ALGÈBRE LINÉAIRE

FICHE 2 : SYSTÈMES LINÉAIRES

Exercice 1.
Résoudre les deux systèmes d'équations suivants, par les méthodes vues au lycée :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x+y+z & = & 1 \\ 3x-y-3z+2t & = & 5 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} 2x+y-z & = & 0 \\ x-y+z & = & 0 \\ 3x+3y-z & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 2.
Résoudre les systèmes affines suivants, par la méthode du "pivot de Gauss"; on échelonnera les systèmes en effectuant des opérations "élémentaires" sur les lignes uniquement (et pas sur les colonnes). Conclure chaque système en précisant l'ensemble $\mathcal{S}_i$ de ses solutions (i désignant le numéro du système) :

$$(SE_1)\left\{\begin{array}{r} 2x+3y-2z=5 \\ x-2y+3z=2 \\ 4x-\ y+4z=1 \end{array}\right. \quad (SE_2)\left\{\begin{array}{r} x-2y \qquad =1 \\ 2x+\ y-4z=2 \\ 3x-\ y-4z=3 \end{array}\right. \quad (SE_3)\left\{\begin{array}{r} x+\ y+3z=2 \\ x+2y+2z=2 \\ 2x+\ y+\ z=-2 \end{array}\right.$$

$$(SE_4)\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & +3y & +2z & +t & = & -2 \\ 2x & +7y & +3z & & = & -5 \\ 3x & +8y & +8z & +11t & = & 13 \\ -2x & -8y & -2z & +6t & = & 18 \end{array}\right. \qquad (SE_5)\left\{\begin{array}{lrrrcr} x & -2y & +4z & -5t & = & 4 \\ & y & -z & +t & = & -3 \\ x & +3y & & -3t & = & 1 \\ x & +2y & +z & -4t & = & 4 \end{array}\right.$$

$$(SE_6)\left\{\begin{array}{lcl} 2x-y+2z & = & 1 \\ 3x+z+2t & = & 1 \\ 2x+y-3z+5t & = & 1 \\ -4x+2y+t & = & 0 \end{array}\right. \qquad (SE_7)\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & -y & +z & +t & = & 0 \\ 3x & -3y & +3z & +2t & = & 0 \\ x & -y & +z & & = & 0 \\ 5x & -5y & +5z & +7t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$(SE_8)\left\{\begin{array}{lcr} 3x+4y+z+2t & = & 3 \\ 6x+8y+2z+5t & = & 7 \\ 9x+12y+3z+10t & = & 13 \end{array}\right. \qquad (SE_9)\left\{\begin{array}{lcr} 3x+4y+z+2t & = & 3 \\ 6x+8y+2z+6t & = & 7 \\ 9x+12y+3z+10t & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 3.
On considère les systèmes suivants, où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre :

$$(SE_{10})\left\{\begin{array}{lcr} 2x-3y+4z & = & 2 \\ -2x+5y-8z & = & -10 \\ 3x-6y+mz & = & m \end{array}\right. \qquad (SE_{11})\left\{\begin{array}{lcr} 2x-3y+4z & = & 2 \\ -2x+5y-8z & = & -10 \\ 3x-6y+mz & = & m \\ x+y+z & = & 3 \end{array}\right.$$

(1) Écrire matriciellement le premier système. Le résoudre par la méthode du pivot de Gauss, <u>en discutant suivant les valeurs de m</u>.
(2) En déduire les solutions du second système.

Exercice 4.
Résoudre les systèmes “linéaires” suivants en discutant suivant les valeurs des paramètres a et b :

$$(SE_{12})\left\{\begin{array}{ccccccc} x & +y & & & = & a \\ & y & +z & & = & b \\ & & z & +t & = & a \\ x & & & +t & = & b \end{array}\right. \qquad (SE_{13})\left\{\begin{array}{cccccc} x & +y & +2z & = & 1 \\ x & +2y & +z & = & 2 \\ 3x & +4y & +5z & = & a \\ & y & +3z & = & b \end{array}\right.$$

$$(SE_{14})\left\{\begin{array}{cccccc} ax & & +bz & = & 0 \\ bx & +ay & & = & 0 \\ & by & +az & = & 0 \end{array}\right.$$