Ein landwirtschaftliches Unternehmen baut drei verschiedene Getreidesorten an. Als Ressourcen stehen noch 33 Tonnen Düngemittel und 810 offene Arbeitsstunden zur Verfügung.
Zur Bearbeitung eines Hektars (ha) werden benötigt:

	Düngemittel [t]	Arbeitszeit [h]
Sorte A	0,6	9
Sorte B	0,4	12
Sorte C	0,5	15

1. Mit diesen Angaben kann man das folgende lineare Gleichungssystem aufstellen: (10BE)

(1) $0{,}6x + 0{,}4y + 0{,}5z = 33$

(2) $9x + 12y + 15z = 810$

1.1 Erläutern Sie die Bedeutung der Variablen und der beiden Gleichungen.
Berechnen Sie die vollständige Lösung des Gleichungssystems.

1.2 Die vorhandenen Ressourcen an Düngemittel und Arbeitsstunden sollen vollständig ausgeschöpft werden.

- Bestimmen Sie, wie viel Hektar der Sorten A und C bearbeitet werden können, wenn 40 Hektar der Sorte B angebaut werden sollen.
- Bestimmen Sie die maximale und die minimale Gesamt-Anbaufläche.

2. Die Gleichungen (1) und (2) beschreiben je eine Ebene E_1 bzw. E_2 im Raum $\mathbb{R}^3$. (8BE)

2.1 Bestimmen Sie die Spurgeraden von E_1 und E_2 in der x-z-Ebene sowie deren Schnittpunkt S.
Deuten Sie dessen Koordinaten im Sachzusammenhang.

2.2 Bestimmen Sie mit Hilfe der Spurgeraden von E_1, wie viele Hektar der Sorten A und C jeweils maximal angebaut werden können, wenn nur die Düngemittelressourcen berücksichtigt werden.

3. Die Spalten der obigen Tabelle sollen als Vektoren $\overrightarrow{d}$ (Düngemittel) und $\overrightarrow{a}$ (Arbeitszeit) aufgefasst werden. Ferner sei der Vektor $\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$ gegeben, der die jeweils benötigte Menge an Pflanzenschutzmittel $\left(\text{in } \frac{\text{kg}}{\text{ha}}\right)$ für die Sorten A, B und C angibt. (12BE)

3.1 Beschreiben Sie, wie man überprüfen kann, ob die drei Vektoren $\overrightarrow{d}$, $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{p}$ linear unabhängig sind.
Bestätigen Sie, dass gilt: $\overrightarrow{p} = -10 \cdot \overrightarrow{d} + \frac{4}{3} \cdot \overrightarrow{a}$.

3.2 Erklären Sie die Gleichung (A) und die weiteren Umformungsschritte (B) bis (D) im untenstehenden Kasten und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Es sei $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{p} = -10\overrightarrow{d} + \frac{4}{3}\overrightarrow{a}$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} 6x + 12y + 15z &= \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{x} && \text{(A)} \\ &= \left(-10\overrightarrow{d} + \tfrac{4}{3}\overrightarrow{a}\right) \cdot \overrightarrow{x} && \text{(B)} \\ &= -10\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{x} + \tfrac{4}{3}\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{x} && \text{(C)} \\ &= -10 \cdot 33 + \tfrac{4}{3} \cdot 810 = 750 && \text{(D)} \end{aligned}$$