4.1

O ganho α torna $\alpha\, u(t)$ o mais próximo possível de $y(t+\tau)$, no sentido de minimizar $E[(\alpha\, u(t) - y(t+\tau))^2]$ é $\alpha = \frac{r_{uy}(\tau)}{r_u(0)}$.

$$E\left[\left(\alpha\, u(t) - y(t+\tau)\right)^2\right] = E[\alpha^2\, u^2(t) - 2\,\alpha\, u(t)\, y(t+\tau) + y^2(t+\tau)]$$

Por valor esperado $E[.]$ ser um operador linear, temos:

$$E\left[\left(\alpha\, u(t) - y(t+\tau)\right)^2\right] = \alpha^2 E[u^2(t)] - 2\,\alpha\, E[u(t)\, y(t+\tau)] + E[y^2(t+\tau)]$$

Para achar o α máximo, deriva-se em relação a α e iguala a zero. Assim temos:

$$\frac{d}{d\alpha} E\left[\left(\alpha\, u(t) - y(t+\tau)\right)^2\right] = 2\alpha\, E[u^2(t)] - 2\, E[u(t)\, y(t+\tau)] + 0 = 0$$
$$\alpha\, E[u^2(t)] = E[u(t)\, y(t+\tau)]$$
$$\alpha\ = \frac{E[u(t)\, y(t+\tau)]}{E[u^2(t)]} = \frac{r_{uy}(t)}{var(u)} = \frac{r_{uy}(t)}{r_u(0)}$$

Para saber se é de máximo ou de mínimo, derivamos mais uma vez. Assim:

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} E\left[\left(\alpha\, u(t) - y(t+\tau)\right)^2\right] = 2\, E[u^2(t)] - 0 + 0 = 2\, var(u)$$

Como variância é sempre positiva, o α é máximo.

4.8

$$u(k) = 0{,}9\ e(k-1) + 0{,}8\ e(k-2) + 0{,}7\ e(k-3) + e(k)$$

$e(k)$ = ruído branco com distribuição gaussiana, com média (μ) zero e variância unitária
$\sigma_e^2 = 1$

Estime $r_u(k)$ numericamente e determine $r_u(k), k = 0{,}1, \ldots ,5$ analiticamente

$$r_u(k) = E[u(n)\ u(n+k)] =$$
$$E\big[\big(0{,}9\ e(n-1) + 0{,}8\ e(n-2) + 0{,}7\ e(n-3) + e(n)\big)\big(0{,}9\ e(n-1+k) + 0{,}8\ e(n-2+k) + 0{,}7\ e(n-3+k) + e(n+k)\big)\big] =$$
$$E[0{,}81\ e(n-1)e(n-1+k) + 0{,}72\ e(n-1)e(n-2+k) + 0{,}63\ e(n-1)e(n-3+k) + 0{,}9\ e(n-1)e(n+k) + 0{,}72\ e(n-2)e(n-1+k) + 0{,}64\ e(n-2)e(n-2+k) + 0{,}56\ e(n-2)e(n-3+k) + 0{,}8\ e(n-2)e(n+k) + 0{,}63\ e(n-3)e(n-1+k) + 0{,}56\ e(n-3)e(n-2+k) + 0{,}49\ e(n-3)e(n-3+k) + 0{,}7\ e(n-3)e(n+k) + 0{,}9\ e(n)e(n-1+k) + 0{,}8\ e(n)e(n-2+k) + 0{,}7e(n)e(n-3+k) + e(n)e(n+k)]$$

Por $e(k)$ ser um ruído branco, não há dependência entre os $e(k+n)$. Assim, para $e(n_1)e(n_2)$ temos:
Se os índices $n_1 \neq n_2$, temos que $E[e(n_1)e(n_2)] = E[e(n_1)]E[e(n_2)] = \mu * \mu = \mu^2$
Se os índices $n_1 = n_2 = n$, temos que $E[e(n_1)e(n_2)] = E[e^2(n)] = E[e^2(0)] = \sigma_e^2 + \mu^2$

Então, a função em há valor apenas quando $n = 0$ é a impulso $\delta(n)$. Assim:
$$E[e(n_1)e(n_2)] = \mu^2 + \sigma_e^2\delta(n_2 - n_1)$$

Porém, neste caso, $\mu = 0$, então só há variância.

