1 Ordnungen

Unter Ordnungen (oder Relationen) verstehen wir Relationen, die jeweils zwischen zwei Elementen einer Grundmenge X bestehen oder nicht bestehen. Technisch kann man dafür schreiben, dass die Relation eine Funktion des Typs $X \times X \to \{\text{wahr}, \text{falsch}\}$ ist. Die Menge X ist der Gegenstandsbereich der Betrachtungen und kann sehr vieles sein; bspw. endlich oder unendlich groß. Für das Bestehen einer Relation $\equiv$ zwischen zwei Gegenständen $x, y \in X$ schreibt man statt $\equiv(x, y) = \text{wahr}$ auch $x \equiv y$ (wie z.B. bei $+$).

Gewisse Ordnungen sind besonders interessant, da sie gewissen Regeln gehorchen. Daher führt man die folgenden Begriffe ein:

Definition (reflexive Relation) Eine Relation $\leq$ auf X heißt reflexiv, falls für alle $x \in X$

$$x \leq x. \tag{1}$$

Definition (symmetrische Relation) Eine Relation $\equiv$ auf X heißt symmetrisch, falls für alle $x, y \in X$

$$x \equiv y \quad \Rightarrow \quad y \equiv x. \tag{2}$$

Definition (antisymmetrische Relation) Eine Relation $\leq$ auf X heißt antisymmetrisch, falls für alle $x, y \in X$

$$(x \leq y \quad \text{und} \quad y \leq x) \quad \Rightarrow \quad x = y. \tag{3}$$

Definition (transitive Relation) Eine Relation $\leq$ auf X heißt transitiv, falls für alle $x, y, z \in X$

$$(x \leq y \quad \text{und} \quad y \leq z) \quad \Rightarrow \quad x \leq z. \tag{4}$$

Definition (totale Relation) Eine Relation $\leq$ auf X heißt total, falls für alle $x, y \in X$

$$x \leq y \quad \text{oder} \quad y \leq x. \tag{5}$$

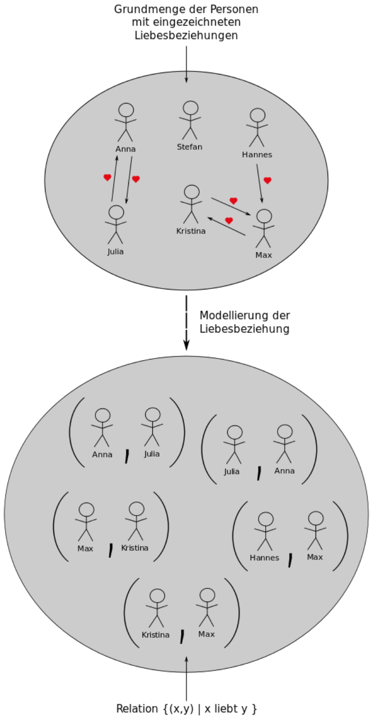
Beispiele Illustrieren wir dies durch ein paar Beispiele:

(1) Eine sehr einfache Relation auf allen Mengen X ist die der Identität, $=$. Betrachte z.B. $X = \{1, 2, 3\}$ oder $X = \mathbb{N}$ oder $X = \{\text{Peter}, \text{Paul}, \text{Marie}\}$. Die Identität ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

(2) Auf der Menge $\mathbb{N}$ gibt es eine Relation x ist kleiner gleich y. Diese Relation ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv und total. Aufgabe: Wie sieht es bei kleiner aus? Wie bei der Nachfolgerrelation "y ist Nachfolger von x, oder $y = x + 1$"?

(3) Eine Relation, die so ähnlich wie die Identität ist, ist die gleichen Rests bei Division durch 7 auf $\mathbb{Z}$, oder $x \sim y :\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}\; x = y + 7n$. Sie ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

(4) Die Liebes-Relation (von wikipedia), "x liebt y":



Aufgabe: Welche Relationen gibt es auf einer zweielementigen Menge wie $X = \{1, 2\}$? Welche davon erfüllen welche der definierten Eigenschaften? Wie viele Relationen gibt es auf $X = \{1, 2, 3\}$?

