Cours de MOMI

Licence I Math-Info

Chapitre VII: Nombres complexes

1 - Définition des nombres complexes

On note $\mathbb{R}^2$ le produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dont les éléments sont des couples (a, b), où $a, b \in \mathbb{R}$.

On rappelle que $(a, b) = (a', b')$ équivaut à $a = a'$ et $b = b'$.

Définition. *On appelle ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, l'ensemble $\mathbb{R}^2$ que l'on munit des opérations suivantes:*

Addition $+$:

$$\textit{Pour tous } (a, b), (a', b') \in \mathbb{C}, \qquad (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b').$$

Multiplication $\times$:

$$\textit{Pour tous } (a, b), (a', b') \in \mathbb{C}, \qquad (a, b) \times (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b).$$

On introduit quelques simplifications:

(a) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on identifie le nombre complexe $(a, 0)$ avec le réel a. Ainsi, on peut voir $\mathbb{R}$ comme une partie de $\mathbb{C}$. De plus, les opérations de $\mathbb{C}$ étendent l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$.

(b) Le nombre complexe $(0, 1)$ vérifie:
$(0, 1)^2 = (0, 1)\times(0, 1) = (-1, 0) = -1$. On note $i = (0, 1)$.

(c) Pour tout nombre complexe $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, on vérifie:
$(a, b) = (a, 0)+(0, 1)\times(b, 0)$.

Ainsi, avec les points **(a)** et **(b)**, l'écriture du nombre complexe z devient alors:

$$\boxed{z = a + i\, b, \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R} \quad \text{où} \quad i^2 = -1.}$$

Dorénavant, c'est cette écriture des nombres complexes qu'on va utiliser.

Définition. *Soit* $z = a + i\,b$ *un nombre complexe avec* $a, b \in \mathbb{R}$.

– *Le nombre* a *s'appelle* **la partie réelle** *de* z, *on le note* $\mathrm{Re}(z)$.

– *Le nombre* b *s'appelle* **la partie imaginaire** *de* z, *on le note* $\mathrm{Im}(\mathbf{z})$.

– *On dit que* z *est* **imaginaire pur** *si* $\mathrm{Re}(z) = 0$.

– *On dit que* z *est* **réel** *si* $\mathrm{Im}(z) = 0$.

2 - Propriétés des opérations de $\mathbb{C}$

Rappelons les opérations de $\mathbb{C}$ en prenant en compte la nouvelle notation des complexes:

$$(a + i\,b) + (a' + i\,b') = a + a' + i\,(b + b'),$$

$$(a + i\,b) \times (a' + i\,b') = aa' - bb' + i\,(ab' + a'b).$$

Ces deux opérations vérifient les propriétés suivantes:

Pour l'addition:

- La commutativité: Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$
$$z + z' = z' + z.$$
- L'associativité: Pour tous $z, z', z'' \in \mathbb{C}$
$$(z + z') + z'' = z + (z' + z'').$$
- 0 est l'élément neutre, ceci signifie que pour tout $z \in \mathbb{C}$
$$0 + z = z + 0 = z.$$
(rappelons que $0 = 0 + i\,0$).
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $z' \in \mathbb{C}$ vérifiant:
$$z + z' = z' + z = 0.$$
Ce complexe z' s'appelle l'opposé de z et on le note $-z$.
Concrètement, si $z = a + i\,b$, alors $-z = -a + i\,(-b)$.

  En particulier, $-(i\,b) = i(-b)$ pour tout réel b.

Pour la multiplication:

- La commutativité: Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$
$$z \times z' = z' \times z.$$
- L'associativité: Pour tous $z, z', z'' \in \mathbb{C}$
$$(z \times z') \times z'' = z \times (z' \times z'').$$
- 1 est l'élément neutre, ceci signifie que pour tout $z \in \mathbb{C}$
$$1 \times z = z \times 1 = z.$$
(rappelons que $1 = 1 + i\,0$).
- La multiplication est distributive par rapport à l'addition: Pour tous $z, z', z'' \in \mathbb{C}$
$$z \times (z' + z'') = z \times z' + z \times z''.$$

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$ **non nul**, il existe $z' \in \mathbb{C}$ vérifiant:

$$z \times z' = z' \times z = 1.$$

Ce nombre complexe z' s'appelle l'inverse de z et on le note $\dfrac{1}{z}$ ou z^{-1}. Concrètement, si $z = a + i\,b$, alors

$$(*) \qquad \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\,\frac{-b}{a^2+b^2}.$$

Remarques. Soient z, z' deux nombres complexes.

(1) Si $z' \neq 0$, la notation $\frac{z}{z'}$ signifie $z \times \frac{1}{z'}$.

