1.7

Modelo da dinâmica da população da espécie *Folsomi candida* (tipo de inseto) é

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & F(N) & F(N) \\ S(N) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S(N) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S(N) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix}$$

$x_i(k)$ = população da i-ésima faixa etária do instrante k.
Tempo entre amostras é de 1 semana
$F(N)$ = Função da Fertilidade da espécie
$S(N)$ = Função da Sobrevivência da espécie

$$F(N) = 18{,}53\ \ln N - 1{,}74\,(\ln N)^2 - 44{,}04$$
$$S(N) = 1{,}35 - 0{,}14\ \ln N$$

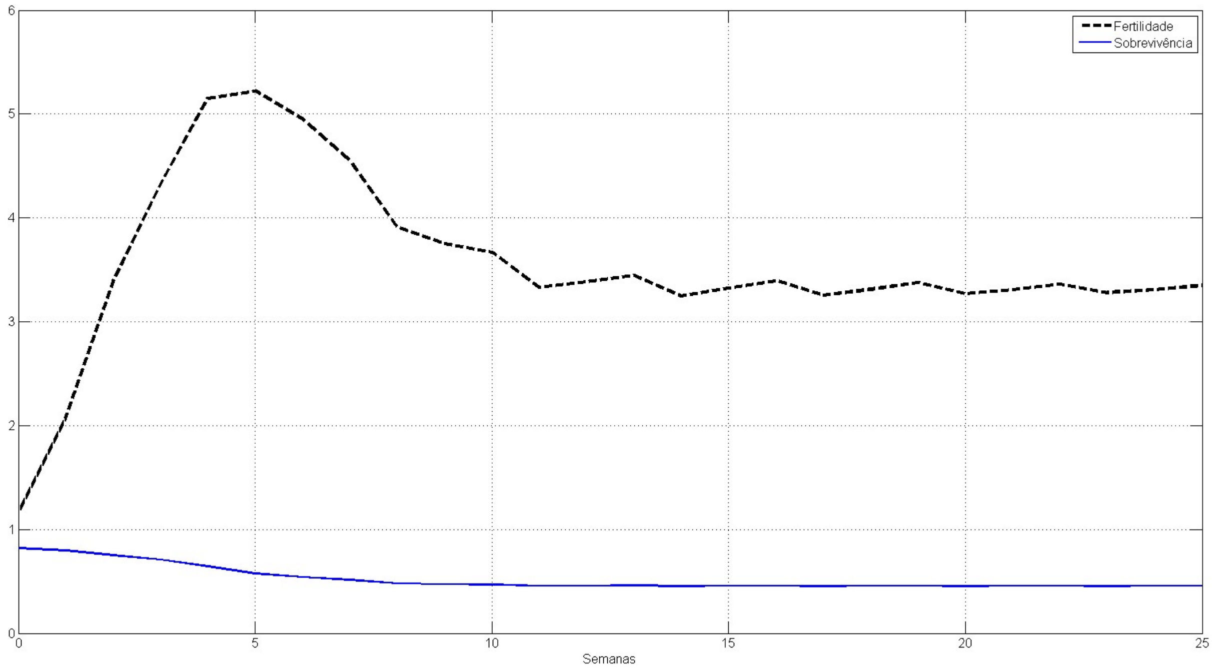
N= população total = $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

Iniciando o modelo de forma a ter N>42 e simule o modelo por tempo correspondente a 25 semanas.

