Diplomado en Probabilidad e Inferencia Básica

Sandra Vergara Cardozo

Profesora

Universidad Nacional de Colombia

Sábado 28 de marzo de 2020

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ

Ejemplo

La sucesión $\left\{ \dfrac{n^2+n}{3n^2+2} \right\}$ *es convergente*

Observe que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{3n^2+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\dfrac{1}{n}}{3+\dfrac{2}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1+\dfrac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3+\dfrac{2}{n^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1+\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3+\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n^2}} = \frac{1+0}{3+0} = \frac{1}{3}$$

NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ

A partir de una sucesión finita de números reales

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots, a_k$$

Se puede obtener una nueva sucesión con

primer término a_1

segundo término $a_1 + a_2$

tercer término $a_1 + a_2 + a_3$

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

$k -$ ésimo término $\quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_k$

Para obtener la sucesión:

$$a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \ldots, a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_k$$

Llamada serie finita de números reales.

Progresión

Una **progresión aritmética** es una sucesión de números tales que cada uno de ellos (salvo el primero) es igual al anterior más un número fijo llamado diferencia que se representa por d.
Consideremos la sucesión de término general $a_n = 3n + 2$ con $n \in \mathbb{N}$, es decir:

$$\{a_n\} = \{5, 8, 11, 14, 17, 20 \ldots\}$$

Se observa que cada término de la sucesión es igual que el anterior más 3, se dice que la sucesión a_n es una progresión aritmética y que $d = 3$ es la diferencia de la progresión.

Progresión

Una **progresión geométrica** es una sucesión de números tales que cada uno de ellos (salvo el primero) es igual al anterior multiplicado por un número constante llamado razón, que se representa por r.

- $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots \quad r = 2$
- $4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots \quad r = -\frac{1}{2}$

En general la progresión geométrica $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ se verifica que:

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 * r \\
a_3 &= a_2 * r = a_1 * r * r = a_1 * r^2 \\
a_4 &= a_3 * r = a_1 * r^2 * r = a_1 * r^3 \\
&\vdots \\
a_n &= a_1 * r^{n-1}
\end{aligned}
$$

Para cada $n \geq 1$ la suma

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

es llamada la **suma parcial** $n-$ésima.
La sucesión $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ **sucesión de sumas parciales**.

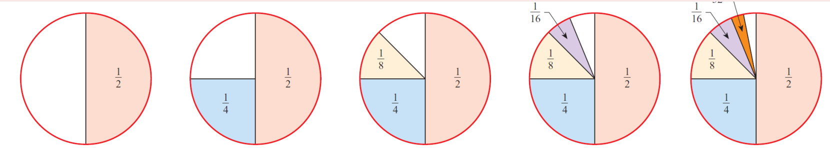
Series Infinitas

Una expresión de la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots$$

recibe el nombre de serie infinita

Series Infinitas



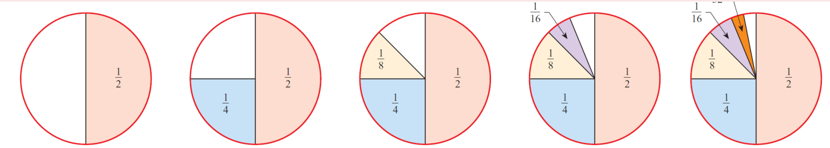
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Sucesiones y Series

Series Infinitas

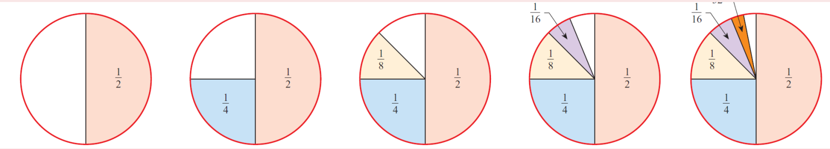


$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Series Infinitas

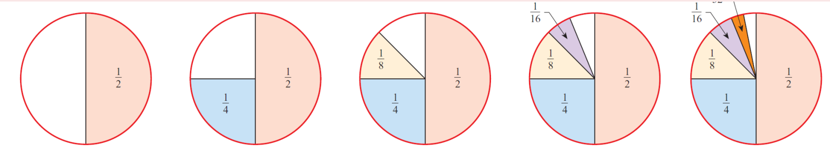


$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Series Infinitas



$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Si la sucesión de sumas parciales, converge y su límite cuando n tiene a infinito es S, entonces, se dice que la serie **converge** y su suma es S

