

Diplomado en Probabilidad e Inferencia

Sandra Vergara Cardozo

Profesora

Universidad Nacional de Colombia

Semestre I, 2020.

Tabla de Contenido

1

Módulo I. Matemática para Probabilidad y Estadística

- Vectores
- Vectores, operaciones entre vectores
- Matrices y determinantes
- Espacio vectorial
- Transformación Lineal
- Sistemas de Ecuaciones

Vectores

1

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Vectores

1 . Antes de R_n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Vectores en \mathbf{R}^n

- ① El conjunto de todas las n-uplas de números reales, denotado por \mathbf{R}^n , se llama un n-espacio. En particular una n-upla en \mathbf{R}^n , así

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

- ② se llama un *punto* o un *vector*; los números reales u_i se llaman los *componentes* del vector \mathbf{u} . Además, cuando nos referimos al espacio \mathbf{R}^n usamos el término *escalar* para los elementos de \mathbf{R} , esto es, para los números reales.

Suma de vectores

- ① Sean \mathbf{u} y \mathbf{v} dos vectores en \mathbf{R}^n :

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \text{ y } \mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

- ② La suma de vectores con diferente número de componentes no está definida.
- ③ Sean \mathbf{u} y \mathbf{v} dos vectores en \mathbf{R}^n :

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \text{ y } \mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

- ④ La *suma* de \mathbf{u} y \mathbf{v} , se expresa $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es el vector que se obtiene sumando las componentes correspondientes:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = ((u_1+v_1), (u_2+v_2), \dots, (u_n+v_n))$$

Producto de vectores en R^n

- ① El producto *producto* de un número real k por el vector \mathbf{u} ; $k\mathbf{u}$ es el vector que se obtiene multiplicando cada componente de \mathbf{u} por k :

$$k\mathbf{u} = (k u_1, k u_2, \dots, k u_n)$$

- ② Observese que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $k\mathbf{u}$ son también vectores de \mathbf{R}^n .

Además, se define $-\mathbf{u} = -1\mathbf{u}$ y $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$

- ③ La suma de vectores con diferente número de componentes no está definida.

Ejercicio. Vectores

- ① Sean $\mathbf{u} = (1, -3, 2, 4)$, $\mathbf{v} = (3, 5, -1, -2)$, hallar,
- ② $\mathbf{u} + \mathbf{v}$
- ③ $5\mathbf{u}$
- ④ $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$

Matrices

- 1 Una matriz es un arreglo rectangular de m filas y n columnas, la cual se denota con letras mayúsculas, y sus elementos con letras minúsculas.

Ejemplo, $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$, representa la matriz A de tres filas y cuatro columnas y a_{ij} indica el coeficiente que pertenece a la fila i y la columna j .

De manera general, la matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ está dada por la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriz cuadrada

- ① Una matriz se dice *cuadrada* cuando el número de filas es igual al número de columnas, es decir $n = m$, se dice que tiene orden n y se llama una n-matriz cuadrada.
- ② La diagonal (o diagonal principal) de la n-matriz cuadrada $A=(a_{ij})$ consta de los elementos $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, constituyen la diagonal principal.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Clases de matrices

Matriz triangular inferior

- 1 Una matriz cuadrada A donde los elementos por encima de la diagonal principal son iguales a cero, $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$, se dice que es triangular inferior.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Clases de matrices

Matriz triangular superior

- 1 Una matriz cuadrada A donde los elementos bajo la diagonal principal son iguales a cero, $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$, se dice que A es triangular superior.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Triangulares

Una matriz cuadrada se denomina triangular superior (inferior) si todas sus componentes abajo (arriba) de la diagonal principal son cero.

Matriz diagonal

- 1 Es una matriz triangular superior e inferior simultáneamente.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Diagonal

Una matriz se denomina diagonal si todas sus componentes abajo y arriba de la diagonal principal son cero. En el caso particular donde todos los elementos de la diagonal son unos se llama la matriz unidad o la matriz identidad.

Matriz escalar

- 1 A matriz diagonal donde $a_{ij} = k, \forall i = j$ y $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$, se dice que A es escalar.

