UNIVERSITÉ D'ARTOIS

CALCULUS 1

Cours

2023-2024

Licence 1 Informatique - Mathématiques

Pascal Lefèvre

Licence Informatique - Mathématiques

CALCULUS 1

Cours

LMI1
Pascal Lefèvre

<u>Prérequis - dans l'idéal-</u>

- Le calcul appris dans les petites classes (collège-lycée).
- Le raisonnement (très) élémentaire...

Objectif principal. Acquérir les compétences suivantes:

I.1. Savoir calculer.

I.2. Savoir calculer.

I.3. $\cdots$

II. Comprendre un énoncé mathématique simple.

Dans l'idéal, à terme, savoir identifier et utiliser des méthodes de calculs pertinentes pour résoudre un problème simple.

Il est important de lire et relire ce cours, apprendre les définitions, les formules, comprendre les résultats, les différentes méthodes de calcul.

Préparer les TD...

Par ailleurs, ne pas hésiter à consulter *http://lefevre.perso.math.cnrs.fr/* ou *Moodle* pour les archives.

CONTENTS

1.	Introduction aux nombres réels	6
1.1.	Intervalles.	9
1.2.	Quelques inégalités et égalités remarquables.	9
1.3.	Révisions trigonométrie	12
1.4.	Voisinages	14
2.	Continuité et limites	15
2.1.	Limites	16
2.2.	Croissances comparées et autres limites usuelles	24
2.3.	Fonctions continues sur un intervalle	25
3.	Dérivabilité	26
3.1.	Formules	28
3.2.	Conséquences	31
3.3.	Extrema, accroissements finis et conséquences	32
4.	Primitives et Intégration	39
4.1.	Primitives	39
4.2.	Intégrale	39
4.3.	Définition de l'intégrale d'une fonction positive	40
4.4.	Exemples et propriétés	41
4.5.	Intégrale de fonction de signe quelconque	43
4.6.	Théorème fondamental de l'analyse	46
4.7.	Boîte à outils	47
4.8.	Les fractions rationnelles	50
4.9.	Intégrales de Wallis	53

Nous ne rentrerons pas dans les détails de la construction de $\mathbb{R}$.

Présentation informelle des ensembles classiques:

- $\mathbb{N}$ (à la française): 0, 1, 2, … les entiers naturels.

Remarque: attention, pour les anglo-saxons (et certains collègues) $\mathbb{N}$ “commence" à 1.

- $\mathbb{Z}$: les entiers naturels relatifs: $\mathbb{N}\cup(-\mathbb{N})$, c'est à dire les nombres entiers positifs et leurs opposés.
- $\mathbb{Q}$: les entiers rationnels, c'est à dire tous les quotients $\dfrac{p}{q}$ où $p, q \in \mathbb{Z}$ et q non nul.

  Parmi ceux-là, il y a les nombres décimaux, autrement dit les nombres à virgule (dans l'écriture décimale[1] que l'on peut écrire avec un nombre fini chiffres derrière la virgule.

  Ainsi l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est l'ensemble des nombres de la forme $\dfrac{n}{10^s}$ où $n \in \mathbb{Z}$ et $s \in \mathbb{N}$.

  Il est clair que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$$

  En fait chaque inclusion est stricte. En particulier, on sait exhiber un rationnel qui n'est pas décimal: $\dfrac{1}{3}$ en est un exemple (exercice: le justifier).

  Attention. A priori, les nombres décimaux peuvent avoir deux représentations par des nombres à virgules. Cela se comprend dès que l'on a vu que

$$0,9999\ldots = 1$$

- Nombres réels: avec les nombres rationnels, on n'a pas tous les nombres permettant de travailler "correctement". On voit vite que l'on est bloqué lorsque par exemple on veut résoudre

$$X^2 = 2$$

  En effet, il n'y a pas de solution, où X est un nombre rationnel, à cette équation (exercice: le justifier). C'est par exemple motivé par cela que l'on introduit (que l'on construit !) un ensemble plus gros, mais conservant beaucoup des propriétés de $\mathbb{Q}$ (comme une relation d'ordre “$\leqslant$" raisonnable) permettant de résoudre ce type de problème, même s'il ne permettra de résoudre toutes les équations (ex: $X^2 = -1$ restera sans solution dans $\mathbb{R}$).

  Nous ne ferons pas de construction dans ce cours mais ce que l'on peut retenir ce sont les inclusions suivantes:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \qquad \text{avec des inclusions strictes.}$$

  et les propriétés sur la relation d'ordre qui vont apparaître ci-dessous

[1] On ne donnera pas de détails ici sur la représentation décimale

Concentrons nous sur $\mathbb{R}$ désormais et détaillons un peu:

Il existe sur $\mathbb{R}$ une relation d'ordre totale: on peut toujours comparer deux éléments !

- La relation d'ordre est notée $\leqslant$ (ou $\geqslant$ suivant le sens qui nous intéresse).
- Cette relation est compatible avec les opérations usuelles.
  * On a toujours $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$ pour deux réels x et y.
  * $x < y$ signifie $x \leqslant y$ et $x \neq y$
  * Notations $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^{*+}$,$\mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}^{*-}$
  * $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a : $x \leqslant y$ et $y \leqslant x \Longrightarrow x = y$.
  * $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, on a : $x \leqslant y \Longrightarrow x + z \leqslant y + z$.
    Donc $\forall x, y, x', y' \in \mathbb{R}$, on a : $x \leqslant y$ et $x' \leqslant y' \Longrightarrow x + x' \leqslant y + y'$.
  * $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ avec $z \in \mathbb{R}^+$, on a : $x \leqslant y \Longrightarrow xz \leqslant yz$.
  * $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a : $x \leqslant y \Longrightarrow -y \leqslant -x$.

⚠ *Attention à ne pas confondre "$<$" et "$\leqslant$": ceci arrive (trop) souvent et est sévèrement sanctionné dans les copies...*

Dans $\mathbb{R}$, nous avons le phénomène suivant qui est une propriété très forte:

Toute suite croissante majorée est convergente

Mais au fait que veulent dire ces mots: croissante, suite monotone, suite majorée/minorée/bornée, majorant/minorant d'une partie de $\mathbb{R}$?? Détaillons cela ensemble...

