

escudoUGRmonocromo.png

Facultad de Ciencias

GRADO EN FÍSICA

TRABAJO FIN DE GRADO

**Modelo de campo medio en  
núcleos deformados**

Presentado por:

**D. Luis Fabián Huecas López**

Curso Académico 2019/2020

## **Resumen**

Basado en un potencial medio este trabajo expone las principales características del modelo deformado de capas y sus diferencias con el modelo esférico. Para hacer esto, se estudia previamente el modelo de partícula independiente y su significado. La influencia de la forma deformada del núcleo en los estados monoparticulares es descrita. Se usa un potencial Woods-Saxon para hallar las energías monoparticulares, tanto en el caso esférico como el deformado. En este último es necesario romper la simetría esférica. Se mostrará la aplicación en núcleos con números mágicos, en la cadena de isótopos del neón y en la cadena de isótonos  $N=10$ . Se ha realizado una estimación de la deformación de estos núcleos.

## **Abstract**

Based on an average potential this work provides the main properties of the deformed shell model and its differences with the spherical model. To do this, it is previously studied the independent particle model and its significance. The influence of the deformed shape of the nucleus on the single particle states is described. A Wood-Saxon potential is used to determine the single particle energies, in both spherical and deformed cases. In the last one is necessary to break the spherical symmetry. It will be shown the application on magic numbers nuclei, the isotopic chain of neon and the isotonic chain  $N=10$ . An estimate of the deformation of these nuclei is made.

## Índice

## 1 Introducción

Desde que en 1911 Ernest Rutherford propusiese la existencia del núcleo a partir del experimento de la lámina de oro la física nuclear ha dedicado muchos esfuerzos y teorías en comprender y explicar la naturaleza de este componente fundamental de la materia, convirtiéndose sin duda en una de las materias científicas de mayor interés de la era contemporánea. A día de hoy se tiene ya un conocimiento profundo acerca de su composición y propiedades si bien aún falta un gran camino por recorrer hasta completar una formulación teórica coherente basada en la compleja interacción nuclear. Pero antes de adentrarse en las cuestiones más difíciles es adecuado tener una idea clara de la estructura básica del núcleo. Con ese objetivo se ha hecho uso del modelo de campo medio, en particular del conocido modelo esférico de capas que supone la simetría esférica del núcleo de forma que ofrece un gran número de resultados sin necesidad de entrar en un sistema extremadamente complejo. En este trabajo se intenta ir un paso más allá para abordar las restricciones que se encuentran en el modelo esférico aplicado a gran parte de los núcleos incorporando la posibilidad de la deformación de la forma esférica sin salirse de un modelo de campo medio.

La gran complejidad de los núcleos aparece como consecuencia de la fuerza más dominante dentro del sistema que es la fuerza nuclear. Como bien sabemos, los núcleos están constituidos por los denominados nucleones, los neutrones de carga neutra y los protones de carga positiva. Es, por tanto, necesaria la existencia de una fuerza de carácter atractivo que se imponga a la repulsión coulombiana entre protones para dar lugar a un sistema estable y fuertemente ligado. Esta interacción debe ser a su vez de muy corto alcance pues no se manifiesta más allá de las dimensiones del núcleo que son de por sí extremadamente pequeñas, del orden de  $10^{-12}$  hasta  $10^{-13} \text{ cm}$  en diámetro. Razón por la cual puede ser despreciada en primer orden cuando se consideran fenómenos atómicos o moleculares para cualquier propósito práctico.

En el modelo de campo medio se evita entrar en la forma explícita de las complicadas interacciones entre nucleones. El objetivo es encontrar un potencial que de cuenta de la fuerza que siente un nucleón debido al resto de nucleones de forma promediada, para ello se debe considerar la distribución de carga experimental de los nucleones dentro del núcleo y un rango de actuación realista de la fuerza nuclear, esto es, un potencial con efecto despreciable más allá de los límites del núcleo.

Al tratar un sistema espacialmente tan pequeño éste debe seguir las reglas de la mecánica cuántica. En particular, trabajaremos dentro del marco de la mecánica cuántica no relativista. Sin embargo, no podemos despreciar por completo la relatividad ya que el acoplamiento de espín-órbita de naturaleza eminentemente relativista tiene un peso fundamental. Su aplicación en el modelo de partícula independiente fue la llave que permitió completar una teoría que reprodujese las propiedades básicas encontradas en los experimentos. Fue llevada a cabo por Maria G. Mayer y por Otto Haxel, J. Hans D. Jensen y Hans Suess de forma independiente en 1955.

La dinámica de la función de onda del sistema queda descrita por la ecuación de Schrödinger. Se trabaja con un hamiltoniano independiente del tiempo, la obtención de los autoestados estacionarios y de los autovalores serán el objetivo fundamental para conocer las características más importantes tanto en núcleos de tipo esférico como de forma más general, permitiendo deformación.

## 2 Fundamento teórico del modelo de campo medio

En el modelo de campo medio se trabaja con un potencial fenomenológico para cada partícula de forma independiente. El hamiltoniano de un sistema de  $A$  nucleones es:

$$H = \sum_{i=1}^A \left[ -\frac{\hbar^2}{2m_i} \nabla_i^2 + V(i) \right] = \sum_{i=1}^A h_i , \quad (2.1)$$

donde se ha definido el hamiltoniano individual  $h_i$  para una partícula  $i$ -ésima como:

$$h_i = -\frac{\hbar_i^2}{2m_i} \nabla_i^2 + V(i) , \quad (2.2)$$

donde  $V(i)$  representa el potencial medio que afecta a la partícula  $i$ -ésima,  $m_i$  a su masa, siendo  $\nabla_i^2$  el operador laplaciano. De esta forma se refiere que este hamiltoniano depende en general de cualquier coordenada (ya sea espacial, de espín,...) referente a la partícula  $i$ -ésima.

La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo es:

$$\sum_{i=1}^A \left[ -\frac{\hbar^2}{2m_i} \nabla^2 + V(i) \right] \Psi(1, 2, \dots, A) = E \Psi(1, 2, \dots, A) , \quad (2.3)$$

donde  $\Psi(1, 2, \dots, A)$  es la autofunción global del hamiltoniano  $H$  con autovalor  $E$ .

De esta forma el hamiltoniano  $H$  es separable para cada partícula individual. Así pues la ecuación diferencial admite como solución:

$$\Psi(1, 2, \dots, A) = \prod_{i=1}^A \psi(i) . \quad (2.4)$$

Para probar esto no tenemos más que aplicarla como solución de la ecuación (??). Haciendo esto y despejando tenemos que:

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^A \psi(i)} \sum_{i=1}^A h_i \prod_{i=1}^A \psi(i) - E = 0 , \quad (2.5)$$

lo cual lleva de forma directa a:

$$\sum_{i=1}^A \frac{1}{\psi(i)} h_i \psi(i) - E = 0 . \quad (2.6)$$

Cada término  $i$ -ésimo de la sumatoria es independiente del resto, por tanto, debe ser igual a una constante. Denotando a esta constante por  $\epsilon_i$  tenemos que:

$$h_i \psi(i) = \epsilon_i \psi(i) , \quad (2.7)$$

que se corresponde con la ecuación de autovalor referente a cada partícula individual. El subíndice  $i$  del autovalor  $\epsilon_i$  hace referencia al estado ocupado por la partícula  $i$ -ésima.

Una notación más esclarecedora es usar otro subíndice, digamos  $\nu$ , para hacer referencia al estado directamente. Con lo que la ecuación anterior la escribimos de la siguiente manera:

$$h_i \psi_\nu(i) = \epsilon_\nu \psi_\nu(i) , \quad (2.8)$$

lo cual denota explícitamente a la partícula  $i$ -ésima en el estado etiquetado por  $\nu$ . Es inmediato que:

$$E = \sum_{i=1}^A \epsilon_{\nu_i} . \quad (2.9)$$

Esto es, el autovalor del hamiltoniano del sistema total es igual a la suma del autovalor de cada hamiltoniano individual. O dicho de otra forma, la suma de los autovalores de energía correspondiente a todos los estados ocupados.

El modelo de partícula independiente implica la idea de una distribución en niveles de energía ( $\epsilon_\nu$ ) de los nucleones que siguen órbitas (referido a estados) estables. Conocer el espectro de energía de estos niveles pasa entonces por estudiar los autovalores del hamiltoniano individual.

## 2.1 Principio de exclusión de Pauli

El núcleo es un sistema formado por protones, que son fermiones e indistinguibles entre sí, y por neutrones, que a su vez son también fermiones e indistinguibles entre sí, ambos con espín  $s = \frac{1}{2}$ . El principio de exclusión de Pauli establece que una función de onda total referente a un estado de fermiones indistinguibles debe ser antisimétrica en el intercambio entre dos de ellos. Por tanto, la autofunción de onda de la ecuación (??) debe ser antisimétrica en el intercambio entre dos protones o dos neutrones. La solución descrita en la ecuación (??) no tiene simetría definida, por tanto, no cumple con el propósito. Los determinantes de Slater garantizan la antisimetría de una función, por tanto, se hace uso de ellos para obtener la forma correcta de la autofunción. Si tenemos  $N$  nucleones indistinguibles una función antisimétrica es:

$$\Psi(1, \dots, N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \psi_\alpha(1) & \psi_\beta(1) & \cdots & \psi_\mu(1) \\ \psi_\alpha(2) & \psi_\beta(2) & \cdots & \psi_\mu(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_\alpha(N) & \psi_\beta(N) & \cdots & \psi_\mu(N) \end{vmatrix} \quad (2.10)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P (-1)^{(P)} P(\psi_\alpha(1) \psi_\beta(2) \cdots \psi_\mu(N)) , \quad (2.11)$$

donde  $P$  es el operador de permutación con lo que la sumatoria recorre todas las permutaciones posibles ( $P = 1$  para permutaciones pares y  $P = -1$  para permutaciones impares).

El determinante está definido para una matriz cuadrada, con lo cual el número de estados posibles ocupados coincide con el número de nucleones.

Si se consideran dos estados iguales el determinante se hace cero al tener 2 columnas iguales, esto es, no hay función admisible. Así el principio de exclusión de Pauli queda impuesto: dos fermiones indistinguibles de un sistema no pueden estar en el mismo estado cuántico.

La forma completa de la función de onda es:

$$\Psi(1, \dots, A) = \Psi_{\text{protones}} \Psi_{\text{neutrones}} , \quad (2.12)$$

donde  $\Psi_{\text{protones}}$  y  $\Psi_{\text{neutrones}}$  son determinantes de Slater cada una de ellas. De esta forma la función total es antisimétrica en el intercambio de dos nucleones iguales.

## 2.2 Razones experimentales

El hecho experimental más importante que fomentó la idea de un modelo en capas es la existencia de núcleos muy estables cuando el número de nucleones coincide con los números 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, conocidos como números mágicos y, adicionalmente, el semimágico 40. Estos núcleos son los más estables relativos a sus vecinos en la carta nuclear, en ellos se alcanzan máximos para los valores de separación neutrónica  $S_n$  y protónica  $S_p$  (energía necesaria para arrancar un neutrón y protón respectivamente). Lo cual hizo pensar que los nucleones se pueden describir como distribuidos en capas, de forma que al completar estas capas se alcanza gran estabilidad mientras que los nucleones que quedan en capas incompletas son menos ligados y aportan inestabilidad.

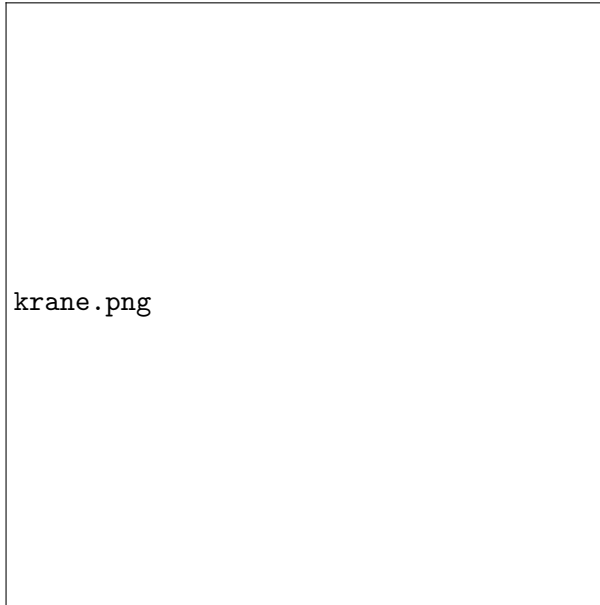


Figura 1: Imagen extraída de [?]. Se muestra la distribución en capas dentro del modelo de partícula independiente con simetría esférica. A la izquierda de la imagen se muestran los niveles sin contar con el término de espín-órbita y a la derecha contando con él y reproduciendo así los números mágicos. Los nucleones se disponen ocupando los niveles de energía. Cada nivel admite un número de nucleones particular.

El objetivo fue, por tanto, encontrar estas capas caracterizadas por los números mágicos. Se debía ver que entre ellas existiese un gran gap de energía que explicase la gran estabilidad de estos núcleos. En la figura [??] se puede ver la aparición de estas capas sin término de espín-órbita (izquierda), que solo reproduce los dos primeros números mágicos 2 y 8, y con término de espín-órbita (derecha), que logra reproducir todos los números mágicos conocidos.

Con capas en este contexto se refiere al conjunto de niveles de energía desde un

número mágico hasta el siguiente. Con subcapa nos referimos a los niveles de energía de forma individual. Por ejemplo, las subcapas  $1d_{5/2}$ ,  $2s_{1/2}$  y  $1d_{3/2}$  (ver parte derecha de la figura [??]) forman una capa desde el número mágico 8 hasta el número mágico 20. En total, son  $20 - 8 = 12$  estados disponibles en esta capa.

