Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Estadística

DIPLOMADO EN PROBABILIDAD E INFERENCIA BÁSICA

Módulo

PROBABILIDAD

Carlos Panza Ospino
capanzao@unal.edu.co
Oficina 340—404

SEGUNDA SESIÓN

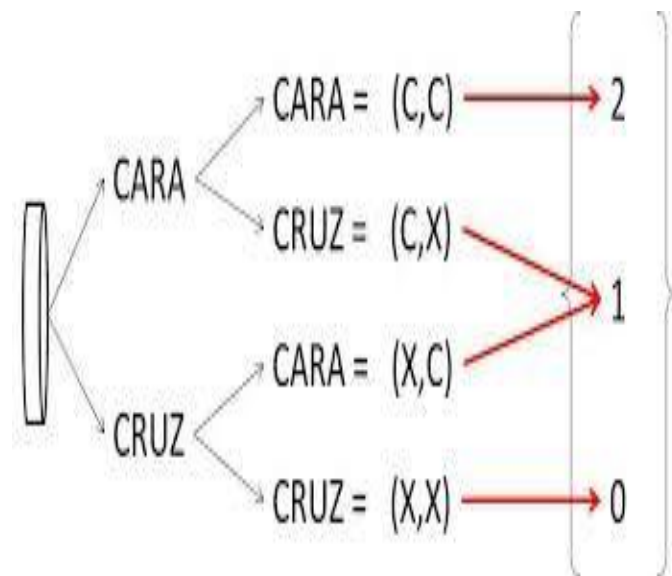
Variables aleatorias

Los eventos que se han estudiado son meras descripciones de hechos que se denotan con letras latinas mayúsculas. Sin embargo, en la práctica, la mayoría de las observaciones se representan en términos de datos numéricos. Se verá seguidamente que estos datos numéricos son valores de variables aleatorias.

Concepto de variable aleatoria

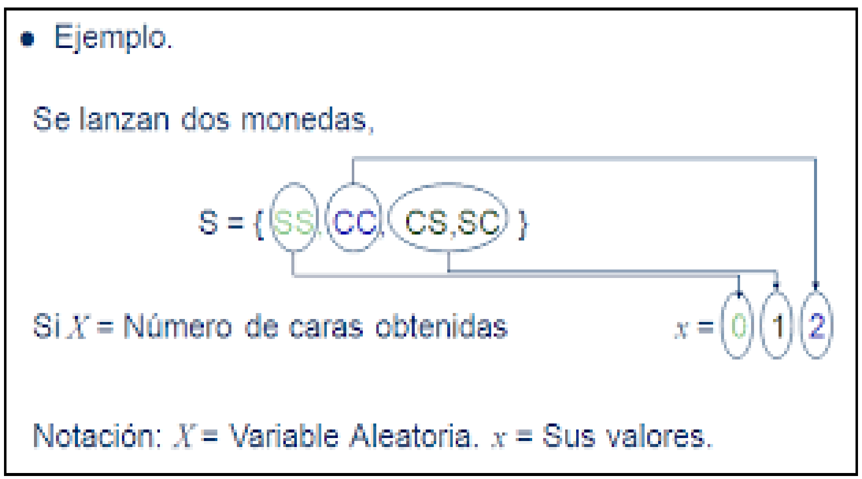
Considérese el experimento que consiste en lanzar una moneda corriente dos veces y registrar el lado visible cada vez que la moneda se detiene. Un posible valor numérico asociado al experimento es la cantidad de salidas C ("CARA") en la respuesta elemental de experimento aleatorio.

Se tiene entonces la siguiente *asignación*



Concepto de variable aleatoria

Es claro que la cantidad de salidas "cara" cuando se lanza una moneda dos veces es una función o *variable*, digamos X, que toma los valores 0, 1 ó 2.