Substituindo acima, temos:
$$E[0{,}81\ \sigma_e^2\delta(k) + 0{,}72\ \sigma_e^2\delta(k-1) + 0{,}63\ \sigma_e^2\delta(k-2) + 0{,}9\ \sigma_e^2\delta(k+1) + 0{,}72\ \sigma_e^2\delta(k+1) + 0{,}64\ \sigma_e^2\delta(k) + 0{,}56\ \sigma_e^2\delta(k-1) + 0{,}8\ \sigma_e^2\delta(k+2) + 0{,}63\ \sigma_e^2\delta(k+2) + 0{,}56\ \sigma_e^2\delta(k+1) + 0{,}49\ \sigma_e^2\delta(k) + 0{,}7\ \sigma_e^2\delta(k+3) + 0{,}9\ \sigma_e^2\delta(k-1) + 0{,}8\ \sigma_e^2\delta(k-2) + 0{,}7\sigma_e^2\delta(k-3) + \sigma_e^2\delta(k)] =$$
$$(0{,}81 + 0{,}64 + 0{,}49 + 1)\delta(k) + (0{,}72 + 0{,}56 + 0{,}9)\delta(k-1) + (0{,}63 + 0{,}8)\delta(k-2) + (0{,}9 + 0{,}72 + 0{,}56)\delta(k+1) + (0{,}8 + 0{,}63)\delta(k+2) + (0{,}7)\delta(k+3) + (0{,}7)\delta(k-3) =$$
$$r_u(k) = 0{,}7\ \delta(k+3) + 1{,}43\ \delta(k+2) + 2{,}18\ \delta(k+1) + 2{,}94\ \delta(k) + 2{,}18\ \delta(k-1) + 1{,}43\ \delta(k-2) + 0{,}7\ \delta(k-3)$$

Assim:
$$r_u(0) = 0{,}7\ \delta(3) + 1{,}43\ \delta(2) + 2{,}18\ \delta(1) + 2{,}94\ \delta(0) + 2{,}18\ \delta(-1) + 1{,}43\ \delta(-2) + 0{,}7\ \delta(-3) = 2{,}94$$
$$r_u(1) = 0{,}7\ \delta(4) + 1{,}43\ \delta(3) + 2{,}18\ \delta(2) + 2{,}94\ \delta(1) + 2{,}18\ \delta(0) + 1{,}43\ \delta(-1) + 0{,}7\ \delta(-2) = 2{,}18$$
$$r_u(2) = 0{,}7\ \delta(5) + 1{,}43\ \delta(4) + 2{,}18\ \delta(3) + 2{,}94\ \delta(2) + 2{,}18\ \delta(1) + 1{,}43\ \delta(0) + 0{,}7\ \delta(-1) = 1{,}43$$
$$r_u(3) = 0{,}7\ \delta(6) + 1{,}43\ \delta(5) + 2{,}18\ \delta(4) + 2{,}94\ \delta(3) + 2{,}18\ \delta(2) + 1{,}43\ \delta(1) + 0{,}7\ \delta(0) = 0{,}7$$
$$r_u(4) = 0{,}7\ \delta(7) + 1{,}43\ \delta(6) + 2{,}18\ \delta(5) + 2{,}94\ \delta(4) + 2{,}18\ \delta(3) + 1{,}43\ \delta(2) + 0{,}7\ \delta(1) = 0$$
$$r_u(5) = 0{,}7\ \delta(8) + 1{,}43\ \delta(7) + 2{,}18\ \delta(6) + 2{,}94\ \delta(5) + 2{,}18\ \delta(4) + 1{,}43\ \delta(3) + 0{,}7\ \delta(2) = 0$$

4.9

$$H(z) = \frac{0{,}1701\, z + 0{,}1208}{z^2 - 0{,}7859\, z + 0{,}3679}$$

Para realizar a matriz de correlação $r_{uy}(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i)\, r_u(k-i)$, utilizamos a resposta impulso do sistema do exercício 4.8.