### 2.3 Configuración en subcapas

La configuración de los nucleones en los niveles de energía debe cumplir con el principio de exclusión de Pauli. Se debe asegurar que dos núcleos idénticos no tengan todos los números cuánticos iguales, esto es, que las constantes de movimiento que identifican sus estados no pueden ser iguales. Por tanto, es muy importante saber reconocer, si se puede, estas constantes de movimiento. La forma en que sabemos que existe una constante de movimiento o buen número cuántico que caracteriza los estados es por medio de la conmutación del hamiltoniano con otro operador. Sea  $A$  un operador, si este cumple:

$$[h, A] = h \cdot A - A \cdot h = 0 . \quad (2.13)$$

Sabemos que podemos encontrar un conjunto completo de funciones que sean simultáneamente autofunciones de  $h$  y de  $A$ . Sea esta autofunción  $\Psi_\nu$  referida al estado  $\nu$  con autovalor de energía  $\epsilon_\nu$  entonces:

$$A\Psi_\nu = a_\nu\Psi_\nu , \quad (2.14)$$

donde  $a_\nu$  es el autovalor de  $A$  y se denota como un buen número cuántico. Se dice que  $A$  es un observable compatible del sistema y su autovalor  $a$  caracteriza los estados del mismo.

Dado que el protón y el neutrón son distinguibles se pueden tratar de forma separada: la forma en que se disponen los protones nunca puede afectar en el cumplimiento del principio de exclusión de Pauli por parte de los neutrones y viceversa. Por tanto, los protones presentan una configuración de niveles por una parte y los neutrones por otra cumpliendo el principio de exclusión de Pauli de forma independiente.

Cada subcapa tiene asociada una cantidad de estados. El número de estados en cada subcapa recibe el nombre de degeneración, que es el máximo número de nucleones que pueden ocupar la subcapa, cumpliendo los principios de exclusión de Pauli.

Según el tipo de potencial medio  $V(i)$  las constantes de movimiento que identifican los estados cambian y con ello la degeneración en cada subcapa. El modelo esférico y el modelo deformado presentan un tipo de configuración de niveles distintos, con constantes de movimiento y degeneración distinta. Se estudia cada una en sus correspondientes secciones.

#### 2.3.1 Estado fundamental

Se denota al estado fundamental de un determinado núcleo como la configuración de menor energía total posible según su número de protones y neutrones. Esto es, los nucleones se disponen llenando las subcapas por orden desde abajo hacia arriba en valor de energía.



Como ejemplo se puede ver el estado fundamental del  ${}^4\text{He}$ . Este núcleo cumple con el número mágico 2 tanto para protones como para neutrones por lo que el modelo de capas es aplicable. En particular, el modelo esférico. Si nos fijamos en la figura [??] se puede deducir fácilmente su estado fundamental. Este se corresponde con sus 2 protones y sus 2 neutrones en un nivel  $1s_{1/2}$  (este nivel admite hasta dos nucleones como se estudiará más adelante). No existe una configuración con un nivel más bajo de energía total.

### 2.3.2 Estado excitado

En el modelo de capas un estado excitado es cualquier configuración de nucleones tal que su energía sea mayor a la del estado fundamental. El hecho de que su energía sea mayor indica una mayor inestabilidad del núcleo, esto es, la energía necesaria para romper las ligaduras que mantienen unido el sistema es menor. Por ello, un núcleo en un estado excitado tiende a realizar una transición hacia un estado más ligado emitiendo energía.

Un ejemplo de estado excitado en el  ${}^4\text{He}$  se produce con un nucleón en un nivel superior al  $1s_{1/2}$ . Esta configuración aumenta la energía del sistema con respecto al estado fundamental y lo hace más inestable.

## 2.4 Límites del modelo de capas

El modelo de capas esférico resulta particularmente exitoso en la reproducción de los niveles energéticos de estados fundamentales de núcleos con números mágicos (completan capas) pero presenta limitaciones en la medida en que el número de protones y neutrones del núcleo se aleja de estos. En estos casos aparece la deformación del núcleo y el modelo de capas deformado resulta útil, sin embargo su validez es limitada debido al mayor peso de movimientos colectivos en estos núcleos que se opone a la idea del modelo de partícula independiente. No se debe perder de vista que el modelo de capas es una forma simplificada de tratar de resolver el complejo sistema nuclear. El potencial medio no contiene ningún término de interacción nuclear real, con lo que no trata sobre la fuerza dominante del sistema directamente. Además asume la separabilidad del estado total del sistema en estados monoparticulares que representa un sistema de nucleones ocupando estados estacionarios independientes del resto. Cuando se completan capas la experiencia demuestra que esto es asumible. Sin embargo, conforme se tiene un mayor número de nucleones alejados de números mágicos se producen acoplamientos en los estados nucleares y en definitiva, la autofunción deja de ser separable en aproximación (en ningún caso lo es exactamente).

En los núcleos pesados cobran mayor fuerza los movimientos colectivos como la rotación y vibración con lo que el modelo de partícula independiente es menos asumible.

La idea de un núcleo compuesto por nucleones en órbitas (estados) muy estables es razonada por medio del principio de exclusión de Pauli junto con las probabilidades de transición cuánticas entre niveles. Si se considera una colisión entre dos nucleones, y un cambio de estado en algunos de ellos o en los dos, se debe tener en cuenta que solo pueden ocupar niveles con una energía discreta y en los que exista algún estado desocupado. Esto hace que la probabilidad de transición pueda ser muy baja en muchos casos y la colisión no se pueda producir. Se debe considerar que la interacción nucleón-nucleón es muy repulsiva en el muy corto alcance de forma que se impiden colisiones, antes de producirse una interacción abrupta ya se ha producido la repulsión.

## 2.5 Propiedades del potencial

En base a la idea de un modelo de partícula individual que no sufre interacciones violentas que permite la existencia de órbitas estables el potencial debe ser bastante suave desde el centro del núcleo hasta una distancia cercana a lo que podríamos definir como la superficie nuclear para que la fuerza neta que siente sea casi nula. En particular en el centro del núcleo se exige que:

$$\left. \frac{\partial V(i)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0. \quad (2.15)$$

Esto nos dice, cualitativamente hablando, que un nucleón en la parte central se encuentra rodeado de forma homogénea de otros nucleones de forma que la fuerza neta que siente es nula.

Otra propiedad es que la fuerza atractiva neta que mantiene ligado el núcleo se hace más grande a medida que aumenta la distancia hacia el centro del núcleo, mientras no se superen sus límites:

$$\left. \frac{\partial V(i)}{\partial r} \right|_{r < R} > 0. \quad (2.16)$$

Por otro lado se debe exigir el rango finito de las fuerzas nucleares:

$$V \simeq 0 \text{ si } r > R. \quad (2.17)$$

### 2.5.1 Forma del potencial

La forma del potencial medio debe tener parecido a la densidad de carga de nucleones experimental. La densidad que mejor se aproxima a la de gran parte de núcleos sigue la forma de una distribución de Woods-Saxon:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}. \quad (2.18)$$

Esta densidad tiene simetría esférica lo cual no se cumple en general, gran parte de los núcleos presentan deformación pero como primera aproximación es válida para gran parte de ellos.

En la figura [??] se puede observar que es casi constante en casi todo el volumen nuclear, su disminución se vuelve abrupta al llegar a los límites del núcleo. El radio nuclear  $R$  se define para el valor en que la densidad se reduce a la mitad de su valor máximo. El parámetro  $a$  está relacionado al valor del tamaño de la superficie nuclear.

Una propuesta directa es, por tanto, un potencial en la forma Woods-Saxon:

$$V_{WS}(r) = \frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}. \quad (2.19)$$

En la figura [??] podemos ver que cumple con las propiedades expuestas en las ecuaciones (??) y (??) descritas anteriormente. En cuanto a la propiedad descrita en la ecuación (??) no es estrictamente cero pero sí un valor muy cercano.



Figura 2: Densidad de nucleones en función de la distancia radial.

## 2.6 Operadores de momento angular y paridad

En esta sección se hace un breve repaso a los operadores de momento angular de un sistema físico.

Con  $\vec{J}$  se denota al momento angular total del sistema físico. Es un operador tridimensional  $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$  que surge de la suma vectorial del momento angular orbital del sistema  $\vec{L}$  y del momento angular de espín del sistema  $\vec{S}$ :

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}. \quad (2.20)$$

A partir de este operador se construye el operador modulo cuadrado  $J^2$  como:

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2, \quad (2.21)$$

el cual conmuta con cada componente de momento angular orbital total por separado:

$$[J^2, J_i] = 0, \quad (2.22)$$

con  $i = x, y, z$ .

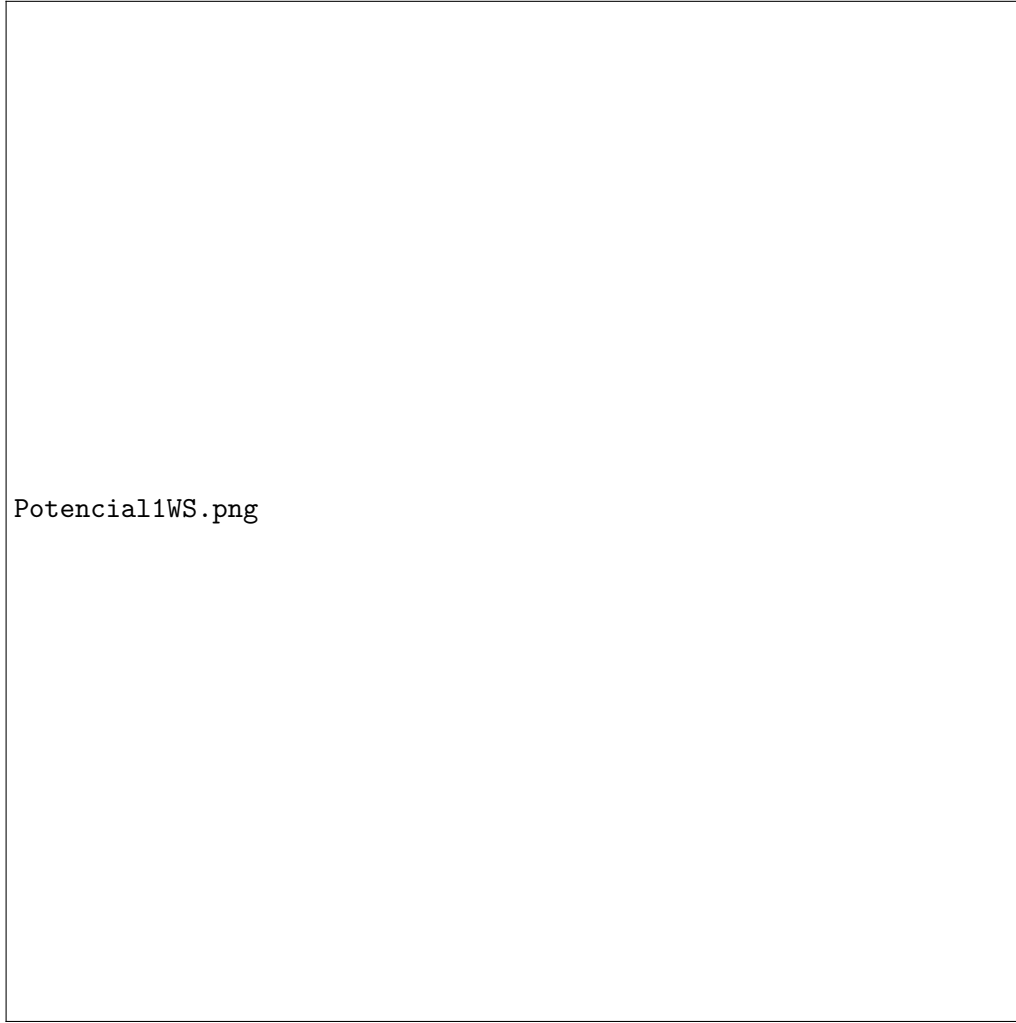


Figura 3: Potencial Wood-Saxon en función de la distancia radial.

Sin embargo, las componentes  $J_i$  no conmutan entre si. Se toma  $J^2$  y uno de los operadores  $J_i$  para formar un conjunto de observables compatibles con los que describir los estados del sistema. Por convenio el operador  $J_i$  que siempre se toma es  $J_z$ . Análogamente para el momento angular orbital  $\vec{L}$  y el del espín  $\vec{S}$  los observables de interés son  $L^2$  y  $L_z$ , y  $S^2$  y  $S_z$ .

Si  $\Phi_{JM}$  representa las autofunciones comunes de  $J^2$  y  $J_z$  (sabemos que tienen autofunciones comunes porque conmutan) entonces se tiene:

$$J^2 [\Phi_{JM}] = \hbar^2 J(J+1) \Phi_{JM} , \quad (2.23)$$

y:

$$J_z [\Phi_{JM}] = \hbar M \Phi_{JM} , \quad (2.24)$$

donde  $M$  solo puede tomar los valores  $M = -J, -J+1, \dots, J+1, J$ .

Los números cuánticos asociados a  $J^2$  y  $J_z$  son  $J$  y  $M$  respectivamente. Si  $[J^2, H] = 0$  siendo  $H$  el hamiltoniano total del sistema entonces  $J$  es un buen número cuántico porque con él se puede caracterizar a los estados y si  $[J_z, H] = 0$  entonces  $M$  es un buen

número cuántico. Análogamente se tiene lo mismo para  $L^2$  y  $L_z$  con  $L$  y  $M_L$  respectivamente, y para  $S^2$  y  $S_z$  con  $S$  y  $M_S$  respectivamente.

Por otro lado, dado que:

$$J_z = L_z + S_z , \quad (2.25)$$

se cumple:

$$M = M_L + M_S , \quad (2.26)$$

Dentro del contexto de modelo de partícula independiente el interés se centrará sobre los operadores referidos a partícula individual  $\vec{j}$ ,  $\vec{l}$  y  $\vec{s}$ . Esto es, se estudiará si los estados monparticulares tienen buenos números cuánticos  $j$ ,  $m$ ,  $l$ ,  $m_l$ ,  $s$  y  $m_s$ , por medio de la conmutación del hamiltoniano individual  $h$  con los correspondientes operadores  $j^2$ ,  $j_z$ ,  $l^2$ ,  $l_z$ ,  $s^2$  y  $s_z$ .

Los operadores  $l^2$  y  $l_z$  en representación de coordenadas esféricas son:

$$l^2 = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin(\theta)} \partial_\theta \sin(\theta) \partial_\theta + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \partial_\phi^2 \right] , \quad (2.27)$$

$$l_z = \frac{\hbar}{i} \partial_\phi . \quad (2.28)$$

El operador paridad  $\Pi$  se define aplicado sobre una función genérica como:

$$\Pi\phi(\vec{r}) = \phi(-\vec{r}) . \quad (2.29)$$

Si ahora suponemos que  $\phi(\vec{r})$  es una autofunción de este operador se tiene:

$$\Pi\phi(\vec{r}) = \pi\phi(\vec{r}) , \quad (2.30)$$

donde  $\pi$  es un autovalor del operador paridad. Aplicado doblemente sobre esta autofunción se tiene:

$$\Pi^2\phi(\vec{r}) = \pi^2\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) . \quad (2.31)$$

Por tanto,  $\pi = \pm 1$ . A las autofunciones con  $\pi = 1$  se les dice de paridad positiva y las que tienen autovalor  $\pi = -1$  de paridad negativa.

