In einem Park steht ein festlich geschmückter 30 m hoher Maibaum in der Nähe eines Hanges. Mit Ausnahme dieses Hanges befindet sich der gesamte Park in der x-y-Ebene. Der Hang steigt aus der x-y-Ebene auf und liegt in einer Ebene H, die durch die Gleichung

$H: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $s, r \in \mathbb{R}$ beschrieben wird.

Der Maibaum steht im Punkt $F(3 \mid 7 \mid 0)$ senkrecht zur x-y-Ebene. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 10 m. Die Spitze des Maibaums liegt also im Punkt $S(3 \mid 7 \mid 3)$.

1.1 Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Hangebene H und berechnen Sie den Neigungswinkel des Hangs. (6P)
[zur Kontrolle: $x + y + 2z = 8$]

1.2 Skizzieren Sie die Hangebene H mithilfe der Achsenabschnitte (Spurpunkte) und zeichnen Sie den Maibaum ein. (4P)

2. Ein Landschaftsgärtner möchte ein ringförmiges 2 m breites Blumenbeet mit einem inneren Radius von 8 m um den Maibaum herum anlegen. Der Abstand vom Beetrand zum Rand der Hangebene sollte dabei mindestens 3 m betragen. Prüfen Sie, ob dieser Abstand eingehalten wird. (6P)

3. Der Maibaum wird von der Sonne beschienen und wirft einen Schatten auf die Hangebene H und die x-y-Ebene. Die Richtung der Sonnenstrahlen ist durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ festgelegt. (6P)
Bestimmen Sie den Schattenpunkt der Spitze S des Maibaumes auf der Hangebene H. Zeigen Sie, dass der Schatten des Maibaumes im Punkt $R(2 \mid 6 \mid 0)$ von der x-y-Ebene auf die Hangebene übergeht.

4. Ein beliebiger Punkt $P(x \mid y \mid z)$ soll parallel zum Sonnenstrahlvektor aus Aufgabe 3 auf die Ebene E mit der Gleichung $E: x + y + 2z = 0$ projiziert werden.

4.1 Bestimmen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix M. (5P)

4.2 Begründen Sie, dass durch die Gleichung $\overrightarrow{OP''} = M \cdot \overrightarrow{OP} + \frac{4}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Abbildung des $\mathbb{R}^3$ auf die Ebene H gegeben ist, d.h. $P'' \in H$. (3P)