Définition 1.1. Nous rappelons les définitions suivantes:

- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *croissante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *décroissante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- Une suite est monotone si elle est croissante ou décroissante.
- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *majorée* (resp. *minorée*) si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (resp. si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geqslant m$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).
  Une suite est bornée si elle est majorée et minorée.
- Une partie A de $\mathbb{R}$ est *majorée* (resp. *minorée*) si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $a \leqslant M$ pour tout $a \in A$ (resp. si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $a \geqslant m$ pour tout $a \in A$).
  A est bornée si elle est majorée et minorée.

Un outil crucial - donc **très important** - pour travailler sur $\mathbb{R}$ est la valeur absolue.

On rappelle qu'elle est définie pour tout réel x par

$$|x| = x \text{ si } x \geqslant 0 \quad \text{et} \quad |x| = -x \text{ si } x \leqslant 0.$$

On remarque tout de suite qu'on a toujours $|x| \geqslant 0$ et qu'en 0, les conditions sont compatibles: $|0| = 0$.

Exercice: dessiner le graphe de $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$ (i.e. de la fonction valeur absolue).

Autres propriétés: pour tout $x \in \mathbb{R}$,

* $|-x| = |x|$ * $|x| = \max\{x, -x\}$. * $x \leqslant |x|$
* Soit $M \in \mathbb{R}^+$:

$$|x| \leqslant M \iff -M \leqslant x \leqslant M \iff x \leqslant M \text{ et } -x \leqslant M$$

On peut ainsi traduire qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est bornée si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|a| \leqslant M$ pour tout $a \in A$.

L'inégalité cruciale réalisée par la valeur absolue est **l'inégalité triangulaire**:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \qquad |x+y| \leqslant |x| + |y|$$

Preuve. elle est très simple: il suffit de remarquer que

$$-(|x|+|y|) = -|x| + (-|y|) \leqslant x + y \leqslant |x| + |y|$$

puisque

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x| \qquad \text{et} \qquad -|y| \leqslant y \leqslant |y|$$

□

Parfois on a besoin de minorer la valeur absolue d'une somme ou d'une différence, on utilise alors

Inégalité triangulaire inverse:

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \qquad \left|a-b\right| \geqslant \left||a|-|b|\right|$$

Preuve. On écrit que $a = (a-b)+b$. D'après l'inégalité triangulaire:

$$|a| = \left|(a-b)+b\right| \leqslant \left|a-b\right| + \left|b\right|$$

donc

$$\left|a\right| - \left|b\right| \leqslant \left|a-b\right|.$$

Par symétrie des rôles joués par a et b on a aussi

$$\left|b\right| - \left|a\right| \leqslant \left|b-a\right|$$

soit

$$-\left(\left|a\right| - \left|b\right|\right) \leqslant \left|a-b\right|.$$

□

Distance entre deux nombres réels.
Pour deux réels $a, b \in \mathbb{R}$, $d(a,b) = |a-b|$.

1.1. **Intervalles.**

Définition: type barycentre coefficients positifs, On décrit les 8 types d'intervalles (bornes finies, ou pas, semi-ouvert, semi-fermé).

cf. Cours

1.2. **Quelques inégalités et égalités remarquables.**

- $1+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

  En effet $S=1+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k$ et $S=n+\cdots+1=\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)$.

  Autrement dit,

$$S=\frac{1}{2}(S+S)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\big(k+(n+1-k)\big)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}$$

- Identités remarquables: $a,b\in\mathbb{C}$:
  - $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.
  - $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.
  - Plus généralement Soit $n\geq 1$:

$$a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\Big(a^n+a^{n-1}b+\cdots+ab^{n-1}+b^n\Big)=(a-b)\sum_{k=0}^{n}a^{n-k}b^k\,. \tag{1}$$

En effet lorsqu'on développe:

$$(a-b)\Big(a^n+a^{n-1}b+\cdots+ab^{n-1}+b^n\Big)=\Big(a^{n+1}+a^nb+\cdots+a^2b^{n-1}+ab^n\Big)-\Big(a^nb+a^{n-1}b^2+\cdots+ab^n+b^{n+1}\Big)$$

d'où le résultat après simplification.

De cette dernière relation (1), on déduit pour $\lambda\in\mathbb{R}$ (cela marche aussi pour $\lambda\in\mathbb{C}$):

Somme des termes d'une suite géométrique : $$1+\cdots+\lambda^N=\begin{cases} N+1 & \text{si } \lambda=1\\[2mm] \dfrac{1-\lambda^{N+1}}{1-\lambda} & \text{sinon.}\end{cases}$$

En effet, il suffit de prendre $a=1$ et $b=\lambda$ dans (1) pour obtenir

$$(1-\lambda)\big(1+\cdots+\lambda^N\big)=1-\lambda^{N+1}.$$

Lorsque $1-\lambda$ est non nul, il suffit alors de diviser par ce terme pour obtenir le résultat. Le cas $\lambda=1$ est facile à voir: on somme "1" $(N+1)$ fois.

Formule du binôme de Newton.

Avant de justifier ceci, rappelons que le nombre $\dbinom{n}{p}$ (où $n,p\in\mathbb{N}$) est défini comme le nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments.

Il a été vu au Lycée que $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ lorsque $p \leqslant n$ et il est évident que $\binom{n}{p} = 0$ sinon. En fait nous n'aurons pas besoin de connaître cette valeur. Même pour établir la très utile formule du triangle de Pascal, on peut se débrouiller sans:

Lemme 1.2. *Soient $p, n \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 1$. On a*

$$\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} \qquad \text{(Formule du triangle de Pascal)}$$

Preuve. Argument 1: faire le calcul...(si on connaît la formule ci-dessus du coefficient binomial)

Argument 2: Prenons un ensemble E à $n+1$ éléments et fixons un $a \in E$.
Pour choisir une partie de E à p éléments, il y a 2 possibilités:

- Soit on choisit une partie à p éléments contenant a: cela veut dire que nous devons concrètement (encore) choisir $p-1$ éléments parmi les n éléments de E autres que a. Par définition, il y a donc $\binom{n}{p-1}$ telles parties.
- Soit on choisit une partie contenant p éléments, mais ne contenant pas a: cela veut dire que nous devons concrètement (toujours) choisir p éléments parmi les n éléments de E autres que a. Par définition, il y a donc $\binom{n}{p}$ telles parties.

Ces deux possibilités sont évidemment les seules et sont exclusives (on ne peut contenir et ne pas contenir a en même temps) donc $\binom{n+1}{p}$ est la somme des deux quantités précédentes. □

Lemme 1.3. *Soient $p, n \in \mathbb{N}$. On a*

$$\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p} \qquad (2)$$

Preuve. Argument 1: le voir avec la formule...

