Curso de Matemática General

I semestre 2020

Grupos 1 y 26

L1	Lección 1

Profesor: Gilberto Vargas Mathey
Grupos 01 y 26

Oficina I-07
Edificio Matemática
Ext 2016

Correo: givargas@itcr.ac.cr

MA-0101 Matemática General Grupos 01 y 26

HORARIO

Grupo 01

K: 7:30 – 10:30 a.m.
J: 7:30 – 9:30 a.m.

Aula: D3-02 ambos días

Grupo 26

K: 13:00 – 16:00 p.m.
J: 13:00 – 15:00 p.m.

Aula: D3-04 ambos días

Horas de Consulta:

Miércoles 7:30 – 9:30 a.m.
Jueves 9:30 – 11:30 a.m.

Oficina I-07
Edificio Matemática

Programa del curso MA0101

Matemática General

Carta al estudiante:

La misma la puede encontrar en el tecDigital en Comunidades/Cátedra de matemática general

- Curso Teórico (teórico práctico)
- 5 h clase + 6 h extra clase

3 Objetivos generales

1. Lograr que el estudiante adquiera los conceptos básicos de la aritmética en el conjunto de los números reales, álgebra, ecuaciones e inecuaciones y la teoría de funciones.
2. Lograr que el estudiante adquiera destrezas en la resolución de ejercicios y problemas.
3. Fomentar en el estudiante una actitud crítica y creativa.
4. Lograr que el estudiante sea capaz de aplicar los conocimientos adquiridos a situaciones concretas.
5. Fomentar en el estudiante el interés permanente por la obtención de nuevos conocimientos.

4 Contenidos

1. El conjunto de los números reales (IR)
2. Expresiones algebraicas
3. Ecuaciones algebraicas
4. Inecuaciones algebraicas
5. Valor absoluto
6. Geometría
7. Funciones algebraicas
8. Funciones trigonométricas
9. Función exponencial y logarítmica

5 Metodología de enseñanza y aprendizaje	Mayoritariamente clase magistrales teóricas, complementadas con el trabajo individual y/o grupal de los estudiantes. Para el desarrollo del curso el profesor hará una exposición teórica de los temas del curso y presentará ejemplos ilustrativos. Además, cuando el tiempo así lo permita y utilizando actividades que considere adecuadas, realizará en el aula junto con sus estudiantes prácticas de los temas del curso.

6 Evaluación	Tres parciales con un valor total de 80%. Cada examen con la misma ponderación. Quices y tareas (mínimo 9) 20% El curso se aprueba con una nota final mayor o igual que 70. El estudiante con nota final menor o igual que 55 reprueba el curso. El estudiante con nota final igual que 60 ó 65 tiene derecho a presentar un examen adicional (examen de reposición en el que se evalúan todos los contenidos del curso). Si el estudiante gana el examen (con nota mayor o igual que 70) aprueba el curso con una nota final igual que 70, en caso contrario, la nota final será igual a la que tenía antes de realizar el examen de reposición. Las notas a las que se hace referencia en este párrafo son ya redondeadas.

Se realizarán dos quices virtuales de Cátedra antes de cada parcial y un mínimo de 1 quiz en clase antes de cada parcial. Aproximadamente se realizará un quiz presencial por semana (Martes o Jueves).

Se acuerda no usar calculadora para el primer examen parcial del curso.

Las fechas previstas para los exámenes son:

- Primer examen parcial: Sábado 4 de Abril 7:30 a.m.
- Segundo examen parcial: Lunes 4 de Mayo 15:30 p.m.
- Tercer examen parcial: Lunes 15 de Junio 7:30 a.m.
- Examen de Reposición Miércoles 24 de Junio 7:30 a.m.

Prácticas oficiales para este semestre:

Prácticas y soluciones. Matemática General.
Prácticas conceptuales de Matemática General.

Estarán disponibles en la Cátedra del tecDigital.

7 Bibliografía

1. Acuña, R. Ejercicios semanales Matemática General Preguntas conceptuales.
2. Ávila, J. Ejercicios de Álgebra y Trigonometría. Editorial Tecnológica de Costa Rica.
3. Barnett, R. (1991) Geometría, Mc Graw-Hill, México.
4. Barnett, R; Raymond A. (1978). Álgebra y Trigonometría, Libros Mc Graw-Hill, Colombia
5. Chavarría J; Rodríguez N y Gutiérrez M. (2016). El conjunto de los Números Reales.
6. Chavarría J; Rodríguez N y Gutiérrez M. (2016). Expresiones Algebraicas.
7. Chavarría J; Rodríguez N y Gutiérrez M. (2016). Ecuaciones Algebraicas.
8. Chavarría J; Rodríguez N y Gutiérrez M. (2016). Inecuaciones Algebraicas.
9. Chavarría J; Rodríguez N y Gutiérrez M. (2016). Valor Absoluto.
10. Chavarría J; Rodríguez N y Gutiérrez M. (2016). Funciones Algebraicas.
11. Chavarría J; Rodríguez N y Gutiérrez M. (2016). Funciones Exponenciales y Logarítmicas.
12. Chavarría J; Rodríguez N y Gutiérrez M. (2016). Razones y Funciones Trigonométricas.

7 Bibliografía

13. Murillo, M. y otros (2000). Matemática Básica con Aplicaciones, Editorial EUNED. San José, Costa Rica.
14. Páez, C. Prácticas y soluciones: Matemática General.
15. Schmidt S. Elementos de Geometría.
16. Swokowski, W. (1996) Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. Grupo editorial Iberoamericano, México.
17. Swokowski, W. (1979) Álgebra Universitaria. Editorial CECSE, México.
18. Zill, D. (1992) Álgebra y Trigonometría. Editorial Mc Graw-Hill, Colombia.

Adicionalmente, puede consultar las siguientes direcciones:

Adicionalmente, puede consultar las siguientes direcciones:

- Canal de Matemática General
- Revista Digital
- Comunidad Tutorías Matemáticas
- Comunidad Éxito Académico en Matemática

9 Consideraciones Generales

Leerlo con detalle

1. Sobre las pruebas parciales:

   a) No se permite el uso de calculadora para el primer parcial del curso.

   b) Para realizar las pruebas, el estudiante deberá presentar una identificación oficial vigente (tarjeta de identificación de menores, carné del TEC, cédula

   i) Si un estudiante se ausenta a un examen, tiene tres días hábiles para justificarse ante su profesor; si éste considera válida la justificación, entonces el alumno podrá realizar una prueba extraordinaria del parcial.

En caso de Emergencias:

a. En Cartago: serán atendidas por el personal del centro de salud institucional en el horario de 7:30 am a 7:30 pm, para reportar una emergencia se deberá llamar al número 2550-9111, fuera de este horario deberá reportarlo al 911.

