Diplomado en Probabilidad e Inferencia Básica

Sandra Vergara Cardozo

Profesora

Universidad Nacional de Colombia

Marzo 21, 2020.

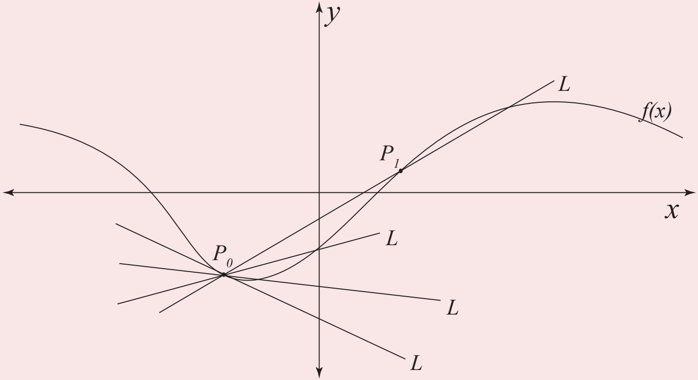
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE BOGOTÁ

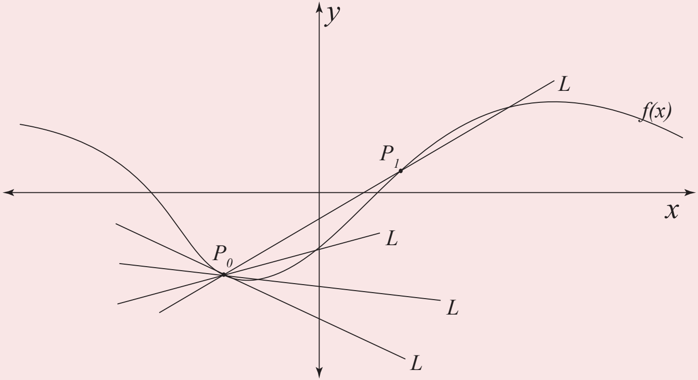
1. Derivadas

Derivadas

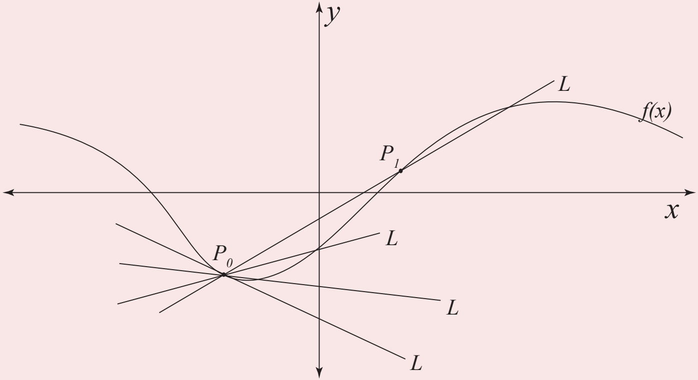
Si dada una función real arbitraria $f(x)$ y un punto $P_0(x_0, f(x_0))$, (como se indica en la siguiente figura)



Si dada una función real arbitraria $f(x)$ y un punto $P_0(x_0, f(x_0))$, (como se indica en la siguiente figura)



Si dada una función real arbitraria $f(x)$ y un punto $P_0(x_0, f(x_0))$, (como se indica en la siguiente figura)



Se considera un punto $P_1(x_0 + h, f(x_0 + h))$ con h número real arbitrario.
La pendiente de la recta determinada por estos dos puntos es igual a:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Geométricamente se observa que si P_1 se acerca cada vez más a P_0, esto es, si h tiende a cero, la recta determinada por P_0 y P_1 se aproxima cada vez más a $f(x)$ en proximidades de $P_0(x_0, f(x_0))$. La pendiente de la recta que más se aproxima a $f(x)$ en puntos próximos a P_0 es la pendiente de la curva $f(x)$ en $x = x_0$ y está determinada por:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Derivadas

Se considera un punto $P_1(x_0 + h, f(x_0 + h))$ con h número real arbitrario. La pendiente de la recta determinada por estos dos puntos es igual a:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Geométricamente se observa que si P_1 se acerca cada vez más a P_0, esto es, si h tiende a cero, la recta determinada por P_0 y P_1 se aproxima cada vez más a $f(x)$ en proximidades de $P_0(x_0, f(x_0))$. La pendiente de la recta que más se aproxima a $f(x)$ en puntos próximos a P_0 es la pendiente de la curva $f(x)$ en $x = x_0$ y está determinada por:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Se considera un punto $P_1(x_0 + h, f(x_0 + h))$ con h número real arbitrario. La pendiente de la recta determinada por estos dos puntos es igual a:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Geométricamente se observa que si P_1 se acerca cada vez más a P_0, esto es, si h tiende a cero, la recta determinada por P_0 y P_1 se aproxima cada vez más a $f(x)$ en proximidades de $P_0(x_0, f(x_0))$. La pendiente de la recta que más se aproxima a $f(x)$ en puntos próximos a P_0 es la pendiente de la curva $f(x)$ en $x = x_0$ y está determinada por:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Derivadas

