Cours de MOMI

Licence I Math-Info

Chapitre V: Récurrence

I - Les opérateurs somme et produit

1. L'opérateur somme

On utilise l'opérateur somme, qu'on note $\sum$, pour écrire une somme finie dont les termes successifs s'écrivent sous la forme d'une expression variant en fonction d'un indice.

Par exemple, la somme $x_1 + x_2 + \cdots + x_6$ s'écrit $\sum_{i=1}^{6} x_i$.

Dans l'expression $\sum_{i=1}^{6} x_i$, on a:

- le signe $\sum$ signifie l'opération addition.
- i est la variable qui prend les valeurs successives $1, 2, \ldots, 6$.
- "$i = 1$" au dessous de $\sum$ est la valeur initiale de la variable i.
- "6" au-dessus de $\sum$ est la valeur finale de la variable i.
- x_i devant $\sum$ est une fonction de la variable i, c'est-à-dire, si $i = 1$ alors $x_i = x_1$; si $i = 2$ alors $x_i = x_2$, ainsi de suite $\cdots$

On lit $\sum_{i=1}^{6} x_i$: somme des x_i pour i variant de 1 à 6.

Remarques.

(1) L'indice i dans la sommation est un indice muet:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

(2) On peut modifier les valeurs initiales et finales tout en préservant la même somme:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} = \sum_{i=-1}^{n-2} x_{i+2} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

(3) Si on a une somme infinie $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$, on écrit $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$.

(4) Parfois l'indice muet joue plusieurs rôles (indice, exposent, $\cdots$). Par exemple: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta^i = \alpha_1 \beta^1 + \alpha_2 \beta^2 + \cdots + \alpha_n \beta^n$.

Quelques règles de l'opérateur somme.

(1) $\sum_{i=1}^{n} \alpha = n\alpha$ (tous les termes de la somme sont égaux à α).

(2) $\sum_{i=1}^{n} \alpha x_i = \alpha(\sum_{i=1}^{n} x_i)$.

(3) Pour m vérifiant $1 \leq m < n$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) + \left(\sum_{i=m+1}^{n} x_i\right).$$

(4) $\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$.

(5) (Double somme) Parfois, on fait la somme des termes doublement indexés z_{ij} pour $i = 1, \cdots, n$ et $j = 1, \cdots, m$.

$$\begin{array}{cccc} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1m} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nm} \end{array}$$

Pour faire la somme de tous les termes z_{ij}, on peut commencer par faire la somme des termes de chaque ligne, puis faire la somme des résultats obtenus. Cela donne le résultat suivant:

$$\sum_{j=1}^{m} z_{1j} + \sum_{j=1}^{m} z_{2j} + \ldots + \sum_{j=1}^{m} z_{nj} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} z_{ij} \right).$$

De même en considérant les colonnes, on obtient $\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} z_{ij} \right)$.

D'où la règle:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} z_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} z_{ij}\right).$$

2. L'opérateur produit

Comme pour l'opérateur somme, l'opérateur produit sert à écrire des produits dont les termes dépendent d'un indice. Pour écrire le produit $x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n$, on utilise la notation $\prod_{i=1}^{n} x_i$, qu'on lit: produit des x_i pour i variant de 1 à n.

Remarques (Règles de l'opérateur produit):

(1) L'indice i dans le produit est muet:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = \prod_{j=1}^{n} x_j = \prod_{k=1}^{n} x_k = x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n.$$

(2) On peut modifier les valeurs initiales et finales de l'indice tout en préservant le produit:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = \prod_{i=0}^{n-1} x_{i+1} = \prod_{i=-1}^{n-2} x_{i+2} \text{ ainsi de suite}$$

(3) $\prod_{i=1}^{n} \alpha = \alpha^n$ (tous les termes du produit sont égaux à α).

