Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Estadística

DIPLOMADO EN PROBABILIDAD E INFERENCIA BÁSICAS

Módulo

PROBABILIDAD

Carlos Panza Ospino
capanzao@unal.edu.co
Oficina 340—404

PRIMERA SESIÓN

ESPACIOS DE PROBABILIDAD

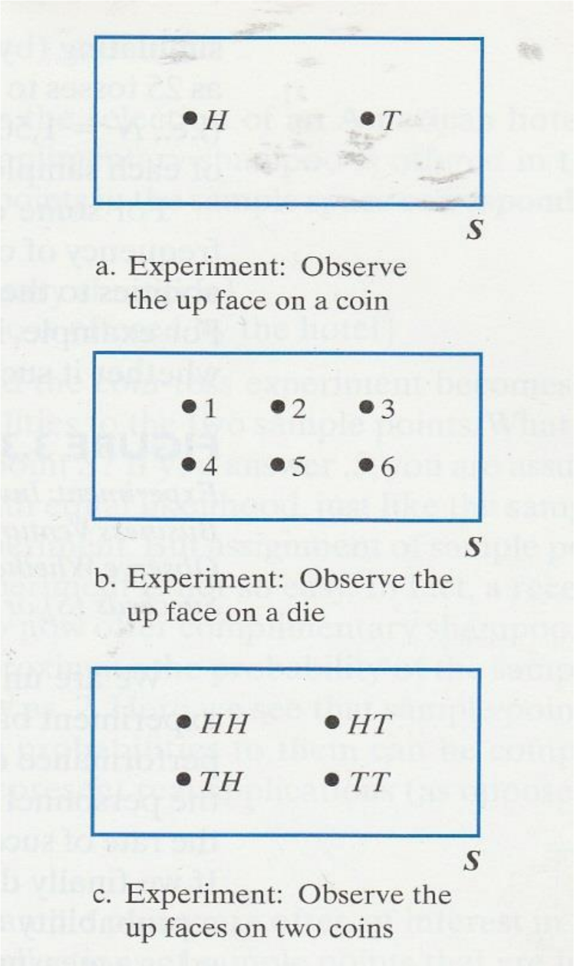
Experimentos aleatorios

Supóngase que se lanza una moneda una vez y se registra el lado visible cuando la moneda se detiene. El resultado que se obtiene es una *observación* o una *medición*; el proceso de hacer observaciones (mediciones) se llama *experimento*. Cualquier acto de observación cuyo resultado es impredecible será *aleatorio*.

Nótese que cuando se lanza la moneda una vez, se puede observar *uno y sólo uno* de los resultados C (cara) o S (sello). Como estos resultados no se pueden descomponer en resultados más simples, se llamarán *elementales* o *puntos muestrales*.

Espacios muestrales

El conjunto de todos los resultados elementales de un experimento aleatorio se llama *espacio muestral* y gráficamente se representa mediante un diagrama de Venn.



<u>EJEMPLO 1</u>. El espacio muestral para el experimento del lanzamiento de la moneda es

$$\Omega = \{C, S\}$$

En este caso el espacio muestral es *finito*.

Espacios muestrales

EJEMPLO 2. Supóngase que se lanza una moneda regular hasta que se obtenga la salida "*CARA*" por primera vez. El espacio muestral es

$$\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$$

En este caso el espacio muestral es *numerable*. Espacios muestrales finitos o numerables son *discretos*.

Experimentos aleatorios con espacios muestrales discretos se dice que son *discretos*.

EJEMPLO 3. Supóngase ahora que se observa la posición de una partícula sobre el eje real. El espacio muestral es

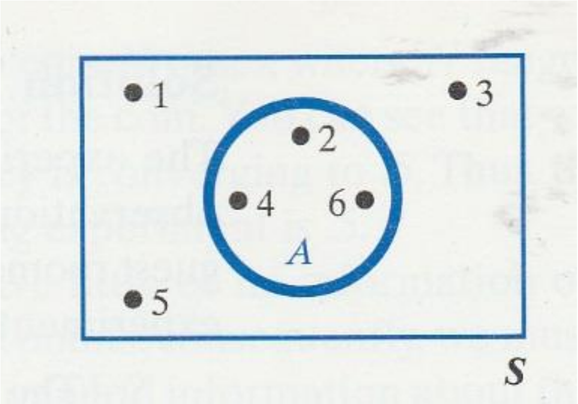
$$\Omega = \mathbb{R}$$

En este caso el espacio muestral es *infinito* o *continuo*.

