6.1

$$
\begin{aligned}
c_x(\tau) &= E[(x(t)-\bar{x})(x(t-\tau)-\bar{x})] \\
&= E[x(t)x(t-\tau) - x(t)\bar{x} - \bar{x}x(t-\tau) + \bar{x}^2] \\
&= E[x(t)x(t-\tau)] - E[x(t)\bar{x}] - E[\bar{x}x(t-\tau)] + E[\bar{x}^2] \\
&= E[x(t)x(t-\tau)] - \bar{x}E[x(t)] - \bar{x}E[x(t-\tau)] + \bar{x}^2 \\
&= r_x(\tau) - \bar{x}\bar{x} - \bar{x}\bar{x} + \bar{x}^2 \\
&= r_x(\tau) - \bar{x}^2
\end{aligned}
$$

Sendo assim

$$r_x(\tau) = c_x(\tau) + \bar{x}^2$$

6.3
a)
Estimando MQ

$$\hat{\theta} = Ay; \;\; onde\ A = [\psi^T \psi]^{-1} \psi^T$$

$$b = E[\hat{\theta}] - \theta = E[Ay] - \theta = E\big[A\big(f(\psi,\theta) + e(k)\big)\big] - \theta = E[Af(\psi,\theta)] + AE[e(k)] - \theta$$
$$= E[(Af(\psi,\theta) - I)\theta] + AE[e(k)]$$

Seja $Af(\psi,\theta) = I$

$$b = E[Ae(k)]$$

Como o valor esperado do erro não é zero, a estimativa será polarizada

b) Se o erro não possuí média zero, é porque ele tem modelo. Assim:

$$e(k) = \overline{e(k)} + v(k), onde\ \overline{e(k)} = E[e(k)], E[v(k)] = 0$$

$$b = E[Ae(k)] = E[A\overline{e(k)}] + E[Av(k)] = E[A\overline{e(k)}] = E[(\psi^T\psi)^{-1}\psi^T\overline{e(k)}]$$

Adicionando a parte determinística do erro ($\overline{e(k)}$) dentro do modelo (um parâmetro no vetor de regressores ψ) é possível estimar $\overline{e(k)}$, assim ela não aparecerá nos resíduos.
Assim os resíduos serão apenas o termo $v(k)$ e o valor esperado será:

$$E[e(k)] = 0\ e\ b = 0$$

6.4

$$\psi(k-1) = [y(k-1) \ldots y(k-n_y)]^T \qquad ; \qquad r_{ye}(\tau), \tau = 1, \ldots, n_y$$
$$b = E[\hat{\theta}] - \theta \quad e \quad y = \psi\theta + e$$

Se não houver correlação entre o erro “e” e nenhum dos regressores $\psi(k-1)$, ou seja, $r_{ye}(\tau) = 0$, $E[\psi^T e] = 0$ e a polarização $b = 0$. Isto ocorre para $e(k)$ igual a ruído branco.

$$r_{ye}(\tau) = E[y\, e(k-\tau)] = E\big[\big(\psi\theta + e(k)\big)e(k-\tau)\big] = E\big(\psi\theta e(k-\tau)\big) + E\big(e(k)e(k-\tau)\big) =$$
$$E\big(\psi e(k-\tau)\big)\theta + r_e(\tau)$$

Se $e(k)$ for um ruído branco, para $\tau > 1$, $r_e(\tau) = 0$ e $E\big(\psi e(k-\tau)\big) = 0$.
Assim, $r_e(\tau) = E[\psi^T e] = 0$

6.7

Usando o modelo do exemplo 6.3.5, temos

$$y(k) = a\, y(k-1) + b\, u(k-1) + e(k)$$

Se $e(k) = cv(k-1) + v(k)$, um processo MA e $v(k)$ um ruído branco

$$y(k) = a\, y(k-1) + b\, u(k-1) + cv(k-1) + v(k)$$

Assim:

$$y(k-1) = a\, y(k-2) + b\, u(k-2) + cv(k-2) + v(k-1)$$

Substituindo na anterior, temos:

$$y(k) = a\,[a\, y(k-2) + b\, u(k-2) + cv(k-2) + v(k-1)] + b\, u(k-1) + cv(k-1) + v(k)$$

