Proyecto Final Método de Euler

Alix Ivonne Chaparro Vásquez y Juan Diego Castellanos Jerez

Facultad de Ingeniería de Sistemas

Universidad Santo Tomas -Tunja

Notas de Autor

Alix Ivonne Chaparro Vásquez, Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería de Sistemas, Universidad Santo Tomas -Tunja; Juan Diego Castellanos Jerez, Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería de Sistemas, Universidad Santo Tomas -Tunja.

La correspondencia relacionada con esta investigación debe ser dirigida a Alix Ivonne Chaparro Vásquez, Juan Diego Castellanos Jerez.

Universidad Santo Tomas-Tunja, Av. Universitaria No. 45 - 202.

Correo: alix.chaparro@usantoto.edu.co; juan.castellanosj@usantoto.edu.co

Introducción

En la actualidad se ha visto el gran aporte y desarrollo de las matemáticas en más de un campo donde se producen nuevas ideas y conocimientos, siendo entonces el estudio de las matemáticas y los cálculos esencial para que el ser humano comprenda y entienda el funcionamiento del mundo en cual está viviendo.

Como seres humanos pensantes, críticos y productores de conocimiento cuestionamos, enseñamos y divergimos nuestras ideas y todo producto del conocimiento.

Con el presente proyecto se busca demostrar y comprobar la gran funcionalidad del método Euler, siendo este un procedimiento que soluciona ecuaciones diferenciales de primer orden con referencia a un valor proporcionado.

Antecedentes

El método Euler pertenece al conjunto de métodos genéricos iterativos, explícitos e implícitos para la solución de ecuaciones diferenciales, este conjunto de métodos fue creado cerca del año 1900, sus creadores Carl Runge y Martin Kutta, físicos y matemáticos, los cuales desarrollaron el método Euler que es base de métodos mucho más complejos, pero en si demasiado importante para solucionar ecuaciones diferenciales, entre ellas las ecuaciones diferenciales de primer orden a partir de iteraciones que empiezan de un valor que puede ser hallado o proporcionado como planteamiento del problema.

Justificación

La mayoría de la tecnología de hoy en día depende de la solución de modelos matemáticos, desde la programación de una calculadora científica y el cálculo estructural de un edificio multinivel con estructuras de acero, hasta el diseño y simulación de aeronaves y vuelos espaciales.

La solución de un modelo matemático relativamente sencillo puede obtenerse de manera analítica. Sin embargo, para la gran mayoría de los modelos matemáticos del mundo real, las soluciones analíticas pueden no existir o ser extremadamente complejas, por lo cual se recurre a métodos numéricos que aproximen las soluciones dentro de ciertos márgenes de tolerancia.

El análisis de los métodos numéricos nos permite realizar estimaciones tanto de la eficiencia o complejidad de los algoritmos asociados, así como de la confiabilidad de los resultados numéricos obtenidos durante su aplicación.

La presente investigación se enfoca en estudiar el método de Euler que data de 1768, ya que, este será de gran utilidad a la hora de desarrollar un algoritmo numérico que permita resolver problemas de valores iniciales, además de esto nos ayuda en la búsqueda de soluciones aproximadas a problemas matemáticos en general. Este método juega un papel excepcional en la enseñanza como base metodológica para explicar métodos más complicados.

Objetivos

- Plantear un ejercicio, el cual contiene una ecuación diferencial y un valor esperado a verificar mediante el método de Euler.

- Programar en Python y Matlab el método Euler y demostrar su correcto funcionamiento lógico.
- Crear un documento pedagógico, donde se dé a conocer el trabajo realizado.
- Elaborar el método Euler en Excel, con graficas e iteraciones

Marco Teórico

In mathematics and computational science, the Euler method (also called forward Euler method) is a first-order numerical procedure for solving ordinary differential equations (ODEs) with a given initial value. It is the most basic explicit method for numerical integration of ordinary differential equations and is the simplest Runge–Kutta method. The Euler method is named after Leonhard Euler, who treated it in his book Institutionum calculi integralis (published 1768–1870).

The Euler method is a first-order method, which means that the local error (error per step) is proportional to the square of the step size, and the global error (error at a given time) is proportional to the step size. The Euler method often serves as the basis to construct more complex methods, e.g., predictor–corrector method.(0)

El método de Euler es el más simple de los métodos numéricos para resolver un problema de valor inicial del tipo:

$$\text{PVI} \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,\ y) \\ y\ (x_0) = y_0 \\ y\ (x_f) = ? \end{cases}$$

Ecuación 1

Consiste en dividir el intervalo que va de x, a x, en n subintervalos de ancho h o sea:

$$h = \frac{x_f - x_0}{n}$$

Ecuación 2

de manera que se obtiene un conjunto discreto de (n + 1) puntos: *x_0, x_1, x_2, …, x_n del intervalo de interés [x_0, x_n]. Para cualquiera de estos puntos se cumple que

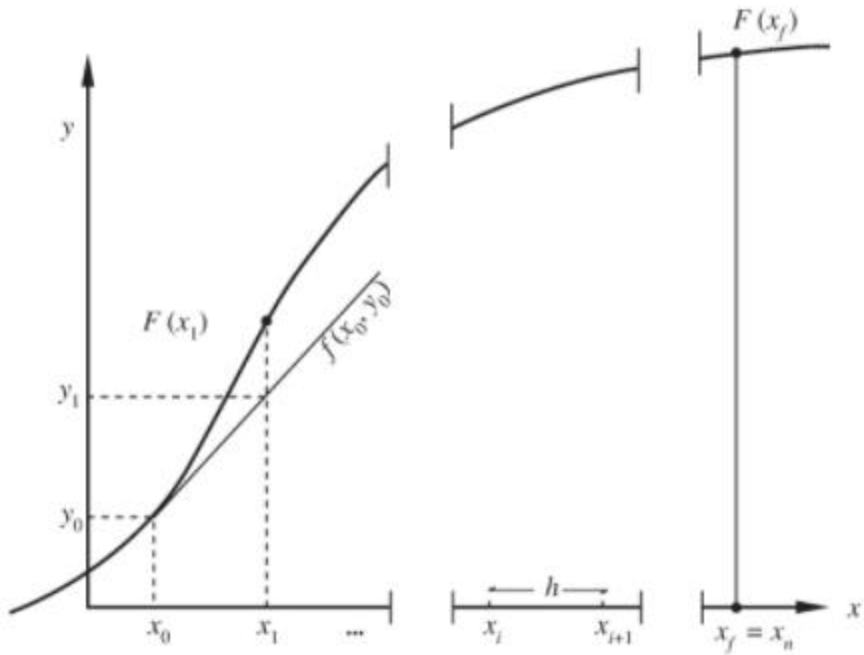
$$x_i = x_0 + ih,\ 0 \leq i \leq n$$

Ecuación 3

Nótese la similitud de este desarrollo con el primer paso de la integración numérica. La condición inicial y (x_0) = y_0 representa el punto P_0 = (x_0, y_0) por donde pasa la curva solución de la ecuación 1, la cual por simplicidad se denotará como F(x)=y, en lugar de F(x, y c,) = 0. Con el punto p_0 se puede evaluar la primera derivada de F(x) en ese punto; a saber

$$F'(x) = \frac{dy}{dx} \bigg| P_0 = f(x_0, y_0)$$

Ecuación 4



Con esta información se procede a trazar una recta, aquella que pasa por P_0 y de pendiente (x_0, y_0). Esta recta aproxima F (x) en una vecindad de x_0. Tómese la recta como remplazo de F (x) y localícese en ella (la recta) el valor de y correspondiente a x_1 . Entonces,