Eventos o sucesos

Suponga que se le plantea el siguiente juego. Usted debe lanzar un dado genuino una vez y observar la cantidad de puntos en la cara contra el piso cuando el dado se detiene. Si obtiene una cantidad par de puntos, usted gana $100.000,oo; de lo contrario, pierde $50.000,oo.

Formalmente, se tiene



$$A \subseteq \Omega$$

¿Es toda colección de respuestas elementales de un experimento aleatorio un *suceso* o *evento*?

$\boldsymbol{\sigma}$ −álgebra de eventos

Sea $\Omega \neq \emptyset$. Una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω es una σ −álgebra de eventos, si y sólo si, se cumple que:

I. $\Omega \in \mathcal{F}$.

II. Si $A \in \mathcal{F}$, entonces $A^c \in \mathcal{F}$.

III. Si $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Todo subconjunto de Ω que se encuentre en una σ −álgebra es un evento o un suceso.

Ejemplos

EJEMPLO 1. Sea $\Omega = \{1,2,3\}$. La colección $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \Omega\}$ es una σ −álgebra de eventos sobre Ω; mientras que $\mathcal{H} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \Omega\}$, *no* es una σ −álgebra de eventos sobre Ω.

EJEMPLO 2. Sea $\Omega \neq \emptyset$ un espacio muestral arbitrario. La colección $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ es una σ −álgebra de eventos sobre Ω que recibe el nombre de *trivial*.

EJEMPLO 3. Sea $\Omega \neq \emptyset$ un espacio muestral arbitrario. La colección $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{A : A \subseteq \Omega\}$ es una σ −álgebra de eventos sobre Ω que recibe el nombre de *partes de* Ω o σ −álgebra total.

Ejemplos

EJEMPLO 4. Sean $\Omega \neq \emptyset$ y $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots$ una colección de σ −álgebras de eventos sobre Ω. Se tiene que $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$ es una σ −álgebra de eventos sobre Ω; mientras que $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$ *no* es una σ −álgebra de eventos sobre Ω.

EJEMPLO 5. Sea $\Omega \neq \emptyset$ y $\mathcal{L}$ una colección una colección arbitraria de subconjuntos de Ω. La menor σ −álgebra de eventos sobre Ω que contiene a $\mathcal{L}$ recibe el nombre de σ −álgebra *generada* por $\mathcal{L}$ y se simboliza por $\sigma(\mathcal{L})$.

Observaciones

Sean $\Omega \neq \emptyset$ y $\mathcal{F}$ una σ $-$álgebra definida sobre Ω. La dupla $(\Omega; \mathcal{F})$ se conoce como *espacio medible*.

Sea $\Omega \neq \emptyset$. Es claro que los subconjuntos $\emptyset$ y Ω están en cualquier σ $-$álgebra definida sobre Ω. El evento Ω se llama *seguro*, mientras que el evento $\emptyset$ se llama *imposible*. Un evento de la forma $\{\omega\}$, con $\omega \in \Omega$ se llama *elemental*.

Decir que un evento A ocurre significa que al realizar el experimento aleatorio, cuyo espacio muestral es Ω, se obtiene un punto muestral de Ω que se encuentra en el subconjunto A.

Operaciones con sucesos

Si A y B son eventos, entonces

- $A \cap B$ es un evento que ocurre si ambos ocurren.
- $A \cup B$ es un evento que ocurre si por lo menos uno de los dos ocurre.
- A^c es el evento que ocurre cuando A no ocurre.

NOTA. Si $A \cap B = \emptyset$, entonces los eventos A y B son *mutuamente excluyentes* o *incompatibles*. En este caso, $A \cup B$ es el evento que consiste en la aparición exclusiva de uno de los dos.

