

Sistema de Números Reales

MATEMÁTICAS

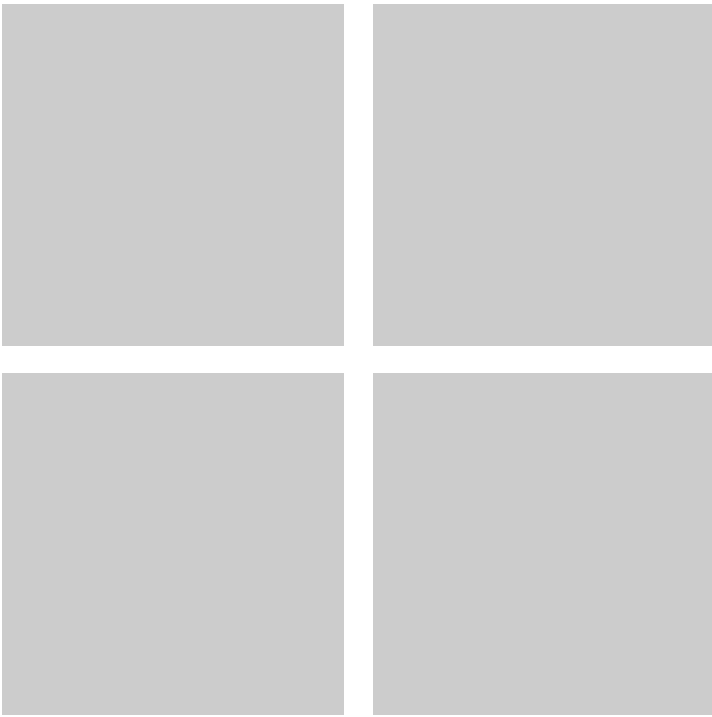
AUTOR: Nidia Jaimes

ÍNDICE

Sistema de números reales

- Índice
 - Introducción
 - Recomendaciones académicas
 - Desarrollo de cada una de las unidades temáticas.
-
1. Construcción de los números reales.
 - 1.1. Ejercicio 1
 2. Ubicación de reales en la recta numérica.
 - 2.1. Ejercicio 2.
 - 2.2. Taller 1.
 3. Operaciones entre números reales.
 - 3.1. Propiedades de las operaciones
 - 3.2. Ejercicio 3
 4. Síntesis.
- Referencias
 - Lista de figuras

Acceso rápido



Este material pertenece al Politécnico Grancolombiano y a la Red Ilumno. Por ende, son de uso exclusivo de las Instituciones adscritas a la Red Ilumno. Prohibida su reproducción total o parcial.

INTRODUCCIÓN

Usualmente nos encontramos con preguntas como ¿cuántos hay?, o, ¿cuánto mide?... La respuesta a estos interrogantes con certeza es un número que en muchas ocasiones requiere de procedimientos matemáticos para encontrarlo.

Históricamente, los primeros números empleados fueron los naturales, estos surgieron de la necesidad de contar; diferentes culturas empleaban sus propios instrumentos para registrar unidades, decenas, centenas, etcétera. La acción de medir, conllevó luego a comparar magnitudes (magnitudes conmensurables), dando así origen a los números racionales positivos; las magnitudes inconmensurables halladas por los pitagóricos dieron origen a los números irracionales, después se establecieron los números negativos, empleados por los hindúes para representar deudas; y los números imaginarios aparecieron de la necesidad de encontrar soluciones a las ecuaciones algebraicas.