Zusammenfassend definiert man

Definition (Äquivalenzrelation) Eine Relation auf X heißt Äquivalenzrelation, falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Definition (Halbordnung) Eine Relation auf X heißt Halbordnung, falls sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

Definition (Totalordnung) Eine Relation auf X heißt Totalordnung, falls sie Halbordnung und total ist.

Beispiele

(1) Die Relation $\leq$ auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist eine Totalordnung.

(2) Auf der Menge der Paare der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, können wir definieren:

$$(n_1, m_1) \leq (n_2, m_2) \quad :\Leftrightarrow \quad (n_1 \leq n_2) \quad \text{und} \quad (m_1 \leq m_2) \tag{6}$$

Die Relation ist dann nur noch eine Halbordnung.

(3) Auf der Potenzmenge der natürlichen Zahlen $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ können wir die Teilmengenrelation betrachten. Welche Eigenschaften hat sie?

(4) Aufgabe: Finde ein Beispiel für eine Totalordnung auf $\{1, 2, 3\}$ und ein Beispiel für eine Halbordnung, die keine Totalordnung ist.

Hat man eine Grundmenge X zusammen mit einer Teilmenge $Y \subseteq X$ gegeben, kann man eine Relation R auf X einschränken zu einer Relation auf Y, schreibe $R \restriction Y$.

Lemma Falls eine Relation R auf X reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv oder total ist, so ist $R \restriction Y$ dies auf Y.

Zu einer Relation R (nicht unbedingt transitiv) können wir ihren transitiven Abschluss R^+ definieren:

$$xR^+y \quad :\Leftrightarrow \quad \exists n \geq 0 \quad \exists x_1, \dots, x_n \text{ mit } xRx_1 \text{ und } x_1Rx_2 \text{ und } \dots \text{ und } x_nRy \tag{7}$$

Lemma Der transitive Abschluss R^+ ist transitiv.

Aufgabe Für eine transitive Relation R ist $R^+ = R$, oder $xRy \Leftrightarrow xR^+y$.

Aufgabe Es gilt $R^{++} = R^+$.

1.1 Über Äquivalenzrelationen

Hat man auf einer Menge X eine Äquivalenzrelation $\sim$ gegeben, so induziert diese folgende interessante Menge, die häufig Menge der Äquivalenzklassen genannt wird.

$$X/\sim \quad := \quad \{[x] \mid x \in X\}, \quad \text{wobei} \quad [x] = \{y \in X \mid x \sim y\} \tag{8}$$

Zum Beispiel ist dann $\{[0], [1], \dots, [6]\}$ die Menge der Äquivalenzklassen von $\mathbb{Z}$ bezüglich der Teilbarkeitsrelation, mit $[0] = \{\dots, -14, -7, 0, 7, 14, \dots\}$.

Wir können zu dem Element n aus $\mathbb{Z}$ einen eindeutigen Repräsentanten wählen, z.B. die Zahl zwischen 0 und 6, die zu n äquivalent ist. Damit bekommen wir aus der totalen Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{Z}$ auch eine Ordnung auf $\mathbb{Z}/\sim$. Diese „Vererbung" von Eigenschaften oder Funktionen ist ein mächtiges Werkzeug.

1.2 Über Halb-Ordnungsrelationen

Halbordnungsrelationen können durch sogenannte Hasse-Diagramme dargestellt werden. Dabei werden die Elemente von X durch Punkte dargestellt. Beipiele: B_3, B_4, endliche totale geordnete Mengen. Die Idee ist, dass Pfeile von Punkten zu sich selber weggelassen werden können, weil die Relation eh reflexiv ist. Ähnliches gilt für Transitivität. Die Richtung der Ordnung wird durch die Höhe im Bild dargestellt.

