Université d'Artois
Faculté des Sciences Jean Perrin
Laboratoire de Mathématiques de Lens
Licence 1 Maths-Info
Semester I

Année universitaire 2023-2024

Méthodologies et outils pour les mathématiques et l'informatique

1 Eléments de logique

Exercice 1.1 Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses ?
(1) $(2 < 3)$ et (3 divise 12).
(2) $(2 < 3)$ et (2 divise 5).
(3) $(2 < 3)$ ou (2 divise 5).
(4) $(2 < 3)$ et non(2 divise 5).
(5) non$(2 < 3)$ ou (2 divise 5).

Exercice 1.2 Soient P et Q deux propositions. On dit que la proposition "P **ou exclusif** Q" est vraie si P ou Q est vraie mais pas simultanément P et Q. Donner la table de vérité du connecteur logique "**ou exclusif**".

Exercice 1.3 Soient P, Q et R trois propositions. Montrer que les équivalences suivantes sont vraies :
(1) non (non P) $\iff P$.
(2) (P et P) $\iff P$.
(3) (P ou P) $\iff P$.
(4) non (P ou Q) $\iff$ (non P) et (non Q).
(5) non (P et Q) $\iff$ (non P) ou (non Q).
(6) P ou (Q et R) $\iff$ (P ou Q) et (P ou R).
(7) P et (Q ou R) $\iff$ (P et Q) ou (P et R).
(8) P et (Q et R) $\iff$ (P et Q) et R.
(9) P ou (Q ou R) $\iff$ (P ou Q) ou R.
(10) ($P \implies Q$) $\iff$ (non $Q \implies$ non P).

Exercice 1.4 Dire si l'implication $(1 = 2) \implies (2 = 3)$ est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

Exercice 1.5 (1) Soient P et Q deux propositions. Donner la négation et la contraposée de la proposition $P \implies Q$.
(2) Donner la négation et la contraposée des propositions suivantes :
   (a) Si tu échoues à tes examens, alors tu ne partiras pas en vacances.
   (b) Si un entier naturel est pair, alors il est divisible par 4.

Exercice 1.6 Soient x et y deux nombres réels. Donner la contraposée de l'implication ci-dessous, puis montrer qu'elle est vraie :

$$(x \neq 2 \text{ et } y \neq 2) \implies 2x + 2y - xy - 2 \neq 2.$$

Exercice 1.7 Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$, $\Longleftrightarrow$, afin d'avoir une proposition vraie.

(1) Pour x un réel, $x^2 = 4 \ \cdots \ x = 2$.

(2) Pour x un réel, $x = \pi \ \cdots \ \sin(x) = 0$.

(3) Pour n un entier naturel, n est impair $\ \cdots \ n^2$ est impair.

Exercice 1.8 Soient P, Q, R et S quatre propositions. Donner la négation des propositions suivantes :

(1) P et (Q et R).
(2) (P ou Q) $\Longrightarrow R$.
(3) (P et Q) $\Longrightarrow$ ($R \Longrightarrow S$).

Exercice 1.9 Soient P et Q deux propositions. Quelle est la valeur de vérité de la proposition (P et Q) $\Longrightarrow$ (non P ou Q) ? Justifier votre réponse.

Exercice 1.10 Ecrire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes :

(1) Le carré de tout réel est positif.
(2) Certains réels sont strictement supérieurs à leurs carrés.
(3) Aucun entier naturel n'est supérieur à tous les autres.
(4) Il existe un entier naturel multiple de tous les autres.
(5) Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.
(6) Etant donné trois nombres réels, il y en a au moins deux de même signe.

Exercice 1.11 Soit (u_n) une suite de nombres réels. Ecrire la négation des propositions suivantes :

(1) $\forall\, x \in \mathbb{R} \ \ \exists\, n \in \mathbb{N}$ tel que $x \leqslant n$.

(2) $\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, q \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < q < \varepsilon$.

(3) $\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geqslant N \ \ |u_n| < \varepsilon$.

Exercices supplémentaires

Exercice 1.12 Soient P et Q deux propositions. Montrer que (($P \Longrightarrow Q$) et ($Q \Longrightarrow P$)) est logiquement équivalente à $P \Longleftrightarrow Q$.

Exercice 1.13 Soient P, Q, R trois propositions. Montrer que les propositions suivantes sont vraies :

(1) ($P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow R$) $\Longrightarrow$ ($P \Longrightarrow R$).
(2) ($P \Longleftrightarrow Q$ et $Q \Longleftrightarrow R$) $\Longrightarrow$ ($P \Longleftrightarrow R$).

Exercice 1.14 Nier les propositions suivantes :

(1) Dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs.
(2) Tous les habitants de la rue du Havre nés au mois de février gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans".
(3) $\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \alpha > 0$ tel que $|x - \frac{1}{2}| < \alpha \Longrightarrow |2x - 1| < \varepsilon$.

Exercice 1.15 Soient E l'ensemble des étudiants, S l'ensemble des jours de la semaine et pour un étudiant x, $h_j(x)$ l'heure de réveil de x le jour j. Soit P la proposition : "Tout étudiant se réveille au moins un jour de la semaine avant 8h".

(1) Ecrire avec des quantificateurs la proposition P.
(2) Ecrire la négation de P avec des quantificateurs, puis en français.

2 Ensembles

Exercice 2.1 Les notations $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$ désignent-elles le même ensemble ? Justifier.

Exercice 2.2 Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Ecrire avec des quantificateurs les assertions suivantes ainsi que leurs négations : $A \subset B$; $A \cap B = \emptyset$; $A \subset \complement_E^B$; $A \setminus B = \emptyset$.
Y en a-t-il qui sont équivalentes, lesquelles ?

Exercice 2.3 Soient A, B et C trois ensembles. Montrer les égalités suivantes :
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ et $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Exercice 2.4 (1) Soient A et B des parties d'un ensemble E. Montrer qu'on a

$$\complement_E^{A \cup B} = \complement_E^A \cap \complement_E^B \quad \text{et} \quad \complement_E^{A \cap B} = \complement_E^A \cup \complement_E^B.$$

(2) *Généralisation :* Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un ensemble E indexée par un ensemble I. Montrer qu'on a

$$\complement_E^{\cap_{i \in I} A_i} = \cup_{i \in I} \complement_E^{A_i} \quad \text{et} \quad \complement_E^{\cup_{i \in I} A_i} = \cap_{i \in I} \complement_E^{A_i}.$$

Exercice 2.5 Soient A, B et C des parties d'un ensemble E. Montrer qu'on a :

(1) $A \subset B \iff \complement_E^B \subset \complement_E^A$.

(2) $(A \cup C \subset A \cup B$ et $A \cap C \subset A \cap B) \Longrightarrow C \subset B$.

(3) $(A \cup C = A \cup B$ et $A \cap C = A \cap B) \Longrightarrow C = B$.

Exercice 2.6 Soient A, B et C des parties d'un ensemble E. Montrer qu'on a :

(1) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

(2) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

(3) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

Exercice 2.7 *Pour E un ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties.*
Donner les éléments de l'ensemble $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$.

Exercice 2.8 Vrai ou faux ? Justifier par une preuve ou un contre-exemple :
(1) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
(2) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

Exercice 2.9 Soient A, B et C trois ensembles. Montrer :
(1) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
(2) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Exercice 2.10 Soient A une partie d'un ensemble E et B une partie d'un ensemble F. Montrer qu'on a $\complement_{E\times F}^{A\times B} = (\complement_E^A \times F) \cup (E \times \complement_F^B)$.

Exercice 2.11 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $A_k = \{n \in \mathbb{N} \mid \ n \leqslant k\}$. Que valent $\cap_{k\in\mathbb{N}} A_k$ et $\cup_{k\in\mathbb{N}} A_k$, et leurs complémentaires dans $\mathbb{N}$?

Exercice 2.12 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $A_k = \{n \in \mathbb{N} \mid \ n \text{ est un multiple de } k\}$. Que valent $\cap_{k\in\mathbb{N}} A_k$ et $\cup_{k\in\mathbb{N}} A_k$?

Exercice 2.13 Soient A et B des parties d'un ensemble E.

(1) (i) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une partie X de E tel que $A \cap X = B$.

(ii) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une partie X de E tel que $A \cup X = B$.

(2) Si la condition nécessaire et suffisante est vérifiée, trouver tous les X vérifiant l'égalité (dans chaque cas).

3 Applications

Exercice 3.1 Soient $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{d, e\}$. Définir si possible une application f de E dans F telle que :
(1) $\forall\, y \in F \quad \exists\, x \in E$ tel que $f(x) = y$.
(2) $\exists\, x \in E$ tel que $\forall\, y \in F\ f(x) = y$.

Exercice 3.2 Soient E, F deux ensembles et f une application de E dans F. Ecrire avec des quantificateurs les assertions suivantes :
(1) f est injective.
(2) f n'est pas injective.
(3) f est surjective.
(4) f n'est pas surjective.

Exercice 3.3 Dire si f est injective, surjective, bijective. Si f est bijective, déterminer f^{-1}.
(1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $x \mapsto x^2$.
(2) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tel que $n \mapsto n + 1$.
(3) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ tel que $n \mapsto n + 1$.
(4) $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}$ qui à n associe $n/2$ si n est pair, $(-n + 1)/2$ si n est impair.