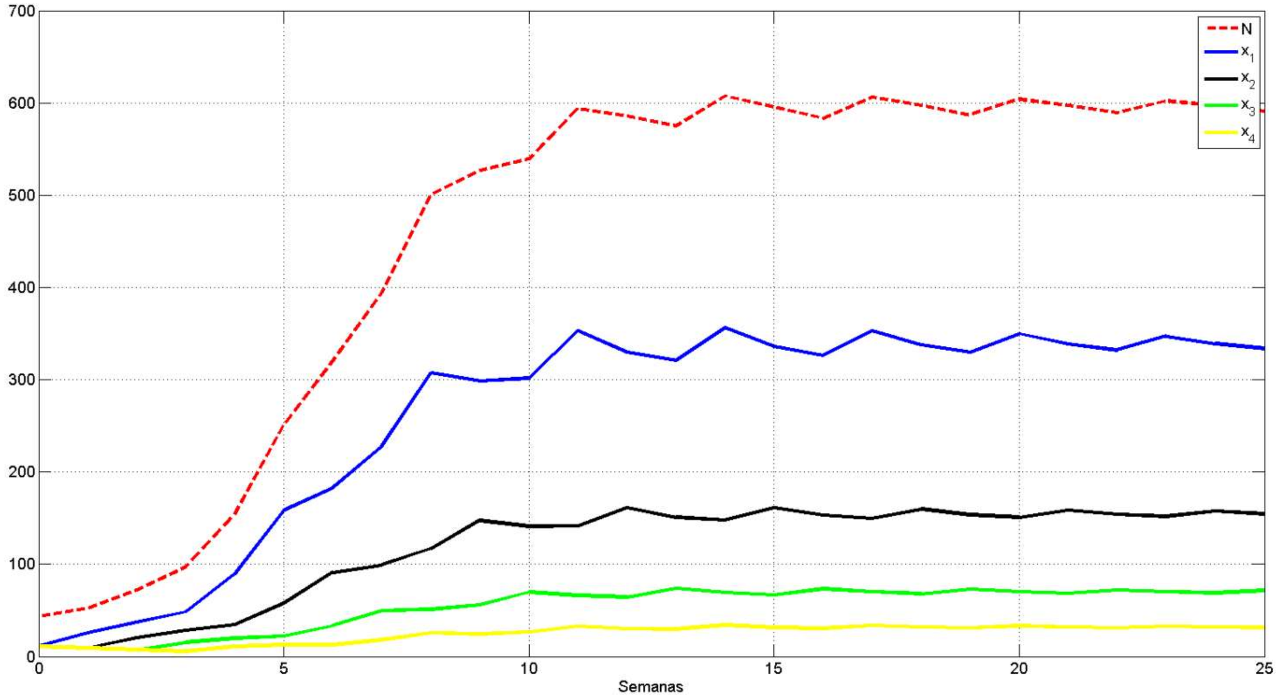
Utilizando os seguintes parâmetros de inicio temos:

Tabela de Parâmetros

Faixa Etária	Total
$x_1(0)$	11
$x_2(0)$	11
$x_3(0)$	11
$x_4(0)$	11



Fertilidade e Sobrevivência da População N



População por Faixa Etária

A Simulação foi realizada através do código no Matlab abaixo:

```
clear all;
close all;
clc;

%Definindo os vetores
%Tempo até 25 semanas
k=1:1:25;
%As populações x1,x2,x3,x4, N e as Funções F(N) e S(N) zeradas
x1=zeros(1,length(k)+1);
x2=zeros(1,length(k)+1);
x3=zeros(1,length(k)+1);
x4=zeros(1,length(k)+1);
N=zeros(1,length(k)+1);
F_N=zeros(1,length(k)+1);
S_N=zeros(1,length(k)+1);

%Definindo o tempo do experimento
tempo=0:length(k);

%Valores iniciais
x1(1)=11;
x2(1)=11;
x3(1)=11;
x4(1)=11;

i=1;
while i<=length(k)+1
    %Simulação do tempo 0 a 24 semanas
    if(i<length(k)+1)
        %Calculo das Funções
        N(i)=x1(i)+x2(i)+x3(i)+x4(i);
        F_N(i)=18.53*log(N(i))-1.74*(log(N(i)))^2-44.04;
        S_N(i)=1.35-0.14*log(N(i));

        %Fazendo as Matrizes X_mais_1 = A * X
        A = [0 0 F_N(i) F_N(i);S_N(i) 0 0 0;0 S_N(i) 0 0; 0 0 S_N(i)
0];
        X = [x1(i);x2(i);x3(i);x4(i)];
        Xmais1 = A*X;

        %Recebendo os valores da proxima semana
        x1(i+1)= Xmais1(1);
        x2(i+1)= Xmais1(2);
        x3(i+1)= Xmais1(3);
        x4(i+1)= Xmais1(4);

    else
        %Simulação do tempo 25 semanas
        %Calculo das Funções
        N(i)=x1(i)+x2(i)+x3(i)+x4(i);
        F_N(i)=18.53*log(N(i))-1.74*(log(N(i)))^2-44.04;
        S_N(i)=1.35-0.14*log(N(i));

    end
    i=i+1;
end
```

```
figure()
title('Fertilidade e Sobrevivência');
plot(tempo,F_N,'--k','linewidth',3);
hold on;
plot(tempo,S_N,'b','linewidth',2);
xlabel('Semanas');
legend('Fertilidade','Sobrevivência');
hold off;
grid on;
fig=gcf;
set(findall(fig,'-property','FontSize'),'FontSize',12);

figure()
title('População Total e Faixa Etária');
plot(tempo,N,'--r','linewidth',3);
hold on;
plot(tempo,x1,'b','linewidth',3);
hold on;
plot(tempo,x2,'k','linewidth',3);
hold on;
plot(tempo,x3,'g','linewidth',3);
hold on;
plot(tempo,x4,'y','linewidth',3);
xlabel('Semanas');
legend('N','x_1','x_2','x_3','x_4');
hold off;
grid on;
fig=gcf;
set(findall(fig,'-property','FontSize'),'FontSize',14);
```

