Diplomado en Probabilidad e Inferencia Básica

Sandra Vergara Cardozo
Profesor

Universidad Nacional de Colombia

Sábado 14 de marzo de 2020

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ

Definición

Una función f de un conjunto D a un conjunto E es una correspondencia que asigna a cada elemento x de D un elemento único y de E. El elemento y de E se denota por $f(x)$.

Funciones

- El conjunto D se le llama dominio de la función.
- El contradominio o recorrido de f es el subconjunto de E que está conformado por todos los valores de $f(x)$ para x en D.
- El recorrido de una función y el dominio de una función, también son denotados por $R(f)$ y $D(f)$ respectivamente.
- Los símbolos $D \xrightarrow{f} E$, $f : D \to E$ significan que f es una función de D a E.
- y y $f(x)$ se utilizan para indicar la imagen de un elemento, así $y = f(x)$.

Funciones Reales

- Las funciones reales son las funciones que tienen como dominio y recorrido el conjunto de los números reales.

Ejemplos de Funciones Reales

- $y = 3x + 2$
- $y = x^2$
- $g(x) = x^4 + 2x^2$
- $f(x) = |x|$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE BOGOTÁ

Funciones Reales

La gráfica de una función está determinada por el conjunto de pares ordenados (x, y) que satisfacen las condiciones con las que está definida la función.

Clasificación de las Funciones

- Funciones algebraicas
  - Funciones polinómicas.
  - Funciones radicales.
  - Funciones racionales.
- Funciones trascendentes
  - Funciones trigonométricas.
  - Funciones exponenciales y funciones logarítmicas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE BOGOTÁ

Función Polinómica

Una función f es una **función polinómica** si para todo x,

$$f(x) = a_n x^n + . \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

con $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ y $a_0, \ldots, a_n$ números reales, donde $f(x)$ es un polinomio en x.

Ejemplo

$$f(x) = 5x^2 + x - 2 \qquad g(x) = x^3 - x + 7 \qquad h(x) = x - 1$$

Funciones Lineales

Las funciones lineales están definidas por ecuaciones de la forma

$$f(x) = mx + b$$

donde m y b son constantes.

- La gráfica de una función lineal es una línea recta.
- Si $m \neq 0$, la gráfica de f es una recta que intersecta el eje x en el punto $(-\frac{b}{m}, 0)$, e intersecta el eje y en el punto $(0, b)$.
- Si $m = 0$, $f(x) = b$, la gráfica de f es una recta horizontal para todo $x \in \mathbb{R}$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ

Funciones Lineales

- Para la función $f(x) = mx + b$, b es llamado el **término independiente** y m la **pendiente** de la recta.
- Si la gráfica de $f(x)$ es una recta no vertical que pasa por los puntos $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, con $x_1 \neq x_2$, se tiene que:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Forma punto-pendiente

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Forma pendiente-intersección

$$y = mx + b$$

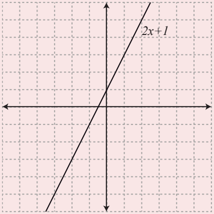
DE COLOMBIA
SEDE BOGOTÁ

Funciones Lineales

Hallar la gráfica de la función definida por la ecuación $y = 2x + 1$
Se determina las imágenes de algunos puntos del domino:

$$\begin{aligned} x =& 0, \quad y = 2(0) + 1 = 1 \\ x =& -1, \quad y = -2 + 1 = -1 \end{aligned}$$

Localizando en el plano coordenado estos puntos y uniéndolos mediante una línea continua, se obtiene la figura:



Funciones Cuadráticas

$f(x)$ es un polinomio de grado dos: $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

Funciones Cúbicas

$f(x)$ es un polinomio de grado tres: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $a \neq 0$.

Funciones Racional

Si $f(x)$ se expresa como el cociente de dos funciones polinómicas : $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ donde p y q son funciones polinómicas y $q(x) \neq 0$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE BOGOTÁ