(2) Si $z \neq 0$ et $z' \neq 0$, alors $\frac{1}{z \times z'} = \frac{1}{z} \times \frac{1}{z'}$.

Exemple. Soient $z = -3 + 2i$ et $z' = 1 - 2i$. En appliquant directement la formule du produit donnée précédemment, on obtient:

$$z \times z' = \Big((-3) \times (1) - (2) \times (-2)\Big) + i\Big((-3) \times (-2) + (2) \times (1)\Big) = 1 + 8i.$$

On peut retrouver ce calcul en multipliant les termes entre eux en raison des propriétés de l'addition et de la multiplication qu'on vient de donner, en gardant à l'esprit $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned} z \times z' &= -3(1-2i) + (2i) \times (1-2i) \\ &= -3 + 6i + 2i + (2i) \times (-2i) \\ &= -3 + 6i + 2i + -4i^2 \\ &= -3 + 8i + 4 \\ &= 1 + 8i. \end{aligned}$$

3 - Conjugué d'un nombre complexe

Définition. *On appelle* **conjugué** *d'un nombre complexe $z = a + i\,b$, où a, b des réels, le nombre complexe $\overline{z} = a + i\,(-b)$.*

Propriétés du conjugué.

(1) Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\overline{(\overline{z})} = z$. *(la conjugaison est involutive).*

(2) Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, *on a:*

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \quad et \quad \overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}.$$

(3) Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ *avec* $z' \neq 0$, *on a:*

$$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}} \quad et \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}.$$

(4) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ *et* $n \in \mathbb{N}$, *on a:* $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

Preuve. À faire en exercice. □

Proposition. *Soit z un nombre complexe. On a:*

(1) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ *et* $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.

(2) $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$.

(3) z est imaginaire pur $\iff z = -\overline{z}$.

Preuve. (1) Posons $z = a + i\,b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Alors, $\overline{z} = a + i\,(-b)$. Donc, on a

$$\begin{aligned} z+\overline{z} &= a + i\,b + a + i\,(-b) \\ &= a + a + i\,(b-b) \\ &= 2a + i\,0 = 2a = 2\mathrm{Re}(z). \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$. De même on a

$$\begin{aligned} z-\overline{z} &= a + i\,b - (a + i\,(-b)) \\ &= a + i\,b + (-a) + i\,(-(-b)) \\ &= 0 + 2i\,b = 2i\,b = 2i\mathrm{Im}(z). \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.

(2) On a $z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z) = 0 \overset{\text{par (1)}}{\iff} z = \overline{z}$.

(3) z est imaginaire pur $\iff \mathrm{Re}(z) = 0 \overset{\text{par (1)}}{\iff} z = -\overline{z}$. $\square$

4 - Module d'un nombre complexe

Définition. *On appelle* **module** *d'un nombre complexe $z = a + i\,b$, où a, b des réels, le nombre positif $\sqrt{a^2 + b^2}$.*

On note le module de z par $|z|$.

Remarque. (1) Si le complexe z est **réel**, alors le module de z n'est autre que sa valeur absolue.

(2) Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $|z| > 0 \iff z \neq 0$.

En effet, on a

$$|z| = 0 \iff \mathrm{Re}(z) = 0 \text{ et } \mathrm{Im}(z) = 0 \iff z = 0.$$

Voici quelques propriétés que vérifie le module:

Proposition. *Soient* $z, z' \in \mathbb{C}$. *On a:*

(1) $|z| = |\overline{z}|$.

(2) $z \times \overline{z} = |z|^2$.

(3) $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.

(4) Si $z \neq 0$, *alors* $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$.

(5) Si $z' \neq 0$, *alors* $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$.

(6) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on a* $|z^n| = |z|^n$.

Preuve. Les assetions (1), (2) son faciles à vérifier.

(3) On a par (2): $|z \times z'|^2 = (z \times z') \times \overline{(z \times z')} = z \times z' \times \overline{z} \times \overline{z'}$. Comme la multiplication est commutative, on a $|z \times z'|^2 = z \times \overline{z} \times z' \times \overline{z'} = |z|^2 \times |z'|^2$. En passant à la racine carrée (le module est positif), on déduit la formule $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.

(4) Supposons $z \neq 0$. On applique (3) à l'égalité $z \times \frac{1}{z} = 1$, on obtient $|z| \times |\frac{1}{z}| = |1| = 1$. Par conséquent, $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$.

