Gegeben sind die beiden Funktionsscharen g_a und w_a mit $g_a(x) = 2 \cdot a \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4 \cdot a^2}}$ und
$w_a(x) = \frac{8 \cdot a^3}{x^2 + 4 \cdot a^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}^+$.
Die Graphen beider Scharen verlaufen für jeden Parameter sehr ähnlich.

1. Zeigen Sie: (11BE)
   - Jeder Graph der Funktionsschar g_a besitzt den relativen Hochpunkt $H(0 \mid 2a)$.
   - Jeder Graph der Funktionsschar g_a und w_a ist achsensymmetrisch zur y-Achse.
   - Für jedes a hat die Gleichung $w_a''(x) = 0$ zwei Lösungen.

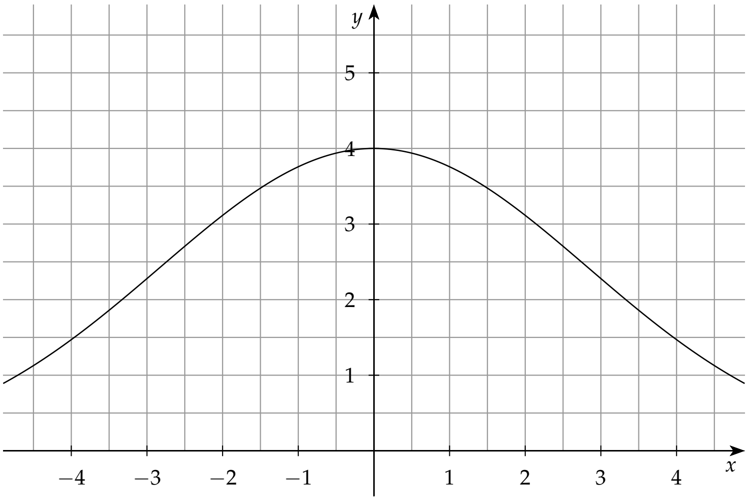
2.1 In Material 1 ist der Graph von g_2 im Intervall $[-4, 4]$ gezeichnet. Für die Funktionen der Funktionenschar g_a existieren keine elementaren Stammfunktionen. Erläutern sie deshalb ohne Rechnung ein Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung von $\int_{-4}^{4} g_2(x)\,\mathrm{d}x$. (14BE)

2.2 Für die Funktionen der Schar w_a existieren jedoch Stammfunktionen.
Zeigen Sie, dass W_a mit $W_a(x) = 4 \cdot a^2 \cdot \arctan\left(\frac{x}{2a}\right) = 4 \cdot a^2 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{x}{2a}\right)$
eine Stammfunktionsschar zu w_a ist.
Beachten Sie dazu: $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$

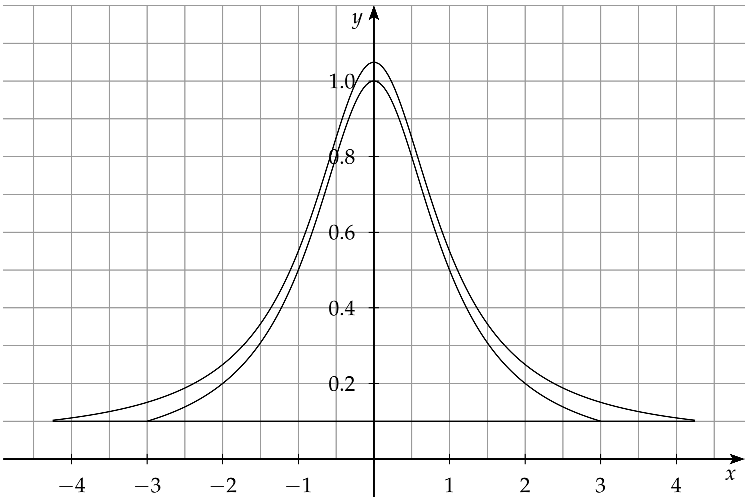
3. Durch die Gerade $y = \frac{1}{10}$ und den Graphen von $w_{0,5}$ wird der Querschnitt des Inneren einer Glocke definiert. Durch die Gerade $y = \frac{1}{10}$ und den Graphen von $g(x) = w_{0,5}(x) + 0,05$ wird der Querschnitt des Äußeren der gleichen Glocke definiert (siehe Material 2).
Ermitteln Sie das für die Glocke notwendige Materialvolumen. Erläutern Sie Ihr Vorgehen. (15BE)

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

Material 1



Material 2



Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.