Cours de MOMI

Licence I Math-Info

Chapitre IV: Relations d'ordre

1. Relation binaire

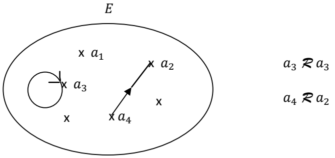
Définition. *Soient E et F deux ensembles.*
(1) Une relation binaire de E vers F est un procédé associant à des éléments de E des éléments de F.
(2) Si $\mathcal{R}$ est une relation binaire de E vers F, et si un élément x de E est associé à un élément y de F, on écrit $x\,\mathcal{R}\,y$ et on dit que x est en relation avec y. Dans le cas contraire, on écrit $x \not\mathcal{R}\, y$.
(3) Le graphe d'une relation binaire $\mathcal{R}$ de E vers F est l'ensemble $\{(x, y) \in E \times F \mid x\,\mathcal{R}\,y\}$.

Exemple. Une application $f : E \longrightarrow F$ peut être considérée comme une relation binaire de E vers F en associant à chaque élément $x \in E$ son image $f(x) \in F$. Son graphe est l'ensemble $\{(x, f(x)) \mid x \in E\}$.

Pour la suite, on va considérer uniquement les relations binaires de E vers E, qu'on appelera tout simplement les relations sur E.

2. Représentation d'une relation

Soient $E = \{a_1, \dots, a_n\}$ un ensemble fini, et $\mathcal{R}$ une relation sur E. Dans une patate formée des éléments de E, on relie a_i à a_j par une flèche orientée vers a_j lorsque $a_i \mathcal{R} a_j$.



Exemples. Soient E un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

(1) La relation "égalité" est la relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur E par:

$$\forall x, y \in E \quad x \mathcal{R} y \iff x = y.$$

(2) La relation "inclusion" est la relation binaire $\mathcal{S}$ définie sur $\mathcal{P}(E)$ par:

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad A \mathcal{S} B \iff A \subset B.$$

(3) La relation "divise" dans $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ est la relation binaire $\mid$ définie par:

$$\forall\, m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad m \mid n \iff \exists\, q \in \mathbb{Z} \text{ tel que } n = m \times q.$$

On lit "$m \mid n$": m divise n.

Définition. *Soit $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble E.*
(1) On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E si elle vérifie:

- *Réflexivité:* $\forall\, x \in E, \quad x \,\mathcal{R}\, x.$
- *Antisymétrie:* $\forall\, x, y \in E, \quad (x \,\mathcal{R}\, y \text{ et } y \,\mathcal{R}\, x) \implies x = y.$
- *Transitivité:* $\forall\, x, y, z \in E, \quad (x \,\mathcal{R}\, y \text{ et } y \,\mathcal{R}\, z) \implies x \,\mathcal{R}\, z.$

Dans ce cas, on dit que E est ordonné par la relation d'ordre $\mathcal{R}$.

(2) Si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E, on dit que deux éléments x, y de E sont comparables par $\mathcal{R}$ si $x \,\mathcal{R}\, y$ ou $y \,\mathcal{R}\, x$.

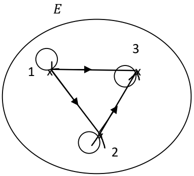
Exemples. (1) Voici quelques exemples de relations d'ordre.

– La relation d'ordre usuel $\leq$ sur $\mathbb{R}$.

– La relation "divise" sur $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ (voir TD).

– La relation "inclusion" définie sur $\mathcal{P}(E)$ pour E un ensemble donné.

(2) Soient $E = \{1, 2, 3\}$ et $\mathcal{R}$ la relation sur E donnée par:



Exercice. $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'ordre sur E?

4. Ordre total, ordre partiel

Définition. *Soient E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur E.*
(1) On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total si:

$$\forall x, y \in E \quad x \mathcal{R} y \quad ou \quad y \mathcal{R} x.$$

(c'est-à-dire, deux éléments quelconques sont comparables.)
(2) On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel si elle n'est pas une relation d'ordre total, c'est-à-dire,

$$\exists x, y \in E \text{ tels que } x \not{\mathcal{R}} y \quad et \quad y \not{\mathcal{R}} x$$

Exemples. (1) L'ordre usuel $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est total.
(2) La relation "divise" sur $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ est une relation d'ordre partiel car $\cdots$
(3) Soit E un ensemble contenant au moins deux éléments. Alors, la relation "inclusion" est une relation d'ordre partiel sur $\mathcal{P}(E)$ car si $x, y \in E$ avec $x \neq y$, alors $\{x\} \not\subset \{y\}$ et $\{y\} \not\subset \{x\}$.