(5) Si $z' \neq 0$, alors on a par (3) et (4):

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \left|z \times \frac{1}{z'}\right| = |z| \times \left|\frac{1}{z'}\right| = |z| \times \frac{1}{|z'|} = \frac{|z|}{|z'|}.$$

(6) On procède par récurrence. $\square$

L'inverse d'un nombre complexe non nul se calcule en utilisant le module et le conjugué:

Lemme. Soit z un nombre complexe non nul. Alors, on a

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

(on retrouve la formule (*) de la page 7 donnant l'inverse).

Preuve. Puisque $z \neq 0$, alors $\overline{z}$ est non nul et son inverse existe. On a $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z \times \overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$. $\square$

Exemple. Soit $z = 4 - 3i$. On a $|z|^2 = 4^2 + (-3)^2 = 25$. Ainsi, on obtient

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1}{25}(4 + 3i) = \frac{4}{25} + \frac{3i}{25}.$$

Remarque. Pour tout nombre complexe z, on a

$$\mathrm{Re}(z) \leq |z| \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) \leq |z|.$$

En effet, posons $z = a + i\,b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On a $\mathrm{Re}(z) = a \leq |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$. De même, on a $\mathrm{Im}(z) \leq |z|$.

Théorème. (Inégalité triangulaire)
Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, on a $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Preuve. Les deux membres de l'inégalité étant des réels positifs, on compare leurs carrés. D'une part, on a:

$$\begin{aligned}
|z + z'|^2 &= (z + z') \times \overline{z + z'} \\
&= (z + z') \times (\overline{z} + \overline{z'}) \\
&= z \times \overline{z} + z \times \overline{z'} + z' \times \overline{z} + z' \times \overline{z'} \\
&= |z|^2 + |z'|^2 + z \times \overline{z'} + \overline{z \times \overline{z'}} \\
&= |z|^2 + |z'|^2 + 2\mathrm{Re}(z \times \overline{z'}).
\end{aligned}$$

D'autre part:

$$\begin{aligned}(|z|+|z'|)^2 &= |z|^2+2|z|\times|z'|+|z'|^2\\ &= |z|^2+2|z|\times|\overline{z'}|+|z'|^2\\ &= |z|^2+|z'|^2+2|z\times\overline{z'}|.\end{aligned}$$

Or $\mathrm{Re}(z\times\overline{z'}) \le |z\times\overline{z'}|$ (remarque précédente), on déduit que $|z+z'|^2 \le (|z|+|z'|)^2$, ce qui donne $|z+z'| \le |z|+|z'|$. □

Corollaire. *Pour tous $z, z', z'' \in \mathbb{C}$, on a:*

(1) $|z-z''| \le |z-z'|+|z'-z''|$.

(2) $\Big||z|-|z'|\Big| \le |z-z'| \le |z|+|z'|$.

Preuve. (1) Par l'inégalité triangulaire, on a $|z-z''| = |z-z'+(z'-z'')| \le |z-z'|+|z'-z''|$.

(2) On a par (1): $|z| \le |z-z'|+|z'|$. Donc

$$(\star\star) \quad |z|-|z'| \le |z-z'|.$$

De même, on montre

$$(\star\star\star) \qquad |z'| - |z| \leq |z - z'|.$$

En combinant $(\star\star)$ et $(\star\star\star)$, on obtient

$$-|z - z'| \leq |z| - |z'| \leq |z - z'|,$$

ce qui signifie $\Big| |z| - |z'| \Big| \leq |z - z'|$. $\square$

5 - Interprétation géométrique

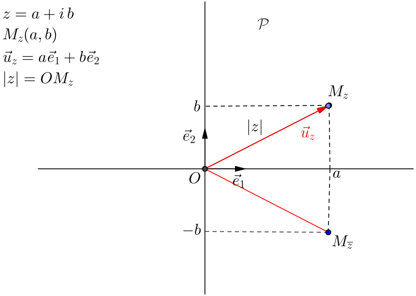
On appelle plan complexe, un plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé orienté $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. À tout nombre complexe $z = a + i\,b$, où $a, b \in \mathbb{R}$, on associe un point M_z de $\mathcal{P}$ de coordonnés (a, b). On a donc une application (**bijective**):

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ z = a + i\,b & \mapsto & M_z \end{array}$$

On dit que z est l'affixe de M_z.

De même, on associe à z le vecteur $\vec{u}_z = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$. On dit aussi que z est l'affixe de $\vec{u}_z$.

Illustration:



- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ est la distance de O à M_z.
- $M_{\overline{z}}$ est le symétrique de M_z par rapport à l'axe des abscisses.

