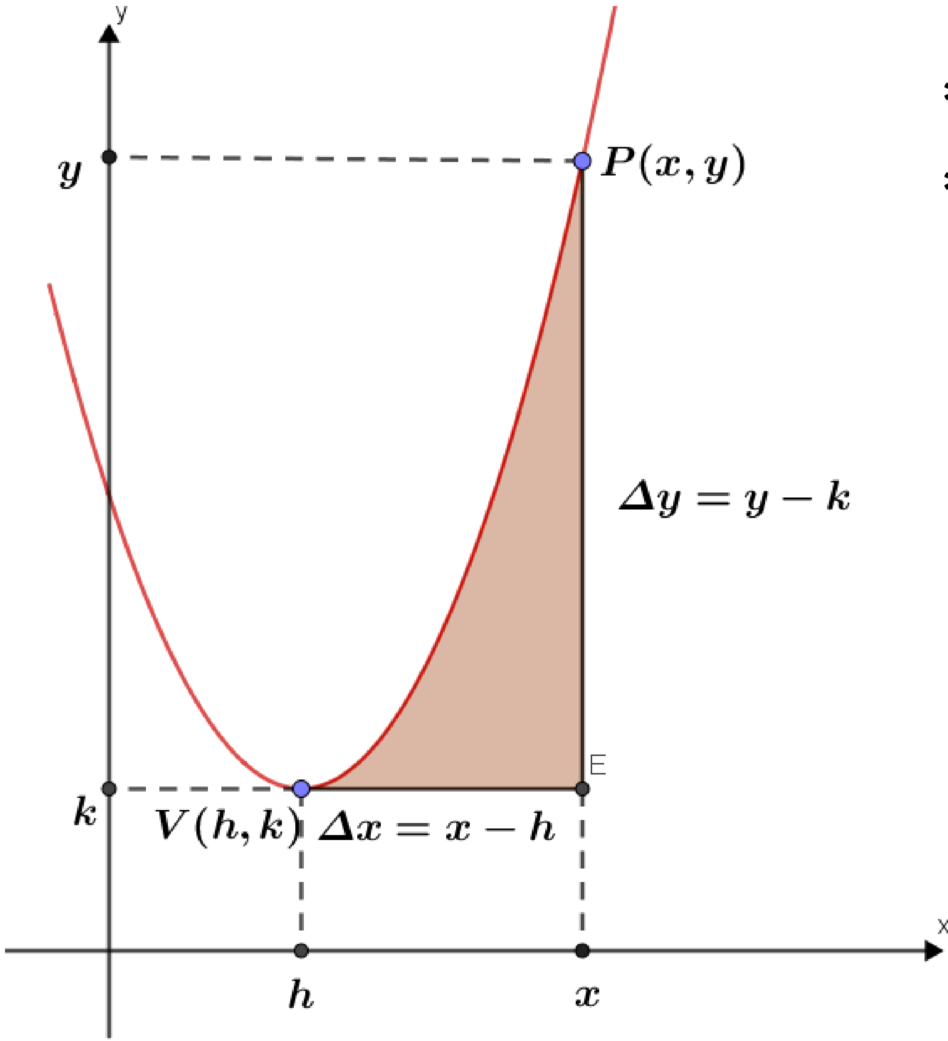
El punto mínimo o máximo se determina calculando el vértice de la gráfica: V

$$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

1. Completación de cuadrados.

$$f(x) = ax^2 + bx + c;\ a, b, c, \in \mathbb{R},\ a \neq 0$$

$$f(x) = a(x-h)^2 + k \qquad h = \frac{-b}{2a}, k = \frac{-\Delta}{4a} \qquad V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$



* Normaliza

* completa

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

Completar y factorizar cuando se pueda:

$$f(x) = 5x^2 + 4x + 8$$

$$g(x) = 8x^2 - 4x - 2$$

$$h(x) = 4x^2 + 4x + 1$$

$$f(x) = \left(\sqrt{a}x - \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

Factorización utilizado la fórmula general y el teorema del factor.