## 2.7 Momento cuadrupolar eléctrico

Se define el operador de momento cuadrupolar eléctrico como:

$$\hat{Q} = e(3z^2 - r^2) , \quad (2.32)$$

donde  $e$  es la carga del protón, y  $z$  y  $r$  coordenadas respecto del sistema de referencia donde se evalúe. Su unidad es  $C \cdot m^2$  en el sistema internacional, usualmente se expresan en  $e \cdot b$ . Donde  $b$  hace referencia al barns:  $1b = 10^{-24}cm^2$ .

Se define como el momento cuadrupolar eléctrico intrínseco asociado al núcleo como el valor esperado del operador de momento cuadrupolar eléctrico con respecto a un sistema de referencia fijo al núcleo.

$$Q_0 = \langle \Psi(\vec{r})_{JJ} | \hat{Q} | \Psi(\vec{r})_{JJ} \rangle , \quad (2.33)$$

donde  $|\Psi(\vec{r})\rangle$  representa el estado total del sistema nuclear.

Esta cantidad es muy importante ya que permite identificar la deformación de un núcleo:

$$Q_0 = \begin{cases} 0 & \text{núcleo esférico} \\ > 0 & \text{núcleo prolato} \\ < 0 & \text{núcleo oblato} \end{cases} \quad (2.34)$$

El núcleo prolato se asocia a una distribución de carga alargada en el eje  $z$ , mientras que en el oblato es achatada con respecto al eje  $z$ .

### 3 Caso esférico

A continuación se va a tratar el caso de que el potencial  $V(i)$  del hamiltoniano individual presente simetría esférica:

$$V(\vec{r}_i) = V(r_i) . \quad (3.1)$$

El objetivo es encontrar los autovalores de la ecuación (??) aprovechando la simetría esférica. Para ello parece interesante escribir esta ecuación en coordenadas esféricas.

$$h\psi(\vec{r}) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r + \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sin(\theta)} \partial_\theta \sin(\theta) \partial_\theta + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \partial_\phi^2 \right) \right) + V(r) \right] \psi(\vec{r}) = \epsilon \psi(\vec{r}) , \quad (3.2)$$

o bien introduciendo a  $l^2$  (que fue introducido en coordenadas esféricas en la ecuación (??):

$$h\psi(\vec{r}) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r - \frac{l^2}{\hbar^2 r^2} \right) + V(r) \right] \psi(\vec{r}) = \epsilon \psi(\vec{r}) . \quad (3.3)$$

Este hamiltoniano  $h$  conmuta con el momento angular orbital  $[h, \vec{l}] = 0$  con lo que se puede encontrar una base de autoestados de  $h$  que sean simultáneamente autoestados de  $l^2$  y de  $l_z$ . Teniendo en cuenta estas consideraciones y la separabilidad del hamiltoniano en coordenadas esféricas se pueden escribir las correspondientes autofunciones como:

$$\Psi(\vec{r}) = R(r) Y_{lm_l}(\theta, \phi) , \quad (3.4)$$

donde  $Y_{lm}$  son los armónicos esféricos:

$$Y_{lm_l}(\theta, \phi) = P_{lm_l}(\theta) e^{im_l \phi} , \quad (3.5)$$

a su vez  $P_{lm}$  son los polinomios de Legendre y se cumple  $l = 0, 1, 2, \dots$  y  $m_l = -1, -1 + 1, \dots, l - 1, l$ .

Por su parte la función radial  $R(r)$  se obtiene de insertar la solución mostrada en la ecuación (??) en la ecuación de autovalores (??). Con ello se obtiene que esta función es la solución de la siguiente ecuación radial:

$$\partial_r r^2 \partial_r R(r) + \left[ \hbar^2 l(l+1) + V(r)r^2 - 2mr^2\epsilon \right] R(r) = 0 , \quad (3.6)$$

que depende del potencial  $V(r)$  particular de cada sistema. Dada la dependencia con  $l$  y que en su resolución debe aparecer otra condición de cuantificación asociada exclusivamente a la coordenada radial que se denota por  $n$ , se denota a la función radial como  $R(r) \equiv R_{nl}$  y el autovalor dependerá en general de esos dos números cuánticos:  $\epsilon = \epsilon_{nl}$ .

El potencial central para los nucleones debe tener en cuenta las propiedades vistas en la sección ?? . Ya se vio en la sección ?? que el potencial de Woods-Saxon es un buen candidato y es el que se tiene en cuenta como potencial central principal. Si bien es necesario incluir el término de espín-órbita y adicionalmente un término eléctrico para los protones.

$$V_{WS}(r) = \frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}} , \quad (3.7)$$

### 3.1 El espín

El nucleón es un fermión de espín  $s = 1/2$  con lo que se debe incluir esa parte en su función de onda. Mientras el hamiltoniano no dependa del espín explícitamente se puede insertar en la función de onda sin ninguna consecuencia en los cálculos realizados:

$$\psi(\vec{r}, \sigma) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \chi_{m_s}(\sigma) . \quad (3.8)$$

### 3.2 Potencial de Coulomb

Para los protones es necesario tener en cuenta la repulsión eléctrica entre ellos, ésta se puede tener en cuenta por medio de un potencial electrostático. En el modelo de partícula individual con simetría esférica, la interacción eléctrica que siente un protón debido al resto de protones es aproximada a la de una esfera homogéneamente cargada con carga total  $(Z-1)e$  y de radio  $R_C \simeq R$ .

$$V_c(r) = \begin{cases} \frac{(Z-1)e^2}{2R} \left[ 3 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] & \text{si } r \leq R_C \\ \frac{(Z-1)e^2}{r} & \text{si } r > R_C \end{cases} \quad (3.9)$$

Este potencial asume homogeneidad en la densidad carga, es una aproximación válida ya que la densidad de nucleones es bastante suave hasta una distancia cercana a los límites del núcleo. En cualquier caso, se puede modificar por una densidad de carga con simetría esférica pero que tenga en cuenta la disminución de su valor acercándose a  $r = R$  de una forma más gradual a como se hace aquí.

### 3.3 Término de espín-órbita

El acoplamiento de espín-órbita es el único término del hamiltoniano que se va a usar con origen relativista. No se entra aquí en detalle en el desarrollo que lleva a la obtención

de este término que se puede encontrar en [?] pero es importante saber que su origen se encuentra en la ecuación de Dirac aplicada a un sistema de una partícula fermiónica en el seno de un potencial central. Imponiendo a su vez el cumplimiento de la ecuación de Klein-Gordon y proponiendo soluciones estacionarias se puede encontrar que en el límite no relativista el hamiltoniano de este sistema cumple la forma:

$$h = \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + V(r) + \frac{1}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \vec{l} \cdot \vec{s} + \frac{\pi\hbar^2}{2m^2c^2} \left( \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \delta(\vec{r}) . \quad (3.10)$$

El término  $-\frac{p^4}{8m^3c^2}$  es una corrección a la energía cinética y el término  $\frac{\pi\hbar^2}{2m^2c^2} \left( \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \delta(\vec{r})$  es una corrección que solo afecta a estados con  $l = 0$  debido a  $\delta(\vec{r})$ . Ambos se desprecian aquí frente al resto de términos.

El cuarto sumando es el potencial de espín-órbita que también cuenta con simetría esférica:

$$V_{ls}(r) = \frac{1}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \vec{l} \cdot \vec{s} . \quad (3.11)$$

Desarrollando la expresión teniendo en cuenta como potencial central una parte nuclear más una parte eléctrica se tiene:

$$V_{ls}(r) = \frac{1}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \vec{l} \cdot \vec{s} \left[ \frac{dV_{WS}}{dr} + \frac{dV_C}{dr} \right] . \quad (3.12)$$

Dado que la interacción nuclear es mucho más dominante que la eléctrica se desprecia esta última (en caso de neutrones es directamente cero).

$$V_{ls}(r) \simeq \frac{1}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{dV_{WS}}{dr} \vec{l} \cdot \vec{s} . \quad (3.13)$$

Sin embargo, se ha observado experimentalmente que este potencial es demasiado pequeño en comparación al fuerte término espín-órbita que debe aparecer en el modelo de capas. Se explica en [?] que el origen de este término puede ser descrito de la interacción con el campo mesónico. Este tema de teoría cuántica de campos se escapa de los propósitos del trabajo. Notar en cualquier caso que aquí se usará la forma:

$$V_{ls}(r) \simeq \frac{1}{2m_\pi^2c^2} \frac{1}{r} \frac{dV_{WS}}{dr} \vec{l} \cdot \vec{s} . \quad (3.14)$$

Donde aparece la masa del pión  $m_\pi < m_{nucleon}$  que aumenta la fuerza del potencial.

De todas formas se impone que el término quede parametrizado por sus propios parámetros ( $R_{ls}, U_{ls}$  y  $a_{ls}$ ) al desarrollar la derivada:

$$V_{ls}(r) = \frac{1}{2m_\pi^2c^2} \frac{U_{ls}}{a_{ls}r} \frac{e^{-\frac{r-R_{ls}}{a_{ls}}}}{\left(1 + e^{-\frac{r-R_{ls}}{a_{ls}}}\right)^2} \vec{l} \cdot \vec{s} . \quad (3.15)$$

### 3.3.1 Armónico esférico generalizado

Al incorporar el término de interacción espín-órbita en el potencial, el hamiltoniano  $h(r)$  monoparticular deja de conmutar con  $l_z$ , con lo cual la base de armónicos esféricos  $Y_{lm_l}$



deja de ser una base adecuada. La base adecuada se estudia desarrollando el término de espín-órbita.

El momento angular total monoparticular es:

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}. \quad (3.16)$$

Elevando al cuadrado y teniendo en cuenta que  $[\vec{l}, \vec{s}] = 0$ , ya que actúan en espacios distintos, se tiene:

$$\vec{j}^2 = \vec{l}^2 + \vec{s}^2 + 2\vec{l} \cdot \vec{s}. \quad (3.17)$$

Por tanto:

$$\vec{l} \cdot \vec{s} = \frac{1}{2}(\vec{j}^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2); \quad (3.18)$$

Entonces es obvio que  $[h, \vec{j}^2] = 0$  y también se cumple  $[h, j_z] = 0$ . La base adecuada viene dada por autofunciones de  $j, l, s$  y  $m_j \equiv m$  o también denominados armónicos esféricos generalizados. Partiendo de los armónicos esféricos  $Y_{lm_l}(\theta, \phi)$  se obtienen por medio de un cambio de base:

$$Y_{jlm}(\theta, \phi, \sigma) = \sum_{m_s=-\frac{1}{2}}^{m_s=\frac{1}{2}} C_{jm}^{m_l m_s} Y_{lm_l}(\theta, \phi) \chi_{m_s}(\sigma). \quad (3.19)$$

La sumatoria en  $m_s$  también implica variar  $m_l$  ya que están conectados:  $m_l = m - m_s$ . Con  $C_{jm}^{m_l m_s}$  se denota a los coeficientes de cambio de base o coeficientes Clebsch-Gordan.

Entonces la autofunción en total en la base esférica tiene la forma:

$$\psi(\vec{r}, \sigma) = R_{nlj}(r) Y_{jlm}(\theta, \phi, \sigma). \quad (3.20)$$

En particular si se aplica el operador  $\vec{l} \cdot \vec{s}$  sobre un armónico esférico generalizado se tiene:

$$(\vec{l} \cdot \vec{s}) R_{nlj}(r) Y_{jlm}(\theta, \phi, \sigma) = \hbar^2 [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] R_{nl}(r) Y_{jlm}(\theta, \phi, \sigma). \quad (3.21)$$

Como  $s = \frac{1}{2}$  para cualquier nucleón existen dos opciones:

$$j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} = \begin{cases} l & \text{si } j = l + \frac{1}{2} \\ -(l+1) & \text{si } j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.22)$$

Con todo esto se tiene una ecuación de autovalores en la forma:

$$h [R_{nlj}(r) Y_{jlm}(\theta, \phi, \sigma)] = \epsilon_{nlj} Y_{jlm}(\theta, \phi, \sigma). \quad (3.23)$$

Esto es, los niveles de energía quedan etiquetados por el conjunto de números cuánticos  $(nlj)$  y presentan degeneración en los posibles valores de  $m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$ , es decir, presentan una degeneración en  $2j+1$  estados. Como  $l$  es un número entero y el espín es semientero  $j$  es siempre un número semientero por lo que la degeneración es siempre par. De aquí se concluye que las subcapas  $(nlj)$  se completan con número par de

nucleones. Para  $j = \frac{1}{2}$  se tiene una degeneración en dos estados, en subcapas con  $j = \frac{3}{2}$  son 4 las vacantes, etc...

La forma en la que se distribuyen estos niveles usando el potencial Wood-Saxon es de forma genérica como se mostró en la parte derecha de la figura[?]. La notación para identificar a los estados es  $nl_j$ .  $n$  se toma empezando desde el 1 aunque este número cuántico no se ha deducido explícitamente sino que se utiliza como un índice para identificar los estados. Para  $l$  se usa la notación espectroscópica, esto es,  $l = 0$  se denota con una  $s$ ,  $l = 1$  con una  $p$ ,  $l = 2$  con una  $d$ ,  $l = 3$  con una  $f$ , etc... Aceptando la distribución de niveles mostrada en dicha figura se puede deducir la configuración de estado fundamental de cualquier núcleo según este modelo. Por ejemplo, el  $^{16}\text{O}$  es un núcleo con 8 protones y 8 neutrones, con lo que la configuración en niveles de ambos nucleones es la misma. Para ambos tipos se tiene 2 nucleones ocupando la subcapa  $1s_{1/2}$  (es decir,  $n = 1, l = 0, j = 1/2$ ), 4 nucleones en la subcapa  $1p_{3/2}$  y 2 nucleones en la subcapa  $1p_{1/2}$ , siendo esta la última subcapa ocupada en el estado fundamental para ambos nucleones, el resto quedan vacías.

