Cours de MOMI

Licence I Math-Info

Quelques informations

Responsable du cours: Ahmed LAGHRIBI

Contact: Bureau P 107-B // ahmed.laghribi@univ-artois.fr

Contrôle continu et examens:

- Un devoir surveillé de **2h** se déroulera le jeudi **9 novembre 2023**.
- **Première session:**
    - Un examen de **2h** est prévu la semaine du **18 décembre 2023**.
    - Calcul de la note:

$$\mathrm{Max}\left(EX_1, \frac{EX_1 + DS}{2}\right)$$

où EX_1 est la note de l'examen de la première session et DS est la note du devoir surveillé.

- **Deuxième session:**
  - Un examen de **2h** est prévu la semaine du **3 juin 2024**.
  - Calcul de la note:

$$\mathrm{Max}\left(EX_1, EX_2, \frac{EX_1 + DS}{2}, \frac{EX_2 + DS}{2}\right)$$

  où EX_2 est la note de l'examen de la deuxième session.

Programme

1. Eléments de logique.
2. Ensembles.
3. Applications.
4. Relations d'ordre.
5. Récurrence.
6. Arithmétique dans $\mathbb{Z}$.
7. Nombres complexes.
8. Polynômes.

Lien pour les notes du cours, exercices, sujets d'examens, etc

http://laghribi.perso.math.cnrs.fr/L1MI

Chapitre I: Éléments de logique

Rappel:

Un cours de mathématiques se constitue de:

- Définitions.
- Exemples, remarques, notations, $\cdots$
- Propositions: Ce sont des énoncés prouvés à l'aide de définitions ou d'autres propositions.

On distingue entre différents types de propositions:

- Une proposition importante est appelée *théorème*.
- Une proposition qui sert à préparer d'autres propositions est appelée *lemme*.
- Une proposition conséquence immédiate d'une autre proposition est appelée *corollaire*.

Un peu de logique:

I - Définition

Une proposition (ou assertion) est un énoncé dont on peut affirmer s'il est vrai ou faux.

À chaque proposition on associe une valeur de vérité: **Vrai** *ou* **Faux**.

Notation. Une proposition est souvent notée par une lettre de l'alphabet en capitale: P, Q, R, $\cdots$

Exemples.

1. **"0 est le plus petit entier naturel"** est une proposition vraie.
2. **"0,5 est un entier naturel"** est une proposition fausse.
3. **"Tout carré est un réctangle"** est une proposition vraie.
4. **"Deux droites sécantes sont perpendiculaires"** est une proposition fausse.

II - Négation

Définition. *La négation d'une proposition P est la proposition vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.*

Exemples.

1. La négation de la proposition vraie "$2 \neq 3$" est la proposition fausse "$2 = 3$".

2. La négation de la proposition fausse "$3 < 2$" est la proposition vraie "$3 \geq 2$".

Notations.

1. La négation de la proposition P est notée $\mathrm{non}P$ (on utilise aussi la notation $\neg\, P$).

2. On note V et F à la place de Vrai et Faux.

3. Soit P une proposition. La définition de la proposition $\text{non}P$ se résume dans la table suivante, *dite table de vérité*:

P	$\text{non}P$	$\text{non}(\text{non } P)$
V	F	V
F	V	F

Remarque. Les propositions P et *non(non P)* ont la même valeur de vérité. On parle d'équivalence entre les propositions P et *non* (*non* P) (voir ci-dessous).

III - Connecteur logique

Définition. *Un opérateur qui permet d'associer à deux propositions P et Q une troisième proposition est appelée un connecteur logique.*

Question. Combien de connecteurs logiques agissant sur deux propositions peut-on former?

Réponse

Soient P et Q deux propositions. Soit R une proposition associée à P et Q par un connecteur logique donné. On a la table de vérité suivante donnant les possibilités pour R:

P	Q	R
V	V	V ou F
V	F	V ou F
F	V	V ou F
F	F	V ou F

Ainsi, R prend la valeur de vérité V ou F suivant chaque possibilité VV, VF, FV, FF donnée par P et Q.

Conclusion. On a $2^4 = 16$ connecteurs logiques possibles entre P et Q.