Álgebra y trigonometría con geometría analítica

12a. edición

Swokowski / Cole

Tema 1 Números Reales

1. **El conjunto de los números reales (IR)**

    1.1 El conjunto de los números reales y sus subconjuntos.

    1.2 Operaciones en IR. Algoritmos y propiedades.

    1.3 Valor absoluto de un número real.

    1.4 Potencias. Definición y propiedades.

    1.5 Radicales. Definición y propiedades

L1	1.1, 1.2, 1.3, 1.4
L2	Retomar L1, 1.5 y ejercicios

L1	1.1, 1.2, 1.3, 1.4

1. **El conjunto de los números reales (IR)**

   1.1 El conjunto de los números reales y sus subconjuntos.

   1.2 Operaciones en IR. Algoritmos y propiedades.

   1.3 Valor absoluto de un número real.

   1.4 Potencias. Definición y propiedades.

1.1 El conjunto de los números reales y sus subconjuntos.

Los números reales se usan en toda la matemática y el estudiante debe estar familiarizado con símbolos que los representan, por ejemplo

$$1, \quad 73, \quad -5, \quad \tfrac{49}{12}, \quad \sqrt{2}, \quad 0, \quad \sqrt[3]{-85}, \quad 0.33333\ldots, \quad 596.25,$$

y otros. Los **enteros positivos** o **números naturales**, son

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad \ldots .$$

Los **números enteros** (*no negativos*) son los números naturales combinados con el número 0. Los **enteros** se escriben a veces como sigue

$$\ldots, \quad -4, \quad -3, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad \ldots$$

En todo este texto, las letras minúsculas $a, b, c, x, y, \ldots$ representan números reales arbitrarios (también llamados *variables*). Si a y b denotan el mismo número real, escribimos $a=b$, que se lee "*a* **es igual a** *b*" y se denomina **igualdad.** La notación $a \neq b$ se lee "*a no es* **igual a** *b*."

Si a, b, y c son enteros y $c=ab$, entonces a y b son **factores** o **divisores** de c. Por ejemplo, como

$$6 = 2 \cdot 3 = (-2)(-3) = 1 \cdot 6 = (-1)(-6),$$

sabemos que $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6$ y -6 son factores de 6.

Un entero positivo p diferente de 1 es **primo** si sus únicos factores positivos son 1 y p. Los primeros números primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19. El **Teorema Fundamental de Aritmética** expresa que todo entero positivo diferente de 1 se puede expresar como producto de números primos en una forma y sólo una (excepto por orden de factores). Algunos ejemplos son

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3, \quad 126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7, \quad 540 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5.$$

Un **número racional** es un número real que se puede expresar en la forma a/b, donde a y b son enteros y $b \neq 0$. Nótese que todo entero a es un número racional, dado que se puede expresar en la forma $a/1$. Todo número real se puede expresar como un decimal y las representaciones decimales para números racionales son *finitas* o *no finitas* y *periódicas*. Por ejemplo podemos demostrar, con el uso del proceso aritmético de la división, que

$$\tfrac{5}{4} = 1.25 \quad \text{y} \quad \tfrac{177}{55} = 3.2181818\ldots,$$

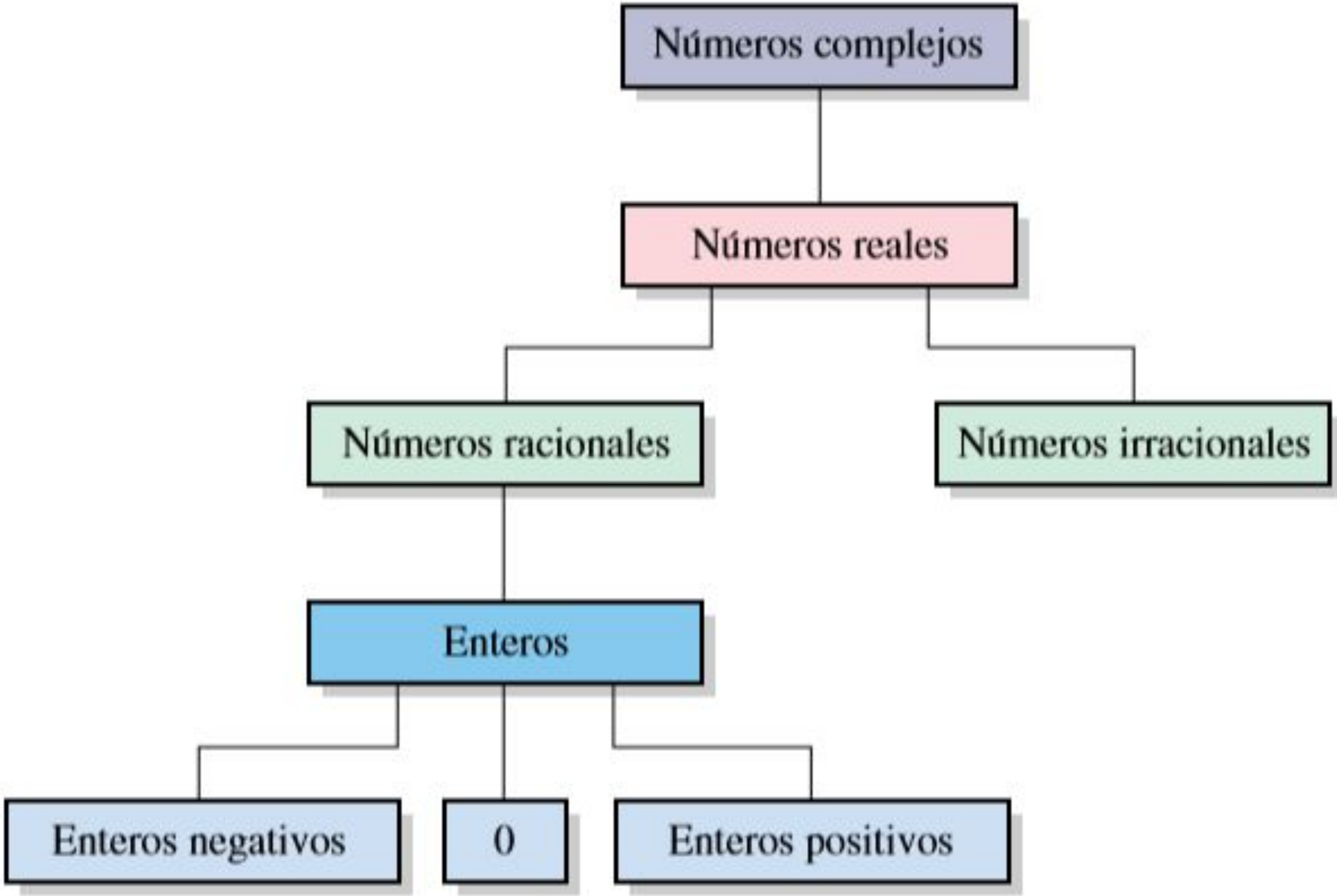
donde los dígitos 1 y 8 en la representación de $\frac{177}{55}$ se repiten indefinidamente (a veces se escribe como $3.2\overline{18}$).