Noción intuitiva de probabilidad

Cuando se lanza una moneda genuina, tenemos suficiente razón para afirmar que tanto la salida C (cara) como la salida S (sello) tienen el mismo "*chance*" o la misma "*posibilidad*" de ocurrir.

La *posibilidad* de la ocurrencia de una respuesta de un experimento aleatorio se mide en términos de la *frecuencia de ocurrencia de la respuesta cuando el experimento se realiza muchas veces*.

Frecuencia relativa

Supóngase que un experimento aleatorio se repite n veces en las mismas condiciones. Se llama *frecuencia relativa* de ocurrencia del evento A al cociente

$$fr(A) = \frac{n(A)}{n}$$

donde $n(A)$ es la cantidad de veces que aparece A.

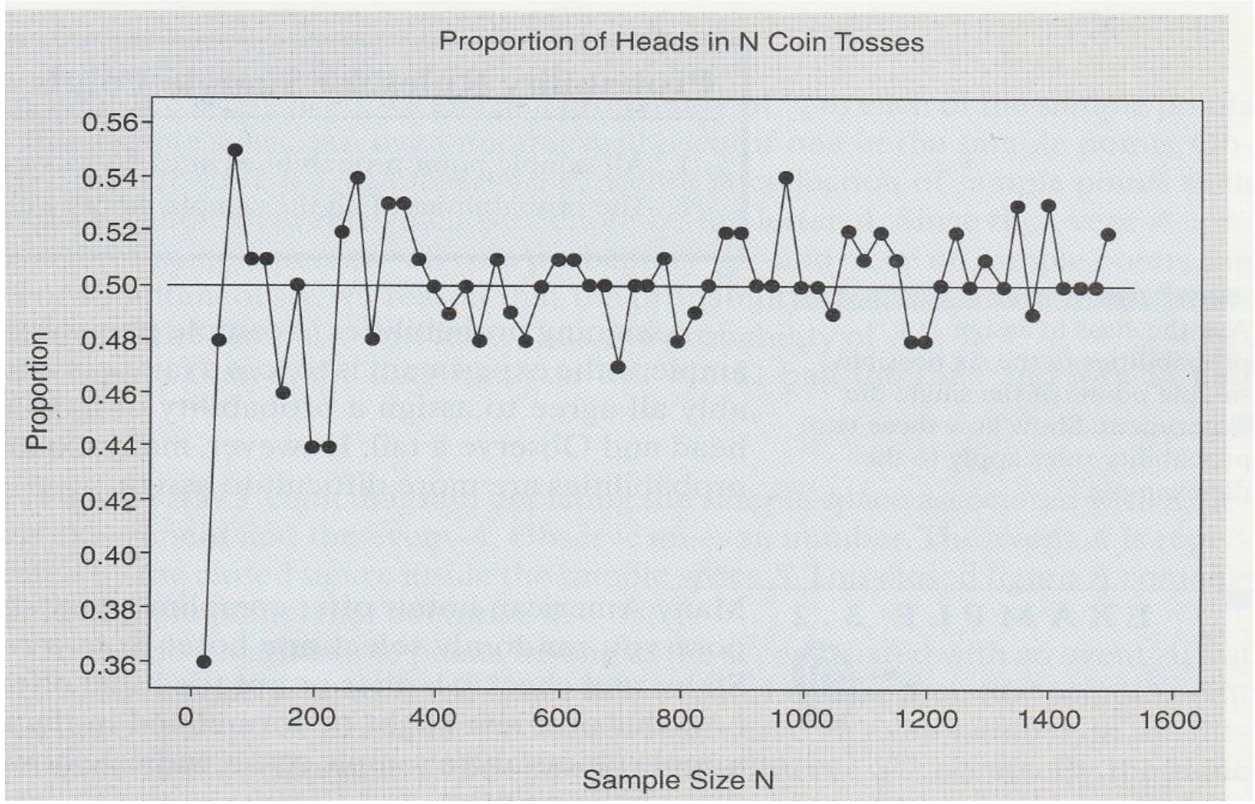
La estabilización de la frecuencia relativa de un evento A se conoce como *regularidad estadística* de la ocurrencia de A. Formalmente, se tiene que

$$P(A) \coloneqq \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n}$$

Es decir, $P(A)$ representa una *medida* de la ocurrencia de A.