Sea $P(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$. Sea $\Delta = b^2 - 4ac$ el discriminante de $P(x)$, entonces:

1. Si $\Delta > 0$, entonces el polinomio tiene dos ceros reales distintos, y estos están dados por:

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\boxed{P(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)}$

2. Si $\Delta = 0$, el polinomio tiene dos ceros reales iguales, y están dados por:

$$\alpha = \beta = \frac{-b}{2a}$$

pues $\sqrt{\Delta} = 0$, por lo que α y β coinciden.

$\boxed{P(x) = a(x - \alpha)^2}$

3. Si $\Delta < 0$, entonces el polinomio $P(x)$ no posee ceros reales.

Utilice la fórmula general y el teorema del factor para factorizar en $\mathbb{R}$

1. $P(x) = 49x^2 - 42x + 9.$
2. $Q(z) = -10z + 3z^2 - 8.$
3. $W(x) = 2x^2 - 7x + 15.$

Una bicuadrática

Factorización por inspección o tanteo

Sea $P(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b y c números enteros, un polinomio factorizable en $\mathbb{Q}$; es decir, $P(x)$ posee ceros racionales, entonces la factorización de $P(x)$ debe tener la forma:

$$P(x) = (px + q)(rx + s)$$

$$\begin{aligned} (px+q)(rx+s) &= prx^2 + psx + rqx + qs \\ &= prx^2 + (ps + rq)x + qs \end{aligned}$$

El método consiste en **1 y 2** asignar valores a:

- p y r de manera que su producto sea a.
- q y s de manera que
- su producto sea c.

$$\begin{aligned} ax^2 &= px \cdot rx = prx^2 \\ bx &= psx + qrx = (ps + rq)x \\ c &= qs \end{aligned}$$

Pero **3** tratando de encontrar una combinación tal que la suma de los productos cruzados ps + rq sea b.

$$\begin{array}{ccccccc} P(x) = & ax^2 & + & bx & + & c & \\ & \| & & & & \| & \| \\ & px & + & & & q & \longrightarrow rqx \\ & \cdot & & & & \cdot & + \\ & rx & + & & & s & \longrightarrow psx \end{array}$$

Use el método de inspeción o tanteo para factorizar los siguientes polinomios.

1. $Q(x) = 49x^2 - 42x + 9.$

2. $W(x) = -2x^2 - 7x + 15.$

3. $M(y) = 3y^2 + y - 2.$

Respuesta # 1

$$Q(x) = \begin{array}{ccccccc} 49x^2 & - & 42x & + & 9 \\ \hline \| & & & & \| \\ 7x & & + & & -3 \\ \cdot & & & & \cdot \\ 7x & & + & & -3 \end{array}$$

Además, los valores anteriores cumplen que:

$$7x(-3) + 7x(-3) = -21x + -21x = -42x$$

Por lo tanto, la factorización de $Q(x)$ corresponde a $\boxed{(7x - 3)(7x - 3)}$

Factorización de polinomios en una variable de grado mayor que dos (uso de la división sintética).

Teorema 6

Todo polinomio $P(x)$ puede ser expresado como producto de factores lineales y cuadráticos irreducibles. Por lo que los únicos factores admisibles en la factorización completa de un polinomio son dichos factores.

Proceso:

Paso 1: Determine una lista con los posibles ceros racionales del polinomio, producto de la aplicación del teorema de los ceros racionales.

Paso 2: Utilice el teorema del residuo y la división sintética para evaluar cada uno de los elementos de la lista anterior en el polinomio para identificar cuales de dichos elementos son o no ceros del polinomio.

Paso 3: Cada vez que un elemento α en la lista resulte ser un cero del polinomio, se procede a utilizar el teorema del factor para establecer el factor (x - α). Dado que se tiene la división sintética para α, por el algoritmo de la división se tiene que: $P(x) = (x - \alpha)C(x)$ con C(x) el cociente de dicha división.

Paso 4: Luego se continúa factorizando C(x) para lo cual se repite el paso 2 y paso 3. Se puede utilizar la misma lista de posibles ceros racionales que se determinó para P(x), pues todo cero racionales de C(x) debe estar en dicha lista.

Factorice completamente el polinomio $P(x) = 2x^3 - x^2 - 18x + 9$.