Exercice 3.4 Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ l'application donnée par : $f(x, y) = (x + y, x - y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 3.5 Soient E et F des ensembles, f une application de E dans F, A une partie de E et B une partie de F. Ecrire avec des quantificateurs :
(1) $y \in f(A)$.
(2) la négation de $y \in f(A)$.
(3) $x \in f^{-1}(B)$.
(4) la négation de $x \in f^{-1}(B)$.

Exercice 3.6 Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ les applications données par : $f(x) = x - 1$ et $g(x) = x^2 + 2x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
(1) Donner l'expression de $g \circ f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
(2) Dire si $g \circ f$ est injective, surjective.
(3) Déterminer $(g \circ f)(]1, 2])$ et $(g \circ f)^{-1}(] - 1, 0])$.

Exercice 3.7 Soit f l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par : $f(n) = n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(1) Montrer qu'il existe des applications g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.
(2) Montrer qu'il n'existe aucune application h de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ tel que $f \circ h = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

Exercice 3.8 Soit $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ l'application donnée par : $f(m, n) = m + n$ pour tout $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
(1) L'application f est-elle injective ? surjective ? Justifier.
(2) Déterminer $f(\mathbb{N} \times \{1\})$ et $f^{-1}(\{3\})$.

Exercice 3.9 Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ l'application donnée par : $f(x) = -x^2 + 5$ pour tout $x \in \mathbb{N}$.
Déterminer $f^{-1}(\mathbb{N})$ et $f^{-1}(\{-4, 0, 1, 6\})$.

Exercice 3.10 On considère quatre ensembles A, B, C, D et des applications $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$. Montrer que :
(1) $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective.
(2) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective.
(3) $\big(g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives $\big) \Leftrightarrow \big(f, g$ et h sont bijectives$\big)$.

Exercices supplémentaires

Exercice 3.11 Soit $f : E \longrightarrow E$ une application tel que $f \circ f \circ f = f$. Montrer qu'on a :

$$f \text{ est injective } \iff f \text{ est surjective.}$$

Exercice 3.12 Soit $f : E \longrightarrow E$ une application telle que $f \circ f = f$. Montrer qu'on a :

$$(f \text{ est injective ou surjective}) \iff f = \mathrm{Id}_E.$$

Exercice 3.13 Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Démontrer que :
(1) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.
(2) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
(3) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
(4) $\forall A, B \in \mathcal{P}(F), \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
(5) $\forall A \in \mathcal{P}(F), \quad f^{-1}(\complement_F^A) = \complement_E^{f^{-1}(A)}$.

Exercice 3.14 Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(1) f est injective.
(2) $\forall X \in \mathcal{P}(E), \quad f^{-1}(f(X)) = X$.
(3) $\forall P, Q \in \mathcal{P}(E), \quad f(P \cap Q) = f(P) \cap f(Q)$.

Exercice 3.15 Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(1) f est surjective.
(2) $\forall\, Y \in \mathcal{P}(F) \quad f(f^{-1}(Y)) = Y$.

Exercice 3.16 (1) Soient a, b deux réels. Donner les conditions nécessaires et suffisantes sur α et β pour que l'équation $x^2 - \alpha x + \beta = 0$ ait pour zéros les réels a et b.

(2) Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ l'application donnée par : $f(x, y) = (x + y, xy)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(i) Montrer que f n'est pas injective.

(ii) Selon les valeurs de (α, β) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, déterminer l'image réciproque par f de $\{(\alpha, \beta)\}$.

(iii) f est-elle surjective ?

Exercice 3.17 Soit A une partie d'un ensemble E. On appelle fonction caractéristique de A l'application f de E dans l'ensemble $\{0,1\}$ donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Soit A et B deux parties de E, f et g leurs fonctions caractéristiques respectives.
(1) Montrer que $A = B \Leftrightarrow f = g$.
(2) Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensembles que l'on déterminera :
(i) $1 - f$.
(ii) fg.
(iii) $f + g - fg$.

Exercice 3.18 Soient E un ensemble et A, B deux parties de E. On désigne par $A\triangle B$ l'ensemble $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$. *Dans les questions ci-après il pourra être commode d'utiliser la notion de fonction caractéristique introduite dans l'exercices 3.17.*
(1) Démontrer que $A\triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
(2) Démontrer que pour toutes parties A, B, C de E, on a $(A \triangle B) \triangle C = A\triangle(B\triangle C)$.
(3) Démontrer qu'il existe une unique partie X de E telle que pour toute partie A de E, on ait $A\triangle X = X\triangle A = A$.
(4) Démontrer que pour toute partie A de E, il existe une partie A' de E et une seule telle que $A\triangle A' = A'\triangle A = X$. ($X$ comme dans (3).)

Exercice 3.19 Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ l'application donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 1 - x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrer que $f \circ f = \mathrm{Id}_{[0,1]}$.

Exercice 3.20 Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Montrer qu'on a :
(1) ($g \circ f$ est surjective et g est injective) $\implies$ f est surjective.
(2) ($g \circ f$ est injective et f est surjective) $\implies$ g est injective.

4 Relations d'ordre

Exercice 4.1 On considère sur $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par :

$$\forall\ m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad m \mathcal{R} n \iff \exists\, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ tel que } n = m^k.$$

(1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.
(2) Donner le plus petit et le plus grand élément de $\{2, 4, 16\}$.
(3) L'ensemble $\{2, 3\}$ admet-il un majorant ?

Exercice 4.2 On définit sur $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall\ m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad m \,\mathcal{R}\, n \iff m \text{ divise } n.$$

(1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.
(2) $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'ordre total ?
(3) Représenter le diagramme de Hasse de l'ensemble $\{2, 3, 6, 21, 42\}$.
(4) $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ muni de la relation d'ordre $\mathcal{R}$ possède-t-il un plus petit élément ? un plus grand élément ?
(5) Donner les éléments minimaux de $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Exercice 4.3 La relation "divise" est-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$?

Exercice 4.4 On considère sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relation binaire $\mathcal{P}$ donnée par :

$$\forall\ (m, n), (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad (m, n) \mathcal{P} (p, q) \iff m \leqslant p \ \text{ et } \ n \leqslant q.$$

(1) Montrer que $\mathcal{P}$ est une relation d'ordre. Est-ce une relation d'ordre total ?
(2) Donner un majorant et un minorant de l'ensemble $\{(3, 1), (2, 6), (2, 2), (0, 1), (7, 0)\}$.

Exercice 4.5 On définit sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{S}$ par :

$$\forall\ (x, y), (x', y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (x, y) \mathcal{S} (x', y') \iff |x' - x| \leqslant y' - y.$$

(1) Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
(2) L'ordre est-il total ?

Exercice 4.6 (Ordre lexicographique) On considère sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{L}$ définie par :

$$\forall\ (x, y), (x', y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (x, y) \mathcal{L} (x', y') \iff x < x' \ \text{ ou } \ (x = x' \text{ et } y \leqslant y').$$

(1) Montrer que $\mathcal{L}$ est une relation d'ordre total.
(2) Déterminer l'ensemble des majorants du singleton $\{(x, y)\}$, et le représenter dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Exercice 4.7 On considère les ensembles $A = \{1, 2, 4, 7\}$ et $B = \{0, 3, 5\}$ munis de l'ordre usuel. Écrire les éléments de $A \times B$ dans l'ordre lexicographique.

Exercice 4.8 Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leqslant$. On définit sur $\mathcal{P}(E)\setminus\{\emptyset\}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ donnée par :

$$\forall\ A, B \in \mathcal{P}(E)\setminus\{\emptyset\},\quad A\ \mathcal{R}\ B \iff \begin{cases} A = B \text{ ou} \\ \forall\, a \in A, \forall\, b \in B\ \ a \leqslant b. \end{cases}$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)\setminus\{\emptyset\}$.

Exercice 4.9 Soit E un ensemble non vide muni d'une relation d'ordre $\leqslant$. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des couples (A, f) tels que A soit une partie non vide de E et $f : A \longrightarrow E$ une application. On considère sur $\mathcal{E}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par :

$$\forall\,(A,f),(B,g) \in \mathcal{E},\quad (A,f)\mathcal{R}(B,g) \iff \begin{cases} A \subset B \text{ et} \\ \forall\, x \in A,\ f(x) \leqslant g(x). \end{cases}$$

(1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{E}$. L'ordre est-il total ?
(2) Soient (A, f), $(B, g) \in \mathcal{E}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la partie $\{(A, f), (B, g)\}$ soit majorée ?
(3) Même question avec minorée.

5 Récurrence

Exercice 5.1 Montrer par récurrence les affirmations suivantes :

(1) $\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$

(2) $\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times (k!) = (n+1)! - 1.$

(3) $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

(4) $\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \dfrac{n}{2} \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} \leqslant \frac{n^2}{n+1}.$

(5) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}.$

(6) $\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$

(7) $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$ est divisible par 111. *(Utiliser que* $10^3 = 9 \times 111 + 1$*.)*

(8) $\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad 1 + \dfrac{n}{2} \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}.$

(9) $\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

Exercice 5.2 Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante, c'est-à-dire, $f(n) < f(m)$ lorsque $n < m$. Montrer que $f(n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5.3 Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ l'application donnée par : $f(x) = 4x + 3$ pour tout $x \in \mathbb{N}$.
On pose f^1, f^2, f^3, $\cdots$, f^n les applications f, $f \circ f$, $f^2 \circ f$, $\cdots$, $f^{n-1} \circ f$.
Déterminer une formule donnant $f^n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $x \in \mathbb{N}$.