Se considera un punto $P_1(x_0 + h, f(x_0 + h))$ con h número real arbitrario. La pendiente de la recta determinada por estos dos puntos es igual a:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Geométricamente se observa que si P_1 se acerca cada vez más a P_0, esto es, si h tiende a cero, la recta determinada por P_0 y P_1 se aproxima cada vez más a $f(x)$ en proximidades de $P_0(x_0, f(x_0))$. La pendiente de la recta que más se aproxima a $f(x)$ en puntos próximos a P_0 es la pendiente de la curva $f(x)$ en $x = x_0$ y está determinada por:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

DE COLOMBIA
SEDE BOGOTÁ

Se considera un punto $P_1(x_0+h, f(x_0+h))$ con h número real arbitrario. La pendiente de la recta determinada por estos dos puntos es igual a:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Geométricamente se observa que si P_1 se acerca cada vez más a P_0, esto es, si h tiende a cero, la recta determinada por P_0 y P_1 se aproxima cada vez más a $f(x)$ en proximidades de $P_0(x_0, f(x_0))$. La pendiente de la recta que más se aproxima a $f(x)$ en puntos próximos a P_0 es la pendiente de la curva $f(x)$ en $x=x_0$ y está determinada por:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

DE COLOMBIA
SEDE BOGOTÁ

Derivadas

Se considera un punto $P_1(x_0 + h, f(x_0 + h))$ con h número real arbitrario. La pendiente de la recta determinada por estos dos puntos es igual a:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Geométricamente se observa que si P_1 se acerca cada vez más a P_0, esto es, si h tiende a cero, la recta determinada por P_0 y P_1 se aproxima cada vez más a $f(x)$ en proximidades de $P_0(x_0, f(x_0))$. La pendiente de la recta que más se aproxima a $f(x)$ en puntos próximos a P_0 es la pendiente de la curva $f(x)$ en $x = x_0$ y está determinada por:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

DE COLOMBIA
SEDE BOGOTÁ

Se considera un punto $P_1(x_0+h, f(x_0+h))$ con h número real arbitrario. La pendiente de la recta determinada por estos dos puntos es igual a:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Geométricamente se observa que si P_1 se acerca cada vez más a P_0, esto es, si h tiende a cero, la recta determinada por P_0 y P_1 se aproxima cada vez más a $f(x)$ en proximidades de $P_0(x_0, f(x_0))$. La pendiente de la recta que más se aproxima a $f(x)$ en puntos próximos a P_0 es la pendiente de la curva $f(x)$ en $x=x_0$ y está determinada por:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

DE COLOMBIA
SEDE BOGOTÁ

Derivadas

Se considera un punto $P_1(x_0 + h, f(x_0 + h))$ con h número real arbitrario. La pendiente de la recta determinada por estos dos puntos es igual a:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Geométricamente se observa que si P_1 se acerca cada vez más a P_0, esto es, si h tiende a cero, la recta determinada por P_0 y P_1 se aproxima cada vez más a $f(x)$ en proximidades de $P_0(x_0, f(x_0))$. La pendiente de la recta que más se aproxima a $f(x)$ en puntos próximos a P_0 es la pendiente de la curva $f(x)$ en $x = x_0$ y está determinada por:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Se considera un punto $P_1(x_0 + h, f(x_0 + h))$ con h número real arbitrario. La pendiente de la recta determinada por estos dos puntos es igual a:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Geométricamente se observa que si P_1 se acerca cada vez más a P_0, esto es, si h tiende a cero, la recta determinada por P_0 y P_1 se aproxima cada vez más a $f(x)$ en proximidades de $P_0(x_0, f(x_0))$. La pendiente de la recta que más se aproxima a $f(x)$ en puntos próximos a P_0 es la pendiente de la curva $f(x)$ en $x = x_0$ y está determinada por:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Se considera un punto $P_1(x_0+h, f(x_0+h))$ con h número real arbitrario. La pendiente de la recta determinada por estos dos puntos es igual a:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Geométricamente se observa que si P_1 se acerca cada vez más a P_0, esto es, si h tiende a cero, la recta determinada por P_0 y P_1 se aproxima cada vez más a $f(x)$ en proximidades de $P_0(x_0, f(x_0))$. La pendiente de la recta que más se aproxima a $f(x)$ en puntos próximos a P_0 es la pendiente de la curva $f(x)$ en $x=x_0$ y está determinada por:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Sea a un número real que pertenece al dominio de una función f. La **derivada** de f en $x = a$, denotada por $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

siempre que este límite exista. En este caso se dice que f es **derivable** o **diferenciable** en a.