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} S_n = S$$

Si la sucesión de sumas parciales no converge, se dice que la serie **diverge**.

Serie Geométrica

Se llama serie geométrica de razón r a la serie cuya forma es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n + \cdots$$

Es convergente si y solo si $|r| < 1$, así

$$S = \frac{1}{1-r}$$

Por el contrario, si $|r| > 1$, cuando $n \to \infty$, los términos r^{n+1} se hacen cada vez más grandes en valor absoluto, por tanto la sucesión S_n diverge.

Sean $\sum a_n = A$ y $\sum b_n = B$ series convergentes y $\lambda \in \mathbb{R}$ (constante), entonces:

- $\sum (a_n \pm b_n) = A \pm B$
- $\sum \lambda a_n = \lambda A$

Condición necesaria

Si la serie $\sum a_n$ converge, entonces $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

Serie Armónica

Se llama serie armónica a la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Esta serie es divergente.

Serie Armónica Alternada

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2).$$

Criterios de Convergencia

Una serie de términos positivos es aquella donde cada término es mayor a cero, es decir, $a_n \geq 0$ para todo n.
Una serie de términos positivos es convergente si y solo si la sucesión de sumas parciales está acotada.

Criterio de Comparación

Sean a_n y b_n sucesiones tales que $0 \leq a_n \leq b_n$, entonces:

- Si $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ también converge.
- Si $\sum a_n$ diverge, entonces $\sum b_n$ también diverge.

Criterio de Comparación por Límite

Sean $a_n \geq 0$ y $b_n > 0$ para todo $n > N$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L$, entonces,

1. Si $0 < L < \infty$ las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son ambas convergentes o ambas divergentes.
2. Si $L = 0$ y $\sum b_n$ converge, la serie $\sum a_n$ también converge.
3. Si $L = \infty$ y $\sum b_n$ diverge, la serie $\sum a_n$ también diverge.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ

Criterio de la Integral

Sea $f(x)$ una función continua, positiva y decreciente para todo $x \geq 1$. La serie $\sum a_n$, con $a_n = f(n)$ para todo $n \geq 1$, es convergente si y solo si la integral

$$\int_1^{\infty} f(x)dx$$

es convergente.

La **p-Serie**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.

Criterio del Cociente

Sea $\sum a_n$ una serie de términos cualquiera positivos y sea

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$$

1. Si $L < 1$ la serie converge.
2. Si $L > 1$ o infinito, la serie diverge.
3. Si $L = 1$ el criterio no decide.

Criterio de la Raíz

Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos y sea

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

1. Si $L < 1$ las serie converge.
2. Si $L > 1$ o infinito, la serie diverge.
3. Si $L = 1$ el criterio no da información.

Serie de Potencias

Una serie de potencias alrededor de $x = c$ es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots$$

Serie de Taylor

Sea $f(x)$ una función con derivadas de todos los órdenes en un intervalo que contiene a c, la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \cdots$$

es llamada serie de Taylor, si $c = 0$ es llamada serie de MacLaurin de $f(x)$.

Sucesiones y Series

Teorema de Binomio: Triángulo de Pascal

$(a+b)^0$	1
$(a+b)^1$	1 1
$(a+b)^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1

Teorema de Binomio: n factorial

El producto de los primeros n números naturales está denotado por $n!$ y se denomina n factorial.