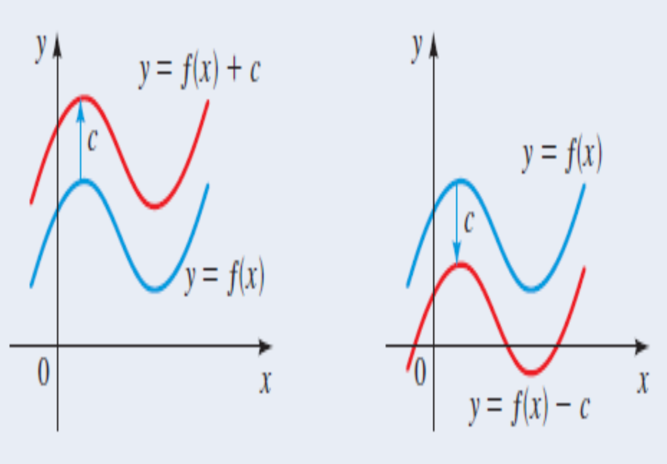
Funciones algebraicas generales

Se obtienen combinando funciones de los tipos anteriormente descritos.

$$f(x) = \frac{7x^3 + 7x^2 + 3}{\sqrt{x^2 - 2}}$$

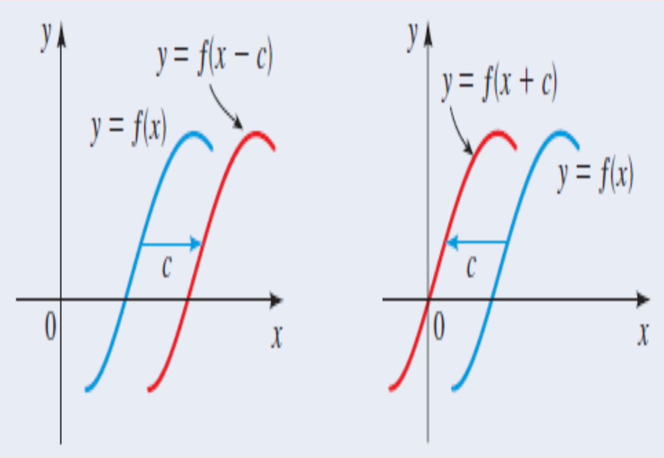
Desplazamiento vertical de gráficas

Supóngase $c > 0$.



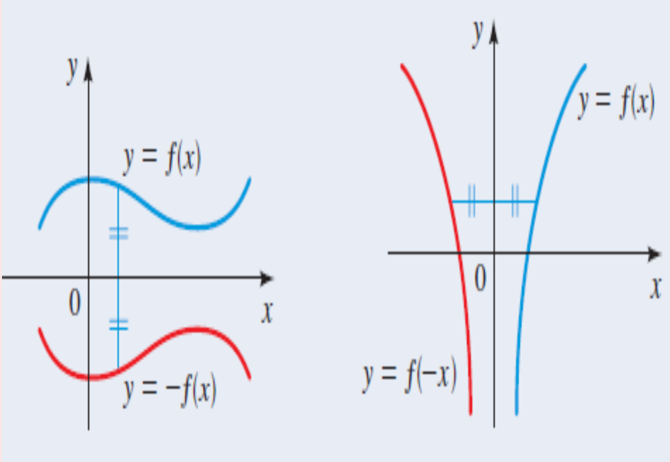
Desplazamiento horizontal de gráficas

Supóngase $c > 0$.