### 3.4 Aplicación del modelo en núcleos con números mágicos

Se procede a la aplicación del modelo esférico usando el potencial Woods-Saxon como término principal. En total, la ecuación de Schrödinger a resolver es:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{WS}(r) + V_{ls}(r) + V_c(r) \right] R_{nlj}(r) Y_{jlm}(\theta, \phi) = \epsilon_{nlj} R_{nlj}(r) Y_{jlm}(\theta, \phi) \quad (3.24)$$

Esta ecuación no es resoluble analíticamente así que se procede con un método de desarrollo de la autofunción en una base de oscilador armónico. Esto es:

$$R_{nlj}(r) = \sum_{k=0} \alpha_k(nlj) R_{kl}^{OA}(r) \quad (3.25)$$

donde  $R_{kl}^{OA}(r)$  es la parte radial de las autofunciones de oscilador armónico que son bien conocidas [?].

$$R_{kl}^{OA}(r) = N e^{-\frac{\alpha^2 r^2}{2}} r^l {}_1F_1(-n_r, l + \frac{3}{2}, \alpha^2 r^2) \quad (3.26)$$

donde  $N$  es un factor de normalización y  $n_r$  cumple  $k - 1 = 2n_r + l$ . Y  ${}_1F_1(-n_r, l + \frac{3}{2}, \alpha^2 r^2)$  es la serie hipergeométrica confluyente. Estas funciones cumplen con la siguiente ortonormalización:

$$\int R_{k'l}^{*OA} R_{kl}^{OA} r^2 dr = \delta_{k'k} \quad (3.27)$$

Sus autovalores son:

$$\epsilon_{kl}^{OA} = \left( 2(k-1) + l + \frac{3}{2} \right) \hbar \omega \quad (3.28)$$

donde  $k = 1, 2, 3, \dots$

Con lo cual se tiene:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right] R_{kl}^{OA}(r) Y_{jlm}(\theta, \phi) = \left[ \epsilon_{kl}^{OA} - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \right] R_{kl}^{OA}(r) Y_{jlm}(\theta, \phi) . \quad (3.29)$$

Sustituyendo el desarrollo en la base de oscilador expuesto en la ecuación(??) y el resultado de la ecuación(??) en la ecuación de Schrödinger descrita en la ecuación (??) se tiene:

$$\sum_{k=1} \left[ V_{WS}(r) + V_{Is}(r) + V_c(r) - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 + \epsilon_{kl}^{OA} \right] \alpha_k(nlj) R_{kl}^{OA}(r) = \epsilon_{nlj} \sum_{k=1} \alpha_k(nlj) R_{kl}^{OA} , \quad (3.30)$$

como la ecuación es puramente radial la parte del armónico esférico se anula.

Si se proyecta sobre un estado asociado a  $R_{k'l}^{OA}$ , esto es, multiplicando por su conjugado e integrando en todo el espacio se tiene:

$$\begin{aligned} & \int dr r^2 R_{k'l}^{*OA} \sum_{k=1} \left[ V_{WS}(r) + V_{Is}(r) + V_c(r) - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 + \epsilon_{kl}^{OA} \right] \alpha_k(nlj) R_{kl}^{OA}(r) \\ &= \epsilon_{nlj} \int dr r^2 R_{k'l}^{*OA} \sum_{k=1} \alpha_k(nlj) R_{kl}^{OA} . \end{aligned} \quad (3.31)$$

Dada la ortonormalización de las funciones radiales  $R_{kl}^{OA}(r)$  descrita en la ecuación ?? se llega a:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1} \alpha_k(nlj) \left[ \epsilon_{kl}^{OA} \delta_{kk'} + \int dr r^2 R_{k'l}^{*OA} R_{kl}^{OA} \left( V_{WS}(r) + V_{Is}(r) + V_c(r) - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \right) \right] \\ &= \epsilon_{nlj} \sum_{k=1} \alpha_k(nlj) \delta_{kk'} = \epsilon_{nlj} \alpha_{k'}(nlj) . \end{aligned} \quad (3.32)$$

Para resolver el sistema es necesario limitar la sumatoria  $\sum_{k=1}$  idealmente infinita. Si se limita a un valor máximo de  $k = K$ , se puede construir un sistema de  $K$  ecuaciones a partir de la ecuación anterior:

$$\sum_{k=1}^K \alpha_k(nlj) \left[ \epsilon_{kl}^{OA} \delta_{kk'} + h_{kk'} \right] = \epsilon_{nlj} \alpha_{k'}(nlj) , \quad (3.33)$$

con  $k' = 1, 2, \dots, K$  y se ha definido:

$$h_{kk'} = \int dr r^2 R_{k'l}^{*OA} R_{kl}^{OA} \left[ V_{WS}(r) + V_{Is}(r) + V_c(r) - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \right] . \quad (3.34)$$

Que junto a la condición de normalización que debe cumplir la autofunción descrita en la ecuación (??) se tiene que:

$$\sum_{k=1} |\alpha_k(nlj)|^2 = 1 . \quad (3.35)$$

Se tiene un sistema de  $K + 1$  ecuaciones para  $K + 1$  incógnitas (los  $K$  coeficientes  $\alpha_k(nlj)$  y el autovalor  $\epsilon_{nlj}$ ) con lo que el sistema puede ser resuelto.

Se ha usado un código en FORTRAN que halla los valores (??) y resuelve el sistema, ofreciendo como resultados los  $K$  coeficientes  $\alpha_k(nlj)$  y el autovalor  $\epsilon_{nlj}$  para cada subcapa dada una configuración del núcleo que se desea estudiar. A su vez utiliza estos resultados para hallar la densidad de nucleones en función de la distancia radial.

### 3.4.1 Parámetros del potencial

Los parámetros que se deben tener en cuenta son el radio nuclear  $R$ , la profundidad  $V_0$  y el parámetro superficial  $a$  del potencial de Wood-Saxon,  $R_C$  del potencial de Coulomb y los asociados al potencial de espín-órbita  $U_{ls}$ ,  $R_{ls}$  y  $a_{ls}$ . Se debe tener en cuenta que  $R$ ,  $R_{ls}$  y  $R_C$  deben tener un valor parecido, una estimación común es  $R = r_0 A^{1/3}$  con  $r_0$  variable según el número de nucleones. También  $a$  y  $a_{ls}$  deben tener un valor parecido. También se usa la estimación  $\hbar\omega = 41A^{1/3}$ .

Los valores que se adjudican a los parámetros deben reproducir el nivel energético de un nucleón de última capa en el estado fundamental que se puede estimar a partir de datos experimentales. Si dicho nucleón se trata de un neutrón:

$$\epsilon_{nlj} = \Delta(Z, N+1) - \Delta(Z, N) - \Delta_n(Z=0, N=1) , \quad (3.36)$$

donde  $\Delta(Z, N)$  es el exceso de masa. Este es un valor experimental tabulado [?] y se define para un núcleo de  $Z$  protones y  $N$  neutrones como:

$$\Delta(Z, N) = [M(Z, N) - A] , \quad (3.37)$$

donde  $M(Z, N)$  es la masa del núcleo y  $A = Z + N$ .

De esta forma la energía necesaria para separar un neutrón  $S_n$  de un núcleo  $(Z, N+1)$ , esto es, la diferencia de energía entre un núcleo  $(Z, N+1)$  y otro núcleo  $(Z, N)$  más un neutrón separado es:

$$S_n = +M(Z, N) + m_{neutron} - M(Z, N+1) = \Delta(Z, N) + \Delta_n(Z=0, N=1) - \Delta(Z, N+1) . \quad (3.38)$$

La energía para separar un neutrón es precisamente la energía correspondiente al nivel que ocupa ese neutrón en el núcleo cambiada de signo:  $\epsilon_{nlj} = -S_n$ . Con ello se obtiene la ecuación (??). Análogamente para un protón de última capa se tiene:

$$\epsilon_{nlj} = \Delta(Z+1, N) - \Delta(Z, N) - \Delta_p(Z=1, N=0) . \quad (3.39)$$

### 3.4.2 Resultados

El desarrollo en la base de oscilador se ha hecho con  $K = 8$ , es decir, en 8 elementos de base. Se han estudiado los estados fundamentales de los núcleos  $^4\text{He}$ ,  $^{16}\text{O}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{48}\text{Ca}$ ,  $^{60}\text{Ca}$ ,  $^{56}\text{Ni}$ ,  $^{68}\text{Ni}$ ,  $^{78}\text{Ni}$ ,  $^{90}\text{Zr}$ ,  $^{132}\text{Sn}$  y  $^{208}\text{Pb}$ .

Es interesante observar la forma de las funciones de onda que se obtienen por medio de algún caso particular. Por ejemplo, en el  $^{16}\text{O}$  las funciones de onda para estados de protón resultan:

$$\psi_{1s\frac{1}{2}} = [0.9963R_{1s} - 0.825 \cdot 10^{-1}R_{2s} - 0.113 \cdot 10^{-1}R_{3s} + \dots]Y_{\frac{1}{2}0m} \quad (3.40)$$

$$\psi_{1p\frac{3}{2}} = [0.9962R_{1p} - 0.742 \cdot 10^{-1}R_{2p} + 0.214 \cdot 10^{-1}R_{3p} + \dots]Y_{\frac{3}{2}1m} \quad (3.41)$$

$$\psi_{1p\frac{1}{2}} = [0.9955R_{1p} - 0.719 \cdot 10^{-1}R_{2p} + 0.443 \cdot 10^{-1}R_{3p} + \dots]Y_{\frac{1}{2}1m} \quad (3.42)$$

Se cumple en los tres estados que es un término del desarrollo el que acumula casi todo el peso de la función. Y tiene lógica que sea así ya que las funciones de oscilador armónico ya son una aproximación a la solución de la ecuación de Schrödinger planteada donde no se considera espín-órbita ni el término de Coulomb pero que es capaz de reproducir los primeros números mágicos (ver parte izquierda de la figura figura [??]). En estados más superiores se encuentran casos en que los pesos se encuentran más repartidos ya que el oscilador armónico sin más términos funciona peor en esta parte pero en cualquier caso el peso notable nunca se reparte más allá de tres estados.

Por esta razón no es necesario realizar un desarrollo con muchos elementos. Con 8 considerados aquí es ya una buena cantidad y los resultados no son mejorables por añadir más términos. Excepcionalmente se encuentran estados donde el peso se reparte un poco más, pero nunca son más de 3 estados los que tienen un peso considerable.

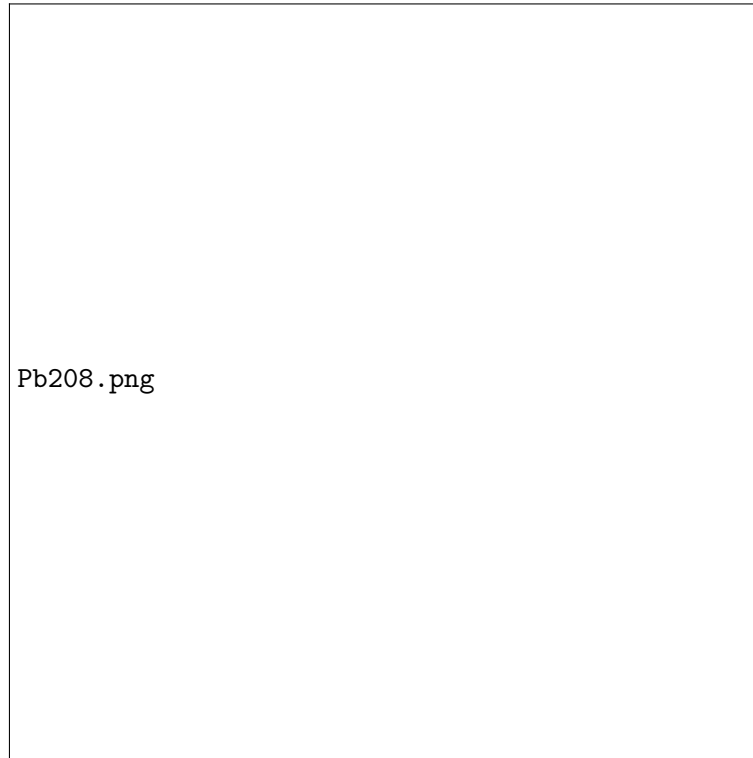


Figura 4: Elaboración propia. Niveles de energía hallados por el programa en FORTRAN. Se incluye la posición de los números mágicos.

En la figura [??] se muestran los niveles energéticos para neutrones encontrados en el  $^{208}\text{Pb}$ . Aprovechando la gran cantidad de estados de este núcleo es interesante señalar los números mágicos sobre los niveles para ver en que medida respetan el gap que debe

existir entre capas que completan los números mágicos. Tal vez sería esperable que los estados entre el número 28 y 50 estuviesen más juntos pero, en general, la distribución de niveles es bastante razonable.

En la tabla [1] se muestra los parámetros aquí utilizados para los núcleos estudiados. Con esta parametrización se han encontrado esquemas de niveles energéticos razonables para todos los núcleos.

