SchulLV

B1 - Analytische Geometrie

Aufgaben | Tipps | Lösungen

Drei Punkte A_t, B_t und C_t bewegen sich jeweils entlang einer Geraden:

$$A_t \text{ auf der Geraden } g_a: \quad \vec{a}_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$B_t \text{ auf der Geraden } g_b: \quad \vec{b}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$C_t \text{ auf der Geraden } g_c: \quad \vec{c}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Punkte A_t, B_t und C_t bilden für alle $t \in \mathbb{R}$ ein Dreieck Δ_t.

1.

1.1 Zeichnen Sie in das Koordinatensystem (Material 1) die drei Geraden sowie die Dreiecke Δ_0, Δ_1 und Δ_2 ein.

(4P)

1.2 Untersuchen Sie, ob die Dreiecke Δ_t gleichseitig sind.

(3P)

1.3 Die Punkte A_t, B_t und C_t legen für jedes t eine Ebene E_t fest.
Bestimmen Sie eine Ebenengleichung der Ebene E_t in Parameterform.
Zeigen Sie, dass $\vec{n} = \begin{pmatrix} t^2 - t + 1 \\ t^2 - t + 1 \\ t^2 - t + 1 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von E_t ist, und begründen Sie damit die Parallelität der Ebenen.
Bestimmen Sie den Abstand zweier beliebiger dieser Ebenen E_t und E_{t+k} mit $k \in \mathbb{R}$.

(11P)

1.4 Erläutern Sie die in Material 2 durchgeführten Rechenschritte und das Ergebnis im Sachzusammenhang.

(4P)

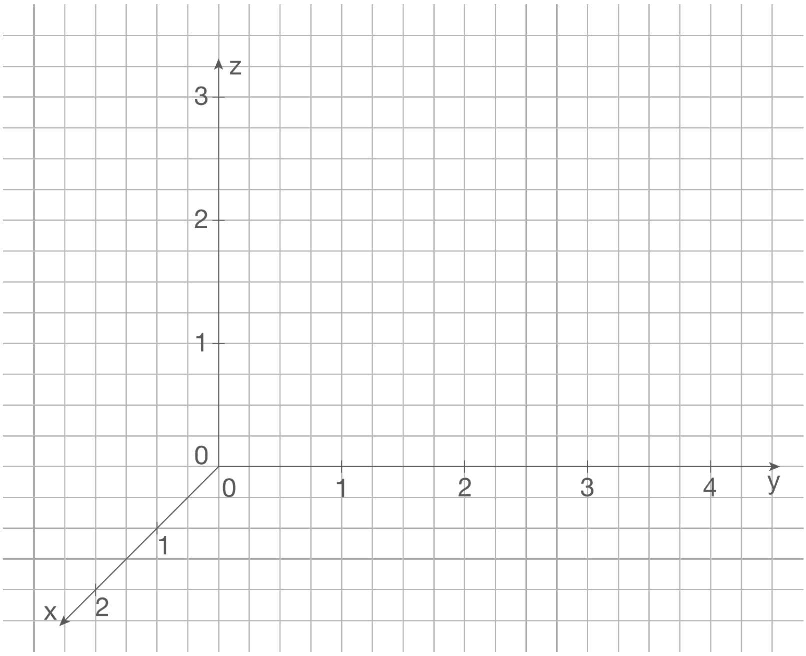
2. Die Punkte A_t, B_t und C_t bilden zusammen mit dem Ursprung eine Schar von Pyramiden in Abhängigkeit von t. Das Volumen einer solchen Pyramide kann mit der Formel
$V(t) = \frac{1}{6} \cdot \left| \left(\vec{a}_t \times \vec{b}_t \right) \cdot \vec{c}_t \right|$ berechnet werden.

2.1 Zeigen Sie, dass $V(t) = \frac{1}{6} \cdot \left| \left(t^3 + 1 \right) \right|$ gilt, und bestimmen Sie t so, dass das Volumen $V(t)$ den Wert $\frac{3}{2}$ annimmt.

(4P)

2.2 Untersuchen Sie, ob die Pyramide mit der minimalen Grundfläche auch die Pyramide mit dem minimalen Volumen ist.

Material 1



Material 2

$$(1)\quad \overline{AB} = \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ -t \end{pmatrix};$$

$$\overline{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 1-t \end{pmatrix}$$

$$(2)\quad A(t) = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ -t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 1-t \end{pmatrix}\right|$$

$$(3)\quad A(t) = \frac{\sqrt{3}\cdot\left(t^2-t+1\right)}{2}$$

$$(4)\quad A'(t) = \frac{\sqrt{3}\cdot(2\cdot t-1)}{2};$$

$$A''(t) = \sqrt{3}$$

$$(5)\quad \frac{\sqrt{3}\cdot(2\cdot t-1)}{2} = 0$$

$$\Rightarrow\quad t = \frac{1}{2}$$

$$(6)\quad A''\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} \qquad > 0$$

$\Rightarrow$ Minimum