Diplomado en Probabilidad e Inferencia Básica

Sandra Vergara Cardozo

Profesora

Universidad Nacional de Colombia

Sábado 7 de marzo

Rango de una matriz

- Sea A matriz de orden $m \times n$, se define el rango de la matriz A,

$$\rho(A) = dim(Img(A))$$

- El rango de la matriz A también se define como el número máximo de vectores fila o columna linealmente independientes.

Sean A matriz de orden $m \times n$, C_A el espacio de las columnas, R_A el espacio de los renglones de A, entonces se tiene que:

$$\rho(A) = dim(Img(A)) = dim(R_A) = dim(C_A)$$

Propiedades del Rango

Sea A una matriz de orden $m \times n$, entonces

- $0 \leq \rho(A) \leq \min\{m, n\}$
- Si $\rho(A)$=m<n, se dice que A tiene rango completo fila.
- Si $\rho(A)$=n<m, se dice que A tiene rango completo columna.
- $\rho(I_n) = n$, con I_n la matriz identidad de orden n

Propiedades del Rango

- $\rho(AB) \leq \text{mín}\{\rho(A), \rho(B)\}$
- $\rho(A) = \rho(A^T)$
- $\rho(0) = 0 >$, con 0 la matriz nula de orden n
- Si A es una matriz diagonal, entonces $\rho(A)$ es el número de elementos no nulos en su diagonal.

Determinante

El determinante de una matriz cuadrada de orden n, denotado por $det A$ o $|A|$ es un escalar.

Dada una Matriz A de tamaño 2×2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, se define el determinante de A, $det\ A$ o $|A|$ como:

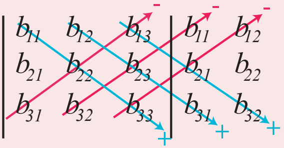
$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \quad det\ A = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 2 * 7 - 3 * 5 = 14 - 15 = -1$$

Determinante de una matriz 3×3 (Regla de Sarrus)

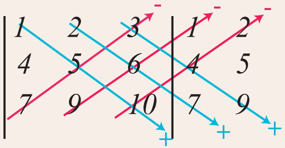
Sea B matriz de tamaño 3×3, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$, se define el determinante de B por la regla de *Sarrus*:



$$
\begin{aligned}
|B| &= b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - b_{31}b_{22}b_{13} - b_{32}b_{23}b_{11} - b_{33}b_{21}b_{12} \\
&= b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - (b_{31}b_{22}b_{13} + b_{32}b_{23}b_{11} + b_{33}b_{21}b_{12})
\end{aligned}
$$

Ejemplo (Determinante de una matriz 3×3)

Sea B *matriz de tamaño* 3×3*,* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$*, determinante de* B *es:*



$$
\begin{aligned}
|B| &= (1 * 5 * 10) + (2 * 6 * 7) + (3 * 4 * 9) - (7 * 5 * 3) - (9 * 6 * 1) - (10 * 4 * 2) \\
&= 50 + 84 + 108 - 105 - 54 - 80 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Menor (i, j) de una matriz

* Sea A una matriz cuadrada de orden n, $n \geq 2$. El determinante de la matriz cuadrada de orden $n-1$ obtenida al eliminar en A su i-ésima fila y su j-ésima columna se le llama ij-ésimo menor de A y se denota por M_{ij}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

El menor $M_{32}(A)$ es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \color{red}{2} & 3 \\ 4 & \color{red}{5} & 6 \\ \color{red}{7} & \color{red}{9} & \color{red}{10} \end{pmatrix}$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

Cofactor (i, j) de una matriz

* El ij-ésimo cofactor de la matriz A, denotado por C_{ij}, se define como

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ y el menor $M_{32} = -6$.

El cofactor $C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5(-6) = 6$

Determinante por Cofactores

Para una matriz de tamaño $n \times n$ con $n \geq 3$ se suele usar el método de cofactores, este método se describe a continuación de manera general.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Se toma cualquier fila, se realiza la sumatoria de los productos de cada componente de la fila por su respectivo cofactor.

  Si por ejemplo tomamos la fila 1, se tiene:

$$|A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$$

Ejemplo (Determinante por Cofactores)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Calculando los menores del la fila 3 y sus respectivos determinantes se tiene:

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}, \quad M_{31} = 12 - 15 = -3,$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}, \quad M_{32} = 6 - 12 = -6,$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \quad M_{33} = 5 - 8 = -3,$$

Los cofactores para la fila 3 son:

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = (-1)^4(-3) = -3,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5(-6) = 6,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = (-1)^6(-3) = -3,$$

El determinante de la matriz A por el método de cofactores es:

$$|A| = 7 * (-3) + 9 * (6) + 10 * (-3) = 3$$

Propiedades de los determinantes

- Sean A y B matrices de orden $n \times n$, y k es número real, donde B resulta de multiplicar una fila de la matriz A por k, entonces, $det(B) = k\, det(A)$.
- Sea A una matriz de orden $n \times n$ y k número real, entonces $det(kA) = |kA| = k^n\, det(A)$.
- Sean A y B matrices de orden $n \times n$, entonces $det(AB) = det(A) * det(B)$.