Lemma B_3 und B_4 sind Halbordnungen.

Haben wir eine Menge X und eine Halbordnungsrelationen $\leq$ gegeben, sowie $Y \subseteq X$ und $x \in X$. Dann definieren wir

Definition (obere Schranke) x ist eine obere Schranke von Y, falls für alle $y \in Y$ $y \leq x$. Schreibe auch $x \gtrsim X$.

Definition (untere Schranke) x ist eine untere Schranke von Y, falls für alle $y \in Y$ $x \leq y$. Schreibe auch $x \lesssim X$.

Definition (Supremum) Ein x heißt Supremum von Y als Teilmenge von X, falls

(1) $x \in X$,

(2) $x \gtrsim Y$ und

(3) für alle oberen Schranken $y \in X, y \gtrsim Y$ ist $x \leq y$. (Man sagt auch: x ist die kleinste obere Schranke.)

Schreibe auch $x = \bigvee Y$.

Nach unten definiert man analog das Infimum, schreibe auch $\bigwedge Y$.

Definition (Verband) Ein X heißt Verband, falls jede nicht-leere endliche Teilmenge $Y \subseteq X$ ein Supremum und ein Infimum hat.

Definition (vollständiger Verband) Ein X heißt vollständiger Verband, falls jede Teilmenge ein Supremum und ein Infimum hat.

Lemma Ein X ist vollständiger Verband genau dann, wenn bereits jede Teilmenge ein Supremum (Infimum) hat.

Beispiele In B_3 ist t das Supremum der Menge $\{t, f, \}$ und n das Infimum. Aber die Menge $\{t, f\}$ hat bloß ein Infimum, n, aber kein Supremum (denn keine obere Schranke) in B_3. In B_4 ist aber das Supremum b_4. Da auch alle anderen Teilmengen ein Supremum und Infimum haben, ist B_4 also ein vollständiger Verband.

2 Ccpos

B_3 erfüllt allerdings ein anderes Kriterium, das man in folgender Definition zusammenfasst:

Definition (Konsitenz) Eine Mengen $Y \subseteq X$ heißt konsistent auf X Halbordnung, falls jede Menge $\{u, v\} \subseteq Y$ eine obere Schranke in X hat.

Definition (Ccpo) Ein X heißt Ccpo, falls jede konsistente Teilmenge ein Supremum hat.

Lemma Die leere Menge und alle einelementigen Menge sind konsistent.

Beispiele Die konsistenten Teilmengen von B_3 sind $\varnothing, \{t\}, \{f\}, \{n\}, \{n, t\}, \{n, f\}$.

In B_4 sind alle Teilmengen konsistent, weil

Lemma In einem vollständigen Verband sind alle Mengen konsistent.

Weitere Beispiele Ccpos und nicht-ccpos gemäß Gupta Belnap.

Ccpos haben viele hilfreiche Eigenschaften:

Theorem über Ccpos (Teil I) Sei X mit $\leq$ eine Ccpo, und sei $x \in X$. Dann gilt

(i) X hat ein kleinstes Element, d.h. es gibt $\bot \in X$ mit $\bot \lesssim X$.

(ii) Jede nicht-leere Teilmenge von X hat ein Infimum.

Beweis Zu (i): Die leere Menge ist konsistent, also gibt es $\bot = \bigvee \varnothing$. Nun zeigen wir $\bot \lesssim X$, d.h. $\bot \leq x$ für alle $x \in X$. Sei $x \in X$ beliebig. Dann ist $x \gtrsim \varnothing$, da dafür nichts zu zeigen ist, und also $\bot \leq x$, weil $\bot$ Supremum der leeren Menge war.

Zu (ii): Sei $Y \subseteq X$ nicht-leer. Betrachte dann $Z := \{u \in X \mid u \lesssim Y\}$.