1.8
Modelo matemático normalizado da dinâmica de uma cadeia alimentar

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1-x) - \dfrac{xy}{x+a} \\ \dot{y} = -by + \dfrac{cxy}{x+d} - \dfrac{yz}{y+e} \\ \dot{z} = fz^2 - \dfrac{gz^2}{y+h} \end{cases}$$

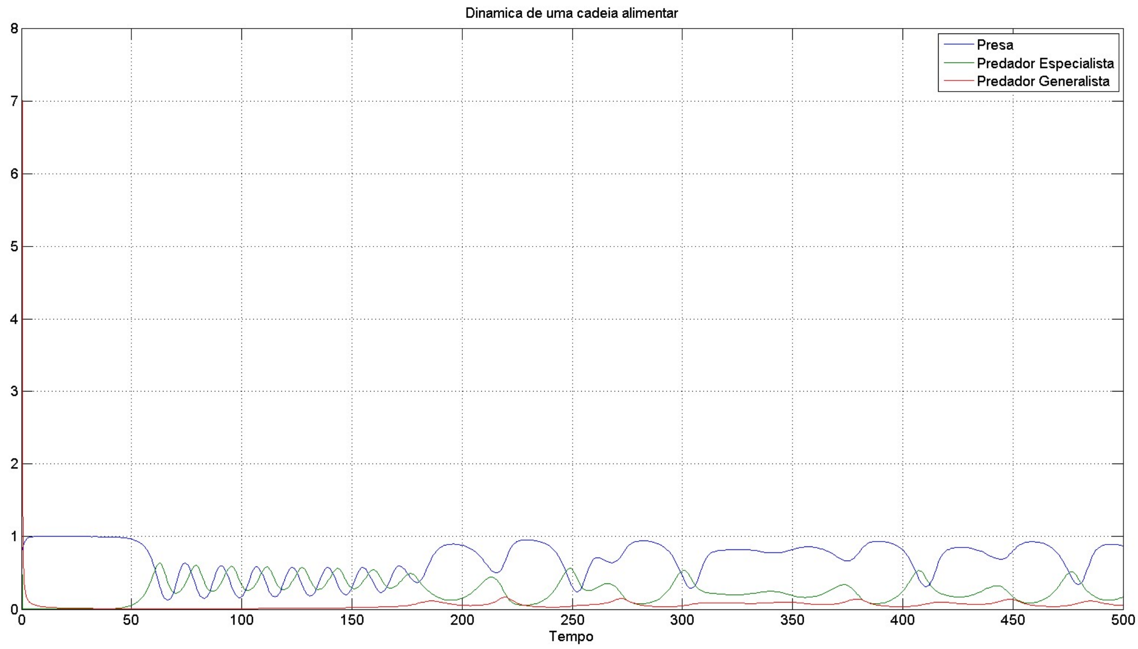
x=densidade normalizada da presa ao fim da cadeia alimentar
y=densidade normalizada do predador especialista (que somente se alimenta da presa)
z=densidade normalizada do predador generalista (que tanto se alimenta da presa quando do predador especialista)

Os valores dos parâmetros para esse modelo são:

Parâmetros	Valor
a	0,311
b	0,518
c	1,036
d	0,311
e	0,161
f	4,599
g	2,469
h	0,322

Classificação
Modelo Dinâmico, Contínuo, Autônomo, Multivariável, Determinístico, Paramétrico

Utilizando como condição inicial $x(0) = y(0) = z(0) = 1$, temos:



Modelo de um trecho de dados correspondentes à observação da evolução da densidade de presas do modelo anterior

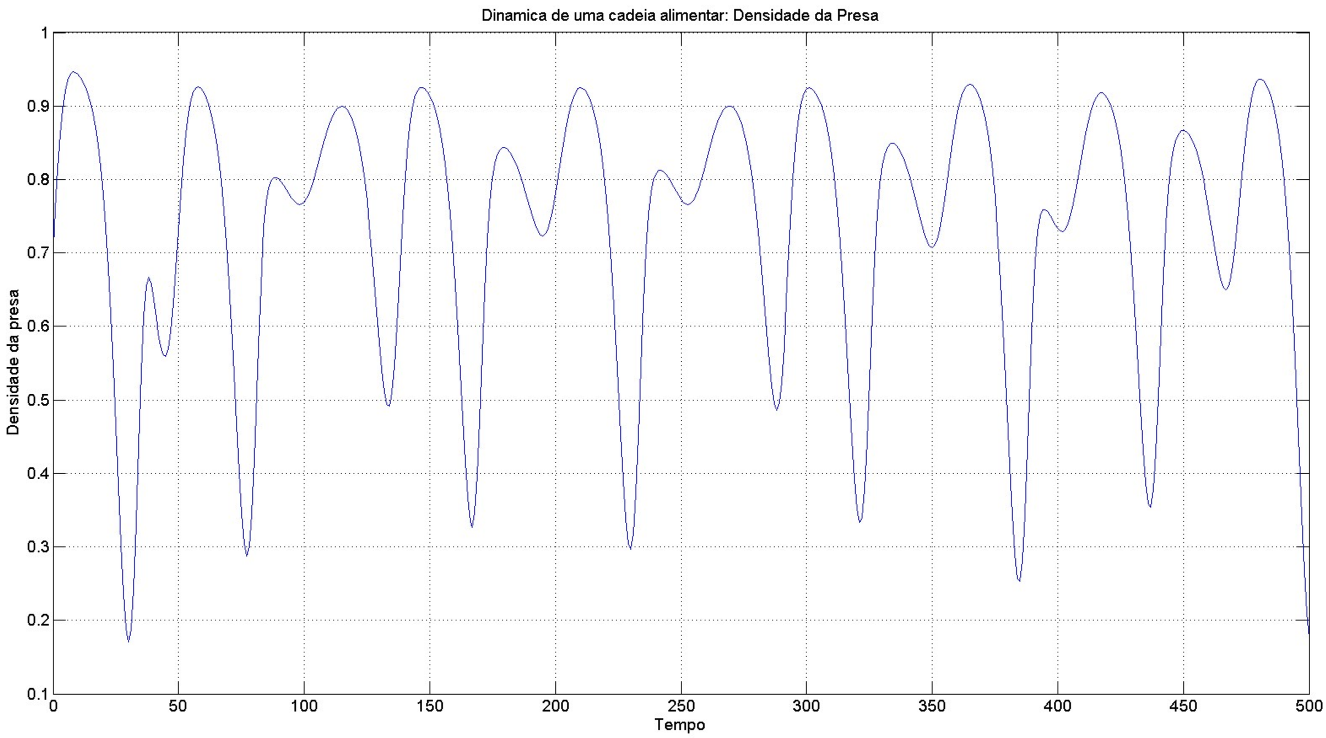
$$
\begin{aligned}
x = {} & 3{,}38040\, x(k-1) - 4{,}30812\, x(k-2) + 2{,}56162\, x(k-3) - 1{,}06161\, x(k-4) \\
& - 1{,}21955\, x^2(k-5) + 2{,}56978\, x(k-1)\, x(k-5)\, x(k-6) \\
& - 3{,}26196\, x(k-3)\, x(k-4)\, x(k-6) + 0{,}48632\, x(k-5) \\
& + 2{,}53047\, x^2(k-4)\, x(k-5) + 0{,}80920\, x(k-4)\, x(k-7) - 4{,}55223 \\
& \times 10^3\, x^2(k-1)\, x(k-8) + 1{,}47483\, x(k-3)\, x(k-6) \\
& - 0{,}23716\, x^2(k-5)\, x(k-6) - 0{,}74444\, x(k-1)\, x(k-7) \\
& - 0{,}45312\ \, x^2(k-6) + 0{,}50283\ \, x^2(k-2)\, x(k-3) \\
& - 2{,}02429\, x(k-1)\, x(k-4)\, x(k-5)
\end{aligned}
$$