Argument 2: Cela se voit aussi directement avec la définition: en effet, choisir p éléments dans un ensemble à n éléments revient à choisir les $n-p$ éléments que l'on ne prendra pas... □

Théorème 1.4 (Formule du binôme de Newton)**.** *Soient $N \geq 1$ un entier, a et b des réels (mais ça marche aussi pour des nombres complexes).*

$$(a+b)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^k b^{N-k} = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^{N-k} b^k \,.$$

Remarque pour $N = 2$, on retrouve l'identité remarquable bien connue.

Preuve. La seconde est la conséquence de la première après le changement d'indice $k \mapsto N-k$: en effet, en effectuant le changement d'indice $j = N - k$, lorsque k varie de 0 à n, j varie aussi de 0 à n et

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^k b^{N-k} = \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{N-j} a^{N-j} b^j$$

mais on a vu dans le lemme précédent que $\binom{N}{N-j} = \binom{N}{j}$.

Ainsi on obtient

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^k b^{N-k} = \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} a^{N-j} b^j = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^{N-k} b^k .$$

La première égalité est le cœur du résultat et se démontre par récurrence, en utilisant la formule du triangle de Pascal. Détaillons la preuve

Soit $\mathscr{P}_N$ la proposition "$(a+b)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^k b^{N-k}$ ", où $N \geq 1$.

On voit immédiatement que $\mathscr{P}_1$ est vraie.

Supposons que $\mathscr{P}_N$ soit vraie où $N \geqslant 1$. Montrons que $\mathscr{P}_{N+1}$ est vraie. Autrement dit, on aimerait montrer que

$$(a+b)^{N+1} = \sum_{k=0}^{N+1} \binom{N+1}{k} a^k b^{N+1-k} \tag{relation souhaitée}$$

D'après $\mathscr{P}_N$, on peut écrire

$$(a+b)^{N+1} = (a+b).(a+b)^N = (a+b)\left(\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^k b^{N-k}\right)$$

puis on développe en distribuant le "$a+b$":

$$(a+b)^{N+1} = a\left(\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^k b^{N-k}\right) + b\left(\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^k b^{N-k}\right)$$

soit

$$(a+b)^{N+1} = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^{k+1} b^{N-k} + \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^k b^{N+1-k}.$$

Regardons chacun de ces termes.

La seconde somme comporte des termes qui sont plutôt bons pour notre "relation souhaitée".

Quant à la première somme: faisons le changement d'indice $j = k+1$, cet indice varie donc de 1 à $N+1$ puisque k varie de 0 à N

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^{k+1} b^{N-k} = \sum_{j=1}^{N+1} \binom{N}{j-1} a^j b^{N-(j-1)} = \sum_{j=1}^{N+1} \binom{N}{j-1} a^j b^{N+1-j}$$

que l'on réécrit avec un indice k:

$$\sum_{k=1}^{N+1} \binom{N}{k-1} a^k b^{N+1-k}.$$

En reprenant ces deux sommes on a donc

$$(a+b)^{N+1} = \sum_{k=1}^{N+1} \binom{N}{k-1} a^k b^{N+1-k} + \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^k b^{N+1-k}.$$

On regroupe ensemble les termes d'indice variant entre 1 et N et on rajoute d'une part le terme d'indice $k=0$ et d'autre part le terme d'indice $k=N+1$, pour obtenir

$$(a+b)^{N+1} = \underbrace{\binom{N}{N} a^{N+1} b^0}_{\text{terme } k=N+1 \text{ de la première somme}} + \sum_{k=1}^{N} \left(\binom{N}{k-1} + \binom{N}{k} \right) a^k b^{N+1-k} + \underbrace{\binom{N}{0} a^0 b^{N+1}}_{\text{terme } k=0 \text{ de la seconde somme}}$$

ou encore $(a+b)^{N+1} = b^{N+1} + \sum_{k=1}^{N} \binom{N+1}{k} a^k b^{N+1-k} + a^{N+1}$ en utilisant la formule du triangle de Pascal.

Finalement on a bien

$$(a+b)^{N+1} = \sum_{k=0}^{N+1} \binom{N+1}{k} a^k b^{N+1-k}$$

et $\mathscr{P}_{N+1}$ est vraie.

Donc par récurrence, $\mathscr{P}_N$ est vraie pour tout $N \geqslant 1$. $\square$

• Contrôler un produit par une somme : une autre inégalité classique est

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad |x||y| \leqslant \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$$

En effet, $\left(|x| - |y|\right)^2 \geqslant 0$. En développant on obtient $x^2 + y^2 \geqslant 2|x||y|$. D'où le résultat.

1.3. **Révisions trigonométrie.** Commencer par réviser/apprendre les formules dans le formulaire: `http://lefevre.perso.math.cnrs.fr/PagesPerso/enseignement/Archives/formulairetrigo.pdf`

• En utilisant le théorème de Thalès, on voit que, pour $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$, non nul, on a

$$\frac{\sin(\theta)}{\overline{IH}} = \frac{\cos(\theta)}{OI} = \cos(\theta)$$

d'où

$$\overline{IH} = \tan(\theta).$$

• Il faut savoir résoudre $\cos(x) = \cos(y)$ où $x, y \in \mathbb{R}$. En l'occurrence, on a pour $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\cos(x) = \cos(y) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = y + 2k\pi & \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ ou & \\ x = -y + 2k\pi & \text{où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

De même

$$\sin(x) = \sin(y) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = y + 2k\pi & \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ ou & \\ x = \pi - y + 2k\pi & \text{où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Exercice :

$$\tan(x) = \tan(y) \quad \Longleftrightarrow \quad ??$$

• On a les inégalités très utiles suivantes:

Théorème 1.5. *On a :*

(T1) $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |\sin(x)| \leqslant |x|.$

(T1') En particulier: $\forall x \in [0,1], \quad \sin(x) \leqslant x$

(T2) $\forall x \in [0, \pi/2[, \quad \tan(x) \geqslant x.$

Avant de détailler la preuve, signalons que $(T1)$ est triviale pour $|x| \geqslant 1$ (et pour $x = 0$). D'autre part, comme de plus $sinus$ est une fonction impaire, il devient clair que $(T1')$ suffit pour justifier $(T1)$. C'est cette version que l'on utilise le plus souvent.