RECOMENDACIONES ACADÉMICAS

Para entender de manera correcta los contenidos y desarrollar las competencias de esta unidad se sugiere seguir las siguientes recomendaciones:

- Lea el contenido de esta cartilla de manera pausada, si llega a un ejemplo que no entiende, no lo rechace, tome el tiempo de escribirlo y de revisar el proceso planteado.
- Visualice los videos tantas veces como crea necesario. Pause y resuelva las situaciones o ejercicios planteados primero por cuenta propia, luego compare su respuesta con el desarrollo trabajado en el video.
- Mantenga una comunicación continua con el tutor, entre a los espacios que se brindan para asesorías por elluminate. Recuerde que virtualmente se puede comunicar con su tutor en cualquier momento mediante el correo, foro y en horarios específicos en las asesorías de elluminate y el chat.
- Realice los ejercicios propuestos; no es obligatorio realizarlos todos, pero debe practicar hasta que sienta que está preparado y tenga un dominio de la situación y el contexto. Puede contrastar sus respuestas con los solucionarios.
- No interrumpa una actividad o reflexión iniciada, dedique el tiempo necesario para terminarla. Si lo desea puede parar el desarrollo de la unidad al finalizar una actividad y retomarla después.
- Tome apuntes de las observaciones importantes, le ayudarán más adelante.

DESARROLLO DE CADA UNA DE LAS UNIDADES TEMÁTICAS.

1. Construcción de los números reales.

Esta es una representación gráfica del conjunto de los números reales, los subconjuntos que lo constituyen y las relaciones entre ellos.

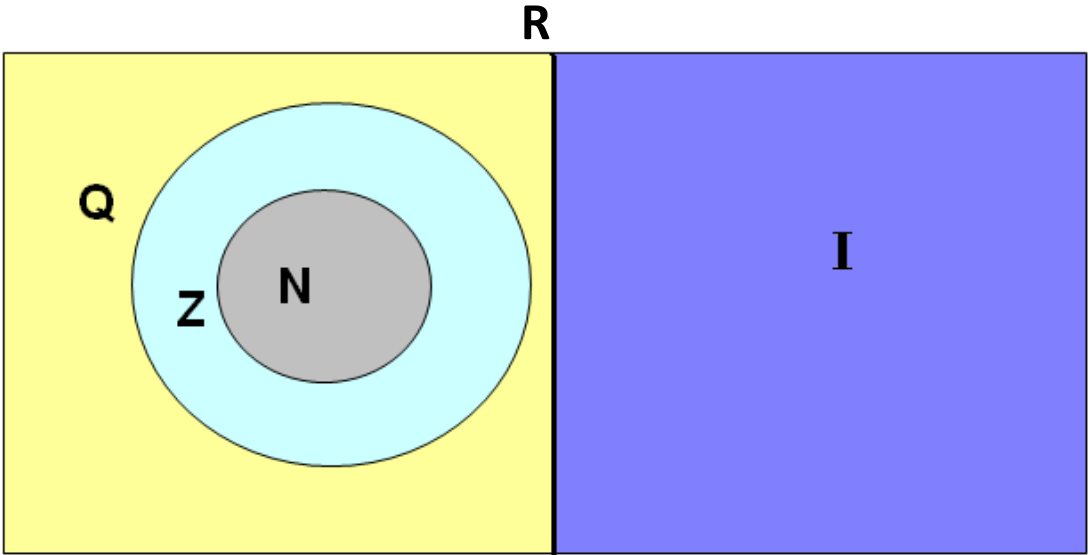


Figura 1: Conjunto de los números reales y diferentes conjuntos numéricos

• Conjunto de los números naturales:

• $N = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

• Conjunto de los números enteros:

• $Z = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

Observe que este conjunto contiene al conjunto de los números naturales agregando los opuestos respectivos. Es decir si 1, 2, 3, 4,... son enteros, sus opuestos -1, -2, -3, -4,... también lo son (el opuesto del cero es el mismo cero).

- **Conjunto de los números racionales**

Los números racionales se caracterizan porque se pueden expresar como fraccionarios con numerador y denominador enteros, con la condición de que el denominador debe ser diferente de cero.

Son ejemplos de racionales $\frac{-3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{4}{1}, \frac{0}{17}$ donde sus numeradores son respectivamente -3, 1, 4, y 0 mientras que los denominadores son 4, 2, 1 y 17 respectivamente.

Los números racionales también se pueden representar en forma decimal infinita periódica.