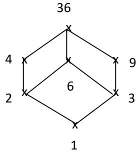
5. Diagramme de Hasse d'un ensemble ordonné fini

Soit E un ensemble fini muni d'une relation d'ordre $\mathcal{R}$.

Le diagramme de Hasse de E est un graphe non orienté vérifiant les conditions suivantes:

- Les sommets sont les éléments de E.
- Si $x \mathcal{R} y$ et $x \neq y$, alors on place x plus bas que y dans le diagramme.
- Si $x \mathcal{R} y$ avec $x \neq y$, et s'il n'y a pas d'élément $z \in E$ différent de x et y tel que $x \mathcal{R} z \mathcal{R} y$, alors on met une arrête entre x et y.

Exemples. Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 36\}$ muni de la relation d'ordre "divise". Le diagramme de Hasse de E est comme suit:



Exercice. Soit $E = \{1, 2, 3\}$.
– Donner les éléments de $\mathcal{P}(E)$.
– On munit $\mathcal{P}(E)$ de la relation d'ordre "inclusion". Donner le diagramme de Hasse.

6. Eléments remarquables

Définition. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur un ensemble E. Soient A une partie de E non vide et $m \in E$. On dit que l'élément m:*

- *est un majorant de A (ou A est majorée par m) si:*
  $\forall x \in A \quad x \,\mathcal{R}\, m.$
- *est un minorant de A (ou A est minorée par m) si:*
  $\forall x \in A \quad m \,\mathcal{R}\, x.$
- *est le plus grand élément de A si: $m \in A$ et m majorant de A.*
- *est le plus petit élément de A si: $m \in A$ et m minorant de A.*

Remarques. (1) Un majorant (ou un minorant) d'une partie n'existe pas toujours. Par exemple, pour $E = \mathbb{Z}$ muni de l'ordre usuel $\leq$, l'ensemble A des entiers relatifs pairs n'admet ni majorant ni minorant.
(2) Le plus grand élément (*resp.* le plus petit élément) lorsqu'il existe il est unique (Exo).

Exemples. (1) On considère $E = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ muni de la relation "divise". La partie $A = \{2, 3\}$ admet 1 pour minorant et 6 pour majorant car $\cdots$. La partie $B = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ n'admet ni plus grand élément ni plus petit élément.

(2) Soit E un ensemble. On munit $\mathcal{P}(E)$ de la relation d'ordre "inclusion". Alors, $\emptyset$ et E sont repectivement le plus petit élément et le plus grand élément de $\mathcal{P}(E)$.

Définition. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur un ensemble E. Soient A une partie de E et $m \in E$. On dit que m:*

- *est un élément minimal de A si: $m \in A$ et $(\forall x \in A \quad x \mathcal{R} m \implies x = m)$.*
- *est un élément maximal de A si: $m \in A$ et $(\forall x \in A \quad m \mathcal{R} x \implies x = m)$.*

Remarques. (1) Si m est le plus grand élément de A, alors m est un élément maximal de A.
(2) De même, si m est le plus petit élément de A, alors m est un élément minimal de A.
(3) Quand un élément maximal (ou un élément minimal) existe il n'est pas toujours unique.

Exemples. (1) $\mathbb{Z}$ muni de l'ordre usuel $\leq$ n'admet ni élément maximal ni élément minimal.
(2) On munit $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ de la relation d'ordre "inclusion". La partie $\{\{0\}, \{1\}, \{1, 2\}\}$ admet $\{0\}$ et $\{1\}$ pour éléments minimaux.

Définition. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur un ensemble E. Soient A une partie de E et $m \in E$. On dit que m:*

- *est une borne supérieure de A si m est un majorant de A, et c'est le plus petit majorant de A, autrement dit;* $(\forall x \in A \;\; x\mathcal{R}m)$ *et (si $m' \in E$ est un majorant de A, alors $m\mathcal{R}m'$).*
- *est une borne inférieure de A si m est un minorant de A, et c'est le plus grand minorant de A, autrement dit;* $(\forall x \in A \;\; m\mathcal{R}x)$ *et (si $m' \in E$ est un minorant de A, alors $m'\mathcal{R}m$).*

Remarques. (1) Lorsque la borne supérieure (inférieure) existe, alors elle est unique.
(2) Lorsque la borne supérieure (inférieure) d'un ensemble A existe, alors elle n'est pas nécessairement dans A. *Donner un exemple.*

7. Ordre produit, ordre lexicographique

Proposition-Définition (Ordre produit). *Soient $\mathcal{R}_1$ une relation d'ordre sur un ensemble E_1, et $\mathcal{R}_2$ une relation d'ordre sur un ensemble E_2. La relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur $E_1 \times E_2$ par:*

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in E_1 \times E_2 \;\; (x_1, x_2) \, \mathcal{R} \, (y_1, y_2) \iff x_1 \mathcal{R}_1 y_1 \text{ et } x_2 \mathcal{R}_2 y_2$$

est une relation d'ordre. On l'appelle l'ordre produit induit par $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$.

