Curso de Matemática General

I semestre 2020

Grupos 1 y 26

L2	Lección 2

Profesor: Gilberto Vargas Mathey

L2	Retomar L1, 1.5 y Ejercicios

1. **El conjunto de los números reales (IR)**

1.1 El conjunto de los números reales y sus subconjuntos.

1.2 Operaciones en IR. Algoritmos y propiedades.

1.3 Valor absoluto de un número real.

1.4 Potencias. Definición y propiedades.

1.5 Radicales. Definición y propiedades

Ejercicios

1.5 Radicales. Definición y propiedades

Definición de $\sqrt[n]{a}$

Sea n un entero positivo mayor a 1, y sea a un número real.

(1) Si $a = 0$, entonces $\sqrt[n]{a} = 0$.

(2) Si $a > 0$, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el número real b *positivo* tal que $b^n = a$.

(3) **(a)** Si $a < 0$ y n es impar, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el número real b *negativo* tal que $b^n = a$.

(b) Si $a < 0$ y n es par, entonces $\sqrt[n]{a}$ no es un número real.

La raíz n principal $\sqrt[n]{a}$

- $\sqrt{16} = 4$, porque $4^2 = 16$.
- $\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$, porque $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$.
- $\sqrt[3]{-8} = -2$, porque $(-2)^3 = -8$.
- $\sqrt[4]{-16}$ no es un número real.

Nótese que $\sqrt{16} \neq \pm 4$ porque, por definición, las raíces de números reales positivos son positivas. El símbolo $\pm$ se lee "más menos."

Para completar nuestra terminología, la expresión $\sqrt[n]{a}$ es un **radical**, el número a es el **radicando** y n es el **índice** del radical. El símbolo $\sqrt{\ }$ se denomina **signo de radical.**

Si $\sqrt{a} = b$, entonces $b^2 = a$; esto es, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$. Si $\sqrt[3]{a} = b$, entonces $b^3 = a$, o $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$. Generalizando este patrón nos da la propiedad 1 de la tabla siguiente

Propiedades de $\sqrt[n]{a}$ (n es un entero positivo)

Propiedad	Ejemplos	
(1) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ si $\sqrt[n]{a}$ es un número real	$\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5,$	$\left(\sqrt[3]{-8}\right)^3 = -8$
(2) $\sqrt[n]{a^n} = a$ si $a \geq 0$	$\sqrt{5^2} = 5,$	$\sqrt[3]{2^3} = 2$
(3) $\sqrt[n]{a^n} = a$ si $a < 0$ y n es impar	$\sqrt[3]{(-2)^3} = -2,$	$\sqrt[5]{(-2)^5} = -2$
(4) $\sqrt[n]{a^n} = \lvert a\rvert$ si $a < 0$ y n es par	$\sqrt{(-3)^2} = \lvert -3\rvert = 3,$	$\sqrt[4]{(-2)^4} = \lvert -2\rvert = 2$

Si $a \geq 0$, entonces la propiedad 4 se reduce a la propiedad 2. También vemos de la propiedad 4 que

$$\sqrt{x^2} = |x| \qquad \text{para todo número real } x.$$

si $x \geq 0$, entonces $\sqrt{x^2} = x$ pero, si $x < 0$, entonces $\sqrt{x^2} = -x$, que es positiva.

Leyes de radicales *siempre que **existan** las raíces indicadas,*

Ley	Ejemplos
(1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$	$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25}\,\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ $\sqrt[3]{-108} = \sqrt[3]{(-27)(4)} = \sqrt[3]{-27}\,\sqrt[3]{4} = -3\sqrt[3]{4}$
(2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[3]{\dfrac{5}{8}} = \dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{\sqrt[3]{5}}{2}$
(3) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2(3)]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$	Ejemplos
(1) $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$	$\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \neq 3 + 4 = 7$
(2) $\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \neq \sqrt{4} + \sqrt{9} = 5$

- Si $c > 0$ o si $c < 0$ y n es *impar*, entonces: $\sqrt[n]{c^n d} = \sqrt[n]{c^n}\sqrt[n]{d} = c\sqrt[n]{d}$,
- Si $c < 0$ y n es *par*, entonces: $\sqrt[n]{c^n d} = \sqrt[n]{c^n}\sqrt[n]{d} = |c|\sqrt[n]{d}$

Remoción de potencias n de $\sqrt[n]{\ }$

- $\sqrt[5]{x^7} = \sqrt[5]{x^5 \cdot x^2} = \sqrt[5]{x^5}\sqrt[5]{x^2} = x\sqrt[5]{x^2}$
- $\sqrt[3]{x^7} = \sqrt[3]{x^6 \cdot x} = \sqrt[3]{(x^2)^3 x} = \sqrt[3]{(x^2)^3}\sqrt[3]{x} = x^2\sqrt[3]{x}$
- $\sqrt{x^2 y} = \sqrt{x^2}\sqrt{y} = |x|\sqrt{y}$
- $\sqrt{x^6} = \sqrt{(x^3)^2} = |x^3|$
- $\sqrt[4]{x^6 y^3} = \sqrt[4]{x^4 \cdot x^2 y^3} = \sqrt[4]{x^4}\sqrt[4]{x^2 y^3} = |x|\sqrt[4]{x^2 y^3}$

Simplificación de radicales.