Núcleo	Nucleón	$V_0(MeV)$	$R(fm)$	$a(fm)$	$U_{ls}(MeV)$	$R_{ls}(fm)$	$a_{ls}(fm)$	$R_C(fm)$
$^4\text{He}$	p	-55.20	2.00	0.50	-7.50	1.90	0.50	2.00
	n	-55.20	2.00	0.50	-7.50	1.90	0.50	0
$^{16}\text{O}$	p	-50.80	3.18	0.50	-4.78	3.02	0.50	3.18
	n	-50.70	3.18	0.50	-4.75	3.02	0.50	0
$^{40}\text{Ca}$	p	-51	4.31	0.53	-4.43	4.10	0.53	4.31
	n	-50.85	4.31	0.53	-4.40	4.10	0.53	0
$^{48}\text{Ca}$	p	-56.80	4.58	0.53	-4.39	4.36	0.53	4.58
	n	-48.65	4.58	0.53	-4.30	4.36	0.53	0
$^{60}\text{Ca}$	p	-63.60	4.93	0.54	-4.38	4.69	0.54	4.93
	n	-41.23	4.93	0.54	-4.35	4.70	0.54	0
$^{56}\text{Ni}$	p	-54.70	4.82	0.54	-5.11	4.59	0.54	4.82
	n	-47.85	4.82	0.54	-5.00	4.59	0.54	0
$^{68}\text{Ni}$	p	-59.50	5.14	0.55	-4.34	4.90	0.55	5.14
	n	-45.00	5.14	0.55	-4.30	4.90	0.55	0
$^{78}\text{Ni}$	p	-61.30	5.38	0.55	-4.97	5.12	0.55	5.38
	n	-43.25	5.38	0.55	-4.93	5.13	0.55	0
$^{90}\text{Zr}$	p	-55.70	5.65	0.57	-4.40	5.38	0.57	5.65
	n	-49.50	5.65	0.57	-4.30	5.36	0.57	0
$^{132}\text{Sn}$	p	-61.50	6.42	0.58	-4.28	6.11	0.58	6.41
	n	-45.16	6.42	0.58	-4.25	6.11	0.58	0
$^{208}\text{Pb}$	p	-59.30	7.46	0.60	-4.25	7.11	0.60	7.46
	n	-44.50	7.46	0.60	-4.24	7.11	0.60	0

Tabla 1: Parámetros escogidos del potencial para los núcleos de estudio

En particular, se muestra en la tabla [2] la comparación con la energía experimental para un nucleón de última capa mostrada en las ecuaciones (??) y (??) con las logradas con estos parámetros. El  $^{60}\text{Ca}$  no ha sido medido en laboratorio todavía (por exceso de neutrones es muy inestable) por lo que se deja aquí como una predicción.

En las figuras [??] y [??] se muestran la densidad de protones y neutrones en función de la distancia radial respectivamente para los distintos núcleos de estudio. Para los más ligeros  $^4\text{He}$  y  $^{16}\text{O}$  al tratarse de núcleos con pocos estados disponibles en más complicado que puedan distribuirse con tendencia a una distribución de tipo Woods-Saxon. En particular, el  $^4\text{He}$  solo tiene dos estados  $1s_{\frac{1}{2}}$  con lo cual es lógico que la distribución tenga la forma característica de estados  $1s$  (máximo notable en  $r = 0$  y decrecimiento rápido). Para los isótopos del  $\text{Ca}$  y  $\text{Ni}$  al tratarse de núcleos más grandes la forma tipo Woods-Saxon se hace reconocible, tendencia que sigue en aumento para los núcleos más pesados aquí estudiados que presentan una densidad bastante suave en gran parte del volumen nuclear. La densidad de neutrones presenta una forma más suave que la de protones debido a que no se ven afectados por el término coulombiano.

Núcleo	Nucleón	Estado	$\epsilon_{nlj}(MeV)$	$\epsilon_{nlj,exp}(MeV)$
$^4\text{He}$	p	$1s_{\frac{1}{2}}$	-19.822	-19.812
	n	$1s_{\frac{1}{2}}$	-20.652	-20.577
$^{16}\text{O}$	p	$1p_{\frac{3}{2}}$	-12.073	-11.924
	n	$1p_{\frac{3}{2}}$	-15.726	-15.663
$^{40}\text{Ca}$	p	$1d_{\frac{3}{2}}$	-8.318	-8.327
	n	$1d_{\frac{3}{2}}$	-15.764	-15.635
$^{48}\text{Ca}$	p	$1d_{\frac{3}{2}}$	-15.858	-15.780
	n	$1f_{\frac{7}{2}}$	-10.042	-9.950
$^{60}\text{Ca}$	p	$1d_{\frac{3}{2}}$	-25.360	-
	n	$2p_{\frac{1}{2}}$	-3.657	-
$^{56}\text{Ni}$	p	$1f_{\frac{7}{2}}$	-8.238	-8.171
	n	$1f_{\frac{7}{2}}$	-12.337	-12.216
$^{68}\text{Ni}$	p	$1f_{\frac{7}{2}}$	-15.581	-15.429
	n	$2p_{\frac{1}{2}}$	-7.855	-7.792
$^{78}\text{Ni}$	p	$1f_{\frac{7}{2}}$	-20.075	-20.158
	n	$1g_{\frac{9}{2}}$	-5.179	-5.161
$^{90}\text{Zr}$	p	$2p_{\frac{1}{2}}$	-8.465	-8.352
	n	$1g_{\frac{9}{2}}$	-12.015	-11.967
$^{132}\text{Sn}$	p	$1g_{\frac{9}{2}}$	-15.858	-15.809
	n	$1h_{\frac{11}{2}}$	-7.393	-7.352
$^{208}\text{Pb}$	p	$3s_{\frac{1}{2}}$	-8.076	-8.002
	n	$3p_{\frac{1}{2}}$	-7.331	-7.367

Tabla 2: Energía de estados de última subcapa ocupada en configuración de estado fundamental. El  $^{60}\text{Ca}$  no ha sido medido en laboratorio.

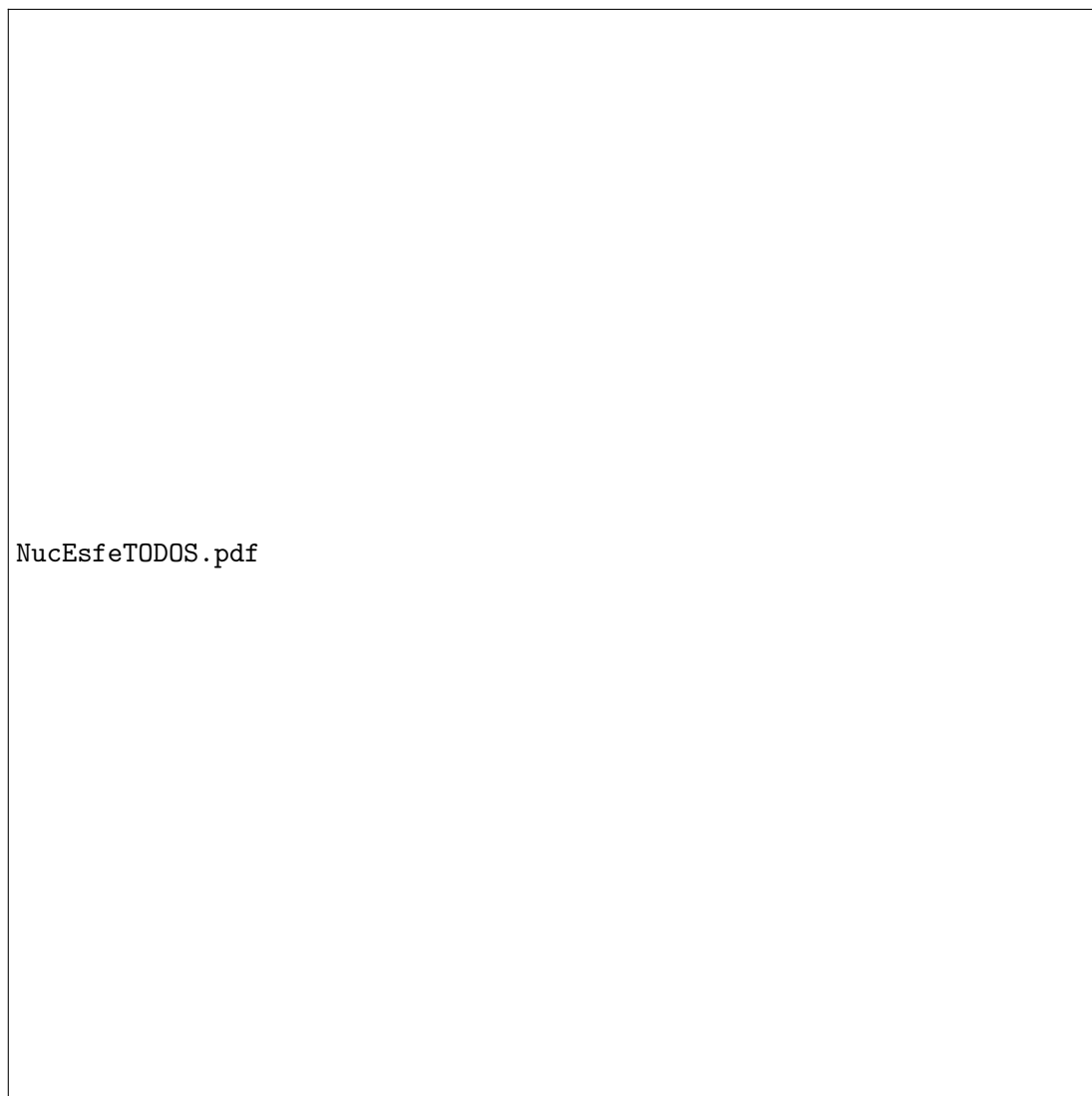


Figura 5: Densidad de protones en función de la distancia radial obtenida con el programa en FORTRAN para los diferentes núcleos analizados.



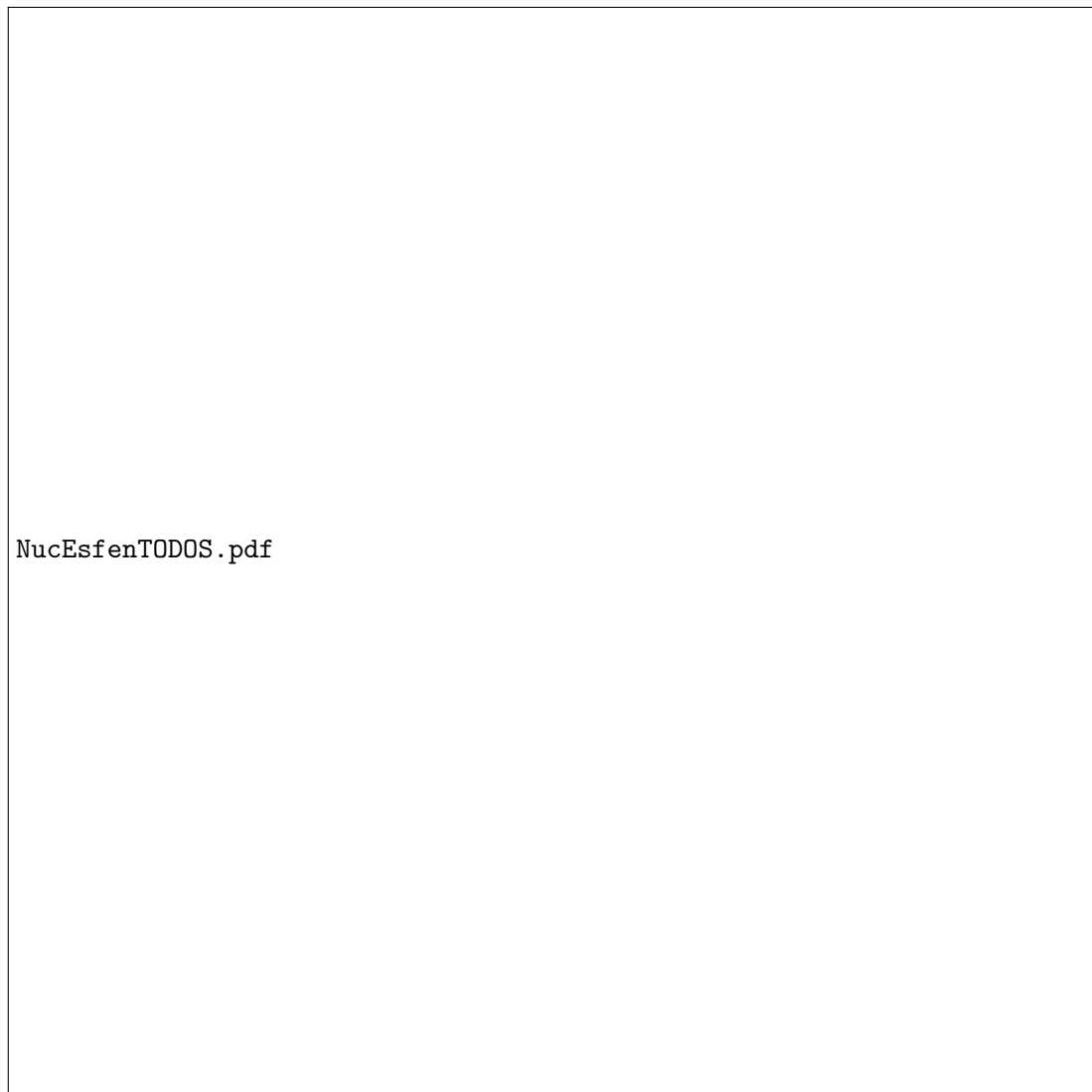


Figura 6: Densidad de neutrones en función de la distancia radial obtenida con el programa en FORTRAN para los diferentes núcleos analizados..

## 4 Caso deformado

El modelo de partícula independiente para núcleos deformados se basa en la idea de romper la simetría esférica de forma que el potencial medio presente dependencia con coordenadas angulares. Esto es, el hamiltoniano de partícula independiente presenta la siguiente forma en coordenadas esféricas:

$$h = \frac{1}{2m} \left[ \frac{\hbar^2}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r + \frac{l^2}{r^2} \right] + V(r, \theta, \phi) . \quad (4.1)$$

Este aumento en el número de grados de libertad en el potencial medio tiene importantes consecuencias en los autovalores de energía que se pueden obtener. Lo más importante es que este hamiltoniano no conmuta en general con  $l^2$  ya que en general  $[l^2, V(r, \theta, \phi)] \neq 0$ , por tanto, el autovalor  $l$  de momento angular orbital no es ya un buen número cuántico. Las autofunciones del hamiltoniano no son autofunciones de  $l^2$  y los niveles de energía no pueden ser identificados por el número cuántico  $l$ . Otro número cuántico que es constante en el caso esférico es  $m$  el autovalor de  $j_z$ . En caso de deformación la dependencia explícita en la coordenada  $\phi$  hace que en general este hamiltoniano tampoco conmute con  $j_z$  y  $m$  ya no sirve para identificar niveles de energía. En caso de simetría azimutal, esto es,  $V = V(r, \theta)$ , sí que se cumple  $[j_z, V] = 0$  y sí existen, por tanto, autofunciones simultáneas del hamiltoniano y  $j_z$ .

### 4.1 Oscilador armónico anisótropo

Un modelo que incorpora deformación es el oscilador armónico anisótropo. En este caso se toma un potencial de oscilador armónico sin simetría esférica. El caso más general es recomendable tratarlo en coordenadas cartesianas:

$$h = -\frac{\hbar^2}{2m} [\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2] + \frac{m}{2} (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) , \quad (4.2)$$

con  $\omega_x^2 \neq \omega_y^2 \neq \omega_z^2$  de forma que se rompe la simetría esférica.