Pour la suite, on va considérer quelques connecteurs logiques parmi les plus importants.

IV - Conjonction

Définiton. *Soient P et Q deux propositions. La conjonction de ces deux propositions est la proposition notée P et Q (ou $P \wedge Q$) qui est vraie lorsque P et Q sont vraies simultanément, et fausse dans les autres cas.*

Exemple. Soient les deux propositions:
P: $0 < 3$
Q: Tout quadrilatère est un réctangle.
La conjonction *P et Q* est fausse car Q est fausse.

Table de vérité. Soient deux propositions P et Q. Leur conjonction est résumée dans la table suivante:

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

V - Disjonction

Définiton. *Soient P et Q deux propositions. La disjonction de ces deux propositions est la proposition notée P ou Q (ou $P \vee Q$) qui est fausse lorsque P et Q sont fausses simultanément, et vraie dans les autres cas.*

Exemple. Soient les deux propositions:
P: $0 < 3$
Q: Tout quadrilatère est un réctangle.
La disjonction *P ou Q* est vraie car P est vraie.

Table de vérité. Soient deux propositions P et Q. Leur disjonction est résumée dans la table suivante:

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Remarque. La disjonction P *ou* Q est vraie lorsque l'une au moins des deux propositions P et Q est vraie. Cela signifie que le ou ne veut pas dire ou bien, c'est-à-dire, il n'est pas exclusif!

VI - Implication

Définiton. *Soient P et Q deux propositions. La proposition (non P) ou Q est appelée l'implication entre P et Q, et est notée $P \Longrightarrow Q$ (on la note aussi: $Q \Longleftarrow P$).*

La proposition $P \Longrightarrow Q$ se lit: P implique Q.

Table de vérité. Soit P et Q deux propositions. La proposition $P \Longrightarrow Q$ est résumée dans la table suivante:

P	Q	non P	P $\Longrightarrow$ Q
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Table $(\star)$

Conclusion. La proposition $P \Longrightarrow Q$ est fausse uniquement lorsque P est vraie et Q est fausse. Cela correspond à la ligne en vert de la table $(\star)$.

Remarques.

1. L'implication $P \Longrightarrow Q$ est souvent utilisée au sens de la première ligne de la table $(\star)$. Plus précisément, pour montrer que $P \Longrightarrow Q$ est vraie, on suppose que P est vraie et on montre que Q est vraie. En effet, si P est fausse, on voit que l'implication est toujours vraie par la table $(\star)$.

2. L'implication $P \Longrightarrow Q$ peut s'énoncer sous les deux formes suivantes:

- Si P alors Q.
- Pour que Q, il suffit P.

Exemples.

1. La proposition **"S'il pleut, alors je prends mon parapluie"** s'écrit: **Il pleut $\Longrightarrow$ je prends mon parapluie.**

2. Quelle est la valeur de vérité de l'implication:
$(0 = 1) \Longrightarrow (1 = 2)$?

La proposition $0 = 1$ est fausse, donc l'implication est **vraie** (voir la table $(\star)$).

3. Soit n un entier naturel. Montrer que l'implication
(n est impair) $\Longrightarrow$ (n^2 est imppair) est vraie. Cela revient à supposer que "n est impair" et montrer que "n^2 est impair".

Suppose que n soit impair. Alors, il existe un entier m tel que $n = 2m + 1$. Ainsi

$$n^2 = (2m+1)^2 = (2m)^2 + 2 \times (2m) \times 1 + 1^2 = 2(2m^2 + 2m) + 1.$$

Cela veut dire que n^2 est impair.

VII - Équivalence

Définition. Soient P et Q deux propositions.

– On dit que P et Q sont logiquement équivalentes si elles ont la même valeur de vérité.

– La proposition $P \Longleftrightarrow Q$ est définie comme suit: Elle est vraie si P et Q sont logiquement équivalentes, et elle est fausse sinon.

– La proposition $P \Longleftrightarrow Q$ se lit: P équivalent Q.