6 - Argument d'un nombre complexe

Définition. *Soit $z = a + i\,b$ un nombre complexe non nul, où $a, b \in \mathbb{R}$. Un nombre réel θ vérifiant:*

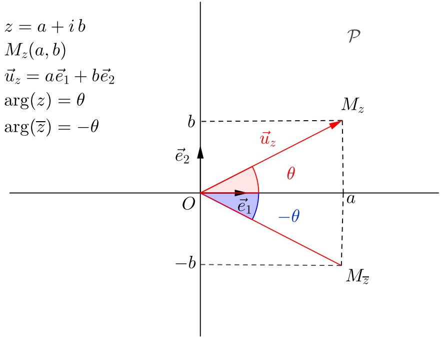
$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{|z|} \\ \sin\theta = \frac{b}{|z|} \end{cases}$$

s'appelle un argument de z, on le note $\arg(z)$.

Remarque. L'argument est unique à un multiple de 2π près, c'est-à-dire, si θ et θ' sont deux arguments de z, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \theta' + 2k\pi$. On écrit $\theta \equiv \theta' \quad (\text{modulo } 2\pi)$ et on lit *"θ est congru à θ' modulo 2π"*.

Exercice. (1) $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) \quad (\text{modulo } 2\pi)$.
(2) Si $z \neq 0$, alors $\arg(\frac{1}{z}) \equiv -\arg(z) \quad (\text{modulo } 2\pi)$.

Explicitement, $\arg(z)$ est l'angle $(\widehat{\vec{e}_1, \vec{u}_z})$ entre les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{u}_z$. Voir la figure ci-dessous:



7 - Formes d'un nombre complexe

7.1 Forme algébrique

Définition. *La forme algébrique (ou cartésienne) d'un nombre complexe z est son écriture sous la forme $z = a + i\,b$, où $a, b \in \mathbb{R}$.*

Exemple. Donner la forme algébrique de $z = \frac{2+i}{1+i}$.

On se sert de la formule de l'inverse:

$z = \frac{2+i}{1+i} = \frac{(2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(2+i)(1-i)}{|1+i|^2} = \frac{3-i}{2} = \frac{3}{2} - \frac{i}{2}$.

7.2 Forme trigonométrique

Définition. *Soit $z = a + i\,b$ un nombre complexe, où $a, b \in \mathbb{R}$. Soit θ un argument de z. On sait qu'on a:* $\cos\theta = \frac{a}{|z|}$ *et* $\sin\theta = \frac{b}{|z|}$. *Ainsi, on a la formule:*

$$z = |z|(\cos\theta + i\,\sin\theta)$$

qu'on appelle la forme trigonométrique de z.

Exemple. Donner la forme trigonométrique de $z = 1 + i\sqrt{3}$. On a $|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$. Donc,
$z = 2(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\sin\frac{\pi}{3})$.

7.3 Forme exponentielle

Définition. *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\,\theta} = \cos\theta + i\,\sin\theta$.*

Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. On a déjà vu que $z = |z|(\cos\theta + i\,\sin\theta)$. Ainsi, on a la formule:

$$z = |z|e^{i\,\theta}$$

qu'on appelle la forme exponentielle de z.

Exemple. Donner la forme exponentielle de $z = 1 - i$. On a $|z| = \sqrt{2}$.Donc

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{-\pi}{4})\right) \\ &= \sqrt{2}e^{-i\,\frac{\pi}{4}}. \end{aligned}$$

Remarques. (1) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $|e^{i\theta}| = 1$ (car $(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$).

(2) $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta'$ (modulo 2π).

(3) Si $z = |z|e^{i\theta}$, alors $\overline{z} = |z|e^{-i\theta}$ (car $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$).

Proposition. (Formules d'Euler)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad et \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Preuve. On sait que

$$\mathrm{Re}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + \overline{e^{i\theta}}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - \overline{e^{i\theta}}}{2i}.$$

On utilise que $\cos\theta = \mathrm{Re}(e^{i\theta})$, $\sin\theta = \mathrm{Im}(e^{i\theta})$ et $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ (la remarque précédente). $\square$

Proposition. *Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, on a:*

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} e^{i\theta} \times e^{i\theta'} &= (\cos\theta + i\,\sin\theta) \times (\cos\theta' + i\,\sin\theta') \\ &= (\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i\,(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta') \\ &= \cos(\theta+\theta') + i\,\sin(\theta+\theta') \\ &= e^{i(\theta+\theta')}. \end{aligned}$$

□

Remarque. On peut retrouver les formules de $\cos(\theta+\theta')$ et $\sin(\theta+\theta')$ en utilisant $e^{i\,\theta} \times e^{i\,\theta} = e^{i(\theta+\theta')}$ et en comparant les parties réelles et les parties imaginaires des deux membres de l'égalité.