Simplificar un radical significa eliminar factores del radical hasta que ningún factor del radicando tenga un exponente mayor que o igual al índice del radical y el índice sea tan bajo como sea posible.

Si el índice de un radical es n, entonces reacomodamos el radicando aislando un factor de la forma , p^n donde p puede estar formado por varias letras. A continuación eliminamos $\sqrt[n]{p^n}$ del radical.

Si n=3 (el índice), reacomodamos el radicando en cubos, si n=2 reacomodamos el en cuadrados

Remoción de factores de radicales Simplifique cada radical

(todas las letras denotan números reales positivos)

(a) $\sqrt[3]{320}$ (b) $\sqrt[3]{16x^3y^8z^4}$ (c) $\sqrt{3a^2b^3}\sqrt{6a^5b}$

SOLUCIÓN

(a)

$\sqrt[3]{320}$	$= \sqrt[3]{64 \cdot 5}$	factorice el cubo más grande en 320
	$= \sqrt[3]{4^3}\sqrt[3]{5}$	ley 1 de radicales
	$= 4\sqrt[3]{5}$	propiedad 2 de $\sqrt[n]{\ }$

(b)

$\sqrt[3]{16x^3y^8z^4}$	$= \sqrt[3]{(2^3x^3y^6z^3)(2y^2z)}$	reacomode radicando en cubos
	$= \sqrt[3]{(2xy^2z)^3(2y^2z)}$	leyes 2 y 3 de exponentes
	$= \sqrt[3]{(2xy^2z)^3}\sqrt[3]{2y^2z}$	ley 1 de radicales
	$= 2xy^2z\sqrt[3]{2y^2z}$	propiedad 2 de $\sqrt[n]{\ }$

(c)

$\sqrt{3a^2b^3}\sqrt{6a^5b}$	$= \sqrt{3a^2b^3 \cdot 2 \cdot 3a^5b}$	ley 1 de radicales
	$= \sqrt{(3^2a^6b^4)(2a)}$	reacomodar radicando en cuadrados
	$= \sqrt{(3a^3b^2)^2(2a)}$	leyes 2 y 3 de exponentes
	$= \sqrt{(3a^3b^2)^2}\sqrt{2a}$	ley 1 de radicales
	$= 3a^3b^2\sqrt{2a}$	propiedad 2 de $\sqrt[n]{\ }$

Racionalizar un denominador o un numerador en una fracción

Si el denominador de un cociente contiene un factor de la forma $\sqrt[n]{a^k}$ con $k < n$ y $a > 0$ entonces multiplicar el numerador y denominador por $\sqrt[n]{a^{n-k}}$ eliminará el radical del denominador dado que:

$$\sqrt[n]{a^k}\,\sqrt[n]{a^{n-k}} = \sqrt[n]{a^{k+n-k}} = \sqrt[n]{a^n} = a$$

Este proceso se denomina racionalizar un denominador. En general si c es el denominador, multiplicamos el numerador y denominador por $\bar{c}$ el conjugado algebraico de c.
El conjugado algebraico $\bar{c}$ de c satisface que $(c \cdot \bar{c})$ no tiene radicales. El proceso es:

$$\boxed{\frac{a}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{\bar{c}}{\bar{c}} = \frac{a \cdot \bar{c}}{(c \cdot \bar{c})} = \frac{a \cdot \bar{c}}{r}}$$

racionaliza el denominador

o

$$\boxed{\frac{a}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{\bar{a}}{\bar{a}} = \frac{(a \cdot \bar{a})}{c \cdot \bar{a}} = \frac{r}{c \cdot \bar{a}}}$$

racionaliza el numerador

Factor en denominador	Multiplicar numerador y denominador por	Factor resultante
$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}\,\sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$
$\sqrt[3]{a}$	$\sqrt[3]{a^2}$	$\sqrt[3]{a}\,\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^3} = a$
$\sqrt[7]{a^3}$	$\sqrt[7]{a^4}$	$\sqrt[7]{a^3}\,\sqrt[7]{a^4} = \sqrt[7]{a^7} = a$
c Expresión a racionalizar	$\bar{c}$ Conjugado de c	$(c \cdot \bar{c})$

Racionalización de denominadores

Racionalice cada denominador:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ (c) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ (d) $\sqrt[5]{\dfrac{x}{y^2}}$

SOLUCIÓN

(a) $$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

(b) $$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$$

(c) $$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2\cdot 3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

(d) $$\sqrt[5]{\frac{x}{y^2}} = \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{y^2}} = \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{y^2}}\frac{\sqrt[5]{y^3}}{\sqrt[5]{y^3}} = \frac{\sqrt[5]{xy^3}}{\sqrt[5]{y^5}} = \frac{\sqrt[5]{xy^3}}{y}$$