Preuve. Nous allons justifier ces inégalités à partir des éléments que nous avons: argument géométrique avec le cercle trigonométrique. Si nous connaissions déjà la dérivée de sinus, nous pourrions simplement faire une étude de fonction très facile. Mais en fait, au contraire, dans la suite du cours nous justifierons la dérivabilité de sinus grâce à certaines limites qui découlent de nos relations ci-dessus.

Fixons $\theta \in [0, \pi/2[$.

Il apparaît clairement que l'aire du triangle OIM est inférieure à l'aire de la portion du disque délimitée par l'axe des abscisses et l'arc OM.

L'aire du triangle vaut $\frac{1}{2} \times 1 \times \sin(\theta)$ car la base est $OI = 1$ et la hauteur est $\sin(\theta)$. Soit une aire de $\frac{\sin(\theta)}{2}\cdot$

L'aire du disque entier vaut π donc l'aire du secteur angulaire vaut π fois la proportion du disque considérée , soit $\frac{\theta}{2\pi}\cdot$ Finalement cette aire est donc $\frac{\theta}{2}\cdot$

On conclut donc que $\sin(\theta) \leqslant \theta$.

L'aire du triangle OIH est cette fois supérieure à l'aire du secteur angulaire. Or ce triangle OIH a une aire de $\frac{\tan(\theta)}{2}\cdot$ On obtient bien $(T2)$. □

1.4. **Voisinages.** Dans la suite, nous devrons régulièrement exprimer l'idée qu'un point x est "proche" d'un point donné $x_0 \in \mathbb{R}$: pour cela on exprime qu'il existe $\delta > 0$ tel que $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Evidemment plus δ est petit, plus x est proche de x_0. On dit que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ est un voisinage de x_0.

Si de plus, on doit absolument travailler dans un intervalle $I \neq \mathbb{R}$, alors on considère des ensembles du type $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I$.

Tout cela va être mis en lumière dans le chapitre suivant où la proximité, "tendre vers" (i.e. se rapprocher de) vont être des notions centrales...

2. CONTINUITÉ ET LIMITES

Nous allons formaliser la notion de continuité d'une fonction $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ où $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$.

Définition 2.1 (Continuité ponctuelle)**.** On considère une application $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ où $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathscr{D}$.

On dit que f est **continue en** a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad \forall x \in \mathscr{D}, \qquad |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Traduction en français:

$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0}_{\text{Aussi petite que l'on veuille réaliser...}} , \underbrace{\exists \delta > 0, \quad \forall x \in \mathscr{D} \qquad |x - a| < \delta}_{\text{il suffit que } x \text{ soit assez proche de } a} \Longrightarrow \underbrace{|f(x) - f(a)| < \varepsilon}_{\text{... la distance entre } f(x) \text{ et } f(a)} .$$

Remarque: on obtient la même propriété en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes:

Ainsi, avec les notations ci-dessus, les assertions suivantes sont équivalentes:

- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad \forall x \in \mathscr{D}, \qquad |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad \forall x \in \mathscr{D}, \qquad |x - a| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon.$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad \forall x \in \mathscr{D}, \qquad |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon.$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad \forall x \in \mathscr{D}, \qquad |x - a| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$

Exercice: le justifier.

Cela revient à dire que:

"Pour tout voisinage W de $f(a)$, il existe un voisinage V de a (dans $\mathscr{D}$) tel que $f(V) \subset W$."

Cela revient aussi à dire que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in \mathscr{D}}} f(x) = f(a)$: voir ci-dessous la section sur les limites.

Définition 2.2. Lorsque f est continue en tout point $a \in \mathscr{D}$, on dit que f est continue sur $\mathscr{D}$. Parfois on ne précise pas (lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté possible) et on dit juste: f est continue.

Exemples:

- L'application $x \in \mathbb{R} \longmapsto |x|$ est continue.
  En effet: fixons $a \in \mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$, en choisissant $\delta = \varepsilon$, on a d'après l'inégalité triangulaire inverse:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |x - a| < \delta \Longrightarrow \Big| |x| - |a| \Big| \leq |x - a| < \delta = \varepsilon.$$

- L'application $\left| \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^2 \end{array} \right.$ est continue
  . Exercice.

Nous allons formaliser aussi cela en termes de "limite".

2.1. **Limites.** Nous allons exprimer de façon générale ce que signifie que $f(x)$ tend vers “quelque chose" quand x tend vers a.

Pour donner un énoncé général, nous avons besoin d'inclure des points qui peuvent aussi être au bord de notre ensemble. Ainsi

Définition 2.3. Soit $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$ (non vide), on dit que $a \in \mathbb{R}$ est adhérent à $\mathscr{D}$ si tout voisinage de a contient un élément de $\mathscr{D}$.

Ou encore cela signifie que, pour tout $\delta > 0$, on a $]a-\delta, a+\delta[\cap\mathscr{D} \neq \emptyset$.

Ainsi, par exemple: tous les points de $[0,1]$ sont adhérents à $[0,1[$.

Définition 2.4 (Définition de la limite pour une fonction en un point adhérent à l'ensemble de définition). Soient $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$ (non vide) et a adhérent à $\mathscr{D}$.

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f a une limite ℓ quand x tend vers a lorsque:

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists \delta > 0, \quad \forall x \in \mathscr{D}, \quad |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Cette propriété ne peut être vérifiée que pour au plus un ℓ. Ou encore, si un tel ℓ existe, il est unique.

On écrit alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \qquad \text{ou parfois} \qquad f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell.$$

Remarque: f continue en x_0 exprime que $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

On veut quelquefois exprimer que $f(x)$ a une limite ℓ quand x tend vers $+\infty$. Pour cela il faut que la fonction f soit définie sur $\mathscr{D}$ permettant d'“aller jusque l'infini”: concrètement on supposera que $\mathscr{D}$ contient un intervalle du type $]\alpha, +\infty[$ (en fait plus généralement il suffit que $]\alpha, +\infty[\cap\mathscr{D} \neq \emptyset$ pour tout $\alpha > 0$).

On a alors: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe et vaut ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists A > 0, \quad \forall x \in \mathscr{D}, \quad x > A \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Exercice: écrire la définition de $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ existe et vaut ℓ.

Réponse: $\forall \varepsilon > 0,\, \exists A > 0, \quad \forall x \in \mathscr{D}, \quad x < -A \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Pour exprimer la définition de $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, on écrit

$$\forall A > 0,\, \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathscr{D}, \quad |x-a| < \delta \Longrightarrow f(x) > A$$

Enfin, pour exprimer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, on écrit

$$\forall A > 0,\, \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in \mathscr{D}, \quad x > \alpha \Longrightarrow f(x) > A$$

Exercice: écrire toutes les définitions correspondantes avec “$-\infty$" à la place “$+\infty$".