Corollaire. (Formule de Moivre)
Soit θ un nombre réel et $n \in \mathbb{N}$. Alors:

$$(e^{i\,\theta})^n = e^{i\,n\theta}.$$

Autrement dit: $(\cos\theta + i\,\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\,\sin(n\theta)$.

Preuve. On utilise une récurrence sur n et la proposition précédente. □

Corollaire. (Propriétés des arguments)

Soient z, z' deux nombres complexes. Alors, on a:

(1) $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)$ *(modulo 2π).*
(2) Si $z \neq 0$, alors $\arg(\frac{1}{z}) \equiv -\arg(z)$ *(modulo 2π).*
(3) $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')$ *(modulo 2π).*
(4) Si $z' \neq 0$, alors $\arg(\frac{z}{z'}) \equiv \arg(z) - \arg(z')$ *(modulo 2π).*
(5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)$ *(modulo 2π).*

Preuve. Posons $z = |z|e^{i\,\theta}$ et $z' = |z'|e^{i\,\theta'}$.
(1) et (2) sont faits dans l'exercice de la page 19.
(3) Se déduit du fait

$$z \times z' = |z|e^{i\theta} \times |z'|e^{i\theta'} = |zz'|e^{i(\theta+\theta')}.$$

(4) On utilise $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$, puis on applique (2) et (3).
(5) On utilise $z^n = |z|^n(e^{i\,\theta})^n = |z^n|e^{i\,n\,\theta}$. □

Exercice. Soient les nombres complexes $z = 1 + i$ et $z' = -1 + i\sqrt{3}$. Donner la forme exponentielle de zz' et $\frac{z}{z'}$.

(1) Pour z: On a $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Donc

$$z = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Un argument de z est $\frac{\pi}{4}$.

(2) Pour z': De même on a: $|z'| = 2$ et

$$z' = 2\left(\frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}.$$

Un argument de z' est $\frac{2\pi}{3}$.

En conclusion.

- $|zz'| = 2\sqrt{2}$ et $|\frac{z}{z'}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Un argument de zz' est $\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{12}$.
- Un argument de $\frac{z}{z'}$ est $\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} = \frac{-5\pi}{12}$.
- $zz' = 2\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}$ et $\frac{z}{z'} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$

8 - Nombres complexes et vecteurs

Soit $\mathcal{P}$ le plan complexe rapporté à un repère orthonormé orienté $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Pour M un point de $\mathcal{P}$ de coordonnés (a, b), on note $\overrightarrow{OM}$ le vecteur $a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ défini par les points O et M. L'opposé de $\overrightarrow{OM}$, qu'on note $-\overrightarrow{OM}$ ou $\overrightarrow{MO}$, est le vecteur $-a\vec{e}_1 - b\vec{e}_2$. Plus généralement, étant donnés deux points $A(x, y)$ et $B(x', y')$ de $\mathcal{P}$, on note $\overrightarrow{AB}$ le vecteur $(x' - x)\vec{e}_1 + (y' - y)\vec{e}_2$, autrement dit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. La norme de $\overrightarrow{AB}$, qu'on note $||\overrightarrow{AB}||$, est la distance de A à B.

Étant donnés deux points M_z et $M_{z'}$ de $\mathcal{P}$ d'affixes z et z', alors:

- $z' + z$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM_z} + \overrightarrow{OM_{z'}}$.
- $z' - z$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{M_z M_{z'}}$. Donc, $|z' - z| = M_z M_{z'}$.
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le complexe αz est l'affixe du vecteur $\alpha\overrightarrow{OM_z}$.

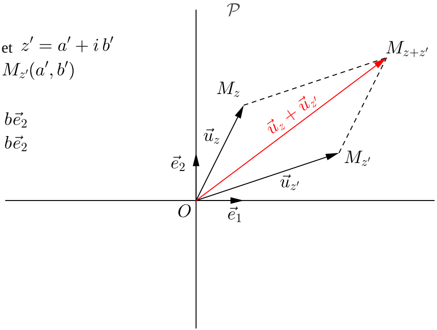
Illustration:

$z = a + i\,b$ et $z' = a' + i\,b'$

$M_z(a, b)$ et $M_{z'}(a', b')$

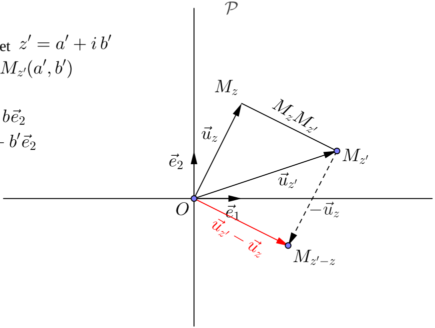
$\vec{u}_z = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$