Ejemplos:

- $\frac{3}{4} = 0.75 = 0.750000...$ Es un decimal infinito periódico de periodicidad cero.
- $\frac{5}{6} = 0.833333...$ Es un decimal infinito periódico. En este caso se nota el decimal así: $0.833333... = 0.8\bar{3}$

En este conjunto no se pueden listar sus elementos en forma consecutiva como se hizo con los conjuntos anteriores, puesto que entre dos números racionales siempre se encuentran infinitos racionales (esta propiedad no la tienen los anteriores conjuntos numéricos).

Se define entonces al conjunto de los números racionales así:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Observe que este conjunto contiene tanto el conjunto de los números naturales como el conjunto de los números enteros.

- **Conjunto de los números irracionales: I**

Este conjunto contiene elementos numéricos que se expresan como decimales infinitos no periódicos.

Ejemplos:

- $\sqrt{2} = 1.41421356...$ Es decimal infinito, pero no periódico (ninguna serie de números se repite con frecuencia).
- $\pi = 3.1415926...$
- $e = 2.71828...$

De acuerdo con las anteriores definiciones, podemos afirmar que **no** existe un real que sea racional e irracional a la vez; es decir los conjuntos numéricos racionales e irracionales **no** tienen elementos en común, por lo tanto se dice que son conjuntos disjuntos.

- **Conjunto de los números reales: R**

Este conjunto es la unión de los conjuntos anteriores, es decir

$$R = Q \cup I$$

Figura 2: Conjunto de los números reales

Ejemplos:

- 115 es un natural por lo tanto es un número real.
- -6 es un número entero que **no** es natural.
- $\frac{7}{9}$ es un racional que **no** es entero.
- 25 es un entero por lo tanto también es racional.
- $\sqrt{5} = 2.236067...$ es un número irracional por lo tanto no es racional.

1.1. Ejercicio 1

- 1) Escriba un número racional no entero.
- 2) Escriba un número entero que no sea natural.
- 3) ¿Es posible encontrar un número racional e irracional a la vez? Explique.
- 4) ¿Todo natural es entero? Explique.
- 5) ¿Todo racional es entero? Explique.
- 6) Dado el conjunto A de números reales

$$A = \left\{ -0.7, \sqrt{5}, \sqrt{20}, 0, -0.3666\dots, \frac{50}{4}, 42, -\sqrt{25}, -2 \right\}$$

Completar:

- a. Los naturales que pertenecen al conjunto A son: _____
- b. Los enteros que pertenecen al conjunto A son: _____
- c. Los racionales que pertenecen al conjunto A son: _____
- d. Los irracionales que pertenecen al conjunto A son: _____

2. Ubicación de reales en la recta numérica

Se empleará la **aproximación** para ubicar un real en la recta numérica.

Ejemplo 1. Ubicar en la recta real $\frac{3}{5}$

Como $\frac{3}{5} = 0.6$ a partir de un punto de referencia al que asociamos el número 0, se ubica una unidad de trabajo. Como en este caso el real está entre los enteros 0 y 1, se divide este segmento en 10 partes iguales y se consideran 6. (Ver gráfica)

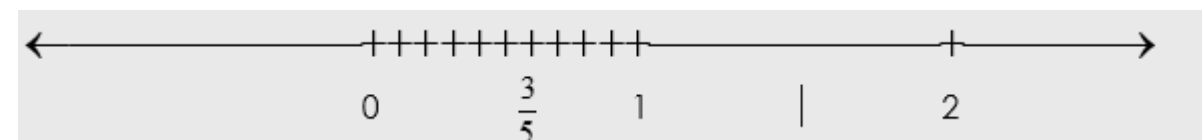


Figura 3: Solución gráfica ejemplo 1.

Ejemplo 2. Ubicar $-\frac{10}{3}$ en la recta real.