Exemples

- Exemple 1. $\lim_{x\to 0} x^s = 0$ où $s \geqslant 1$ est un entier.

Ainsi on s'intéresse à la fonction $f(x) = x^s$, définie pour $x \in \mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$, on choisit $\delta = \varepsilon^{\frac{1}{s}} > 0$ et on a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|x| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |x^s| < \delta^s = \varepsilon$$

- Exemple 2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

Soit $\varepsilon > 0$, on choisit $A = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ et on a alors pour tout $x > 0$:

$$x > A \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{x} < \frac{1}{A} = \varepsilon$$

- Exemple 3. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

En considère donc en fait l'application $x \in \mathbb{R}^* \longmapsto \frac{1}{x^2}$.

Soit $A > 0$, on choisit $\delta = \frac{1}{\sqrt{A}} > 0$ et on a alors pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$|x| < \delta \quad \Longrightarrow \quad x^2 < \delta^2 \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{1}{x^2} - 0\right| = \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} = A$$

Signalons le résultat suivant qui permet de lier l'étude de la limite à l'étude de suites pour lesquelles on peut être parfois plus à l'aise :

On rappelle qu'une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N_0 \Longrightarrow |x_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

et une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si

$$\forall A > 0\,,\ \exists N_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N_0 \Longrightarrow x_n \geqslant A$$

(on pourra écrire explicitement ce que signifie qu'une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$)

Théorème 2.5 (Critère séquentiel)**.** *Soient $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$ (non vide), a adhérent à $\mathscr{D}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$.*

on a

- $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \Longleftrightarrow$ *[pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{D}$ convergente vers a, la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ].*
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \Longleftrightarrow$ *[pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{D}$ divergente vers $+\infty$, la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ].*

On peut adapter le dernier point avec "$-\infty$" à la place "$+\infty$".

Exemple: sin *et* cos *n'ont pas de limite en l'infini.*

C'est essentiellement dû au caractère périodique: si sin avait une limite ℓ en $+\infty$, d'après le critère précédent, on devrait avoir $\ell = \lim \sin(2n\pi) = 0$; mais aussi $\ell = \lim \sin(2n\pi + \pi/2) = 1$ ce qui est contradictoire. Comme $\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, si cos avait une limite en $+\infty$, sin en aurait une aussi, ce qui est faux. Enfin, comme cos est paire et sin est impaire, on voit que ces fonctions n'ont pas de limite en $-\infty$ non plus.

Le résultat suivant donne un principe général qui permet de se ramener à la comparaison avec des fonctions dont on connait "notoirement" le comportement. *On évite alors en pratique bien souvent le recours aux quantificateurs/epsilon/delta...*

Théorème 2.6 (**Théorème de comparaison**)**.** *Soient $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ (non vide), a adhérent à $\mathcal{D}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Soient f et u deux fonctions $\mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$.*

(1) On suppose que
- *Pour tout $x \in \mathcal{D}$ dans un voisinage de a, $|f(x) - \ell| \leqslant u(x)$.*
- $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 0$.

Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Il y a aussi les versions correspondantes en l'infini :

(2) On suppose que
- *Pour tout $x \in \mathcal{D}$ assez grand, $|f(x) - \ell| \leqslant u(x)$.*
- $\lim\limits_{x\to +\infty} u(x) = 0$.

Alors $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \ell$.

De même

(3) On suppose que (a peut éventuellement désigner $+\infty$)
- *Pour tout $x \in \mathcal{D}$ dans un voisinage de a, $f(x) \geqslant u(x)$.*
- $\lim\limits_{x\to a} u(x) = +\infty$.

Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

(4) Ecrire toutes les versions en remplaçant $+\infty$ par $-\infty$.

On a une variante (célèbre) du théorème de comparaison:

Théorème 2.7 (**Théorème des gendarmes**)**.** *Soient $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ (non vide), a adhérent à $\mathcal{D}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Soient f, g et G trois fonctions $\mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$.*

(1) On suppose que
- *Pour tout $x \in \mathcal{D}$ dans un voisinage de a, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant G(x)$.*
- $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} G(x) = \ell$.

Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Il y a aussi les versions correspondantes en l'infini :

(2) On suppose que
- *Pour tout $x \in \mathcal{D}$ assez grand, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant G(x)$.*

- $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} G(x) = \ell$.

Alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

(3) Ecrire la version en remplaçant $+\infty$ *par* $-\infty$.

Preuve: exercice.

En utilisant les encadrements du chapitre précédent, on en déduit des limites usuelles *(à connaitre !)*

Exemples:

- $\lim_{x\to0} \sin(x) = 0$.
  En effet, on a $|\sin(x)| \leq |x|$ or $\lim_{x\to0} |x| = 0$.
- $\lim_{x\to0} \cos(x) = 1$.

Il suffit de remarquer que $1-\cos(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ donc $0 \leqslant 1-\cos(x) \leqslant 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2} \leqslant x^2$.

- $\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x} = 1\cdot$
  En effet, on sait que pour $x \in]0,\pi/2[$, on a $\tan(x) \geqslant x$ donc en réarrangeant, on a $\frac{\sin(x)}{x} \geqslant \cos(x)$ puisque x et $\cos(x)$ sont positifs. En fait, les fonctions cos et $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ sont des fonctions paires donc finalement, on a pour tout $x \in]-\pi/2,\pi/2[\setminus\{0\}$:
$$1 \geqslant \frac{\sin(x)}{x} \geqslant \cos(x)$$
  et le théorème d'encadrement donne la conclusion.
- $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$.

On a aussi les résultats habituels sur la stabilité par opérations algébriques:

Théorème 2.8 (**Théorème de stabilité par opérations algébriques**)**.** *Soient* $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$ *(non vide), a adhérent à* $\mathscr{D}$ *(a peut éventuellement désigner* $+\infty$ *ou* $-\infty$*) et* $\ell \in \mathbb{R}$. *Soient f et g des fonctions* $\mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$.