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f(x_0, y_0)$$

Ecuación 5

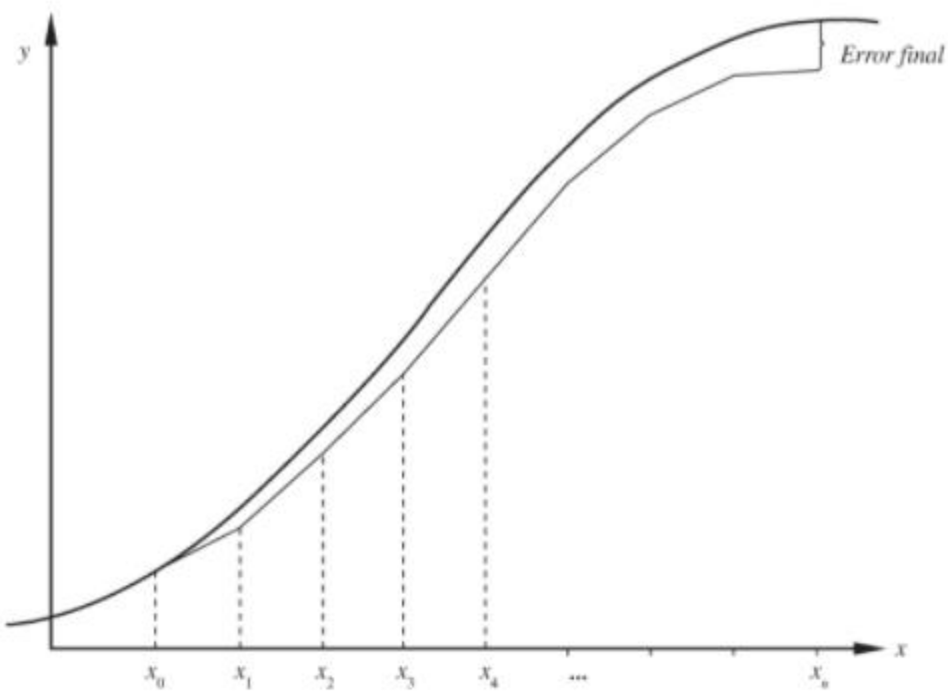
Se resuelve para y_1

$$y_1 = y_0 + (x_1 - x_0)\, f(x_0, y_0) = y_0 + h\, f(x_0, y_0)$$

Ecuación 6

Es evidente que la ordenada y_1 calculada de esta manera no es igual a F(x,), pues existe un pequeño error. No obstante, el valor y_1 sirve para aproximar F' (x) en el punto P= (x_1, y_1). y repetir el procedimiento anterior a fin de generar la sucesión de aproximaciones siguiente:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + h\,f(x_0, y_0) \\
y_2 &= y_1 + h\,f(x_1, y_1) \\
&\vdots \\
y_{i+1} &= y_i + h\,f(x_i, y_i) \\
&\vdots \\
y_n &= y_{n-1} + h\,f(x_{n-1}, y_{n-1})
\end{aligned}
$$



Como se muestra en la figura anterior, en esencia se trata de aproximar la curva y = F(x) por medio de una serie de segmentos de línea recta. Dado que la aproximación a una curva mediante una línea recta no es exacta, se comete un error propio del método mismo. De modo similar a como se hizo en otros capítulos, éste se denominará error de truncamiento. Dicho error puede disminuirse tanto como se quiera (al menos teóricamente) reduciendo el valor de h, pero a cambio de un mayor número de cálculos y tiempo de máquina y, por consiguiente, de un error de redondeo más alto. (1)

Metodología

Ejercicio 1: (2)

Nota: Ejercicio Replanteado

1. Para poder solucionar una ecuación diferencial por medio del método Euler, se necesitan unos parámetros los cuales son:
    a. X_0 , Este es el valor inicial de X desde donde se iniciará a evaluar, valor inicial de las aproximaciones.
    b. X_f , Es el valor al cual nos vamos a aproximar o es el valor al cual se debe llegar como límite y producto de las iteraciones o del h.
    c. Y_0, Valor inicial desde el cual, a partir de las iteraciones, el valor de X más el incremento determinara el valor esperado, o la llamada raíz real en otros métodos numéricos.
    d. $\frac{dy}{dx} = y'$, Es la ecuación en la cual se evaluará el punto especificado como requisito.
2. Como todo método numérico propone una ecuación solución, este método nos proporciona la siguiente ecuación con la cual hallaremos el valor de y:
    a. $y_{i+1} = y_i + h \times f(x_i)$

EJERCICIO CON EXPLICACIÓN PASO A PASO.

Para la ecuación $\frac{dy}{dx} = x - y + 4$ hallar el valor de y, teniendo en cuenta que el valor final de X = 1, el incremento h= 0.1, los valores iniciales; y = 2 y x = *0.*

Ya teniendo claro los requerimientos y la ecuación diferencial, procederemos a definir nuestras iteraciones y desarrollo paso a paso para llegar a una solución esperada.

Iteración 0. X=0, Y=2, en esta primera iteración reemplazamos todos nuestros valores y reemplazamos en la ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = 0 - 2 + 4$$

$$\frac{dy}{dx} = 2$$

Iteración 0.

$x = 0$

$x = 0$

$y_{i+1} = 2 + 0.1 \times 2$

$y_{i+1} = 2{,}2$

$$\frac{dy}{dx} = 0{,}1 - 2{,}2 + 4$$

$$\frac{dy}{dx} = 2$$

Iteración 1.

$$x = 0 + 0{,}1$$

$$x = 0{,}1$$

$$y_{i+1} = 2{,}2 + 0.1 \ \times 2$$

$$y_{i+1} = 2{,}39$$

$$\frac{dy}{dx} = 0{,}1 - 2{,}39 + 4$$

$$\frac{dy}{dx} = 1{,}9$$

Iteración 2.

$$x = 0{,}1 + 0{,}1$$

$$x = 0{,}2$$

$$y_{i+1} = 2{,}39 + 0.1 \ \times 1{,}9$$

$$y_{i+1} = 2{,}571$$

$$\frac{dy}{dx} = 0{,}2 - 2{,}571 + 4$$

$$\frac{dy}{dx} = 1{,}81$$

Iteración 3.

$$x = 0,2 + 0,1$$

$$x = 0,3$$

$$y_{i+1} = 2,571 + 0.1 \times 1,81$$

$$y_{i+1} = 2,7439$$

$$\frac{dy}{dx} = 0,3 - 2,7439 + 4$$

$$\frac{dy}{dx} = 1,729$$

Iteración 4.