Exercice 5.4 Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application vérifiant : $\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad f(n) + f^2(n) + f^3(n) = 3n$.
(1) Montrer que f est injective.
(2) Montrer que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

Exercice 5.5 Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $a_1, \cdots, a_n \in [0, 1]$. Montrer que

$$1 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) \leqslant \prod_{k=1}^{n} (1 - a_k).$$

Exercice 5.6 Montrer par récurrence les affirmations suivantes :

(1) $\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2^{n+1}} \leqslant \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{2^3}\right) \ldots \left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right).$

(2) $\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \sqrt{n} \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\sqrt{n}.$

Exercice 5.7 Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$. Montrer que $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqslant n \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)$.

Exercice 5.8 On se propose de déterminer toutes les applications f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f(n+1) > f\left(f(n)\right) \tag{P}$$

(1) Donner un exemple d'une application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ vérifiant la propriété (P).
(2) Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application vérifiant la propriété (P). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit l'ensemble $I_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \geqslant n\}$.
(a) Montrer par récurrence que $f(I_n) \subset I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(b) Montrer que f est strictement croissante.
(c) En déduire que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

6 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Exercice 6.1 Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant votre réponse.

(1) Si a divise b et c, alors $c^2 - 2b$ est multiple de a.

(2) S'il existe u et v entiers tels que $au + bv = d$ alors $\text{pgcd}(a, b) = |d|$.

(3) Si a et b sont premiers entre eux, alors a et b^3 sont premiers entre eux.

(4) Si a divise $b + c$ et $b - c$, alors a divise b et a divise c.

(5) Si 19 divise ab, alors 19 divise a ou 19 divise b.

(6) Si a est multiple de b et si c est multiple de d, alors $a + c$ est multiple de $b + d$.

(7) Si 4 ne divise pas bc, alors b ou c est impair.

(8) Si a divise b et b ne divise pas c, alors a ne divise pas c.

(9) Si 5 divise b^2, alors 25 divise b^2.

(10) Si 12 divise b^2, alors 4 divise b.

(11) Si 12 divise b^2, alors 36 divise b^2.

(12) Si 91 divise ab, alors 91 divise a ou 91 divise b.

Exercice 6.2 Sachant que $24\,396\,465 = 6453 \times 3780 + 4125$, quel est le quotient de la division Euclidienne de $24\,396\,465$ par 3780.

Exercice 6.3 Dans la division Euclidienne de a par b, le quotient est q et le reste est r. On suppose que $q = r = 37$. Quel est la plus petite valeur possible que peut prendre a ?

Exercice 6.4 Soit $n \in \mathbb{N}$ dont le reste de la division Euclidienne par 5 est 2 ou 3. Montrer que $n^2 + 1$ est divisible par 5.

Exercice 6.5 Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On divise 2003 par n le reste est égal à 8. On divise 3002 par n, le reste obtenu est 27. Que vaut n ?

Exercice 6.6 Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que soit 8 divise n^2, soit 8 divise $n^2 - 1$, soit 8 divise $n^2 - 4$.
(Discuter sur la parité de n.)

Exercice 6.7 Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 6.8 Trouver tous les entiers $n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ tel que $n - 1$ divise $n^2 + 1$.
(Utiliser que $n^2 + 1 = (n^2 - 1) + 2$).

Exercice 6.9 Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Montrer que si p divise $(p - 1)! + 1$, alors p est premier.

Exercice 6.10 (1) Pour $m, n \in \mathbb{N}$ tel que $1 < n \leqslant m$, montrer que $m! + n$ n'est pas premier.
(2) Donner une liste de 100 entiers consécutifs non premiers.

Exercice 6.11 Soient $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
(1) Montrer que s'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $a = bq$, alors $\text{pgcd}(a, b) = |b|$.
(2) Montrer que s'il existe $q \in \mathbb{Z}$ et $\exists\, r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tels que $a = bq + r$, alors $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r)$.
(dans l'assertion (2) r n'est pas nécessairement le reste de la division Euclidienne de a par b.)

Exercice 6.12 (Application de l'exercice 6.11)
(1) Déterminer $\text{pgcd}(1306, 128)$ et trouver deux entiers $n, m \in \mathbb{Z}$ tels que $1306n + 128m = 4$.
(2) Déterminer $\text{pgcd}(6n^2 + 4n + 9, 3n + 2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(3) Soient $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(17a + 5b, 7a + 2b)$.

Exercice 6.13 (1) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On suppose que $\text{pgcd}(c, d) = 1$ et que a divise bc et bd. Montrer que a divise b.
(2) Soient $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ un diviseur commun à a et b. Montrer l'équivalence suivante :

$$d = \text{pgcd}(a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{pgcd}(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1.$$

(3) Soient $a, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Montrer qu'on a $\text{pgcd}(ac, bc) = |c| \,\text{pgcd}(a, b)$.

Exercice 6.14 On souhaite trouver tous les couples $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vérifiant l'équation

$$325x + 299y = 39 \tag{E}$$

(1) Déterminer $\text{pgcd}(325, 299)$.
(2) Déterminer deux entiers m et n tels que $325m + 299n = \text{pgcd}(325, 299)$.
(3) Déterminer une solution particulière de l'équation (E).
(4) Trouver toutes les solutions $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation (E).

Exercice 6.15 (1) Soient $a, b, c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que $a^b - 1$ divise $a^{bc} - 1$.
(2) En déduire que si $2^p - 1$ est premier pour $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, alors p est premier.

Exercice 6.16 Combien 15! admet-il de diviseurs positifs ?

Exercice 6.17 Déterminer les couples d'entiers naturels de pgcd 18 et de somme 360. De même avec pgcd 18 et produit 6480.

Exercice 6.18 Soit S l'ensemble des couples (x, y) d'entiers naturels non nuls tels que : $x < y$ et $\text{pgcd}(x, y) = y - x$.

(1) Calculer le $\text{pgcd}(363, 484)$. Le couple $(363, 484)$ appartient-il à S ?

(2) Soit n un entier naturel non nul. Le couple $(n, n + 1)$ appartient-il à S ? Justifier votre réponse.

(3) (a) Montrer que (x, y) appartient à S si et seulement si il existe un entier naturel k non nul tel que $x = k(y - x)$ et $y = (k + 1)(y - x)$.

(b) En déduire que pour tout couple (x, y) de S, on a : $\text{ppcm}(x, y) = k(k + 1)(y - x)$.

(c) Déterminer les couples (x, y) de S tels que $\text{ppcm}(x, y) = 30$.

7 Nombres complexes

Exercice 7.1 Soient les nombres complexes $z = 1 - 2i$ et $z' = 3 + 4i$.
(1) Calculer $z + z'$ et zz'.
(2) Donner la forme algébrique de $\frac{z}{z'}$.

Exercice 7.2 Pour chacun des complexes ci-dessous, déterminer le module, un argument puis donner la forme trigonométrique :
$1 + i$, $\sqrt{3} - i$, $(1 + i)(\sqrt{3} - i)$, $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$, $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7.3 Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que si $|2z - 1| = |z - 2|$, alors $|z| = 1$.

Exercice 7.4 Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ tels que $zz' \neq -1$ et $|z| = |z'| = 1$. Montrer que $\dfrac{z + z'}{1 + zz'}$ est un réel.

Exercice 7.5 Déterminer et représenter graphiquement dans le plan complexe les points M_z dont l'affixe z vérifie :
(1) $z + \overline{z} = 1$.
(2) $|z - 1| = |z - i|$.
(3) $|z - 1| \leqslant |z - i|$.

Exercice 7.6 Soit z un nombre complexe différent de 1.
(1) Montrer qu'on a $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right) = \dfrac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2}$ et $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right) = \dfrac{2\mathrm{Im}(z)}{|1 - z|^2}$.
(2) En déduire que z est de module 1 si et seulement si il existe un réel t tel que $z = \dfrac{-1 + it}{1 + it}$.

Exercice 7.7 Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Montrer qu'on a $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$. Donner une interprétation géométrique de cette égalité.

Exercice 7.8 Déterminer z pour que z, $z - 1$ et $\dfrac{1}{z}$ aient le même module.

Exercice 7.9 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
(1) $X^2 = 3 + 4i$ et $-X^2 + (5 - 14i)X + 2(5i + 12) = 0$.
(2) Factoriser l'expression $-X^2 + (5 - 14i)X + 2(5i + 12)$.