- $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ *et* $\lim_{x\to a} g(x) = \ell' \Longrightarrow \lim_{x\to a} \lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda\ell + \mu\ell'$, *pour tous* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ *et* $\lim_{x\to a} g(x) = \ell' \Longrightarrow \lim_{x\to a} f(x)g(x) = \ell\ell'$.
- $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ *et* $\lim_{x\to a} g(x) = \ell' \neq 0 \Longrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{\ell'}\cdot$
- $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ *et g bornée au voisinage de a* $\Longrightarrow \lim_{x\to a} f(x) + g(x) = +\infty$.
- $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ *et* $\lim_{x\to a} g(x) = \ell' \neq 0 \Longrightarrow \lim_{x\to a} f(x)g(x) = \pm\infty$
  en respectant la règle des signes.
- $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \neq 0$ *(peut-être même l'infini) et* $\lim_{x\to a} g(x) = 0^{\pm} \Longrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ *en respectant la règle des signes.*

Ecrire les bonnes versions en remplaçant $+\infty$ par $-\infty$.

En particulier,

- *f et g sont continues en $a \in \mathcal{D} \Longrightarrow \lambda f + \mu g$ est continue en a pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*
- *f et g sont continues en $a \in \mathcal{D} \Longrightarrow fg$ est continue en a.*
- *Si f et g sont continues en $a \in \mathcal{D}$ et $g(a) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ est bien définie sur un voisinage de a et est continue en a.*

Preuve: exercice.

On peut aussi affiner la compréhension du comportement de la fonction en un point a en s'en rapprochant par la gauche ou par la droite: plus précisément, l'expression "x tend vers a^+", notée $x \to a^+$, signifie que x "tend vers a" en restant dans $]a, +\infty[$.
On parle alors de **limite à droite** en a.

Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim_{x\to a} f_{|\mathcal{D}\cap]a,+\infty[}(x)$

Par exemple on voit facilement que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

On peut alors affiner les résultats du théorème précédent sous la forme suivante:

Avec les notations précédentes:

- $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$ et $\displaystyle\lim_{x\to a^+} g(x) = \ell' \Longrightarrow \lim_{x\to a^+} \lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda\ell + \mu\ell'$, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$ et $\displaystyle\lim_{x\to a^+} g(x) = \ell' \Longrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x)g(x) = \ell\ell'$.
- $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to a^+} g(x) \neq 0 \Longrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x)g(x) = \pm\infty$ en respectant la règle des signes.
- $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell \neq 0$ (peut-être même l'infini) et $\displaystyle\lim_{x\to a^+} g(x) = 0^\pm \Longrightarrow \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ en respectant la règle des signes.

On peut bien sûr tout adapter avec a^- à la place de a^+. On parle alors de **limite à gauche** en a.

Ainsi pour synthétiser :[2]

- Si $\displaystyle\lim_{x\to a^+} g(x)$ existe, on parle de la limite à droite de g en a et lorsqu'elle vaut $g(a)$, on dit que g est *continue à droite en a.*

De même

- Si $\displaystyle\lim_{x\to a^-} g(x)$ existe, on parle de la limite à gauche de g en a et lorsqu'elle vaut $g(a)$, on dit que g est *continue à gauche en a.*

[2] ⚠ "a^-" et "a^+" ne désignent PAS des points particuliers ! Il n'y a PAS de points *le plus proche* à droite de a..., idem à gauche !!

Méthode:

Une démarche courante pour établir la continuité de fonctions définies par des conditions du type "f est définie par $f(x) = \cdots$ si x supérieur à a; et une autre expression si x inférieur à a" (inégalité stricte pour un des côtés) est de justement montrer que

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

Théorème 2.9 (Composition)**.** *Soient $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathscr{D}_g \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions avec $f(\mathscr{D}_f) \subset \mathscr{D}_g$.*

On peut alors considérer l'application $g \circ f : \left| \begin{array}{ll} \mathscr{D}_f & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto g\circ f(x) = g\big(f(x)\big) \end{array} \right.$

On a

- *Soit $a \in \mathscr{D}_f$. On suppose que f est continue en a et g est continue en $f(a)$ alors $g\circ f$ est continue en a.*

Plus généralement,

- *Soit a adhérent à $\mathscr{D}_f$. On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ existe. Alors b est adhérent à $\mathscr{D}_g$ et si $\lim\limits_{x\to b} g(x) = \ell$ existe alors*

$$\lim_{x\to a} g\circ f(x) \text{ existe et vaut } \ell.$$

De plus, cet énoncé est encore licite lorsque a et/ou b et/ou ℓ est $\pm\infty$.

.

Une difficulté fréquente: les formes indéterminées. Dès que l'on tombe sur une situation du type $0\times\infty$, ou $(+\infty)-(+\infty)$ ou $\frac{0}{0}$, ou encore $\frac{\infty}{\infty}$, alors on ne peut conclure tout de suite !

Il faut essayer de travailler sur les expressions pour faire ressortir les termes dominants. Pour vaincre cette difficulté, nous allons avoir plusieurs outils.

- Dès ce semestre: des résultats sur les croissances comparées (ci-dessous).
- Plus tard, une méthode très puissante: les développements limités et les équivalents.

Exemples:

nous avons déjà traité le cas de $\frac{\sin(x)}{x}$ en 0 qui est une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$. Sans que ce soit une preuve, on peut aussi se souvenir de cette limite avec l'argument suivant:

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}$$

est le taux d'accroissement de sin en 0 donc converge vers la dérivée de sin en 0, c'est à dire $\cos(0) = 1$.

(rq: en fait, pour démontrer que la dérivée de sin est cos au chapitre suivant, on utilisera la limite précédente)

Dans le même esprit, on a $\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ car c'est la dérivée de $\ln(1+t)$ en 0 c'est à dire $\frac{1}{1+t}$ en 0 (voir cours sur les dérivées).

Exercice: déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}\cdot$ (on pourra reamrquer que $1-\cos(x) = 2(\sin(x/2))^2$)

Un autre exemple **très important** (à savoir traiter absolument !): $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. Détaillons le: il faut d'abord se souvenir que a^b signifie $\exp(b\ln(a))$ pour b réel quelconque et $a \in \mathbb{R}^{+*}$.

On remarque donc que pour $x > 0$, on a par définition

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right).$$

Par ailleurs, on vient de voir que $\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ or $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(1+t)}{t}$ pour $t = 1/x$. Ainsi, d'après le théorème de comparaison, $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$.

D'où

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

Exercice: montrer que $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = \mathrm{e}^{\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Remarque 2.10 (*Remarque culturelle: Intérêts itérés.*)**.**

Admettons que l'on emprunte une somme de 1 (unité de votre choix: euro, millier d'euros, million...) auprès d'une banque avec des intérêts au taux (pour une unité de temps) de $P\%$ où $P > 0$. On travaille plutôt avec $p = \frac{P}{100}\cdot$

On doit donc rembourser à la fin de cette période $1+p$.

