Cours de MOMI

Licence I Math-Info

Chapitre II: Ensembles

Définition (naïve)

– *Un ensemble est une collection d'objets.*

– *Un objet de la collection s'appelle élément de l'ensemble.*

1. Appartenance

– Si e est un élément d'un ensemble E, on dit que e appartient à E et on écrit $e \in E$.

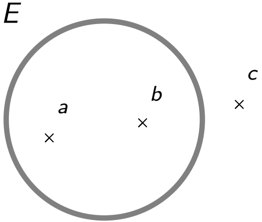
– Si e n'appartient pas à E, on écrit $e \notin E$.

2. Détermination d'un ensemble

– Un ensemble E est déterminé:

- soit par l'énumération de ses éléments, on dit alors que E est défini en extension. Dans ce cas, si $\alpha, \beta, \cdots$ sont les éléments de E, alors on écrit $E = \{\alpha, \beta, \cdots\}$.
- soit par une propriété donnant ses éléments, on dit alors que E est défini en compréhension. Dans ce cas, si $P(x)$ est la propriété décrivant l'élément x de E, on écrit $E = \{x \mid P(x)\}$ qu'on lit *"E est l'ensemble des éléments x tels que $P(x)$".*

– On peut aussi représenter l'ensemble E par une patate à l'intérieur de laquelle on met les éléments.
Par exemple, les deux conditions $E = \{a, b\}$ et $c \notin E$ se représentent ainsi:



Exemples.

1. Soient $\triangle$, Ω, x et 0 les éléments constituant un ensemble E. Alors, on écrit $E = \{\triangle, \Omega, x, 0\}$. *L'ordre d'énumération des éléments de E n'a pas d'importance.*

2. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ l'ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$ l'ensemble des entiers relatifs.

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ et } b \neq 0\}$ l'ensemble des nombres rationnels.

$\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

$\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

3. Singleton - Ensemble vide

Définition. *On appelle singleton tout ensemble formé d'un seul élément.*

Exemples. $E = \{1\}$ est le singleton dont l'unique élément est 1. Alors que $F = \{\{1\}\}$ est le singleton dont l'unique élément est $\{1\}$.

Définition. *Il existe un ensemble qui ne contient aucun élément. On le note $\emptyset$ et on l'appelle l'ensemble vide. (Parfois on le note $\{\}$).*

Remarque. $\{\emptyset\}$ n'est pas l'ensemble vide. C'est le singleton dont l'unique élément est $\emptyset$.

4. Quantificateurs

Soit $P(x)$ une proposition qui dépend des éléments x d'un ensemble E (par exemple, $E = \mathbb{R}$ et $P(x)$: x est un réel positif).

On distingue trois cas:

Cas 1. $P(x)$ est vérifiée pour tout élément x de E. On écrit alors:

$$\forall\, x \in E\ P(x)$$

qu'on lit: "Quelque soit x de E $P(x)$".

(on lit aussi: "Pour tout x de E $P(x)$").

Cas 2. $P(x)$ est vérifiée pour au moins un élément $x \in E$. On écrit alors:

$$\exists\, x \in E \mid P(x)$$

qu'on lit: "Il existe un élément x de E tel que $P(x)$".

Cas 3. $P(x)$ n'est vérifiée pour aucun élément x de E. On écrit alors:

$$\forall x \in E \quad non\, P(x).$$

$\forall$ s'appelle le quantificateur universel.
$\exists$ s'appelle le quantificateur existentiel.

Remarque. Parfois on utilise le quantificateur $\exists!$ pour indiquer l'unicité. L'écriture $\exists!\, x \in E \mid P(x)$ se lit: "il existe un unique élément x de E tel que $P(x)$".

Exemples. (1) La fonction sinus est minorée par -1 et majorée par 1, ce qu'on écrit: $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1$.
(2) L'équation $x^2 + x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$, ce qu'on écrit: $\exists x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 1 = 0$.

Remarques. (1) Quand il y a plusieurs quantificateurs, on doit faire attention à l'ordre d'écrirure. Par exemple, la proposition $(\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x < n+1)$ qui est vraie, ne signifie pas la même chose que la proposition $(\exists n \in \mathbb{Z} \mid \forall x \in \mathbb{R} \mid n \leq x < n+1)$ qui est fausse.