Por ser tratar de uma convolução, ao se passar para o domínio da frequência, a operação se torna uma multiplicação. Então:

$$r_{uy}(z) = H(z) r_u(z)$$

A transformada Z de $r_u(k)$ é:

$$r_u(z) = 0{,}7\, z^3 + 1{,}43\, z^2 + 2{,}18\, z + 2{,}94 + 2{,}18\, z^{-1} + 1{,}43\, z^{-2} + 0{,}7\, z^{-3}$$

Arrumando

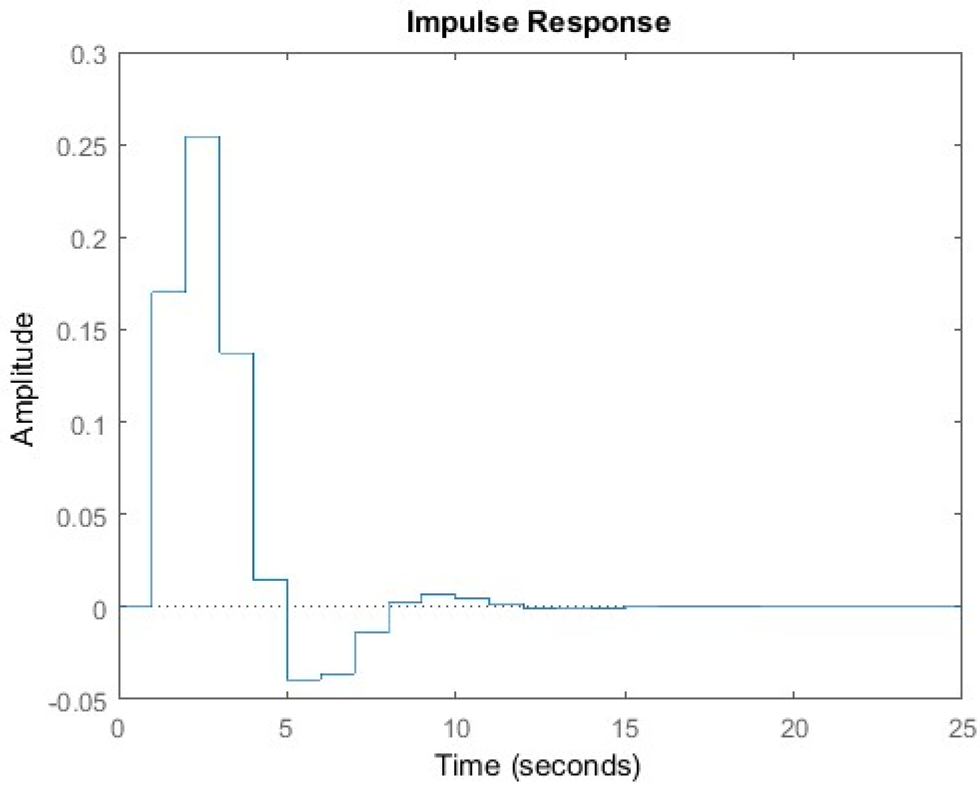
$$r_u(z) = 0{,}7\, \frac{z^3}{1} + 1{,}43\, \frac{z^2}{1} + 2{,}18\, \frac{z}{1} + 2{,}94\, \frac{1}{1} + 2{,}18 \frac{1}{z} + 1{,}43\, \frac{1}{z^2} + 0{,}7\, \frac{1}{z^3} =$$

$$0{,}7\, \frac{z^3 z^3}{z^3} + 1{,}43\, \frac{z^2 z^3}{z^3} + 2{,}18\, \frac{z\, z^3}{z^3} + 2{,}94\, \frac{z^3}{z^3} + 2{,}18 \frac{z^{-1} z^3}{z^3} + 1{,}43\, \frac{z^{-2} z^3}{z^3} + 0{,}7\, \frac{z^3 z^{-3}}{z^3} =$$

$$0{,}7\, \frac{z^6}{z^3} + 1{,}43\, \frac{z^5}{z^3} + 2{,}18\, \frac{z^4}{z^3} + 2{,}94\, \frac{z^3}{z^3} + 2{,}18 \frac{z^2}{z^3} + 1{,}43\, \frac{z}{z^3} + 0{,}7\, \frac{1}{z^3} =$$

$$r_u(z) = \frac{0{,}7\, z^6 + 1{,}43\, z^5 + 2{,}18\, z^4 + 2{,}94\, z^3 + 2{,}18\, z^2 + 1{,}43\, z + 0{,}7}{z^3}$$

Simulando:



A Simulação foi realizada através do código no Matlab abaixo:

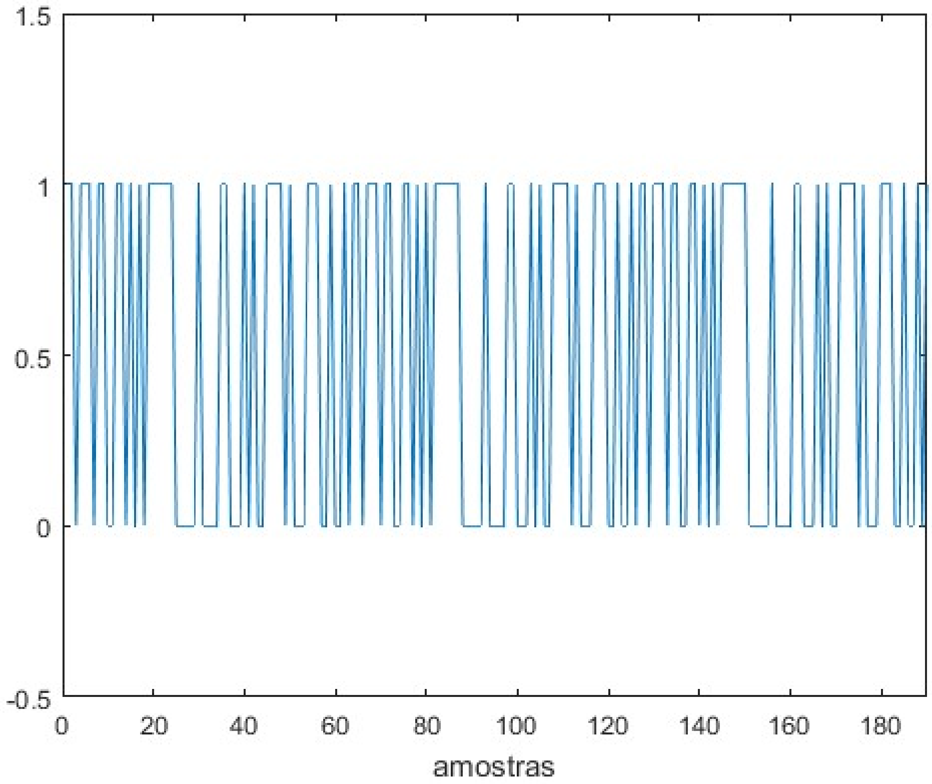
```
clear all
clc

%Fazendo a função de transferencia do sistema
z = tf('z');
H = (0.1701*z+0.1208)/(z^2-0.7859*z+0.3679)

ru = (0.7*z^6+1.43*z^5+2.18*z^4+2.94*z^3+2.18*z^2+1.43*z+0.7)/z^3

ruy = H*ru

impulse(H)
```

Fiz as funções mas não sei como achar o h(k)
Não sei fazer pelas as matrizes, pois são matrizes infinitas (4.12)
Não consigo achar a correlação entre o sinal do 4.8 e a saída, pois não tenho saida

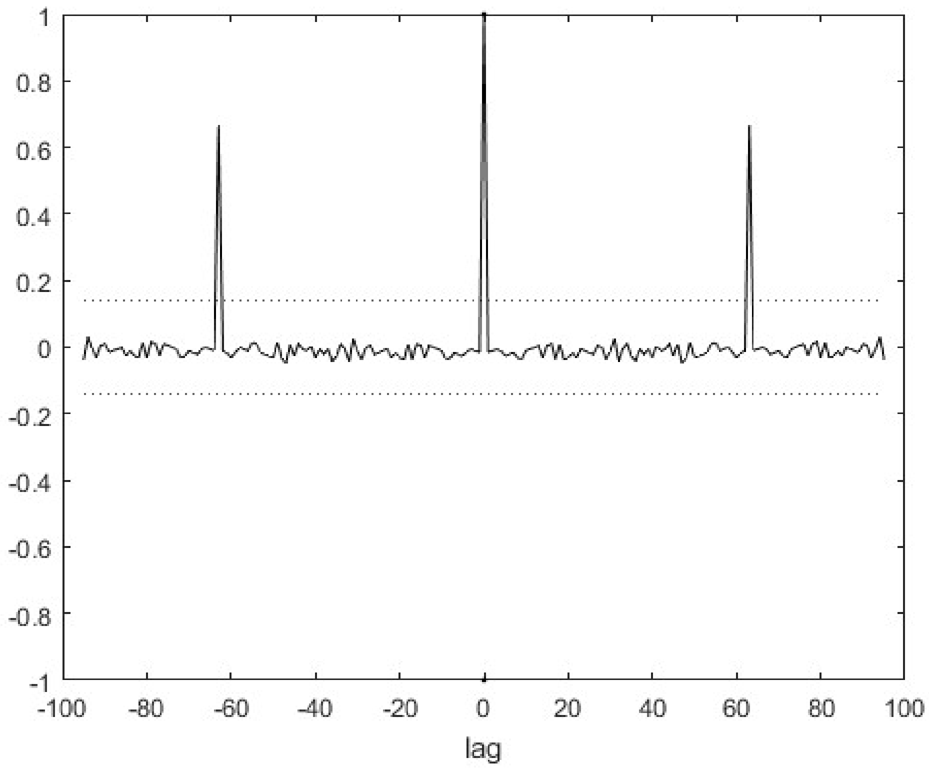
Com é H(z), pensei em fazer no domínio da frequencia, pois assim a convolução se transforma em produto, porém, se eu tirar a fft do $r_{uy}(z)$, seria mais fácil eu tirar a fft de $H(z)$ e ter h(k)