Los números reales que no son racionales son **números irracionales.** Las representaciones decimales para números irracionales son siempre *no finitas y no periódicas.* Un número irracional común, denotado por π, es la razón entre la circunferencia de un círculo y su diámetro. A veces usamos la notación $\pi \approx 3.1416$ para indicar que π **es aproximadamente igual a** 3.1416.

No hay número *racional* b tal que $b^2 = 2$, donde b^2 denota $b \cdot b$, pero hay un número *irracional* denotado por $\sqrt{2}$ (la **raíz cuadrada** de 2), tal que $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$.

El sistema de **números reales** está formado por todos los números racionales e irracionales. Las relaciones entre los tipos de números empleados en álgebra están ilustradas en el diagrama de la figura 1, donde una línea que enlaza dos rectángulos significa que los números mencionados en el rectángulo más alto incluyen los del rectángulo más bajo. Los números complejos, que se estudian en la sección 2.4, contienen a todos los números reales.

Figura 1 Tipos de números empleados en álgebra



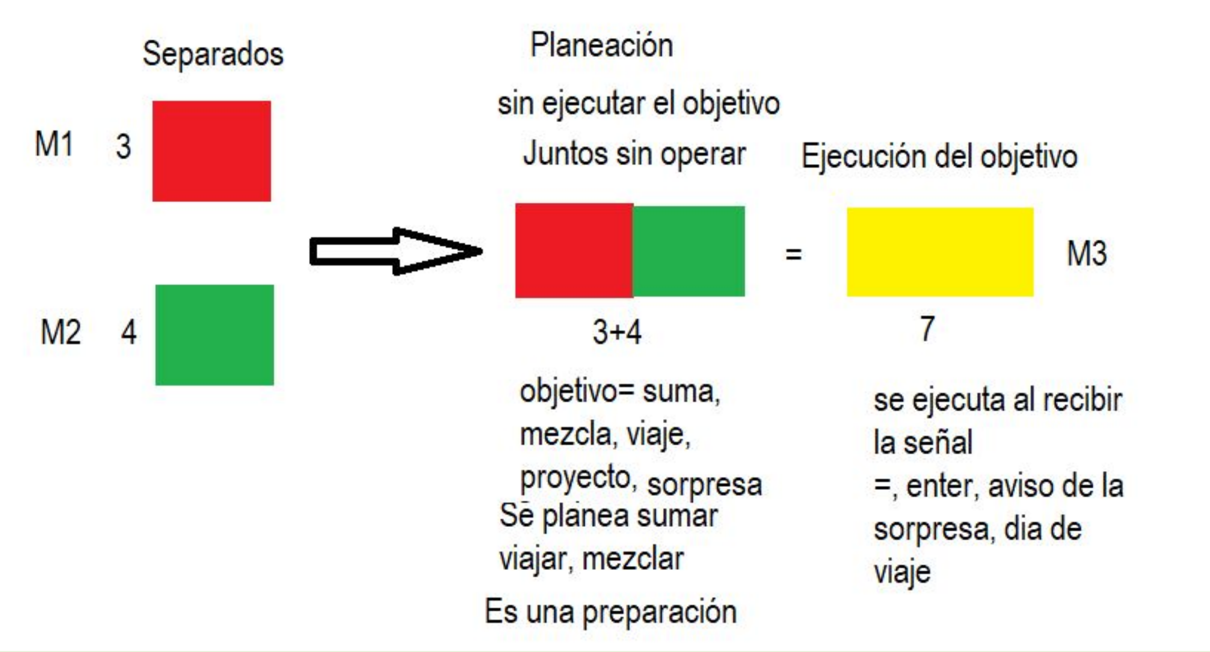
1.2 Operaciones en IR. Algoritmos y propiedades.

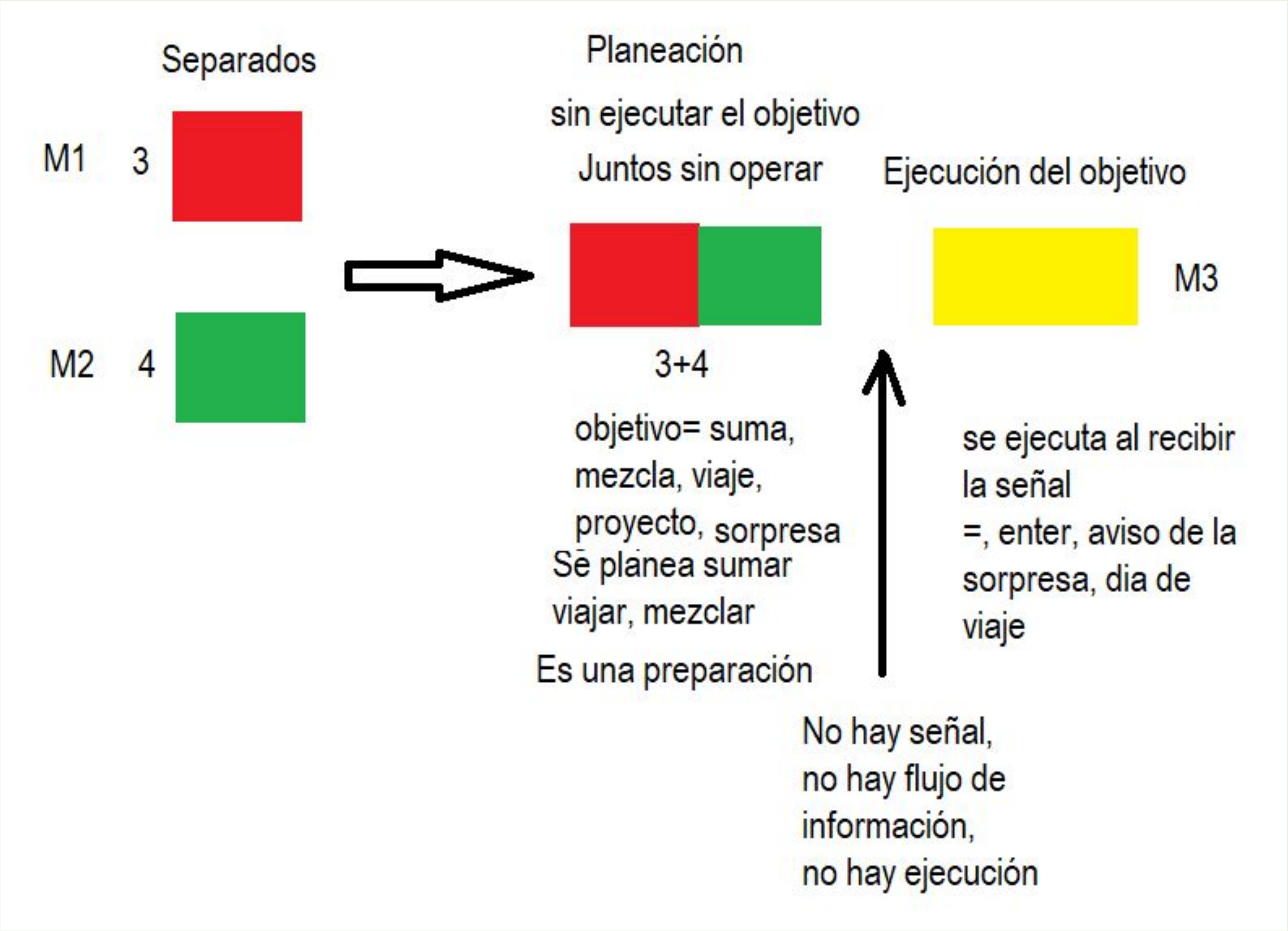
Los números reales son cerrados con respecto a la operación adición(denotada por +). Esto es, a todo par de números reales a, b corresponde un único número real a+b llamado suma de a y b.