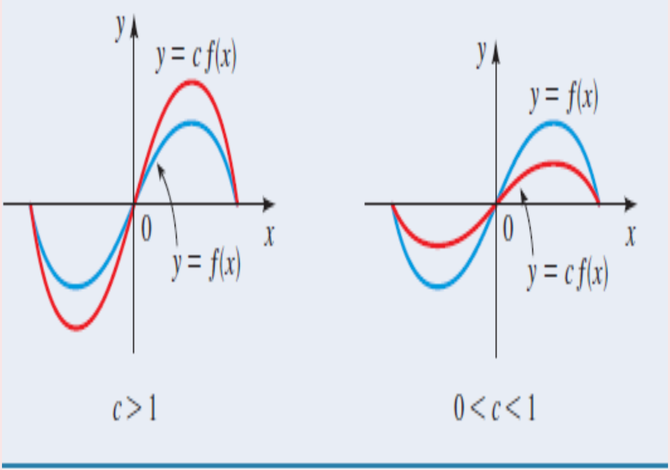


Reflexión

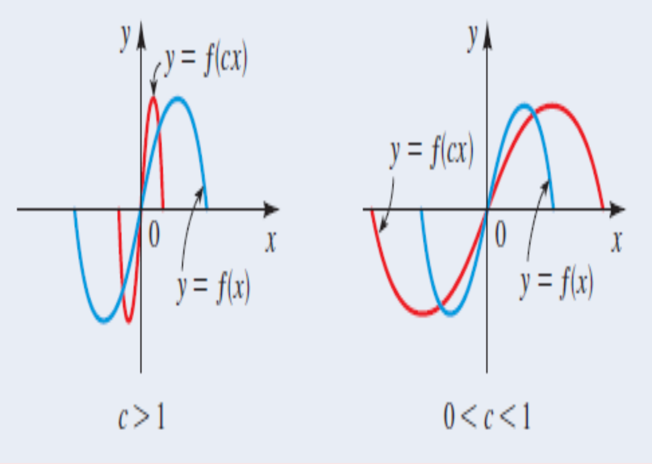
Para graficar $y = -f(x)$, refleje la gráfica de $y = f(x)$ en el eje x.
Para graficar $y = f(-x)$, refleje la gráfica de $y = f(x)$ en el eje y.



Contracción y Alargamiento Vertical de Gráficas



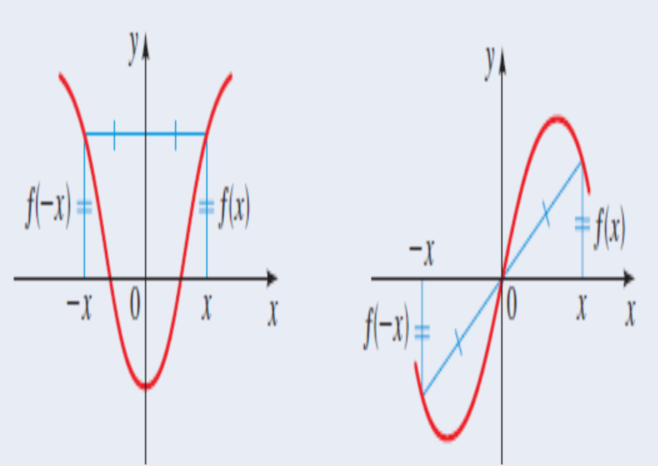
Contracción y Alargamiento Horizontal de Gráficas



Definición

Una función f de dominio D se dice **par** si para todo $x \in D$ y $-x \in D$ se tiene que $f(-x) = f(x)$.
Una función f de dominio D se dice **impar** si para todo $x \in D$ y $-x \in D$ se tiene que $f(-x) = -f(x)$.

Gráfica de funciones pares e impares



Operaciones entre Funciones

Sean las funciones f y g. Sea I la intersección de sus dominios, es decir, los números reales que son comunes a ambos dominios. Se define:

1. La función **suma** de f y g:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \; \forall x \in I$$

Ejemplo

Si $f(x) = x^3 + 1$ *y* $g(x) = 3x - 1$ *entonces*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (x^3+1) + (3x-1) = x^3 + 3x$$

Ejemplo

Si $f(x) = 2x^2 + x$, $g(x) = -1$ *y* $h(x) = 3x + 1$ *entonces*

$$\begin{aligned}(f+g+h)(x) =& (f+g)(x) + h(x) = (2x^2 + x - 1) + (3x + 1)\\ =& 2x^2 + 4x\end{aligned}$$

Operaciones entre Funciones

2. Dadas las funciones f y g se define:
   La función **resta** o la **diferencia** de f y g:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)\ \forall x \in I$$

Ejemplo

Si $f(x) = x^3 + x^2$ *y* $g(x) = x - 1$ *entonces*

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (x^3 + x^2) - (x - 1) = x^3 + x^2 - x + 1$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ

Operaciones entre Funciones

3. Dadas las funciones f y g se define:
   La función **producto** de f y g:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \ \forall x \in I$$

Ejemplo

Si $f(x) = 3x + 1$ *y* $g(x) = x - 1$ *entonces*

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (3x + 1) \cdot (x - 1) = 3x^2 - 2x - 1.$$

Operaciones entre Funciones

4. Dadas las funciones f y g se define:
   La función **cociente** de f y g:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad \text{si } g(x) \neq 0 \ \forall x \in I$$

Operaciones entre Funciones

4. Dadas las funciones f y g se define:
   La **función compuesta** de las funciones f y g, denotada con $f \circ g$, así:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Ejemplo