Como $-\frac{10}{3} = -3.3333\dots$, se puede aproximar a -3.3. Este es un real que está entre los enteros -4 y -3. Por lo tanto, este segmento se divide en 10 partes, de las cuales se consideran 3. (Ver gráfica)

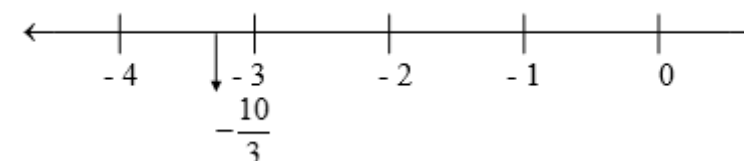


Figura 4: Solución gráfica ejemplo 2.

Ejemplo 3. Ubicar $\sqrt{1.2}$ en la recta real.

$$\sqrt{1.2} = 1.095445\dots \approx 1.1$$

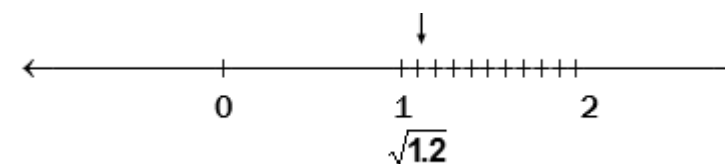


Figura 5: Solución gráfica ejemplo 3.

2.1. Ejercicio 2.

Ubicar los siguientes reales en la recta numérica (utilizar aproximación a una cifra decimal).

- | | | |
|--------------------|--------------------|-------------------|
| a. 1.39 | c. $\frac{50}{13}$ | e. $-\frac{4}{7}$ |
| b. $\sqrt[5]{-30}$ | d. -7.06 | f. 4.67 |

2.2. Taller 1.

- 1) Dado el conjunto $B = \left\{ -1.7555\dots, \frac{\sqrt[3]{8}}{2}, \sqrt[3]{2}, -1234, -2.807, 401, 1, \frac{-32}{31} \right\}$
- Determinar qué elementos del conjunto B son naturales, enteros, racionales o irracionales.
 - Ubicar cada uno de los elementos del conjunto B en la recta numérica.
- 2) Para cada situación, muestre dos ejemplos (si existen) de números que cumplan las condiciones dadas. Explique su respuesta.
- Racionales en forma decimal periódica.
 - Racionales que no sean naturales, ni enteros.
 - Naturales mayores que 6 y menores que 11.
 - Racionales entre $\frac{3}{2}$ y $\frac{5}{2}$.
- 3) Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.
- Todo entero es racional.
 - Algún natural **no** es entero.
 - Todo irracional es real.
 - Algunos racionales **no** son reales.

3. Operaciones entre números reales

Dado el conjunto de números reales, existen dos operaciones llamadas adición y multiplicación, tales que, para cada par de números reales a y b, la adición **a + b** y el producto **a · b** son números reales.

Ejemplo:

Al multiplicar los reales $\sqrt[4]{5}$ y 2 el resultado es un único real, así:

$$\sqrt[4]{5} \cdot 2 \approx 2.99 \text{ (Verificar en la calculadora).}$$

También al sumar dos números reales, el resultado es un único real.

Veamos:

$$\frac{4}{5} + 2 = \frac{14}{5} \text{ (Verificar)}$$

Nota. Los símbolos empleados para la adición son: +, Σ

y para la multiplicación se emplean: x, (), \bullet , \cdot , \ast , Π (cuando no aparece ningún símbolo se asume que es multiplicación).

3.1. Propiedades de las operaciones.

Las operaciones definidas en el conjunto de los números reales, satisfacen las siguientes propiedades:

Para **a, b, c** $\in \mathbf{R}$; se cumple

1) propiedad conmutativa

$$a + b = b + a \quad y \quad a \cdot b = b \cdot a$$

2) propiedad asociativa

$$a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c, \quad y,$$

$$a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Ejemplo: Operar $3.5 + 4 + (-1) + (-7.5)$

$3.5 + 4 + (-1) + (-7.5)$, aplicando la propiedad asociativa:

$$= (3.5 + 4) + ((-1) + (-7.5))$$

$$= 7.5 + (-8.5)$$

$$= -1$$

3) propiedad modulativa

Para todo real a se cumple: $a + 0 = 0 + a = a$, y , $1 \cdot a = a$

4) propiedad distributiva

$ab + ac = a(b + c)$. También $ba + ca = (b + c)a$

Si observa la expresión de la parte izquierda de alguna de estas igualdades, se puede dar cuenta de que hay dos términos o sumandos, mientras que en la parte derecha hay dos factores, es decir, la expresión está **factorizada**.