Os valores dos parâmetros para esse modelo são:

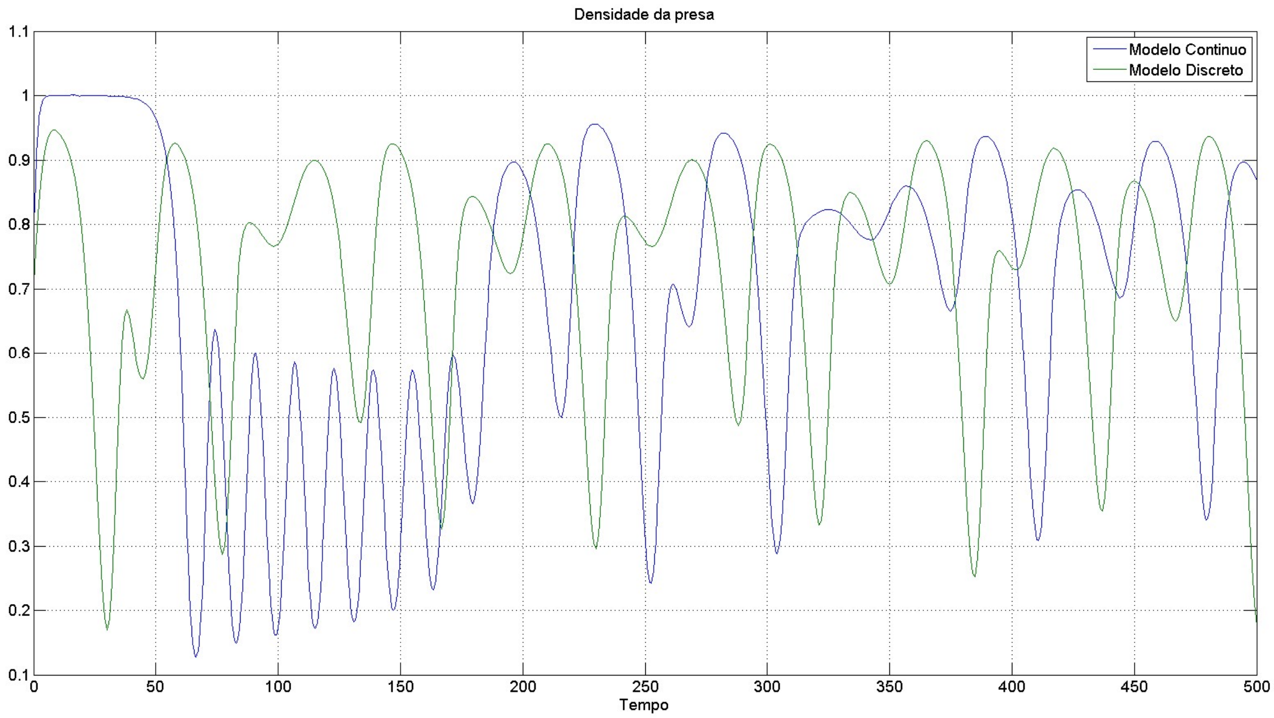
Parâmetros	Valor
$x(k-1)$	0,9432
$x(k-2)$	0,9353
$x(k-3)$	0,9203
$x(k-4)$	0,8962
$x(k-5)$	0,8621
$x(k-6)$	0,8151
$x(k-7)$	0,7591

Classificação
Modelo Dinâmico, Discreto, Autônomo, Monovariável, Determinístico, Paramétrico

Utilizando como parâmetro $x(k-8) = 0{,}7000$, temos:



Comparando os dois, temos:



Como as condições inicias foram diferentes, não há como comparar.