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k \end{pmatrix}$$

Matriz identidad

- ① Notada con la letra I , es una matriz escalar cuadrada donde $k = 1$.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz nula

- 1 Es una matriz donde todos sus elementos son cero.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Clases de matrices

Transpuesta de una matriz

Sea A matriz de tamaño $n \times m$, la transpuesta de A se obtiene al intercambiar las filas por las columnas y se nota A^t o A' es de tamaño $m \times n$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & a_{3m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 7 & 9 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -1 \\ 2 & 7 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Clases de matrices

Propiedades Transpuesta de una matriz

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

$$(A^t)^t = A$$

$$(kA)^t = kA^t$$

$$(AB)^t = B^t A^t$$

Operaciones con matrices

Producto de escalar por matriz

- ① El producto de una matriz A por un escalar $k \in \mathbb{R}$ consiste en multiplicar cada elemento de la matriz por k .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \dots & ka_{1m} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \dots & ka_{2m} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} & \dots & ka_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & ka_{n3} & \dots & ka_{nm} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 7 & 9 \\ 11 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{para } k = \sqrt{2} \quad \sqrt{2}A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -3\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 5\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & -1\sqrt{2} & 7\sqrt{2} & 9\sqrt{2} \\ 11\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & 6\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{para } k = 3 \quad 3A = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 6 & 15 \\ 12 & -3 & 21 & 27 \\ 33 & 12 & 18 & 9 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices

Suma de matrices

- 1 Sean A y B matrices de tamaño $m \times n$ la suma de matrices $A + B$, es una matriz C donde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A + B = C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} & \dots & a_{3n} + b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & a_{m3} + b_{m3} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Diferencia entre matrices

- Para realizar la diferencia entre matrices $A - B$, se procede de manera similar a la suma, cambiando la suma por la resta de los elementos de la matriz.

Operaciones con matrices

Propiedades

① Sean A y B matrices de tamaño $n \times m$.

- I. $A + B = B + A$
- II. $A + (B + C) = (A + B) + C$
- III. $A + O = A$, donde la matriz O es aquella que todos sus elementos son cero.
- IV. Para toda matriz A existe una matriz B tal que $A + B = O$.
- V. $k(A + B) = kA + kB$ donde $k \in \mathbb{R}$
- VI. $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$, donde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$
- VII. $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$, donde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

Producto entre matrices

- 1 El producto $A \times B$ se puede realizar si A es de tamaño $n \times m$ y B es de tamaño $m \times p$, lo que implica que el número de columnas de A es igual al número de filas de B .

Sea C la matriz producto $A \times B$, para obtener el elemento de la posición ij de C se realiza la siguiente operación:

$$c_{ij} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + a_{i3} \times b_{3j} + \cdots + a_{im} \times b_{mj}$$

Así:

$$c_{11} = a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} + a_{13} \times b_{31} + \cdots + a_{im} \times b_{m1}$$

$$c_{12} = a_{11} \times b_{12} + a_{12} \times b_{22} + a_{13} \times b_{32} + \cdots + a_{im} \times b_{m2}$$

⋮

$$c_{np} = a_{n1} \times b_{1p} + a_{n2} \times b_{2p} + a_{n3} \times b_{3p} + \cdots + a_{nm} \times b_{mp}$$

Matrices

Producto entre matrices

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2p} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{np} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2p} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{np} \end{pmatrix}$$

⋮

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2p} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{np} \end{pmatrix}$$

Operaciones entre matrices

Producto entre matrices

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & 7 & 5 & 1 \\ 6 & 7 & 8 & 3 \end{pmatrix} \text{ de tamaño } 3 \times 4 \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 3 \\ -1 & -6 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} \text{ de tamaño } 4 \times 2$$
$$C = \begin{pmatrix} (2 \times -3) + (3 \times 2) + (4 \times -1) + (-2 \times 9) & (2 \times 5) + (3 \times 3) + (4 \times -6) + (-2 \times -2) \\ (1 \times -3) + (7 \times 2) + (5 \times -1) + (1 \times 9) & (1 \times 5) + (7 \times 3) + (5 \times -6) + (-1 \times -2) \\ (6 \times -3) + (7 \times 2) + (8 \times -1) + (3 \times 9) & (6 \times 5) + (7 \times 3) + (8 \times -6) + (3 \times -2) \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} -22 & -1 \\ 15 & -6 \\ 15 & -3 \end{pmatrix} \text{ de tamaño } 3 \times 2$$

Operaciones entre matrices

Propiedades del producto entre matrices

① Sea A matriz de tamaño $n \times m$, B matriz de tamaño $m \times p$, C matriz de tamaño $m \times p$, I_n matriz identidad de tamaño $n \times n$ y $k \in R$, las siguientes propiedades se cumplen:

- ① $A(B + C) = AB + AC$
- ② $(B + C)A = BA + CA$
- ③ $(AB)C = A(BC)$
- ④ $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
- ⑤ $AI = IA$

Producto entre matrices

Sea A matriz de tamaño $n \times n$ y r entero positivo, se tiene que $A^1 = A$, entonces, $A^{r+1} = A^r A$.

- Se dice que A es nilpotente de índice r si $A^r = O$.
- Si $A^r = A$ se dice que la matriz A es periódica de índice r .
 - * Para el caso en que $r = 2$, A se llama matriz idempotente, si $A^2 = A$.
 - * $I^r = I$
- Una matriz A se dice que es antisimétrica si $A^t = -A$.