También es claro que

$$P(X = 0) = P(\{SS\}) = \frac{1}{4}$$

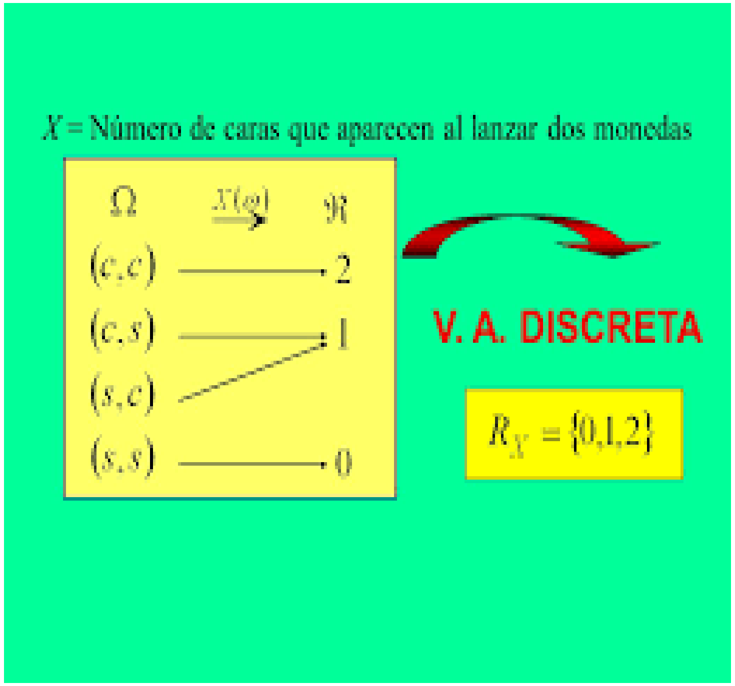
$$P(X = 1) = P(\{CS, SC\}) = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 2) = P(\{CC\}) = \frac{1}{4}$$

Concepto de variable aleatoria

Una *variable aleatoria* es una función X que asigna un único valor numérico real a cada una de las respuestas elementales de un experimento aleatorio.

El conjunto R_X de todos los valores asignados mediante la función se denomina *rango* de la variable aleatoria.



Función de distribución acumulada

Se llama *función de distribución acumulada* de la variable aleatoria real X a la función

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

donde $x \in \mathbb{R}$

Son propiedades de $F_X(x)$ las siguientes:

- $0 \leq F_X(x) \leq 1$
- $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ si $x_1 < x_2$
- $F_X(-\infty) = 0$ y $F_X(+\infty) = 1$
- $P(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$
- $F_X(x)$ es continua por la derecha.

Ejemplos de funciones de distribución acumulada

Sea X: "*la cantidad de salidas* CARA *cuando se lanza una moneda dos veces*". Es claro que:

Para $x < 0$, $F_X(x) = P(X < 0) = 0$

Para $0 \leq x < 1$, $F_X(x) = P(X = 0) = \frac{1}{4}$

Para $1 \leq x < 2$,

$$F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{3}{4}$$

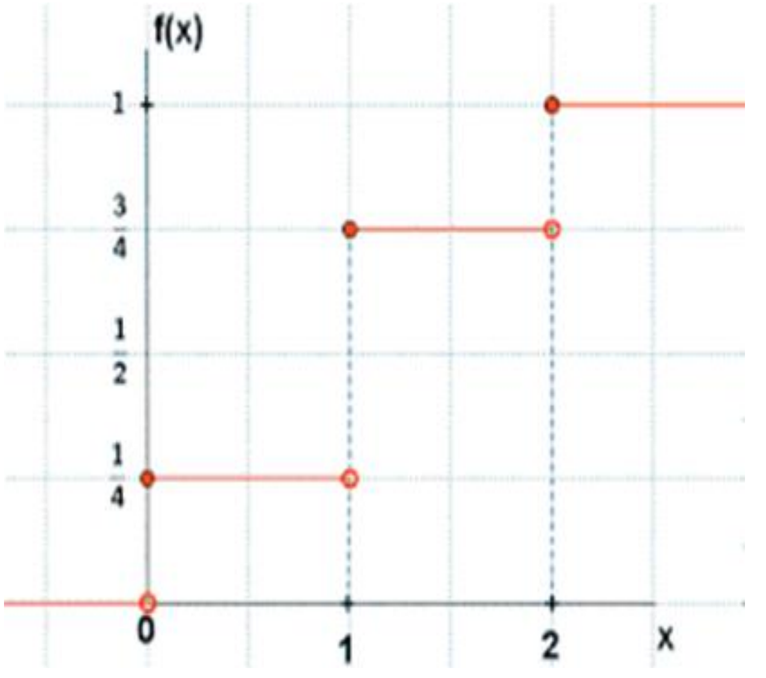
Para $x \geq 2$,

$$F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$$

Ejemplos de funciones de distribución acumulada

Luego, la función de distribución acumulada de X es

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ {}^{1}/_{4} & 0 \leq x < 1 \\ {}^{3}/_{4} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$



Por tanto,

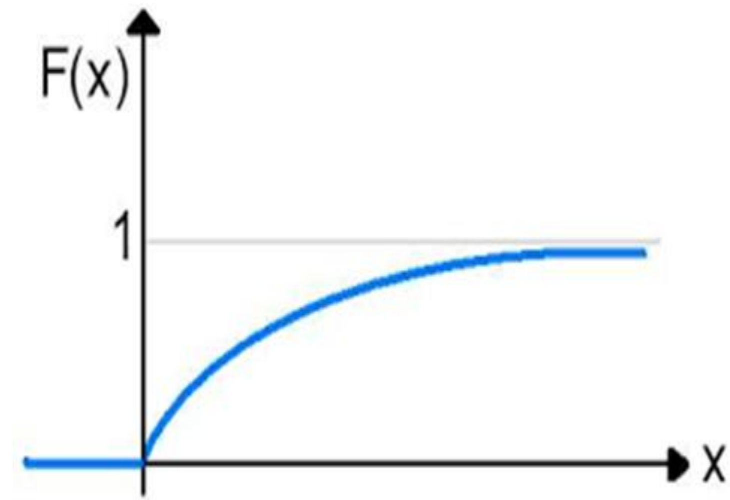
$$P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right) = F_X\left(\frac{3}{2}\right) - F_X\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Ejemplos de funciones de distribución acumulada

Para $\lambda > 0$ constante, la función dada por la expresión

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad x > 0$$

cumple con todas las propiedades de una función de distribución acumulada.



Por tanto,

$$P(0 < X < 1) = F_X\,(1) - F_X(0) = 1 - e^{-\lambda}$$

VAD
VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

Las variables aleatorias discretas tienen recorridos finitos o numerables

Concepto de VAD

Sea X una VAD con recorrido R_X. Supóngase que para cada $x_i \in R_X$, $i = 1, 2, \ldots$, se definen las probabilidades

$$p_i := P(X = x_i)$$

Es claro que:

- $0 \leq \; p_i \leq 1$
- $p_1 + p_2 + \cdots = 1$
- $p_i = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$

Las parejas $[x_i;\; p_i]$ conforman la *distribución de probabilidades* de la VAD X.

Ejemplo de una distribución discreta

EJEMPLO 1. Una lotería con tiraje de 10000 billetes sin series tiene un premio de 1000 dólares, diez premios de 100 dólares cada uno y cien premios de un dólar cada uno. La distribución de la variable aleatoria X que representa el premio que puede ganar el poseedor de un billete de lotería es

$\boldsymbol{X}$	0	1	100	1000
$\boldsymbol{P(X = x)}$	0,9889	0,01	0,001	0,0001

La probabilidad de que el poseedor de un billete gane algún premio es $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0{,}0111$

VAC
VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

El rango de una variable aleatoria continua es un intervalo real o la unión de varios de ellos

Concepto de VAC

Una variable aleatoria X es continua si su función de distribución acumulada $F_X(x)$ es continua. Si la función $F_X(x)$ es además diferenciable, entonces

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_T(t)dt$$

La función $f_X(x)$ se conoce como *función de densidad de probabilidad*.