Cada frecuencia es una medida del tamaño que se asocia al núcleo en cada eje cartesiano. A mayor frecuencia más rápido crece el potencial en función de la distancia y por tanto, menor deformación presenta en ese eje (menor atracción). Esto es, las frecuencias deben ser proporcionales al inverso de los ejes  $a_\xi$  asociados al núcleo como un elipsoide:

$$\omega_\xi = \bar{\omega}_0 \frac{R}{a_\xi} \quad \text{con } \xi = x, y, z , \quad (4.3)$$

donde  $\bar{\omega}_0 R$  es la constante de proporcionalidad. Se escribe como el producto de dos constantes para incorporar al radio  $R$  que es una medida del radio que se asociaría al núcleo deformado en su aproximación esférica.

Por otro lado, se impone la condición de volumen conservado:

$$\omega_x \omega_y \omega_z = \bar{\omega}_0^3 , \quad (4.4)$$

cuya razón de ser es la incomprensibilidad de la materia nuclear. Se puede variar la forma del núcleo pero el volumen total debe ser el mismo.

El hamiltoniano es claramente separable en coordenadas cartesianas con lo cual autofunciones válidas para este hamiltoniano tienen la forma:

$$\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) . \quad (4.5)$$

Las funciones  $X(x)$ ,  $Y(y)$  y  $Z(z)$  cumplen las tres una ecuación de autovalores en la forma:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + \frac{m}{2} \omega_x^2 x^2 \right] \zeta(\xi) = \epsilon_\xi \zeta(\xi) . \quad (4.6)$$

Esta es la ecuación de autovalor del oscilador armónico unidimensional cuyas soluciones son ampliamente conocidas (por ejemplo [?]). Las autofunciones son:

$$\zeta_{n_\xi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} n_\xi! 2^{n_\xi}}} \left( \frac{m\omega_\xi}{\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\tau^2}{2}} H_{n_\xi}(\tau) , \quad (4.7)$$

donde  $\tau = \sqrt{\frac{m\omega_\xi}{\hbar}} \xi$  y  $H_{n_\xi}(\tau)$  el polinomio de Hermite de rango  $n_z$ .

Y con autovalores:

$$\epsilon_\xi = \hbar\omega_\xi \left( n_\xi + \frac{1}{2} \right) , \quad (4.8)$$

donde  $n_\xi \in \mathbb{N} + 0$ .

El autovalor total del hamiltoniano ?? es, por tanto:

$$\epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \hbar\omega_x \left( n_x + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_y \left( n_y + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_z \left( n_z + \frac{1}{2} \right) . \quad (4.9)$$

#### 4.1.1 Simetría axial

Usualmente se simplifica el problema asumiendo simetría axial. En este caso se traduce en:  $\omega_\rho \equiv \omega_x = \omega_y$ .

A continuación se parametriza la deformación por medio de un único parámetro real  $\delta$ :

$$\omega_\rho^2 = \omega_0^2(\delta) \left( 1 + \frac{2}{3} \delta \right) , \quad (4.10)$$

$$\omega_z^2 = \omega_0^2(\delta) \left( 1 - \frac{4}{3} \delta \right) . \quad (4.11)$$

Esta forma de caracterizar la deformación es la misma que usó Nilsson [?] en su estudio del núcleo deformado por medio del hamiltoniano de Nilsson. Por supuesto, se puede escoger otra forma de parametrizar la deformación ya que esta elección es arbitraria.

Una vez escogida es interesante relacionar el parámetro  $\delta$  con la deformación del núcleo en una relación directa. Para ello se usa la condición de volumen conservado expresada en la ecuación (??), que en este caso se escribe como:

$$\omega_\rho^2 \omega_z = \bar{\omega}_0^3 . \quad (4.12)$$

Sustituyendo las parametrizaciones en esta última ecuación se tiene:

$$\omega_0(\delta) = \bar{\omega}_0 \left[ \frac{1}{(1 + \frac{2}{3}\delta)(1 - \frac{4}{3}\delta)} \right]^{1/3}, \quad (4.13)$$

con lo cual:

$$\omega_\rho = \bar{\omega}_0 \left[ \frac{1 + \frac{2}{3}\delta}{1 - \frac{4}{3}\delta} \right]^{\frac{1}{6}}, \quad (4.14)$$

$$\omega_z = \bar{\omega}_0 \left[ \frac{1 - \frac{4}{3}\delta}{1 + \frac{2}{3}\delta} \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (4.15)$$

Es decir, se tiene que  $\delta \in (-\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$ , con  $\delta < 0$  para núcleos oblatos (achatados en el eje z) y  $\delta > 0$  para núcleos prolato (alargados en el eje z). Con los casos extremos:

$$\delta \longrightarrow -\frac{3}{2} \implies \omega_z \longrightarrow \infty \quad \omega_\rho \longrightarrow 0, \quad (4.16)$$

$$\delta \longrightarrow \frac{3}{4} \implies \omega_z \longrightarrow 0 \quad \omega_\rho \longrightarrow \infty. \quad (4.17)$$

La relación directa entre deformación y el parámetro  $\delta$  es:

$$\frac{\omega_\rho}{\omega_z} = \left[ \frac{1 + \frac{2}{3}\delta}{1 - \frac{4}{3}\delta} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.18)$$

Dado que se está trabajando sobre simetría axial puede resultar conveniente trabajar en coordenadas cilíndricas. El hamiltoniano dado en la ecuación (??) en estas coordenadas es:

$$h = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{1}{\rho} \partial_\rho \rho \partial_\rho + \frac{1}{\rho^2} \partial_\phi^2 + \partial_z^2 \right] + \frac{m}{2} \omega_\rho^2 \rho^2 + \frac{m}{2} \omega_z^2 z^2. \quad (4.19)$$

Sus autofunciones son separables en las coordenadas cilíndricas. Para ver esto no hay más que insertar la solución  $\psi(\vec{r}) = Z(z)R(\rho)\Phi(\phi)$  en la ecuación de autovalores  $h\psi = \epsilon\psi$ . Haciendo esto y trabajando un poco se llega directamente a:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{1}{R(\rho)\rho} \partial_\rho \rho \partial_\rho R(\rho) + \frac{1}{\rho^2 \Phi(\phi)} \partial_\phi^2 \Phi(\phi) + \frac{1}{Z(z)} \partial_z^2 Z(z) \right] + \frac{m}{2} \omega_\rho^2 \rho^2 + \frac{m}{2} \omega_z^2 z^2 - \epsilon = 0. \quad (4.20)$$

La ecuación es claramente separable en  $z$  cumpliendo la ecuación de autovalores del oscilador armónico unidimensional. Su autovalor es el visto en la ecuación (??) y su autofunción es la vista ecuación (??) con  $\xi = z$ .

Sustituyendo esto en la ecuación (??) y multiplicando a ambos lados por  $\rho^2$  se tiene una ecuación separable en las coordenadas de  $\rho$  y  $\phi$ :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{\rho}{R(\rho)} \partial_\rho \rho \partial_\rho R(\rho) + \frac{1}{\Phi(\phi)} \partial_\phi^2 \Phi(\phi) \right] + \frac{m}{2} \omega_\rho^2 \rho^4 (\epsilon_z - \epsilon) \rho^2 = 0, \quad (4.21)$$

de ella se deducen las ecuaciones en  $\phi$  y en  $\rho$ :

$$\frac{1}{\Phi(\phi)} \partial_\phi^2 \Phi(\phi) = -m_l^2 , \quad (4.22)$$

cuyas autofunciones son:

$$\Phi(\phi) = e^{i\phi m_l} , \quad (4.23)$$

que para ser solución física debe ser univaluada con lo que  $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$ , por lo que se llega a la condición  $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$   $m_l$  se corresponde con el número cuántico asociado a la tercera componente de momento angular orbital ya que se cumple:

$$l_z \Phi(\phi) = \hbar m_l \Phi(\phi) , \quad (4.24)$$

donde  $l_z = \frac{\hbar}{i} \partial_\phi$ .

Sustituyendo en  $\Phi(\phi)$  en la ecuación (??) y despejando  $-\frac{\hbar^2}{2m}$  se tiene:

$$\rho \partial_\rho \rho \partial_\rho R(\rho) - \left( \frac{m\omega_\rho}{\hbar} \right)^2 \rho^4 R(\rho) + \frac{2m}{\hbar} \epsilon_\rho \rho^2 - m_l^2 = 0 , \quad (4.25)$$

donde se ha definido  $\epsilon_\rho = \epsilon - \epsilon_z$ . Esta ecuación diferencial ha sido ampliamente estudiada como por ejemplo en [?] y la forma de sus autovalores es bien conocida:

$$\epsilon_\rho = \left( 2n_\rho + |m_l| + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_\rho , \quad (4.26)$$

donde  $n_\rho \in \mathbb{N} + 0$ .

Y cuyas autofunciones son:

$$R(\rho)_{n_\rho m_l} = \frac{\sqrt{n_\rho!}}{\sqrt{(n_\rho + |m_l|)!}} \left( \frac{2m\omega_\rho}{\hbar} \right)^{\frac{|m_l|}{2}} L_{n_\rho}^{|m_l|}(\gamma) , \quad (4.27)$$

donde  $\gamma = \frac{m\omega_\rho}{\hbar} \rho^2$ .

En total el autovalor del hamiltoniano individual se puede expresar como:

$$\epsilon(\delta) = \epsilon_\rho + \epsilon_z = (2n_\rho + |m_l| + \frac{1}{2}) \hbar \omega_\rho(\delta) + (n_z + \frac{1}{2}) \omega_z(\delta) . \quad (4.28)$$

Por supuesto el autovalor no depende de la base que se haya usado para hallarlo. Los niveles energéticos ofrecidos por las ecuaciones (??) y (??) para el caso  $\omega_y = \omega_x$  son los mismos. Pero el hecho de trabajar en coordenadas cilíndricas aprovechando la simetría permite extraer más información de cómo la deformación modifica los niveles de energía. Se establece su dependencia en la componente  $z$ ,  $\rho$  y de la tercera componente de momento angular  $m_l$ , en concreto, con su valor absoluto  $|m_l|$  por lo que fijos los valores de  $n_z$  y  $n_\rho$  existe degeneración en los estados  $\pm m_l$ .

Al tratar el modelo sobre nucleones, esto es, fermiones con  $s = \frac{1}{2}$  se debe incluir el espín en los estados monoparticulares. Como el hamiltoniano no depende del espín se inserta directamente en las autofunciones existiendo una degeneración adicional en  $\pm m_s$ :

$$\psi = Z_{n_z}(z)R_{n_\rho m_l}(\rho)\Phi_{m_l}(\phi)\chi_{m_s}(\sigma) . \quad (4.29)$$

#### 4.1.2 Aplicación del modelo

El modelo del oscilador armónico anisótropo ofrece una visión simplificada de un núcleo deformado donde no se incluye ningún término de espín-órbita. Con el objetivo único de ver como la deformación modifica los niveles de energía se procede a aplicar este modelo en núcleos concretos.

Con este propósito se ha creado un programa en PYTHON que halla los niveles de energía ocupados por nucleones en estado fundamental según el modelo de oscilador anisótropo en función del parámetro de deformación  $\delta$  asumiendo simetría axial.

En la figura [??] se pueden observar los niveles energéticos en función de  $\delta$  para el  $^{24}\text{Mg}$ . Es interesante poder observar como los niveles energéticos se deforman y los niveles ocupados cambian según el valor de  $\delta$ .

Vemos que para aquellos estados donde el número cuántico  $n_z$  tiene mayor peso (estados  $|100\rangle$ ,  $|200\rangle$  y  $|300\rangle$ ) en la parte prolata ( $\delta > 0$ ) decrecen en su valor ya que son estados con una proyección mayor sobre el eje  $z$  así que conforme más prolato es el núcleo menos energía presentan estos niveles, en la parte oblata sucede lo contrario, incrementan su valor de energía.

También es muy interesante observar los estados que estarían ocupados para deformaciones muy distintas. Si el núcleo presentase una deformación de  $\delta = -1$  se tendrían ocupados los estados  $|000\rangle$ ,  $|001\rangle$ ,  $|010\rangle$  y  $|002\rangle$  mientras que para  $\delta = 0.6$  serían los estados  $|000\rangle$ ,  $|100\rangle$ ,  $|200\rangle$ ,  $|300\rangle$  y  $|001\rangle$  los ocupados. Es llamativo como el estado  $|300\rangle$  pasa a ser un estado ocupado en deformaciones altas cuando para  $\delta = 0$  está lejos de serlo. Este pequeño análisis ya ofrece una importante idea de lo que ofrece aumentar los grados de libertad del sistema permitiendo la aparición de nuevas posibilidades de configuraciones para los niveles de energía. Lo cual a su vez indica que el estado fundamental del núcleo se produce para aquella deformación en que el sistema minimiza su energía.

Con esta idea se han hallado, por medio del programa en PYTHON, los valores de energía total para cada deformación y con ello se busca el valor de  $\delta$  para el que se minimiza. En la figura [??] se puede observar la gráfica de la energía total. Se ve como en este modelo el núcleo de  $^{24}\text{Mg}$  presenta un máximo relativo en torno a la simetría esférica ( $\delta = 0$ ). En concreto el programa encuentra el mínimo de deformación en  $\delta = 0.36 \pm 0.01$ , que se corresponde con la deformación que presentaría el núcleo de  $^{24}\text{Mg}$  en su estado fundamental.

Se puede comparar este resultados con los ofrecidos en [?] donde se aplica un método de Hartree-Fock (método variacional) basado en una interacción nucleón-nucleón conocida como fuerza de Gogny, este potente modelo ha proporcionado muy buenos resultados en núcleos deformados y , por tanto, es una buena referencia para comparar resultados. En este modelo se mide la deformación por medio de otro parámetro de deformación denominado por  $\beta$  que se puede relacionar directamente con la deformación del núcleo:

$$\frac{\omega_\rho}{\omega_z} = e^{\frac{1.5\beta}{2\beta+1}} . \quad (4.30)$$

Por tanto, lo podemos relacionar directamente con  $\delta$  por medio de (??).