Si $f(x) = 3x^2 + x$ *y* $g(x) = x - 1$. *Haciendo* $g(x) = z$, *se tiene que*

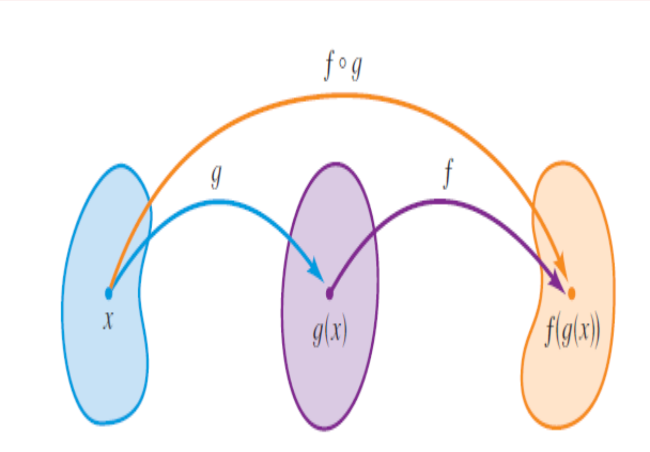
$$(f \circ g)(x) = f((g(x)) = f(z) = 3z^2 + z$$

Como $z = g(x) = x - 1$, *al reemplazar se obtiene*

$$(f \circ g)(x) = 3(x-1)^2 + (x-1)$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ

Composición de Funciones



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ

Inversa de una función

Sea f una función uno a uno con dominio A y rango B. Entonces su función inversa f^{-1} tiene dominio B y rango A y está definida por

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

para cualquier y en B.

Notas

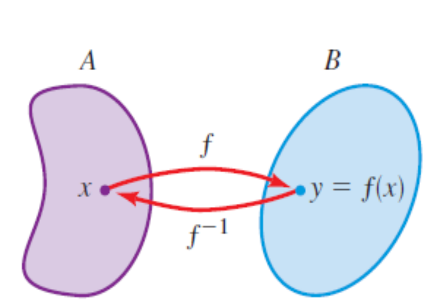
- $f^{-1}(x)$ no significa $\frac{1}{f(x)}$. El recíproco $\frac{1}{f(x)}$ se escribe como $(f(x))^{-1}$.
- Si f no fuera uno a uno, entonces f^{-1} no estaría definida de manera única.

Función inversa

La función inversa f^{-1} satisface las siguientes propiedades:

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{para toda } x \text{ en } A$$

$$f(f^{-1}(y) = y \quad \text{para toda } y \text{ en } B$$

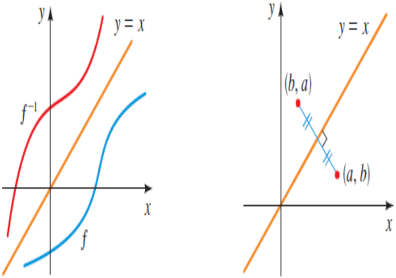


Cómo hallar la Función inversa

1. Escriba $y = f(x)$.
2. Despeje x de esta ecuación en términos de y (si es posible).
3. Intercambie x y y. La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.

Gráfica de la Función inversa

La gráfica de f^{-1} se obtiene al reflejar la gráfica de f en la recta $y = x$.



Función exponencial

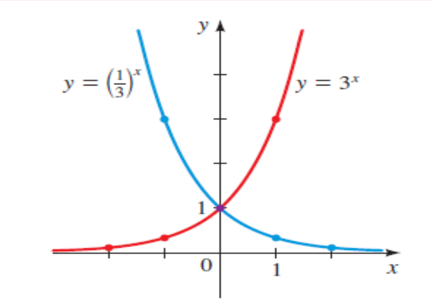
La función exponencial de base a se define: $f(x) = a^x$, donde a cada número real x se asocia un número real a^x, donde $x \in \mathbb{R}$.

Se presentan dos casos:

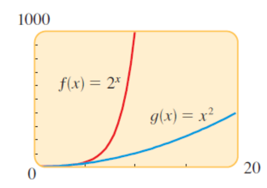
1. $a > 1$, función creciente.
2. $0 < a < 1$, función decreciente.