Colocando em formato do estimador MQ

$$y(k) = \psi(k-1)\theta + e(k)$$

Onde os regressores $\psi(k-1)$ são:

$$\psi(k-1) = \{[a\, y(k-2) + b\, u(k-2) + cv(k-2) + v(k-1)]\; u(k-1)\,\}$$

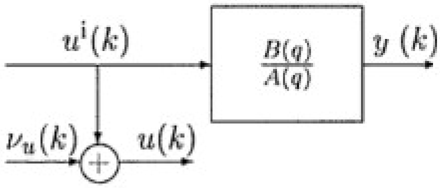
E o erro $e(k)$ é:

$$e(k) = cv(k-1) + v(k)$$

Então, como há $v(k-1)$ nos regressores e no erro, há correlação entre eles. Assim, se a correlação entre o erro e os regressores, o estimador MQ é polarizado.

6.8

Sem ruído na saída e com ruído na entrada

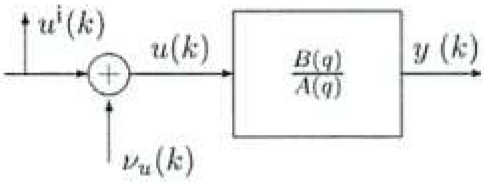


O erro não entra no sistema, então não há como separar os efeitos do sinal e do erro.

$$u(k) = u^i(k) + v_u(k)$$

$$A(q)y(k) = B(q)u^i(k)$$
$$A(q)y(k) = B(q)[u(k) - v_u(k)]$$
$$A(q)y(k) = B(q)u(k) - B(q)v_u(k)$$

Como os parâmetros do modelo são estimado de $A(q)y(k) = B(q)u(k) + e(k)$, os parâmetros $u(k)$ e $v_u(k)$ possuem correlação, então o estimador MQ é polarizado.



Neste caso, o erro entrou na planta, então é possível separar os efeitos do $u(k)$

$$u(k) = u^i(k) + v_u(k)$$

$$A(q)y(k) = B(q)u(k)$$
$$A(q)y(k) = B(q)[u^i(k) + v_u(k)]$$
$$A(q)y(k) = B(q)u^i(k) - B(q)v_u(k)$$

Se $v_u(k)$ for ruído branco e como não há correlação entre $u^i(k)$ e $v_u(k)$, o estimador MQ não será polarizado.

6.15

$$E\left\{\frac{(\sum_{t=1}^{N} x_t)^2}{N^2} - 2\alpha\frac{\sum_{t=1}^{N} x_t}{N} + \alpha^2\right\}$$

Expandindo o primeiro termo

$$\left(\sum_{t=1}^{N} x_t\right)^2 = \sum_{t=1}^{N} x_t{}^2 + 2\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{j-1} x_i x_j$$

Aplicando o valor estimado $E[]$

$$E\left[\left(\sum_{t=1}^{N} x_t\right)^2\right] = \sum_{t=1}^{N} E[x_t{}^2] + 2\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{j-1} E[x_i x_j]$$

Como x_i e x_j são amostras independentes $E[x_i x_j] = E[x_i]E[x_j]$

$E[x_i] = E[x_j]$ então $E[x_i x_j] = E[x]^2$

Assim:

$$E\left[\left(\sum_{t=1}^{N} x_t\right)^2\right] = NE[x^2] + N(N-1)E[x]^2$$

Voltando à equação principal e substituindo, temos:

$$\frac{NE[x^2]}{N^2} + \frac{N(N-1)E[x]^2}{N^2} - 2\alpha\frac{E[\sum_{t=1}^{N} x_t]}{N} + \alpha^2 =$$

Como $E[\sum_{t=1}^{N} x_t / N] = \alpha$, temos

$$\frac{E[x^2]}{N} + \frac{(N-1)\alpha^2}{N} - 2\alpha\frac{N\alpha}{N} + \alpha^2 =$$

$$\frac{E[x^2]}{N} + \frac{N\alpha^2 - \alpha^2}{N} - 2\alpha^2 + \alpha^2 =$$

$$\frac{E[x^2]}{N} + \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{N} - 2\alpha^2 + \alpha^2 =$$

$$\frac{E[x^2]}{N} - \frac{\alpha^2}{N}$$

Só que:

$$E[x^2] = \int_0^{\infty} x^2 \frac{1}{\alpha} e^{\frac{-x}{\alpha}} dx = 2\alpha^2$$