(4) Pour m vérifiant $1 \leq m < n$, on a

$\prod_{i=1}^{n} x_i = \left(\prod_{i=1}^{m} x_i\right) \times \left(\prod_{i=m+1}^{n} x_i\right).$

(5) $\prod_{i=1}^{n} \alpha x_i = \alpha^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right).$

(6) $\prod_{i=1}^{n} x_i y_i = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) \times \left(\prod_{i=1}^{n} y_i\right).$

(7) $\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} z_{ij} = \prod_{j=1}^{m} \prod_{i=1}^{n} z_{ij}.$

II - Récurrence

Le principe de récurrence sert à démontrer des propriétés dont l'énoncé dépend d'un entier naturel. Voici des exemples d'énoncés:

(1) Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

(2) Si A est un ensemble fini formé de n éléments, alors $\mathcal{P}(A)$ est formé de 2^n éléments.

(3) Soit $a \in \mathbb{R}$ différent de 1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$.

Pour montrer que ces énoncés sont vrais pour tout entier naturel n, on utilise l'axiome suivant:

<u>Axiome</u>. (Axiome du plus petit élément).

Soit S une partie de $\mathbb{N}$ non vide. Alors, S admet un plus petit élément, c'est-à-dire:

$$\exists\, s \in S \ \text{ tel que } \ \forall\, n \in S \quad s \leq n.$$

<u>1. Premier principe de récurrence</u>.

Soit $P(n)$ une propriété qui dépend d'un entier naturel n. Supposons qu'on ait les deux conditions suivantes:

(1) (Initialisation) $P(0)$ est vraie.

(2) (Hérédité) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie.

Alors, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve du premier principe de récurrence.

Considérons l'ensemble $S = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ est fausse}\}$. On a $S \subset \mathbb{N}$.

On va montrer que $S = \emptyset$ (c'est-à-dire, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Supposons que $S \neq \emptyset$.

Par l'axiome du plus petit élément, S admet un plus petit élément, qu'on note α. Donc, $P(\alpha)$ est fausse car $\alpha \in S$.

Comme $0 \notin S$ (car $P(0)$ est vraie), on a $\alpha \geq 1$.

Ainsi, $\alpha - 1 \in \mathbb{N}$. Forcèment, $\alpha - 1 \notin S$ car α est le plus petit élément de S. Par conséquent, $P(\alpha - 1)$ est vraie.

Par l'hérédité, $P(\alpha)$ est vraie, une contradiction avec le fait que $P(\alpha)$ est fausse.

Exemple. Montrons que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit la propriété $P(n)$: $\sum\limits_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Montrons que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ en utilisant le premier principe de récurrence.

(1) Initialisation: On a $\sum\limits_{k=0}^{0} k = 0$ et $\frac{0(0+1)}{2} = 0$. Donc $P(0)$ est vraie.

(2) Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k &= \Big(\sum_{k=0}^{n} k\Big) + \Big(\sum_{n+1}^{n+1} k\Big) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \quad \text{(car } P(n) \text{ est vraie)} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}
\end{aligned}
$$

Donc, $P(n+1)$ est vraie.

Par le premier principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire, $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

2. Deuxième principe de récurrence

Soit $P(n)$ une propriété qui dépend d'un entier naturel n.
Supposons qu'on ait les deux conditions suivantes:

(1) (Initialisation) $P(0)$ est vraie.

(2) (Hérédité) Pour tout $n > 0$, si $P(k)$ est vraie pour tout $k < n$, alors $P(n)$ est vraie.

Alors, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve. À faire en exercice.

Pour la suite on donne une application du deuxième principe de récurrence.

Théorème (Division Euclienne ou algorithme d'Euclide)

$$\forall\ n \in \mathbb{Z} \quad \forall\ m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \exists!\ q, r \in \mathbb{Z} \ \ \textit{tels que}$$

$$\begin{cases} n = m \times q + r \\ 0 \leq r < m. \end{cases}$$

n s'appelle le dividende de la division Euclidienne de n par m.

m s'appelle le diviseur de la division Euclidienne de n par m.

q s'appelle le quotient de la division Euclidienne de n par m.

r s'appelle le reste de la division Euclidienne de n par m.