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times (n-1) \times n$$

$$0! = 1$$

Teorema de Binomio: n factorial

El producto de los primeros n números naturales está denotado por $n!$ y se denomina n factorial.

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times (n-1) \times n$$

$$0! = 1$$

Teorema de Binomio: El coeficiente del Binomio

Sean n y r enteros no negativos con $r \leq n$. El coeficiente del binomio se denota con $\binom{n}{r}$ y está definido por

$$\binom{n}{r} = C_n^r = C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

representa el número de formas de escoger n elementos a partir de un conjunto con r elementos.

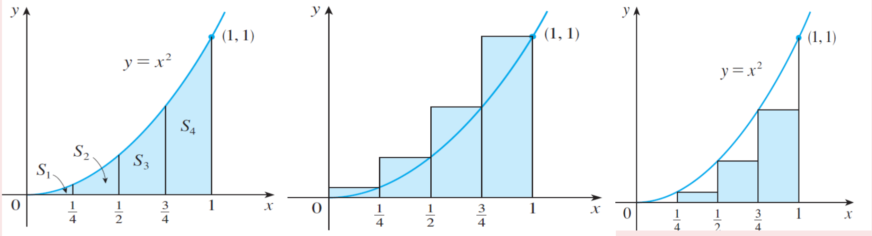
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE BOGOTÁ

Teorema de Binomio

$$(x+y)^n = \sum_{K=0}^{n} = \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Integración

Áreas



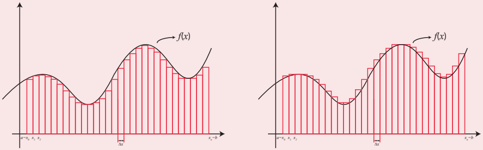
Integración

Sumas de Riemann

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo $I = [a, b]$, sea P una partición de I dada por $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, con Δx_i el ancho del $i-$ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, así

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i, \text{ con } x_{i-1} < c_i < x_i$$

es definida una **suma de Riemann** de f para la partición n



Integral Definida

Si f se define en el intervalo $[a, b]$ y el límite de la suma de Riemann sobre las particiones n existe

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

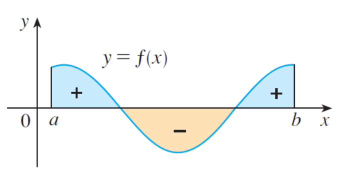
entonces f es integrable en $[a, b]$ y el límite se denota por

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

El anterior límite es llamado **integral definida** de f de a a b. Donde a es el límite inferior de integración y b el límite superior de integración.

Si f es continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$, entonces el área de la región acotada por la gráfica de f, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ está definida por

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)dx$$



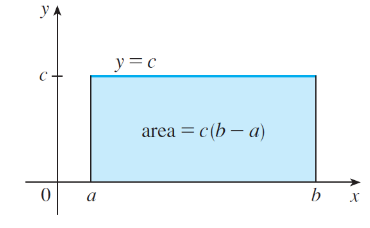
Si f toma valores positivos y negativos, la integral definida puede ser interpretada como un área neta, esto es, una diferencia de áreas:

$$\int_a^b f(x)dx = A^+ - A^-$$

donde A^+ es el área de la región ubicada por encima del eje x y por debajo del gráfico de f, y A^- es el área de la región ubicada por debajo del eje x y arriba del gráfico de f.

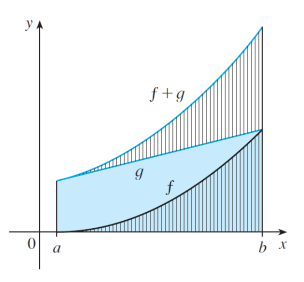
Integración

Propiedades



$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

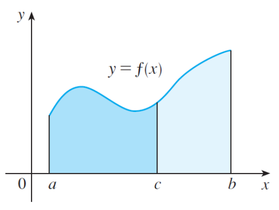
Propiedades



Si f y g son funciones integrables en $[a, b]$, entonces la función $f \pm g$ es integrable en $[a, b]$, y