$$x = 0,3 + 0,1$$

$$x = 0,4$$

$$y_{i+1} = 2,7439 + 0.1 \times 1,729$$

$$y_{i+1} = 2,90951$$

$$\frac{dy}{dx} = 0,4 - 2,90951 + 4$$

$$\frac{dy}{dx} = 1,6561$$

Iteración 5.

$$x = 0,4 + 0,1$$

$$x = 0,5$$

$$y_{i+1} = 2,90951 + 0.1 \times 1,6561$$

$$y_{i+1} = 3{,}068559$$

$$\frac{dy}{dx} = 0{,}5 - 3{,}068559 + 4$$

$$\frac{dy}{dx} = 1{,}59049$$

Iteración 6.

$$x = 0{,}5 + 0{,}1$$

$$x = 0{,}6$$

$$y_{i+1} = 3{,}068559 + 0.1 \times 1{,}59049$$

$$y_{i+1} = 3{,}2217031$$

$$\frac{dy}{dx} = 0{,}6 - 3{,}2217031 + 4$$

$$\frac{dy}{dx} = 1{,}531441$$

Iteración 7.

$$x = 0{,}6 + 0{,}1$$

$$x = 0{,}7$$

$$y_{i+1} = 3{,}2217031 + 0.1 \times 1{,}531441$$

$$y_{i+1} = 3{,}36953279$$

$$\frac{dy}{dx} = 0{,}7 - 3{,}2217031 + 4$$

$$\frac{dy}{dx} = 1{,}4782969$$

Iteración 8.

$$x = 0{,}7 + 0{,}1$$

$$x = 0{,}8$$

$$y_{i+1} = 3{,}36953279 + 0.1 \times 1{,}4782969$$

$$y_{i+1} = 3{,}36953279$$

$$\frac{dy}{dx} = 0{,}7 - 3{,}36953279 + 4$$

$$\frac{dy}{dx} = 1{,}43046721$$

Iteración 9.

$$x = 0{,}8 + 0{,}1$$

$$x = 0{,}9$$

$$y_{i+1} = 3{,}512579511 + 0.1 \times 1{,}43046721$$

$$y_{i+1} = 3{,}36953279$$

$$\frac{dy}{dx} = 0{,}7 - 3{,}36953279 + 4$$

$$\frac{dy}{dx} = 1{,}387420489$$

Iteración 10.

$$x = 0{,}6 + 0{,}1$$

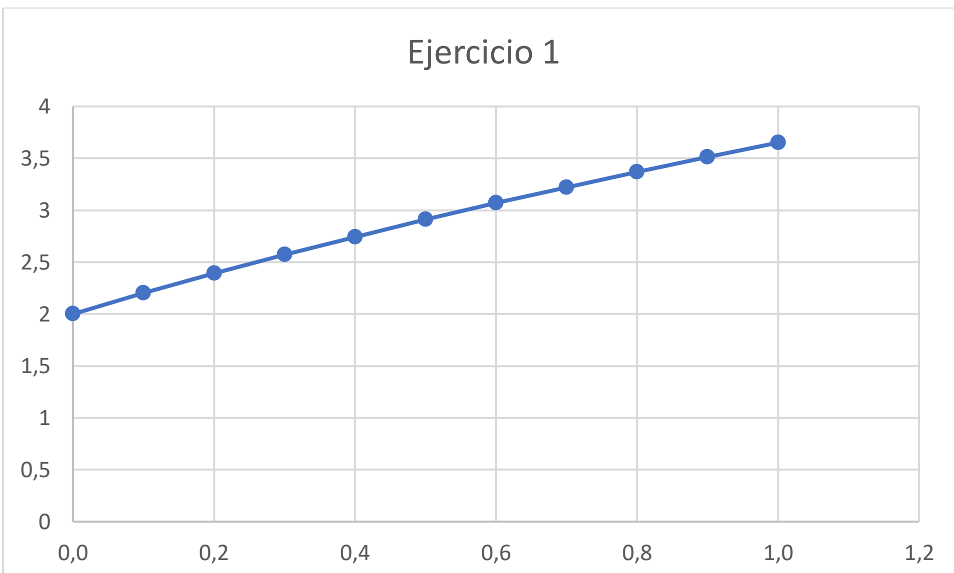
$$x = 0{,}7$$

$$y_{i+1} = 3{,}2217031 + 0.1 \ \times 1{,}387420489$$

$$y_{i+1} = 3{,}36953279$$

$$\frac{dy}{dx} = 0{,}7 - 3{,}2217031 + 4$$

$$\frac{dy}{dx} = 1{,}34867844010$$



Ejercicio 2: (3)

Nota: Ejercicio Replanteado

Método de Euler

Es un procedimiento de integración numérica que nos permite resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con una condición inicial o sea un problema de valor inicial.

Expresiones a utilizar:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$x_n = a + n\Delta x$$

$$y_n = y_{n-1} + \Delta x f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

Problema: Emplear el método de Euler para resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = 0.1\sqrt{y} + 0.4x^2$$

$y(2) = 4$ Condición inicial

x=2, y=4

Obtener una aproximación para y (2.5)

x=2,5, y=?

	x	y
a	2	4
b	2,5	?

Incremento o espesor:

n=10

Aplicación primera formula:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$\Delta x = \frac{2,5-2}{10} = 0.05$$

Aplicación segunda formula:

$$x_n = a + n\Delta x$$

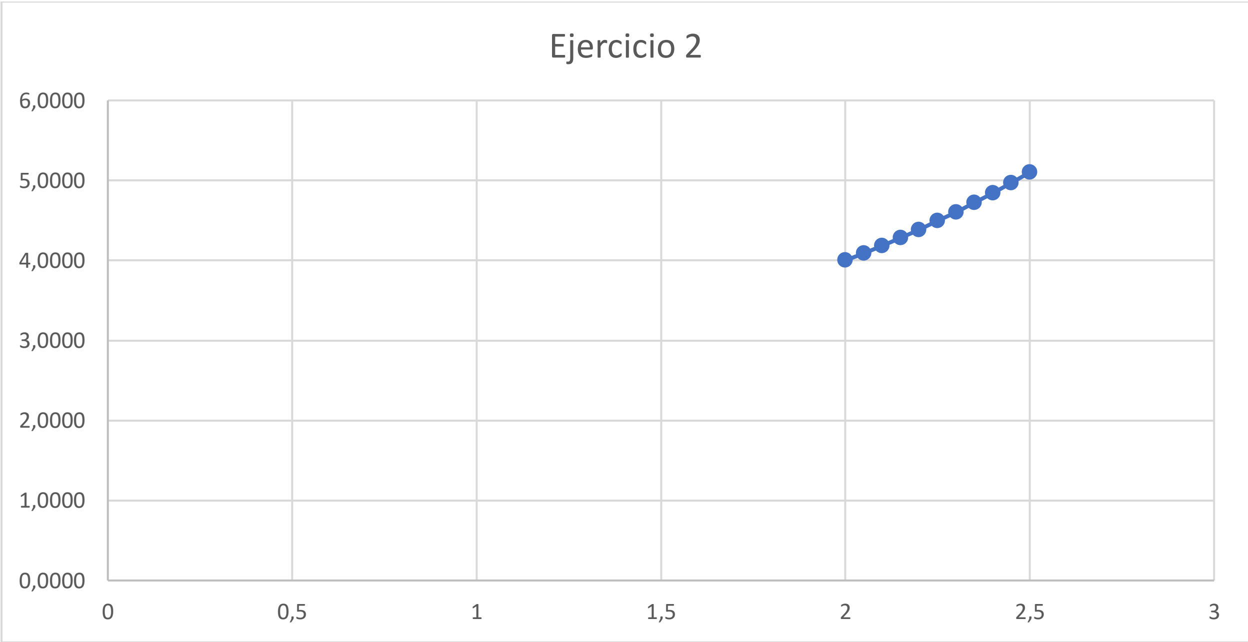
n	$x_n = a + n\Delta x$
0	2+(0)*(0.05)=2
1	2+(1)*(0.05)=2.05
2	2+(2)*(0.05)=2.1
3	2+(3)*(0.05)=2.15
4	2+(4)*(0.05)=2.2
5	2+(5)*(0.05)=2.25
6	2+(6)*(0.05)=2.3
7	2+(7)*(0.05)=2.35
8	2+(8)*(0.05)=2.4
9	2+(9)*(0.05)=2.45
10	2+(10)*(0.05)=2.5