Preuve.

1. Existence de q et r.

(a) Cas où $n \in \mathbb{N}$.

On procède par récurrence sur n en utilisant le deuxième principe:

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, soit la propriété $P(n)$:

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \;\; \exists\, q, r \in \mathbb{Z} \quad | \quad n = m \times q + r \text{ et } 0 \leq r < m.$$

– $P(0)$ est vraie car:
$\forall\ m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a $0 = m \times 0 + 0$ et $0 \leq 0 < m$ (car $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$). On prend $q = 0$ et $r = 0$.

– Supposons que $n > 0$ et que $P(k)$ soit vraie pour tout $k < n$.
Montrons que $P(n)$ est vraie.

Soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

- Si $m > n$, alors $n = m \times 0 + n$ et on a bien $0 \leq n < m$. On prend $q = 0$ et $r = n$.

- Si $m \leq n$, alors $n - m \in \mathbb{N}$ et $n - m < n$ car $m > 0$. Puisque $P(n-m)$ est vraie, il existe $q', r' \in \mathbb{Z}$ tels que

$$n - m = m \times q' + r' \text{ et } 0 \leq r' < m.$$

Ainsi, on obtient $n = m \times (q'+1) + r'$. On prend $q = q' + 1$ et $r = r'$.

Par conséquent, $P(n)$ est vraie.

Par le deuxième principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Cas où $n < 0$.

Puisque $-n \in \mathbb{N}$, on déduit par le cas (a) qu'il existe $q', r' \in \mathbb{Z}$ vérifiant:

$$-n = m \times q' + r' \text{ tels que } 0 \leq r' < m.$$

Donc, on a

$$n = m \times (-q') - r'.$$

- Si $r' = 0$, alors $n = m \times (-q') + 0$. On prend $q = -q'$ et $r = 0$.
- Si $r' > 0$, alors $m - r' < m$. Puisque $n = m \times (-q') - r'$, alors

$$n = m \times (-q' - 1) + m - r'.$$

On prend $q = -q' - 1$ et $r = m - r'$.

2. Unicité de q et r.

Supposons qu'on ait

$$n = m \times q + r = m \times q' + r' \text{ tel que } 0 \leq r, r' < m. \quad (*)$$

Montrons que $q = q'$ et $r = r'$.

Sans perdre de généralités, on peut supposer $r' \leq r$. Donc, $0 \leq r - r' \leq r < m$.

Par (*), on a

$$r - r' = m \times (q' - q) \geq 0.$$

Si $q' - q > 0$, alors $q' - q \geq 1$, et par conséquent $m \times (q' - q) \geq m$.

Ainsi, on obtient $m > r - r' \geq m$, ce qui est absurde. D'où, $q = q'$ et $r = r'$. Ceci finit la preuve de l'algorithme d'Euclide.

Remarque.

(a) Si une propriété $P(n)$ est définie pour $n \geq n_0$, alors le premier principe de récurrence se formule ainsi:

Supposons qu'on ait les deux conditions suivantes:

(1) (Initialisation) $P(n_0)$ *est vraie.*

(2) (Hérédité) Pour tout entier $n \geq n_0$, *si* $P(n)$ *est vraie, alors* $P(n+1)$ *est vraie.*

Alors, $P(n)$ *est vraie pour tout* $n \geq n_0$.

(b) Idem pour le deuxième principe de récurrence:

Supposons qu'on ait les deux conditions suivantes:

(1) (Initialisation) $P(n_0)$ *est vraie.*

(2) (Hérédité) Pour tout $n > n_0$, *si* $P(k)$ *est vraie pour tout* $n_0 \leq k < n$, *alors* $P(n)$ *est vraie.*

Alors, $P(n)$ *est vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}$.