Noción frecuentista de probabilidad

Por tanto, cuando se lanza una moneda genuina muchas veces, tenemos suficiente razón para afirmar que tanto la salida C (cara) como la salida S (sello) ocurrirán con la misma frecuencia relativa del 50%.



Asignación de probabilidades

Sin embargo, si el experimento consistiera en analizar el éxito o el fracaso de una inversión, la asignación equiprobable deja de ser cierta y aunque se basa en las ocurrencias de éxitos o fracasos de inversiones similares, tiene también en cuenta criterios adicionales (opinión de expertos, por ejemplo).

Principio de asignación de probabilidades

Las probabilidades asociadas a las respuestas únicas e incompatibles de un experimento aleatorio:

- Deben estar entre 0 y 1
- Su suma debe ser igual a la unidad.

Medida de probabilidad

Sea $(\Omega;\mathcal{F})$ un espacio medible. La aplicación $P:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ es una *medida de probabilidad* sobre $(\Omega;\mathcal{F})$, si y sólo si, se cumple que:

I. $\mathrm{P}(A)\geq 0$ para todo $A\in\mathcal{F}$.

II. $\mathrm{P}(\Omega)=1$.

III. Si $A_1,A_2,\ldots\in\mathcal{F}$, con $A_i\cap A_j=\emptyset$ para $i\neq j$, entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

La tríada $(\Omega;\mathcal{F};P)$ se conoce como *espacio de probabilidad*.

Probabilidad de un suceso

Como $A \in \Omega$, puede ser que:

- Si $A = \emptyset$, entonces $P(A) = P(\emptyset) = 0$. En este caso, el suceso A es imposible (nunca ocurre).
- Si $A = \Omega$, entonces $P(A) = P(\Omega) = 1$. En este caso, el suceso A es cierto (siempre ocurre) y se obtiene el axioma de normatividad.

En consecuencia, para cualquier suceso A se tiene que

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

<u>EJEMPLO</u>: Para el caso del lanzamiento del dado, se definen los sucesos A: "se obtiene cantidad negativa de puntos" y

B: se obtiene menos de diez puntos". Es claro que $A = \emptyset$ (nunca ocurren cantidades negativas de puntos cuando se lanza un dado) y que $B = \Omega$ (siempre ocurren menos de diez puntos cuando se lanza un dado). Luego, $P(A) = 0$ y $P(B) = 1$.

Ejemplos

EJEMPLO 1. Sea $\Omega = \{1,2,3\}$ y la colección $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \Omega\}$. La aplicación P dada por

$$P(A) := \begin{cases} 1 & \text{si } 3 \in A \\ 0 & \text{si } 3 \notin A \end{cases}$$

para todo $A \in \mathcal{F}$ es una medida de probabilidad sobre $(\Omega; \mathcal{F})$.

EJEMPLO 2. En el ejemplo anterior se define la aplicación Q dada por

$$Q(\emptyset) = 0;\ Q(\{1\}) = \frac{1}{3}$$

$$Q(\{2,3\}) = \frac{2}{3};\ Q(\Omega) = 1$$

también es una medida de probabilidad sobre $(\Omega; \mathcal{F})$.

Espacios de probabilidad discretos

Sea $(\Omega; \mathcal{F}; P)$. Si Ω es discreto y $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, el espacio de probabilidad será discreto. En este caso, es claro que, para todo $A \in \mathcal{F}$, se tiene que

$$A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}$$

Por tanto, por el tercer axioma de una medida de probabilidad se tiene que

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$$

Los valores $P(\{\omega\})$ para todo $\omega \in \Omega$, forman un *vector de probabilidades*.