Definición de exponentes negativos

Sea m/n un número racional, donde n es un entero positivo mayor a 1. Si a es un número real tal que $\sqrt[n]{a}$ existe, entonces

$$\textbf{(1)}\quad a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

$$\textbf{(2)}\quad a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\textbf{(3)}\quad a^{m/n} = (a^{1/n})^m = (a^m)^{1/n}$$

La notación exponencial $a^{m/n}$

- $x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$
- $x^{3/5} = \left(\sqrt[5]{x}\right)^3 = \sqrt[5]{x^3}$
- $125^{2/3} = \left(\sqrt[3]{125}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{5^3}\right)^2 = 5^2 = 25$
- $\left(\frac{32}{243}\right)^{3/5} = \left(\sqrt[5]{\frac{32}{243}}\right)^3 = \left(\sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^5}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

Simplificación de potencias racionales

Simplificar: (a) $(-27)^{2/3}(4)^{-5/2}$

SOLUCIÓN

(a)

$$\begin{aligned}
(-27)^{2/3}(4)^{-5/2} &= \left(\sqrt[3]{-27}\right)^2\left(\sqrt{4}\right)^{-5} && \text{definición de exponentes racionales} \\
&= (-3)^2(2)^{-5} && \text{tomar raíces} \\
&= \frac{(-3)^2}{2^5} && \text{definición de exponentes negativos} \\
&= \frac{9}{32} && \text{tomar potencias}
\end{aligned}$$

Simplificar: (b) $(r^2s^6)^{1/3}$ (b) $(r^2s^6)^{1/3} = (r^2)^{1/3}(s^6)^{1/3}$ ley 3 de exponentes

$= r^{2/3}s^2$ ley 2 de exponentes

(c) $\left(\dfrac{2x^{2/3}}{y^{1/2}}\right)^2\left(\dfrac{3x^{-5/6}}{y^{1/3}}\right)$

(c) $\left(\dfrac{2x^{2/3}}{y^{1/2}}\right)^2\left(\dfrac{3x^{-5/6}}{y^{1/3}}\right) = \left(\dfrac{4x^{4/3}}{y}\right)\left(\dfrac{3x^{-5/6}}{y^{1/3}}\right)$ leyes de exponentes

$= \dfrac{(4 \cdot 3)x^{4/3-5/6}}{y^{1+(1/3)}}$ ley 1 de exponentes

$= \dfrac{12x^{8/6-5/6}}{y^{4/3}}$ denominador común

$= \dfrac{12x^{1/2}}{y^{4/3}}$ simplificar

Cambie a una expresión que contenga un radical de la forma $\sqrt[n]{a^m}$.

(a) $\sqrt[3]{a}\sqrt{a}$ (b) $\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a^2}}$

SOLUCIÓN

(a) $\sqrt[3]{a}\sqrt{a} = a^{1/3}a^{1/2} = a^{(1/3)+(1/2)} = a^{5/6} = \sqrt[6]{a^5}$

(b) $\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a^2}} = \dfrac{a^{1/4}}{a^{2/3}} = a^{(1/4)-(2/3)} = a^{-5/12} = \dfrac{1}{a^{5/12}} = \dfrac{1}{\sqrt[12]{a^5}}$

Ejercicios. Efectúe las operaciones indicadas y simplifique:

6) $$\frac{3\cdot 2^{-2}-1}{2^{-2}+1}\cdot\left(4^{-2}-3\right) + \sqrt[20]{(-7)^{20}} - \sqrt[13]{(-2)^{13}}$$

14) $$\left[(-3)^2 \div 9^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}\right]^{-1} - \left(\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{16}\right)\cdot 2^{-\frac{1}{3}} - 4\cdot 4^{-1}$$

15) $$\left(\sqrt{\sqrt[4]{\sqrt{\sqrt[3]{2}}}}\right)^{96} + \left\{\left[\left(\sqrt[6]{\sqrt[3]{2}}\right)^{2}\right]^{3}\right\}^{9}$$

21) $$\left|-2+\frac{1}{7}\right| - \frac{3}{2} + \left|5^{-2}+4\right| - 3^{-2}$$

1.1.2 Considere la expresión $3+\dfrac{10}{b}$ donde b es un número entero. ¿qué valores puede tomar b para que esta expresión sea entera?

1.1.4 Un valor a se eleva al cuadrado y el resultado de eleva al cubo, si se obtiene el valor 729, ¿cuál es el valor de a?

1.1.8 Una parcela de tierra se reparte así: la primera persona recibe la mitad del total, la segunda persona recibe un tercio del total y la tercera persona recibe lo que queda (que corresponde a 1000 metros cuadrados). ¿Cuánto medía la propiedad orginalmente?

Presentación realizada por Gilberto Vargas Mathey

Apuntes tomados de:

Álgebra y trigonometría con geometría analítica
Swokowski 12ª.edición

Practicas y soluciones. Matemática General Revista digital Matemática ITCR

Practicas conceptuales de Matemática General Revista digital Matemática ITCR

Apuntes no digitalizados para las lecciones del curso de matemática General
Profesor. Gilberto Vargas Mathey