Exemple. Soient $E_1 = \{1, 2\}$ muni de la relation d'ordre usuel $\leq$, et $E_2 = \{2, 4\}$ muni de la relation d'ordre "divise" $|$. On a $E_1 \times E_2 = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4)\}$ qu'on munit de la relation d'ordre produit $\mathcal{R}$ induite par $\leq$ et $|$. Concrètement, on a:

$$\forall (a, b), (c, d) \in E_1 \times E_2 \;\; (a, b) \mathcal{R} (c, d) \iff a \leq c \text{ et } b \mid d.$$

On vérifie: $(1, 2) \mathcal{R} (1, 4) \mathcal{R} (2, 4)$ et $(1, 2) \mathcal{R} (2, 2) \mathcal{R} (2, 4)$ mais $(1, 4) \not\mathcal{R} (2, 2)$ et $(2, 2) \not\mathcal{R} (1, 4)$.
Donc, $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel.

Proposition-Définition (Ordre lexicographique). *Soient $\mathcal{R}_1$ une relation d'ordre sur un ensemble E_1, et $\mathcal{R}_2$ une relation d'ordre sur un ensemble E_2. La relation binaire $\mathcal{L}$ définie sur $E_1 \times E_2$ par:*
$\forall\,(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in E_1 \times E_2$

$$(x_1, x_2)\ \mathcal{L}\ (y_1, y_2) \iff (x_1 \neq y_1 \text{ et } x_1 \mathcal{R}_1 y_1) \text{ ou bien } (x_1 = y_1 \text{ et } x_2 \mathcal{R}_2 y_2).$$

est une relation d'ordre. On l'appelle l'ordre lexicographique induit par $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$.

Exemple (Ordre lexicographique usuel). On considère $\mathbb{R}$ muni de l'ordre usuel $\leq$. L'ordre lexicographique $\mathcal{L}$ induit sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par $\leq$ est donné par: $\forall\,(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$(x_1, x_2)\ \mathcal{L}\ (y_1, y_2) \iff (x_1 < y_1) \text{ ou bien } (x_1 = y_1 \text{ et } x_2 \leq y_2).$$

Ceci se déduit facilement de la définition générale précédente et du fait que $(x_1 \neq y_1$ et $x_1 \leq y_1)$ n'est rien d'autre que la condition $x_1 < y_1$.

Exemple. Reprenons l'avant-dernier exemple: $E_1 = \{1, 2\}$ muni de l'ordre usuel $\leq$, et $E_2 = \{2, 4\}$ muni de l'ordre "divise" $|$. Soit $\mathcal{L}$ l'ordre lexicographique sur $E_1 \times E_2$ induit par $\leq$ et $|$. On a $E_1 \times E_2 = \{(1,2), (1,4), (2,2), (2,4)\}$, et on vérifie facilement

$$(1,2)\ \mathcal{L}\ (1,4)\ \mathcal{L}\ (2,2)\ \mathcal{L}\ (2,4).$$

Cela signifie que $\mathcal{L}$ est un ordre total. Cet exemple est un cas particulier du résultat général suivant:

Proposition. *Soient $\mathcal{R}_1$ une relation d'ordre total sur un ensemble E_1, et $\mathcal{R}_2$ une relation d'ordre total sur un ensemble E_2. Alors, l'ordre lexicographique sur $E_1 \times E_2$ induit par $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ est une relation d'ordre total.*

8. Cas général de l'ordre lexicographique

Soient $E_1, \cdots, E_n$ des ensembles munis des relations d'ordre respectives $\mathcal{R}_1, \cdots, \mathcal{R}_n$.

La relation $\mathcal{L}$ définie sur le produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_n$ par:
$\forall\, (x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$

$$(x_1, \cdots, x_n)\, \mathcal{L}\, (y_1, \cdots, y_n) \iff \begin{array}{l} (x_1, \cdots, x_n) = (y_1, \cdots, y_n) \\ \text{ou bien} \\ \big(\exists\, 1 \leq k \leq n \ \text{ tel que} \\ x_1 = y_1, \cdots, x_{k-1} = y_{k-1}, x_k \neq y_k \\ \text{et } x_k \mathcal{R}_k y_k\big) \end{array}$$

est une relation d'ordre. On l'appelle l'ordre lexicographique induit par les relations $\mathcal{R}_1, \cdots, \mathcal{R}_n$.