

TD Valeur de Shapley

Sébastien Konieczny

April 2, 2024

Soit R une coalition, on définit le jeu d'unanimité ω_R par: pour toute coalition S

$$\omega_R(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } R \subseteq S \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Question. $N = \{1, 2, 3, 4\}$, quelle est la valeur de Shapley du jeu $\omega_{\{1,3\}}$?

Question. Quelle est la valeur de Shapley de chaque participant à un jeu ω_R ?

Question. Tentez de montrer quelle est cette valeur en n'utilisant que les propriétés d'une valeur.

Tout jeu sous forme coalitionnelle v peut s'exprimer sous forme d'une combinaison linéaire des jeux d'unanimité (autrement dit les jeux d'unanimité forment une base de l'espace vectoriel des jeux sous forme coalitionnelle):

$$v = \sum_{R \subseteq N, R \neq \emptyset} \alpha_R \cdot \omega_R$$

Question. Trouver la décomposition du jeu suivant:

$$\begin{array}{lll} v(\{1\}) = 1 & v(\{1, 2\}) = 10 & \\ v(\{2\}) = 0 & v(\{1, 3\}) = 4 & v(\{1, 2, 3\}) = 12 \\ v(\{3\}) = 1 & v(\{2, 3\}) = 11 & \end{array}$$

Question. Quelle est la valeur des coefficients α pour un jeu à 3 joueurs ?

De manière générale on peut calculer les coefficients pour un jeu quelconque:

$$\alpha_R = \sum_{T \subseteq R} (-1)^{r-t} v(T)$$

Question. Montrez que la valeur de Shapley est la seule valeur qui satisfait les propriétés Efficacité, Symétrie, Joueur Nul, et Additivité

Licence Math-Info
TD de Décision de Groupe et Théorie du Vote

Exercice. Soit le profil suivant:

C	> ₁	A	> ₁	B	> ₁	D	> ₁	E
B	> ₂	A	> ₂	D	> ₂	E	> ₂	C
B	> ₃	A	> ₃	C	> ₃	E	> ₃	D
A	> ₄	B	> ₄	D	> ₄	E	> ₄	C
C	> ₅	A	> ₅	D	> ₅	E	> ₅	B

En cas d'égalité entre candidats dans les méthodes de votes ci-dessous, on utilisera l'âge des candidats comme règle de départage (tie-break). A est le candidat le plus vieux, B le suivant, etc. c'est-à-dire que l'on a $A > B > C > D > E$ pour les départages.

Question. Qui est le vainqueur de l'élection avec les méthodes de vote suivantes:

1. vote majoritaire simple
2. vote majoritaire à 2 tours
3. méthode de Borda
4. vote simple transférable
5. méthode de Coombs
6. méthode de vote non rangée {2}
(i.e. chaque votant doit mettre ses deux candidats préférés sur le bulletin)
7. méthode de vote par veto
8. méthode de Copeland
9. méthode de Kramer-Simpson
10. méthode de Dodgson

Question. Dessinez le graphe de majorité correspondant à ce profil.

Question. Expliquez pourquoi les méthodes de Copeland, de Kramer-Simpson, et de Dodgson sont Condorcet cohérentes.

Exercice. Soit le profil suivant:

Agathe	> ₁	Béatrice	> ₁	Dolores	> ₁	Cécile	> ₁	Eléanore
Béatrice	> ₂	Agathe	> ₂	Dolores	> ₂	Cécile	> ₂	Eléanore
Dolores	> ₃	Béatrice	> ₃	Agathe	> ₃	Eléanore	> ₃	Cécile
Agathe	> ₄	Dolores	> ₄	Béatrice	> ₄	Cécile	> ₄	Eléanore
Cécile	> ₅	Béatrice	> ₅	Dolores	> ₅	Eléanore	> ₅	Agathe
Eléanore	> ₆	Dolores	> ₆	Cécile	> ₆	Béatrice	> ₆	Agathe

Question. Qui est le vainqueur de l'élection avec les méthodes de vote suivantes:

1. vote majoritaire simple
2. vote majoritaire à 2 tours
3. méthode de Borda
4. vote simple transférable
5. méthode de Coombs
6. méthode de vote non rangée {3}
(i.e. chaque votant doit mettre ses trois candidats préférés sur le bulletin)
7. méthode de vote par veto
8. méthode de Copeland
9. méthode de Kramer-Simpson

Question. Dessinez le graphe de majorité correspondant à ce profil.

$D > B > E > C > A$
 $E > A > C > B > D$
 $D > B > E > A > C$
 $B > E > C > D > A$
 $D > B > E > C > A$
 $C > E > A > B > D$
 $C > E > A > B > D$

A
 B

3) $A = 3 \times 0 + 1 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 3 = 6$
 $B = 3 \times 1 + 3 \times 3 + 1 \times 4 = 16$
 $C = 1 \times 0 + 2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 4 = 13$
 $D = 3 \times 0 + 1 \times 1 + 3 \times 4 = 13$
 $E = 3 \times 2 + 3 \times 3 + 1 \times 4 = 19$

4) $A = 4 \quad B = 7 \quad C = 6 \quad D = 4 \quad E = 7$

5) $A = 3 \quad B = 4 \quad C = 4 \quad D = 3 \quad E = 7$

6)

	D		7) $A > C > E$
	E		D
\times	$B > E$	\times	C
\times	D	\times	$A > D$
\times	$A > E$	\times	$A > C$
\times	$A > E$	\times	D
			D

8)

$A =$	-1	-1	-1	-1	
$B =$	+1				+1 +1 +1 = 4
$C =$		+1			-1 +1 -1 = 0
$D =$			+1		-1 -1 -1 = -2
$E =$				+1	-1 +1 +1 = 2