Propiedades de los determinantes

- Sea A matriz de orden $n \times n$ y A^t es la matriz traspuesta de A, entonces $det(A) = det(A^t)$.
- Si A es una matriz de orden $n \times n$ es una matriz triangular superior o inferior, entonces, $det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$.
- Sea A matriz de orden $n \times n$, si $det(A) \neq 0$ entonces A es invertible.
- Sea A matriz de orden $n \times n$, $det(A) \neq 0$ si y solo si las columnas de A son linealmente independientes.

Propiedades de los determinantes

- Si A es una matriz cuadrada de orden n. Si A tiene una fila nula, entonces el $det A = 0$.
- Sea A una matriz cuadrada de orden n. Si se intercambian dos filas cualesquiera de A, el determinante de la matriz obtenida es igual al determinante de A multiplicado por -1.
- Sea A una matriz cuadrada de orden n. Si dos filas de A son iguales, entonces $det A = 0$.
- Sea A una matriz cuadrada de orden n. Si en A una fila es múltiplo escalar de otra, entonces $det A = 0$

Propiedades de los determinantes

- Sea A una matriz cuadrada de orden n. La operación elemental que consiste en sustraer de una fila A un múltiplo escalar de otra fila de A, no altera el valor del determinante.

Adjunto Clásico

- Consideremos una n matriz cuadrada $A = (a_{ij})$, sobre K,
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
- La transpuesta de la matriz de los cofactores de los elementos a_{ij} de A, representada por adj A, se llama adjunto clásico o (matriz adjunta) de A:
$$Adj\,A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

- Para toda matriz cuadrada A,

  $A(adj\,A)$=$(adj\,A) * A$= $|A|I$

  La matriz I es la matriz identidad: Luego si $|A| \neq 0$

  $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adj\,A)$

- En el sistema homogeneo Ax = 0, tiene una solución diferente de cero si y solo si $\Delta = |A| = 0$

Subespacios asociados a una matriz

Espacio de los renglones (filas) de una matriz

Sea A matriz de orden $m \times n$, los renglones (filas) de la matriz A son $\{r_1, r_2, r_3, \ldots, r_m\}$, entonces el espacio de los renglones (filas) de A es:

$$R_A = Gen\{r_1, r_2, r_3, \ldots, r_m\}$$

Espacio de las columnas de una matriz

Sea A matriz de orden $m \times n$, las columnas de la matriz A son $\{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n\}$, entonces el espacio de las columnas de A es:

$$C_A = Gen\{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n\}$$

Espacio nulo de una matriz

Sea A matriz de orden $m \times n$, se define el espacio nulo de la matriz A, $N_A = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$.

Nulidad de una matriz

Sea A matriz de orden $m \times n$, se define la nulidad de la matriz A,

$$\nu(A) = dim(N_A)$$

Imagen de una matriz

Sea A matriz de orden $m \times n$, se define la imagen de la matriz A,

$$Img(A) = \{y \in \mathbb{R}^m : Ax = y \wedge x \in \mathbb{R}^n\}$$

Sean A matriz de orden $m \times n$ y C_A el espacio de las columnas de A, entonces

$$C_A = Img(A)$$

Inversa de una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

1. $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Inversa generalizada

Sea A matriz de orden $m \times n$, se dice que la matriz G de tamaño $n \times m$ es una inversa generalizada de A, si cumple:

$$AGA = A$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es fácil verificar que: $AGA = A$.

Inversa generalizada

1. Si A es una matriz no singular, entonces $G = A^{-1}$.
2. G siempre existe.
   a. Para matrices rectangulares.
   b. Para matrices no singulares.
   c. Para matrices singulares.
3. G no es única.
   a. Existe por lo menos una.
   b. Es única para matrices cuadradas de rango completo.

Inversa generalizada Moore-Penrose

Sea A matriz de orden $m \times n$, A^+ es una inversa generalizada de A, si cumple:

I. $AA^+A = A$.

II. $A^+AA^+ = A^+$.

III. AA^+ es simétrica e idempotente.

IV. A^+A es simétrica e idempotente.

Sea A matriz de orden $m \times n$, entonces

a) A^+ siempre existe

b) A^+ es única.