Exercice 7.10 (1) Linéariser les expressions suivantes : $\cos^4 x$ et $\sin^3 x \cos^5 x$.
(2) Écrire $\cos(5x)$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

Exercice 7.11 Soit $\alpha \in]-\pi, \pi[$ et $z = \dfrac{1 - i}{1 + \cos\alpha + i\sin\alpha}$. Donner en fonction de α le module et un argument de z.
(Penser à écrire $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ *et* $1 + \cos\alpha = ...$*).*

Exercices supplémentaires

Exercice 7.12 Soit $z_0 = 2(1+i)$.
(1) Calculer z_0^{-1}, le module et un argument de z_0, et déterminer les racines carrés de z_0.
(2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $X^2 + (1+i)X - \dfrac{1}{2} = 0$.
(3) Décrire l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z - z_0| = 2$.

Exercice 7.13 *On rappelle que pour tout nombre complexe $u \in \mathbb{C}$ différent de 1, on a $\sum_{k=0}^{n} u^k = \frac{u^{n+1}-1}{u-1}$ (voir la question (6) de l'exercice 5.1).*
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.

Exercice 7.14 Un entier naturel n est "somme de deux carrés" s'il existe deux entiers naturels a et b tels que $n = a^2 + b^2$. Montrer qu'un produit fini de tels entiers est encore somme de deux carrés.

Exercice 7.15 (1) Soit $ABCD$ un carré dans le plan complexe. Montrer que si A et B ont des coordonnées entières, il en est de même de C et D.
(2) Peut-on trouver un triangle équilatéral dont les trois sommets ont des coordonnées entières ?

Exercice 7.16 (1) (Formule du binôme de Newton) Soient $u, v \in \mathbb{C}$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a la formule :

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^k v^{n-k},$$

où $C_n^k = \dfrac{n!}{k! \times (n-k)!}$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$.
(2) Quel est le coefficient du terme $a^2b^3c^5$ dans le développement de $(a+b+c)^{10}$?
(3) En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \qquad S_2 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i \qquad S_3 = \sum_{0 \leqslant i \leqslant \frac{n}{2}} C_n^{2i}.$$

8 Polynômes

On désigne par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 8.1 Soient $P(X) = X^4 - 2X^2 + X - 1$ et $Q(X) = X^3 - X + 2$. Calculer $P + Q$, $3P - 2Q$ et PQ.

Exercice 8.2 Déterminer les polynômes de degré au plus 2 tels que $P(0) = 1$ et $P(1) = 0$ et $P(-1) = -2$.

Exercice 8.3 Effectuer la division Euclidienne du polynôme P par le polynôme Q dans les cas suivants :

(1) $P(X) = X^5 + 2X^4 - X^3 + X - 2$ et $Q(X) = X^3 + 4X^2 - 3X + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.
(2) $P(X) = X^3 + iX^2 + (2i-1)X - 2i$ et $Q(X) = iX^2 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 8.4 Soit le polynôme $X^3 + aX + b \in \mathbb{C}[X]$. Déterminer a et b pour que $X^2 + iX + 1 + i$ divise $P(X)$.

Exercice 8.5 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X+1) = P(X)$.

(1) On pose $Q(X) = P(X) - P(0)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q(n) = 0$.

(2) En déduire que P est constant.

Exercice 8.6 Soit $P(X)$ un polynôme tel que pour tout réel x, $P(x) = P(\sin x)$. Que peut-on dire de P ? (considérer le polynôme $Q(X) = P(X) - P(0)$).

Exercice 8.7 Pour $n \geqslant 1$ un entier, soit $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$. Montrer que $P_n(X)$ n'a pas de racine multiple.

Exercice 8.8 Déterminer la multiplicité de la racine α du polynôme $P(X)$ dans les cas suivants :

(1) $\alpha = 2$ et $P(X) = X^{n+2} - 4X^{n+1} + 4X^n$.
(2) $\alpha = 3$ et $P(X) = X^3 - 3X^2 - 9X + 27$.
(3) $\alpha = 2$ et $P(X) = nX^{n+2} - (4n+1)X^{n+1} + 4(n+1)X^n - 4X^{n-1}$.

Exercice 8.9 Soit $P(x) \in \mathbb{K}[X]$ et a, b deux éléments de $\mathbb{K}$ distincts. Sachant que le reste de la division Euclidienne de $P(X)$ par $X - a$ est 1, et que le reste de la division Euclidienne de $P(X)$ par $X - b$ est -1, donner le reste de la division Euclidienne de $P(X)$ par $(X - a)(X - b)$.

Exercice 8.10 Soit $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$.

(1) Montrer que si z est un nombre complexe racine de $P(X)$, alors le conjugué $\overline{z}$ de z est aussi une racine de $P(X)$.

(2) On suppose que $P(X) = X^4 - X^3 - X^2 + 4X - 2$.

(a) Vérifier que $1 + i$ est une racine de $P(X)$.

(b) Factoriser $P(X)$.

Exercice 8.11 Donner le pgcd puis le ppcm des deux polynômes suivants :

$$P(X) = (X^2+3)^2(X^2-1)^3(X^2+1)^4 \quad \text{et} \quad Q(X) = (X^2+3)^3(X+1)^4(X+2).$$

Exercice 8.12 En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le pgcd D des polynômes P et Q ci-dessous, et donner deux polynômes U, V tels que $D = PU + QV$:

(1) $P(X) = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2$ et $Q(X) = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6$.

(2) $P(X) = X^6 - 2X^5 + 2X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 2X$ et $Q(X) = X^4 - 2X^3 + X^2 - X + 1$.

Exercice 8.13 Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :
$X^3 + 3X^2 - 5X + 1$, $X^3 - 3$, $X^6 + 1$, $X^9 + X^6 + X^3 + 1$, $X^2 - 2\cos\theta X + 1$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercices supplémentaires.

Exercice 8.14 Soient $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On note $P'(X)$ le polynôme dérivé de $P(X)$.

(1) Montrer que $P(\alpha)$ est le reste de la division Euclidienne de $P(X)$ par $X - \alpha$.

(2) Soit $Q(X)$ le quotient de la division Euclidienne de $P(X)$ par $X - \alpha$.

(a) Montrer que $P'(\alpha) = Q(\alpha)$.

(b) En déduire que $P'(\alpha)(X - \alpha) + P(\alpha)$ est le reste de la division Euclidienne de $P(X)$ par $(X - \alpha)^2$.

Exercice 8.15 (1) Soient m et n deux entiers naturels non nuls. Montrer que le polynôme $X^m - 1$ divise le polynôme $X^{mn} - 1$.

(2) Soient a, b deux entiers naturels (avec $b \leqslant a$) et r le reste de la division Euclidienne de a par b.

(a) Montrer que $X^r - 1$ est le reste de la division Euclidienne de $X^a - 1$ par $X^b - 1$. *(Utiliser la question (1).)*

(b) Quel est alors le pgcd$(X^a - 1, X^b - 1)$.

(3) Soient $P(X), Q(X) \in \mathbb{K}[X]$. Notons $R(X) \in \mathbb{K}[X]$ le reste de la division Euclidienne de $P(X)$ par $Q(X)$.

(a) Montrer que pour tout polynôme $S(X) \in \mathbb{K}[X]$ de degré $\geqslant 1$, le polynôme composé $R(S(X))$ est le reste de la division Euclienne de $A(S(X))$ par $B(S(X))$.

(b) En déduire le pgcd$(A(S(X)), B(S(X)))$.

(c) Donner le pgcd$(X^8 - 2X^4 + 2X^2 - 1, X^6 + 4X^2 + 3)$.

(4) Soient $m, n \geqslant 1$ des entiers et $\alpha \in \mathbb{K}$ no nul. Donner le pgcd$(X^m - \alpha^m, X^n - \alpha^n)$. *(Aide : penser à combiner les questions (2) et (3).*

Exercice 8.16 Soit $n \geqslant 1$ un entier.

(1) Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^n - 1$.

(2) Déterminer les nombres complexes z vérifiant $(z+1)^n = (z-1)^n$.

(3) Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $(X+1)^n - (X-1)^n$.

Exercice 8.17 Donner tous les polynômes $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P'(X)$ divise $P(X)$.

(Aide : Si $P(X)$ n'est pas nul et $P'(X)$ divise $P(X)$, alors $P(X) = P'(X)Q(X)$ pour $Q(X)$ de degré 1. Montrer alors que la racine de $Q(X)$ est l'unique racine de $P(X)$ avec une multiplicité donnée.)

Correction (Ensembles)

Exercice 2.1 : Non. En effet, $\emptyset$ est l'ensemble vide, l'ensemble $\{\emptyset\}$ est formé d'un seul élément qui est $\emptyset$, et l'ensemble $\{\{\emptyset\}\}$ est formé d'un seul élément qui est $\{\emptyset\}$.

Exercice 2.2 :

– $A \subset B \iff \forall x \in A \;\; x \in B$.
– $A \not\subset B \iff \exists x \in A \;\; x \notin B$.
– $A \cap B = \emptyset \iff \forall x \in A \;\; x \notin B$.
– $A \subset \complement_E^B \iff \forall x \in A \;\; x \notin B$.
– $A \setminus B = \emptyset \iff \forall x \in A \;\; x \in B$.

On voit bien qu'on a : $A \subset B \iff A \setminus B = \emptyset$, et $A \cap B = \emptyset \iff A \subset \complement_E^B$.