Ejemplos:

1. Utilizando la propiedad distributiva, factorizar la expresión:
 $mn + mbc + m$

- **Solución:** Como se puede dar cuenta m es un factor común a los tres términos de la suma. Luego,

- $mn + mbc + m = m(n + bc + 1)$

2. Comprobar la igualdad $r + r + r + r = 4r$

- **Solución:**

$r + r + r + r$ Utilizando la propiedad distributiva:

$$= r(1 + 1 + 1 + 1)$$

$$= r \times 4 \quad \text{Utilizando la propiedad conmutativa:}$$

$$= 4r$$

5) propiedad invertiva

- a. Para todo $a \in R$, existe $-a$ llamado **opuesto** de a , o **inverso aditivo** de a , tal que: $a + (-a) = 0$

- **Nota:** $a + (-a)$ se escribe en forma equivalente como: $a - a$

- **Ejemplo:** El opuesto del real -4.56 es 4.56 porque $-4.56 + 4.56 = 0$

- b. Para todo $a \in R$, $a \neq 0$, existe un único número real llamado **recíproco** o **inverso multiplicativo**, notado por a^{-1} o $\frac{1}{a}$ tal que: $a \cdot a^{-1} = 1$.

- **Ejemplo 1:** El recíproco de $-\frac{3}{7}$ es, $-\frac{7}{3}$ porque $\left(-\frac{3}{7}\right)\left(-\frac{7}{3}\right) = 1$

- **Ejemplo 2:** El recíproco de $x + 1$ es $\frac{1}{x+1}$, $x \neq -1$, ¿por qué?

Aplicando las propiedades de números reales, se verifican las siguientes igualdades

- 1) $-(-a) = a$
- 2) $-(a + b) = (-a) + (-b) = -a - b$
- 3) $-(a - b) = b - a$
- 4) $(-a)b = -ab = a(-b)$
- 5) $(-a)(-b) = ab$

Si a y b son reales diferentes de cero:

$$6) \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

$$7) (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$$

$$8) a \div b = ab^{-1}$$

$$9) (a^{-1})^{-1} = a$$

Figura 6: Propiedades de los números reales.

Ejemplos:

Utilizando las propiedades de las operaciones y las anteriores igualdades, reducir las siguientes expresiones:

$$1) (-4)(-5) + 8 - \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}(2)$$

$$2) 12 - 3\{4 - 1 + 2(4)3 - 10\} - 2(-3)$$

$$3) (2-x)(3+y) + 4y - 5y(2-6)$$

Desarrollo

1) La expresión $(-4)(-5) + 8 - \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}(2)$ tiene 3 términos o sumandos que son:

$$(-4)(-5), 8, \text{ y } \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}(2)$$

Aplicando las propiedades en cada uno de estos términos se tiene:

$$(-4)(-5) + 8 - \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}(2)$$

$= 20 + 8 - (5)(2)$, para reducir el primer término se empleó la igualdad 5, mientras que en el tercer término se empleó la igualdad 6.

$$= 20 + 8 - 10, \text{ propiedad asociativa en el tercer término}$$

$$= (20 + 8) - 10, \text{ propiedad asociativa de la adición}$$

$$= 28 - 10$$

$$= 18$$

$$\text{Por tanto: } (-4)(-5) + 8 - \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}(2) = 18$$

Seguramente, usted encontrará otro camino para reducir la expresión, en tal caso, es importante revisar qué propiedad ha sido aplicada, de esta manera el procedimiento quedará justificado y la respuesta debe ser la misma.

$$2) 12 - 3\{4 - 1 + 2(4)3 - 10\} - 2(-3)$$

Los términos principales de la expresión dada son: $12, 3\{4 - 1 + 2(4)3 - 10\}, \text{ y } 2(-3)$.