Ejemplo

Sea $(\Omega; \mathcal{F}; P)$ un espacio de probabilidad discreto con $\Omega = \{1,2,3\}$. Luego, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \Omega\}$. El vector de probabilidades $\left(\frac{1}{7}; \frac{4}{7}; \frac{2}{7}\right)$ determina completamente la medida de probabilidad P sobre $\mathcal{F}$ dada por

$$P(\{1,2\}) = \frac{5}{7};\ P(\{1,3\}) = \frac{3}{7};\ P(\{2,3\}) = \frac{6}{7};\ P(\{1,2,3\}) = 1$$

Espacios de probabilidad laplacianos

Sea $(\Omega; \mathcal{F}; P)$ un espacio de probabilidad discreto tal que $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. Si se sabe que $P(\{\omega_j\}) = \frac{1}{n}, j = 1,2, \dots, n,$ entonces para todo $A \in \mathcal{F}$ se tiene que

$$P(A) := \sum_{\omega_j \in A} \frac{1}{n} = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

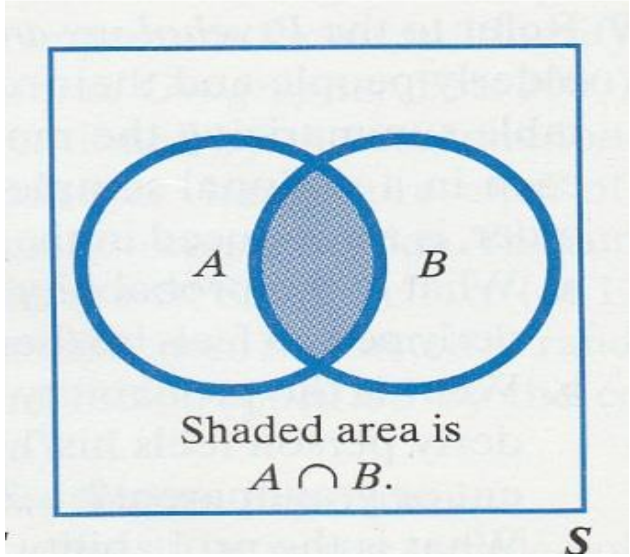
En este caso, el espacio de probabilidad discreto es laplaciano.

EJEMPLO: Para el juego propuesto se tiene que $A = \{2, 4, 6\}$. Luego, la probabilidad de ganar la apuesta es:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Suceso producto de sucesos

El *producto* de dos sucesos A y B es el suceso que consiste en la aparición conjunta de ambos.



EJEMPLO: Considérese el lanzamiento de un dado regular. Sean los sucesos

A: se obtiene cantidad par de puntos

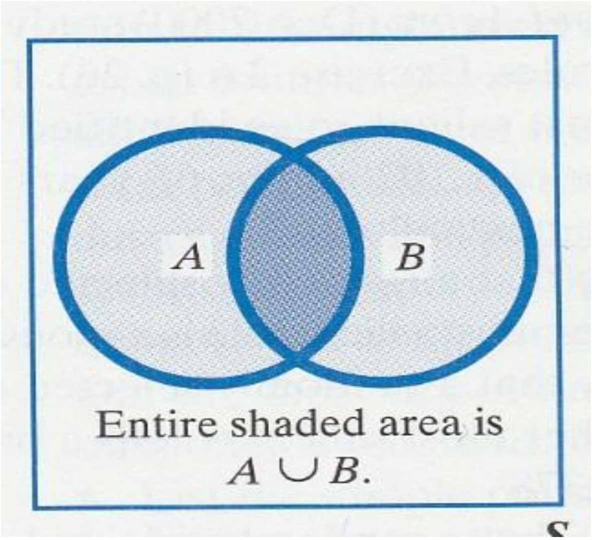
B: se obtiene tres o menos puntos

Es claro que $A \cap B = \{2\} \subseteq \Omega$.

Por tanto, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

Suceso unión de sucesos

La *unión* de dos sucesos A y B es el suceso que consiste en la aparición de por lo menos uno de ellos.



EJEMPLO: El suceso $A \cup B$ se valida si como resultado del experimento ocurre un punto muestral que valide exclusivamente a uno de los dos o a ambos a la vez.

Es claro que $A \cup B = \{1,2,3,4,6\}$

Por tanto, $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$

Suceso diferencia de sucesos

El suceso $A - B$ se llama suceso *diferencia* y consiste en la aparición exclusiva del suceso A.