A Simulação foi realizada através do código no Matlab abaixo:

```
function [modelo] = cadeia_alimentar(t,x)
%Funcao para o exercicio 1.8 que representa a dinamica de uma cadeia
alimentar
%Constantes fornecidas:
a = 0.311;
b = 0.518;
c = 1.036;
d = 0.311;
e = 0.161;
f = 4.599;
g = 2.469;
h = 0.322;

%Variaveis
X = x(1);
Y = x(2);
Z = x(3);

modelo =[ X*(1-X)-X*Y/(X+a); -b*Y+(c*X*Y)/(X+d)-(Y*Z)/(Y+e); f*Z^2-
(g*Z^2)/(Y+h)];

end
```

```
clear all;
close all;
clc;

%Modelo Continuo
%Condições iniciais
y0 = [1 1 1];
tspan = [0 500];
[tempo_continuo,modelo_continuo]=ode45(@cadeia_alimentar,tspan,y0);
figure(1)
plot(tempo_continuo,modelo_continuo(:,1),tempo_continuo,modelo_continu
o(:,2),tempo_continuo,modelo_continuo(:,3));
grid on;
xlabel('Tempo');
legend('Presa','Predador Especialista','Predador Generalista');
title('Dinamica de uma cadeia alimentar');
fig=gcf;
set(findall(fig,'-property','FontSize'),'FontSize',14);

%Modelo Discreto
%Condições iniciais
tempo_discreto = 0:500;
x=zeros(1,length(tempo_discreto));
x(1) = 0.7000; %x(k-8)
x(2) = 0.7591; %x(k-7)
x(3) = 0.8151; %x(k-6)
x(4) = 0.8621; %x(k-5)
x(5) = 0.8962; %x(k-4)
x(6) = 0.9203; %x(k-3)
x(7) = 0.9353; %x(k-2)
x(8) = 0.9432; %x(k-1)
```

```
for k = 9:length(tempo_discreto)
    x(k) = 3.38040*x(k-1)- 4.30812*x(k-2)+2.56162*x(k-3)-1.06161*x(k-
4)-1.21955*x(k-5)^2 ...
        +2.56978*x(k-1)*x(k-5)*x(k-6)-3.26196*x(k-3)*x(k-4)*x(k-
6)+0.48632*x(k-5)...
        +2.53047*x(k-4)^2*x(k-5)+0.80920*x(k-4)*x(k-7)-4.55223*10^-
3*x(k-1)^2*x(k-8)+1.47483*x(k-3)*x(k-6)...
        -0.23716*x(k-5)^2*x(k-6)-0.74444*x(k-1)*x(k-7)-0.45312*x(k-
6)^2+0.50283*x(k-2)^2*x(k-3)...
        -2.02429*x(k-1)*x(k-4)*x(k-5);
end
figure(2)
plot(tempo_discreto,x)
grid on;
xlabel('Tempo');
ylabel('Densidade da presa')
title('Dinamica de uma cadeia alimentar: Densidade da Presa');
fig=gcf;
set(findall(fig,'-property','FontSize'),'FontSize',14);

%Comparacao dos resultados
figure(3)
plot(tempo_continuo,modelo_continuo(:,1),tempo_discreto,x)
grid on;
xlabel('Tempo');
legend('Modelo Continuo', 'Modelo Discreto');
title('Densidade da presa');
fig=gcf;
set(findall(fig,'-property','FontSize'),'FontSize',14);
```

1.9

Modelo matemático da dinâmica do vírus HIV e células CD4 em função de doses de fármacos

$$\begin{cases} \dot{x_1} = S(x_4) + \lambda(x_1, x_2, x_3)x_1 - x_1[\mu_1 + k_1(m_1 + k_1(m_1(t))x_4] \\ \dot{x_2} = \omega k_1(m_1(t))x_4x_1 - x_2[\mu_2 + k_2(m_2(t))] \\ \dot{x_3} = (1-\omega)k_1(m_1(t))x_4x_1 + k_2(m_2(t))x_2 - \mu_3x_3 \\ \dot{x_4} = N(t)\mu_3x_3 - x_4[k_1(m_1(t))x_1 + \mu_v] \end{cases}$$

$$S(x_4) = \frac{s\,\theta}{\theta + x_4}$$

$$\lambda(x_1, x_2, x_3) = r\left(1 - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{T_{max}}\right)$$

$$N(t) = \beta_2(\beta_2 - N_0)e^{-\beta_1 t}$$

x_1=número de células T $CD4^+$ não infectadas
x_2=número de células T $CD4^+$ infectadas latentes
x_3=número de células T $CD4^+$ infectadas ativas
x_4=número de vírus HIV livres
s=taxa de geração de x_1
r=taxa de crescimento estimulado de x_1
T_{max}=nível máximo da população de células T
μ_i=taxa de mortalidade de x_i
μ_v=taxa de mortalidade de x_4
k_1=taxa de infecção por vírus de x_1 para x_2
k_2=taxa de infecção por vírus de x_2 para x_3
θ=concentração de vírus necessária para reduzir s