Por lo tanto, al aplicar las propiedades mencionadas, tenemos:

$$12 - 3\{4 - 1 + 2(4)3 - 10\} - 2(-3)$$

$$= 12 - 3\{3 + 8(3) - 10\} - 2(-3)$$

$$= 12 - 3\{3 + 24 - 10\} + 6$$

$$= 12 - 3\{(3 + 24) - 10\} + 6$$

$$= 12 - 3\{27 - 10\} + 6$$

$$= 12 - 3\{17\} + 6$$

$$= 12 - 51 + 6$$

$$= (12 - 51) + 6$$

$$= -39 + 6$$

$$= -33$$

$$3) (2-x)(3+y) + 4y - 5y(2-6)$$

$$= 2*3 + 2y - 3x - xy + 4y - 10y + 30y, \text{ se aplicó la propiedad distributiva en el primer y tercer término.}$$

$$= 6 + (2y + 4y - 10y + 30y) - 3x - xy, \text{ propiedad asociativa}$$

$$= 6 + (2 + 4 - 10 + 30)y - 3x - xy, \text{ propiedad asociativa}$$

$$= 6 + (6 + 20)y - 3x - xy, \text{ Propiedad asociativa}$$

$$= 6 + 26y - 3x - xy$$

3.2. Ejercicio 3.

Simplificar cada expresión utilizando las propiedades de las operaciones.

$$1) 3 - \{-5 + 5(2 + 3) - 2\}5 + 1$$

$$2) 20 - 7(3 + 4) - 1.5 + 0.5$$

$$3) 100 + 50(3 - -7))2 - 1$$

Utilizando las propiedades de los números reales, reducir:

$$\text{a) } -(2x + 3y) - (-2z - 8x + y) \quad \text{b) } \{-(m + 2n + p)\} + \{(m + n + p)\}$$

$$\begin{array}{ll} \text{c) } 7 - 4(m + 3) + (m - 5)2 + 8 & \text{d) } -(-(-5x)) + (-(-x + y)) \\ \text{e) } \{-(8x + 3y - 1)\} - \{(-7x + 3)5\} & \text{f) } m + 8(m + 5)2 - 3 + 4.5m \\ \text{g) } 21 - 9(-d + 3) - (5 - 4d)2 - 3 & \text{h) } -2\{-(x - y) - 3(x + y)\} - x + y \\ \text{i) } (a - b)2 - (a + 2b)(a + 3b) & \text{j) } 5(x - y)(x + 2y) - (x - y)(x + y) + (2x - 3y)2 \end{array}$$

4. Síntesis

Los conjuntos numéricos que conforman el de los números reales, son el conjunto de los números naturales, el de los números enteros, el de los números racionales y el conjunto de los números irracionales. El conjunto de los números naturales está contenido en el de los números enteros y este a su vez está contenido en el de los números racionales. Vale la pena anotar que el conjunto de los racionales y el conjunto de los irracionales son disjuntos, es decir, no tienen elementos en común, pero la unión de estos conforma el conjunto de los números reales.

Cuando se adicionan expresiones reales, se deben tener en cuenta las propiedades de la adición, teniendo el cuidado de que sólo se pueden adicionar términos semejantes, es decir, aquellos que sólo difieren en su coeficiente numérico.

REFERENCIAS

- **Lista de figuras**

Figura 1. Conjunto de los números reales y diferentes conjuntos numéricos.

Figura 2. Conjunto de los números reales.

Figura 3. Solución gráfica ejemplo 1.

Figura 4. Solución gráfica ejemplo 2.

Figura 5. Solución gráfica ejemplo 3.

Figura 6. Propiedades de los números reales.



INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
**POLITÉCNICO
GRANCOLOMBIANO**