Si le banquier propose d'échelonner le taux sur 2 demi-périodes avec un taux de $\frac{p}{2}$, est-ce que ça change quelque chose ? sinon qui est gagnant ?

Combien paye-t-on au bout de la période complète avec ce mode? Réponse: $\left(1+\frac{p}{2}\right)^2$, autrement dit $1+p+\frac{p^2}{4} > 1+p$ (on est perdant, évidemment).

Admettons que l'on pousse le raisonnement (l'arnaque) encore plus... Si on itère le procédé, le taux est divisé par $N \geq 1$ avec un taux applicable de $\frac{p}{N}$ en chaque fin de fraction de période (on a coupé en N sous-périodes égales), à la fin on doit donc payer $\left(1+\frac{p}{N}\right)^N > 1+p$. Enfin si on augmente indéfiniment ce découpage, alors le montant total à payer au final converge vers e^p.

Application

On peut déduire de ce qui précède que les fonctions usuelles sont continues:

- Fonctions polynômes comme combinaison linéaire des fonctions puissances (puissance entière) sont continues sur $\mathbb{R}$. Puis les fractions rationnelles, comme quotient de telles fonctions sont continues là où le dénominateur de s'annule pas (en dehors des pôles donc).
- Soit $n \geqslant 1$ un entier. Les fonctions $\left| \begin{array}{ll} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^{\frac{1}{n}} \end{array} \right.$ sont continues.

  En effet, en 0, étant donné $\varepsilon > 0$, on a pour $\delta = \varepsilon^n$: $|x| \leqslant \delta \Rightarrow |x^{\frac{1}{n}}| \leqslant \varepsilon$.
  Lorsque $a > 0$, avec $\delta = a^{1-\frac{1}{n}}\varepsilon$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:
  $$x - a = \left(x^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n}}\right)\left(x^{\frac{n-1}{n}} + \cdots + a^{\frac{n-1}{n}}\right) \geqslant a^{\frac{n-1}{n}}\left(x^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n}}\right)$$
  donc $|x-a| \leqslant \delta \Longrightarrow \left|x^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n}}\right| \leqslant \varepsilon$.
  On en déduit aussi que les fonctions *puissances rationnelles positives* sont continues.
- cos et sin sont continues sur $\mathbb{R}$.
  En effet, on a déjà vu qu'elles sont continues en 0. Fixons $x_0 \in \mathbb{R}$. Comme $\cos(t + x_0) = \cos(t)\cos(x_0) - \sin(t)\sin(x_0)$, on en déduit que $t \to \cos(t + x_0)$ est continue en 0 donc cos est continue en x_0.
  On a la même chose pour sin.
- La fonction tan est donc continue sur son ensemble de définition (là où cos ne s'annule pas).
- Les fonctions exp et ln sont continues respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^{+*}$: admis (cela vient de la définition sur laquelle on ne revient pas maintenant).
  On en déduit que les fonctions puissances générales sont continues sur $\mathbb{R}^{+*}$ puisqiue
  $$x^\alpha = \exp\left(\alpha \ln(x)\right).$$

Les résultats précédents et les exemples précédents des fonctions usuelles impliquent le principe très utile suivant

Théorème 2.11 (Principe de continuité "automatique")**.** *Toutes les fonctions définies à l'aide d'UNE formule explicite impliquant les fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition.*

Exemples:

- La fonction $f : \left| \begin{array}{ll} \mathscr{D} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2-1}-2}{\sqrt{x^2-1}-1}\right) \end{array} \right.$ est continue sur son ensemble de définition, où
  $$\mathscr{D} =]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}[\cup]\sqrt{5}, +\infty[\quad \text{(le vérifier)}$$
- La fonction g définie par $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$ n'est pas continue.
- La fonction F définie par $F(x) = \begin{cases} \lambda & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{2\sin(x + \pi/6) - 1}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \end{cases}$ est continue lorsqu'on choisit $\lambda = ?$

2.2. **Croissances comparées et autres limites usuelles.**

- Fraction rationnelle en l'infini: F une fraction rationnelle de la forme $\dfrac{P}{Q}$ où P et Q sont des fonctions polynômiales (non nulles) de termes dominants $a_p X^p$ et $b_q X^q$ respectivement ($a_p, b_q \neq 0$).

  Alors la limite en l'infini de $F(x)$ est la limite en l'infini du quotient $\dfrac{a_p x^p}{b_q x^q}$.

  En particulier:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } p<q \\ \dfrac{a_p}{b_q} & \text{si } p=q \\ \pm\infty & \text{si } p>q \quad \text{(avec règle des signes en tenant compte des coefficients)} \end{cases}$$

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. En effet, on a déjà vu que $\ln(t) \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$ pour $t>0$.

  Ainsi pour $x>0$, $\dfrac{1}{2}\ln(x) = \ln(\sqrt{x}) \leqslant \sqrt{x}$. Ainsi pour $x \geqslant 1$, on a obtient

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x} \leqslant \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \longrightarrow 0\,.$$

  Plus généralement, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^s} = 0$ pour tout $s>0$. En effet il suffit de remarquer que $\dfrac{\ln(x)}{x^s} = \dfrac{\ln(x^s)}{s.x^s} = \dfrac{\ln(u)}{su}$ où $u = x^s \to +\infty$.

Ou encore, avec P une fonction polynômiale (non nulle), de degré supérieur à 1, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{P(x)} = 0$.

- Une conséquence importante de la limite précédente (en passant à $x = \dfrac{1}{t} \to +\infty$ quand $t \to 0^+$): $\displaystyle\lim_{t\to0^+} t\ln(t) = 0$. En effet, on a alors $t\ln(t) = -\dfrac{\ln(x)}{x}$ puisque $\ln\dfrac{1}{x} = -\ln(x)$. On a ainsi, puisque $\ln(t) = \dfrac{1}{\alpha}\ln\left(t^\alpha\right)$:

$$\lim_{t\to0^+} t^\alpha \ln(t) = 0 \qquad \text{pour } \alpha > 0\,.$$

- On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x} = 0$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$).

  En effet, lorsque α est non nul, $x^\alpha \mathrm{e}^{-x} = \left(\dfrac{\ln(X)}{X^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^\alpha$ où $X = \mathrm{e}^x \to +\infty$.