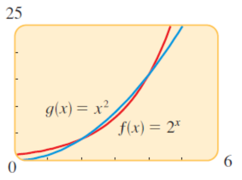
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ

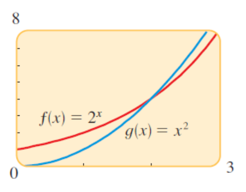
Función exponencial



Función exponencial Vs Función Potencia







Propiedades de los Exponentes

Sean $a > 0, b > 0$, x,y números reales, se tiene que:

- $a^x a^y = a^{x+y}$.
- $(a^x)^y = a^{xy}$.
- $(ab)^x = a^x b^x$.
- $a^{-x} = (a^{-1})^x = (a^x)^{-1} = \frac{1}{a^x}$.
- $a^0 = 1$.
- $a^x > 0$ para todo x.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ

Función Logaritmo

La función logaritmo en base a, denotada por $\log_a$, se define: $f(x) = \log_a x$, donde a cada número real x se asocia un número real $\log_a x$, con $x \in \mathbb{R}$.

Función logarítmo

Sea a **un número positivo diferente de 1** entonces

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

Adicionalmente,

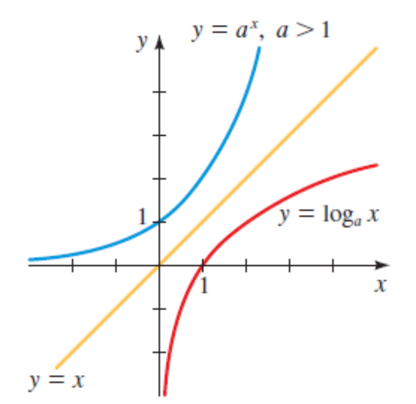
- $\log_a(a^x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$
- $a^{\log_a y} = y$, para todo $y > 0$

Propiedades de los Logaritmos

Si $a > 0$, $b > 0$, $x > 0$, $y > 0$ se tiene que:

1. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a x^y = y \log_a x$
4. $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

Función exponencial Vs Función Logaritmo



Función exponencial y logaritmo natural

La función exponencial de base e es llamada la función exponencial natural $f(x) = e^x$, donde la constante e se puede obtener del siguiente límite:

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x .$$

Sea y un número real tal que $y = e^x$, entonces x recibe el nombre de logaritmo natural de y, su notación es $\ln y$.
Así:

- $y = e^x \Leftrightarrow \ln y = x$.
- $\ln(e^x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- $e^{\ln y} = y$, para todo y número real positivo.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ

Propiedades de la Función Logaritmo Natural

Si a, b, x, y son números reales positivos, se tiene que:

1. $\ln xy = \ln x + \ln y$.
2. $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$.
3. $\ln x^y = y \ln x$.
4. $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ

Ejemplo (Límites)

Para la función definida por la ecuación $f(x) = x + 1$, se observa:

$$
\begin{aligned}
x &= 1 & f(x) &= 1 + 1 = 2 \\
x &= \frac{1}{2} & f(x) &= \frac{1}{2} + 1 = 1{,}5 \\
x &= \frac{1}{10} & f(x) &= \frac{1}{10} + 1 = 1{,}1 \\
x &= \frac{1}{100} & f(x) &= \frac{1}{100} + 1 = 1{,}01 \\
x &= \frac{1}{10000} & f(x) &= \frac{1}{10000} + 1 = 1{,}0001 \\
x &= \frac{1}{1000000} & f(x) &= \frac{1}{1000000} + 1 = 1{,}000001
\end{aligned}
$$

Esto es, $f(x)$ se acerca a uno a medida que x se acerca a cero tomando valores mayores que cero, (por la derecha).

Ejemplo

Sí:

$$
\begin{aligned}
x &= -1 & \qquad f(x) &= -1 + 1 = 0 \\
x &= -\frac{1}{2} & \qquad f(x) &= -\frac{1}{2} + 1 = 0{,}5 \\
x &= -\frac{1}{10} & \qquad f(x) &= -\frac{1}{10} + 1 = 0{,}9 \\
x &= -\frac{1}{100} & \qquad f(x) &= -\frac{1}{100} + 1 = 0{,}99 \\
x &= -\frac{1}{10000} & \qquad f(x) &= -\frac{1}{10000} + 1 = 0{,}9999 \\
x &= -\frac{1}{1000000} & \qquad f(x) &= -\frac{1}{1000000} + 1 = 0{,}999999
\end{aligned}
$$

