

Algoritmos y Estructuras de Datos III

Primer cuatrimestre 2023

(bienvenidos!)

Programa

1. Técnicas de diseño de algoritmos.
2. Introducción a la teoría de grafos y algoritmos sobre grafos.
3. Problema de árbol generador mínimo.
4. Problema de camino mínimo.
5. Problemas de flujo en redes.
6. Introducción a la teoría de NP-completitud.

Bibliografía

1. G. Brassard and P. Bratley, *Fundamentals of algorithmics*, Prentice-Hall, 1996.
2. F. Harary, *Graph theory*, Addison-Wesley, 1969.
3. R. Ahuja, T. Magnanti and J. Orlin, *Network flows: theory, algorithms, and applications*, Prentice-Hall, 1993.
4. M. Garey and D. Johnson, *Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness*, W. Freeman and Co., 1979.

Régimen de cursada

► Cursada:

1. Lunes: clases **teóricas**.
2. Miércoles y viernes: clases **prácticas**.

► Evaluaciones:

1. Dos parciales (individuales).
2. Tres trabajos prácticos (en grupo).
3. Un examen final (individual).

Complejidad computacional: Las reglas del juego

- ▶ En el contexto de la teoría de complejidad computacional, llamamos **problema** a la descripción de los datos de entrada y la respuesta a proporcionar para cada dato de entrada.
- ▶ Una **instancia** de un problema es un juego válido de datos de entrada.
- ▶ Ejemplo:
 1. **Entrada:** Un número n entero no negativo.
 2. **Salida:** ¿El número n es primo?
- ▶ En este ejemplo, una instancia está dada por un número entero no negativo.

Complejidad computacional: Las reglas del juego

- ▶ Suponemos una **Máquina RAM** (*random access memory*).
 1. La memoria está dada por una sucesión de celdas numeradas. Cada celda puede almacenar un valor de b bits.
 2. Supondremos habitualmente que el tamaño b en bits de cada celda está fijo, y suponemos que todos los datos individuales que maneja el algoritmo se pueden almacenar con b bits.
 3. Se tiene un **programa imperativo** no almacenado en memoria, compuesto por asignaciones y las estructuras de control habituales.
 4. Las asignaciones pueden acceder a celdas de memoria y realizar las operaciones estándar sobre los **tipos de datos primitivos** habituales.

Complejidad computacional: Las reglas del juego

► Cada instrucción tiene un **tiempo de ejecución** asociado.

1. El acceso a cualquier celda de memoria, tanto para lectura como para escritura, es $O(1)$.
2. Las asignaciones y el manejo de las estructuras de control se realiza en $O(1)$.
3. Las operaciones entre valores lógicos son $O(1)$.

► Las operaciones entre enteros/reales dependen de b :

1. Las sumas y restas son $O(b)$.
2. Las multiplicaciones y divisiones son $O(b \log b)$.

⇒ Si b está fijo, estas operaciones son $O(1)$. En cambio, si no se puede suponer esto, entonces hay que contemplar que el costo de estas operaciones depende de b .

Complejidad computacional: Las reglas del juego

- ▶ **Tiempo de ejecución de un algoritmo A :**

$T_A(I)$ = suma de los tiempos de ejecución de las instrucciones realizadas por el algoritmo con la *instancia* I .

- ▶ Dada una instancia I , definimos $|I|$ como la cantidad de bits necesarios para almacenar los datos de entrada de I .

1. Si b está fijo y la entrada ocupa n celdas de memoria, entonces $|I| = bn = O(n)$.

- ▶ **Complejidad de un algoritmo A :**

$f_A(n) = \max_{I: |I|=n} T_A(I)$.

Repaso: Notación O

Dadas dos funciones $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, decimos que:

- ▶ $f(n) = O(g(n))$ si existen $c \in \mathbb{R}_+$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $f(n) \leq c g(n)$ para todo $n \geq n_0$.
- ▶ $f(n) = \Omega(g(n))$ si existen $c \in \mathbb{R}_+$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $f(n) \geq c g(n)$ para todo $n \geq n_0$.
- ▶ $f(n) = \Theta(g(n))$ si $f = O(g(n))$ y $f = \Omega(g(n))$.

Repaso: Notación O

- ▶ Si un algoritmo es $O(n)$, se dice **lineal**.
 - ▶ Si un algoritmo es $O(n^2)$, se dice **cuadrático**.
 - ▶ Si un algoritmo es $O(n^3)$, se dice **cúbico**.
 - ▶ Si un algoritmo es $O(n^k)$, $k \in \mathbb{N}$, se dice **polinomial**.
 - ▶ Si un algoritmo es $O(\log n)$, se dice **logarítmico**.
 - ▶ Si un algoritmo es $O(d^n)$, $d \in \mathbb{R}_+$, se dice **exponencial**.
-
- ▶ Cualquier función exponencial es *peor* que cualquier función polinomial: Si $k, d \in \mathbb{N}$ entonces k^n no es $O(n^d)$.
 - ▶ La función logarítmica es *mejor* que la función lineal (no importa la base), es decir $\log n$ es $O(n)$ pero no a la inversa.