n	x	$y_n = y_{n-1} + \Delta x f(x_{n-1}, y_{n-1})$	$f = 0.1\sqrt{y} + 0.4x^2$
0	2	$y_0 = 4$	$0.1\sqrt{4} + 0.4(2)^2 = 1.8$
1	2.05	$y_1 = 4 + (0.05)(1.8)$=4.09	$0.1\sqrt{4.09} + 0.4(2.05)^2 = 1.8832$

2	2.1	$y_2 = 4.09 + (0.05)(1.8832)$=4.18416	$0.1\sqrt{4.18416} + 0.4(2.1)^2 = 1.96855$
3	2.15	$y_3 = 4.18416 + (0.05)(1.96855)$=4.2825	$0.1\sqrt{4.2825} + 0.4(2.15)^2 = 2.0559$
4	2.2	$y_4 = 4.2825 + (0.05)(2.0559)$=4.3854	$0.1\sqrt{4.38454} + 0.4(2.2)^2 = 2.1454$
5	2.25	$y_5 = 4.3854 + (0.05)(2.1454)$=4.4927	$0.1\sqrt{4.4927} + 0.4(2.25)^2 = 2.237$
6	2.3	$y_6 = 4.4927 + (0.05)(2.237)$=4.6045	$0.1\sqrt{4.6045} + 0.4(2.3)^2 = 2.3306$
7	2.35	$y_7 = 4.6045 + (0.05)(2.3306)$=4.721	$0.1\sqrt{4.721} + 0.4(2.35)^2 = 2.4263$
8	2.4	$y_8 = 4.7121 + (0.05)(2.4263)$=4.8423	$0.1\sqrt{4.8423} + 0.4(2.4)^2 = 2.5241$
9	2.45	$y_9 = 4.8423 + (0.05)(2.5241)$=4.9686	$0.1\sqrt{4.9686} + 0.4(2,45)^2 = 2.6239$
10	2.5	$y_{10} = 4.9686 + (0.05)(2.6239)$=5.0997	

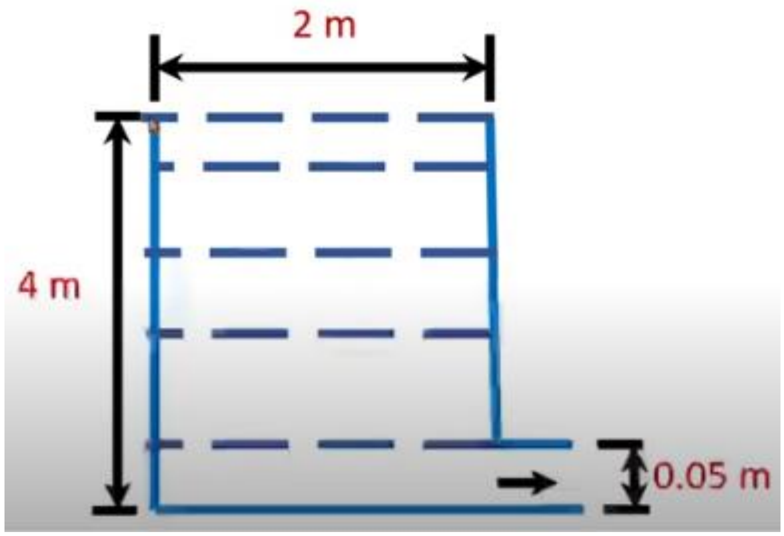
Respuesta

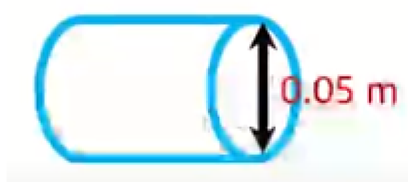
x	y
2	4
2.5	5.0997

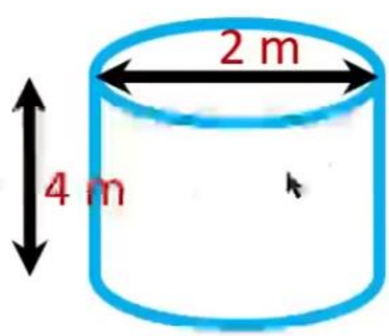


Ejercicio 3: (4)

Tenemos un tanque con un diámetro de 2 metros, una altura de 4 metros, se vacía por una tubería de 0.05 metros, cuando el tanque está lleno tiene una altura de 4 metros y cuando se abre la tubería se empieza a vaciar. Determine la altura que tendrá el líquido a los 200 segundos.







Método de Euler Formulas

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$x_n = a + n\Delta x$$

$$y_n = y_{n-1} + \Delta x f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

Despeje de la ecuación para solucionar el problema

Q**= Caudal**

v**= Velocidad**

A**= Area**

d**=diametro**

$$Q_{salida} = vA_T$$

$$A_T = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$Q_{salida} = v\frac{\pi d^2}{4}$$