Zuerst zeigen wir, dass Z konsitent ist. Seien $u, v \in Z$ gegeben, also $u \lesssim Y$ und $v \lesssim Y$. Da es mindestens ein Element von Y gibt, sagen wir $\hat{y}$, folgt $u \leq \hat{y}$ und $v \leq \hat{y}$. Das bedeutet aber, dass $\hat{y}$ eine obere Schranke für u und v ist.

Da X ccpo war, gibt es also ein Supremum von Z, $\bigvee Z$. Wir zeigen nun, dass dies ein Infimum von Y ist.

Zuerst müssen wir zeigen, dass $\bigvee Z \lesssim Y$, oder für ein beliebiges $y \in Y$ gilt $\bigvee Z \leq y$. Irgendein $y \in Y$ ist aber obere Schranke zu Z, also $\bigvee Z \leq y$ wie benötigt.

Anders herum liegt jede untere Schranke z zu Y bereits in Z, also ist $z \leq \bigvee Z$.

Theorem über Ccpos (Teil II) Sei X mit $\leq$ eine Ccpo, und sei $x \in X$. Dann gilt

(iii) Falls X ein größtes Element hat, so ist es ein vollständiger Verband.

(iv) Die Menge $Y := \{y \in X \mid x \leq y\}$ ist eine ccpo mit $\leq \restriction Y$ als Ordnung.

(v) Die Menge $Z := \{z \in X \mid z \leq x\}$ ist ein vollständiger Verband mit $\leq \restriction Z$ als Ordnung.

Beweis Zu (iii) und (v): Übung!

Zu (iv): Eine konsistente Teilmenge $U \subseteq Y$ ist auch konsistent in X, da die obere Schranke aus Y auch in X liegt. Also hat U ein Supremum u in X. Falls $U = \varnothing$, so ist x als minimales Element Supremum von U. Falls $U \neq \varnothing$ ist u auch das Supremum in Y. Denn das Element in U stellt zusammen mit der Transitivität sicher, dass $x \leq u$.

Theorem über Ccpos (Teil III) Sei X mit $\leq$ eine Ccpo, und sei $x \in X$. Dann gilt

(vi) Es gibt ein maximales Element von X größer oder gleich x, d.h. es gibt ein m, sodass $x \leq m$ für alle $a \in X$ mit $x \leq a$ ist $a = m$.

Beweis Mit dem Lemma von Zorn.

Nun können wir Ordnungen zwischen Funktionen von einer beliebigen Menge D auf eine Ordnung, bzw. ccpo definieren:

Definition ($\leq$ für Funktionen) Seien $f, g \colon D \to X$ und X Halbordnung. Dann definiere

$$f \leq g \quad :\Leftrightarrow \quad \text{für alle } d \in D \text{ gilt } f(d) \leq g(d). \tag{9}$$

Eine Ordnungsstruktur auf X lässt sich nun jeweils auf $D \to X$ übertragen:

Lemma Sei X eine Halbordnung. Dann ist auch $D \to X$ Halbordnung.

Beweis Übung

Lemma Sei X ccpo. Dann ist auch $D \to X$ dies.

Beweis Sei $F \subseteq \{f \colon D \to X\}$ eine Menge von Funktionen auf X. Wir müssen zeigen: Falls F konsistent, so gibt es ein Supremum. Konsistenz von F bedeutet, dass wir zu allen $f, g \in F$ ein $h \in X^D$ finden, sodass $f \leq h$ und $g \leq h$, d.h. für alle $d \in D$, $f(d) \leq h(d)$ und $g(d) \leq h(d)$. Definiere nun eine Funktion f durch

$$f(d) := \bigvee\{f(d) \mid f \in F\}. \tag{10}$$

Die Menge $F_d := \{f(d) \mid f \in F\} \subseteq X$ ist konsistent, da zu $f(d), g(d)$ mit $h(d)$ eine obere Schranke in X gegeben ist. Also ist das Supremum wohldefiniert für alle $d \in D$ (da X ccpo). Nun ist f das Supremum von $F \subseteq X^D$, denn:

(1) $f \in X^D$ klar.