$\vec{u}_z = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$



$z = a + i\,b$ et $z' = a' + i\,b'$
$M_z(a,b)$ et $M_{z'}(a',b')$

$\vec{u}_z = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$
$\vec{u}_{z'} = a'\vec{e}_1 + b'\vec{e}_2$



$z = a + i\,b$

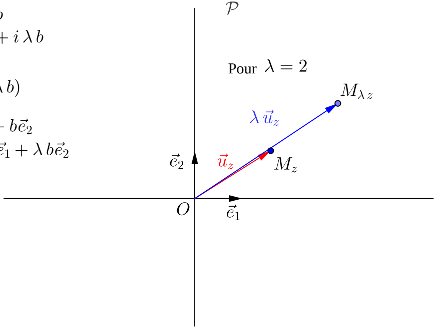
$\lambda\,z = \lambda\,a + i\,\lambda\,b$

$M_z(a,b)$

$M_{\lambda\,z}(\lambda\,a, \lambda\,b)$

$\vec{u}_z = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$

$\lambda\,\vec{u}_z = \lambda\,a\vec{e}_1 + \lambda\,b\vec{e}_2$

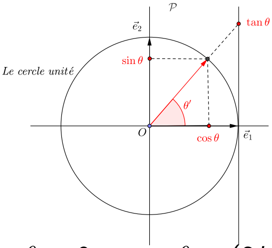


Exemples. (1) Soient $r > 0$ un réel et A un point d'affixe z. Alors, l'ensemble des points M d'affixe z' vérifiant $|z' - z| = r$ est le cercle de centre A et de rayon r.

(2) Soient A_1 et A_2 deux points de $\mathcal{P}$ distincts d'affixes respectifs z_1 et z_2. Alors, l'ensemble des points M d'affixe z vérifiants $|z - z_1| = |z - z_2|$ est la médiatrice du segment $[A_1A_2]$.

9 - Nombres complexes et trigonométrie

On introduit la figure ci-dessous récapilutant les fonctions *cosinus*, *sinus* et *tangente*:



Rappelons que $\cos\theta = 0 \iff \theta = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. De même, $\sin\theta = 0 \iff \theta = k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos\theta = \cos(-\theta)$ et $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ (c'est-à-dire, *cosinus* est paire et *sinus* est impaire). La fonction *tangente* est définie pour les réels distincts de $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Elle est impaire sur l'intervalle où elle est définie.

On récapitule quelques formules trigonométriques (on renvoie aussi au cours de Calculus 1 pour plus de détails sur ces formules et d'autres):

Proposition. Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Alors, on a:

(1) $\cos(\theta + \theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'$.

(2) $\sin(\theta + \theta') = \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'$.

(3) $\cos(\theta - \theta') = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'$.

(4) $\sin(\theta - \theta') = \sin\theta\cos\theta' - \sin\theta'\cos\theta$.

(5) $\cos(2\theta) = (\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2 = 2(\cos\theta)^2 - 1$.

(6) $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$.

(7) $\cos\theta + \cos\theta' = 2\cos(\frac{\theta+\theta'}{2})\cos(\frac{\theta-\theta'}{2})$.

(8) $\cos\theta - \cos\theta' = -2\sin(\frac{\theta+\theta'}{2})\sin(\frac{\theta-\theta'}{2})$.

(9) $\sin\theta + \sin\theta' = 2\sin(\frac{\theta+\theta'}{2})\cos(\frac{\theta-\theta'}{2})$.

(10) $\sin\theta - \sin\theta' = 2\sin(\frac{\theta-\theta'}{2})\cos(\frac{\theta+\theta'}{2})$.

Rappelons que les formules (1) et (2) se déduisent de $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ et permettent de déduire les autres.

Linéarisation des expressions $(\cos x)^m(\sin x)^n$

Définition. (Le factoriel)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit l'entier $n!$, appelé *factoriel n*, comme suit: $n! = 1$ si $n = 0$, et $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ si $n > 0$.

Exemple. (1) $0! = 1$; $1! = 1$; $2! = 2$; $3! = 6$; etc
(2) $(n+1)! = n! \times (n+1)$.

Définition. (Coefficient binomial)

Pour tous $k, n \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$, soit C_n^k le nombre $\frac{n!}{k! \times (n-k)!}$, qu'on appelle un coefficient binomial. Parfois on note ce nombre $\binom{n}{k}$.

Explicitement, ce nombre représente le nombre de parties de cardinal k d'un ensemble de cardinal n.

