Cours de MOMI

Licence I Math-Info

Chapitre III: Applications

1. Définition *Une application d'un ensemble E dans un ensemble F est une correspondance f de E vers F qui associe à* **chaque** *élément de E un* **seul** *élément de F.*

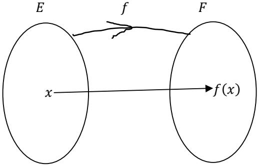
– On dit que E est **l'ensemble de départ** *de f, et F est* **l'ensemble d'arrivée** *de f.*

– Si l'application f associe à $x \in E$ l'élément $y \in F$, on note $y = f(x)$, et on dit que y est **l'image** *de x par f (on dit aussi que x est un* **antécédant** *de y par f).*

Notation. On écrit

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

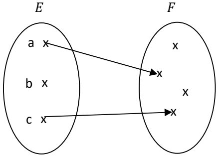
On symbolise aussi l'application f par:



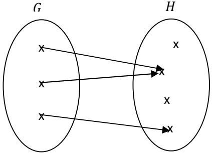
Les équivalences suivantes traduisent la définition d'une application:

$$
\begin{aligned}
f \text{ est une application de } E \text{ vers } F \quad & \Longleftrightarrow \quad \forall x \in E \;\; \exists! y \in F \;\mid y = f(x) \\
& \Longleftrightarrow \quad \forall x, x' \in E, \;\; x = x' \implies f(x) = f(x')
\end{aligned}
$$

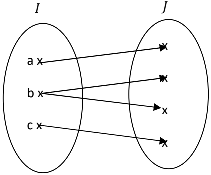
Exemples. (1) Dire si chacune des correspondances suivantes est une application:



Cette correspondance...



Cette correspondance..



Cette correspondance...

(2) Soit f la correspondance de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui à chaque réel x associe le réel $2x+1$. Cette correspondance est une application car: $\forall\, x, x' \in \mathbb{R}$, on a

$$x = x' \implies 2x = 2x' \implies 2x+1 = 2x'+1 \implies f(x) = f(x').$$

2. Égalité de deux applications

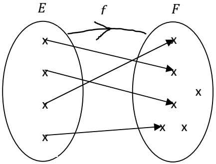
Définition. *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : E' \longrightarrow F'$ deux applications. On dit que ces deux applications sont égales et on note $f = g$ si: $E = E'$, $F = F'$ et $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in E$.*

3. Application injective

Définition. *Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite injective si à deux éléments distincts de E correspondent par f deux images distinctes.* Autrement dit:

$$\forall\, x, x' \in E \quad x \neq x' \implies f(x) \neq f(x').$$

Exemple.



C'est une application injective.

Remarques. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

(1) Par contraposée on a:

$$f \text{ injective } \iff (\forall x, x' \in E \quad f(x) = f(x') \implies x = x').$$

(2) f non injective $\iff (\exists x, x' \in E \mid \; x \neq x' \text{ et } f(x) = f(x'))$.

Exemples. (1) L'application

$$\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

n'est pas injective car $-1 \neq 1$ et $f(-1) = f(1)$ (voir la remarque précédente).

(2) L'application

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}$$

est injective car: $\forall x, x' \in \mathbb{Z}$,
$g(x) = g(x') \implies x+1 = x'+1 \implies x = x'$.

4. Application surjective

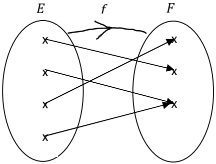
Définition. *Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite surjective si tout élément de F est l'image d'au moins un élément de E.* Autrement dit:

$$\forall y \in F \;\; \exists x \in E \text{ tel que } f(x) = y.$$

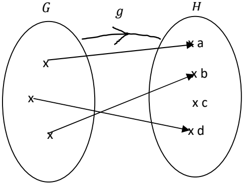
Remarque. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On a:

f n'est pas surjective $\iff \exists y \in F \mid \forall x \in E \;\; f(x) \neq y$.

Exemples. (1)



Cette application f…



Cette application g…

(2) L'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

n'est pas surjective car il n'existe aucun $x \in \mathbb{Z}$ tel que $f(x) = x^2 = -1$, c'est-à-dire, -1 n'a pas d'antécédant.

(3) L'application

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}$$

est surjective car pour tout $y \in \mathbb{Z}$, on a $y-1 \in \mathbb{Z}$ et $g(y-1) = y$. Donc, tout élément $y \in \mathbb{Z}$ admet un antécédant.