La **función derivada de** f en términos de la variable x, se expresa en la forma

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

f es diferenciable en un intervalo abierto si es diferenciable en cada punto del intervalo.

Teorema. Si una función f es derivable en $x = a$ entonces f es continua en ese punto.

Sea a un número real que pertenece al dominio de una función f. La **derivada** de f en $x = a$, denotada por $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

siempre que este límite exista. En este caso se dice que f es **derivable** o **diferenciable** en a.

La **función derivada de** f en términos de la variable x, se expresa en la forma

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

f es diferenciable en un intervalo abierto si es diferenciable en cada punto del intervalo.

Teorema. Si una función f es derivable en $x = a$ entonces f es continua en ese punto.

Sea a un número real que pertenece al dominio de una función f. La **derivada** de f en $x = a$, denotada por $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

siempre que este límite exista. En este caso se dice que f es **derivable** o **diferenciable** en a.

La **función derivada de** f en términos de la variable x, se expresa en la forma

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

f es diferenciable en un intervalo abierto si es diferenciable en cada punto del intervalo.

Teorema. Si una función f es derivable en $x = a$ entonces f es continua en ese punto.

Sea a un número real que pertenece al dominio de una función f. La **derivada** de f en $x = a$, denotada por $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

siempre que este límite exista. En este caso se dice que f es **derivable** o **diferenciable** en a.

La **función derivada de** f en términos de la variable x, se expresa en la forma

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

f es diferenciable en un intervalo abierto si es diferenciable en cada punto del intervalo.

Teorema. Si una función f es derivable en $x = a$ entonces f es continua en ese punto.

Sea a un número real que pertenece al dominio de una función f. La **derivada** de f en $x = a$, denotada por $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

siempre que este límite exista. En este caso se dice que f es **derivable** o **diferenciable** en a.

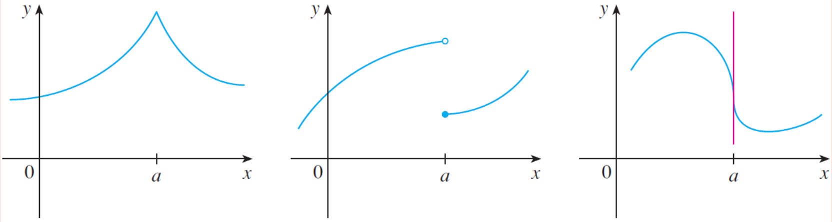
La **función derivada de** f en términos de la variable x, se expresa en la forma

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

f es diferenciable en un intervalo abierto si es diferenciable en cada punto del intervalo.

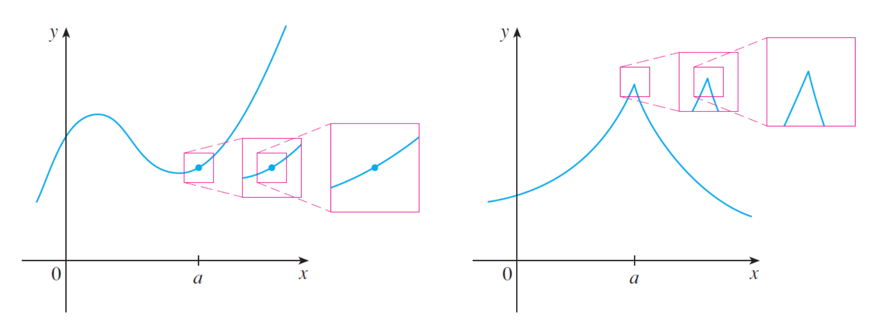
Teorema. Si una función f es derivable en $x = a$ entonces f es continua en ese punto.

Casos cuando f no es diferenciable en a



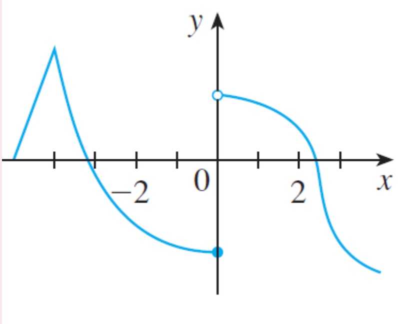
(a) A corner (b) A discontinuity (c) A vertical tangent

Zoom de una Función Diferenciable y una No Diferenciable

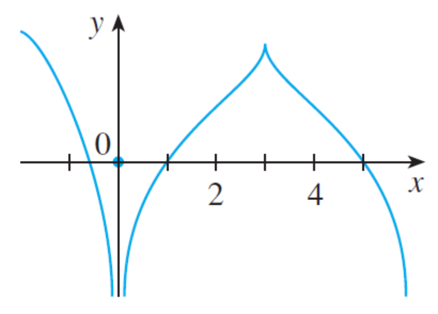


Derivadas

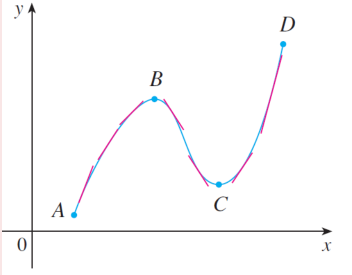
Dónde f no es diferenciable?



