Tema 2 Expresiones Algebraicas

L4	Retomar L3, 2.6, 2.7 y ejercicios

2. **Expresiones Algebraicas**

2.6 Teorema del residuo y teorema del factor

2.7 Factorización de polinomios. Factor común, agrupación, fórmulas notables.

Ejercicio adicional

Si $p, q \in \mathbb{R}$, con $p < q$, simplifique al máximo la expresión:

$$\frac{\sqrt{(p+q)^2 - 4pq} - (p+q)}{2}$$

Enumerar los 8 pasos de la respuesta.

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{(p+q)^2 - 4pq} - (p+q)}{2} &= \frac{\sqrt{p^2 + 2pq + q^2 - 4pq} - (p+q)}{2} \\
&= \frac{\sqrt{p^2 - 2pq + q^2} - (p+q)}{2} \\
&= \frac{\sqrt{(p-q)^2} - (p+q)}{2} \\
&= \frac{|p-q| - (p+q)}{2} \\
&= \frac{-(p-q) - (p+q)}{2} \\
&= \frac{-p + q - p - q}{2} \\
&= -p
\end{aligned}$$

2.6 Teorema del residuo y teorema del factor

Teorema del residuo

$$P(x) = (x - c) \cdot Q(x) + R(x)$$

Si $P(x)$ es un polinomio y c es un número real, entonces el residuo de la división $P(x) \div (x - c)$ es constante e igual a $P(c)$, donde $P(c)$ corresponde a la constante que se obtiene al evaluar el polinomio en c.

Verifique el teorema del residuo evaluando el polinomio

$$p(x) = 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 2x + 4 \text{ para } x = 3$$

$$\begin{aligned} P(3) &= 2(3)^4 - 5(3)^3 + 2(3)^2 - 2 \cdot 3 + 4 \\ &= 2 \cdot 81 - 5 \cdot 27 + 2 \cdot 9 - 2 \cdot 3 + 4 \\ &= 162 - 135 + 18 - 6 + 4 \quad = \quad 43 \end{aligned}$$

Por lo que $P(3) = 43.$

Por lo que $P(3) = 43$. Ahora, se calculará el valor de $P(3)$ haciendo uso de la división sintética de $P(x)$ entre $(x - 3)$.

$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & -5 & 2 & -2 & 4 & \\ & 6 & 3 & 15 & 39 & 3 \\ \hline 2 & 1 & 5 & 13 & 43 & \end{array}$$

Considere el polinomio P(x) dado por

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + kx - 3k$$

Determine el o los valores de k, k real, tal que el residuo que se obtiene al dividir P(x) por x – 5 sea igual al residuo que se obtiene al dividir P(x) por x - 2.

R/

$P(5)$: residuo que se obtiene al dividir el polinomio $P(x)$ por $x - 5$.
$P(-2)$: residuo que se obtiene al dividir el polinomio $P(x)$ por $x + 2$.

$$P(5) = P(-2)$$

Teorema del factor

Sea $P(x)$ un polinomio de grado n, con $n \geqslant 1$; y sea $Q(x)$ un polinomio no constante de grado menor o igual que n; se dice que $Q(x)$ es un factor de $P(x)$, si y solo si, $P(x) = C(x)Q(x)$, donde $C(x)$ es un polinomio. Además, se dice que $Q(x)$ es un factor irreducible de $P(x)$ si $Q(x)$ es factor de $P(x)$ y $Q(x)$ no tiene factores cuyo grado sea menor que el grado de $Q(x)$.

Nota: *Es posible notar que la igualdad $P(x) = C(x)Q(x)$ se puede expresar como $P(x) = C(x)Q(x)+0$ que corresponde al algoritmo de la división con residuo cero. Por lo que las siguientes proposiciones son equivalentes para $P(x)$ y $Q(x)$ dados en la definición de factor:*

- *$Q(x)$ es un factor de $P(x)$.*
- *$P(x)$ es divisible entre $Q(x)$.*
- *$Q(x)$ divide a $P(x)$.*
- *La división de $P(x)$ entre $Q(x)$ tiene residuo cero.*
- *Existe un polinomio $C(x)$ tal que $P(x) = C(x)Q(x)$.*

Teorema 2 (Teorema del factor)
Sea $P(x)$ un polinomio de grado n con $n \geqslant 1$ y sea c una constante real. Si c es un cero de $P(x)$, entonces $(x - c)$ es un factor de $P(x)$.