El valor de deformación según este modelo es de  $\beta = 0.55$  que se relaciona con  $\delta_{Gogny} = 0.417$ . Es decir, el modelo de oscilador anisótropo es capaz de encontrar que el núcleo  $^{24}\text{Mg}$  presenta una deformación prolata notable en su estado fundamental si bien el error relativo al valor ofrecido por este modelo nuclear es del 13.66 %.

La razón de este pequeño éxito en un modelo tan simple se puede deber al hecho de que en núcleos pequeños como el  $^{24}\text{Mg}$  tanto el término de espín-órbita como el término de Coulomb son pequeños en comparación a la perturbación que produce la deformación. Esto es, pese a que el modelo no es correcto para deformaciones pequeñas, el hecho de funcionar bien para deformaciones grandes es capaz de encontrar en total resultados razonables.

## 4.2 Modelo de potencial Woods-Saxon deformado

A continuación se va a estudiar y aplicar un modelo deformado realista, basado en un potencial Wood-Saxon que tiene en cuenta el término de espín-órbita y eléctrico, para el que se han obtenido buenos resultados tanto para obtención de los niveles de energía como para algunas características colectivas. Este modelo fue presentado, analizado e implementado por Cwiok y sus colaboradores en [?]. El potencial Woods-Saxon deformado es:

$$V_{WS,def}(r, \theta, \phi) = \frac{V_0}{1 + e^{\frac{R(\theta, \phi) - r}{a}}} , \quad (4.31)$$

donde se incluye la función  $R(\theta, \phi)$  que rompe la simetría esférica del potencial. Esta función define la distancia desde el origen de coordenadas hasta el punto en la superficie nuclear cuya posición viene especificada por los ángulos  $(\theta, \phi)$ . En otras palabras,  $R(\theta, \phi)$  define el radio nuclear deformado. En una expansión en armónicos esféricos tiene la forma:

$$R(\theta, \phi) = c(\hat{\alpha}) R_0 \left[ 1 + \sum_{\lambda \geq 2} \sum_{\mu = -\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu}^* Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \right] , \quad (4.32)$$

donde  $\hat{\alpha}$  representa el conjunto de parámetros  $\alpha_{\lambda\mu} \in \mathbb{C}$ . Se debe notar, sin embargo, que  $R(\theta, \phi)$  se define para ser real.  $R_0$  representa el valor del radio nuclear si el núcleo fuese esférico con el mismo volumen. La condición de volumen conservado introducida en la ecuación ([?]) para el oscilador armónico se puede expresar de una forma más general como:

$$V_{nuclear} = \int_{r \in V_{nuclear}} d^3\vec{r} = \frac{4}{3} \pi R_0^3 . \quad (4.33)$$

El volumen del núcleo se puede hallar por medio del radio nuclear  $R(\theta, \phi)$  como:

$$V_{nuclear} = \int_0^{R(\theta, \phi)} dr r^2 \int d\Omega = c(\hat{\alpha}) \frac{1}{3} R_0^3 \int d\Omega \left[ 1 + \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu}^* Y_{\lambda\mu} \right]^3 . \quad (4.34)$$

Por tanto, la condición de volumen conservado define el factor de escala  $c(\hat{\alpha})$ :

$$c(\hat{\alpha}) = \left[ \frac{4\pi}{\int [1 + \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu}^* Y_{\lambda\mu}]} \right]^3 d\Omega . \quad (4.35)$$

La razón por la que no se han incluido los términos en  $\lambda = 0$  y  $\lambda = 1$  en la expansión del radio nuclear en la ecuación (??) es que  $\lambda = 0$  implica un cambio en el radio de referencia  $R_0$  lo cual va en contra de la condición de volumen conservado. Este fenómeno puede ser tratado pero equivale a estados muy excitados que no se tratan aquí. Por su parte  $\lambda = 1$  implica un cambio en el centro de masas del núcleo, esto es, una traslación que no es de interés en este trabajo donde se fija el centro de masas inicialmente. La componente  $\lambda = 2$  es el término más importante con diferencia mientras más allá de  $\lambda = 4$  no tiene ninguna importancia práctica.

Como se hizo anteriormente se va a simplificar el problema asumiendo simetría axial lo cual implica la anulación de la dependencia en  $\phi$  y con ella los términos  $\alpha_{\lambda\mu}^*$  con  $\mu \neq 0$ . Redefiniendo las constantes de parametrización el radio nuclear con simetría axial queda descrito por:

$$R(\theta) = c(\hat{\beta})R_0 \left[ 1 + \sum_{\lambda \geq 2} \beta_\lambda Y_{\lambda 0}(\theta) \right] . \quad (4.36)$$

Como el radio nuclear debe ser real y los armónicos esféricos  $Y_{\lambda 0}$  son reales los parámetros  $\beta_\lambda$  deben ser reales.

Si deja como único parámetro de deformación no nulo a  $\beta_2$  el radio nuclear tiene la forma:

$$R(\theta) = c(\beta_2)R_0 (1 + \beta_2 Y_{20}(\theta)) . \quad (4.37)$$

En este caso, el núcleo tiene forma de elipsoide rotacional (ver figura[]). Entonces el momento cuadrupolar intrínseco  $Q_0$  del núcleo se puede estimar por el asociado a un elipsoide rotacional con semiejes  $a_z$  y  $a_\rho$ , donde  $a_z$  se refiere al semieje paralelo al eje  $z$  y  $a_\rho$  al perpendicular.

$$Q_0 = \frac{2}{5}Z (a_z^2 - a_\rho^2) . \quad (4.38)$$

Con la parametrización del radio nuclear de la ecuación (??) los semiejes del elipsoide rotacional son:

$$a_z = c(\beta_2)R_0 \left( 1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\beta_2 \right) , \quad (4.39)$$

$$a_\rho = c(\beta_2)R_0 \left( 1 - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\beta_2 \right) . \quad (4.40)$$

Con estos valores se puede expresar el momento cuadrupolar intrínseco en función del parámetro de deformación  $\beta_2$ :

$$Q_0 = 0.757Z[c(\beta_2)R_0]^2\beta_2(1 + 0.158\beta_2) . \quad (4.41)$$



#### 4.2.1 El término de espín-órbita

El término de espín-órbita para potenciales centrales descrito en la sección ?? no es ya aplicable por la ruptura de simetría esférica en el potencial medio. Se usa, por tanto, una forma más general:

$$V_{ls} = \left( \frac{\hbar}{2m^2c^2} \right) \times \left[ \nabla \frac{U_{ls}}{1 + e^{\frac{R(\theta, \phi) - r}{a_{ls}}}} \right] (\vec{s} \times \vec{p}) , \quad (4.42)$$

donde  $\vec{p}$  es el operador de momento lineal. Con simetría esférica este término se reduce al visto en el caso esférico.

#### 4.2.2 Potencial de Coulomb

Para protones es necesario incluir un término coulombiano debido a la interacción eléctrica con el resto de protones. El potencial que siente un protón en el núcleo se puede aproximar al creado por un volumen con superficie definida por ?? con una carga de  $(Z - 1)e$  distribuida homogéneamente en su interior. Este potencial en coordenadas cilíndricas  $(z, \rho, \phi)$  fue determinado en [?].

$$V_c(z, \rho) = \rho_e \int_{z_1}^{z_2} dz' [(\rho_s^2(z) - \rho^2 - (z' - z)^2 - (z' - z)\partial_{z'}\rho_s^2(z)) F(a, b) + E(a, b)] , \quad (4.43)$$

donde  $\rho_s(z)$  denota el valor de la coordenada  $\rho$  en la superficie nuclear y  $\rho_e = \frac{(Z-1)e}{V_{nuclear}}$  es la densidad de carga homogénea que genera el potencial. Y:

$$F(a, b) = a^{-1} \int_0^{\pi/2} d\phi \left[ 1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2(\phi) \right]^{-\frac{1}{2}} , \quad (4.44)$$

$$E(a, b) = a \int_0^{\pi/2} d\phi \left[ 1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2(\phi) \right]^{\frac{1}{2}} , \quad (4.45)$$

con  $a^2 = (z - z')^2 + (\rho + \rho')^2$  y  $b^2 = (z + z')^2 + (\rho - \rho')^2$ .

#### 4.2.3 Niveles de energía

El hamiltoniano total de partícula individual del sistema nuclear deformado es:

$$h = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{WS,def} + V_{ls} + V_c . \quad (4.46)$$

Debido a la simetría axial conmuta con  $j_z$  con lo que  $m$  es un buen número cuántico, además presenta degeneración en los estados con  $\pm m$  con lo cual se usará  $\Omega \equiv |m|$  para etiquetar a los estados. En caso de que  $\beta_\lambda = 0$  con  $\lambda$  impar también conmuta con el operador paridad aunque en general no lo hace.

Con lo cual los observables compatibles con el hamiltoniano  $h$  son la tercera componente de momento angular total y en algunos casos, la paridad. Con solo estos 2 observables no se tiene un conjunto completo de observables compatibles que especifiquen

completamente los estados del sistema lo cual complica la obtención de las autofunciones.

Es interesante recalcar aquí la diferencia que existe con el caso de deformación nula. Como se vio en la parte del modelo esférico, con deformación nula los niveles presentan una degeneración de  $2j + 1$  donde  $j$  es un buen número cuántico. Con deformación todos los niveles presentan una doble degeneración en  $\pm m$  indistintamente. Esto es, todos los niveles energéticos solo pueden ser ocupados por dos nucleones. Si un nivel está completo, es decir, ocupado por dos nucleones, la suma de su tercera componente de momento angular es cero ( $m - m = 0$ ). En caso, de que tengan paridad bien definida, la paridad de una subcapa completa es siempre positiva.

#### 4.2.4 Obtención de autovalores y autofunciones

Le ecuación de autovalores a resolver es:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{WS,def} + V_{ls} + V_c \right] \psi_\nu(\vec{r}) = \epsilon_\nu \psi_\nu(\vec{r}) , \quad (4.47)$$

donde  $\nu$  especifica un estado concreto. Se recuerda que los estados tienen  $m$  bien definido.

Esta no es una ecuación diferencial resoluble analíticamente así que se realiza un desarrollo de la autofunción  $\psi_\nu(\vec{r})$  en una base de oscilador armónico. Dada la simetría axial el desarrollo se ha llevado a cabo en las funciones descritas en la ecuación (??) que son las autofunciones del hamiltoniano del oscilador armónico anisótropo con simetría axial. Denotamos a esta función como  $Y(z, \rho, \phi, \sigma)$ :

$$Y(z, \rho, \phi, \sigma) = Z_{n_z}(z) R_{n_\rho m_l}(\rho) \Phi_{m_l}(\phi) \chi_{m_s}(\sigma) , \quad (4.48)$$

donde la forma de las autofunciones  $Z_{n_z}(z)$ ,  $R_{n_\rho m_l}$  y  $\Phi_{m_l}(\phi)$  fueron vistas en las ecuaciones ([??]) (con  $\xi = z$ ), (??) y (??) respectivamente.

La expansión de la autofunción  $\psi_\nu(\vec{r})$  en esta base es:

$$\psi_\nu = \sum_{n_z, n_\rho, m_l} a_\nu Z_{n_z}(z) R_{n_\rho m_l}(\rho) \Phi_{m_l}(\phi) \chi_{m_s}(\sigma) . \quad (4.49)$$

La sumatoria recorre implícitamente  $m_s$  ya que  $m_s = m - m_l$  donde  $m$  es un valor fijo del estado.

Denotando a  $\gamma$  el conjunto de números cuánticos  $(n_z, n_\rho, m_l, m_s)$  que identifica un estado de oscilador armónico y definiendo a  $M_{\gamma'\gamma}$  como el elemento de matriz del hamiltoniano  $h$  en esta base:

$$M_{\gamma'\gamma} = \langle n'_z n'_\rho m'_l m'_s | h | n_z n_\rho m_l m_s \rangle . \quad (4.50)$$

La diagonalización de la matriz  $M$  da las soluciones del problema:

$$h\psi_\nu = \epsilon_\nu \psi_\nu . \quad (4.51)$$

Se ha usado el programa en FORTRAN desarrollado por Cwiok y sus colaboradores [?] que halla los elementos de matriz  $M_{\alpha'\alpha}$  y lleva a cabo la diagonalización, hallando los

coeficientes  $a_\alpha^\nu$  así como los autovalores  $\epsilon_\nu$ . Para poder llevar a cabo los cálculos la sumatoria  $\sum_{n_z, n_\rho, m_l}$  debe ser finita aunque con un número de términos lo suficientemente alto para obtener buenos resultados, en este caso el desarrollo se hace sobre 15 elementos de base. Por supuesto, el desarrollo del radio nuclear en armónicos esféricos de la ecuación (??) también debe acotarse. El programa permite un desarrollo hasta  $\lambda = 6$ .

En la figura [??] se puede ver un ejemplo de los niveles energéticos que halla este modelo. En particular se muestra los niveles energéticos ocupados por protones en el estado fundamental del  $^{31}\text{Al}$  en función de  $\beta_2$  dejando el resto de parámetros en cero. El aluminio tiene 13 protones por lo que son 7 niveles de energía los que se encuentran ocupados, los 6 primeros por dos protones y el nivel de mayor energía por un solo protón. Los estados son etiquetados por sus valores constantes, esto es, el valor absoluto de  $m$  y por su paridad. En  $\beta = 0$  se etiquetan como usualmente con  $nlj$  y los niveles muestran la degeneración en  $2j + 1$  característica de las subcapas en simetría esférica.

Con este potencial los niveles energéticos varían según la deformación de una forma más suave que con el potencial de oscilador armónico anisótropo debido a que éste último tiene una dependencia con la deformación más fuerte.

En cuanto a las autofunciones desarrolladas en la base cilíndrica existe bastante variación en el reparto de pesos en los elementos de base según el estado en concreto y la deformación ajustada. En los núcleos que se han tratado en este trabajo se encuentran hasta 5 elementos con un peso notable. En cualquier caso el desarrollo en 15 estados de oscilador armónico es más que suficiente.

#### 4.2.5 Aplicación en la cadena isotópica del neón

En la cadena isotópica del neón se encuentran desde núcleos se encuentran núcleos con deformación variable. A continuación se realiza un cálculo de la energía del sistema en estado fundamental para diferentes valores del término de deformación predominante  $\beta_2$  manteniendo el resto en cero, se busca el valor de deformación que minimiza la energía  $\left. \frac{\partial E}{\partial \beta_2} \right|_{\beta_2 = \beta_{2min}} = 0$ . Una vez se ha encontrado el valor de deformación que minimiza la energía se hace una estimación del momento cuadrupolar eléctrico por medio de su definición clásica en la ecuación (??).