$E_c =$ **Energia Cinetica**

E_p**= Energia Cinetica**

m **= masa**

v **= velocidad**

g = gravedad

h = altura

$\boldsymbol{V} = \textbf{volumen}$

$\boldsymbol{t = tiempo}$

$\boldsymbol{D} = \ \textbf{diametro mayor}$

$$E_c = E_p$$

$$\frac{mv^2}{2} = \text{mgh}$$

$$v^2 = \frac{2mgh}{m} = 2\text{gh}$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

$$Q_{salida} = v\frac{\pi d^2}{4}$$

$$Q_{salida} = \frac{\sqrt{2gh}\pi d^2}{4}$$

$$h \neq cte$$

$$Q = \frac{dV}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\sqrt{2gh}\pi d^2}{4}$$

$$\text{(1) } dV = \left(\frac{\sqrt{2gh}\pi d^2}{4}\right)\text{dt}$$

$$V = A_{base}h = \frac{\pi D^2}{4}h, \text{ si la altura no varia}$$

$$\text{(2) dV} = -\frac{\pi D^2}{4}dh, \text{ si la altura varia, se esta vaciando}$$

$$\mathbf{dV}=V_2\text{-}V_1$$

$$-\frac{\pi D^2}{4}dh = \left(\frac{\sqrt{2gh}\pi d^2}{4}\right)\mathrm{dt}$$

$$dh = -\frac{4}{\pi D^2}\left(\frac{\sqrt{2gh}\pi d^2}{4}\right)\mathrm{dt}$$

$$dh = -\frac{\sqrt{2gh}d^2}{D^2}\mathrm{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\sqrt{2gh}d^2}{D^2}$$ **Vaciado de un tanque por gravedad**

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\sqrt{2(9{,}81)h}\,(0{,}05)^2}{2^2}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\sqrt{19{,}62h}\,(2{,}5x10^{-3})}{4}$$

$$\frac{dh}{dt} = -2{,}7684\mathrm{x}10^{-3}\sqrt{h}$$

h(0) = 4

h(200) = ?

h	V
4	**=TRUNCAR((((PI()*2^2)/4)*4);2)**
2	**=TRUNCAR((((PI()*2^2)/4)*2);2)**

h	V
4	**12,56**

2	**6,28**

4-> 12,56cm^3	Volumen del tanque totalmente lleno
2-> 6,28cm^3	Volumen del tanque lleno hasta la mitad

$$dV = V_2 - V_1$$

$$dV = 6,28 - 12,56$$

$$dV = -6,28$$

	t	h
a	0	4
b	200	?

Incremento o espesor:

n=20

Aplicación primera formula:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$\Delta x = \frac{200-0}{20} = 10$$

Aplicación segunda formula:

$$x_n = a + n\Delta x$$

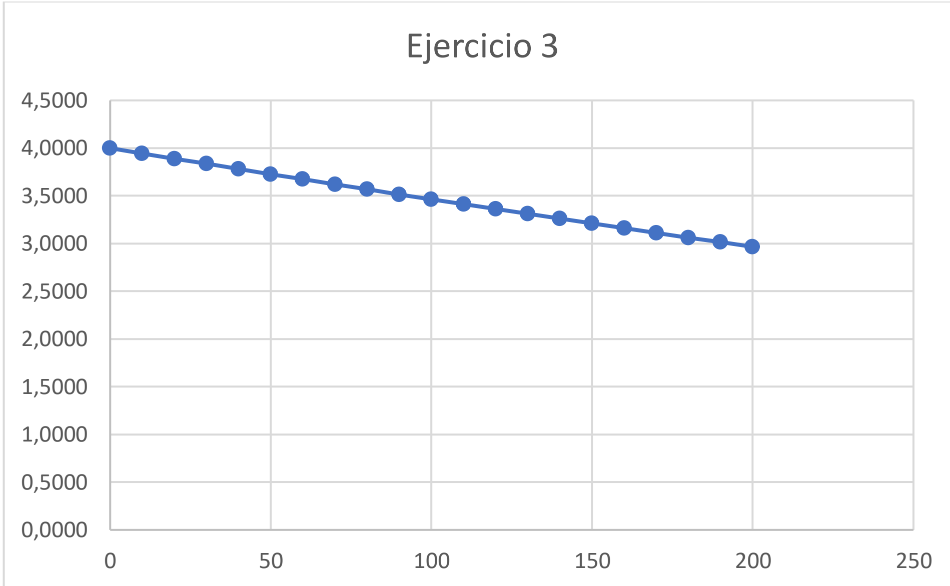
n	$x_n = a + n\Delta x$
0	0+(0)*(10)=0
1	0+(1)*(10)=10
2	0+(2)*(10)=20
3	0+(3)*(10)=30
4	0+(4)*(10)=40
5	0+(5)*(10)=50
6	0+(6)*(10)=60
7	0+(7)*(10)=70
8	0+(8)*(10)=80
9	0+(9)*(10)=90
10	0+(10)*(10)=100
11	0+(11)*(10)=110
12	0+(12)*(10)=120
13	0+(13)*(10)=130
14	0+(14)*(10)=140
15	0+(15)*(10)=150
16	0+(16)*(10)=160
17	0+(17)*(10)=170
18	0+(18)*(10)=180
19	0+(19)*(10)=190

20	0+(20)*(10)=200

n	x	$y_n=y_{(n-1)}+\Delta x f(x_{(n-1)},y_{(n-1)})$	$f=-2{,}7684*10^{-3}\sqrt{h}$
0	**0**	**4,0000**	=((-2,7684*10^-3)*(RAIZ(4,0000)))=-5,5368E-03
1	10	=4,000+(10)*(- 5,5368E-03)=3,9446	=((-2,7684*10^-3)*(RAIZ(3,9446)))=-5,4983E-03
2	20	=3,9446+(10)*(- 5,4983E-03)=3,8896	=((-2,7684*10^-3)*(RAIZ(3,8896)))=-5,4599E-03
3	30	3,8350	-5,4214E-03
4	40	3,7808	-5,3830E-03
5	50	3,7270	-5,3445E-03
6	60	3,6736	-5,3061E-03
7	70	3,6205	-5,2676E-03
8	80	3,5678	-5,2291E-03
9	90	3,5155	-5,1907E-03
10	100	3,4636	-5,1522E-03
11	110	3,4121	-5,1138E-03
12	120	3,3610	-5,0753E-03
13	130	3,3102	-5,0368E-03
14	140	3,2598	-4,9984E-03
15	150	3,2099	-4,9599E-03
16	160	3,1603	-4,9214E-03
17	170	3,1110	-4,8829E-03
18	180	3,0622	-4,8445E-03
19	190	3,0138	-4,8060E-03
20	**200**	**2,9657**	

Respuesta

x	y
0	4
200	2,9657



Nota: Si se quisiera saber en cuanto tiempo el tanque estará vacío entonces:

n	x	$y_n=y_{(n-1)}+\Delta x f(x_{(n-1)},y_{(n-1)})$	$f=-2{,}7684*10^{-3}\sqrt{h}$
0	0	4,0000	-5,5368E-03
1	10	3,9446	-5,4983E-03
2	20	3,8896	-5,4599E-03
3	30	3,8350	-5,4214E-03
4	40	3,7808	-5,3830E-03
5	50	3,7270	-5,3445E-03
6	60	3,6736	-5,3061E-03
7	70	3,6205	-5,2676E-03
8	80	3,5678	-5,2291E-03
9	90	3,5155	-5,1907E-03
10	100	3,4636	-5,1522E-03
11	110	3,4121	-5,1138E-03
12	120	3,3610	-5,0753E-03
13	130	3,3102	-5,0368E-03
14	140	3,2598	-4,9984E-03
15	150	3,2099	-4,9599E-03
16	160	3,1603	-4,9214E-03
17	170	3,1110	-4,8829E-03
18	180	3,0622	-4,8445E-03
19	190	3,0138	-4,8060E-03
20	200	2,9657	-4,7675E-03
21	210	2,9180	-4,7291E-03

