Gegeben sind die Ebenenschar $E_t : (1+t)\cdot x + t\cdot y - 2z = 14$ mit $t \in \mathbb{R}$

und die Ebene $$F : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ mit } v, w \in \mathbb{R}.$$

1.1 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F in Koordinatenform. (6P)
Bestätigen Sie durch geeignete Rechnung, dass die Ebene F eine Ebene der Schar ist, und geben Sie den Wert von t an, für den $E_t = F$ ist.

1.2 Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Ebenen F und E_3. Geben Sie die Menge der gemeinsamen Punkte an. (6P)

2. Ermitteln Sie zwei Ebenen der Ebenenschar E_t, die sich unter einem Winkel von $90°$ schneiden, und erläutern Sie Ihren Lösungsweg. (7P)

3. Die beiden Abbildungsmatrizen M und N bilden die Ebene F vom 3-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ in den 4-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^4$ auf die „Ebenen“ F_M und F_N ab:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.1 Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung der „Ebenen“ F_M und F_N im $\mathbb{R}^4$ in Parameterform. (6P)

3.2 Die beiden „Ebenen“ F_M und F_N können auf folgende Weise dargestellt werden: (5P)

$$F_M : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad F_N : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ mit } r, s, t, u \in \mathbb{R}$$

Die Untersuchung der Lagebeziehung der beiden neu entstandenen „Ebenen“ F_M und F_N im $\mathbb{R}^4$ führt auf ein lineares Gleichungssystem. Bestimmen Sie dieses lineare Gleichungssystem; es muss nicht gelöst werden.
Die Lösung des linearen Gleichungssystems ist $r = -2$, $s = -2$, $t = -4$ und $u = -1$.
Ermitteln Sie damit die Lagebeziehung der beiden „Ebenen“ F_M und F_N.
Beurteilen Sie das Ergebnis.