

A1 - Analysis

» Aufgaben » Tipps » Lösungen TI » Lösungen Casio

Eine Käferpopulation besteht zu einem bestimmten Anfangszeitpunkt aus 50.000 Exemplaren. Zwar kommen jedes Jahr durch Fortpflanzung neue Käfer hinzu, gleichzeitig wird die Population aber durch natürliche Feinde dezimiert.

Die Entwicklung der Käferpopulation kann durch die folgende Funktion k beschrieben werden:

$$k(t) = (50 + 25t) \cdot e^{-0,1t} \quad \text{mit } t \geq 0$$

Dabei gilt Folgendes: 1 Einheit der Funktionswerte $\hat{=}$ 1.000 Käfer

1 Einheit der t -Werte $\hat{=}$ 1 Jahr

1. Berechne die erste Ableitung der Funktion k und ermittle damit unter Zuhilfenahme der zweiten Ableitung $k''(t) = (-4,5 + 0,25t) \cdot e^{-0,1t}$ die Extrem- und Wendepunkte des Graphen von k innerhalb des betrachteten Intervalls ohne Verwendung des Graphen.

Begründe das Grenzwertverhalten des Graphen für $t \rightarrow +\infty$ anhand des Funktionsterms von k .

(13P)

2. Bestimme, zu welchen Zeiten die Population größer als 100.000 Käfer ist und wie stark die Population in den ersten 6 Jahren durchschnittlich pro Jahr zunimmt.

(7P)

3. Beschreibe unter Verwendung der Begriffe „Populationsgröße“ und „Wachstumsgeschwindigkeit“ die Entwicklung der Käferpopulation. Deute dabei sowohl die Extrem- und Wendepunkte als auch den Grenzwert des Graphen aus Aufgabenteil 1.

(8P)

4. Zeige, dass K mit $K(t) = (-250t - 3.000) \cdot e^{-0,1t}$ eine Stammfunktion von k ist.

Gib den Wert von $\frac{1.000}{30} \cdot \int_{20}^{50} k(t) \, dt$ an und deute diesen im Sachzusammenhang.

(6P)

5. Die Funktion k beschreibt die Entwicklung der Käferpopulation nur für die ersten 55 Jahre recht gut. Ab dem Zeitpunkt $t = 55$ bleibt bei einer verbesserten Beschreibung die zu diesem Zeitpunkt erreichte Wachstumsgeschwindigkeit konstant, sodass für $t > 55$ ein lineares Wachstum vorliegt.

Ermittle die momentane Wachstumsgeschwindigkeit bei $t = 55$ und bestimme mithilfe der Funktionsgleichung, die ab diesem Zeitpunkt die Populationsgröße beschreibt, den voraussichtlichen Zeitpunkt des Aussterbens der Käferpopulation.

(6P)