22	220	2,8707	-4,6906E-03
23	230	2,8238	-4,6521E-03
24	240	2,7773	-4,6136E-03
25	250	2,7312	-4,5751E-03
26	260	2,6854	-4,5367E-03
27	270	2,6401	-4,4982E-03
28	280	2,5951	-4,4597E-03
29	290	2,5505	-4,4212E-03
30	300	2,5063	-4,3827E-03
31	310	2,4624	-4,3442E-03
32	320	2,4190	-4,3057E-03
33	330	2,3759	-4,2672E-03
34	340	2,3333	-4,2287E-03
35	350	2,2910	-4,1903E-03
36	360	2,2491	-4,1518E-03
37	370	2,2076	-4,1133E-03
38	380	2,1664	-4,0748E-03
39	390	2,1257	-4,0363E-03
40	400	2,0853	-3,9978E-03
41	410	2,0453	-3,9592E-03
42	420	2,0058	-3,9207E-03
43	430	1,9665	-3,8822E-03
44	440	1,9277	-3,8437E-03
45	450	1,8893	-3,8052E-03
46	460	1,8512	-3,7667E-03
47	470	1,8136	-3,7282E-03
48	480	1,7763	-3,6897E-03
49	490	1,7394	-3,6511E-03
50	500	1,7029	-3,6126E-03
51	510	1,6668	-3,5741E-03
52	520	1,6310	-3,5356E-03
53	530	1,5957	-3,4970E-03
54	540	1,5607	-3,4585E-03
55	550	1,5261	-3,4200E-03
56	560	1,4919	-3,3814E-03
57	570	1,4581	-3,3429E-03
58	580	1,4247	-3,3043E-03
59	590	1,3916	-3,2658E-03
60	600	1,3590	-3,2272E-03
61	610	1,3267	-3,1887E-03
62	620	1,2948	-3,1501E-03

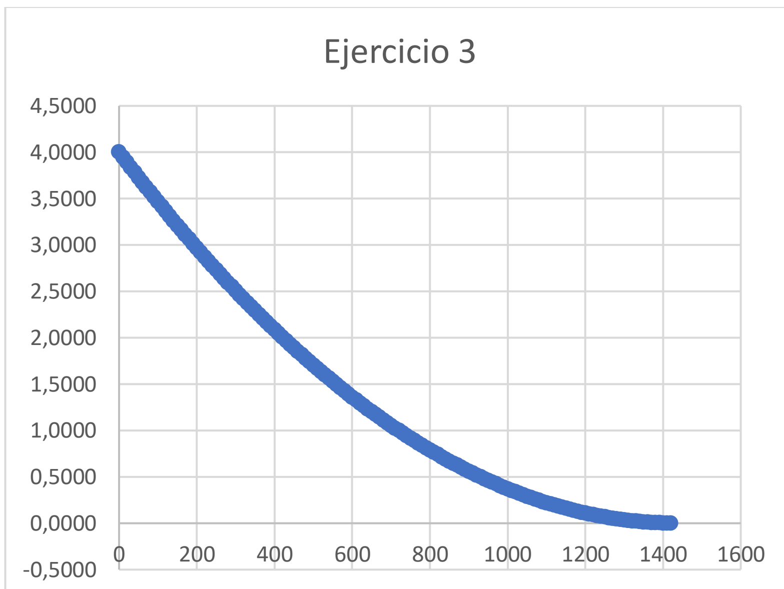
63	630	1,2633	-3,1116E-03
64	640	1,2322	-3,0730E-03
65	650	1,2015	-3,0345E-03
66	660	1,1711	-2,9959E-03
67	670	1,1411	-2,9573E-03
68	680	1,1116	-2,9188E-03
69	690	1,0824	-2,8802E-03
70	700	1,0536	-2,8416E-03
71	710	1,0252	-2,8030E-03
72	720	0,9971	-2,7644E-03
73	730	0,9695	-2,7258E-03
74	740	0,9422	-2,6873E-03
75	750	0,9154	-2,6487E-03
76	760	0,8889	-2,6101E-03
77	770	0,8628	-2,5715E-03
78	780	0,8371	-2,5328E-03
79	790	0,8117	-2,4942E-03
80	800	0,7868	-2,4556E-03
81	810	0,7622	-2,4170E-03
82	820	0,7381	-2,3784E-03
83	830	0,7143	-2,3397E-03
84	840	0,6909	-2,3011E-03
85	850	0,6679	-2,2624E-03
86	860	0,6453	-2,2238E-03
87	870	0,6230	-2,1851E-03
88	880	0,6012	-2,1465E-03
89	890	0,5797	-2,1078E-03
90	900	0,5586	-2,0691E-03
91	910	0,5379	-2,0304E-03
92	920	0,5176	-1,9918E-03
93	930	0,4977	-1,9531E-03
94	940	0,4782	-1,9144E-03
95	950	0,4590	-1,8756E-03
96	960	0,4403	-1,8369E-03
97	970	0,4219	-1,7982E-03
98	980	0,4039	-1,7595E-03
99	990	0,3863	-1,7207E-03
100	1000	0,3691	-1,6820E-03
101	1010	0,3523	-1,6432E-03
102	1020	0,3359	-1,6044E-03
103	1030	0,3198	-1,5656E-03

104	1040	0,3042	-1,5268E-03
105	1050	0,2889	-1,4880E-03
106	1060	0,2740	-1,4492E-03
107	1070	0,2595	-1,4103E-03
108	1080	0,2454	-1,3715E-03
109	1090	0,2317	-1,3326E-03
110	1100	0,2184	-1,2937E-03
111	1110	0,2054	-1,2548E-03
112	1120	0,1929	-1,2159E-03
113	1130	0,1807	-1,1769E-03
114	1140	0,1690	-1,1380E-03
115	1150	0,1576	-1,0990E-03
116	1160	0,1466	-1,0600E-03
117	1170	0,1360	-1,0209E-03
118	1180	0,1258	-9,8188E-04
119	1190	0,1160	-9,4278E-04
120	1200	0,1065	-9,0365E-04
121	1210	0,0975	-8,6448E-04
122	1220	0,0889	-8,2527E-04
123	1230	0,0806	-7,8601E-04
124	1240	0,0728	-7,4671E-04
125	1250	0,0653	-7,0735E-04
126	1260	0,0582	-6,6794E-04
127	1270	0,0515	-6,2845E-04
128	1280	0,0452	-5,8888E-04
129	1290	0,0394	-5,4923E-04
130	1300	0,0339	-5,0947E-04
131	1310	0,0288	-4,6959E-04
132	1320	0,0241	-4,2956E-04
133	1330	0,0198	-3,8936E-04
134	1340	0,0159	-3,4894E-04
135	1350	0,0124	-3,0825E-04
136	1360	0,0093	-2,6719E-04
137	1370	0,0066	-2,2564E-04
138	1380	0,0044	-1,8336E-04
139	1390	0,0026	-1,3989E-04
140	1400	0,0012	-9,4061E-05
141	1410	0,0002	-4,0479E-05
142	1420	-0,0002	