Los números reales son también cerrados con respecto a la multiplicación denotada por (*) Esto es, a todo par de números reales a, b corresponde exactamente un único número real a*b o (ab) llamado producto de a y b.

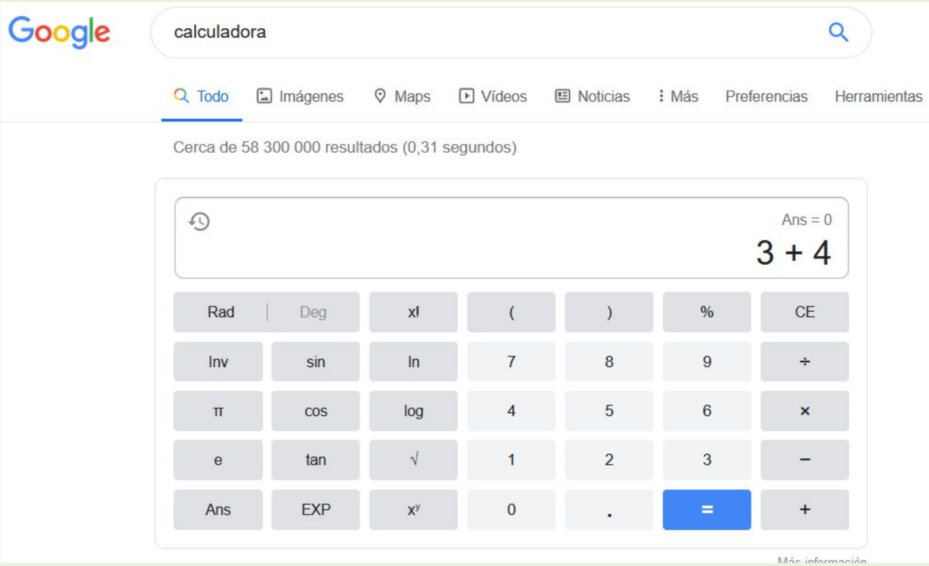
+ cambia (a , b) en (a + b)= r con r el resultado de la suma entre a y b A a se le agrega b(i.e.) "b" se le agrega a "a" idem para *(a,b) que lo transforma en a*b=el resultado de a por b

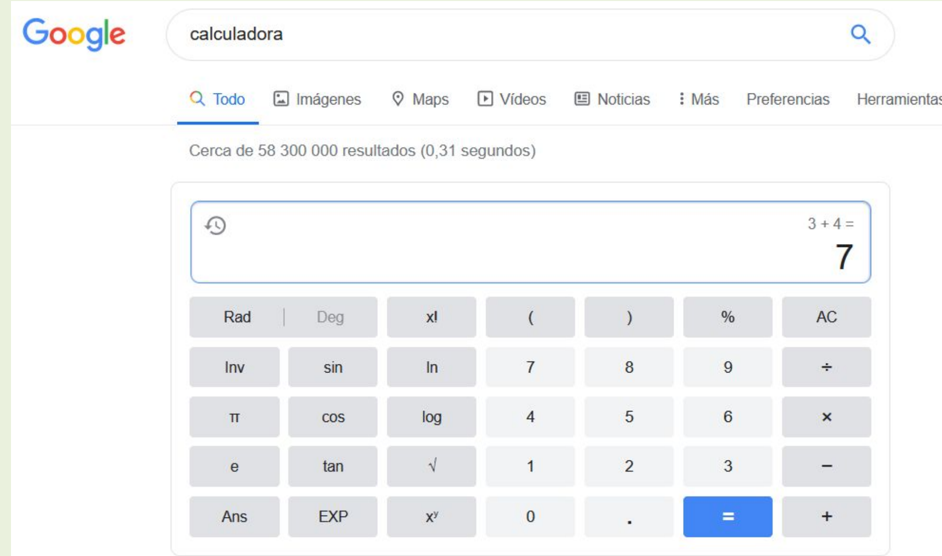
Así, + cambia (3,4) en 3 + 4 que tiene por resultado 7 . (es una transformación) la suma
Los números 3 y 4 se llaman sumandos, primer y segundo sumando: a 3 se le agrega 4





No hay señal: eléctrica, mecánica, de vapor, de presión, de movimiento, de acuerdo de desacuerdo, de comparación lógica, de igualdad.





3+4

Con ello se está indicando. Preparese que se va a sumar 3 en M1 con 4 en M2 y el resultado se va a escribir en M3