Ejemplo 50

Considere el polinomio $P(x) = 2x^3 + 4x^2 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{2}$.

1. Verifique que -1 y $\frac{1}{2}$ son ceros de $P(x)$.

2. Use el teorema del factor para determinar dos factores distintos de $P(x)$.

R/ Se calculan las imágenes de -1 y de 1/2

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \\ & -2 & -2 & \frac{3}{2} & -1 \\ \hline 2 & 2 & -\frac{3}{2} & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \\ & 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 2 & 5 & 3 & 0 & \end{array}$$

Los factores son: $(x - -1)$ y $(x - \frac{1}{2})$

Comentar como se calculan los otros factores

Teorema 4 (Ceros racionales de un polinomio)
Si el polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ tiene un cero racional c, con $c = \dfrac{m}{n}$, donde m y n son enteros sin factores comunes y $n \neq 0$, entonces m es un divisor de a_0 y n un divisor de a_n.

Determine los ceros racionales del polinomio $P(x) = 4x^3 - 9x^2 - 10x + 3$.

$$D_3 = \{\pm 1, \pm 3\} \quad D_4 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\} \qquad \frac{D_3}{D_4} = \{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm 3, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{4}\}$$

$$\boxed{\begin{array}{rrrr|r} 4 & -9 & -10 & 3 & \\ & -4 & 13 & -3 & -1 \\ \hline 4 & -13 & 3 & 0 & \end{array}} \quad \begin{array}{rrrr|r} 4 & -9 & -10 & 3 & \\ & 4 & -5 & -15 & 1 \\ \hline 4 & -5 & -15 & -12 & \end{array} \quad \begin{array}{rrrr|r} 4 & -9 & -10 & 3 & \\ & -1 & \frac{5}{2} & \frac{15}{8} & -\frac{1}{4} \\ \hline 4 & -10 & -\frac{15}{2} & \frac{39}{8} & \end{array} \quad \boxed{\begin{array}{rrrr|r} 4 & -9 & -10 & 3 & \\ & 1 & -2 & -3 & \frac{1}{4} \\ \hline 4 & -8 & -12 & 0 & \end{array}}$$

$$\begin{array}{rrrr|r} 4 & -9 & -10 & 3 & \\ & -2 & \frac{11}{2} & \frac{9}{4} & -\frac{1}{2} \\ \hline 4 & -11 & -\frac{9}{2} & \frac{21}{4} & \end{array} \quad \begin{array}{rrrr|r} 4 & -9 & -10 & 3 & \\ & 2 & -\frac{7}{2} & -\frac{27}{4} & \frac{1}{2} \\ \hline 4 & -7 & -\frac{27}{2} & -\frac{15}{4} & \end{array} \quad \begin{array}{rrrr|r} 4 & -9 & -10 & 3 & \\ & -12 & 63 & -159 & -3 \\ \hline 4 & -21 & 53 & -156 & \end{array} \quad \boxed{\begin{array}{rrrr|r} 4 & -9 & -10 & 3 & \\ & 12 & 9 & -3 & 3 \\ \hline 4 & 3 & -1 & 0 & \end{array}}$$

por lo que 3, $\frac{1}{4}$ y -1 son los ceros racionales de $P(x)$

2.7 Factorización de polinomios. Factor común, agrupación, fórmulas notables (primera parte), división sintética, completación de cuadrados, grado mayor a 2. (segunda parte).

Primera parte

En aritmética, factorizar un número entero significa expresar dicho número como la multiplicación de dos o más enteros, donde ninguno de ellos es uno.

Factorizar completamente un número corresponde a expresarlo como producto de factores primos, de manera que no sea posible seguir factorizando. La factorización completa de un número se denomina factorización prima. Además, a excepción del orden de los factores, la factorización prima de un número es única.

La factorización completa o factorización prima de 315 es $3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ ó equivalentemente $3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

Similar que en la factorización de números enteros, factorizar un polinomio es expresarlo como el producto de dos o más polinomios donde ninguno de ellos es constante. Además, se dice que un polinomio está completamente factorizado, si se expresa como producto de factores irreducibles.