(2) Soit $P(x)$ une proposition dépendant des éléments x d'un ensemble E.

La négation de $(\forall\, x \in E\ \ P(x))$ est $\exists\, x \in E \mid \ non\, P(x)$.

De même, la négation de $(\exists\, x \in E \mid P(x))$ est $\forall\, x \in E\ non\, P(x)$.

Exemples. (1) Donner la négation de:
$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ \exists x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 10^n$.

$$\begin{aligned}
non(\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ \exists\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 10^n) &\iff \exists\, n \in \mathbb{N} \mid non(\exists\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 10^n) \\
&\iff \exists\, n \in \mathbb{N} \mid \forall\, x \in \mathbb{R}\ \ non(x^2 \geq 10^n) \\
&\iff \exists\, n \in \mathbb{N} \mid \forall\, x \in \mathbb{R}\ \ x^2 < 10^n.
\end{aligned}$$

(2) Donner la négation de: $\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, q \in \mathbb{Q} \;\mid\; 0 < q < \epsilon$.

$$\begin{aligned}
non(\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, q \in \mathbb{Q} \;\mid\; 0 < q < \epsilon) &\iff \exists\, \epsilon > 0 \;\mid\; non(\exists\, q \in \mathbb{Q} \;\mid\; 0 < q < \epsilon) \\
&\iff \exists\, \epsilon > 0 \;\mid\; \forall\, q \in \mathbb{Q} \;\; non(0 < q < \epsilon) \\
&\iff \exists\, \epsilon > 0 \;\mid\; \forall\, q \in \mathbb{Q} \;\; non(0 < q \text{ et } q < \epsilon) \\
&\iff \exists\, \epsilon > 0 \;\mid\; \forall\, q \in \mathbb{Q} \;\; (q \leq 0 \text{ ou } \epsilon \leq q).
\end{aligned}$$

5. Inclusion

Définition. – *On dit qu'un ensemble A est* **inclus** *dans un ensemble B (ou A est une* **partie** *de B) si tout élément de A est un élément de B. On écrit $A \subset B$.*
– Si A n'est pas inclus dans B, on écrit $A \not\subset B$.
– Si $A \subset B$ et $B \subset A$, alors on dit que A et B sont **égaux** *et on écrit $A = B$.*

Exemples. (1) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
(2) Les ensembles $A = \{1, \Delta, 0\}$ et $B = \{0, 1, \Delta\}$ sont égaux.

Remarques. (1) $A \subset A$ pour tout ensemble A.

(2) $A \subset B \iff \forall\, a \in A,\ \ a \in B.$
(3) $A \not\subset B \iff \exists\, a \in A \ \mid\ a \notin B.$
(4) $A = B \iff A \subset B$ et $B \subset A$.
(5) (Exo) $A \neq B \iff (\exists\, a \in A \mid a \notin B)$ ou $(\exists\, b \in B \mid b \notin A)$.
(6) (À savoir!!!) Pour tout ensemble A, on a $\emptyset \subset A$.

6. Opérations sur les ensembles

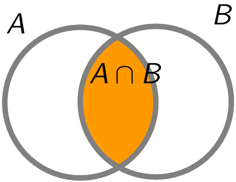
6.1 Intersection

Définition. *L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble formé des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B. On la note $A \cap B$, et on lit "A inter B".* Donc:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B.$$

Illustration



Remarques. (À faire en exercice)

(1) $A \cap B = B \cap A, \quad A \cap A = A$ et $A \cap B \subset A$.

(2) $x \notin A \cap B \iff x \notin A$ ou $x \notin B$.

(3) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

(4) Pour tout ensemble A, on a $A \cap \emptyset = \emptyset$.