Problemas bien resueltos

Convención. Los algoritmos polinomiales se consideran satisfactorios (cuanto menor sea el grado, mejor), y los algoritmos supra-polinomiales se consideran no satisfactorios.

No obstante ...

- ▶ Si los tamaños de instancia son pequeños, ¿es tan malo un algoritmo exponencial?
- ▶ ¿Cómo se comparan $O(n^{85})$ con $O(1,001^n)$?
- ▶ ¿Puede pasar que un algoritmo de peor caso exponencial sea eficiente en la práctica? ¿Puede pasar que en la práctica sea *el mejor*?
- ▶ ¿Qué pasa si no encuentro un algoritmo polinomial?

Problemas de optimización

- Un **problema de optimización** consiste en encontrar la mejor solución dentro de un conjunto:

$$z^* = \max_{x \in S} f(x) \quad \text{o bien} \quad z^* = \min_{x \in S} f(x)$$

- La función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ se denomina **función objetivo** del problema.
- El conjunto S es la **región factible** y los elementos $x \in S$ se llaman **soluciones factibles**.
- El valor $z^* \in \mathbb{R}$ es el **valor óptimo** del problema, y cualquier solución factible $x^* \in S$ tal que $f(x^*) = z^*$ se llama un **óptimo** del problema.

Problemas de optimización combinatoria

- ▶ Un problema de **optimización combinatoria** es un problema de optimización cuya región factible es un conjunto definido por consideraciones combinatorias (!).
- ▶ La **combinatoria** es la rama de la matemática discreta que estudia la construcción, enumeración y existencia de configuraciones de objetos finitos que satisfacen ciertas propiedades.
- ▶ Por ejemplo, regiones factibles dadas por todos los subconjuntos/permutaciones de un conjunto finito de elementos (posiblemente con alguna restricción adicional), todos los caminos en un grafo, etc.

Algoritmos de fuerza bruta

- ▶ Un algoritmo de **fuerza bruta** para un problema de optimización combinatoria consiste en generar todas las soluciones factibles y quedarse con la mejor.
 1. Se los suele llamar también algoritmos de **búsqueda exhaustiva** o **generate and test**.
 2. Se trata de una técnica trivial pero muy general.
 3. Suele ser fácil de implementar, y es un **algoritmo exacto**: si hay solución, siempre la encuentra.
- ▶ El principal problema de este tipo de algoritmos es su complejidad. Habitualmente, un algoritmo de fuerza bruta tiene una **complejidad exponencial**.

Ejemplo: El problema de la mochila

Datos de entrada:

- ▶ Capacidad $C \in \mathbb{Z}_+$ de la mochila (peso máximo).
- ▶ Cantidad $n \in \mathbb{Z}_+$ de objetos.
- ▶ Peso $p_i \in \mathbb{Z}_+$ del objeto i , para $i = 1, \dots, n$.
- ▶ Beneficio $b_i \in \mathbb{Z}_+$ del objeto i , para $i = 1, \dots, n$.

Problema: Determinar qué objetos debemos incluir en la mochila sin excedernos del peso máximo C , de modo tal de **maximizar** el beneficio total entre los objetos seleccionados.

Ejemplo: El problema de la mochila

- ▶ ¿Cómo es un algoritmo de fuerza bruta para el problema de la mochila?
- ▶ ¿Cómo se implementa este algoritmo?

$\text{MOCHILA}(S \subseteq \{1, \dots, n\}, k : \mathbb{Z})$

if $k = n + 1$ **then**

if $\text{peso}(S) \leq C \wedge \text{beneficio}(S) > \text{beneficio}(B)$ **then**

$B \leftarrow S$

end if

else

$\text{MOCHILA}(S \cup \{k\}, k + 1);$

$\text{MOCHILA}(S, k + 1);$

end if

- ▶ Iniciamos la recursión con $B \leftarrow \emptyset; \text{MOCHILA}(\emptyset, 1)$.
- ▶ ¿Cuál es la complejidad computacional de este algoritmo?

Ejemplo: El problema de la mochila

- **Idea.** Podemos **interrumpir la recursión** cuando el subconjunto actual excede la capacidad de la mochila!

$\text{MOCHILA}(S \subseteq \{1, \dots, n\}, k : \mathbb{Z})$

if $k = n + 1$ **then**

if $\text{peso}(S) \leq C \wedge \text{beneficio}(S) > \text{beneficio}(B)$ **then**

$B \leftarrow S$

end if

else if $\text{peso}(S) \leq C$ **then**

$\text{MOCHILA}(S \cup \{k\}, k + 1);$

$\text{MOCHILA}(S, k + 1);$

end if

- Con este agregado, decimos que tenemos un **backtracking**.
- ¿Cuál es la complejidad computacional de este algoritmo?