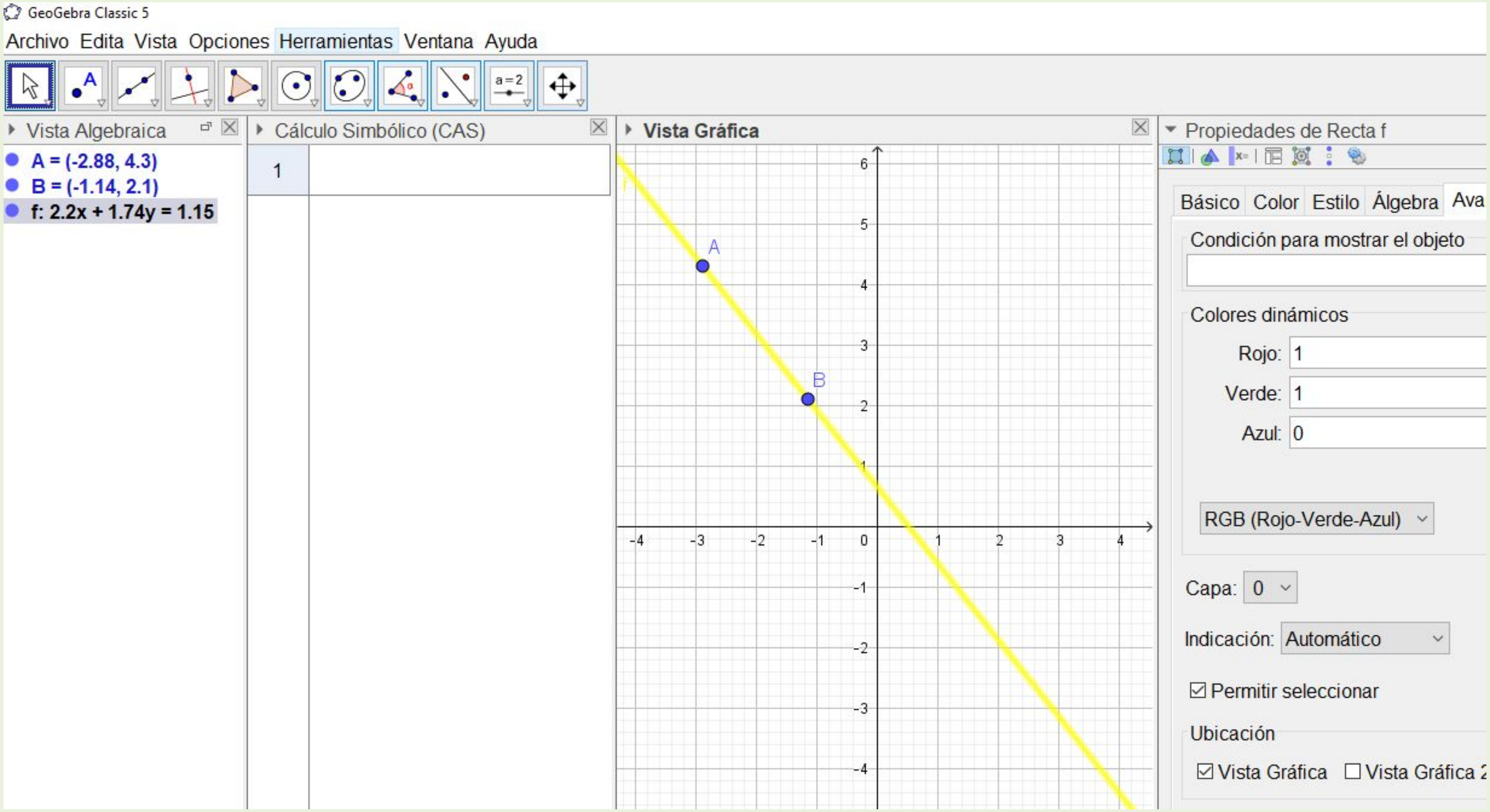
INICIO

=

SEÑAL

7

FINAL



Ejemplo práctico de una "suma de colores": Al rojo se le agrega verde y da:
Rojo + Verde = Amarillo

Propiedades de números reales

Terminología	Caso general	Significado
(1) La adición es **conmutativa.**	$a + b = b + a$	El orden es indistinto cuando se suman dos números.
(2) La adición es **asociativa.**	$a + (b + c) = (a + b) + c$	La agrupación es indistinta cuando se suman tres números.
(3) 0 es el **neutro aditivo.**	$a + 0 = a$	La suma de 0 con cualquier número da el mismo número.
(4) $-a$ es el **inverso aditivo** o **negativo**, de a.	$a + (-a) = 0$	La suma de un número y su negativo da 0.
(5) La multiplicación es **conmutativa.**	$ab = ba$	El orden es indistinto cuando se multiplican dos números.
(6) La multiplicación es **asociativa.**	$a(bc) = (ab)c$	La agrupación es indistinta cuando se multiplican tres números.
(7) 1 es el **neutro multiplicativo.**	$a \cdot 1 = a$	La multiplicación de cualquier número por 1 da el mismo número.
(8) Si $a \neq 0$, $\frac{1}{a}$ es el **inverso multiplicativo** o **recíproco**, de a.	$a\left(\frac{1}{a}\right) = 1$	La multiplicación de un número diferente de cero por su recíproco da 1.
(9) La multiplicación es **distributiva** sobre la adición.	$a(b + c) = ab + ac$ y $(a + b)c = ac + bc$	La multiplicación de un número y una suma de dos números es equivalente a multiplicar cada uno de los dos números por el número y luego sumar los productos.

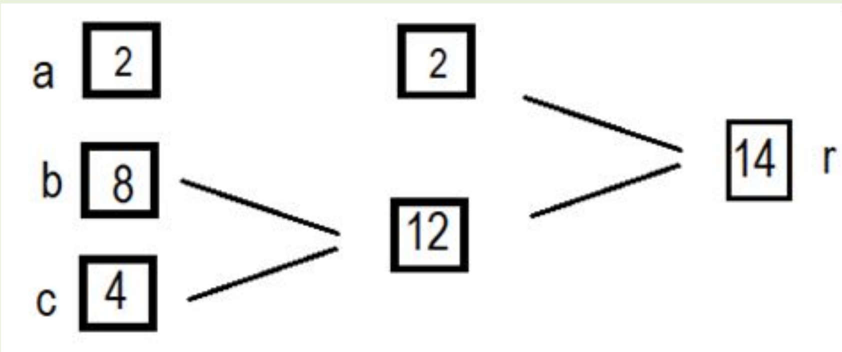
2+(8+4) = 2+(12)=2+12=14   (2+8)+4 = (10)+4=10+4=14

Sumar es agregar o quitar si se resta y multiplicar es expandir o comprimir

$k \cdot x$ es un estiramiento o una compresión de x

(2) La adición es **asociativa.**	$a + (b + c) = (a + b) + c$	La agrupación es indistinta cuando se suman tres números.

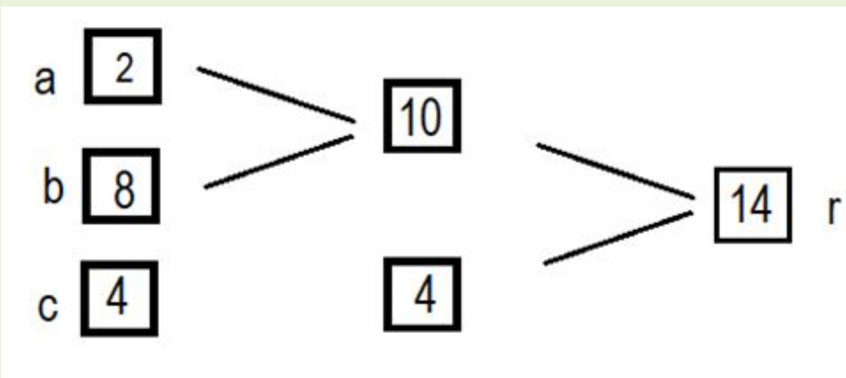
Paso 1: "arrastre 1" operación 1



$2+(8+4) = 2+(12)=2+12=14$

$a + (b + c)$

Primer paso:
"arrastra a"
realiza la operación b + c
"arrastra 2"
realiza la operación 8 + 4



$(2+8)+4 = (10)+4=10+4=14$

$(a + b) + c$

Primer paso:
"arrastra c"
realiza la operación a + b
"arrastra 4"
realiza la operación 2+8

dos caminos diferentes
para el mismo resultado

Como $a + (b + c)$ y $(a + b) + c$ son siempre iguales, podemos usar $a + b + c$ para denotar este número real.