Table de vérité. La table de vérité de la proposition $P \Longleftrightarrow Q$ est comme suit:

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemples

1. La proposition $(1 = 1) \Longleftrightarrow (0 = 0)$. Vraie
2. La proposition $(1 = 1) \Longleftrightarrow (0 = 1)$. Fausse
3. La proposition $(1 = 0) \Longleftrightarrow (2 = 1)$. Vraie

4. Soient P et Q deux propositions. Les propositions suivantes sont vraies:

- $non\ (non\ P) \Longleftrightarrow P$.
- $(P\ et\ P) \Longleftrightarrow P$.
- $(P\ ou\ P) \Longleftrightarrow P$.
- $(P\ et\ Q) \Longleftrightarrow (Q\ et\ P)$.
- $(P\ ou\ Q) \Longleftrightarrow (Q\ ou\ P)$.

Proposition.
Soient P et Q deux propositions. Alors, la proposition $P \iff Q$ est logiquement équivalente à la proposition $(P \implies Q)$ et $(Q \implies P)$.

Preuve. Voir TD.

Conclusion. Pour montrer que $P \iff Q$ est vraie, cela revient à montrer que les deux propositions $(P \implies Q)$ et $(Q \implies P)$ sont vraies.

Remarque. La proposition $P \Longleftrightarrow Q$ s'énonce aussi sous l'une des formes suivantes:

1. P **si et seulement si** Q.

(Explication: $\underbrace{\textbf{si}}_{\Longleftarrow}$ $\underbrace{\textbf{seulement si}}_{\Longrightarrow}$)

2. **Pour que** P **il faut et il suffit** Q.

(Explication: $\underbrace{\textbf{il faut}}_{\Longrightarrow}$ $\underbrace{\textbf{il suffit}}_{\Longleftarrow}$)

3. P **est une condition nécessaire et suffisante pour que** Q.

(Explication: $\underbrace{\textbf{nécessaire}}_{\Longleftarrow}$ $\underbrace{\textbf{suffisante}}_{\Longrightarrow}$)

Pour la suite, on donne deux propositions très importantes pour le raisonnement mathématique.

Proposition. *Soient P, Q et R trois propositions. Alors, les propositions suivantes sont vraies:*

1. $((P \Longrightarrow Q)$ *et* $(Q \Longrightarrow R)) \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$.

2. $((P \Longleftrightarrow Q)$ *et* $(Q \Longleftrightarrow R)) \Longrightarrow (P \Longleftrightarrow R)$.

Preuve. On dresse la table de vérité pour voir que les deux propositions sont toujours vraies (Voir TD).

Cette proposition veut dire que les connecteurs implication et équivalence sont transitifs.

Proposition. *Soient P, Q et R trois propositions. Alors, les équivalences suivantes sont vraies:*

1. $non(P \text{ ou } Q) \Longleftrightarrow (nonP) \text{ et } (nonQ)$.
2. $non(P \text{ et } Q) \Longleftrightarrow (nonP) \text{ ou } (nonQ)$.
3. $P \text{ ou } (Q \text{ et } R) \Longleftrightarrow (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)$.
4. $P \text{ et } (Q \text{ ou } R) \Longleftrightarrow (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$.
5. $P \text{ et } (Q \text{ et } R) \Longleftrightarrow (P \text{ et } Q) \text{ et } R$.
6. $P \text{ ou } (Q \text{ ou } R) \Longleftrightarrow (P \text{ ou } Q) \text{ ou } R$.

Preuve. Pour chaque équivalence on dresse la table de vérité (voir TD).

VIII - Contraposée

La notion de contraposée est utile pour simplifier la preuve de certaines implications.

Définition. *La contraposée de l'implication* $P \implies Q$ *est l'implication* $(non\ Q) \implies (non\ P)$.

Remarque. À ne pas confondre la contraposée de $P \implies Q$ avec la négation de $P \implies Q$ (on peut le vérifier en dressant les tables de vérité).

Proposition. *Soient* P *et* Q *deux propositions. L'implication* $P \implies Q$ *est logiquement équivalente à sa contraposée.*

Preuve.