(2) $f \gtrsim F$: Für alle $f' \in F$ muss $f \geq f'$ sein, d.h. für alle $d \in D$ $f(d) \geq f'(d)$. Aber $f'(d) \in F_d$, also $f(d) \geq f'(d)$.

(3) Sei h eine Funktion $h \in X^D$ mit $h \gtrsim F$, d.h. $h \geq f'$ für alle $f' \in F$. Zu zeigen: $f \leq h$, d.h. für alle $d \in D$ gilt $f(d) \leq h(d)$. $f(d)$ ist als Supremum über F_d die kleinste obere Schranke zu F_d. Nun impliziert $h \gtrsim F$, dass $h(d)$ eine obere Schranke zu F_d ist, also $f(d) \leq h(d)$.

Lemma Sei X vollständiger Verband. Dann ist auch $D \to X$ dies.

Beweis X als vollständiger Verband hat ein maximales Element ($\bigwedge \varnothing$), sagen wir x. Dann ist die Funktion $d \mapsto x$ maximales Element von $D \to X$ und nach dem Theorem über ccpos Teil (iii) ist es vollständiger Verband.

Nachdem wir nun einiges über Funktionen des Typs $D \to X$ gelernt haben, wenden wir uns nun speziellen Funktionen $X \to X$ für X ccpo zu. Als erstes definieren wir

Definition (Monotonie) Ein $f \colon X \to X$ heißt monoton, falls für alle $x, y \in X$ gilt

$$x \leq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(y) \tag{11}$$

Beispiel Betrachte $X = \{1, 2\}$ mit seiner natürlichen Ordnung. Die Identität ist monoton. Aufgabe: Welche Funktionen gibt es noch vom Typ $\{1, 2\} \to \{1, 2\}$ und welche sind monoton?

Finde für B_3 ein Beispiel einer monotonen Funktion ungleich der Identität.

Für $X = \mathbb{N}$ oder andere total geordnete Mengen kann man Monotonie wie üblich über den Graphen visualisieren.

Definition (aufsteigend, absteigend, Fixpunkt) Sei X eine Halbordnung, $f \colon X \to X$ und $x \in X$ ein Punkt. Dann heißt

(i) x aufsteigend („sound"), falls $x \leq f(x)$.

(ii) x absteigend („replete"), falls $f(x) \leq x$.

(iii) x Fixpunkt, falls $x = f(x)$.

Theorem (Existenz von Fixpunkten in ccpos) Sei X eine ccpo, $x, y \in X$, und sei $X\colon X$ monoton. Dann gilt

(i) Falls x aufsteigend ist gibt es einen Fixpunkt z mit $x \leq z$.

(ii) Falls x aufsteigend, y absteigend mit $x \leq y$, dann gibt es einen Fixpunkt z mit $x \leq z \leq y$.

Beweis Sei x ein aufsteigendes Element in X. Dann ist

$$Y = \{y \in X \mid y \text{ ist aufsteigend und } \quad x \leq y\} \tag{12}$$

eine ccpo. (siehe Aufgabenzettel)

Gemäß dem Theorem über ccpos Teil (vi) gibt es also ein maximales Element m in Y. Aus $m \in Y$ folgt $x \leq y$, also verbleibt zu zeigen, dass $m = f(m)$. Da m aufsteigend ist, ist $x \leq m \leq f(m)$. Aufgrund der Montonie von f ist $f(m) \leq f(f(m))$. Also ist $f(m)$ ebenfalls aufsteigend und $f(m) \in Y$. Da aber m maximal in Y war und $m \leq f(m)$, muss $m = f(m)$.

Definition (Menge der Fixpunkte) Sei $f\colon X \to X$ eine Funktion auf einer Halbordnung $\leq$, sei $f\colon X \to X$. Dann definiere

$$F(X, f) = \{x \in X \mid f(x) = x\} \tag{13}$$

zusammen mit der Ordnung $\leq\restriction_{F(X,f)}$ als Menge der Fixpunkte.

