

## THE 72 REGGE SYMMETRIES

permutation	r:{123} (r:{213})	r:{231} (r:{321})	r:{312} (r:{132})
c:{123}	$(\pm 1)^{j+j_1+j_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ \pm m_1 & \pm m_2 & \mp m \end{pmatrix}$	$(\pm 1)^{j+j_1+j_2} \begin{pmatrix} \frac{j+j_2-m_1}{2} & \frac{j+j_1-m_2}{2} & \frac{j_1+j_2+m}{2} \\ \pm j_1 \mp \frac{j+j_2+m_1}{2} & \pm j_2 \mp \frac{j+j_1+m_2}{2} & \pm j \mp \frac{j_1+j_2-m}{2} \end{pmatrix}$	$(\pm 1)^{j+j_1+j_2} \begin{pmatrix} \frac{j+j_2+m_1}{2} & \frac{j+j_1+m_2}{2} & \frac{j_1+j_2-m}{2} \\ \mp j_1 \pm \frac{j+j_2-m_1}{2} & \mp j_2 \pm \frac{j+j_1-m_2}{2} & \mp j \pm \frac{j_1+j_2+m}{2} \end{pmatrix}$
c:{213}	$(\mp 1)^{j+j_1+j_2} \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j \\ \pm m_2 & \pm m_1 & \mp m \end{pmatrix}$	$(\mp 1)^{j+j_1+j_2} \begin{pmatrix} \frac{j+j_1-m_2}{2} & \frac{j+j_2-m_1}{2} & \frac{j_1+j_2+m}{2} \\ \pm j_2 \mp \frac{j+j_1+m_2}{2} & \pm j_1 \mp \frac{j+j_2+m_1}{2} & \pm j \mp \frac{j_1+j_2-m}{2} \end{pmatrix}$	$(\mp 1)^{j+j_1+j_2} \begin{pmatrix} \frac{j+j_1+m_2}{2} & \frac{j+j_2+m_1}{2} & \frac{j_1+j_2-m}{2} \\ \mp j_2 \pm \frac{j+j_1-m_2}{2} & \mp j_1 \pm \frac{j+j_2-m_1}{2} & \mp j \pm \frac{j_1+j_2+m}{2} \end{pmatrix}$
c:{231}	$(\pm 1)^{j+j_1+j_2} \begin{pmatrix} j_2 & j & j_1 \\ \pm m_2 & \mp m & \pm m_1 \end{pmatrix}$	$(\pm 1)^{j+j_1+j_2} \begin{pmatrix} \frac{j+j_1-m_2}{2} & \frac{j_1+j_2+m}{2} & \frac{j+j_2-m_1}{2} \\ \pm j_2 \mp \frac{j+j_1+m_2}{2} & \pm j \mp \frac{j_1+j_2-m}{2} & \pm j_1 \mp \frac{j+j_2+m_1}{2} \end{pmatrix}$	$(\pm 1)^{j+j_1+j_2} \begin{pmatrix} \frac{j+j_1+m_2}{2} & \frac{j_1+j_2-m}{2} & \frac{j+j_2+m_1}{2} \\ \mp j_2 \pm \frac{j+j_1-m_2}{2} & \mp j \pm \frac{j_1+j_2+m}{2} & \mp j_1 \pm \frac{j+j_2-m_1}{2} \end{pmatrix}$
c:{321}	$(\mp 1)^{j+j_1+j_2} \begin{pmatrix} j & j_2 & j_1 \\ \mp m & \pm m_2 & \pm m_1 \end{pmatrix}$	$(\mp 1)^{j+j_1+j_2} \begin{pmatrix} \frac{j_1+j_2+m}{2} & \frac{j+j_1-m_2}{2} & \frac{j+j_2-m_1}{2} \\ \pm j \mp \frac{j_1+j_2-m}{2} & \pm j_2 \mp \frac{j+j_1+m_2}{2} & \pm j_1 \mp \frac{j+j_2+m_1}{2} \end{pmatrix}$	$(\mp 1)^{j+j_1+j_2} \begin{pmatrix} \frac{j_1+j_2-m}{2} & \frac{j+j_1+m_2}{2} & \frac{j+j_2+m_1}{2} \\ \mp j \pm \frac{j_1+j_2+m}{2} & \mp j_2 \pm \frac{j+j_1-m_2}{2} & \mp j_1 \pm \frac{j+j_2-m_1}{2} \end{pmatrix}$