Dónde f no es diferenciable?



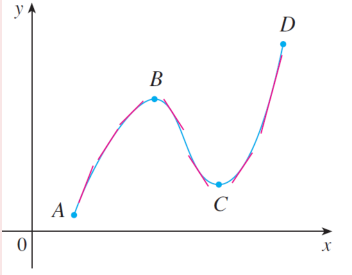
Qué dice f' de f?



Donde f es creciente las líneas tangente tienen pendiente +, así que $f' > 0$.

Donde f es decreciente las líneas tangente tienen pendientes -, así que $f' < 0$.

Qué dice f' de f?



Donde f es creciente las líneas tangente tienen pendiente +, así que $f' > 0$.
Donde f es decreciente las líneas tangente tienen pendientes -, así que $f' < 0$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ

Derivadas

Qué dice f' de f?

Si $f'(x) > 0$ sobre un intervalo, entonces f es CRECIENTE en ese intervalo.

Si $f'(x) < 0$ sobre un intervalo, entonces f es DECRECIENTE en ese intervalo.

Si $f'(x) = 0$ sobre un intervalo, entonces f tiene en x un punto crítico, y x es candidato a máximo/mínimo local.

Qué dice f' de f?

Si $f'(x) > 0$ sobre un intervalo, entonces f es CRECIENTE en ese intervalo.

Si $f'(x) < 0$ sobre un intervalo, entonces f es DECRECIENTE en ese intervalo.

Si $f'(x) = 0$ sobre un intervalo, entonces f tiene en x un punto crítico, y x es candidato a máximo/mínimo local.

¿Qué dice f' de f?

Si $f'(x) > 0$ sobre un intervalo, entonces f es CRECIENTE en ese intervalo.

Si $f'(x) < 0$ sobre un intervalo, entonces f es DECRECIENTE en ese intervalo.

Si $f'(x) = 0$ sobre un intervalo, entonces f tiene en x un punto crítico, y x es candidato a máximo/mínimo local.

Qué dice f'' de f?

Si $f''(x) > 0$ sobre un intervalo, entonces f es CÓNCAVA HACIA ARRIBA en ese intervalo.

Si $f''(x) < 0$ sobre un intervalo, entonces f es CÓNCAVA HACIA ABAJO en ese intervalo.

Si $f''(x) = 0$, entonces f CAMBIA DE CURVARTURA en x. x constituye un punto de inflexión

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ

Qué dice f'' de f?

Si $f''(x) > 0$ sobre un intervalo, entonces f es CÓNCAVA HACIA ARRIBA en ese intervalo.

Si $f''(x) < 0$ sobre un intervalo, entonces f es CÓNCAVA HACIA ABAJO en ese intervalo.

Si $f''(x) = 0$, entonces f CAMBIA DE CURVARTURA en x. x constituye un punto de inflexión

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ

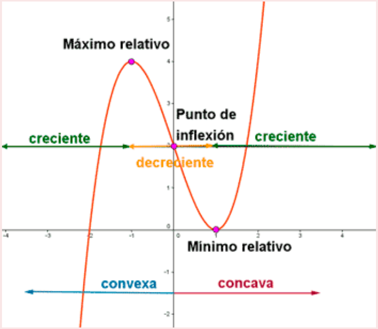
Qué dice f'' de f?

Si $f''(x) > 0$ sobre un intervalo, entonces f es CÓNCAVA HACIA ARRIBA en ese intervalo.

Si $f''(x) < 0$ sobre un intervalo, entonces f es CÓNCAVA HACIA ABAJO en ese intervalo.

Si $f''(x) = 0$, entonces f CAMBIA DE CURVARTURA en x. x constituye un punto de inflexión

Qué dice f' y f'' de f?



Qué dicen f' y f'' de f?

Haga un bosquejo de f de acuerdo a las siguientes condiciones:

- $f'(x) > 0$ en $(-\infty, 1)$, $f'(x) < 0$ en $(1, \infty)$
- $f''(x) > 0$ en $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$, $f''(x) < 0$ en $(-2, 2)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ

Qué dicen f' y f'' de f?