4.15

Utilizando a função PRBS.m, com a sequência de m de 1 bit, 190 amostras e com periodicidade de n=6 bits, temos:



Usando a função de correlação cruzada MYCCF.m, para fazer a auto correlação, e o lag= 190, temos:



A Simulação foi realizada através do código no Matlab abaixo:

```
clear all
clc

%Usando a função PRBS conforme a figura 4.10 do Livro
%Sequencia m com n=6
n=6;
%Sequencia m com nível lógico 0 e 1
m=1;
Sinal=PRBS(190,n,m);

plot(Sinal)
xlabel('amostras');
axis([0 190 -0.5 1.5])

%Usando a função de correlação cruzada para auto correlação
%Criando as duas colunas do mesmo sinal
c=[Sinal' Sinal'];
lag=190;
AutoCorrelacao = MYCCF(c,lag,1,1,'k');
```

4.16

No exercício anterior, qual o valor de Tb que o texto nas páginas 198 e 199 não cita?
O Tb altera qual parâmetro na função PRBS.m?

4.17

A partir de

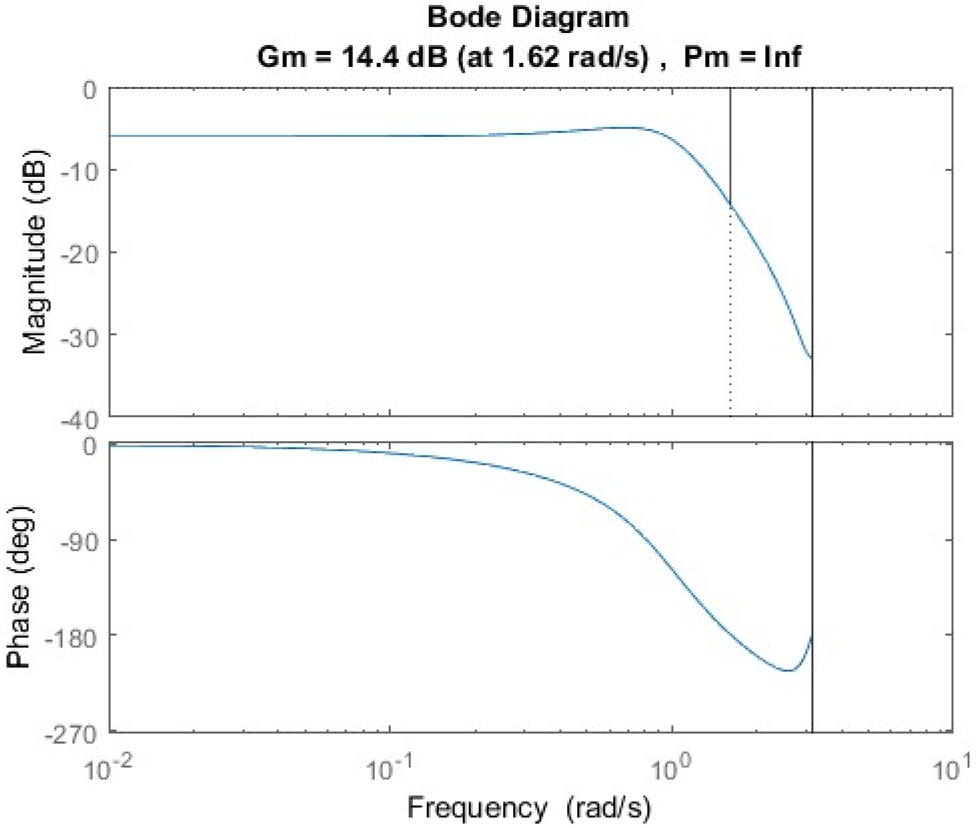
$$H(z) = \frac{0{,}1701\, z + 0{,}1208}{z^2 - 0{,}7859\, z + 0{,}3679}$$

Encontra-se o diagrama de bode por

Qual entrada eu insiro para realizar a fft() e achar o diagrama de bode? Como que funciona esse código?