EJEMPLO: Para el experimento del lanzamiento del dado, $A - B$ consiste en la aparición de cantidades pares de puntos mayores que tres. Es decir,

$$A - B = \{4, 6\}$$

Mientras que $B - A$ consiste en la aparición de cantidades impares de puntos menores o iguales que tres. Es decir,

$$B - A = \{1, 3\}$$

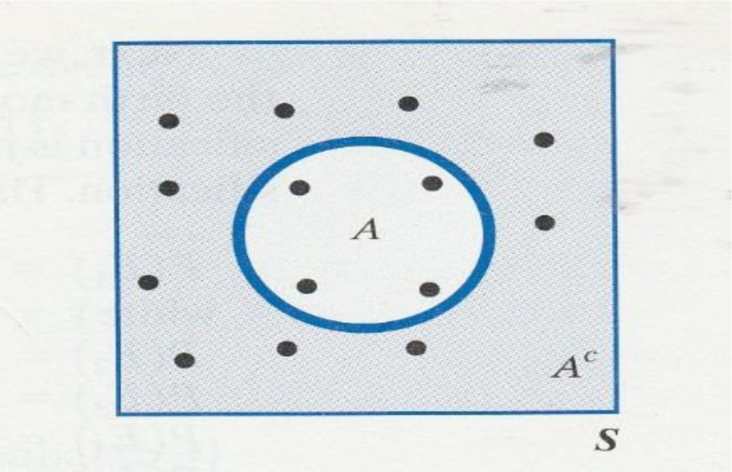
Sin embargo,

$$P(A - B) = P(B - A) = \frac{1}{3}$$

Sucesos opuestos

El suceso *opuesto* del suceso A es el suceso que ocurre cuando no ocurre A. Es decir,

$$A^c = \Omega - A$$



Es claro que

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

EJEMPLO: El suceso A^c consiste en la aparición de cantidades impares de puntos. Es evidente que

$$P(A^c) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Regla aditiva de la probabilidad

Para dos cualesquiera sucesos A y B se tiene que la probabilidad de aparición de por lo menos uno de ellos es

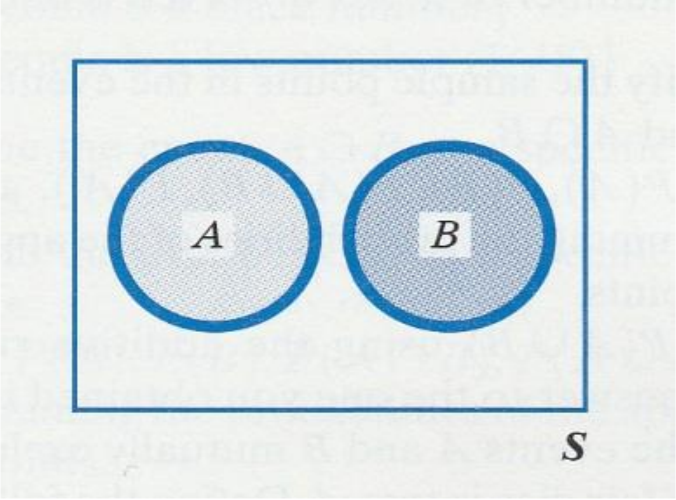
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

EJEMPLO: Para el experimento del lanzamiento del dado, se tiene que

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $P(A \cap B) = 0$ y los sucesos A y B son *mutuamente excluyentes* o *incompatibles*. En este caso, se tiene que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



Algunas consecuencias

De la *diferencia* de sucesos se tiene que

$$A = (A - B) \cup (A \cap B)$$

Luego,

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

EJEMPLO: Para el experimento del lanzamiento del dado, se tiene que la probabilidad de obtener salidas pares que no sean menores o iguales que tres es

$$P(A - B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

Algunas consecuencias

La *diferencia simétrica* de sucesos se define como

$$A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)$$

Luego,

$$P(A \,\Delta\, B) = P(A - B) + P(B - A) =$$

$$P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

<u>EJEMPLO</u>: Para el experimento del lanzamiento del dado, se tiene que la probabilidad de obtener salidas pares mayores que tres o salidas impares menores o iguales que tres es