Usamos abc por $a(bc)$ o $(ab)c$.

Paso 1
Paso 2
Paso 3
.
.
.
Paso <u>ult</u> Sol

Después del paso Último (último paso) se tiene la respuesta

Paso <u>ult</u> es Generalmente una operación

EJEMPLO 1 **Uso de propiedades distributivas**

Si p, q, r y s denotan números reales, demuestre que

$$(p+q)(r+s) = pr + ps + qr + qs.$$

SOLUCIÓN Usamos las dos propiedades distributivas que aparecen en (9) de la tabla precedente:

$$\begin{aligned}
&(p+q)(r+s) \\
&\quad = p(r+s) + q(r+s) && \text{segunda propiedad distributiva, con } c = r+s \\
&\quad = (pr+ps) + (qr+qs) && \text{primera propiedad distributiva} \\
&\quad = pr + ps + qr + qs && \text{eliminar paréntesis}
\end{aligned}$$

Ejemplo : En este caso, p=80, q=7, r=40, s=5

(80+7)*(40+5)=80*40+80*5+7*40+7*5
= 3200+400+280+35(35=20+15)
= 3200+400+300+15=3915

Otra forma: (80+7)*(40+5)= 87*45 = 87
x 45
= 435
348
= 3915

17*17=(10+7)*(10+7)=10*10+10*7+7*10+7*7=100+140+49
= 289 (17 al cuadrado)

Juego: Repasar las tablas de multiplicar

Propiedades de la igualdad	Si $a = b$ y c es cualquier número real, entonces **(1)** $a + c = b + c$ **(2)** $ac = bc$

La propiedad (1) establece que el sumando a o c que suma a la izquierda se puede trasladar a la derecha a restar a todo b + c y también el sumando b o c de la derecha se puede trasladar a la izquierda a restar a todo a + c
La propiedad (2) establece que el número a o c de la parte izquierda se puede trasladar a la derecha a dividir a todo b c. En el caso en que alguno de ellos divida a todo el resto se puede

Productos que involucran el 0.	**(1)** $a \cdot 0 = 0$ para todo número real a. **Teorema del factor cero** **(2)** Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Si dos factores se comparan con cero, alguno de ellos o ambos son cero.

Propiedades de negativos

Propiedad	Ejemplos
(1) $-(-a) = a$	$-(-3) = 3$
(2) $(-a)b = -(ab) = a(-b)$	$(-2)3 = -(2 \cdot 3) = 2(-3)$
(3) $(-a)(-b) = ab$	$(-2)(-3) = 2 \cdot 3$
(4) $(-1)a = -a$	$(-1)3 = -3$

El recíproco de un número a para $a \neq 0$, se denota por $\dfrac{1}{a}$

Definición	Ejemplos
Si $a \neq 0$, entonces $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$.	$2^{-1} = \dfrac{1}{2}$ $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-1} = \dfrac{1}{3/4} = \dfrac{4}{3}$

También se llama inverso algebraico y se satisface:

$$a \cdot a^{-1} = a\left(\frac{1}{a}\right) = 1.$$

Las operaciones de sustracción (-) y división ($\div$) se definen como sigue.

Sustracción y división

Definición	Significado	Ejemplos
$a - b = a + (-b)$	Para restar un número de otro, sume el negativo.	$3 - 7 = 3 + (-7)$
$a \div b = a \cdot \left(\dfrac{1}{b}\right)$ $= a \cdot b^{-1};\ b \neq 0$	Para dividir un número entre un número diferente de cero, multiplique por el recíproco.	$3 \div 7 = 3 \cdot \left(\dfrac{1}{7}\right)$ $= 3 \cdot 7^{-1}$

Se multiplica por el recíproco en el mismo lugar donde se encuentra la división. “No se traslada hacia abajo”

Usamos a/b o $\frac{a}{b}$ por $a \div b$ y nos referimos a a/b como el **cociente de a y b** o la **fracción a sobre b.** Los números a y b son el **numerador** y **denominador,** respectivamente, de a/b. Como 0 no tiene inverso multiplicativo, a/b no está definido si $b = 0$; esto es, *la división entre cero no está definida.* Es por esta razón que los números reales no son cerrados con respecto a la división. Nótese que

$$1 \div b = \frac{1}{b} = b^{-1} \quad \text{si} \quad b \neq 0.$$

Propiedades de cocientes

Propiedad	Ejemplos
(1) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si $ad = bc$	$\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$ porque $2 \cdot 15 = 5 \cdot 6$
(2) $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$	$\frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{2}{5}$
(3) $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$	$\frac{2}{-5} = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}$
(4) $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$	$\frac{2}{5} + \frac{9}{5} = \frac{2+9}{5} = \frac{11}{5}$
(5) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$	$\frac{2}{5} + \frac{4}{3} = \frac{2 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{5 \cdot 3} = \frac{26}{15}$
(6) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{14}{15}$
(7) $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$	$\frac{2}{5} \div \frac{7}{3} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{35}$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{\left(\frac{M}{b}\right) \cdot a + \left(\frac{M}{d}\right) \cdot c}{M}$$

con M :

el mínimo común denominador entre b y d

Ejercicios

1. Calcular la suma $\frac{3}{2} + \frac{2}{3} + \frac{5}{6} + \frac{3}{4}$

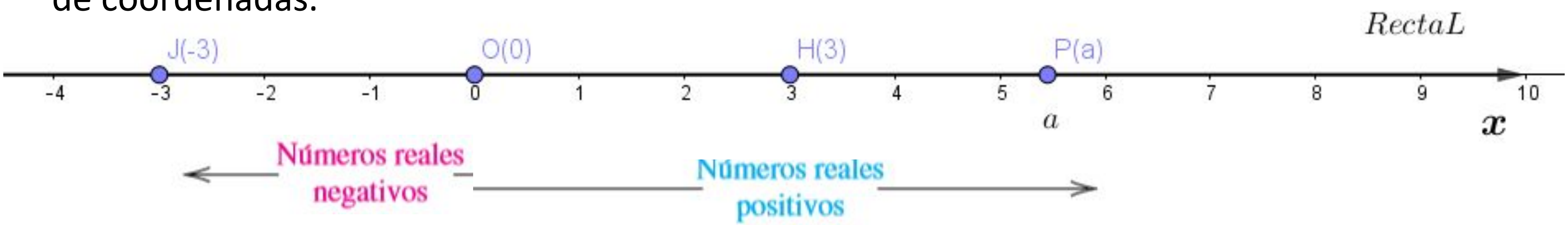
2 . Calcular: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$