Exercice 2.3 :

(1) Montrons que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. On procède par équivalences :

$$\begin{array}{rcl} x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) & \iff & (x \in A \cup B) \text{ et } (x \in A \cup C) \\ & \iff & (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \in C) \\ & \iff & x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \in C) \\ & \iff & x \in A \text{ ou } (x \in B \cap C) \\ & \iff & x \in A \cup (B \cap C). \end{array}$$

Ceci montre que les ensembles $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ et $A \cup (B \cap C)$ sont égaux.

(2) Montrons que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. On a :

$$\begin{array}{rcl} x \in A \cap (B \cup C) & \iff & x \in A \text{ et } x \in B \cup C \\ & \iff & x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C) \\ & \iff & (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C) \\ & \iff & x \in A \cap B \text{ ou } x \in A \cap C \\ & \iff & x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{array}$$

Ainsi, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Exercice 2.4 : (1) Montrons que $\complement_E^{A \cup B} = \complement_E^A \cap \complement_E^B$. On a :

$$\begin{array}{rcl} x \in \complement_E^{A \cup B} & \iff & x \in E \text{ et } x \notin A \cup B \\ & \iff & x \in E \text{ et } (x \notin A \text{ et } x \notin B) \\ & \iff & (x \in E \text{ et } x \notin A) \text{ et } (x \in E \text{ et } x \notin B) \\ & \iff & x \in \complement_E^A \text{ et } x \in \complement_E^B \\ & \iff & x \in \complement_E^A \cap \complement_E^B. \end{array}$$

Ainsi, $\complement_E^{A \cup B} = \complement_E^A \cap \complement_E^B$.

(2) Montrons que $\complement_E^{\cup_{i \in I} A_i} = \cap_{i \in I} \complement_E^{A_i}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} x \in \complement_E^{\cup_{i \in I} A_i} & \iff & x \in E \text{ et } x \notin \cup_{i \in I} A_i \\ & \iff & x \in E \text{ et } (\forall i \in I \;\; x \notin A_i) \\ & \iff & \forall i \in I \quad x \in E \text{ et } x \notin A_i \\ & \iff & \forall i \in I \;\; x \in \complement_E^{A_i} \\ & \iff & x \in \cap_{i \in I} \complement_E^{A_i}. \end{array}$$

Ainsi, $\complement_E^{\cup_{i\in I}A_i} = \cap_{i\in I}\complement_E^{A_i}$.

On procède de la même façon pour montrer que $\complement_E^{\cap_{i\in I}A_i} = \cup_{i\in I}\complement_E^{A_i}$.

Exercice 2.5 :

(2) Montrons l'implication $(A\cup C\subset A\cup B \ \ et \ \ A\cap C\subset A\cap B) \implies C\subset B$, c'est-à-dire, supposons que $(A\cup C\subset A\cup B \ \ et \ \ A\cap C\subset A\cap B)$ et montrons que $C\subset B$.

Soit $x\in C$. Comme $C\subset A\cup C$, on obtient que $x\in A\cup C$. Par conséquent, $x\in A\cup B$ car $A\cup C\subset A\cup B$. Ainsi, $x\in A$ ou $x\in B$. Si $x\in B$ c'est ce qu'on cherche. Si $x\in A$, alors $x\in A\cap C$. Ce qui implique que $x\in A\cap B$ car $A\cap C\subset A\cap B$. En particulier, $x\in B$. Par conséquent, $C\subset B$.

(3) Appliquer (2).

Exercice 2.6 :

(1) Montrons que $A\setminus(B\cup C) = (A\setminus B)\cap(A\setminus C)$. On a :

$$\begin{array}{rcl} x\in A\setminus(B\cup C) & \iff & x\in A \text{ et } x\notin B\cup C \\ & \iff & x\in A \text{ et } [x\notin B \text{ et } x\notin C] \\ & \iff & [x\in A \text{ et } x\notin B] \text{ et } [x\in A \text{ et } x\notin C] \\ & \iff & x\in A\setminus B \text{ et } x\in A\setminus C \\ & \iff & x\in (A\setminus B)\cap(A\setminus C). \end{array}$$

Ainsi, $A\setminus(B\cup C) = (A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.

Donner une preuve de (2) et (3).

Exercice 2.7 : On a huit éléments : $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\cdots$

Exercice 2.8 :

(1) Vrai.
(2) Faux.

Exercice 2.11 :

On a $\cap_{k\in\mathbb{N}}A_k = \{0\}$ et $\cup_{k\in\mathbb{N}}A_k = \mathbb{N}$.

Exercice 2.12 :

On a $\cap_{k\in\mathbb{N}}A_k = \{0\}$ et $\cup_{k\in\mathbb{N}}A_k = \mathbb{N}$.

Exercice 2.13 :

(1)(i) Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe X tel que $A\cap X = B$ est que B soit inclus dans A. En effet, si $B\subset A$, alors on a $A\cap X = B$ pour $X = B$. Réciproquement, s'il existe X tel que $A\cap X = B$, alors $B\subset A$.

(ii) Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe X tel que $A\cup X = B$ est que A soit inclus dans B. Justifier.

(2) (i) Supponons qu'on ait $B\subset A$. Alors, tout ensemble X vérifiant $A\cap X = B$ doit contenir B, et il ne doit pas contenir des éléments de $\complement_A^B$, c'est-à-dire, $X = B\cup B'$ où $B'\subset\complement_E^A$.

(ii) De même, supposons qu'on ait $A\subset B$. Alors, tout ensemble X vérifiant $A\cup X = B$ doit être inclus dans B, et il doit contenir $\complement_B^A$, c'est-à-dire, $X = \complement_B^A\cup B''$ où $B''\subset A$.

Correction
(Applications)

Exercice 3.1 :

(1) Par exemple, on peut prendre $f : E \longrightarrow F$ donnée par : $f(a) = d$, $f(b) = d$ et $f(c) = e$.
(2) On ne peut pas définir une application car chaque élément de E doit être envoyé sur un unique élément de F.

Exercice 3.2 :

(1) f injective $\iff (\forall\, x, x' \in E \quad x \neq x' \implies f(x) \neq f(x'))$.
(2) f n'est pas injective $\iff (\exists\, x, x' \in E$ tel que $x \neq x'$ et $f(x) = f(x'))$.
(3) f surjective $\iff (\forall\, y \in F \ \exists\, x \in E$ tel que $f(x) = y)$.
(4) f n'est pas surjective $\iff (\exists\, y \in F$ tel que $\forall\, x \in E \quad f(x) \neq y)$.

Exercice 3.3 :

(1) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x^2$.
• f n'est pas injective car $1 \neq -1$ et $f(1) = f(-1)$.
• f n'est pas surjective car il n'existe aucun réel x tel que $f(x) = -1$.

(2) Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tel que $f(n) = n + 1$.
• f est injective car pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, si $f(n) = f(m)$, alors $n + 1 = m + 1$, ce qui donne $n = m$.
• f n'est pas surjective car il n'existe pas d'entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) = 0$.

(3) Soit $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ tel que $f(n) = n + 1$.
• f est injective (même justification que dans (2)).
• f est surjective, car pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $n - 1 \in \mathbb{Z}$ et $f(n - 1) = n$.
Ainsi, f est bijective. Trouvons la réciproque de f. Pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$, on sait que

$$\begin{aligned} f^{-1}(n) = m &\iff n = f(m) \\ &\iff n = m + 1 \\ &\iff m = n - 1. \end{aligned}$$

Ainsi, $f^{-1} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ est définie par : $f^{-1}(n) = n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(4) Soit $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}$ qui à n assoice $n/2$ si n est pair, $(-n + 1)/2$ si n est impair.
• f est injective. En effet, soient $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que $f(n) = f(m)$. Montrons que $n = m$. L'hypothèse $f(n) = f(m)$ implique l'une des conditions suivantes :
$[n/2 = m/2]$ ou $[(-n + 1)/2 = (-m + 1)/2]$ ou $[(-n + 1)/2 = m/2]$ ou $[n/2 = (-m + 1)/2]$.
Si on a l'une des deux premières possibilités, alors clairement $n = m$. Si on a l'une des deux dernières possibilités, alors on obtient $n + m = 1$, ce qui n'est pas possible car l'hypothèse $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ implique $n + m \geqslant 2$. Par conséquent, $f(n) = f(m)$ implique nécessairement $n = m$.
• f est surjective. En effet, soit $n \in \mathbb{Z}$. Si $n > 0$, alors $2n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ est pair et $f(2n) = n$. Si $n \leqslant 0$, alors $-2n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, l'entier $-2n + 1 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ est impair et $f(-2n + 1) = n$.
Ainsi, f est bijective. L'expression de f^{-1} se déduit de la preuve de la surjectivité de f. On a $f^{-1} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ qui à n associe $2n$ si $n > 0$, $-2n + 1$ si $n \leqslant 0$.

Exercice 3.5 :

– $y \in f(A) \iff \exists\, x \in A$ tel que $y = f(x)$.
– $y \notin f(A) \iff \forall\, x \in A \ \ y \neq f(x)$.
– $x \in f^{-1}(B) \iff \exists\, y \in B$ tel que $y = f(x)$.
– $x \notin f^{-1}(B) \iff \forall\, y \in B \ \ y \neq f(x)$.

