

Optische Rauchmelder enthalten als wichtiges Bauteil eine Fotozelle.

1. In einer Fabrik, die Fotozellen herstellt, wird jede Fotozelle auf Fehler untersucht. Bei dieser Untersuchung werden nacheinander und voneinander unabhängig bis zu drei Einzelkontrollen durchgeführt. Sofern bei einer der Einzelkontrollen eine fehlerhafte Fotozelle entdeckt wird, wird sie umgehend ausgesondert und nicht weiter überprüft. Eine intakte Zelle wird in keinem Fall ausgesondert. Bei den oben beschriebenen Einzelkontrollen ist die Fehlerquote ziemlich hoch, im Durchschnitt wird eine von fünf fehlerhaften Fotozellen nicht entdeckt.
  - 1.1 Eine Fotozelle ist defekt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der sie innerhalb dieser Untersuchung erst bei der letzten, also der dritten Einzelkontrolle entdeckt und ausgesondert wird. (2P)
  - 1.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass bei den Untersuchungen von zehn fehlerhaften Fotozellen folgende Ereignisse eintreten: (6P)
    - A: Es werden mindestens neun fehlerhafte Fotozellen entdeckt.
    - B: Unter den ersten fünf werden nur drei fehlerhafte Fotozellen und unter den restlichen fünf alle fehlerhaften Fotozellen entdeckt.
2. In Rauchmeldern wurde bisher nur eine Fotozelle eingebaut. Es wird nun überlegt, ob man die Zuverlässigkeit eines Rauchmelders dadurch verbessern könnte, dass man drei unabhängig voneinander arbeitende Fotozellen verwendet, die so geschaltet sind, dass erst dann Alarm ausgelöst wird, wenn zumindest zwei der drei Fotozellen eine Reaktion zeigen.  
Es sei  $p$  die Wahrscheinlichkeit, dass eine Fotozelle im Falle von Rauchentwicklung eine Reaktion zeigt, und  $P(p)$  die Wahrscheinlichkeit, dass ein derartiger Rauchmelder im Falle von Rauchentwicklung Alarm auslöst.
  - 2.1 Berechnen Sie für  $p = 0,3$ ,  $p = 0,5$  und  $p = 0,7$  die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten  $P(p)$ . Werten Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Zuverlässigkeit des Rauchmelders mit drei Fotozellen im Vergleich zu dem mit einer Fotozelle aus und formulieren Sie eine Vermutung, ob durch die beschriebene Maßnahme die Zuverlässigkeit der Rauchmelder verbessert wird. (7P)
  - 2.2 Leiten Sie den Term  $P(p) = -2p^3 + 3p^2$  her und skizzieren Sie den Graphen der Wahrscheinlichkeitsfunktion  $P$  für  $p \in [0; 1]$  im Koordinatensystem im Material. (3P)
  - 2.3 Erläutern Sie, welche Bedeutung die Funktion  $R$  (siehe Kasten) im Sachzusammenhang hat.  
Erklären Sie, was in den Zeilen (1) bis (3) berechnet wird und deuten Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. (4P)

$$R : p \longrightarrow R(p) = -2p^3 + 3p^2 - p$$

$$(1) R'(p) = -6p^2 + 6p - 1$$

$$(2) R'(p) = 0 \Rightarrow p_1 \approx 0.78$$

$$(3) R''(p_1) < 0$$

3. Der neue Vorstand des Unternehmens verlagert aus Kostengründen einen Großteil der Produktion an einen anderen Standort. Dort zeigen sich bei der Massenfertigung der Rauchmelder große Probleme: Die ansonsten niedrige Ausschussquote von 3 % steigt um ein Drittel an. Der Produktionsleiter ergreift daraufhin Maßnahmen zur Senkung der Ausschussquote. Er möchte den Erfolg dieser Maßnahmen durch einen Test überprüfen, in dem 850 Rauchmelder kontrolliert werden.

(8P)

Entwickeln Sie einen solchen Test mit einer Entscheidungsregel so, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art höchstens 5 % beträgt.

### Material