Theorem (Visser's Fixpunkttheorem) Sei $f\colon X \to X$ eine montone Operation auf einer Ccpo $(X, \leq)$. Dann ist $F(X, f)$ eine Ccpo. Falls X ein größtes Element hat, dann auch $F(X, f)$.

Theorem (Knaster-Tarski Fixpunkttheorem) Sei $f\colon X \to X$ eine monotone Operation auf einem vollständigen Verband $(X, \leq)$. Dann ist $F(X, f)$ auch ein vollständiger Verband.

Beweis Aus dem Visser'schen Fixpunktsatz mit dem Theorem über Ccpos (iii).

3 Wahrheitstheorien

Die behandelten Theoreme haben interessante Folgerungen für Wahrheitstheorien. Letzteres sind Theorien, in denen eine formale Sprache ein Wahrheitsprädikat für eine (andere oder gleiche) formale Sprache enthält. Um dies genau zu verstehen, müssen wir zuerst eine formale Sprache definieren. Dies geschieht in zwei Schritten: Syntax, Semantik.

3.1 Syntax der Prädikatenlogik

Zur Definition der Syntax führen wir als ersten den Begriff des Termes induktiv ein. Gegeben seien nun eine Menge von Zeichen für Relationen $\mathcal{R}$, eine Menge von Zeichen für Namen $\mathcal{N}$, abzählbar viele Variablen $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots\}$. Dann definieren wir

Definition (Term) Zu Mengen $\mathcal{N}, \mathcal{V}$ ist ein Term definiert durch:

- Namen $X \in \mathcal{N}$ sind Terme.
- Variablen $X \in \mathcal{V}$ sind Terme.

Definition (Formel)

3.2 Klassische und nichtklassische Semantik

3.3 Monotonie der Schemata

Eine spezielle Ccpo

Sei X ccpo, $x \in X$, $f\colon X \to X$ monoton. Definiere $Y \subseteq X$,

$$Y = \{y \in X \mid y \text{ ist aufsteigend bzgl. } f \text{ und } \quad x \le y\}$$

Zu zeigen: Y ist ccpo, oder: Jede konsistente Menge $Z \subseteq Y$ hat ein Supremum in Y.

Betrachten wir zuerst den Fall $Z = \varnothing$. Dann ist x als kleinstes Element in Y das Supremum von Z in Y.

Nun zum Fall $Z \neq \varnothing$.

Behauptung 1 Eine konsistente Menge $Z \subseteq Y$ ist auch konsistent in X.

Beweis ...

Aufgrund von Behauptung 1 hat Z als Teilmenge von X ein Supremum b. Erhalte also b mit

(1)

(2)

(3)

Nun zeigen wir noch Behauptung 2 und 3, wobei Behauptung 3 den Beweis abschließt.

Behauptung 2 $b \in Y$.

Beweis Zu zeigen sind zwei Teilbehauptungen:

(2a) $x \le b$

(2b) b ist aufsteigend bzgl. f.

Zu (2a): Da $Z \neq \varnothing$ finden wir ein $\hat{z} \in Z$. Dann gilt

$$x \le \hat{z}, \quad \hat{z} \le b, \tag{14}$$

weil ...

Daraus folgt (2a) wegen ...

Nun zu (2b). Wir wollen zeigen, dass $b \le f(b)$. Dazu zeigen wir, dass $f(b)$ obere Schranke von Z ist. Mit (3) ergibt sich dann (2a). Sei also $z \in Z$. Zu zeigen ist nun $z \le f(b)$. Aus (2) erhalte $z \le b$ und mit Monotonie $fz \le fb$. Außerdem ist z als Element von Z aufsteigend und ...

Behauptung 3 b ist das Supremum von Z als Teilmenge von Y.

Beweis Es sind drei Dinge zu zeigen, und zwar

(1)

(2)

(3)

(1) gilt wegen Behauptung 2. (2) und (3) gelten, weil...