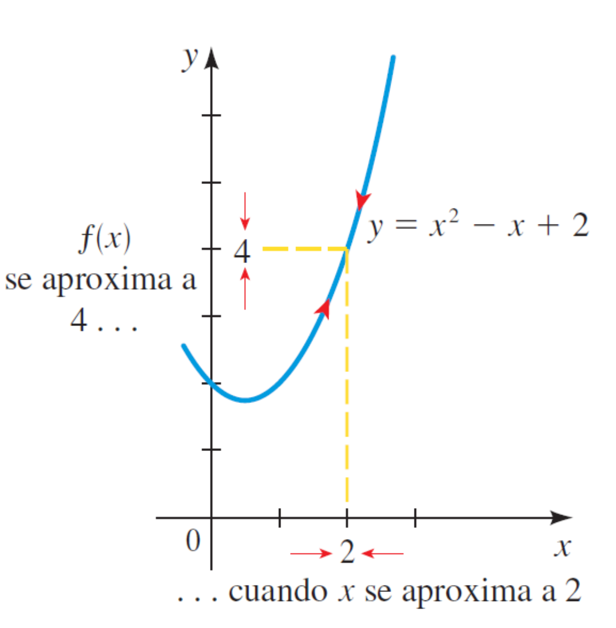
Así, $f(x)$ se acerca a uno a medida que x se acerca a cero tomando valores menores que cero, (por la izquierda).
En conclusión, $f(x)$ tiende a uno cuando x tiende a cero (de cualquier forma).
Simbólicamente:

$$f(x) \longrightarrow 1 \text{ cuando } x \longrightarrow 0.$$

En otros términos se escribe:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \quad \text{ó} \quad \lim_{x \to 0} (x + 1) = 1$$

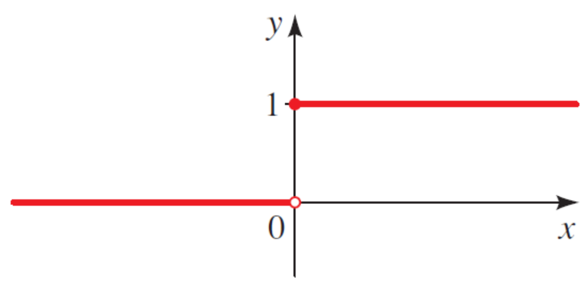
Se lee “El límite cuando x tiende a cero de $f(x)$ es uno”.


y
$f(x)$
se aproxima a
4 . . .
4
$y = x^2 - x + 2$
0
2
x
. . . cuando x se aproxima a 2

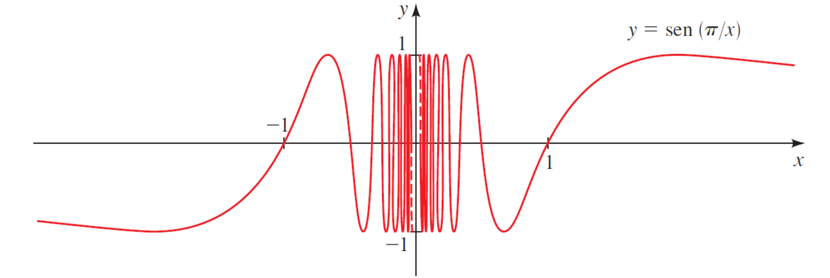
Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

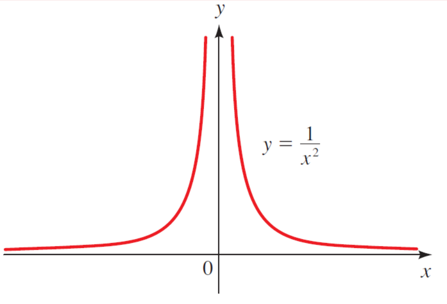
$\lim_{x \to 0} f(x) = ?$



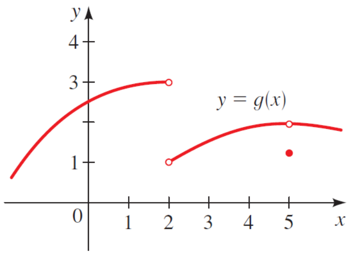
$$\lim_{x \to 0} sen \frac{\pi}{x} = ? \qquad \lim_{x \to 1} sen \frac{\pi}{x} = ?$$



$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = ? \qquad \lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2} = ?$$



$$\lim_{x\to 0} g(x) = ? \qquad \lim_{x\to 2} g(x) = ? \qquad \lim_{x\to 5} g(x) =?$$



Sea

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2, & \text{si } x < 1 \\ 4 - x, & x \geq 1. \end{cases}$$

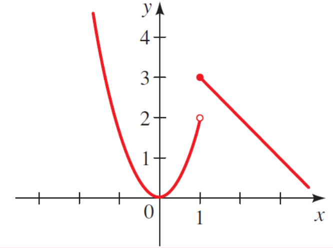
$$\lim_{x \to 0} f(x) = ? \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = ? \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) =? \quad \lim_{x \to 1} f(x) =?$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ

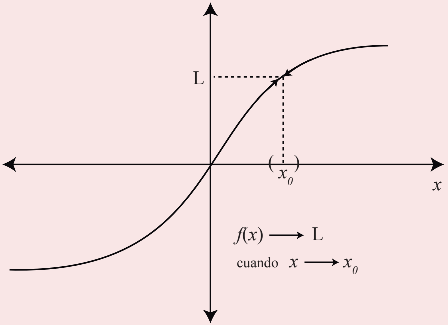
Sea

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2, & \text{si } x < 1 \\ 4 - x, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = ? \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = ? \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = ? \quad \lim_{x\to 1} f(x) = ?$$



En general, si f es una función definida para todo x diferente de x_0 en un intervalo abierto que lo contenga; (como se indica en la siguiente figura).



Y si $f(x)$ tiende a un número L cuando x se acerca a x_0 (por la izquierda y por la derecha), se dice que:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \tag{1}$$

y se lee "El límite cuando x tiende a x_0 de $f(x)$ es igual a L".

Encuentre el

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} = 0\ ?$$

t	$\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
± 1.0	0.16228
± 0.5	0.16553
± 0.1	0.16662
± 0.05	0.16666
± 0.01	0.16667

t	$\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
± 0.0005	0.16800
± 0.0001	0.20000
± 0.00005	0.00000
± 0.00001	0.00000

NOTA: Error en los cálculos generados por la presición de los equipos de cómputo

Límites

A continuación se dan algunas técnicas algebraicas de gran importancia para encontrar el valor del límite de una función en un punto determinado.

Sustitución Directa

El procedimiento para hallar el límite de una función mediante esta técnica, consiste en hallar el valor numérico de la expresión dada, reemplazando la variable x por el valor del punto x_0 donde se va a calcular el límite; esta técnica es válida cuando la expresión resultante está bien definida.

Ejemplo

$$\lim_{x \to 2} (3x^2 + x + 1) = 3 * 2^2 + 2 + 1 = 12 + 2 + 1 = 15$$

Ejemplo

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + x + 1}{1 - x} = \frac{(-1)^2 - 1 + 1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}$$

Límites

Factorizando - Simplificando

Hay casos en los que la sustitución directa no da el límite de una función. Por ejemplo, en el $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$ la sustitución da $\frac{9-9}{3-3} = \frac{0}{0}$ y $\frac{0}{0}$ no está definido.
Así, para calcular el límite se debe factorizar:

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x^2-9)}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3}$$

y por el comportamiento de $f(x) = \frac{(x+3)(x-3)}{x-3}$ y $g(x) = x+3$ cerca de 3 es posible afirmar que:

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \to 3}(x+3) = 3+3 = 6$$

Nota

Observe, NO se ha afirmado que $f(x) = g(x)$.

Ejemplo

$$a)\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)$$
$$=2^2+2*2+4=12.$$

$$b)\quad \lim_{x\to -1}\frac{1+x^3}{1+x}=\lim_{x\to -1}\frac{(1+x)(1-x+x^2)}{1+x}=\lim_{x\to -1}(1-x+x^2)$$
$$=1-(-1)+(-1)^2=3$$

$$c)\quad \lim_{x\to 1}\frac{1+(x-2)^3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{[1+(x-2)][1-(x-2)+(x-2)^2]}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}[1-(x-2)+(x-2)^2]$$
$$=1-(1-2)+(1-2)^2=1+1+1=3$$

$$d)\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^7-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)=7$$

Racionalizando

Para hallar el $\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$ la sustitución directa lleva a la expresión indeterminada $\frac{0}{0}$, por lo que se debe racionalizar el denominador multiplicando por $1+\sqrt{x}$,

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)(1+\sqrt{x})}{1-x}$$

"Cancelando términos", el límite de la expresión inmediatamente anterior es igual a

$$\lim_{x\to 1} (1+\sqrt{x})$$

y esté a su vez por sustitución directa igual a 2.