Matrices

Operaciones elementales fila

Operación	Descripción	Ejemplo
$F_i \leftrightarrow F_j$	Intercambio de dos filas	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$
$\lambda * F_i \rightarrow F_i$	Reemplazar cualquier fila por la multiplicación de la fila por un escalar distinto de cero	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{3F_1 \rightarrow F_1} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$
$F_i + (\lambda F_j) \rightarrow F_i$	Reemplazar cualquier fila por la suma de si misma con un múltiplo de una fila diferente	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 + 3*F_1 \rightarrow F_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 13 & 17 & 21 \end{pmatrix}$

Espacio vectorial

Un espacio vectorial real \mathcal{V} es un conjunto con dos operaciones suma (+) y multiplicación (*) por escalar, cuyos elementos son llamados vectores.

Un conjunto para ser un espacio vectorial debe satisfacer las siguientes propiedades.

- ① Sean x, y vectores en \mathcal{V} , entonces, se tiene que $x + y \in \mathcal{V}$, (cerrado para la suma).
- ② Sea x vector en \mathcal{V} y k un número real, entonces, $k * x \in \mathcal{V}$, (cerrado bajo la multiplicación por escalar).
- ③ Sean x, y vectores en \mathcal{V} , entonces, $x + y = y + x$, (comutatividad).
- ④ Sean x, y, z vectores en \mathcal{V} , entonces, se tiene que $(x + y) + z = x + (y + z)$, (asociatividad).
- ⑤ Sea x vector en \mathcal{V} , entonces existe un vector 0 en \mathcal{V} , tal que $x + 0 = 0 + x = x$, (identidad para la suma).

Espacio vectorial

- ⑥ Sea x vector en \mathcal{V} , existe un vector $-x = 0$ en \mathcal{V} tal que $x + (-x) = 0$, (inverso aditivo).
- ⑦ Sean x, y vectores en \mathcal{V} y k un número real, entonces, $k * (x + y) = k * x + k * y$, (distributiva 1).
- ⑧ Sea x vector en \mathcal{V} y k, r números reales, entonces, $(k + r)x = k * x + r * y$, (distributiva 2).
- ⑨ Sea x vector en \mathcal{V} y k, r números reales, entonces, $k(r * x) = (k * r)x$, (asociativa de la multiplicación por escalar).
- ⑩ Sea x vector en \mathcal{V} , entonces se tiene que $1x = x$, (identidad para la multiplicación).

Subespacio vectorial

Sea \mathcal{H} subconjunto no vacío de un espacio vectorial \mathcal{V} , \mathcal{H} se dice subespacio vectorial de \mathcal{V} si es cerrado para la suma (+) y la multiplicación (*) por escalar.

Todo subespacio vectorial de un espacio vectorial \mathcal{V} contiene el vector nulo 0.

Subespacio vectorial

Sea $V = P_3$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 3. Determinar si el subconjunto $\mathcal{H} = \{p \in P_3 : \text{grado de } p \text{ es igual a } 3\}$ con las operaciones de \mathcal{V} , es un subespacio vectorial de \mathcal{V} .

Combinación lineal

Sean x_1, x_2, \dots, x_n vectores en \mathcal{V} espacio vectorial, sea $w \in \mathcal{V}$ se dice que es una combinación lineal si existen escalares a_1, a_2, \dots, a_n tales que:

$$w = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

Dependencia lineal

Sean x_1, x_2, \dots, x_n vectores en \mathcal{V} espacio vectorial, se dice que estos vectores son linealmente dependientes si existen escalares a_1, a_2, \dots, a_n no todos nulos tales que:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \mathbf{0}$$

en caso contrario los vectores x_1, x_2, \dots, x_n son linealmente independientes.

Espacio vectorial

Espacio generado

Sean x_1, x_2, \dots, x_n vectores en \mathcal{V} espacio vectorial, el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores x_1, x_2, \dots, x_n es llamado espacio generado por $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

$$Gen\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{w : w = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n\}$$

con a_1, a_2, \dots, a_n escalares.

Además, $Gen\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es un subespacio vectorial de \mathcal{V}

Base de un espacio vectorial

Sean x_1, x_2, \dots, x_n vectores en \mathcal{V} espacio vectorial, el conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es una base para \mathcal{V} si:

- ① el conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es linealmente independiente,
- ② el $Gen\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es el espacio vectorial \mathcal{V}

Sea x_1, x_2, \dots, x_n una base para el espacio vectorial \mathcal{V} y $w \in \mathcal{V}$, entonces el conjunto a_1, a_2, \dots, a_n de escalares tales que $w = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ es único.