R/ Así no se puede,
necesita definirse
la posición del igual
necesita paréntesis
5 casos diferentes
Así es ambiguo

1.3 Representación de números reales y Valor absoluto de un número real.

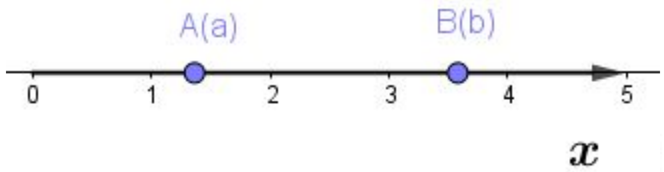
Los números reales pueden ser representados por puntos en una recta real L horizontal, vertical o inclinada (inclusive sobre una curva longitud de curva). A cada número real a, le corresponde un único punto P en L y a cada punto P en L le corresponde un único número real a. Esta correspondencia se llama correspondencia uno a uno biyectiva o Biunívoca. Se escoge un punto arbitrario O llamado origen de la recta y le asociamos con el número cero.

El número a que está asociado con el punto P en L es la coordenada de P, la recta L se llama la recta de coordenadas o recta real y las coordenadas de los puntos establecen un sistema de coordenadas.



Nótese la diferencia entre un número real negativo(que es negativo) y el negativo de un número real. En particular, el negativo de un número real a puede ser positivo.

Relaciones entre a y $-a$	(1) Si a es positiva, entonces $-a$ es negativa. (2) Si a es negativa, entonces $-a$ es positiva.



Si los puntos A y B tienen coordenadas a y b como se observa entonces, $a < b$ es equivalente a: A está a la izquierda de B (a es menor a b)

Notación	Definición	Terminología
$a > b$	$a - b$ es positivo	a es mayor que b
$a < b$	$a - b$ es negativo	a es menor que b

Una desigualdad es una relación entre dos expresiones o números con signos de desigualdad

$a > b$, $a < b$ Son desigualdades ; $>$, $<$ son signos de desigualdad

ILUSTRACIÓN **Mayor que (>) y menor que (<)**

- $5 > 3$, porque $5 - 3 = 2$ es positivo.
- $-6 < -2$, porque $-6 - (-2) = -6 + 2 = -4$ es negativo.
- $\frac{1}{3} > 0.33$, porque $\frac{1}{3} - 0.33 = \frac{1}{3} - \frac{33}{100} = \frac{1}{300}$ es positivo.
- $7 > 0$, porque $7 - 0 = 7$ es positivo.
- $-4 < 0$, porque $-4 - 0 = -4$ es negativo.

Ley de tricotomía	Si a y b son números reales, entonces exactamente uno de lo siguiente es verdadero: $$a = b, \qquad a > b, \qquad \text{o} \qquad a < b$$

Esta ley hace posible comparar u ordenar, dos números reales cualesquiera.

Signo de un número real.

Nos referimos al signo de un número real como positivo si el número es positivo o negativo si el número es negativo. Dos números reales tienen el mismo signo si ambos son positivos o ambos son negativos. Los números tienen signos contrarios si uno es positivo y el otro es negativo.

Ley de signos	(1) Si a y b tienen el mismo signo, entonces ab y $\frac{a}{b}$ son positivos.
	(2) Si a y b tienen signos contrarios, entonces ab y $\frac{a}{b}$ son negativos.

Los recíprocos*(teorema recíproco) de las leyes de signos también son verdaderos. Por ejemplo, si un cociente es negativo, entonces el numerador y el denominador tienen signos contrarios.

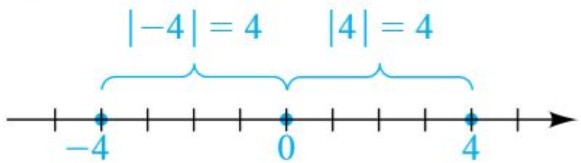
La notación $a \geq b$ se lee "a es mayor que o igual a b," significa que $a > b$ o que $a = b$ (pero no ambos). El símbolo $a \leq b$, que se lee "a es menor que o igual a b," significa que $a < b$ o que $a = b$. Una expresión de la forma $a < b < c$ se denomina desigualdad continua y significa que $a < b$ y $b < c$; decimos "b está entre a y c."

Ejercicio. Determinación del signo de un número real

$$\text{Si } x > 0 \text{ y } y < 0, \text{ determine el signo de } \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

valor absoluto.

Si a es un entero, entonces es la coordenada de algún punto A en una recta coordenada y el símbolo $|a|$ denota el número de unidades entre A y el origen, cualquiera que sea la dirección. El número no negativo $|a|$ se llama valor absoluto de a.



Definición de valor absoluto	El **valor absoluto** de un número real a, denotado por $\lvert a\rvert$, se define como sigue. **(1)** Si $a \geq 0$, entonces $\lvert a\rvert = a$. **(2)** Si $a < 0$, entonces $\lvert a\rvert = -a$.

La notación de valor absoluto $|a|$

- $|3| = 3$, porque $3 > 0$.
- $|-3| = -(-3)$, porque $-3 < 0$. Entonces, $|-3| = 3$.
- $|2 - \sqrt{2}| = 2 - \sqrt{2}$, porque $2 - \sqrt{2} > 0$.
- $|\sqrt{2} - 2| = -(\sqrt{2} - 2)$, porque $\sqrt{2} - 2 < 0$.
  Entonces, $|\sqrt{2} - 2| = 2 - \sqrt{2}$.

Generalización de $|a|$
Valor lógico

Propiedades del valor absoluto. $|a| = |-a|$, para todo número real a

Todo número real x se puede escribir en la forma: $x = \sigma(x) \cdot |x|$

Otras propiedades son …

Remoción del símbolo de valor absoluto

Si $x < 1$, reescriba $|x - 1|$ sin usar el símbolo de valor absoluto.

Respuesta: $|x - 1| = -(x - 1) = -x + 1 = 1 - x.$

Distancia entre dos puntos A y B

Sean a y b las coordenadas de dos puntos A y B, respectivamente, en una recta de coordenadas. La **distancia entre A y B,** denotada por $d(A, B)$, está definida por

$$d(A, B) = |b - a|.$$

El número $d(A, B)$ es la longitud del segmento de recta AB.