Exercice 3.6 :

(1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x-1) = (x-1)^2 + 2(x-1) = x^2 - 1$.
(2) f n'est ni injective ni surjective. Justifier.
(3) On trouve (justifier) :

$$(g \circ f)(]1,2]) =]0,3] \quad \text{et} \quad (g \circ f)^{-1}(]-1,0]) = [-1,0[\cup]0,1].$$

Exercice 3.7 :

Soit $f \in \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application définie par : $f(n) = n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(1) Soit $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ l'application qui envoie 0 sur 0, et tout entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sur $n-1$. Alors, on a $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $g \circ f(n) = g(f(n)) = g(n+1) = (n+1) - 1 = n$ (car $n+1 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$). Ceci signifie que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

(2) Supposons qu'il existe une application $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $f \circ h = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f \circ h(n) = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}(n)$, ce qui signifie que $f(h(n)) = n$, c'est-à-dire, $h(n)+1 = n$. En particulier, pour $n = 0$, on doit avoir $h(0) + 1 = 0$, une contradiction puisque $h(0) \in \mathbb{N}$ donne $h(0) + 1 \geqslant 1$.

Exercice 3.11 :

Supposons qu'on ait $f \circ f \circ f = f$. Montrons l'équivalence : f est injective $\Longleftrightarrow$ f est surjective.

$\Longrightarrow$: Supposons que f soit injective. Montrons que f est surjective. Soit $y \in E$. Puisque $f \circ f \circ f = f$, on obtient $f \circ f \circ f(y) = f(y)$, c'est-à-dire, $f(f \circ f(y)) = f(y)$. Puisque f est injective, on déduit que $f \circ f(y) = y$. Ainsi, $y = f(x)$ où $x = f(y)$.

$\Longleftarrow$: Supposons que f soit surjective. Montrons que f est injective. Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Montrons que $x = x'$. Puisque f est surjective, il existe $a, a' \in E$ tels que $x = f(a)$ et $x' = f(a')$. Ainsi, $f(f(a)) = f(f(a'))$. Puisque f est une application, on obtient $f(f(f(a))) = f(f(f(a')))$. Par conséquent, $f(a) = f(a')$ (car, par hypothèse, $f \circ f \circ f = f$), c'est-à-dire, $x = x'$.

Exercice 3.13 :

(1) Supposons que $A \subset B$ et montrons que $f(A) \subset f(B)$.

$$\begin{array}{rcl} y \in f(A) & \Longrightarrow & \exists\, x \in A \ \text{ tel que } \ y = f(x) \\ & \Longrightarrow & \exists\, x \in B \ \text{ tel que } \ y = f(x) \quad (\text{car } A \subset B) \\ & \Longrightarrow & y \in f(B) \end{array}$$

(2) Montrons que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Comme $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$, il resute de l'assertion (1) que $f(A \cap B) \subset f(A)$ et $f(A \cap B) \subset f(B)$. Ainsi, $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

(3) Montrons que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. On va montrer la double inclusion.

$\supset$: Comme $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, on déduit de l'assertion (1) que $f(A) \subset f(A \cup B)$ et $f(B) \subset f(A \cup B)$. Par conséquent, $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

$\subset$: Soit $y \in f(A \cup B)$. Alors, il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$. Donc, $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$ suivant que $x \in A$ ou $x \in B$. Par conséquent, $y \in f(A) \cup f(B)$. Ainsi, $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

(4) Montrons que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. On procède par équivalences :

$$\begin{array}{rcl} x \in f^{-1}(A \cup B) & \Longleftrightarrow & f(x) \in A \cup B \\ & \Longleftrightarrow & f(x) \in A \quad \text{ou} \quad f(x) \in B \\ & \Longleftrightarrow & x \in f^{-1}(A) \quad \text{ou} \quad x \in f^{-1}(B) \\ & \Longleftrightarrow & x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B). \end{array}$$

(5) Montrons que $f^{-1}(\complement_F^A) = \complement_E^{f^{-1}(A)}$. Soit $x \in E$, on a alors les équivalences :

$$\begin{array}{rcl} x \in \complement_E^{f^{-1}(A)} & \iff & x \notin f^{-1}(A) \\ & \iff & f(x) \notin A \\ & \iff & f(x) \in \complement_F^A \\ & \iff & x \in f^{-1}(\complement_F^A). \end{array}$$

Exercice 3.14 :

(1) $\Longrightarrow$ (2) Supposons que f soit injective. Montrons que $f^{-1}(f(X)) = X$ pour toute partie X de E.

Soit X une partie de E. On a : $x \in X \implies f(x) \in f(X) \implies x \in f^{-1}(f(X))$. Ainsi, $X \subset f^{-1}(f(X))$. Réciproquement, $x' \in f^{-1}(f(X)) \implies f(x') \in f(X) \implies \exists\, x'' \in X$ tel que $f(x') = f(x'') \implies x' = x'' \in X$ (car f est injective). Ainsi, $f^{-1}(f(X)) \subset X$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Supposons que $f^{-1}(f(X)) = X$ pour toute partie X de E. Montrons que f est injective. Soient $x, x' \in X$ tels que $f(x) = f(x')$. Montrons que $x = x'$. On a :

$$\begin{array}{rcl} f(x) = f(x') & \implies & f(x') \in \{f(x)\} \\ & \implies & f(x') \in f(\{x\}) \\ & \implies & x' \in f^{-1}(f(\{x\})) \\ & \implies & x' \in \{x\} \quad \text{(car, par hypothèse, } f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}) \\ & \implies & x = x'. \end{array}$$

(1) $\Longrightarrow$ (3) Supposons que f soit injective. Montrons que $f(P \cap Q) = f(P) \cap f(Q)$ pour toutes parties P et Q de E.

Soient P, Q des parties de E. D'après l'assertion (2) de l'exercice 3.13, on a que $f(P \cap Q) \subset f(P) \cap f(Q)$. Réciproquement, $y \in f(P) \cap f(Q)$ implique qu'il existe $x \in P$ et $x' \in Q$ tels que $y = f(x) = f(x')$. Puisque f est injective, on obtient $x = x'$. Par conséquent, $x \in P \cap Q$ et $y = f(x) \in f(P \cap Q)$. Ainsi, $f(P) \cap f(Q) \subset f(P \cap Q)$.

(3) $\Longrightarrow$ (1) Supposons que $f(P \cap Q) = f(P) \cap f(Q)$ pour toutes parties P et Q de E. Montrons que f est injective.

Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Montrons que $x = x'$. On a :

$$\begin{array}{rcl} f(x) = f(x') & \implies & \{f(x)\} = \{f(x')\} \\ & \implies & f(\{x\}) = f(\{x'\}) \\ & \implies & f(\{x\}) \cap f(\{x'\}) = f(\{x\}) \\ & \implies & f(\{x\} \cap \{x'\}) = f(\{x\}) \quad \text{(car, par hypothèse, } f(\{x\}) \cap f(\{x'\}) = f(\{x\} \cap \{x'\})) \\ & \implies & f(\{x\} \cap \{x'\}) \neq \emptyset \\ & \implies & \{x\} \cap \{x'\} \neq \emptyset \\ & \implies & x = x'. \end{array}$$

Ainsi, on a montré les équivalences (1) $\iff$ (2) $\iff$ (3).

Exercice 3.15 :

(1) $\Longrightarrow$ (2) Supposons que f soit surjective. Montrons que $f(f^{-1}(Y)) = Y$ pour toute partie Y de F.

Soit Y une partie de F. Si $y \in f(f^{-1}(Y))$, alors il existe $x \in f^{-1}(Y)$ tel que $y = f(x)$. Mais, $x \in f^{-1}(Y)$ implique que $f(x) \in Y$. Ainsi, $y \in Y$. Par conséquent, $f(f^{-1}(Y)) \subset Y$. Réciproquement, si $y' \in Y$, alors il existe $x' \in E$ tel que $f(x') = y' \in Y$ (car f est surjective). Ainsi, $x' \in f^{-1}(Y)$. Par conséquent, $y' = f(x') \in f(f^{-1}(Y))$. D'où, $Y \subset f(f^{-1}(Y))$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Supposons que $f(f^{-1}(Y)) = Y$ pour tout Y une partie de F. Montrons que f est surjective.

Soit $y \in F$. Comme $\{y\}$ est une partie de F, on déduit par hypothèse $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$. Par conséquent, $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$, c'est-à-dire, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Exercice 3.16 :

(1) Les réels a, b sont des racines de $x^2 - \alpha x + \beta = 0$ si et seulement si $(x-a)(x-b) = x^2 - \alpha x + \beta$ si et seulement si $a + b = \alpha$ et $ab = \beta$.