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} = 2$$

DE COLOMBIA
SEDE BOGOTÁ

Definición de Límite

Se dice que el $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, si para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un número real $\delta > 0$ tal que: $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - x_0| < \delta$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ

A continuación se exponen algunas propiedades fundamentales de los límites

1. El límite de una función en un punto x_0 es único.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = L_1, \quad \text{entonces} \quad L = L_1$$

2. El límite de una suma: el límite cuando x tiende x_0 de la suma de las dos funciones es igual a la suma de los límites de dichas funciones cuando x tiende al mismo punto.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = L_1, \quad \text{entonces}$$

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = L + L_1$$

Ejemplo

$$\lim_{x\to 2} (x+1) = \lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 1 = 2 + 1 = 3$$

3. El límite cuando x tiende x_0 del producto de dos funciones es igual al producto de los límites de dichas funciones cuando x tiende al mismo punto.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = L_1, \quad \text{entonces}$$

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) * g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) * \lim_{x\to x_0} g(x) = L * L_1$$

Ejemplo

a) $\lim_{x\to 2} x^2 = \lim_{x\to 2}(x * x) = \lim_{x\to 2} x * \lim_{x\to 2} x = 2 * 2 = 4$

b) $\lim_{x\to 2} x^4 = \lim_{x\to 2}(x^2 * x^2) = \lim_{x\to 2} x^2 * \lim_{x\to 2} x^2 = 4 * 4 = 16$

c) $\lim_{x\to 2} x^5 = \lim_{x\to 2}(x^4 * x) = \lim_{x\to 2} x^4 * \lim_{x\to 2} x = 16 * 2 = 32$

DE COLOMBIA
SEDE BOGOTÁ

4. El límite cuando x tiende x_0 del cociente de dos funciones es igual al cociente de los límites de dichas funciones cuando x tiende al mismo punto.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = L_1, \quad \text{con} \quad L_1 \neq 0, \quad \text{entonces}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{L_1}$$

Ejemplo

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-1}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to 2} x - 1}{\lim\limits_{x\to 2} x} = \frac{\lim\limits_{x\to 2} x + \lim\limits_{x\to 2}(-1)}{\lim\limits_{x\to 2} x} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

5. El límite de la raíz n-ésima de la función: sea $n > 0$,

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\lim_{x \to x_0} x} = \sqrt[n]{x_0}$$

Ejemplo

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{x} = \sqrt{\lim_{x \to 2} x} = \sqrt{2}$$

6. El límite de la función compuesta:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to L} f(x) = f(L), \quad \text{entonces}$$

$$\lim_{x \to x_0} [f(g(x))] = f(L)$$

NACIONAL
DE COLOMBIA
SEDE BOGOTÁ

Ejemplo

Utilizando esta propiedad se halla el

$$\lim_{x \to 2} (3x+1)^3$$

Si $f[g(x)] = (3x+1)^3$ *se puede hacer*

$$g(x) = 3x + 1 \quad y \quad f(x) = x^3$$

Así, el

$$\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} (3x+1) = \lim_{x \to 2} 3x + \lim_{x \to 2} 1 = 7$$

y

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} 7^3 = 343$$

En este caso

$$\lim_{x \to 2} (3x+1)^3 = 7^3 = 343$$

Continuidad

Sea f una función definida en un intervalo abierto I que contiene el elemento $x = a$. La función f es **continua** en a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

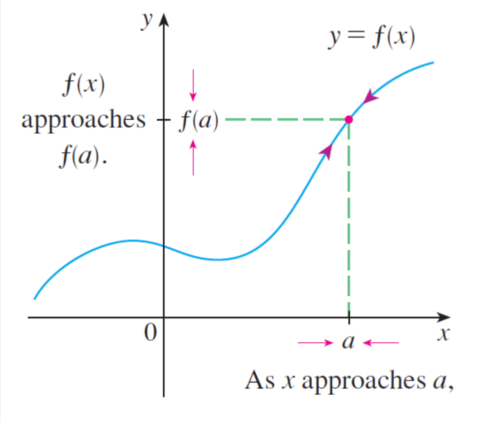
Satisface:

$f(a)$ existe, entonces f está definida en $x = a$

$\lim_{x \to a} f(x)$ existe.

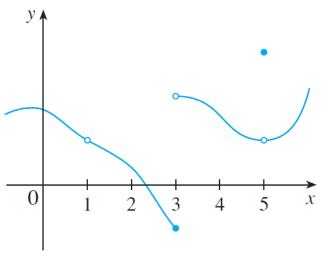
$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Continuidad



Continuidad

En dónde la función representada por el siguiente gráfico es discontinua? Por qué?



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE BOGOTÁ