No livro, ele não cita qual formula ele utiliza para encontrar o modulo e ângulo dos pontos para realizar o diagrama. Assim, qual é o método que ele cita nessa seção 4.4? Ele simplesmente usou transformada de Fourier para fazer a convolução virar produto, ou tem algo mais?

Usando a função do matlab Margin(), obteve-se o diagrama de bode abaixo:



A Simulação foi realizada através do código no Matlab abaixo:

```
clear all
clc

%Fazendo a função de transferencia do sistema
z = tf('z');
H = (0.1701*z+0.1208)/(z^2-0.7859*z+0.3679)

%Faz o diagrama de bode
margin(H)
```

4.19

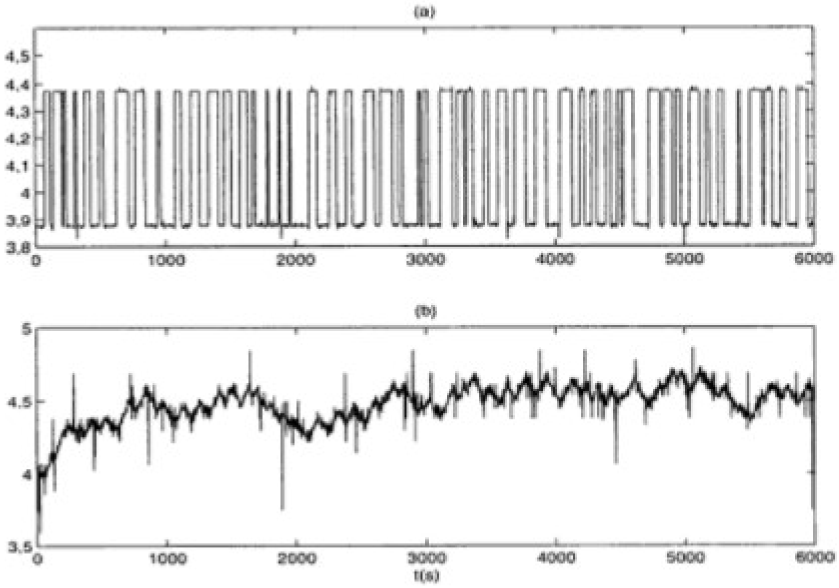
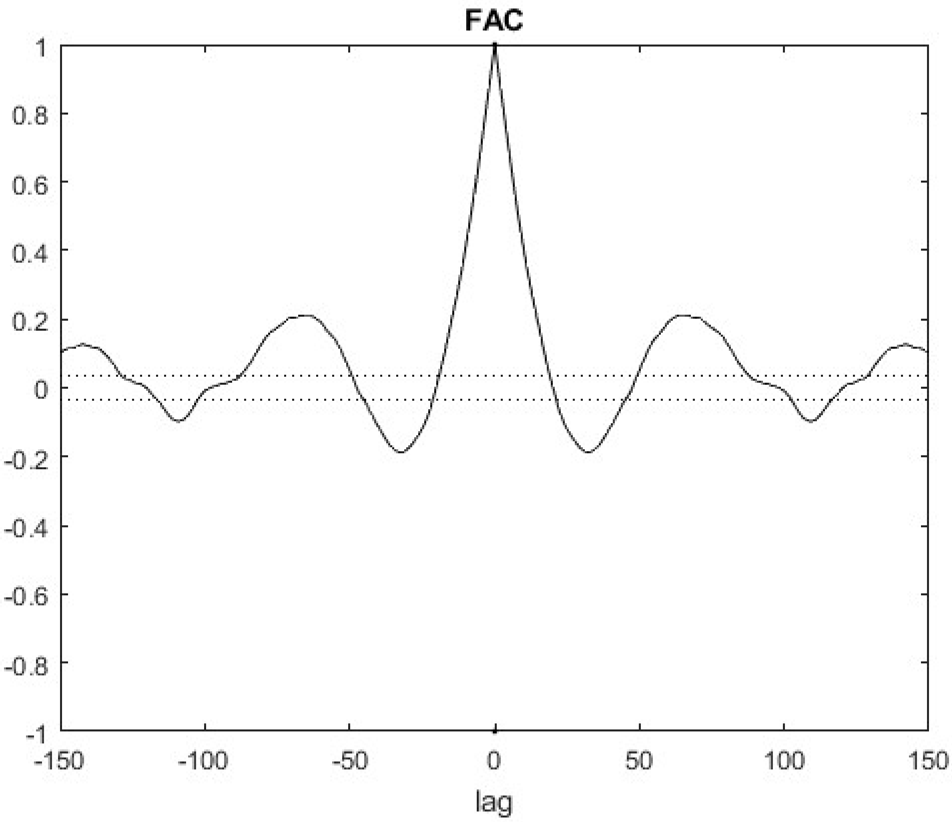