Solución

- Los divisores del término independiente: $D_9 = \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$.
- Los divisores del coeficiente principal: $D_2 = \{\pm 1, \pm 2\}$.
- Los ceros racionales de $P(x)$ deben estar en el siguiente conjunto formado por el cociente de los divisores de 9 entre los divisores de 2:

$$L = \left\{ \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm 3, \pm\frac{3}{2}, \pm 9, \pm\frac{9}{2} \right\}$$

Para evaluar el polinomio en los posibles ceros, se empleará la división sintética y el teorema de residuo, para lo cual se procede en orden:

$$\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & -18 & 9 & \\ & -2 & 3 & 15 & -1 \\ \hline 2 & -3 & -15 & 24 & \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & -18 & 9 & \\ & 2 & 1 & -17 & 1 \\ \hline 2 & 1 & -17 & -8 & \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & -18 & 9 & \\ & 1 & 0 & -9 & \frac{1}{2} \\ \hline 2 & 0 & -18 & 0 & \end{array}$$

$P(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(2x^2 - 18\right)$ $C(x) = 2x^2 - 18$

$$C(x) = (x+3)(2x-6)$$

$$\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & -18 & \\ & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 2 & 1 & -\frac{35}{2} & \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & -18 & \\ & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \hline 2 & -1 & -\frac{35}{2} & \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & -18 & \\ & -6 & 18 & -3 \\ \hline 2 & -6 & 0 & \end{array}$$

$$P(x) = \left(x - \tfrac{1}{2}\right)(x+3)(2x-6).$$

Factorice completamente $H(x) = -8x^3 + 14x^2 - 7x + 1$.

- $D_1 = \{\pm 1\}$.
- $D_{-8} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$.
- El conjunto de los posibles ceros es $L = \left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}\right\}$

Evaluando en el polinomio

$$\begin{array}{rrrr|r} -8 & 14 & -7 & 1 & \\ & 8 & -22 & 29 & -1 \\ \hline -8 & 22 & -29 & 30 & \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr|r} -8 & 14 & -7 & 1 & \\ & -8 & 6 & -1 & 1 \\ \hline -8 & 6 & -1 & 0 & \end{array}$$

$$H(x) = (x-1)\left(-8x^2 + 6x - 1\right)$$

$$\begin{array}{rcccccc} C(x) = & -8x^2 & + & 6x & + & -1 \\ \hline & \| & & & & \| \\ & -4x & & + & & 1 \\ & \cdot & & & & \cdot \\ & 2x & & + & & -1 \end{array}$$

$C(x)$ corresponde a $(-4x+1)(2x-1)$

Finalmente:

$$H(x) = (x-1)(-4x+1)(2x-1)$$

Métodos combinados de factorización

Factorizar completamente:

$4x^2a^3 - b^3y^2 - a^3y^2 + 4x^2b^3$

$12ab + 4a^2 + ab^2 - 81a^2b^2$

$-2xy - a^2b^2 - \left(-x^2 - y^2\right).$

$-v^5 + 7v^4 - 10v^3 - v^2 + 7v - 10.$

$5x^2y^2 + 30x^2y + 45x^2 - y^2 - 6y - 9.$

$b^{4+k} + a^4b^k - 2a^2b^{k+2}$, con $a, b \in \mathbb{R}$

$2(a+b)^2 + (a+b)(a-b) - (a-b)^2$

$4x^4 + 4x^3 - 13x^2 - 5x + 10$

$4x^4 + 4x^3 - 13x^2 - 5x + 10$

$-2x^4 + 15x^3 - 29x^2 + 5x + 3$

$3x^3 + 7x^2 + x - 2$

$3x^4 + 2x^2 - 2x^3 - 1 - 2x$

$4a^2 + b^2 - 9x^2y^2 - 4ab$

$6x^3 - 4x - 4x^4 + 6$

Presentación realizada por Gilberto Vargas Mathey

Apuntes tomados de:

Expresiones algebraicas
Jeffry Chavarría , …, Folleto de Matemática General Julio 2016

Programa Geógebra para la elaboración de diagramas y dibujos varios

Daniel Mena y Kattia Rodríguez, Fundamentos de Precálculo parte 2. Ucr

Apuntes no digitalizados para las lecciones del curso de matemática General
Profesor. Gilberto Vargas Mathey