Exemple. (1) $C_n^0 = C_n^n = 1$.
(2) Pour $0 \leq k < n$, on a $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$. (à faire en exercice).
Le calcul des coefficients binomiaux à l'aide du triangle de Pascal sera expliqué en TD.

Théorème. (Formule du binôme de Newton)
Soient $n \in \mathbb{N}$ et u, v deux nombres complexes. Alors, on a

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{n-k} v^k.$$

(C'est-à-dire:
$(u+v)^n = C_n^0 u^n v^0 + C_n^1 u^{n-1} v^2 + C_n^2 u^{n-2} v^2 + \cdots + C_n^n u^0 v^n.$)

On rappelle que $z^0 = 1$ pour tout nombre complexe z.

Preuve. On procède par récurrence sur n. $\square$

Exemple.

$$(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2,$$

$$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2 v + 3uv^2 + v^3.$$

Linéarisation.

On utilise les formules d'Euler pour exprimer l'expression $(\cos x)^m(\sin x)^n$ comme une somme finie de puissances de e^{ix}, puis on regroupe les termes conjugués pour avoir une combinaison linéaire de $\cos(px)$ et $\sin(qx)$. Ainsi, la nouvelle expression de $(\cos x)^m(\sin x)^n$ ne contient pas de puissance de $\cos x$ et $\sin x$, d'où le vocabulaire de "linéarisation".

Exemple. Linéariser l'expression $(\sin x)^3 \cos x$.

On a $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$.

$$
\begin{aligned}
(\sin x)^3(\cos x)^2 &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2\\
&= \frac{1}{(2i)^3.2^2}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\left(\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right)^2\\
&= \frac{1}{(2i)^3.2^2}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\left((e^{ix})^2-(e^{-ix})^2\right)^2\\
&= \frac{1}{(2i)^3.2^2}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\left(e^{2ix}-e^{-2ix}\right)^2\\
&= \frac{1}{(2i)^3.2^2}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\left(e^{4ix}-2+e^{-4ix}\right)\\
&= \frac{1}{(2i)^3.2^2}\left(e^{5ix}-2e^{ix}+e^{-3ix}-e^{3ix}+2e^{-ix}-e^{-5ix}\right)\\
&= \frac{1}{(2i)^2.2^2}\left(\frac{e^{5ix}-e^{-5ix}}{2i}-2\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}-\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}\right)\\
&= \frac{-\sin(5x)}{16}+\frac{\sin x}{8}+\frac{\sin(3x)}{16}.
\end{aligned}
$$

10 - Équations de second degré

Définition. On appelle racine carrée d'un nombre complexe z tout nombre complexe u vérifiant $u^2 = z$.

Remarque. Trouver les racines carrées de z revient à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $X^2 - z = 0$.

On va montrer que tout nombre complexe $z \neq 0$ admet deux racines carrées distinctes (l'une est l'opposé de l'autre).

Exemples. (1) 0 est l'unique racine carrée de 0.

(2) i et $-i$ sont des racines carrées de -1 car $i^2 = -1$ et $(-i)^2 = -1$.

(3) Si $a \in \mathbb{R}$ avec $a > 0$, alors a admet deux racines carrées réelles, l'une est positive et l'autre est négative. La racine carrée de a positive est notée $\sqrt{a}$.

(4) Si $a \in \mathbb{R}$ avec $a < 0$, alors les racines carrées de a dans $\mathbb{C}$ sont $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$. Mais a n'admet pas de racine carrée dans $\mathbb{R}$.

Méthode de calcul de la racine carrée. Soit $z = a + i\,b$ un nombre complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Soit $u = x + i\,y$ un nombre complexe avec $x, y \in \mathbb{R}$. Alors, $u^2 = z$ équivaut à

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a & \textbf{(1)} \\ 2xy = b & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Ajouter à cela l'équation

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \textbf{(3)}$$

qui provient de $|u|^2 = |z|$. Les équations (1) et (3) permettent d'avoir les valeurs de x et y à un signe près:

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \end{cases}$$

puis l'équation (2) permet de fixer les signes de x et y.

Exemple. Donner les racines carrées de $z = 3 - 4i$. On a $|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$.
Soit $u = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ une racine carrée de z. Comme on vient de l'expliquer, il y a trois équations à prendre en compte:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & (\mathbf{1}) \\ 2xy = -4 & (\mathbf{2}) \\ x^2 + y^2 = 5 & (\mathbf{3}) \end{cases}$$

En ajoutant (1) à (3), on déduit $2x^2 = 8$. Ainsi, $x = \pm 2$. De même on retranche (1) à (3), on obtient $2y^2 = 2$. Ainsi, $y = \pm 1$. L'équation (2) nous dit que x et y sont de signes opposés, par conséquent les racines carrées de $3 - 4i$ sont:

$$2 - i \quad \text{et} \quad -2 + i.$$

Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $aX^2 + bX + c = 0$.