Respuesta

x	y
0	**4**
1420	**-0,0002**

Cuando hayan pasado 1420 segundos o 24 minutos el tanque estará vacío



Ejercicio 4 aplicando algoritmo en Matlab (5)

y'=cos(2x)+sin(3x), x ϵ [0,1], y(0)=1

Solución Exacta:

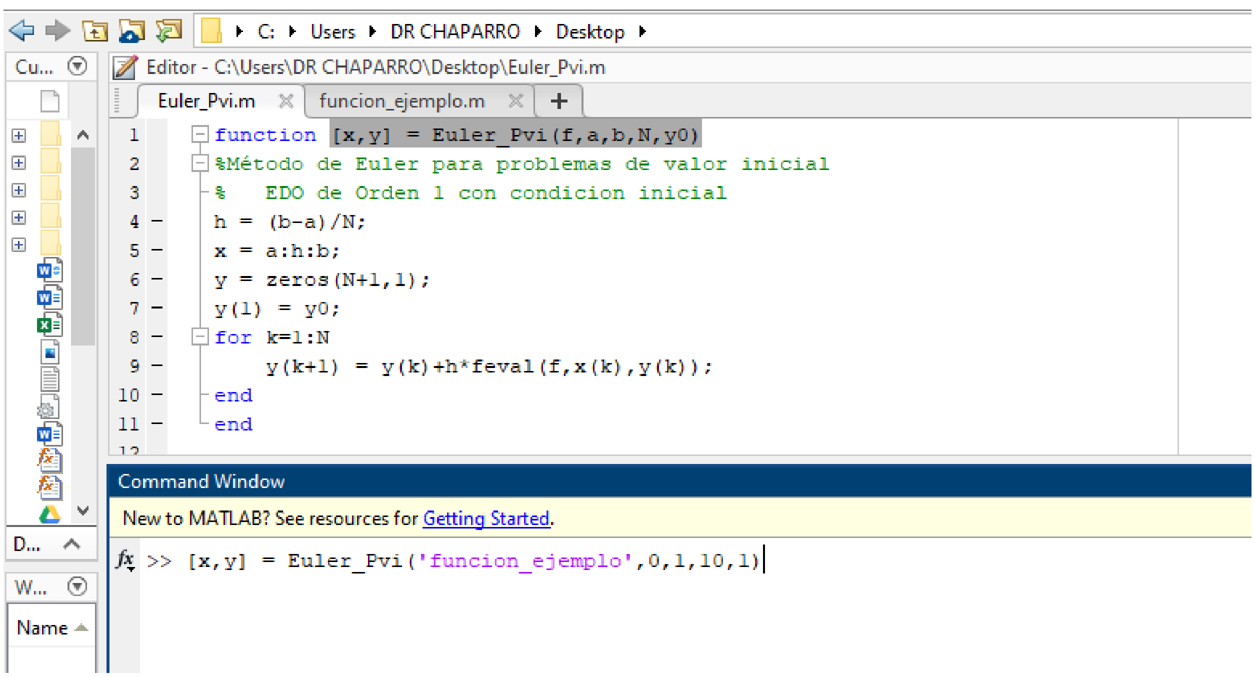
y(x)=$\frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{1}{3}\cos(3x) + \frac{4}{3}$

Euler_Pvi.m

```
function [x,y] = Euler_Pvi(f,a,b,N,y0)
%Método de Euler para problemas de valor inicial
%   EDO de Orden 1 con condicion inicial
h = (b-a)/N;
x = a:h:b;
y = zeros(N+1,1);
y(1) = y0;
for k=1:N
    y(k+1) = y(k)+h*feval(f,x(k),y(k));
end
end
```

funcion_ejemplo.m

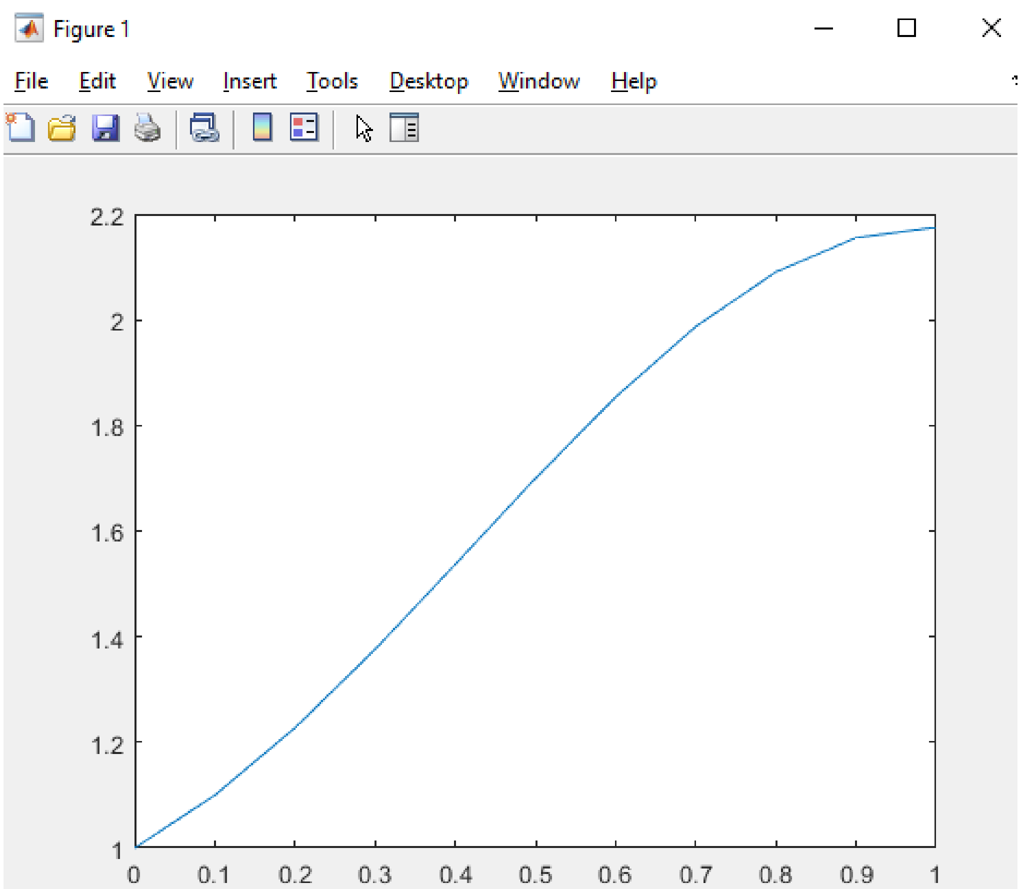
```
function z=funcion_ejemplo(x,y)
z=cos(2*x)+sin(3*x);
end
```



```
>> [x,y] = Euler_Pvi('funcion_ejemplo',0,1,10,1)

x =

         0    0.1000    0.2000    0.3000    0.4000    0.5000    0.6000    0.7000    0.8000    0.9000    1.0000


y =

    1.0000
    1.1000
    1.2276
    1.3761
    1.5370
    1.6999
    1.8536
    1.9873
    2.0906
    2.1552
    2.1752
```