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

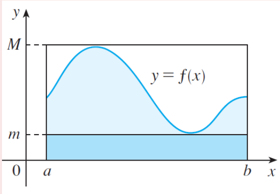
Propiedades



$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Integración

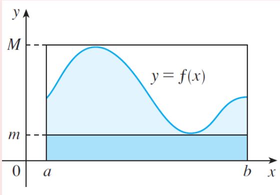
Propiedades



Si $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Propiedades

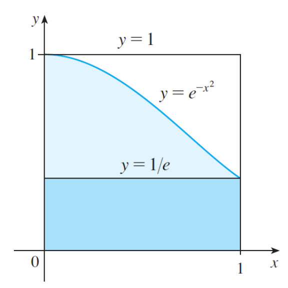


Si $m \leq f(x) \leq M$ para $a \leq x \leq b$, entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

DE COLOMBIA
SEDE BOGOTÁ

Propiedades



$$e^{-1} \leq \int_{0}^{1} e^{-x^2} dx \leq 1$$

Propiedades

- Si f está definida en $x = a$, entonces $\int_a^a f(x)dx = 0$.
- Si f es integrable en $[a, b]$, entonces $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.
- Si f es integrable en $[a, b]$ y k es una constante, entonces la función kf es integrable y $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

Regla de Barrow

Si f es una función continua en $[a, b]$ y F es una antiderivada de f, esto es $F\prime = f$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Teorema Fundamental del Cálculo

Si f es continua en un intervalo abierto I que contiene a, entonces, para todo x en el intervalo,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$$

Regla de la Potencia para Integrales Definidas

Si m es un número racional y $m \neq -1$, entonces

$$\int_a^b x^m dx = \frac{1}{m+1}(b^{m+1} - a^{m+1})$$

Integración

Integral Indefinida

La integral indefinida $\int f(x)dx$ se define:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

donde F es una antiderivada de f y c una constante arbitraria.

Regla de la Potencia para Integrales Indefinidas

Si m es un número racional y $m \neq -1$, entonces

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c$$

Integración

Propiedades

- $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ con k constante.
- $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Sustitución

Dada la integral indefinida

$$\int f(g(x))g'(x)dx,$$

sea $u = g(x)$ y $du = g'(x)dx$. Si F es una antiderivada de f, entonces

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + c = F(g(x)) + c$$

Regla de la Potencia para Funciones

Si m es un número racional y $m \neq -1$, entonces

$$\int [g(x)]^m g'(x)dx = \frac{[g(x)]^{m+1}}{m+1} + c, \quad m \neq -1$$

Función Logaritmo Natural

La función logaritmo Natural se define:

$$\ln x = \int_{1}^{x} \frac{1}{t} dt, \quad x > 0$$

Así:

- $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{u} du = \ln |u| + c; \ \int \frac{u'}{u} dx = \ln |u| + c$, con $du = u' dx$

Sustitución

Si $u = g(x)$, entonces

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Integración

Integración por Sustitución

Si u es una función derivable de x, entonces

- $\displaystyle\int e^x dx = e^x + c$
- $\displaystyle\int e^u du = e^u + c$

Ejemplo

$\displaystyle\int e^{3x+1} dx$

Sea $u = 3x + 1$, *entonces* $du = 3dx$

$$\begin{aligned} \int e^{3x+1} dx &= \frac{1}{3}\int e^{3x+1}(3)dx = \int e^{3x+1} dx \\ &= \frac{1}{3}\int e^u du = \frac{1}{3}e^u + c = \frac{e^{3x+1}}{3} + c \end{aligned}$$

Integración

Integración por partes

Si u y v son funciones de x y tienen derivadas continuas, entonces

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Ejemplo

$$\int xe^x dx \quad \textit{así:} \quad dv = e^x dx \Rightarrow v = \int dv = \int e^x dx = e^x$$

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$\int u dv = uv - \int v du \Rightarrow \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$