

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung

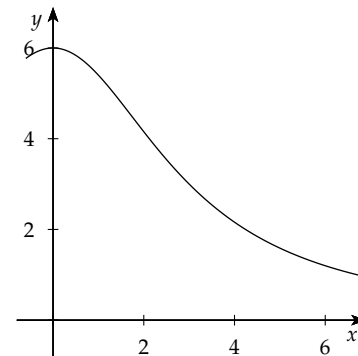
$$f(x) = \frac{54}{x^2+9}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Zeigen Sie ohne Verwendung der Differentialrechnung, dass die Funktion f nur an der Stelle $x = 0$ ein lokales Maximum hat. (6BE)

2. Berechnen Sie näherungsweise das Integral

$$\int_3^6 f(x) \, dx, \text{ und zwar entweder}$$

- durch Ober- und Untersumme (Streifenbreite 1) oder
- durch eine (Sehnen-)Trapezsumme (Streifenbreite 1).



Skizzieren Sie Ihren Näherungsansatz in die vorgegebene Abbildung. Beurteilen Sie Ihren Näherungswert. Erläutern Sie, wie man ihn verbessern könnte.

3. Die Funktion f kann im Bereich $3 \leq x \leq 6$ durch eine andere Funktion g mit $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}$ angenähert werden. (9BE)

Die Punkte $P(3 | f(3))$ und $Q(6 | f(6))$ liegen (auch) auf dem Graphen von g . Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Punkte die Funktionsgleichung von g .

[Zur Kontrolle: $g(x) = \frac{54}{x} + \frac{108}{x^2}$]

Berechnen Sie unter Verwendung einer Stammfunktion das Integral von g über dem Intervall $[3; 6]$.

4. In einer Formelsammlung finden Sie: $\int \frac{1}{x^2+1} \, dx = \arctan(x) + C$. (10BE)

Dabei ist $\arctan(x)$, oder auch $\tan^{-1}(x)$, die Umkehrfunktion der Tangensfunktion.

- 4.1 Begründen Sie damit die folgende Gleichung: $\int \frac{54}{x^2+9} \, dx = 18 \cdot \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C$.

Berechnen Sie den Wert des Flächeninhalts unter dem Graphen von f über dem Intervall $[3; 6]$ mit Hilfe einer Stammfunktion.

Vergleichen Sie diesen Wert mit den Näherungswerten aus den Aufgaben 2 und 3, indem Sie deren jeweilige prozentuale Abweichung angeben.

- 4.2 Untersuchen Sie die Stammfunktionen von g und f (mit $C = 0$) bezüglich ihres Verhaltens für $x \rightarrow \infty$ und geben Sie den wesentlichen Unterschied an. (6BE)