Assim:

$$E\left\{\frac{(\sum_{t=1}^{N} x_t)^2}{N^2} - 2\alpha\frac{\sum_{t=1}^{N} x_t}{N} + \alpha^2\right\} = \frac{\alpha^2}{N}$$

6.16

Modelo 6.50

$$y(k) = -a\,y(k-1) + b\,u(k-1) + c\,v(k-1) + v(k)$$

$u(k) = \sigma_u{}^2$ e $v(k) = \sigma_v{}^2$

$$r_y(0) = E[y(k)y(k)] =$$
$$E\big[\big(-ay(k-1) + bu(k-1) + cv(k-1) + v(k)\big)\big(-ay(k-1) + bu(k-1) + cv(k-1) + v(k)\big)\big] =$$
$$E[a^2y(k-1)^2 - ay(k-1)bu(k-1) - ay(k-1)cv(k-1) - ay(k-1)\,v(k) - ay(k-1)bu(k-1) + b^2u(k-1)^2 + bu(k-1)cv(k-1) + bu(k-1)v(k) - ay(k-1)cv(k-1) + bu(k-1)cv(k-1) + c^2v(k-1)^2 + cv(k-1)v(k) - ay(k-1)v(k) + bu(k-1)v(k) + cv(k-1)v(k) + v(k)^2] =$$
$$a^2E[y(k-1)^2] - 2abE[y(k-1)u(k-1)] - 2acE[y(k-1)v(k-1)] - 2aE[y(k-1)\,v(k)] + b^2E[u(k-1)^2] + 2bcE[u(k-1)v(k-1)] + 2bE[u(k-1)v(k)] + c^2E[v(k-1)^2] + 2cE[v(k-1)v(k)] + v(k)^2 =$$
$$a^2r_y(0) - 2ab(0) - 2acE[y(k-1)v(k-1)] - 2a(0) + b^2\sigma_u{}^2 + 2bc(0) + 2b(0) + c^2\sigma_v{}^2 + 2c(0) + \sigma_v{}^2 =$$
$$r_y(0) = a^2r_y(0) - 2acE[y(k-1)v(k-1)] + b^2\sigma_u{}^2 + c^2\sigma_v{}^2 + \sigma_v{}^2$$

Como

$$y(k-1) = -a\,y(k-2) + b\,u(k-2) + c\,v(k-2) + v(k-1)$$

Então

$$E[y(k-1)v(k-1)] = E[\{-a\,y(k-2) + b\,u(k-2) + c\,v(k-2) + v(k-1)\}v(k-1)] =$$
$$-a\,E[y(k-2)v(k-1)] + b\,E[u(k-2)v(k-1)] + c\,E[v(k-2)v(k-1)] + E[v(k-1)v(k-1)] =$$
$$-a\,E[y(k-2)v(k-1)] + b\,(0) + c\,(0) + E[v(k-1)^2]$$

Como

$$y(k-2) = -a\,y(k-3) + b\,u(k-3) + c\,v(k-3) + v(k-2)$$

Não possui um termo $v(k-1)$, $E[y(k-2)v(k-1)] = 0$

Assim,

$$E[y(k-1)v(k-1)] = E[v(k-1)^2] = \sigma_v{}^2$$

E

$$r_y(0) = a^2r_y(0) - 2ac\sigma_v{}^2 + b^2\sigma_u{}^2 + c^2\sigma_v{}^2 + \sigma_v{}^2$$
$$(1-a^2)r_y(0) = (-2ac + c^2 + 1)\sigma_v{}^2 + b^2\sigma_u{}^2$$
$$r_y(0) = \frac{(1 + c^2 - 2ac)\sigma_v{}^2 + b^2\sigma_u{}^2}{1-a^2}$$

Que é exatamente a equação 6.51