Sea A matriz no singular, entonces $A^+ = A^{-1}$

La solución general del sistema de ecuaciones

$$Ax = b$$

está dada por

$$x = A^{+}b + (I - A^{+}A)z$$

donde z es arbitrario.

- Sea A una matriz de orden $m \times n$ de rango $n < m$,

$$A^{+} = (A^{t}A)^{-1}A^{t}$$

- Sea B una matriz de orden $m \times n$ de rango $m < n$,

$$B^{+} = B^{t}(BB^{t})^{-1}$$

Ejemplo

Sea $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. *Hallemos la inversa generalizada. B es una matriz de orden* 2×3, *con* $2 < 3$. *Luego*

$$\begin{aligned} B^{+} &= B^{t}(BB^{t})^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \right]^{-1} \\ &= \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & -13 \\ -13 & 14 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para ver que satisface las condiciones de inversa generalizada, realizamos lo siguiente: $BB^TB = B$, en efecto:

$$BB^tB = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. *A es una Matriz de orden* 3×2, *con* $m > n$, *la inversa generalizada está dada por*

$$
\begin{aligned}
A^+ &= (A^tA)^{-1}A^t \\
&= \left[\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 21 & 19 \\ 19 & 19 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{38}\begin{pmatrix} 19 & -19 \\ -19 & 21 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{38}\begin{pmatrix} 19 & 0 & -19 \\ -13 & 2 & 25 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Para verificar que es una inversa generalizada, realizamos $AA^+A = A$

Valores y Vectores Propios

Sean $T : V \longrightarrow V$, un operador lineal sobre un espacio vectorial V sobre un cuerpo K. Un escalar $\lambda \epsilon K$, se llama valor propio de T si existe un vector diferente de cero $v \epsilon V$ tal que,

$$T(v) = \lambda v$$

Todo vector que satisface esta relación se llama un vector propio de T perteneciente al valor propio λ.

El conjunto de todos estos vectores forma un subespacio de V.

Los términos de *valor característico y vector característico* se usan frecuentemente en lugar de vector y valor propio

Valores y Vectores Propios

Sean A matriz de orden $n \times n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces λ es un valor propio o característico de A si existe un vector $\mathbf{w}$ no nulo, tal que:

$$A\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$$

a $\mathbf{w}$ se le llama vector propio de A asociado al valor propio λ.

Sean A matriz de orden $n \times n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces λ es un valor propio o característico de A si y solo si:

$$det(A - \lambda I_n) = |A - \lambda I_n| = 0 \qquad (*)$$

La ecuación $(*)$ es llamada la ecuación característica de la matriz A.
$|A - \lambda I_n| = p(\lambda)$ es llamado el polinomio característico de la matriz A.

Para calcular los valores y vectores propios de una matriz A de tamaño $n \times n$ se realiza el siguiente procedimiento:

1. Calcular el determinante $|A - \lambda I_n| = p(\lambda)$
2. Determinar las raíces del polinomio característico, es decir, $p(\lambda) = 0$ y se encuentran $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$
3. Resolver $(A - \lambda_i I_n)\mathbf{w} = \mathbf{0}$ para cada valor propio.

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

1. $|A - \lambda I_n| = p(\lambda)$

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda) - 9$$
$$p(\lambda) = (1-\lambda)^2 - 9 = [(1-\lambda) - 3][(1-\lambda) + 3]$$
$$p(\lambda) = (-\lambda - 2)(-\lambda + 4) \quad \textit{[polinomio característico]}$$

2. *Resolver* $p(\lambda) = 0 = (-\lambda - 2)(-\lambda + 4)$, *así,*
   $\lambda_1 = -2$ *y* $\lambda_2 = 4$, *[valores propios]*

Ejemplo

2. *Resolver* $\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 3 \\ 3 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *para* $\lambda_1 = -2$

$$\begin{pmatrix} 1-(-2) & 3 \\ 3 & 1-(-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$w_1 + w_2 = 0 \rightarrow \ w_1 = -w_2$$

$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = w_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *[vector propio asociado al valor propio* -2*] con* $w_2 \neq 0$.

Ejemplo

2. *Resolver* $\begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & 3 \\ 3 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *para* $\lambda_1 = 4$

$$\begin{pmatrix} 1-4 & 3 \\ 3 & 1-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$-w_1 + w_2 = 0 \rightarrow \; w_1 = w_2$$

$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = w_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *[vector propio asociado al valor propio* 4*] con* $w_2 \neq 0$.