En la figura [??] se puede ver la energía total en función del parámetro de deformación  $\beta_2$  para uno de los núcleos estudiados, el  $^{21}\text{Ne}$ . Se encuentra que la energía se minimiza para  $\beta_2 \in [0.25, 0.3]$ .

En la tabla [3] se muestran todos los resultados obtenidos para algunos núcleos isótopos del neón. La deformación  $\beta_2$  se compara con el valor tabulado en [?] cuyos cálculos están en el modelo macroscópico de de gota líquida de rango finito y en el modelo de partícula independiente de Yukawa. Tomando este valor como referencia se halla el error relativo en porcentaje. También se muestran las estimaciones de momento cuadrupolar. Para esta cadena isotópica solo se tiene tabulado un valor experimental de momento cuadrupolar eléctrico en [?].

Los resultados muestran concordancia con la deformación en todos los casos menos en el  $^{24}\text{Ne}$ , si bien muestran que la deformación real es más alta. Se debe indicar que aquí se han tomado todos los parámetros de deformación nulos excepto  $\beta_2$ , sin embargo,

Núcleo	$\beta_2$	$\beta_{2,ref}$	$Q_0(eb)$	$Q_{0,exp}(eb)$
$^{19}\text{Ne}$	[0.15, 0.2]	0.269	[0.128, 0.173]	-
$^{20}\text{Ne}$	[0.2, 0.25]	0.364	[0.179, 0.224]	-
$^{21}\text{Ne}$	[0.25, 0.3]	0.372	[0.232, 0.279]	0.510
$^{22}\text{Ne}$	[0.25, 0.3]	0.384	[0.239, 0.288]	-
$^{23}\text{Ne}$	[0.2, 0.25]	0.316	[0.196, 0.246]	-
$^{24}\text{Ne}$	[0.1, 0.15]	-0.063	[0.099, 0.151]	-
$^{25}\text{Ne}$	[0.05, 0.1]	0.053	[0.102, 0.155]	-
$^{26}\text{Ne}$	[0.05, 0.1]	0.121	[0.105, 0.159]	-

Tabla 3: Deformación y momento cuadrupolar determinados para la cadena isotópica del neón. Estos valores de  $\beta_2$  minimizan la energía y con ellos se halla el momento cuadrupolar eléctrico.

el valor de  $\beta_4$  tiene peso en estos núcleos. El haberlo hecho aquí nulo es fuente de error para obtener valores correctos con respecto a  $\beta_2$ . Con respecto al  $^{24}\text{Ne}$  se debe indicar que según [?] no tiene un mínimo de energía acentuado en función de la deformación, existe un rango amplio en que el valor de energía total es muy parecido en torno al mínimo, en particular, en esta referencia se le adjudica una pequeña deformación positiva.

El momento cuadrupolar experimental del  $^{21}\text{Ne}$  es mucho mayor de la estimación hecha aquí. Para alcanzar ese valor el núcleo debería presentar una deformación de  $\beta_2 = 0.55$  según la estimación del momento cuadrupolar mostrada en la ecuación (??) lo cual es una deformación demasiado alta según el valor de referencia ( $\beta_2$ ). Este error es probablemente debido a la simple estimación del momento cuadrupolar hecha aquí. En cualquier caso, es necesaria una alta deformación para explicar el momento cuadrupolar experimental.

Los parámetros del potencial usados se muestran en la tabla [5].

#### 4.2.6 Aplicación en la cadena isotópica N=10

Se realiza un análisis análogo al anterior para la serie de isótonos N=10. Los resultados se pueden ver en la tabla [4]

Núcleo	$\beta_2$	$\beta_{2,ref}$	$Q_0(eb)$	$Q_{0,exp}(eb)$
$^{17}\text{N}$	[0.1, 0.15]	—	[0.056, 0.084]	-
$^{18}\text{O}$	[0.05, 0.01]	0	[0.033, 0.066]	-
$^{19}\text{F}$	[0.15, 0.2]	0.262	[0.116, 0.155]	-
$^{21}\text{Na}$	[0.2, 0.25]	0.372	[0.203, 0.255]	0.25
$^{22}\text{Mg}$	[0.2, 0.25]	0.384	[0.228, 0.287]	-
$^{23}\text{Al}$	[0.2, 0.25]	0.305	[0.255, 0.320]	-
$^{24}\text{Si}$	[0.15, 0.2]	0.226	[0.211, 0.282]	-

Tabla 4: Deformación y momento cuadrupolar determinados para la cadena isotónica N=10. Estos valores de  $\beta_2$  minimizan la energía y con ellos se halla el momento cuadrupolar eléctrico.

Al igual que con los isótopos del neón se encuentra concordancia con la deformación de referencia. En general, esta se muestra alta que los valores hallados aquí. Para todos

estos núcleos el valor de  $\beta_4$  tiene un peso notable que produce error a la hora de hallar valores precisos para los valores de  $\beta_2$ . Además de, por supuesto, los propios límites del modelo de capas.

El momento cuadrupolar eléctrico experimental del  $^{21}\text{Na}$  entra dentro del rango estimado aquí, aunque el valor de la deformación correspondiente no coincide con el valor de referencia  $\beta_2 = 0.372$ . En cualquier caso, es necesaria una notable deformación para explicar el momento cuadrupolar experimental.

Los parámetros del potencial usados se muestran en la tabla [5].

#### 4.2.7 Aplicación en núcleos con números mágicos o semimágicos

Es interesante exponer los resultados obtenidos al permitir deformación en núcleos con un número mágico o semimágico de ambos nucleones. Esto es, los núcleos con una simetría esférica demostrada. Se ha aplicado este modelo deformado a los núcleos estudiados en la sección del modelo esférico:  $^4\text{He}$ ,  $^{16}\text{O}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{48}\text{Ca}$ ,  $^{60}\text{Ca}$ ,  $^{56}\text{Ni}$ ,  $^{68}\text{Ni}$ ,  $^{78}\text{Ni}$ ,  $^{90}\text{Zr}$ ,  $^{132}\text{Sn}$  y  $^{208}\text{Pb}$ . Para estos núcleos se encuentra este mínimo de energía en  $\beta_2 = 0$ , lo que confirma la simetría esférica en este tipo de núcleos. Como por ejemplo se puede ver en el  $^{48}\text{Ca}$  en la figura [??].

Según aumenta la deformación aumenta la energía del sistema con lo que deformación en estos núcleos implica mayor inestabilidad. Por ello la forma de estos núcleos en su estado fundamental es con simetría esférica.

Núcleo	Nucleón	$V_0(MeV)$	$R_0(fm)$	$a(fm)$	$U_{ls}(MeV)$	$a_{ls}(fm)$
$^{19}Ne$	p	-55.20	3.36	0.55	-21.50	0.55
	n	-51.84	3.26	0.55	-22.1	0.55
$^{20}Ne$	p	-49.61	3.39	0.55	-21.52	0.55
	n	-49.61	3.39	0.55	-21.32	0.55
$^{21}Ne$	p	-51.63	3.45	0.55	-21.82	0.55
	n	-47.57	3.50	0.55	-21.41	0.55
$^{22}Ne$	p	-53.47	3.50	0.55	-21.82	0.55
	n	-45.72	3.53	0.55	-21.2	0.55
$^{23}Ne$	p	-55.16	3.55	0.55	-21.91	0.55
	n	-44.04	3.58	0.55	-21.02	0.55
$^{24}Ne$	p	-56.71	3.61	0.55	-22.34	0.55
	n	-42.49	3.66	0.55	-20.81	0.55
$^{25}Ne$	p	-58.13	3.65	0.55	-22.51	0.55
	n	-41.06	3.71	0.55	-20.73	0.55
$^{26}Ne$	p	-59.44	3.70	0.55	-22.54	0.55
	n	-39.75	3.80	0.55	-20.65	0.55
$^{17}N$	p	-57.13	3.21	0.55	-21.40	0.55
	n	-42.07	3.27	0.55	-19.86	0.55
$^{18}O$	p	-54.34	3.28	0.55	-20.93	0.55
	n	-44.86	3.30	0.55	-19.94	0.55
$^{19}F$	p	-51.85	3.34	0.55	-20.65	0.55
	n	-47.35	3.35	0.55	-20.54	0.55
$^{21}Na$	p	-47.56	3.45	0.55	-21.20	0.55
	n	-51.63	3.40	0.55	-21.53	0.55
$^{22}Mg$	p	-45.72	3.50	0.55	-20.98	0.55
	n	-53.47	3.42	0.55	-21.78	0.55
$^{23}Al$	p	-44.04	3.55	0.55	-20.56	0.55
	n	-55.16	3.50	0.56	-22.12	0.56
$^{24}Si$	p	-42.50	3.61	0.55	-20.26	0.55
	n	-56.71	3.55	0.56	-21.45	0.56

Tabla 5: Parámetros escogidos del potencial para los núcleos de estudio.



Figura 7: Niveles desde  $\delta = -1.25$  hasta  $\delta = 0.7$  en pasos de 0.01. Los estados vienen representados por  $|n_z n_\rho m_l\rangle$  donde se tiene en cuenta la degeneración en  $\pm m_l$  e implícitamente en  $\pm m_s$ . Los estados  $|010\rangle$  y  $|002\rangle$  se encuentran degenerados por lo que aparecen superpuestos.



Figura 8: Energía total en función del parámetro de deformación  $\delta$  tomada en pasos de 0.01 para el  $^{24}\text{Mg}$ .





A131.png

Figura 9: Niveles de energía en función del parámetro de deformación en el  $^{31}\text{Al}$ . Los niveles de energía se etiquetan con el valor de  $|m|$  y con su paridad (+ se denota a los estados con paridad positivo y con  $-$  a los de negativa). Los parámetros del potencial utilizados son:  $V_0 = -56.48$  MeV,  $R_0 = 3.93$  fm,  $a = 0.58$  fm,  $a_{ls} = 0.58$  fm y  $U_{ls} = 24$  MeV.



Figura 10: Energía total en función del parámetro  $\beta_2$  en el  $^{21}\text{Ne}$ .



Figura 11: Energía total en función del parámetro  $\beta_2$  en el  $^{48}\text{Ca}$ .

## 5 Conclusiones

Se ha estudiado el fundamento teórico del modelo de partícula independiente. En dicho modelo se considera que un nucleón se mueve dentro de un potencial medio que lo mantiene ligado al núcleo independientemente del resto de nucleones. En este caso los nucleones se encuentran en estados monoparticulares distribuidos en capas según su energía.

Se ha estudiado el modelo de partícula independiente asumiendo un potencial con simetría esférica. Se ha encontrado una distribución en subcapas según los números cuánticos  $n, l$  y  $j$ , presentándose en cada nivel una degeneración de  $2j + 1$ . Se ha aplicado el modelo por medio de un potencial Woods-Saxon con simetría esférica en núcleos con números mágicos o semimágicos donde se ha realizado un desarrollo de la parte radial de la autofunción en la parte radial de autofunciones radiales del oscilador armónico isótropo. Con ello se han estimado valores para los parámetros del potencial. Se ha hallado la densidad de protones y neutrones para los núcleos de estudio observándose sus variaciones según el tamaño de cada núcleo.

Posteriormente se ha roto la simetría esférica del potencial asumiendo principalmente simetría axial. Se ha estudiado el oscilador armónico anisótropo ofreciendo una primera imagen de como la deformación modifica los niveles de energía por medio de un parámetro de deformación. Los niveles deformados no son ya identificados por  $j$  y  $l$ , y la degeneración de los mismos cambia con respecto al caso esférico. En este punto se ha expuesto la posibilidad de que un núcleo presente su estado de mínima energía en una forma deformada. Finalmente se ha usado un potencial Woods-Saxon deformado con simetría axial y se ha desarrollado la autofunción del hamiltoniano en una base de oscilador armónico para hallar los niveles de energía monoparticular. Estos presentan una doble degeneración según los valores de  $\pm m$  indistintamente. Finalmente se ha buscado el mínimo absoluto de la energía total en función del parámetro de deformación en la cadena isotópica del neón y en la cadena isotónica de  $N=10$ . Esto nos ha servido para realizar una estimación de la deformación de estos núcleos en su estado fundamental. También se ha hecho lo mismo aplicado a núcleos con números mágicos, encontrándose en todos ellos el mínimo absoluto de la energía total con el parámetro de deformación nulo.

## Referencias

- [1] P. Ring y P. Schuck,  
*The Nuclear Many-Body Problem*,  
Springer-Verlag, 1980.
- [2] K.S. Krane,  
*Introductory Nuclear Physics*,  
John Wiley and Sons, 1988.
- [3] H. Margenau y G. M. Murphy,  
*The Mathematics of Physics and Chemistry*,  
D. Van Nostrand Company, 1956.
- [4] L. I. Schiff,  
*Quantum Mechanics*,  
McGraw-Hill, 1949.
- [5] J. M. Eisenberg y W. Greiner,  
*Nuclear Models*,  
North-Holland, 1975.
- [6] B. H. Bransden y C. J. Joachain,  
*Quantum Mechanics*,  
Pearson, 2000.
- [7] The NUBASE2016 evaluation of nuclear properties,  
<https://www-nds.iaea.org/amdc/ame2016/NUBASE2016.pdf>
- [8] S. G. Nilsson,  
*Binding states of individual nucleons in strongly deformed nuclei*,  
PhD Thesis, 1955.
- [9] Hartree-Fock-Bogoliubov results based on the Gogny force,  
<http://www-phynu.cea.fr>
- [10] D.L. Hill y J.A. Wheeler  
*Nuclear Constitution and the Interpretation of Fission Phenomena*,  
Phys. Rev. 89 (1953) 1102.
- [11] S. Cwiok, J. Dudek, W. Nazarewicz, J. Skalski y T. Werner,  
*Single-particle energies, wave functions, quadrupole moments and g-factors in an axially deformed Wood-Saxon potential*,  
Comput. Phy. Comun. 46 (1987) 379.
- [12] Nuclear ground-state masses and deformations,  
<https://t2.lanl.gov/nis/molleretal/publications/ADNDT-FRDM2012.pdf>
- [13] N. Stone,  
*Table of nuclear magnetic dipole and electric quadrupole moments*,  
At. Data and Nucl. Data Tables 90 (2005) 75.