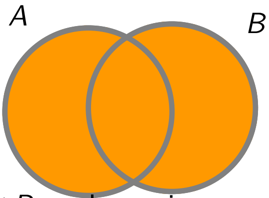
6.2 Réunion

Définition. *La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble formé des éléments qui appartiennent à A ou à B. On la note* $A \cup B$, *et on lit "A union B".* Donc:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B.$$

Illustration



$A \cup B$ est la partie en couleur orange

Remarques. (À faire en exercice)
(1) $A \cup B = B \cup A, \quad A \cup A = A$ et $A \subset A \cup B$.
(2) $x \notin A \cup B \iff x \notin A$ et $x \notin B$.
(3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
(4) Pour tout ensemble A, on a $A \cup \emptyset = A$.

Proposition. *L'intersection et la réunion sont distributives l'une par rapport à l'autre, c'est-à-dire, si A, B et C sont des ensembles, alors on a:*
(1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
(2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

6.3 Généralisation de l'intersection et de la réunion

Soient I une partie de $\mathbb{N}$ et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles indexée sur I.

Définition. – *L'intersection des ensembles A_i, $i \in I$, est l'ensemble des éléments appartenant à A_i pour tout $i \in I$. On la note* $\bigcap_{i \in I} A_i$*,*

et on lit: "intersection des A_i pour $i \in I$.

– *La réunion des ensembles A_i, $i \in I$, est l'ensemble des éléments appartenant à l'un au moins des A_i. On la note $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$, et on lit: "réunion des A_i pour $i \in I$.*

Cette définition se traduit ainsi:

$$\text{Intersection} \quad \begin{cases} \bigcap\limits_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall\, i \in I \;\; x \in A_i\} \\ x \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i \iff \forall\, i \in I \;\; x \in A_i \end{cases}$$

$$\text{Réunion} \quad \begin{cases} \bigcup\limits_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists\, i \in I \;\; x \in A_i\} \\ x \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i \iff \exists\, i \in I \mid x \in A_i. \end{cases}$$

Remarques. (À faire en exercice)

(1) $x \notin \bigcap\limits_{i \in I} A_i \iff \exists\, i \in I \mid x \notin A_i$.

(2) $x \notin \bigcup\limits_{i \in I} A_i \iff \forall\, i \in I \; x \notin A_i$.

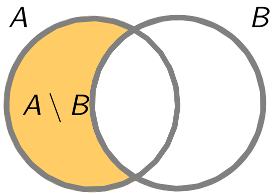
6.4 Différence de deux ensembles

Définition. *Soient A et B deux ensembles. On appelle différence de A par rapport à B, l'ensemble des éléments qui appartiennent à A mais qui n'appartiennent pas à B. On note cet ensemble $A \setminus B$, et on lit: "A moins B".* Donc

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

$$x \in A \setminus B \iff x \in A \text{ et } x \notin B.$$

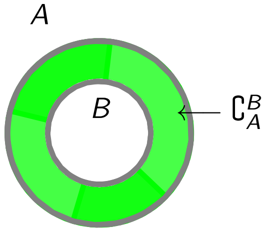
Illustration



Cas particulier important

Soient A et B deux ensembles tels que $B \subset A$. Dans ce cas, l'ensemble $A \setminus B$ s'appelle le complémentaire de B dans A. On le note $\complement_A^B$.

Illustration



Remarques. (1) On a $x \in \complement_A^B \iff x \in A$ et $x \notin B$.

(2) Si $x \in A$, on a que $x \notin \complement_A^B \iff x \in B$.

Proposition. **(Lois de De Morgan)**
Soient B_1 et B_2 deux parties d'un ensemble A. On a:
(1) $\complement_A^{B_1 \cap B_2} = \complement_A^{B_1} \cup \complement_A^{B_2}$.
(2) $\complement_A^{B_1 \cup B_2} = \complement_A^{B_1} \cap \complement_A^{B_2}$.

Remarques. (À faire en exercice)
(1) Soit B une partie de A. On a $\complement_A^{\complement_A^B} = B$.
(2) Pour tout ensemble E, on a $\complement_E^{\emptyset} = E$ et $\complement_E^E = \emptyset$.
(3) **(Généralisation des lois de De Morgan)** Soient I une partie de $\mathbb{N}$, et $(B_i)_{i\in I}$ une famille de parties de A indexée sur I. On a:

$$\complement_A^{\cap_{i\in I} B_i} = \bigcup_{i\in I} \complement_A^{B_i} \quad \text{et} \quad \complement_A^{\cup_{i\in I} B_i} = \bigcap_{i\in I} \complement_A^{B_i}.$$

6.5 Produit cartésien

Définition. *Soient A et B deux ensembles.*
(1) On appelle couple d'éléments de A et B tout ensemble de la forme $\{a, \{a, b\}\}$ avec $a \in A$ et $b \in B$. On note ce couple (a, b).
(2) Le produit cartésien de A par B, noté $A \times B$, est l'ensemble de tous les couples d'éléments de A et B. On lit $A \times B$: "A croix B".

