L1 MI - Semestre 2 - ALGÈBRE LINÉAIRE

***Examen** du 14 Avril 2023* - *(durée : 3 heures)*

Les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices, téléphones et autres appareils électroniques.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies :
justifiez vos affirmations, détaillez vos raisonnements et rédigez proprement.

Questions de cours [5 pts] $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Que signifie "la somme $F+G$ est directe" ?
   (b) On suppose, de plus, que E est de type fini.
   Énoncer deux autres caractérisations de (càd propriétés équivalentes à) "$E = F \oplus G$".
2. Soit f une application linéaire $E \to F$. Démontrer le théorème suivant :
   f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{\vec{0}_E\}$.
3. (a) Soit une matrice $A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Définir l'application l_A.
   (b) Énoncer une formule liant l_A et l_B pour $A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
4. Démontrer la proposition suivante :
   Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels de type fini et de même dimension. Alors il existe au plus une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et, si elle existe, elle vérifie alors automatiquement $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.
5. Que signifie : "la matrice $A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est *inversible*" ?
6. Démontrer la proposition suivante :
   Soient E et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ de type fini.
   On considère une base $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ de E et une base $\mathcal{C} = (\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_m)$ de F.
   Soit une application linéaire $f : E \to F$.
   Alors $\forall \vec{v} \in E, \quad \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f) \times \mathrm{col}_{\mathcal{B}}(\vec{v}) = \mathrm{col}_{\mathcal{C}}(f(\vec{v}))$.
7. Énoncer la "formule de changement de bases" : plus précisément,
   soient E et F des espaces vectoriels de type fini et f une application linéaire $E \to F$.
   $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, et $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux bases de F.
   (a) Énoncer la formule exprimant $\underset{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{B}'}{\mathrm{Mat}}(f)$ en fonction de $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f)$.
   (b) Que devient cette formule si $E = F$, $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ et $\mathcal{B}' = \mathcal{C}'$?

Exercice 1 [6 pts]
Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels F et G définis comme suit :

$$F = \left\{ \vec{v} = (x,\, y,\, z,\, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \left\{ \begin{array}{rcl} x - y - 2z + 3t & = & 0 \\ x + y + z - 5t & = & 0 \end{array} \right. \right\}$$

$$G = \mathrm{Vec}\,\{\vec{w}_1,\, \vec{w}_2\} \text{ avec } \vec{w}_1 = (5;\, -1;\, 6;\, 2) \text{ et } \vec{w}_2 = (4;\, 2;\, -1;\, 3).$$

1. Déterminer une base de F composée de vecteurs à coordonnées entières, puis préciser la dimension de F.

2. Donner une base de G, puis préciser la dimension de G.
3. Trouver une base de $F \cap G$. En déduire la dimension de $F \cap G$.
4. Calculer la dimension de $F+G$. Puis déterminer une base de $F+G$. Détailler la méthode et justifier.
5. Compléter la base de $F+G$ trouvée à la question précédente en une base de $\mathbb{R}^4$. Détailler la méthode et justifier.

Exercice 2 [3 pts]
Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Justifier la réponse.

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \vec{v} = (x,\, y,\, z) & \longmapsto & (x+y,\, 2x-z) \end{array}$
2. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \vec{v} = (x,\, y) & \longmapsto & (x-1,\, y+1) \end{array}$
3. $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \longmapsto & X^3\, P(-1) \end{array}$
4. $l : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & -2A + 5\mathrm{I}_3 \end{array}$
5. $u : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A \times {}^tA \end{array}$

Exercice 3 [5 pts]
Soient $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{C} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ qui satisfait aux conditions suivantes :

$$\varphi(\vec{e}_1) = \vec{f}_1 - 2\vec{f}_2 + \vec{f}_3;\quad \varphi(\vec{e}_2) = -\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + 3\vec{f}_3;\quad \varphi(\vec{e}_3) = 3\vec{f}_1 - 8\vec{f}_2 + 11\vec{f}_3;\quad \varphi(\vec{e}_4) = 4\vec{f}_1 - 5\vec{f}_2 + 6\vec{f}_3.$$

1. Écrire la matrice A telle que $\varphi = l_A$; autrement dit, donner $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(\varphi)$.
2. Calculer $\varphi(\vec{v})$, pour $\vec{v} = (x,\, y,\, z,\, t) \in \mathbb{R}^4$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$, le noyau de φ.
4. En déduire le rang de φ, càd $\dim\big(\mathrm{Im}(\varphi)\big)$.
5. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$, l'image de φ.
6. L'application φ est-elle surjective ? est-elle injective ? Justifiez vos réponses en énonçant les propriétés utilisées.

Exercice 4 [3 pts]
Calculer l'inverse de la matrice suivante en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes uniquement (et pas sur les colonnes) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Le barème inscrit est indicatif et non définitif