P	Q	$non\ P$	$non\ Q$	$P \implies Q$	$non\ Q \implies non\ P$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Les deux dernières colonnes sont identiques, ce qui signifie que la proposition $P \Longrightarrow Q$ est logiquement équivalente à sa contraposée. $\square$

Exemple. Soit n un entier naturel. Montrer l'implication:

$$(n^2 \text{ est pair}) \Longrightarrow (n \text{ est pair}).$$

Par contraposée, cela revient à montrer l'implication $\textit{non}\,(n \text{ est pair}) \Longrightarrow \textit{non}\,(n^2 \text{ est pair})$, c'est-à-dire, l'implication $(n \text{ est impair}) \Longrightarrow (n^2 \text{ est impair})$. Mais cette dernière a été prouvée dans le paragraphe "VI-Implication".

IX- Techniques de preuves

Différentes preuves peuvent être utilisées pour démontrer des résultats mathématiques. Le type de preuve déployée dépend du problème mathématique à résoudre. On expliquera les techniques les plus utilisées.

1. Preuve directe.

Souvent l'assertion mathématique à prouver est de la forme $P \implies Q$. La méthode naturelle pour la démontrer consiste à supposer P vraie et à utiliser des procédés logiques pour parvenir à Q. C'est ce qu'on appelle une preuve directe.

Exemple. Montrer que si x et y sont deux entiers impairs, alors $x+y$ est un entier pair.

Supposons que x et y soient deux entiers impairs. Alors, il existe deux entiers k et l tels que $x = 2k+1$ et $y = 2l+1$. Ainsi, on obtient

$$x + y = 2k + 1 + 2l + 1 = 2k + 2l + 2 = 2(k + l + 1),$$

ce qui prouve que $x+y$ est un entier pair.

2. Preuve par contraposée.

Parfois, il est difficile de démontrer directement l'implication $P \implies Q$ du fait que P n'est pas facile à exploiter pour aboutir à Q. Dans ce cas, on essaye de démontrer l'implication $(non\, Q) \implies (non\, P)$. C'est la preuve par contraposée.

Exemple. Soit x un nombre réel. Montrer l'implication $x^3 + x^2 - 2x < 0 \implies x < 1$. On va montrer sa contraposée $non\,(x < 1) \implies non\,(x^3 + x^2 - 2x < 0)$, c'est-à-dire, l'implication $x \geq 1 \implies x^3 + x^2 - 2x \geq 0$.

Supposons que $x \geq 1$. On a $x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2)$. Puisque $x \geq 1$, alors $x^2 \geq 1$. Ainsi, $x^2 + x \geq 2$, c'est-à-dire, $x^2 + x - 2 \geq 0$. Comme x est positif (car $x \geq 1$), alors $x(x^2 + x - 2) = x^3 + x^2 - 2x \geq 0$, ce qu'on cherche.

3. Preuve par absurde.

La preuve par absurde (ou preuve par contradiction) se rapproche de la preuve par contraposée. Elle consiste, lorsqu'on veut montrer $P \implies Q$, à supposer que P est vraie mais Q est fausse, et à aboutir à une contradiction. On déploie cette preuve lorqu'il est difficile de montrer Q directement. Il est alors plus simple de supposer que Q est fausse.

Exemples. (1) (Le principe des tiroirs)
On range $(n+1)$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts. Montrer qu'il y a au moins un tiroir contenant au moins 2 paires de chaussettes.

On suppose que chaque tirroir contienne au plus une paire de chaussettes. Puisqu'il y a n tirroirs, on déduit qu'il existe au plus n paires de chaussettes, ce qui n'est pas possible car il y a $(n+1)$ paires de chaussettes.

(2) L'aire d'un rectangle est $170m^2$. Montrer que la longueur est supérieure à $13m$.

Notons L la longueur et l la largeur du rectangle. Supposons qu'on ait $L \leq 13m.$ On a $l \leq L$. Donc, $L \times l \leq L^2$. Par conséquent, $170m^2 \leq 13^2 m^2 = 169m^2$, ce qui n'est pas possible.

4. Preuve par récurrence.

Le raisonnement par récurrence (ou par induction) permet de démontrer des assertions qui dépendent d'un entier naturel. Voir le chapitre "Récurrence" consacré à ce type de raisonnement.