Os coeficientes k_1 e k_2 dependem das doses de fármacos $m_1(t)$ e $m_2(t)$ da seguinte forma:

$$k_1(m_1(t)) = k_{10}e^{-\alpha_1 m_1(t)}$$
$$k_2(m_2(t)) = k_{20}e^{-\alpha_2 m_2(t)}$$

Os valores dos parâmetros para esse modelo são:

Parâmetros	Valor	Parâmetros	Valor
s	10	k_{20}	$3x10^{-1}$
r	0,52	N_0	1400
T_{max}	1700	ω	1
μ_1	0,4	α_1	0,005
μ_2	0,5	α_2	0,005
μ_3	0,03	β_1	$1x10^{-1}$
μ_v	2,4	β_2	65470
k_{10}	$2,4x10^{-5}$	θ	$1x10^{6}$

Os valores das condições iniciais para esse modelo são:

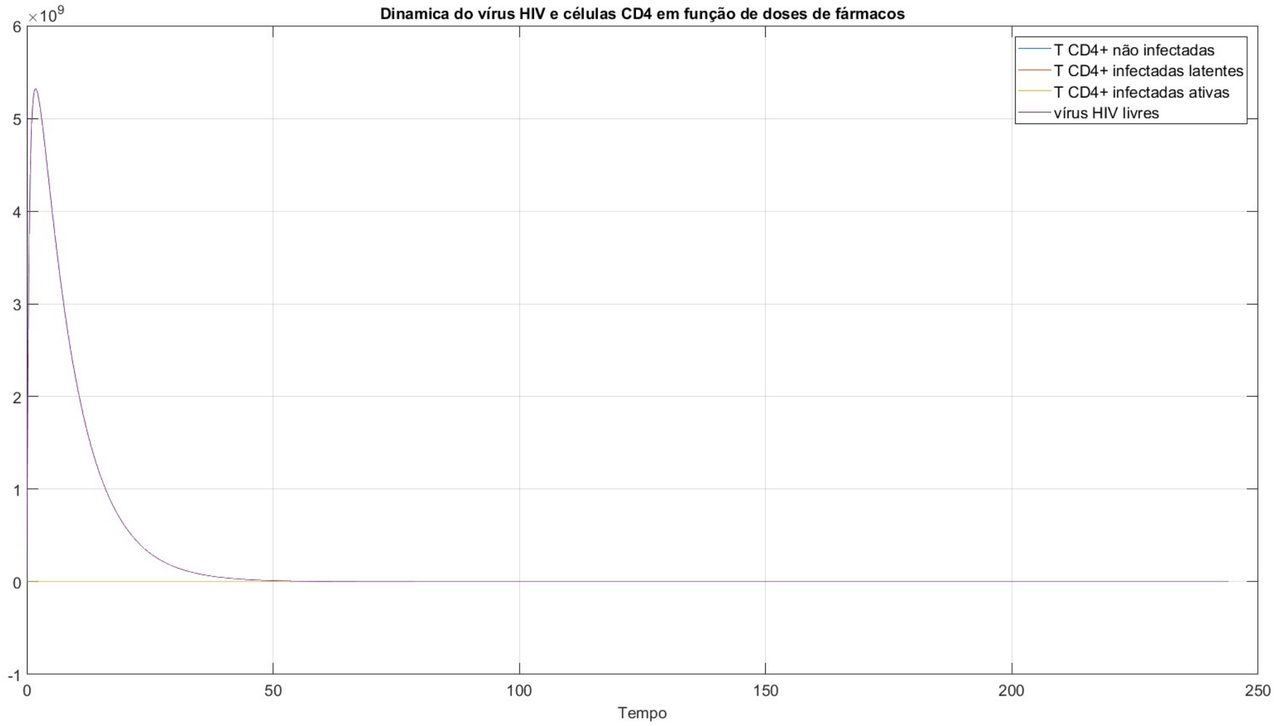
Parâmetros	Valor
$x_1(0)$	357
$x_2(0)$	10
$x_3(0)$	100
$x_4(0)$	133352