Base de un espacio vectorial

Sea x_1, x_2, \dots, x_n una base finita para el espacio vectorial \mathcal{V} , entonces \mathcal{V} es de dimensión finita y su dimensión es n .

$$\dim(\mathcal{V}) = n$$

Transformación lineal

Sean $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ espacios vectoriales, con las operaciones $(+_\alpha, *_\alpha)$, $(+_\beta, *_\beta)$ respectivamente, una transformación lineal T es una aplicación lineal de \mathcal{V}_1 en \mathcal{V}_2 , $T : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$, que cumple:

- ① $T(u + w) = T(u) + T(w), \quad \forall u \in \mathcal{V}_1, \forall w \in \mathcal{V}_2$
- ② $T(\kappa u) = \kappa T(u), \quad \forall u \in \mathcal{V}_1, \forall w \in \mathcal{V}_2, \kappa \in \mathbb{R}$

Transformación Lineal

Transformación lineal

Sea T transformación lineal de \mathcal{V}_1 en \mathcal{V}_2 es una transformación lineal

- ① $T(0) = 0$
- ② El conjunto de $N_T = u \in \mathcal{V} / T(x) = 0$ es un subespacio de \mathcal{V}
- ③ El conjunto $R_T = w \in W / w = T(x), \forall x \in \mathcal{V}$ es un subespacio de \mathcal{V}

Transformación lineal

Sea T transformación lineal de \mathcal{V}_1 en \mathcal{V}_2 es una transformación lineal

- ① Al subespacio N_T de \mathcal{V}_1 se le llama Núcleo de T
- ② Al subespacio R_T de \mathcal{V}_2 se le llama imagen de T

Núcleo de la transformación lineal

Sean $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ espacios vectoriales, $T : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ transformación lineal, el núcleo (Kernel) de T es el conjunto $Nu(T) = \{u \in \mathcal{V}_1 / T(u) = 0\} = T^{-1}(\{0\})$:

T transformación lineal $T : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$, entonces, T es inyectiva si y solo si $Nu(T) = \{0\}$

Imagen de la transformación lineal

Sean $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ espacios vectoriales, $T : V_1 \rightarrow V_2$ transformación lineal, la imagen de T es el conjunto $Im(T) = \{w \in \mathcal{V}_2 / \exists u \in \mathcal{V}_1; T(u) = w\}$

Rango de la transformación lineal

Sean $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ espacios vectoriales, $T : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ transformación lineal, el rango de T es la dimensión de la imagen de T .

Nulidad de la transformación lineal

Sean $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ espacios vectoriales, $T : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ transformación lineal, la nulidad de T es la dimensión del núcleo de T .

Dimensión de la transformación lineal

Sean $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ espacios vectoriales, $T : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ transformación lineal, entonces, $\dim(Nu(T)) + \dim(Im(T)) = \dim(T)$.

Transformación Lineal

Representación matricial de la transformación lineal

Sea $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ transformación lineal, donde $T(x) = Ax$ con A matriz de tamaño $m \times n$.

Sistemas de Ecuaciones

Sistema de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones lineales, que tiene m ecuaciones y n variables,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \quad \text{ecuación 1}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \quad \text{ecuación 2}$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \quad \text{ecuación 3}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_m + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \quad \text{ecuación } m$$

Sistemas de Ecuaciones

Sistema de ecuaciones lineales

Ejemplo

Dado el sistema de dos ecuaciones con tres variables:

$$2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 4$$

$$x_1 + 4x_2 + \sqrt{2}x_3 = \frac{1}{5}$$

se tiene:

$$\begin{array}{llll} a_{11} = 2 & a_{12} = 5 & a_{13} = 7 & b_1 = 4 \\ a_{21} = 1 & a_{22} = 4 & a_{23} = \sqrt{2} & b_2 = \frac{1}{5} \end{array}$$

Sistema de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones con m ecuaciones y n incógnitas se puede escribir de la forma matricial $AX = b$, donde A es la matriz de coeficientes asociada al sistema, X es el vector de incógnitas y b el vector de términos independientes del sistema.

Sistemas de Ecuaciones

Sistema de ecuaciones lineales

Para el sistema:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_m + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

se tiene que:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m \times 1}$$

Sistema de ecuaciones lineales

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales se procede:

1. Se asocia una matriz al sistema, la cual llamaremos A .
2. Se escribe la matriz aumentada, $(A|b)$, donde b es un vector de términos independientes.
3. Se utilizan operaciones elementales por filas para llegar a una matriz escalonada.

Sistema de ecuaciones lineales

Ejemplo

Dado el sistema de dos ecuaciones con tres variables:

$$2x + y - 2z = 10$$

$$3x + 2y + 2z = 1$$

$$5x + 4y + 3z = 4$$