- $f_X(x) \geq 0$

- Para todo $[x_1;\ x_2) \in R_X$

$$P(x_1 < X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)dx$$

- Si $x_1 \to -\infty$ y $x_2 \to \infty$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$$

- $P(X = x) = 0$

Ejemplo de una VAC

<u>EJEMPLO 2.</u> La variable aleatoria *X* tiene función de densidad de probabilidad dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se verifica que $f_X(x)$ es en realidad una función de densidad. En efecto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_0^1 x dx + \int_1^2 (2 - x)\, dx = 1$$

Continuación del ejemplo

La función de distribución acumulada de X es

- Si $x < 0$, entonces $F_X(x) = 0$
- Si $0 \leq x < 1$, entonces $F_X(x) = \frac{1}{2}x^2$
- Si $1 \leq x < 2$, entonces $F_X(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$
- Si $x \geq 2$, entonces $F_X(x) = 1$

Luego, se tiene que

$$P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right) = F_X\left(\frac{3}{2}\right) - F_X\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$$

Continuación del ejemplo

El resultado anterior también se pudo obtener haciendo

$$P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} x dx + \int_{1}^{\frac{3}{2}} (2 - x) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} - \frac{(2-x)^2}{2}\Big|_{1}^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$$

VALOR ESPERADO
DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Es una medida de resumen que caracteriza a una variable aleatoria en términos de sus valores más frecuentes

Concepto de valor esperado

El *valor esperado* de una VAD X se define como

$$\mu = EX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

El *valor esperado* de una VAC X se define como

$$\mu = EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

El valor esperado de una variable aleatoria es una constante y tiene la mismas unidades de medida en que se mide la variable aleatoria.

Ejemplos

En el EJEMPLO 1, el premio que espera ganar el poseedor de un billete de lotería es

$$EX = 0{,}21 \ \text{dólares}$$

Para una mejor interpretación del valor hallado divídase el plan total de premios en dólares entre el total de billetes de lotería y se obtendrá el premio hipotético asignado a cada billete.

El valor esperado de la VAC definida en el EJEMPLO 2 es igual a

$$EX = 1$$

Es decir, la media aritmética de “muchos” valores observados de la VAC X es igual a uno. Dicho de otro modo, es el valor que más frecuentemente se observa de la variable.

Valor esperado de una función de una variable aleatoria

Sea X una variable aleatoria y $Y = g(X)$ una función arbitraria de X. Es claro que Y es una variable aleatoria. Luego,

Si Y es una VAD, entonces el valor esperado de Y es

$$E[g(X)] \coloneqq \sum_{i} g(x_i)p_i$$

donde

$$p_i = P(X = x_i)$$

Si Y es una VAC, entonces el valor esperado de Y es

$$E[g(X)] \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)dx$$

donde $f_X(x)$ es la función de densidad de probabilidad de la variable X.

Ejemplo

Una tienda de computadoras adquirió tres ejemplares de un tipo por \$500 la unidad y vendrá cada pieza adquirida por \$1000 la unidad. El fabricante se comprometió a recomprar cada ejemplar que no haya sido vendido al finalizar el mes corriente por un valor de \$200 la unidad. Calcúlese la utilidad esperada del dueño de la tienda.

Continuación del ejemplo

Sea X la variable aleatoria que representa la cantidad de computadoras adquiridas que se venden en el mes en curso. Supóngase que la distribución de probabilidades de X está dada por

$\boldsymbol{X}$	0	1	2	3
$\boldsymbol{P(X = x)}$	0.1	0.2	0.3	0.4

Continuación del ejemplo

La utilidad por la venta por la venta de X unidades de las computadoras adquiridas se puede expresar como

$$g(X) = 1000X + 200(3 - X) - 1500 = 800X - 900$$

Luego, la utilidad esperada es igual a

$$E[g(X)] = \sum_{x=0}^{3} g(x)P(X = x) = \$700$$

Propiedades del valor esperado

Sea X una variable aleatoria y $Y = g(X)$ una función de X. Luego,

- Si $g(X) = c$, con $c \in \mathbb{R}$, entonces $Ec = c$
- Si $g(X) = aX$, con $a \in \mathbb{R}$, entonces $E(aX) = a\mu$
- Si $g(X) = aX + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $E(aX + b) = a\mu + b$

ALGUNAS FUNCIONES ESPECIALES DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Los momentos de la distribución de una variable aleatoria son casos particulares de funciones de una variable aleatoria

Momentos con respecto al origen

Sea X una variable aleatoria. Para $r \in \mathbb{Z}^+$, se define el $r-$ésimo momento de la distribución de X con respecto al origen como

$$\mu_r' := E(X^r)$$

Es claro que si $r = 1$, entonces el primer momento de X con respecto al origen es el valor esperado de la variable.