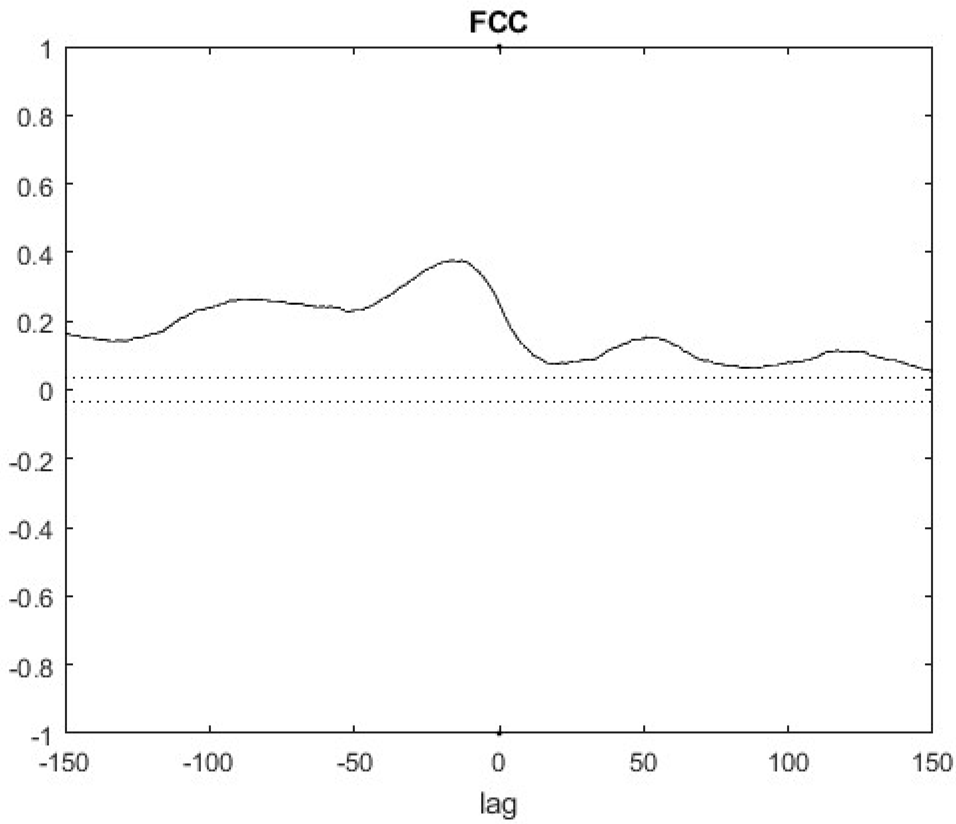
FIGURA 4.16: Resposta de uma planta a um sinal pseudo-aleatório

Dados do arquivo `prbsa02` @, (a) sinal binário pseudo-aleatório, entrada para a planta piloto de bombeamento de água descrita na Seção 1.4, (b) sinal de saída (vazão).