Haga un bosquejo de f de acuerdo a las siguientes condiciones:

- $f'(x) > 0$ en $(-\infty, 1)$, $f'(x) < 0$ en $(1, \infty)$
- $f''(x) > 0$ en $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$, $f''(x) < 0$ en $(-2, 2)$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

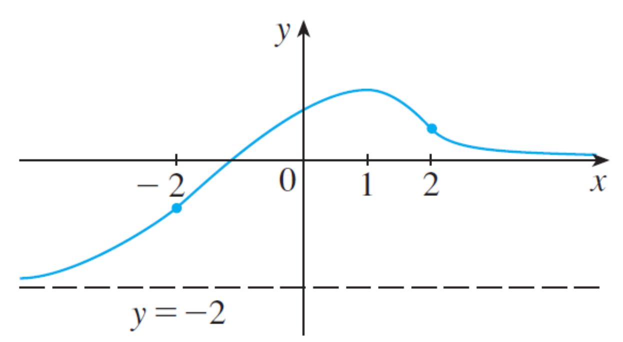
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ

Qué dicen f' y f'' de f?

Haga un bosquejo de f de acuerdo a las siguientes condiciones:

- $f'(x) > 0$ en $(-\infty, 1)$, $f'(x) < 0$ en $(1, \infty)$
- $f''(x) > 0$ en $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$, $f''(x) < 0$ en $(-2, 2)$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

Qué dice f' y f'' de f?



Derivadas

Reglas de derivación

- Si $f(x) = c$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces,
  f es diferenciable en todo x y $f'(x) = 0$.

$$f(x) = 7, \quad f'(x) = 0$$

- Si $f(x) = x^n$ y $n \in \mathbb{R}$ entonces f es diferenciable en todo x y $f'(x) = nx^{n-1}$.

$$f(x) = x^3, \quad f'(x) = 3x^2$$

- Si $c \in \mathbb{R}$ y f es diferenciable en x
  entonces, cf es diferenciable en x y $(cf)'(x) = cf'(x)$.

$$f(x) = 4x^5, \quad f'(x) = 4(5x^4) = 20x^4$$

Derivadas

Reglas de derivación

- Si $f(x) = c$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces, f es diferenciable en todo x y $f'(x) = 0$.

$$f(x) = 7, \quad f'(x) = 0$$

- Si $f(x) = x^n$ y $n \in \mathbb{R}$ entonces f es diferenciable en todo x y $f'(x) = nx^{n-1}$.

$$f(x) = x^3, \quad f'(x) = 3x^2$$

- Si $c \in \mathbb{R}$ y f es diferenciable en x entonces, cf es diferenciable en x y $(cf)'(x) = cf'(x)$.

$$f(x) = 4x^5, \quad f'(x) = 4(5x^4) = 20x^4$$

Reglas de derivación

- Si $f\,(x) = c$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces,
  f es diferenciable en todo x y $f'\,(x) = 0$.

$$f(x) = 7, \quad f'(x) = 0$$

- Si $f\,(x) = x^n$ y $n \in \mathbb{R}$ entonces f es diferenciable en todo x y $f'\,(x) = nx^{n-1}$.

$$f(x) = x^3, \quad f'(x) = 3x^2$$

- Si $c \in \mathbb{R}$ y f es diferenciable en x
  entonces, cf es diferenciable en x y $(cf)'$
  $(x) = cf'\,(x)$.

$$f(x) = 4x^5, \quad f'(x) = 4(5x^4) = 20x^4$$

Reglas de derivación

- Si $f(x) = c$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces, f es diferenciable en todo x y $f'(x) = 0$.

$$f(x) = 7, \quad f'(x) = 0$$

- Si $f(x) = x^n$ y $n \in \mathbb{R}$ entonces f es diferenciable en todo x y $f'(x) = nx^{n-1}$.

$$f(x) = x^3, \quad f'(x) = 3x^2$$

- Si $c \in \mathbb{R}$ y f es diferenciable en x entonces, cf es diferenciable en x y $(cf)'(x) = cf'(x)$.

$$f(x) = 4x^5, \quad f'(x) = 4(5x^4) = 20x^4$$

Reglas de derivación

- Si $f\,(x) = c$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces, f es diferenciable en todo x y $f'\,(x) = 0$.

$$f(x) = 7, \quad f'(x) = 0$$

- Si $f\,(x) = x^n$ y $n \in \mathbb{R}$ entonces f es diferenciable en todo x y $f'\,(x) = nx^{n-1}$.

$$f(x) = x^3, \quad f'(x) = 3x^2$$

- Si $c \in \mathbb{R}$ y f es diferenciable en x entonces, cf es diferenciable en x y $(cf)'$ $(x) = cf'\,(x)$.

$$f(x) = 4x^5, \quad f'(x) = 4(5x^4) = 20x^4$$

Reglas de derivación

- Si f y g son funciones diferenciables en x entonces la función $f + g$ es diferenciable en x y

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

$$f(x) = x^4, \quad g(x) = x^6, \quad \begin{aligned}(f+g)(x) &= x^4 + x^6 \\ (f+g)'(x) &= 4x^3 + 6x^5\end{aligned}$$