Momentos con respecto a la media

Sea X una variable aleatoria. Para $r \in \mathbb{Z}^+$, se define el r −ésimo momento de la distribución de X con respecto a la media como

$$\mu_r := E(X - EX)^r$$

Es claro que si $r = 1$, entonces

$$\mu_1 = E(X - EX) = EX - EX = 0$$

Varianza de una variable aleatoria

Sea X una variable aleatoria. Si en la expresión para el r −ésimo momento de la distribución de X con respecto a la media se hace $r = 2$, entonces se obtiene la magnitud

$$\mu_2 \coloneqq V(X) = E(X - EX)^2 = E(X^2) - (EX)^2$$

que se conoce como la *varianza* de la variable X y es una constante que mide la homogeneidad (dispersión) de los valores de X.

Ejemplos

En el EJEMPLO 1, la varianza del premio que espera ganar el poseedor de un billete de lotería es

$$V(X) \cong 110 \ \text{dólares}^2$$

La varianza de la VAC definida en el EJEMPLO 2 es

$$V(X) = \frac{1}{6}$$

Es claro que la varianza $V(X)$ se mide en unidades cuadráticas que no tienen interpretación coloquial. Usualmente, se toma como medida de dispersión la desviación estándar de la variable aleatoria dada por $\sigma = \sqrt{V(X)}$.

Propiedades de la varianza

Sea X una variable. Luego,

- Si $X = c$, con $c \in \mathbb{R}$, entonces $V(X) = 0$
- Si $Y = X + c$, con $c \in \mathbb{R}$, entonces $V(Y) = V(X)$
- Si $Y = aX$, con $a \in \mathbb{R}$, entonces $V(aX) = a^2V(X)$
- Si $Y = aX + c$, con $a, c \in \mathbb{R}$, entonces $V(Y) = a^2V(X)$

Función generadora de momentos

Sea X una variable aleatoria. Se define la *función generadora de momentos* como

$$m_X(t) := E(e^{Xt}), \qquad t \in \mathbb{R}$$

Si $m_X(t)$ existe, entonces se tiene que

$$E(X^r) = \frac{d^r}{dt^r} m_X(t = 0)$$

Ejemplo para el caso discreto

Sea X una VAD cuya función de masa de probabilidad está dada por

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

con $x = 0,1,2,\ldots$ y $\lambda > 0$.

La función generadora de momentos de X está dada por

$$m_X(t) = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} =$$

$$= \exp[-\lambda(1 - e^t)]$$

Continuación del ejemplo

La primera derivada de la función generadora de momentos de X es

$$m_X'(t) = \lambda e^t \exp[-\lambda(1 - e^t)]$$

Luego, el valor esperado de X es

$$EX = m_X'(0) = \lambda$$

Continuación del ejemplo

El segundo momento de la distribución de X con respecto al origen es

$$E(X^2) = m_X''(0) = \lambda^2 + \lambda$$

Luego, la varianza de X es

$$V(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \lambda$$

Ejemplo para el caso continuo

Sea X la variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad está dada por

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad \lambda > 0, x > 0$$

La función generadora de momentos de X está dada por

$$m_X(t) = \lambda \int_0^\infty e^{-x(\lambda - t)}\, dt = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1}, t < \lambda$$

Continuación del ejemplo

El primer momento con respecto al origen de la distribución X es

$$EX = m'_X(0) = \frac{1}{\lambda}$$

El segundo momento con respecto al origen de la distribución X es

$$E(X^2) = m''_X(0) = \frac{2}{\lambda^2}$$

Luego, la varianza de la variable X está dada por

$$V(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Diagramado en

Power Point 2013