Como $d(B, A) = |a - b|$ y $|b - a| = |a - b|$, vemos que

$$d(A, B) = d(B, A).$$

Nótese que la distancia entre el origen O y el punto A es

$$d(O, A) = |a - 0| = |a|,$$

1.4 Potencias. Definición y propiedades.

Si n es un entero positivo, la notación exponencial a^n, representa el producto del número real a consigo mismo n veces.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores de } a}$$

así,

$$a^1 = a$$
$$a^2 = a \cdot a$$
$$a^3 = a \cdot a \cdot a$$
$$a^6 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$$

a^n será a a la n potencia o, simplemente, a elevado a la n.
El entero positivo n se llama denomina exponente y el número real a se llama base.

La notación exponencial a^n

- $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$
- $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$
- $(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$
- $\left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{81}$

La notación ca^n

- $5 \cdot 2^3 = 5 \cdot 8 = 40$
- $-5 \cdot 2^3 = -5 \cdot 8 = -40$
- $-2^4 = -(2^4) = -16$
- $3(-2)^3 = 3(-2)(-2)(-2) = 3(-8) = -24$

Es importante observar que si n es un entero positivo, entonces una expresión como $3a^n$ significa $3(a^n)$, *no* $(3a)^n$. El número real 3 es el **coeficiente** de a^n en la expresión $3a^n$. Del mismo modo, $-3a^n$ significa $(-3)a^n$, *no* $(-3a)^n$.

Exponentes cero y negativos (no positivos)

Definición ($a \neq 0$)	Ejemplos	
$a^0 = 1$	$3^0 = 1,$	$(-\sqrt{2})^0 = 1$
$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$	$5^{-3} = \dfrac{1}{5^3},$	$(-3)^{-5} = \dfrac{1}{(-3)^5}$

Si m y n son enteros positivos, entonces

$$a^m a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \;\cdots\; \cdot a}_{m \text{ factores de } a} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \;\cdots\; \cdot a}_{n \text{ factores de } a}.$$

Como el número total de factores de a a la derecha es $m + n$, esta expresión es igual a a^{m+n}; esto es,

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

Se extender la fórmula a números no positivos(negativos o cero) y obtenemos la ley 1

Ley 1

Ley
(1) $a^m a^n = a^{m+n}$

Para multiplicar potencias de igual base se conserva la base y se suman los exponentes

Ley	Ejemplos
(1) $a^m a^n = a^{m+n}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$
(2) $(a^m)^n = a^{mn}$	$(2^3)^4 = 2^{3\cdot 4} = 2^{12} = 4096$
(3) $(ab)^n = a^n b^n$	$(20)^3 = (2 \cdot 10)^3 = 2^3 \cdot 10^3 = 8 \cdot 1000 = 8000$
(4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	$\left(\dfrac{2}{5}\right)^3 = \dfrac{2^3}{5^3} = \dfrac{8}{125}$
(5) (a) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\dfrac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$
(b) $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{1}{a^{n-m}}$	$\dfrac{2^3}{2^5} = \dfrac{1}{2^{5-3}} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$

Simplificar una expresión que comprenda potencias de números reales significa cambiarla a una expresión en la que cada base aparezca sólo una vez y todos los exponentes sean positivos. Supondremos que los denominadores siempre representan números reales diferentes de cero.

Simplificación de expresiones que contienen exponentes

Simplificar:

(a) $(3x^3y^4)(4xy^5)$ (b) $(2a^2b^3c)^4$ (c) $\left(\dfrac{2r^3}{s}\right)^2\left(\dfrac{s}{r^3}\right)^3$ (d) $(u^{-2}v^3)^{-3}$

SOLUCIÓN

(a)
$$\begin{aligned}(3x^3y^4)(4xy^5) &= (3)(4)x^3xy^4y^5 && \text{reacomodar factores}\\ &= 12x^4y^9 && \text{ley 1}\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}(2a^2b^3c)^4 &= 2^4(a^2)^4(b^3)^4c^4 && \text{ley 3}\\ &= 16a^8b^{12}c^4 && \text{ley 2}\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\left(\frac{2r^3}{s}\right)^2\left(\frac{s}{r^3}\right)^3 &= \frac{(2r^3)^2}{s^2}\cdot\frac{s^3}{(r^3)^3} && \text{ley 4}\\ &= \frac{2^2(r^3)^2}{s^2}\cdot\frac{s^3}{(r^3)^3} && \text{ley 3}\\ &= \left(\frac{4r^6}{s^2}\right)\left(\frac{s^3}{r^9}\right) && \text{ley 2}\\ &= 4\left(\frac{r^6}{r^9}\right)\left(\frac{s^3}{s^2}\right) && \text{reacomodar factores}\\ &= 4\left(\frac{1}{r^3}\right)(s) && \text{leyes 5(b) y 5(a)}\\ &= \frac{4s}{r^3} && \text{reacomodar factores}\end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned}(u^{-2}v^3)^{-3} &= (u^{-2})^{-3}(v^3)^{-3} && \text{ley 3}\\ &= u^6v^{-9} && \text{ley 2}\\ &= \frac{u^6}{v^9} && \text{definición de } a^{-n}\end{aligned}$$

Teorema sobre exponentes negativos	(1) $\dfrac{a^{-m}}{b^{-n}} = \dfrac{b^n}{a^m}$	(2) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$
Uso del Teorema sobre exponentes negativos	(1) $\dfrac{\dfrac{a^{-m}}{b^{-n}} + q}{r} = \dfrac{\dfrac{b^n}{a^m} + q}{r}$	(2) $\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} + q}{r} = \dfrac{\left(\dfrac{b}{a}\right)^n + q}{r}$

Simplificación de expresiones que contienen exponentes negativos

Simplifique:

(a) $\dfrac{8x^3y^{-5}}{4x^{-1}y^2}$ (b) $\left(\dfrac{u^2}{2v}\right)^{-3}$

Solución

(a) $\dfrac{8x^3y^{-5}}{4x^{-1}y^2} = \dfrac{8x^3}{4y^2} \cdot \dfrac{y^{-5}}{x^{-1}}$ reacomodar cocientes para que los exponentes negativos queden en una fracción

$= \dfrac{8x^3}{4y^2} \cdot \dfrac{x^1}{y^5}$ teorema sobre exponentes negativos (1)

$= \dfrac{2x^4}{y^7}$ ley 1 de exponentes

(b) $\left(\dfrac{u^2}{2v}\right)^{-3} = \left(\dfrac{2v}{u^2}\right)^3$ teorema sobre exponentes negativos (2)

$= \dfrac{2^3v^3}{(u^2)^3}$ leyes 4 y 3 de exponentes

$= \dfrac{8v^3}{u^6}$ ley 2 de exponentes

Presentación realizada por Gilberto Vargas Mathey

Apuntes tomados de:

Álgebra y trigonometría con geometría analítica
Swokowski 12ª.edición

Calculadora de google

Programa Geógebra para la elaboración de diagramas y dibujos varios

Apuntes no digitalizados para las lecciones del curso de matemática General
Profesor. Gilberto Vargas Mathey