c:{312}	$(\pm 1)^{j+j_1+j_2} \begin{pmatrix} j & j_1 & j_2 \\ \mp m & \pm m_1 & \pm m_2 \end{pmatrix}$	$(\pm 1)^{j+j_1+j_2} \begin{pmatrix} \frac{j_1+j_2+m}{2} & \frac{j+j_2-m_1}{2} & \frac{j+j_1-m_2}{2} \\ \pm j \mp \frac{j_1+j_2-m}{2} & \pm j_1 \mp \frac{j+j_2+m_1}{2} & \pm j_2 \mp \frac{j+j_1+m_2}{2} \end{pmatrix}$	$(\pm 1)^{j+j_1+j_2} \begin{pmatrix} \frac{j_1+j_2-m}{2} & \frac{j+j_2+m_1}{2} & \frac{j+j_1+m_2}{2} \\ \mp j \pm \frac{j_1+j_2+m}{2} & \mp j_1 \pm \frac{j+j_2-m_1}{2} & \mp j_2 \pm \frac{j+j_1-m_2}{2} \end{pmatrix}$
c:{132}	$(\mp 1)^{j+j_1+j_2} \begin{pmatrix} j_1 & j & j_2 \\ \pm m_1 & \mp m & \pm m_2 \end{pmatrix}$	$(\mp 1)^{j+j_1+j_2} \begin{pmatrix} \frac{j+j_2-m_1}{2} & \frac{j_1+j_2+m}{2} & \frac{j+j_1-m_2}{2} \\ \pm j_1 \mp \frac{j+j_2+m_1}{2} & \pm j \mp \frac{j_1+j_2-m}{2} & \pm j_2 \mp \frac{j+j_1+m_2}{2} \end{pmatrix}$	$(\mp 1)^{j+j_1+j_2} \begin{pmatrix} \frac{j+j_2+m_1}{2} & \frac{j_1+j_2-m}{2} & \frac{j+j_1+m_2}{2} \\ \mp j_1 \pm \frac{j+j_2-m_1}{2} & \mp j \pm \frac{j_1+j_2+m}{2} & \mp j_2 \pm \frac{j+j_1-m_2}{2} \end{pmatrix}$
$T \rightarrow \text{c}:\{123\}$	$(\pm 1)^{j_1+j_2+j} \begin{pmatrix} \frac{j_1+j_2+m}{2} & \frac{j_1+j_2-m}{2} & j \\ \pm \frac{j_1-j_2+m_1-m_2}{2} \pm \frac{j_1-j_2-m_1+m_2}{2} & \pm j_2 \mp j_1 \end{pmatrix}$	$(\pm 1)^{j_1+j_2+j} \begin{pmatrix} \frac{j+j_2-m_1}{2} & \frac{j+j_2+m_1}{2} & j_1 \\ \pm \frac{j_2-j+m_1}{2} \pm m_2 \pm \frac{j_2-j-m_1}{2} \mp m_2 & \pm j \mp j_2 \end{pmatrix}$	$(\pm 1)^{j_1+j_2+j} \begin{pmatrix} \frac{j+j_1-m_2}{2} & \frac{j+j_1+m_2}{2} & j_2 \\ \pm \frac{j-j_1-m_2}{2} \mp m_1 \pm \frac{j-j_1+m_2}{2} \pm m_1 & \pm j_1 \mp j \end{pmatrix}$
$T \rightarrow \text{c}:\{213\}$	$(\mp 1)^{j_1+j_2+j} \begin{pmatrix} \frac{j_1+j_2-m}{2} & \frac{j_1+j_2+m}{2} & j \\ \pm \frac{j_1-j_2-m_1+m_2}{2} \pm \frac{j_1-j_2+m_1-m_2}{2} & \pm j_2 \mp j_1 \end{pmatrix}$	$(\mp 1)^{j_1+j_2+j} \begin{pmatrix} \frac{j+j_2+m_1}{2} & \frac{j+j_2-m_1}{2} & j_1 \\ \pm \frac{j_2-j-m_1}{2} \mp m_2 \pm \frac{j_2-j+m_1}{2} \pm m_2 & \pm j \mp j_2 \end{pmatrix}$	$(\mp 1)^{j_1+j_2+j} \begin{pmatrix} \frac{j+j_1+m_2}{2} & \frac{j+j_1-m_2}{2} & j_2 \\ \pm \frac{j-j_1+m_2}{2} \pm m_1 \pm \frac{j-j_1-m_2}{2} \mp m_1 & \pm j_1 \mp j \end{pmatrix}$