(4) L'application

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}$$

n'est pas surjective car $\cdots$

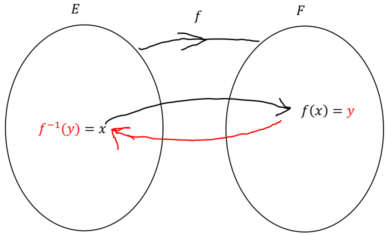
5. Application bijective

Définition. *Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite bijective (ou une bijection) si elle est à la fois injective et surjective.* Autrement dit:

Tout élément $y \in F$ est l'image d'un élément $x \in E$ (car f surjective) qui est unique (car f est injective):

$$\forall\, y \in F \quad \exists!\, x \in E \quad | \quad f(x) = y.$$

Ceci définit une application, notée f^{-1} de F vers E puisqu'à tout élément $y \in F$, on sait associer un unique élément $x \in E$. *On dit que f^{-1} est l'application réciproque (ou inverse) de f.*



Conclusion. Si $f : E \longrightarrow F$ est une bijection, alors l'application réciproque $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est caractérisée comme suit:

$$\forall x \in E \ \ \forall y \in F \quad f(x) = y \iff x = f^{-1}(y).$$

Exemples. (1) L'application

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Id}_E : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

est une bijection et $\mathrm{Id}_E^{-1} = \mathrm{Id}_E$ (c'est clair!). On appelle Id_E l'application identité de E.

(2) Soit

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & x & \mapsto & x+1 \end{array}.$$

On a déjà vu que f est à la fois injective et surjective, donc c'est une bijection. Trouver l'application

$$\begin{array}{rccc} f^{-1} : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & y & \mapsto & ? \end{array}$$

On a: $f^{-1}(y) = x \iff y = f(x) \iff y = x+1 \iff x = y-1$.
Ainsi, on obtient:

$$\begin{array}{rccc} f^{-1} : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & y & \mapsto & y-1 \end{array}$$

6. Composée d'applications

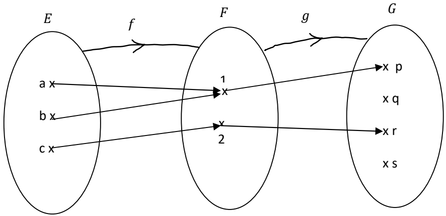
Définition. *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. La composée de f par g est l'application, notée $g \circ f$, définie par:*

$$\begin{array}{rccc} g \circ f : & E & \longrightarrow & G \\ & x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

On a bien $g \circ f$ une application car: $\forall\, x, x' \in E$

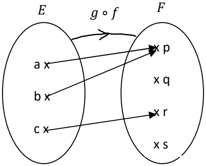
$$\begin{aligned} x = x' &\implies f(x) = f(x') \text{ (car } f \text{ application)} \\ &\implies g(f(x)) = g(f(x')) \text{ (car } g \text{ application)} \\ &\implies g \circ f(x) = g \circ f(x'). \end{aligned}$$

Exemple. (1)



$$g \circ f(a) = g(f(a)) = g(1) = p$$
$$g \circ f(b) = g(f(b)) = g(1) = p$$
$$g \circ f(c) = g(f(c)) = g(2) = r.$$

En résumé on a:



(2) Soient $f : E \longrightarrow F$ une bijection et $f^{-1} : F \longrightarrow E$ l'application réciproque. Alors, $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$.

Remarques. (1) En général $g \circ f \neq f \circ g$. Par exemple, on peut vérifier cette affirmation pour les applications:

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array} \qquad\qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

(2) La composition des applications est associative, c'est-à-dire, si $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$ des applications, alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Proposition. *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Alors:*
(1) (f et g injectives) $\Longrightarrow$ $g \circ f$ injective.
(2) (f et g surjectives) $\Longrightarrow$ $g \circ f$ surjective.
(3) (f et g bijectives) $\Longrightarrow$ $g \circ f$ bijective.

Preuve. (1) Supposons que f et g soient injectives. Montrons que $g \circ f$ est injective.
Soient $x, x' \in E$ tels que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$, montrons que $x = x'$.

$$\begin{aligned} g \circ f(x) = g \circ f(x') &\implies g(f(x)) = g(f(x')) \\ &\implies f(x) = f(x') \text{ (car } g \text{ injective)} \\ &\implies x = x' \text{ (car } f \text{ injective).} \end{aligned}$$

(2) À faire en exercice.

(3) Se déduit des assertions (1) et (2) et de la définition de la bijection.