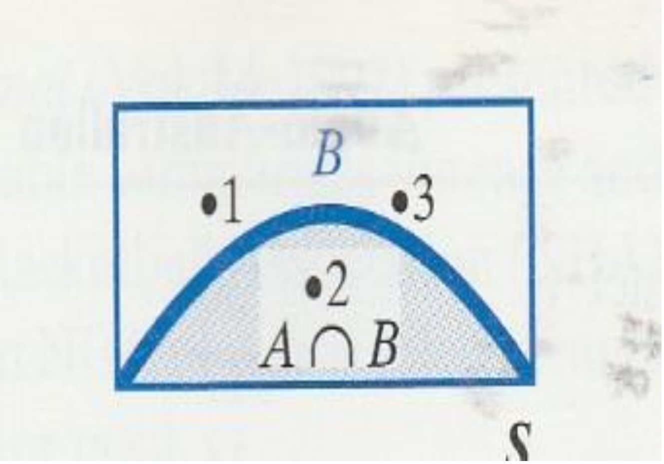
$$P(A \,\Delta\, B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Probabilidad condicional

Para el experimento del lanzamiento del dado, se tiene que la probabilidad del suceso A (obtener cantidad par de puntos) es $P(A) = \frac{1}{2}$.

Supóngase que como resultado del experimento se obtuvo una cantidad de puntos menor o igual que tres (suceso B). ¿Qué pasa con la probabilidad de ocurrencia del suceso A?

La probabilidad de obtener cantidad par de puntos *cuando se sabe que* ya se obtuvo tres o menos puntos es



$$P(A|B) = \frac{1}{3}$$

Probabilidad condicional

La *probabilidad condicional* $P(A|B)$ estima el cambio en la probabilidad de ocurrencia del suceso A cuando se tiene información adicional, pero incompleta, sobre el experimento aleatorio del cual es respuesta (suceso B).

$$P(A|B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#B} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Siempre que $P(B) > 0$.

Probabilidad de aparición conjunta

De la definición de probabilidad condicional se tiene que para cualesquiera dos sucesos A y B del mismo experimento aleatorio se cumple que

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

<u>EJEMPLO</u>: Para el experimento del lanzamiento del dado, la probabilidad de obtener cantidades pares de puntos menores o iguales que tres es

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Probabilidad de aparición conjunta

La probabilidad de aparición conjunta de los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es

$$P(A_1 \cap\ A_2 \cap\ \ldots \cap\ A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \ldots P(A_n|A_1 \cap\ \ldots \cap\ A_{n-1})$$

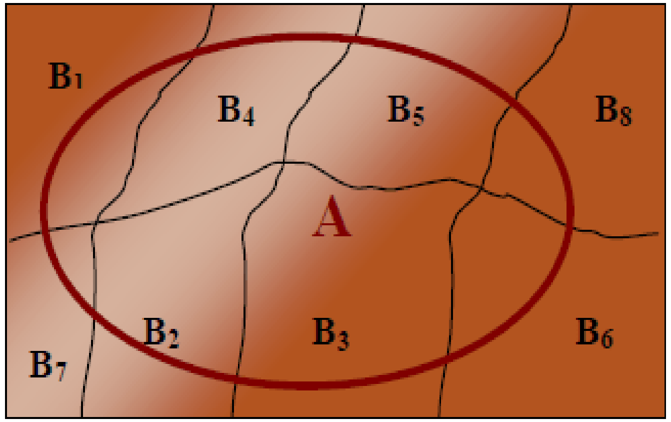
EJEMPLO: De una baraja convencional se escogen al azar tres cartas sin reposición. Sea A_i: "*se obtiene un corazón el* i −ésimo *intento*". La probabilidad de obtener tres corazones es

$$P(A_1 \cap\ A_2 \cap\ A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{13}{52} \times \frac{12}{51} \times \frac{11}{50} \cong 0{,}013$$

Probabilidad completa

Sea $\Omega \neq \emptyset$. Sean los sucesos $B_1, B_2, \dots, B_k$ tales que:

- ❑ $B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j$
- ❑ $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k = \Omega$



Para todo $A \subseteq \Omega$, se cumple que:

$$A = (B_1 \cap A) \cup \cdots \cup (B_k \cap A)$$

Por tanto,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i) P(A|B_i)$$

EJEMPLO. Una urna contiene tres balotas blancas y cuatro negras. Una segunda urna contiene cinco balotas blancas y dos negras. De la primera se saca una balota al azar y se coloca en la segunda urna. Seguidamente se saca una balota al azar de la segunda urna. ¿Cuál es la probabilidad de que la balota sacada de la segunda urna sea blanca?