Donc, on a

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

Remarques. (1) $(a, b) \in A \times B \iff a \in A$ et $b \in B$.
(2) $(a, b) \notin A \times B \iff a \notin A$ ou $b \notin B$.
(3) On a souvent $(a, b) \neq (b, a)$ (voir la proposition ci-dessous).
(4) Pour tout ensemble A, on a: $A \times \emptyset = \emptyset$ et $\emptyset \times A = \emptyset$.

Proposition. *Soient* (a, b) *et* (a', b') *deux éléments de* $A \times B$*.*
Alors: $(a, b) = (a', b') \iff a = a'$ *et* $b = b'$*.*

Exemple. Soient $A = \{1, 2\}$ et $B = \{a, b, c\}$. Alors:
$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$.

Plus tard, on prouvera le résultat suivant:

Proposition. *Soient* A *un ensemble formé de* m *éléments et* B *un ensemble formé de* n *éléments. Alors, l'ensemble* $A \times B$ *est formé de* mn *éléments.*

Proposition. *Soient* A*,* B *et* C *trois ensembles. Alors:*
(1) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$*.*
(2) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$*.*

Généralisation du produit cartésien

Soient $A_1, \cdots, A_n$ des ensembles (avec $n \geq 2$). Le produit cartésien $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ est défini comme étant l'ensemble $(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{n-1}) \times A_n$ (donc on procède par itération). Un éléments de $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ est appelé *n*-uplet et est noté $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ avec $a_i \in A_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. On a aussi la propriété:

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \iff \forall\, i \in \{1, 2, \cdots, n\} \quad a_i = b_i.$$

Remarque. (1) Pour $n \geq 3$, on dit:

triplet au lieu de 3-uplet.
quadruplet au lieu de 4-uplet.
quintuplet au lieu de 5-uplet, etc

(2) Pour un ensemble A, on note $A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$, qu'on appelle le produit cartésien n-ième de A. Par exemple: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\cdots$

6.6 L'ensemble des parties d'un ensemble

Définition. *Soit A un ensemble. On note $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble des parties de A.* Donc, on a:

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subset A\}$$

$$X \in \mathcal{P}(A) \iff X \subset A.$$

Remarque. L'ensemble $\mathcal{P}(A)$ n'est jamais vide. En effet, $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ et $A \in \mathcal{P}(A)$ (car $\emptyset \subset A$ et $A \subset A$).

Exemples.
(1) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
Le nombre d'éléments de $\mathcal{P}(\emptyset)$ est $1 = 2^0$.
(2) Pour x un élément, on a $\mathcal{P}(\{x\}) = \{\emptyset, \{x\}\}$
Le nombre d'éléments de $\mathcal{P}(\{x\})$ est $2 = 2^1$.
(3) Pour x, y deux éléments, on a
$\mathcal{P}(\{x, y\}) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$
Le nombre d'éléments de $\mathcal{P}(\{x, y\})$ est $4 = 2^2$.

Plus généralement on a:

Proposition. *Soit A un ensemble fini formé de n éléments. Alors, $\mathcal{P}(A)$ est formé de 2^n éléments.*

Preuve. La preuve sera donnée plus tard.

Remarques. Soient A et B deux ensembles.

(1) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{P}(A \cap B) &\iff X \subset A \cap B \\ &\iff X \subset A \text{ et } X \subset B \\ &\iff X \in \mathcal{P}(A) \text{ et } X \in \mathcal{P}(B) \\ &\iff X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B). \end{aligned}$$

(2) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$.
Mais en général, $\mathcal{P}(A \cup B) \not\subset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Donner un exemple montrant cela.