Proposition. *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Alors:*
(1) $g \circ f$ injective $\implies f$ injective.
(2) $g \circ f$ surjective $\implies f$ surjective.

Preuve. (1) Supposons que $g \circ f$ soit injective. Montrons que f est injective.

Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Montrons que $x = x'$.

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\Longrightarrow g(f(x)) = g(f(x')) \text{ (car } g \text{ application)} \\ &\Longrightarrow g \circ f(x) = g \circ f(x') \\ &\Longrightarrow x = x' \text{ (car } g \circ f \text{ injective).} \end{aligned}$$

(2) À faire en exercice.

Exercice. (1) Donner un exemple de deux applications $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ telles que $g \circ f$ est injective mais g n'est pas injective.
(2) Même question avec $g \circ f$ surjective mais f non surjective.

7. Image directe et image réciproque

Définition. *Soient $f : E \longrightarrow F$ une application et X une partie de E. L'image directe de X par f est l'ensemble*

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

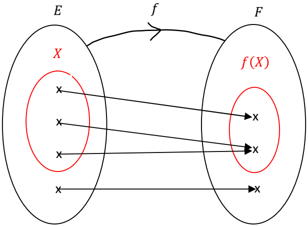
Remarquons que $f(X) \subset F$.

Donc on a

$$y \in f(X) \iff \exists x \in X \mid y = f(x).$$

Sa négation est: $y \notin f(X) \iff \forall x \in X, \; y \neq f(x).$

Illustration.



Cas particulier. Lorsque $X = E$, alors l'image directe de E par f s'appelle *l'image de* f, et on la note $\mathrm{Im} f$. Donc, on a

$$\mathrm{Im} f = \{f(x) \mid x \in E\}.$$

Remarque. (À faire en exercice) Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors, f est surjective $\iff \mathrm{Im} f = F$.

Voici quelques propriétés de l'image directe:

Proposition. *Soient $f : E \longrightarrow F$ une application et X_1, X_2 deux parties de E. Alors:*
(1) $X_1 \subset X_2 \Longrightarrow f(X_1) \subset f(X_2)$.
(2) $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$.
(3) $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$.
(4) Si de plus f est injective, alors $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$.

Preuve. Voir TD.

Définition. *Soient $f : E \longrightarrow F$ une application et Y une partie de F. On appelle image réciproque de Y par f l'ensemble*

$$f^{-1}(Y) = \{x \in E \mid f(x) \in Y\}.$$

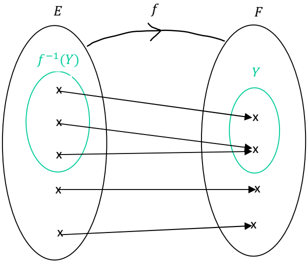
Remarquons que $f^{-1}(Y) \subset E$.

Donc on a:

$$x \in f^{-1}(Y) \iff \exists\, y \in Y \mid f(x) = y.$$

Sa négation est: $x \notin f^{-1}(Y) \iff \forall\, y \in Y,\ \ y \neq f(x).$

Illustration.



Exemple. Soient l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

et $Y = \{1\}$. Déterminer $f^{-1}(Y)$.

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}(Y) &\iff f(x) \in Y = \{1\} \\
&\iff f(x) = 1 \\
&\iff x^2 = 1 \\
&\iff x = 1 \text{ ou } x = -1 \\
&\iff x \in \{-1, 1\}
\end{aligned}
$$

D'où $f^{-1}(Y) = \{-1, 1\}$.

On donne quelques propriétés de l'image réciproque:

Proposition. *Soient $f : E \longrightarrow F$ une application et Y_1, Y_2 deux parties de F. Alors:*
(1) $Y_1 \subset Y_2 \implies f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2)$.
(2) $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.
(3) $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.
(4) $\complement_E^{f^{-1}(Y_1)} = f^{-1}(\complement_F^{Y_1})$.

Le résultat suivant donne une caractéristaion de l'injectivité et de la surjectivité utilisant les notions d'image directe et d'image réciproque.

Proposition. *Soit* $f : E \longrightarrow F$ *une application. On a:*
(1) f *injective* $\Longleftrightarrow \forall\, X \subset E,\ f^{-1}(f(X)) = X$.

(en général, on a $X \subset f^{-1}(f(X))$.*)*

(2) f *surjective* $\Longleftrightarrow \forall\, Y \subset F,\ f(f^{-1}(Y)) = Y$.

(en général, on a $f(f^{-1}(Y)) \subset Y$.*)*