Sinais hipotéticos suaves para as doses de fármacos, limitando seus valores às seguintes faixas:

$$300mg \leq m_1(t) \leq 900mg$$
$$300mg \leq m_2(t) \leq 900mg$$

Mesmo utilizando as funções abaixo para os fármacos, temos:

$$m_1 = 600 - 300\ sen\left(\frac{t}{10}\right)$$
$$m_2 = 600 - 300\ cos\left(\frac{t}{10}\right)$$



A Simulação foi realizada através do código no Matlab abaixo:

```
function [modelo] = HIV_celulas_CD4(t,x)
%Funcao para o exercicio 1.9 que representa a dinamica do vírus HIV e
células CD4 em função de doses de fármacos
%Parâmetros do sistema
s=10;
r=0.52;
Tmax=1700;
mi1=0.4;
mi2=0.5;
mi3=0.03;
miv=2.4;
k10=0.000024;
k20=0.3;
N0=1400;
omega=1;
alfa1=0.005;
alfa2=0.005;
beta1=0.1;
beta2=65470;
teta=1000000;

%Calculo das funções dos fármacos
m1=600-300*sin(t/10);
m2=600-300*cos(t/10);
k1_m1t=k10*exp(-alfa1*m1);
k2_m2t=k20*exp(-alfa2*m2);

%Variaveis
x1 = x(1);
x2 = x(2);
x3 = x(3);
x4 = x(4);

%Calculo das Funções
S = (s*teta)/(teta+x4);
lambda = r*(1-((x1+x2+x3)/(Tmax)));
N = beta2*(beta2-N0)*exp(-beta1*t);


modelo =[S+lambda*x1-x1*(mi1+k1_m1t*x4); omega*k1_m1t*x4*x1-
x2*(mi2+k2_m2t);(1-omega)*k1_m1t*x4*x1+k2_m2t*x2-mi3*x3; N*mi3*x3-
x4*(k1_m1t*x1+miv)];

end
```

```
clear all;
close all;
clc;

%Condições iniciais
%Tempo 224, com intervalo de integração T=0.1
tspan = 0:0.1:244;
```

```
%Condições iniciais das variaveis
x0 = [357 10 100 133352];

[tempo_continuo,modelo_continuo]=ode45(@HIV_celulas_CD4,tspan,x0);

figure(1)
plot(tempo_continuo,modelo_continuo(:,1),tempo_continuo,modelo_continu
o(:,2),tempo_continuo,modelo_continuo(:,3),tempo_continuo,modelo_conti
nuo(:,4));
grid on;
xlabel('Tempo');
legend('T CD4+ não infectadas','T CD4+ infectadas latentes','T CD4+
infectadas ativas','vírus HIV livres');
title('Dinamica do vírus HIV e células CD4 em função de doses de
fármacos');
fig=gcf;
set(findall(fig,'-property','FontSize'),'FontSize',14);
```

1.10

Passar a função de transferência discreta para a representação ARX

$$H(z) = \frac{0{,}1075z^2 + 0{,}2151z + 0{,}1075}{z^2 - 1{,}6129z + 0{,}8280}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0{,}1075z^2 + 0{,}2151z + 0{,}1075}{z^2 - 1{,}6129z + 0{,}8280}$$

$$X(z)[0{,}1075z^2 + 0{,}2151z + 0{,}1075] = Y(z)[z^2 - 1{,}6129z + 0{,}8280]$$

$$0{,}1075\, x(k+2) + 0{,}2151x(k+1) + 0{,}1075 = y(k+2) - 1{,}6129\, y(k+1) + 0{,}8280$$

$$y(k+2) = +1{,}6129\, y(k+1) - 0{,}8280 + 0{,}1075\, x(k+2) + 0{,}2151x(k+1) + 0{,}1075$$

$$y(k) = +1{,}6129\, y(k-1) - 0{,}8280 + 0{,}1075\, x(k) + 0{,}2151x(k-1) - 0{,}7205$$

1.12
Modelo ARX

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + b_1 u(k-1)$$

O método dos mínimos quadrados pode ser aplicado, para tal serão necessários conhecer valores da entrada e saída do sistema, quanto mais valores conhecidos, desde que a entrada seja persistentemente excitante, melhor será aproximação.

1.14

Se houvesse muito ruído, a linha poderia não ser representativa ao modelo.
Uma solução desse problema seria trabalhar com um filtro média móvel para diminuir assim o ruído e aumentar a assertividade do modelo.