(2) (i) f n'est pas injective, par exemple, on a $(1,0) \neq (0,1)$ et $f(1,0) = f(0,1)$.
(ii) On a :

$$\begin{aligned}(a,b) \in f^{-1}\{(\alpha,\beta)\} &\iff f(a,b) = (\alpha,\beta)\\ &\iff (a+b, ab) = (\alpha,\beta)\\ &\iff a+b = \alpha \text{ et } ab = \beta\\ &\iff a, b \text{ sont des racines de l'équation } x^2 - \alpha x + \beta = 0.\end{aligned}$$

Soit $\triangle = \alpha^2 - 4\beta$ le discriminant de l'équation $x^2 - \alpha x + \beta = 0$. On a trois cas :
– Si $\triangle < 0$, alors l'équation $x^2 - \alpha x + \beta = 0$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$. Ainsi, $f^{-1}\{(\alpha,\beta)\} = \emptyset$.
– Si $\triangle = 0$, alors l'équation $x^2 - \alpha x + \beta = 0$ admet une racine double r dans $\mathbb{R}$. Ainsi, $f^{-1}\{(\alpha,\beta)\} = \{(r,r)\}$.
– Si $\triangle > 0$, alors l'équation $x^2 - \alpha x + \beta = 0$ admet deux racines distinctes r et s dans $\mathbb{R}$. Ainsi, $f^{-1}\{(\alpha,\beta)\} = \{(r,s),(s,r)\}$.

Exercice 3.19 :

Montrons que $f \circ f = \mathrm{Id}_{[0,1]}$. Soit $x \in [0,1]$.

• Si $x \in \mathbb{Q}$, alors $f(x) = x$. Ainsi, $f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x) = x$.

• Si $x \notin \mathbb{Q}$. Alors, $1 - x \in [0,1]$ mais $1 - x \notin \mathbb{Q}$. Ainsi, $f(x) = 1 - x$ et $f(1-x) = 1 - (1-x) = x$. Par conséquent, $f \circ f(x) = f(f(x)) = f(1-x) = x$.

Ainsi, $f \circ f(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$, c'est-à-dire, $f \circ f = \mathrm{Id}_{[0,1]}$.

Correction
(Récurrence)

Exercice 5.1 :

(3) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ la propriété : 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

– $P(0)$ est vraie car 7 divise $7 = 3^{2\times 0+1} + 2^{0+2}$.

– Supposons que $P(n)$ soit vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie. On a

$$3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 9 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2} = 7 \times 3^{2n+1} + 2 \times (3^{2n+1} + 2^{n+2}).$$

Comme $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7 (car $P(n)$ est vraie), et $7 \times 3^{2n+1}$ est divisible par 7, on déduit que $3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2}$ est divisible par 7.

Par conséquent, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7 pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

(4) Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, soit $P(n)$ la propriété : $\dfrac{n}{2} \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} \leqslant \frac{n^2}{n+1}$.

– $P(1)$ est vraie car $\dfrac{1}{2} \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} \leqslant \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2}$.

– Supposons que $P(n)$ soit vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

Puisque $P(n)$ est vraie, on a $\dfrac{n}{2} \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} \leqslant \frac{n^2}{n+1}$. Par conséquent :

$$\frac{n}{2} + \frac{n+1}{n+2} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}\right) + \frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{n^2}{n+1} + \frac{n+1}{n+2}.$$

Un simple calcul montre que $\dfrac{n+1}{2} \leqslant \dfrac{n}{2} + \dfrac{n+1}{n+2}$ et $\dfrac{n^2}{n+1} + \dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{(n+1)^2}{n+2}$.

Par conséquent, $\dfrac{n}{2} \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} \leqslant \frac{n^2}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exercice 5.2 : Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ la propriété : $f(n) \geqslant n$

– $P(0)$ est vraie car $f(0) \in \mathbb{N}$ implique que $f(0) \geqslant 0$.

– Supposons que $P(n)$ soit vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

Puisque f est strictement croissante, on a $f(n+1) > f(n)$. Ainsi, $f(n+1) > f(n) \geqslant n$ (car $P(n)$ est vraie). Donc, $f(n+1) > n$. Comme $f(n)$ et n sont des entiers naturels, la condition $f(n+1) > n$ implique $f(n+1) \geqslant n+1$, c'est-à-dire, $P(n+1)$ est vraie.

Par conséquent, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire, $f(n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5.3 : On commence par déterminer f^n pour $n = 1, 2, 3 \cdots$, ce qui va nous orienter vers une formule générale.

(a) Cas où $n = 1$: On a $f^1(x) = f(x) = 4x + 3 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

(b) Cas où $n = 2$: $f^2(x) = f \circ f(x) = f(f(x)) = 4(4x+3) + 3 = 4^2x + 15 = 4^2x + 4^2 - 1 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

(c) Cas où $n = 3$: $f^3(x) = f^2 \circ f(x) = f^2(f(x)) = 4^2(4x+3) + 4^2 - 1 = 4^3x + 4^3 - 1 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Montrons par récurrence qu'on la propriété $P(n)$: $f^n(x) = 4^n x + 4^n - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

– Le cas (a) montre que $P(1)$ est vraie.

– Supposons que $P(n)$ soit vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f^{n+1}(x) = f^n \circ f(x) = f^n(f(x)) = f^n(4x+3) = 4^n(4x+3) + 4^n - 1 = 4^{n+1}x + 4^n \times 3 + 4^n - 1 = 4^{n+1}x + 4^{n+1} - 1$.

Ainsi, $f^n(x) = 4^n x + 4^n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5.4 : (1) Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(m)$. Montrons que $n = m$.
Puisque $f(n) = f(m)$, alors $f(f(n)) = f(f(m))$ (car f une application), c'est-à-dire, $f^2(n) = f^2(m)$. De même, $f^2(n) = f^2(m)$ implique que $f^3(n) = f^3(m)$. Ainsi,

$$f(n) + f^2(n) + f^3(n) = f(m) + f^2(m) + f^3(m).$$

Par conséquent, $3n = 3m$, ce qui implique $n = m$.

(2) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ la propriété : $\quad f(n) = n$.

On va montrer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ en utilisant **le second principe de récurrence**.

– $P(0)$ est vraie car $f(0) + f^2(0) + f^3(0) = 3 \times 0 = 0$ implique que $f(0) = 0$.

– Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $P(k)$ soit vraie pour tout $k < n$. Montrons que $P(n)$ est vraie.

Puisque $f(k) = k$ pour tout $k < n$ et que f est injective, on a nécessairement que $f(n) \notin \{0, 1, \cdots, n-1\}$. La même remarque implique aussi que $f^2(n) \notin \{0, 1, \cdots, n-1\}$ et $f^3(n) \notin \{0, 1, \cdots, n-1\}$. Ainsi, $f(n) \geqslant n$, $f^2(n) \geqslant n$ et $f^3(n) \geqslant n$. Comme $f(n) + f^2(n) + f^2(n) = 3n$, on a nécessairement que $f(n) = f^2(n) = f^3(n) = n$, en particulier, $f(n) = n$.

Ainsi, $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire, $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

Exercice 5.5 : Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ la propriété : $\quad \prod_{k=1}^n (1-a_k) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^n a_k$ pour tout $a_1, \cdots, a_k \in [0,1]$.

– $P(1)$ est vraie car $\prod_{k=1}^1 (1-a_k) = 1 - a_1 \geqslant 1 - a_1 = 1 - \sum_{k=1}^1 a_k$.

– Supposons que $P(n)$ soit vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie. Soient $a_1, \cdots, a_{n+1} \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}
P(n) &\implies \textstyle\prod_{k=1}^n (1-a_k) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^n a_k \\
&\implies (\textstyle\prod_{k=1}^n (1-a_k)) \times (1-a_{n+1}) \geqslant (1 - \sum_{k=1}^n a_k) \times (1-a_{n+1}) \quad (\text{car } 1 - a_{n+1} \geqslant 0). \\
&\implies \textstyle\prod_{k=1}^{n+1} (1-a_k) \geqslant (1 - \sum_{k=1}^{n+1} a_k) + a_{n+1}(\sum_k^n a_k) \\
&\implies \textstyle\prod_{k=1}^{n+1} (1-a_k) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{n+1} a_k \quad (\text{car } a_{n+1}(\sum_k^n a_k) \geqslant 0) \\
&\implies P(n+1).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\prod_{k=1}^n (1-a_k) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^n a_k$ pour tout $a_1, \cdots, a_n \in [0,1]$.

Exercice 5.7 : Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, soit $P(n)$ la propriété : $\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2 \leqslant n \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)$ pour tout $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

– Il est clair que $P(1)$ est vraie.

– Supposons que $P(n)$ soit vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie. Soient $a_1, \cdots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$.

Rappelons que

$$2ab - a^2 \leqslant b^2 \qquad (\star)$$

pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ **(car** $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geqslant 0$**).**

On a :

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + a_{n+1}^2 + \sum_{k=1}^{n}(2a_k a_{n+1}).$$

Puisque $P(n)$ est vraie, on obtient :

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2 \leqslant n\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) + a_{n+1}^2 + \sum_{k=1}^{n}(2a_k a_{n+1}).$$

On ajoute et on retranche na_{n+1}^2, on obtient :

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2 \leqslant n\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) + (n+1)a_{n+1}^2 + \sum_{k=1}^{n}(2a_k a_{n+1} - a_{n+1}^2).$$

Par l'inégalité $(\star)$, on déduit que :

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2 \leqslant n\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) + (n+1)a_{n+1}^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

Ainsi, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2 \leqslant (n+1)\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k^2\right).$$

Par conséquent, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Correction
(Arithmétique dans $\mathbb{Z}$)

Exercice 6.1 :

(1) Oui.