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$aX^2 + bX + c = 0 \qquad (E)$$

on commence par transformer l'expression littérale $aX^2 + bX + c$. En effet, on a:

$$\begin{aligned} aX^2 + bX + c &= a\left(X^2 + \frac{b}{a}X\right) + c \\ &= a\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \qquad (E') \\ &= a\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$, qu'on appelle le discriminant de l'équation (E). On discute sur Δ:

cas 1: Supposons $\Delta = 0$. Alors, par (E'), on a:

$$aX^2 + bX + c = 0 \iff X + \frac{b}{2a} = 0 \iff X = -\frac{b}{2a}.$$

cas 2: Supposons $\Delta \neq 0$. Soient δ_1 et δ_2 les deux racines carrées de Δ. Rappelons que $\delta_2 = -\delta_1$. Ainsi, par (E'), on obtient:

$$\begin{aligned}
aX^2 + bX + c = 0 \quad &\iff \quad a\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0 \\
&\iff \quad \left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \\
&\iff \quad \left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\delta_1}{2a}\right)^2 \\
&\iff \quad X + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\delta_1}{2a} \\
&\iff \quad X = \frac{-b \pm \delta_1}{2a}
\end{aligned}$$

Conclusion.

En résumé, les solutions de l'équation $aX^2 + bX + c = 0$ (avec $a \neq 0$) sont données comme suit selon la valeur du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une seule solution $\frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta \neq 0$, alors l'équation admet deux solutions distinctes $\frac{-b+\delta_1}{2a}$ et $\frac{-b+\delta_2}{2a}$, où δ_1 et δ_2 sont les racines carrées de Δ.

Exemple. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $X^2 + iX - 1 + i = 0$.

On a $\Delta = i^2 - 4(-1 + i) = 3 - 4i$. D'après un exemple précédent, les racines carrées de Δ sont: $2 - i$ et $-2 + i$. Ainsi, les solutions de l'équation sont:

$$\begin{cases} \frac{-i+(2-i)}{2} = 1 - i \\ \frac{-i+(-2+i)}{2} = -1. \end{cases}$$

Remarques. (1) Si r_1 et r_2 sont les nombres complexes solutions de l'équation $aX^2 + bX + c = 0$ (avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$), alors on a la factorisation

$$aX^2 + bX + c = a(X - r_1)(X - r_2).$$

(2) Lorsque $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, on résout l'équation $aX^2 + bX + c = 0$ dans $\mathbb{R}$ en discutant sur le signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

- Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$, l'équation a une seule solution $\frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes:

$$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},$$

où $\sqrt{\Delta}$ est le réel positif racine carrée de Δ.

11 - Quelques transformations géométriques du plan

Soit $\mathcal{P}$ le plan complexe rapporté à un repère orthonormé orienté $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application. Cette application induit une transformation $\tilde{f}$ du plan $\mathcal{P}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $f(z)$.

Exemple 1. Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui à $z \in \mathbb{C}$ associe $\overline{z}$.

Si $z = a + i\,b$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$), alors $\overline{z} = a + i\,(-b)$. Donc, le point $M(a, b)$ est envoyé par $\tilde{f}$ sur le point $M(a, -b)$. Ainsi, la transformation $\tilde{f}$ est la symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses.

Exemple 2. Soit $a \in \mathbb{C}$ non nul et $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ l'application qui à $z \in \mathbb{C}$ associe az.

Cas 1. Si $a = 1$, alors $\tilde{f}$ est l'identité qui envoie chaque point sur lui-même.

Cas 2. Si $a \neq 1$. Alors, $f(z) = z \iff z = 0$ (car $a \neq 1$). Donc, l'origine O est l'unique point fixe par $\tilde{f}$.

Posons $a = \rho e^{i\alpha}$ et $z = |z|e^{i\theta}$. Alors, $z' = f(z) = \rho|z|e^{i(\alpha+\theta)}$. Ce qui signifie:

$$\begin{cases} OM' = \rho OM \\ \widehat{(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})} = \alpha. \end{cases}$$

Par conséquent, $\tilde{f}$ est la rotation de centre O et d'angle α composée avec l'homothétie de centre O et de rapport ρ.

Cas particulier. Si $a = e^{i\alpha} \neq 1$, alors $\tilde{f}$ est la rotation de centre O et d'angle α.