Factorizar $P(x) = x^2 + x$, es expresarlo como $P(x) = x(x+1)$. Además, al ser producto de factores lineales, y los factores lineales son irreducibles, entonces se dice que $P(x)$ está completamente factorizado.

Factorizar $S(x) = x^3 - x$, es expresarlo como $S(x) = x(x^2 - 1)$

La factorización completa es $S(x) = x(x+1)(x-1)$.

Factorización por factor común

$$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})(\forall c \in \mathbb{R})\,[ab + ac = a(b+c)]$$

a se llama el factor común

$$a + b = c \cdot \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)$$

Recuerde que $a - b = -(b - a)$

Factorice completamente $84x^6y^7z^4 + 126x^4y^6z^3 - 42x^3y^5z^4$

Factorización por agrupación

$$a + b + c + d + e = (a + d) + (c + b + e) = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 + f_4 \cdot f_5 = g \cdot h$$

se debe agrupar de manera que:

- los grupos se puedan factorizar
- la suma de los grupos factorizados se pueda factorizar

(generalmente factor común)

Factorice completamente $a^2x + 4b^2x + a^2y + 4b^2y.$

Factorización por fórmulas notables

	Multiplicación		Producto notables
1)	$(a+b)^2$	$=$	$a^2+2ab+b^2$
2)	$(a-b)^2$	$=$	$a^2-2ab+b^2$
3)	$(a+b)(a-b)$	$=$	a^2-b^2
4)	$(a+b)^3$	$=$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
5)	$(a-b)^3$	$=$	$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
6)	$(a+b)(a^2-ab+b^2)$	$=$	a^3+b^3
7)	$(a-b)(a^2+ab+b^2)$	$=$	a^3-b^3

$$N1+N2+N3=(\sqrt{N1}+\sqrt{N3})^2 \text{ si } 2\sqrt{N1}\sqrt{N3}=N2$$

$$M-N=(\sqrt{M}-\sqrt{N})(\sqrt{M}+\sqrt{N})$$

Factorizar $4y^2 + 12y + 9$

Solución: Se estudia la posibilidad de expresar este trinomio como

$a^2 + 2ab + b^2$ Entonces: $4y^2 = a^2 \quad 9 = b^2$ y con ello

se encuentran a y b. Ahora con estos valores de a y b se verifica

si se satisface o no $2ab = 12y$

En el caso en que la respuesta sea afirmativa, se tiene que:

$$4y^2 + 12y + 9 = \overbrace{(2y)^2}^{a^2} + \underbrace{2\overbrace{(2y)}^{a}\overbrace{3}^{b}}_{} + \overbrace{3^2}^{b^2} = \overbrace{(2y+3)^2}^{(a+b)^2}$$

Finalmente, la factorización del polinomio

$4y^2 + 12y + 9$ corresponde a $(2y + 3)^2$.

Factorice completamente las expresiones siguientes

1. $y^3x^2 - yx^4 + 4y^3 - 4yx^2$
2. $a^3 + 2bx^2y^2 - 2a^2b - ax^2y^2$
3. $4a^2 + b^2 - 9x^2y^2 - 4ab$
4. $27x^3 - 9x^2 - 27x + 9$
5. $2x^2 - y^2 - 6x^3 + 3xy^2$
6. $x^4 - 1 - y^2 + 2y$
7. $x^4 + 5b^2 - b^2x^2 - 5x^2$
8. $a^3x^2 + a^3x + a^3 - 8x^2 - 8x - 8$
9. $4m^2y^2 - 12m^2y + 9m^2 - 4y^4 + 12y^3 - 9y^2$
10. $ax^2 - 5am^3 + am^3x^2 - 5a$
11. $8xt^3y^n + 8t^3y^n - xy^{6+n} - y^{6+n}$, con $n \in \mathbb{N}$
12. $a^{4+n} + 2a^nbx^3y^3 - 2a^{3+n}b - a^{1+n}x^3y^3$, con $n \in \mathbb{N}$

Presentación realizada por Gilberto Vargas Mathey

Apuntes tomados de:

Expresiones algebraicas
Jeffry Chavarría folleto de Matemática General Julio 2016

Programa Geógebra para la elaboración de diagramas y dibujos varios

Apuntes no digitalizados para las lecciones del curso de matemática General
Profesor. Gilberto Vargas Mathey