(2) Non. Par exemple, $4 \times 2 + 3 \times (-2) = 2$ mais $\text{pgcd}(4, 3) = 1 \neq 2$.

(3) Oui. Supposons que $\text{pgcd}(a, b^3) \neq 1$. Alors, il existe un nombre premier p qui divise a et b^3. Par conséquent, p divise a et b, ce qui n'est pas possible car $\text{pgcd}(a, b) = 1$. Ainsi, $\text{pgcd}(a, b^3) = 1$.

(4) Non. Par exemple, 2 divise $5 + 3$ et $5 - 3$, mais 2 ne divise ni 5 ni 3.

(5) Oui.

(6) Non.

(7) Oui.

(8) Non.

(9) Oui. En effet, si 5 divise b^2, alors 5 divise b car 5 est premier. Soit $c \in \mathbb{Z}$ tel que $b = 5c$. Ainsi, $b^2 = 25c^2$ est divisible par 25.

(10) Non. Par exemple, 12 divise $6^2 = 36$ mais 4 ne divise pas 6.

(11) Oui. En effet, comme 2 et 3 divisent 12, et 12 divise b^2, alors 2 et 3 divisent b^2. Par conséquent, 2 et 3 divisent b (car 2 et 3 sont des nombres premiers). Ainsi, 6 divisent b, et par conséquent $36 = 6^2$ divise b^2.

(12) Non. Par exemple, 91 divise $91 = 13 \times 7$, mais 91 ne divise ni 13 ni 7.

Exercice 6.2 :

Comme $4125 = 3780 + 345$, on déduit que $24396465 = 6454 \times 3780 + 345$. Puisque $345 < 3780$, on déduit que 6454 est le quotient de la division Euclidienne de 24396465 par 378.

Exercice 6.4 :

Par hypothèse, $n = 5q + r$ avec $r = 2$ ou 3 et $q \in \mathbb{N}$.

– Si $r = 2$, alors $n^2 + 1 = 25q^2 + 20q + 5 = 5(5q^2 + 4q + 1)$.

– Si $r = 3$, alors $n^2 + 1 = 25q^2 + 30q + 10 = 5(5q^2 + 6q + 2)$.

Donc, 5 divise $n^2 + 1$.

Exercice 6.6 :

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On va discuter sur la parité de n.

– Supposons que n soit pair. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$. Alors, suivant que k est pair ou impair, on a $n = 4l$ ou $n = 4l + 2$ pour un certain $l \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $n^2 = 8(2l^2)$ ou $n^2 = 8(2l^2 + 2l) + 4$. Donc, 8 divise n^2 ou $n^2 - 4$.

– Supposons que n soit impair. Il existe $r \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2r + 1$. Alors, suivant que r est pair ou impair, on a $n = 4s + 1$ ou $n = 4s + 3$ pour un certain $s \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $n^2 - 1 = 8(2s^2 + s)$ ou $n^2 - 1 = 8(2s^2 + 3s + 1)$. Donc, 8 divise $n^2 - 1$.

Exercice 6.7 :

Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. On écrit $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$ et $\text{pgcd}(a, b) = 1$. On a $2b^2 = a^2$. Comme 2 est premier divisant a^2, on déduit que 2 divise a. Posons $a = 2c$ avec $c \in \mathbb{N}$. Alors, on déduit que $b^2 = 2c^2$. Comme 2 divise b^2, on déduit que 2 divise b, ce qui n'est pas possible car $\text{pgcd}(a, b) = 1$. Donc, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 6.8 :

Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ tel que $n-1$ divise n^2+1. Puisque $n^2+1 = (n^2-1)+2$ et que $n-1$ divise n^2-1, on déduit que $n-1$ divise 2. Ainsi, $n-1 \in \{-2,-1,1,2\}$. Par conséquent, $n \in \{-1,0,2,3\}$. Réciproquement, on vérifie que si $n \in \{-1,0,2,3\}$, alors $n-1$ divise n^2+1.

Exercice 6.9 :

Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ tel que p divise $(p-1)!+1$. Montrons que p est premier.
Supposons que p ne soit pas premier. Alors, il existe $u \in \mathbb{N}$ tel que $1 < u < p$ et u divise p. Comme p divise $(p-1)!+1$, alors u divise $(p-1)!+1$. De plus, l'hypothèse $u < p$ implique que u divise $(p-1)!$. Ainsi, u divise $((p-1)!+1)-(p-1)! = 1$, ce qui donne que $u = 1$, une contradiction car $u > 1$. Par conséquent, p est premier.

Exercice 6.10 :

(1) Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $1 < n \leqslant m$. Puisque $n \leqslant m$, on déduit que n divise $m!$, et par conséquent n divise $m!+n$. De plus, $1 < n < m!+n$ (car $n \leqslant m < m!+n$). Par conséquent, $m!+n$ n'est pas premier.
(2) On considère les entiers $\alpha_n := (101)!+n$ avec $1 < n \leqslant 101$. Par la question (1), les entiers $\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_{101}$ ne sont pas premiers. De plus, ces entiers sont consécutifs et en nombre de 100.

Exercice 6.11 : Soient $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Posons $d = \text{pgcd}(a,b)$.

(1) Supposons qu'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $a = bq$. Montrons que $d = |b|$. Comme b divise a et b, on déduit que b divise d (car $d = \text{pgcd}(a,b)$). En particulier, $|b|$ divise d. De plus, d divise b implique que d divise $|b|$. D'où, $d = |b|$.
(2) Supposons qu'il existe $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ tels que $a = bq+r$. Montrons que $\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(b,r)$. Posons $d' = \text{pgcd}(b,r)$.
– Comme d divise a et b, alors d divise $r = a-bq$ et b. Par conséquent, d divise d'.
– De même, d' divise b et r implique que d' divise $a = bq+r$ et b. Ainsi, d' divise d.
D'où, $d = d'$.

Exercice 6.12 : (1) En effectuant des divisions Euclidiennes successives, on obtient :

(div. 1) $1306 = 128 \times 10 + 26$
(div. 2) $128 = 26 \times 4 + 24$
(div. 3) $26 = 24 \times 1 + 2$
(div. 4) $24 = 2 \times 12 + 0$.

En appliquant l'exercice 6.11 à ces divisions, on déduit que :

$$\text{pgcd}(1306,128) = \text{pgcd}(128,26) = \text{pgcd}(26,24) = \text{pgcd}(24,2) = 2.$$

Reste à trouver deux entiers $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $1306m + 128n = 4$.

Par (div. 3), on a $2 = 26-24$. On utilise (div. 2) pour avoir $2 = 26-(128-26\times 4) = 26\times 5-128$. Puis (div. 1) donne $2 = (1306-128\times 10)\times 5-128$. Ainsi, $2 = 1306\times 5+128\times(-51)$. Par conséquent, $1306\times 10+128\times(-102) = 4$. On peut prendre $m = 10$ et $n = -102$.

(2) On a $6n^2+4n+9 = (3n+2)\times 2n+9$. Ainsi, $\text{pgcd}(6n^2+4n+9, 3n+2) = \text{pgcd}(3n+2, 9)$. Comme 3 ne divise pas $3n+2$, et que les diviseurs positifs de 9 sont 1, 3 et 9, on déduit que 1 est le seul diviseur positif commun à $3n+2$ et 9. D'où, $\text{pgcd}(3n+2, 9) = 1$.

(3) Par l'exercice 6.11, on obtient :

$17a+5b = (7a+2b)\times 2+3a+b \implies \text{pgcd}(17a+5b, 7a+2b) = \text{pgcd}(7a+2b, 3a+b)$.
$7a+2b = (3a+b)\times 2+a \implies \text{pgcd}(7a+2b, 3a+b) = \text{pgcd}(3a+b, a)$.
$3a+b = 3a+b \implies \text{pgcd}(3a+b, a) = \text{pgcd}(a,b)$.

D'où, $\text{pgcd}(17a + 5b, 7a + 2b) = \text{pgcd}(a, b)$.

Exercice 6.14 :

(1) On a :

(div. 1) $325 = 299 \times 1 + 26$

(div. 2) $299 = 26 \times 11 + 13$

(div. 3) $26 = 13 \times 2 + 0$.

En appliquant l'exercice 6.11 à ces divisions, on déduit que :

$$\text{pgcd}(325, 299) = \text{pgcd}(299, 26) = \text{pgcd}(299, 26) = \text{pgcd}(26, 13) = 13.$$

(2) Par (div. 2) on a $13 = 299 - 26 \times 11$. Par (div. 1) on déduit que

$$13 = 299 - (325 - 299) \times 11 = 325 \times (-11) + 299 \times 12.$$

Ainsi, on peut prendre $m = -11$ et $n = 12$.
(3) On vient d'avoir par (2) l'égalité $13 = 325 \times (-11) + 299 \times 12$. En la multipliant par 3, on obtient

$$39 = 325 \times (-33) + 299 \times (36).$$

Ainsi, $(-33, 36)$ est une solution particulière de (E).
(4) Les solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de (E) sont les couples $(-33 + 23k, 36 - 25k)$ où k décrit $\mathbb{Z}$ (le prouver).