Ejemplo: El problema de la mochila

- Podemos implementar alguna otra **poda**?

$\text{MOCHILA}(S \subseteq \{1, \dots, n\}, k : \mathbb{Z})$

if $k = n + 1$ **then**

if $\text{peso}(S) \leq C \wedge \text{beneficio}(S) > \text{beneficio}(B)$ **then**

$B \leftarrow S$

end if

else if $\text{peso}(S) \leq C \wedge \text{benef}(S) + \sum_{i=k+1}^n b_i > \text{benef}(B)$
then

$\text{MOCHILA}(S \cup \{k\}, k + 1);$

$\text{MOCHILA}(S, k + 1);$

end if

- Este tipo de algoritmos se denomina habitualmente **branch and bound**.

Backtracking

Idea: Recorrer sistemáticamente todas las posibles configuraciones del espacio de soluciones de un problema computacional, eliminando las **configuraciones parciales** que no puedan completarse a una solución.

- ▶ Habitualmente, utiliza un **vector** $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ para representar una solución candidata, cada a_i pertenece un dominio/conjunto ordenado y finito A_i .
- ▶ El espacio de soluciones es el producto cartesiano $A_1 \times \dots \times A_n$.

Backtracking

- ▶ En cada paso se extienden las soluciones parciales $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$, $k < n$, agregando un elemento más, $a_{k+1} \in S_{k+1} \subseteq A_{k+1}$, al final del vector a . Las nuevas soluciones parciales son sucesores de la anterior.
- ▶ Si S_{k+1} es vacío, se *retrocede* a la solución parcial $(a_1, a_2, \dots, a_{k-1})$.
- ▶ Se puede pensar este espacio como un árbol dirigido, donde cada vértice representa una solución parcial y un vértice x es hijo de y si la solución parcial x se puede extender desde la solución parcial y .
- ▶ Permite descartar configuraciones antes de explorarlas (podar el árbol).

Backtracking: Todas las soluciones

```
algoritmo  $BT(a, k)$   
  si  $a$  es solución entonces  
    procesar( $a$ )  
    retornar  
  sino  
    para cada  $a' \in \text{Sucesores}(a, k)$   
       $BT(a', k + 1)$   
    fin para  
  fin si  
  retornar
```

Backtracking: Una solución

```
algoritmo  $BT(a, k)$   
  si  $a$  es solución entonces  
     $sol \leftarrow a$   
     $encontro \leftarrow \mathbf{true}$   
  sino  
    para cada  $a' \in \text{Sucesores}(a, k)$   
       $BT(a', k + 1)$   
      si  $encontro$  entonces  
        retornar  
      fin si  
    fin para  
  fin si  
retornar
```

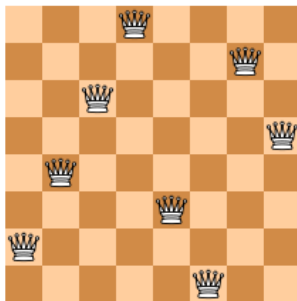
Backtracking - Resolver un *sudoku*

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

El problema de resolver un *sudoku* se resuelve en forma muy eficiente con un algoritmo de *backtracking* (no obstante, el peor caso es exponencial!).

Fuerza bruta - Problema de las n damas



Problema: Ubicar n damas en un tablero de ajedrez de $n \times n$ casillas, de forma que ninguna dama amenace a otra.

Fuerza bruta - Problema de las n damas

- ▶ Solución por **fuerza bruta**: hallar **todas** las formas posibles de colocar n damas en un tablero de $n \times n$ y luego seleccionar las que satisfagan las restricciones.
- ▶ Un algoritmo de fuerza bruta (también llamado de **búsqueda exhaustiva**) analiza todas las posibles “configuraciones”, lo cual habitualmente implica una complejidad exponencial.
- ▶ Por ejemplo, para $n = 8$ una implementación directa consiste en generar **todos los subconjuntos** de casillas.

$$2^{64} = 18,446,744,073,709,551,616 \text{ combinaciones!}$$

- ▶ Sabemos que dos damas no pueden estar en la misma casilla.

$$\binom{64}{8} = 4,426,165,368 \text{ combinaciones.}$$

Fuerza bruta - Problema de las n damas

- ▶ Sabemos que cada columna debe tener exactamente una dama. Cada solución parcial puede estar representada por (a_1, \dots, a_k) , $k \leq 8$, con $a_i \in \{1, \dots, 8\}$ indicando la fila de la dama que está en la columna i .

Tenemos ahora $8^8 = 16,777,216$ combinaciones.

- ▶ Adicionalmente, cada fila debe tener exactamente una dama.

Se reduce a $8! = 40,320$ combinaciones.

- ▶ Esto está mejor, pero se puede mejorar observando que no es necesario analizar muchas de estas combinaciones (¿por qué?).