Reglas de derivación

- Si f y g son funciones diferenciables en x entonces la función $f+g$ es diferenciable en x y

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

$$f(x) = x^4, \quad g(x) = x^6, \quad \begin{aligned}(f+g)(x) &= x^4 + x^6\\ (f+g)'(x) &= 4x^3 + 6x^5\end{aligned}$$

Reglas de derivación

- Si f y g son funciones diferenciables en x entonces la función $f+g$ es diferenciable en x y

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

$$f(x) = x^4, \quad g(x) = x^6, \quad \begin{aligned}(f+g)(x) &= x^4 + x^6 \\ (f+g)'(x) &= 4x^3 + 6x^5\end{aligned}$$

Reglas de derivación

- Si f y g son funciones diferenciables en x entonces $f - g$ es diferenciable en x y

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x).$$

$$f(x) = x^3, \quad g(x) = x^2, \quad \begin{aligned}(f-g)(x) &= x^3 - x^2 \\ (f-g)'(x) &= 3x^2 - 2x\end{aligned}$$

Reglas de derivación

- Si f y g son funciones diferenciables en x entonces $f-g$ es diferenciable en x y

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x).$$

$$f(x) = x^3, \quad g(x) = x^2, \quad (f-g)(x) = x^3 - x^2$$
$$(f-g)'(x) = 3x^2 - 2x$$

Reglas de derivación

- Si f y g son funciones diferenciables en x entonces $f - g$ es diferenciable en x y

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x).$$

$$f(x) = x^3, \quad g(x) = x^2, \quad \begin{aligned}(f-g)(x) &= x^3 - x^2 \\ (f-g)'(x) &= 3x^2 - 2x\end{aligned}$$

Reglas de derivación

- Si f y g son funciones diferenciables en x entonces la función $f \cdot g$ es diferenciable en x y

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)\,.$$

- Si f y g son funciones diferenciables en x entonces $\frac{f}{g}$ es diferenciable en x siempre que $g(x) \neq 0$ y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$$

Reglas de derivación

- Si f y g son funciones diferenciables en x entonces la función $f \cdot g$ es diferenciable en x y

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)\,.$$

- Si f y g son funciones diferenciables en x entonces $\frac{f}{g}$ es diferenciable en x siempre que $g(x) \neq 0$ y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)}$$

Reglas de derivación

- Si f y g son funciones diferenciables en x entonces la función $f \cdot g$ es diferenciable en x y

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x).$$

- Si f y g son funciones diferenciables en x entonces $\frac{f}{g}$ es diferenciable en x siempre que $g(x) \neq 0$ y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)}$$

Reglas de derivación

- Si f y g son funciones diferenciables en x entonces la función $f \cdot g$ es diferenciable en x y

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x).$$

- Si f y g son funciones diferenciables en x entonces $\frac{f}{g}$ es diferenciable en x siempre que $g(x) \neq 0$ y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)}$$

Fórmula de Leibniz de la derivada n-ésima

Sean f y g funciones n-veces diferenciables. La derivada "n-ésima" del producto $f \cdot g$ viene dada por:

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x) \cdot g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

donde $\binom{n}{k}$ es llamado coeficiente binomial.

Fórmula de Leibniz de la derivada n-ésima

Sean f y g funciones n-veces diferenciables. La derivada "n-ésima" del producto $f \cdot g$ viene dada por:

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x) \cdot g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

donde $\binom{n}{k}$ es llamado coeficiente binomial.

Fórmula de Leibniz de la derivada n-ésima

Sean f y g funciones n-veces diferenciables. La derivada "n-ésima" del producto $f \cdot g$ viene dada por:

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x) \cdot g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

donde $\binom{n}{k}$ es llamado coeficiente binomial.

Derivadas

Reglas de derivación

- Las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ son diferenciables en todo x y

$$f'(x) = \cos x \text{ y } g'(x) = -\sin x.$$

  - $f(x) = \tan x, \quad f'(x) = \sec^2 x$
  - $f(x) = \cot x, \quad f'(x) = -\csc^2 x$
  - $f(x) = \sec x, \quad f'(x) = \sec x \tan x$
  - $f(x) = \csc x, \quad f'(x) = -\csc x \cot x$

Reglas de derivación

- Las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ son diferenciables en todo x y
$$f'(x) = \cos x \text{ y } g'(x) = -\sin x.$$

- $f(x) = \tan x, \quad f'(x) = \sec^2 x$
- $f(x) = \cot x, \quad f'(x) = -\csc^2 x$
- $f(x) = \sec x, \quad f'(x) = \sec x \tan x$
- $f(x) = \csc x, \quad f'(x) = -\csc x \cot x$