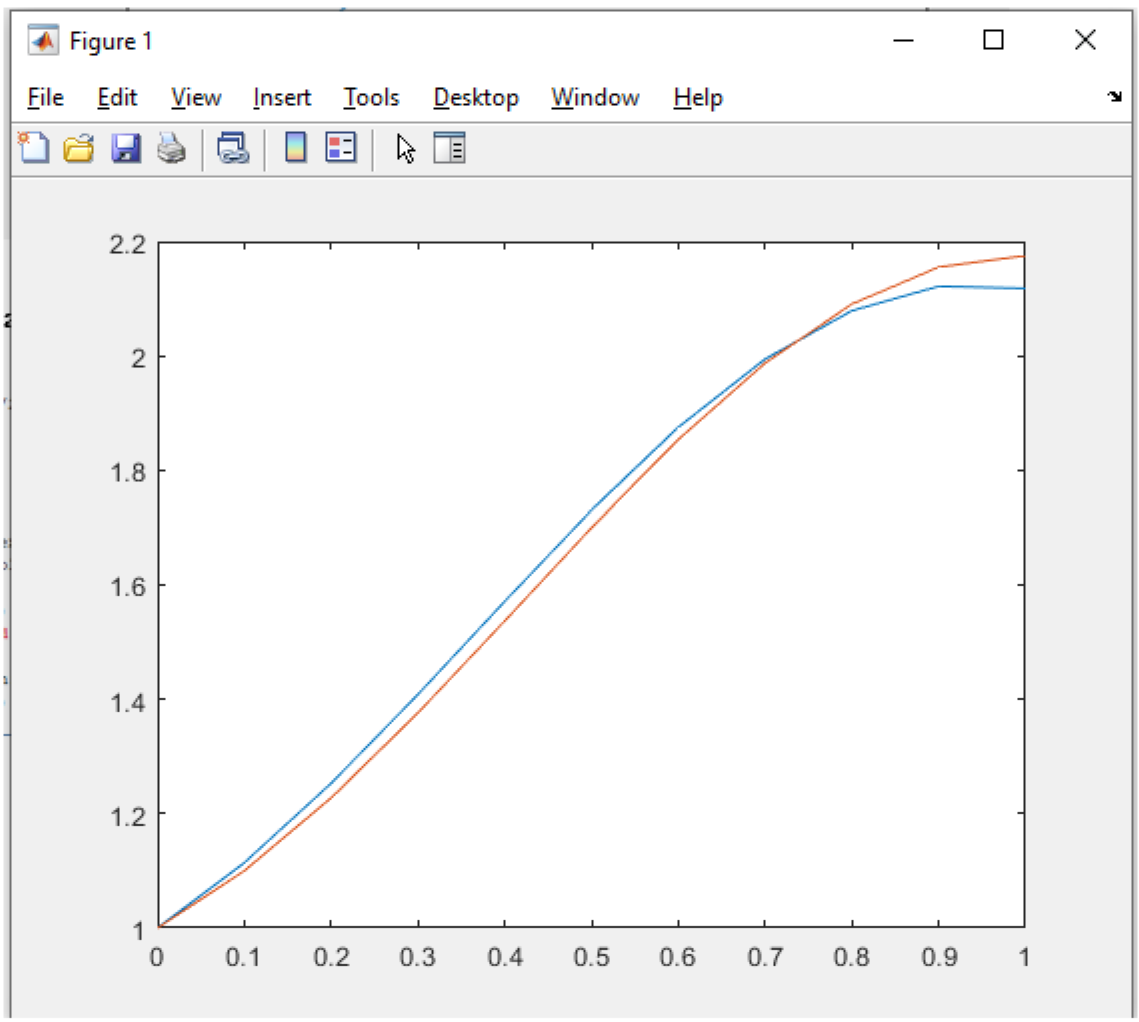
```
>> plot(x,y)
fx >>
```

Solución Aproximada



Para hallar la solución exacta:

```
>> solex=(1/2*sin(2*x)-1/3*cos(3*x)+4/3)

solex =

    1.0000    1.1142    1.2529    1.4085    1.5712    1.7305    1.8751    1.9943    2.0789    2.1216    2.1180

>> plot(solex,y)
>> plot(x,solex)
>> hold on
>> plox(x,y)
Unrecognized function or variable 'plox'.

Did you mean:
>> plot(x,y)
>>
```



Solución Exacta

Solución Aproximada

Análisis de Resultados

1. Ver anexo hoja de Excel 1
2. Ver anexo hoja de Excel 2
3. Ver anexo hoja de Excel 3 (Ejercicio propuesto para los estudiantes en clase)
4. Ver Anexo Euler Python
5. Ver Anexo Guia Aplicativo Euler en Python
6. Ver anexo archivos Euler_Pvi.m y función_ejemplo.m
7. Ver anexo manual de usuario para ejercicio de Matlab
8. Ver anexo video explicativo del proyecto

Conclusiones

- Se comprobó que el método de Euler soluciona ecuaciones diferenciales de primer orden a partir del valor que se le otorgo.
- Aprendimos como pasar de hacer cálculos y solucionar ecuaciones diferenciales en el cuaderno, a crear un programa en Python y Matlab para solucionar estas mismas.
- Se creo un documento enriquecedor para los conocimientos de todo el Público.
- Se logro adquirir y practicar más conocimientos respecto a la programación, solución matemática de ecuaciones, solución de problemas de la ingeniera y de la vida cotidiana.

Referencias Bibliográficas

0. Wikipedia contributors. (2020, 17 octubre). *Euler method*. Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_method#:%7E:text=The%20Euler%20method%20is%20a,proportional%20to%20the%20step%20size.
1. Nieves Hurtado, A. (2015). Métodos numéricos: aplicados a la ingeniería. México D.F, Mexico: Grupo Editorial Patria. Recuperado de https://elibro.net/es/ereader/usta/39455?page=556.
2. Alejandro Martínez Anguiano. (2017, 12 noviembre). Método de Euler [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=V6wLYLvqZ84&ab_channel=AlejandroMartinezAnguiano
3. cctmexico. (2020, 22 abril). *Método de Euler | Ecuaciones Diferenciales |Métodos Numéricos | Parte 1* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=PXdjSYPYLZ4&t=763s&ab_channel=cctmexico
4. cctmexico. (2020, 24 abril). *Aplicación del Método de Euler | Ecuaciones Diferenciales |Métodos Numéricos | Parte 2* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=jy9guAqutIM&ab_channel=cctmexico
5. El arte de Enseñar. (2019, 12 abril). *MÉTODO DE EULER EN MATLAB PARA ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDO) PASO A PASO* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=F2SNUAkm8-k&ab_channel=ElArtedeEnse%C3%B1ar