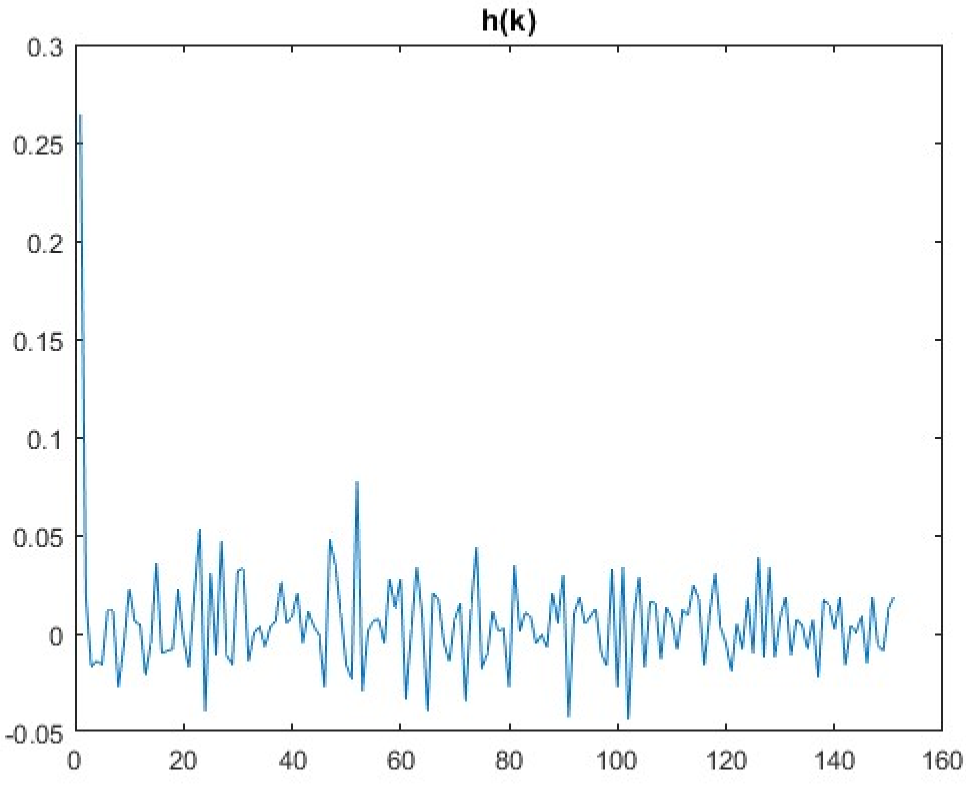
Usando a função de correlação cruzada MYCCF.m, para fazer a auto correlação, e o lag= 300, temos:



Usando a função de correlação cruzada MYCCF.m, para fazer a correlação entre entrada e saída, e o lag= 300, temos:



Montando as matrizes da equação 4.12 e realizando o calculo, temos:



Tenho o h(k) e o que tenho que fazer agora que eu não entendi

A Simulação foi realizada através do código no Matlab abaixo:

```
clear all
clc

%Carregando os dados ensaio6mw.dat
Data = load ('PRBSA02.DAT');

%Separando os Sinais
SinalPRBS = Data(:,2);
SinalVazao = Data(:,3);

%Usando a função de correlação cruzada para auto correlação
%Criando as duas colunas do mesmo sinal
FAC=[SinalPRBS SinalPRBS];
lag=300;
[AutoCorrelacaoX,AutoCorrelacaoY] = MYCCF(FAC,lag,1,1,'k');
title('FAC')

figure
%Usando a função de correlação cruzada
FCC=[SinalPRBS SinalVazao];
lag=300;
[CorrelacaoX,CorrelacaoY] = MYCCF(FCC,lag,1,1,'k');
title('FCC')

%Montando a matriz de autocorrelação
Ru= zeros(lag/2+1);

%Achando o meio do FAC, ou seja, o Ru(0)
IndiceFAC=lag/2+1;
while IndiceFAC>0
    for i=0:lag/2
        Ru(i+1,lag/2+2-IndiceFAC)= AutoCorrelacaoY(IndiceFAC+i);
    end
    IndiceFAC=IndiceFAC-1;
end

%Montando o vetor da correlação
Ruy= zeros(lag/2+1,1);

%Achando o meio do FCC, ou seja, o Ruy(0)
IndiceFCC=lag/2+1;

for i=0:lag/2
    Ruy(i+1)=CorrelacaoY(i+IndiceFCC);
end

H=Ru^(-1)*Ruy;

figure()
plot(H)
```

4.20

$$H(s) = \frac{1}{1000s + 1}$$

Qual o valor de Tb que o texto nas páginas 198 e 199 não cita?
O Tb altera qual parâmetro na função PRBS.m?

4.21

Para que $A(q)r_y(k) = 0$, um dos termos tem que ser 0, porém $A(q) \neq 0$, então, $r_y(k) = 0$. Porém, como a autocorrelação de um sinal pode ser 0??