Reglas de derivación

- Las funciones $f\,(x) = \operatorname{sen} x$ y $g\,(x) = \cos x$ son diferenciables en todo x y

$$f'\,(x) = \cos x \text{ y } \; g'\,(x) = -\sin x.$$

  - $f(x) = \tan x, \quad f'(x) = \sec^2 x$
  - $f(x) = \cot x, \quad f'(x) = -\csc^2 x$
  - $f(x) = \sec x, \quad f'(x) = \sec x \tan x$
  - $f(x) = \csc x, \quad f'(x) = -\csc x \cot x$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE BOGOTÁ

Reglas de derivación

- Las funciones $f\,(x) = \operatorname{sen} x$ y $g\,(x) = \cos x$ son diferenciables en todo x y

$$f'\,(x) = \cos x \text{ y } \; g'\,(x) = -\sin x.$$

  - $f(x) = \tan x, \quad f'(x) = \sec^2 x$
  - $f(x) = \cot x, \quad f'(x) = -\csc^2 x$
  - $f(x) = \sec x, \quad f'(x) = \sec x \tan x$
  - $f(x) = \csc x, \quad f'(x) = -\csc x \cot x$

Reglas de derivación

- Las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ son diferenciables en todo x y

$$f'(x) = \cos x \text{ y } g'(x) = -\sin x.$$

  - $f(x) = \tan x, \quad f'(x) = \sec^2 x$
  - $f(x) = \cot x, \quad f'(x) = -\csc^2 x$
  - $f(x) = \sec x, \quad f'(x) = \sec x \tan x$
  - $f(x) = \csc x, \quad f'(x) = -\csc x \cot x$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE BOGOTÁ

Derivadas

Reglas de derivación

- Las funciones $f\left(x\right) = \operatorname{sen} x$ y $g\left(x\right) = \cos x$ son diferenciables en todo x y

$$f'\left(x\right) = \cos x \text{ y } \; g'\left(x\right) = -\sin x.$$

  - $f(x) = \tan x, \quad f'(x) = \sec^2 x$
  - $f(x) = \cot x, \quad f'(x) = -\csc^2 x$
  - $f(x) = \sec x, \quad f'(x) = \sec x \tan x$
  - $f(x) = \csc x, \quad f'(x) = -\csc x \cot x$

Derivada del logarítmo

1. $f(x) = \ln x, \qquad f'(x) = \frac{1}{x}.$
2. $f(x) = \log_a x, \qquad f'(x) = \frac{1}{x \ln a}.$

Derivada de la función exponencial

1. $f(x) = a^x, \qquad f'(x) = a^x \ln a.$
2. $f(x) = e^x, \qquad f'(x) = e^x.$

Derivadas

Derivada del logarítmo

1. $f(x) = \ln x, \qquad f'(x) = \frac{1}{x}.$
2. $f(x) = \log_a x, \qquad f'(x) = \frac{1}{x \ln a}.$

Derivada de la función exponencial

1. $f(x) = a^x, \qquad f'(x) = a^x \ln a.$
2. $f(x) = e^x, \qquad f'(x) = e^x.$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ

Derivadas

Derivada del logarítmo

1. $f(x) = \ln x, \qquad f'(x) = \frac{1}{x}.$
2. $f(x) = \log_a x, \qquad f'(x) = \frac{1}{x \ln a}.$

Derivada de la función exponencial

1. $f(x) = a^x, \qquad f'(x) = a^x \ln a.$
2. $f(x) = e^x, \qquad f'(x) = e^x.$

Regla de la cadena

Si g es una función diferenciable en x y f es una función diferenciable en $g(x)$, entonces la función $f \circ g$ es diferenciable en x y

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$$

Regla de la cadena

Si g es una función diferenciable en x y f es una función diferenciable en $g(x)$, entonces la función $f \circ g$ es diferenciable en x y

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$$

Funciones implícitas

Una correspondencia o una función está definida en forma implícita cuando no aparece despejada la y sino que la relación entre x e y viene dada por una ecuación de dos incógnitas cuyo segundo miembro es cero.

Derivadas de funciones implícitas

Para hallar la derivada en forma implícita no es necesario despejar y. Basta derivar miembro a miembro, utilizando las reglas vistas hasta ahora y teniendo presente que:

$x' = 1$. En general $y' \neq 1$. Por lo que se omitira x' y dejara y'.

Funciones implícitas

Una correspondencia o una función está definida en forma implícita cuando no aparece despejada la y sino que la relación entre x e y viene dada por una ecuación de dos incógnitas cuyo segundo miembro es cero.

Derivadas de funciones implícitas

Para hallar la derivada en forma implícita no es necesario despejar y. Basta derivar miembro a miembro, utilizando las reglas vistas hasta ahora y teniendo presente que:
$x' = 1$. En general $y' \neq 1$. Por lo que se omitira x' y dejara y'.

Valores extremos

Sea f una función definida en un dominio D y sean c, d y e elementos de D.