$T \rightarrow \text{c}:\{231\}$	$(\pm 1)^{j_1+j_2+j} \begin{pmatrix} \frac{j_1+j_2-m}{2} & j & \frac{j_1+j_2+m}{2} \\ \pm \frac{j_1-j_2-m_1+m_2}{2} \pm j_2 \mp j_1 \pm \frac{j_1-j_2+m_1-m_2}{2} \end{pmatrix}$	$(\pm 1)^{j_1+j_2+j} \begin{pmatrix} \frac{j+j_2+m_1}{2} & j_1 & \frac{j+j_2-m_1}{2} \\ \pm \frac{j_2-j-m_1}{2} \mp m_2 \pm j \mp j_2 \pm \frac{j_2-j+m_1}{2} \pm m_2 \end{pmatrix}$	$(\pm 1)^{j_1+j_2+j} \begin{pmatrix} \frac{j+j_1+m_2}{2} & j_2 & \frac{j+j_1-m_2}{2} \\ \pm \frac{j-j_1+m_2}{2} \pm m_1 \pm j_1 \mp j \pm \frac{j-j_1-m_2}{2} \mp m_1 \end{pmatrix}$
$T \rightarrow \text{c}:\{321\}$	$(\mp 1)^{j_1+j_2+j} \begin{pmatrix} j & \frac{j_1+j_2-m}{2} & \frac{j_1+j_2+m}{2} \\ \pm j_2 \mp j_1 \pm \frac{j_1-j_2-m_1+m_2}{2} \pm \frac{j_1-j_2+m_1-m_2}{2} \end{pmatrix}$	$(\mp 1)^{j_1+j_2+j} \begin{pmatrix} j_1 & \frac{j+j_2+m_1}{2} & \frac{j+j_2-m_1}{2} \\ \pm j \mp j_2 \pm \frac{j_2-j-m_1}{2} \mp m_2 \pm \frac{j_2-j+m_1}{2} \pm m_2 \end{pmatrix}$	$(\mp 1)^{j_1+j_2+j} \begin{pmatrix} j_2 & \frac{j+j_1+m_2}{2} & \frac{j+j_1-m_2}{2} \\ \pm j_1 \mp j \pm \frac{j-j_1+m_2}{2} \pm m_1 \pm \frac{j-j_1-m_2}{2} \mp m_1 \end{pmatrix}$
$T \rightarrow \text{c}:\{312\}$	$(\pm 1)^{j_1+j_2+j} \begin{pmatrix} j & \frac{j_1+j_2+m}{2} & \frac{j_1+j_2-m}{2} \\ \pm j_2 \mp j_1 \pm \frac{j_1-j_2+m_1-m_2}{2} \pm \frac{j_1-j_2-m_1+m_2}{2} \end{pmatrix}$	$(\pm 1)^{j_1+j_2+j} \begin{pmatrix} j_1 & \frac{j+j_2-m_1}{2} & \frac{j+j_2+m_1}{2} \\ \pm j \mp j_2 \pm \frac{j_2-j+m_1}{2} \pm m_2 \pm \frac{j_2-j-m_1}{2} \mp m_2 \end{pmatrix}$	$(\pm 1)^{j_1+j_2+j} \begin{pmatrix} j_2 & \frac{j+j_1-m_2}{2} & \frac{j+j_1+m_2}{2} \\ \pm j_1 \mp j \pm \frac{j-j_1-m_2}{2} \mp m_1 \pm \frac{j-j_1+m_2}{2} \pm m_1 \end{pmatrix}$
$T \rightarrow \text{c}:\{132\}$	$(\mp 1)^{j_1+j_2+j} \begin{pmatrix} \frac{j_1+j_2+m}{2} & j & \frac{j_1+j_2-m}{2} \\ \pm \frac{j_1-j_2+m_1-m_2}{2} \pm j_2 \mp j_1 \pm \frac{j_1-j_2-m_1+m_2}{2} \end{pmatrix}$	$(\mp 1)^{j_1+j_2+j} \begin{pmatrix} \frac{j+j_2-m_1}{2} & j_1 & \frac{j+j_2+m_1}{2} \\ \pm \frac{j_2-j+m_1}{2} \pm m_2 \pm j \mp j_2 \pm \frac{j_2-j-m_1}{2} \mp m_2 \end{pmatrix}$	$(\mp 1)^{j_1+j_2+j} \begin{pmatrix} \frac{j+j_1-m_2}{2} & j_2 & \frac{j+j_1+m_2}{2} \\ \pm \frac{j-j_1-m_2}{2} \mp m_1 \pm j_1 \mp j \pm \frac{j-j_1+m_2}{2} \pm m_1 \end{pmatrix}$