Sean los sucesos B: "*se pasa una balota blanca de la primera urna a la segunda*" y A: "*se saca una balota blanca de la segunda urna*". Es claro que:

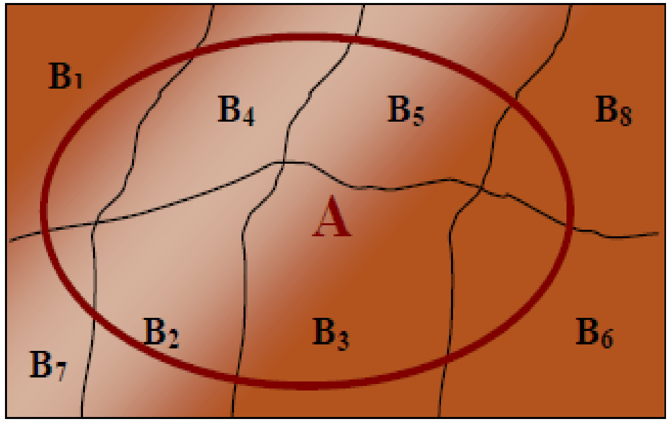
$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B^c)P(A|B^c)$$

$$P(A) = \frac{3}{7} \times \frac{6}{8} + \frac{4}{7} \times \frac{5}{8} = \frac{19}{28}$$

Fórmulas de Bayes

Sea $\Omega \neq \emptyset$. Sean los sucesos $B_1, B_2, \ldots, B_k$ tales que:

- ❑ $B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j$
- ❑ $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k = \Omega$



Si el suceso A ocurre, entonces

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$$

donde

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)$$

<u>EJEMPLO</u>. Para el caso de las dos urnas. Supóngase que de la primera urna se ha pasado una balota y que de la segunda urna se saca al azar una balota negra. ¿De qué color era la balota que se pasó de la primera urna más probablemente?

De las fórmulas de Bayes se aprecia más probablemente se pasó una balota negra de la primera urna:

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{7} \times \frac{6}{8}}{\frac{19}{28}} = \frac{9}{19}$$

$$P(B^c|A) = \frac{P(B^c)P(A|B^c)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{7} \times \frac{5}{8}}{\frac{19}{28}} = \frac{10}{19}$$

Independencia de sucesos

Los sucesos A y B son estadísticamente independientes si y sólo si

$$P(A|B) = P(A)$$

o

$$P(B|A) = P(B)$$

Por consiguiente,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

<u>EJEMPLO</u>: Se extrae una carta al azar de una baraja convencional. Sean los sucesos B: "*se extrae una reina*" y A: "*se extrae un trébol*". Es claro que los sucesos A y B son estadísticamente independientes:

$$P(A)P(B) = \frac{4}{52} \times \frac{13}{52} = \frac{1}{52}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{52}$$

Probabilidad de aparición conjunta de sucesos independientes

La probabilidad de aparición conjunta de los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ que forman una familia de sucesos estadísticamente independientes es

$$P(A_1 \cap \ A_2 \cap \ \ldots \cap \ A_n) = P(A_1)P(A_2) \ldots P(A_n)$$

EJEMPLO: De una baraja convencional se escogen al azar tres cartas con reposición. Sea A_i: "*se obtiene un corazón el* i −ésimo *intento*". La probabilidad de obtener tres corazones es

$$P(A_1 \cap \ A_2 \cap \ A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{13}{52} \times \frac{13}{52} \times \frac{13}{52} \cong 0{,}016$$

Gracias

Diagramado en

Power Point 2013