- $f(c)$ es el **máximo valor**, de f en D si $f(x) \leq f(c)$ para todo x en D.
- $f(d)$ es el **mínimo valor**, de f en D si $f(d) \leq f(x)$ para todo x en D.
- $f(e)$ es un **valor extremo** de f en D si es un valor máximo o un valor mínimo de f en D.

Valores extremos

Sea f una función definida en un dominio D y sean c, d y e elementos de D.

- $f(c)$ es el **máximo valor**, de f en D si $f(x) \leq f(c)$ para todo x en D.
- $f(d)$ es el **mínimo valor**, de f en D si $f(d) \leq f(x)$ para todo x en D.
- $f(e)$ es un **valor extremo** de f en D si es un valor máximo o un valor mínimo de f en D.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ

Valores extremos

Sea f una función definida en un dominio D y sean c, d y e elementos de D.

- $f(c)$ es el **máximo valor**, de f en D si $f(x) \leq f(c)$ para todo x en D.
- $f(d)$ es el **mínimo valor**, de f en D si $f(d) \leq f(x)$ para todo x en D.
- $f(e)$ es un **valor extremo** de f en D si es un valor máximo o un valor mínimo de f en D.

Valores extremos

Sea f una función definida en un dominio D y sean c, d y e elementos de D.

- $f(c)$ es el **máximo valor**, de f en D si $f(x) \leq f(c)$ para todo x en D.
- $f(d)$ es el **mínimo valor**, de f en D si $f(d) \leq f(x)$ para todo x en D.
- $f(e)$ es un **valor extremo** de f en D si es un valor máximo o un valor mínimo de f en D.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ

- Sea f una función definida en un dominio D y sean $c, d, e \in D$. f tiene un **máximo relativo** o un **máximo local** en c si $f(x) \leq f(c)$ para todo x en un intervalo abierto que contiene a c y que está contenido en D.
- f tiene un **mínimo relativo** o **un mínimo local** en d si $f(d) \leq f(x)$ para todo x en un intervalo abierto que contiene a d y que está contenido en D.
- f tiene un **extremo relativo** o **un extremo local** en e si f posee un máximo relativo o un mínimo relativo en e.

Si una función f presenta un máximo local o un mínimo local en un número c de un intervalo abierto y f es derivable en c entonces $f'(c) = 0$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ

Derivadas

- Sea f una función definida en un dominio D y sean $c, d, e \in D$. f tiene un **máximo relativo** o un **máximo local** en c si $f(x) \leq f(c)$ para todo x en un intervalo abierto que contiene a c y que está contenido en D.
- f tiene un **mínimo relativo** o **un mínimo local** en d si $f(d) \leq f(x)$ para todo x en un intervalo abierto que contiene a d y que está contenido en D.
- f tiene un **extremo relativo** o **un extremo local** en e si f posee un máximo relativo o un mínimo relativo en e.

Si una función f presenta un máximo local o un mínimo local en un número c de un intervalo abierto y f es derivable en c entonces $f'(c) = 0$

Derivadas

- Sea f una función definida en un dominio D y sean $c, d, e \in D$. f tiene un **máximo relativo** o un **máximo local** en c si $f\,(x) \leq f\,(c)$ para todo x en un intervalo abierto que contiene a c y que está contenido en D.
- f tiene un **mínimo relativo** o **un mínimo local** en d si $f\,(d) \leq f\,(x)$ para todo x en un intervalo abierto que contiene a d y que está contenido en D.
- f tiene un **extremo relativo** o **un extremo local** en e si f posee un máximo relativo o un mínimo relativo en e.

Si una función f presenta un máximo local o un mínimo local en un número c de un intervalo abierto y f es derivable en c entonces $f'\,(c) = 0$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ

Funciones cóncavas y convexas

Si $f(x)$ y $f'(x)$ son derivables en a, la función es:

1. $f(x)$ es cóncava en a si $f''(a) < 0$.
2. $f(x)$ es convexa en a si $f''(a) > 0$.

Punto de inflexión

Si $f(x)$ y $f'(x)$ son derivables en a, a es un *punto de inflexión* si $f''(x) = 0$ y $f'''(x) \neq 0$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ

Funciones cóncavas y convexas

Si $f(x)$ y $f'(x)$ son derivables en a, la función es:

1. $f(x)$ es cóncava en a si $f''(a) < 0$.
2. $f(x)$ es convexa en a si $f''(a) > 0$.

Punto de inflexión

Si $f(x)$ y $f'(x)$ son derivables en a, a es un *punto de inflexión* si $f''(x) = 0$ y $f'''(x) \neq 0$.

Regla de L'Hospital

Si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ es de la forma $\frac{0}{0}$ o de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Regla de L'Hospital

Si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ es de la forma $\frac{0}{0}$ o de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Regla de L'Hospital

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$$

$$\lim_{x \to -2} 3x^2$$