 Ainsi pour toute fonction polynômiale P, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} P(x)\mathrm{e}^{-x} = 0$.

  Plus généralement encore, on en déduit en considérant le polynôme $P(\lambda^{-1}X)$ que, pour tout $\lambda > 0$ et pour toute fonction polynômiale P, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} P(x)\mathrm{e}^{-\lambda x} = 0$.

2.3. **Fonctions continues sur un intervalle.** Les deux théorèmes suivants sont très utiles et mettent en exergue l'intérêt de remarquer que l'on travaille avec des fonctions continues.

Théorème 2.12 (Théorème des valeurs intermédiaires - TVI)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue où I est un intervalle. Alors $f(I)$ est aussi un intervalle.*

Autrement dit, si f continue sur un intervalle contenant a et b avec $a < b$ alors tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteint par f, c'est à dire qu'il est de la forme $y = f(x)$ pour un certain $x \in [a,b]$.

C'est ce résultat qui illustre le fait que lorsqu'on dessine le graphe d'une fonction continue, on ne lève pas le stylo... Il y a d'autres fonctions que les fonctions continues qui vérifient la même conclusion.

Un autre résultat est

Théorème 2.13 (Fonction continue sur un segment)**.** *Soit $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction continue où K est un intervalle fermé borné (un segment donc).*

Alors

- *f est bornée.*

Les bornes sont atteintes:

- *Il existe $s \in K$ tel que $f(s) = \sup\{f(x) \mid x \in K\} = \max\{f(x) \mid x \in K\}$.*
- *Il existe $c \in K$ tel que $f(c) = \inf\{f(x) \mid x \in K\} = \min\{f(x) \mid x \in K\}$.*

Nous admettons la preuve des deux théorèmes précédents.

Une application fréquente du Théorème 2.13 est le corollaire suivant:

Corollaire 2.14. *Soit $f : K \to \mathbb{R}^{+*}$ une fonction continue où K est un segment.*

Alors il existe $\delta > 0$ tel que $\quad \forall x \in K, \quad f(x) \geqslant \delta.$

C'est bien sûr faux sans hypothèse spéciale sur K: la fonction $f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \dfrac{1}{x}$ est bien à valeurs strictement positives mais il est faux qu'il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) \geqslant \delta$ pour tout $x > 0$ (en fait c'est faux dès que $x > \delta^{-1}$).

<u>Exercices</u>:

Ex. 1. Un marcheur parcourt 5 kms en une heure. On suppose que sa trajectoire est continue (pas de téléportation). Montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-heure pendant lequel il parcourt exactement $2,5$ kms.

Ex. 2. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application continue. Montrer qu'il existe un point fixe, i.e. qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$.

Indication: considérer $x \in [0,1] \mapsto f(x) - x$

3. DÉRIVABILITÉ

Nous allons nous intéresser ici à une autre propriété de régularité des fonctions.

Nous allons travailler sur un domaine $\mathscr{D}$ qui est généralement une réunion d'intervalles (non triviaux), le plus souvent, juste un intervalle...

Soient $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ une application et $x_0 \in \mathscr{D}$ et on suppose que x_0 est adhérent à $\mathscr{D} \setminus \{x_0\}$ (mais lorsque $\mathscr{D}$ est un intervalle non trivial ceci est automatiquement réalisé).

Définition 3.1 (**Dérivabilité en un point**)**.**

On dit que f est **dérivable au point** x_0 si $\displaystyle\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe.

Auquel cas on note

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).$$

On peut aussi écrire

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

De façon équivalente, f est dérivable en x_0 ssi f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0 (cf. cours ANA2), autrement dit:

Proposition 3.2 (Existence d'un D.L. à l'ordre 1)**.** *f est dérivable au point x_0 si et seulement si il existe $A \in \mathbb{R}$ et un application $\theta : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$, nulle en x_0 et continue en x_0, tels que*

$$f(x) = f(x_0) + A(x-x_0) + (x-x_0)\theta(x)$$

Auquel cas A est unique et n'est autre que $f'(x_0)$.

Preuve. En effet, si f est dérivable au point x_0: on pose $\theta(x_0) = 0$ et, pour $x \neq x_0$, on écrit

$$\theta(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)$$

On a bien la continuité en x_0 et la relation.

Réciproquement, la relation $f(x) = f(x_0)+A(x-x_0)+(x-x_0)\theta(x)$ implique $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A+\theta(x) \to A$ lorsque x tend vers x_0.

□

Une conséquence immédiate de cette caractérisation est que

Proposition 3.3. *(avec les notations précédentes)*

Toute fonction dérivable en x_0 est continue en x_0.

La réciproque est fausse en générale.

En effet $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\theta(x)$ et le second membre est continue en x_0.

Pour la réciproque, des exemples sont donnés ci-dessous avec V et la fonction racine carrée.

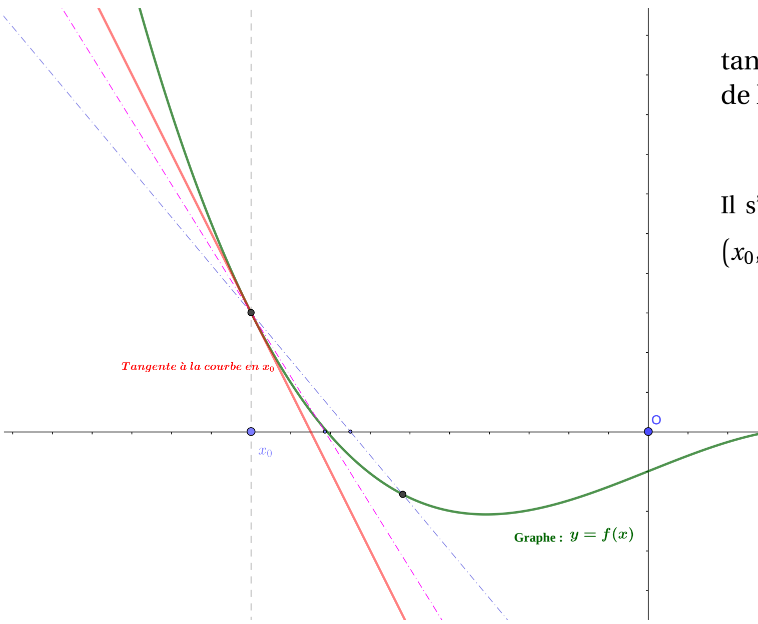
Définition 3.4 (Dérivabilité)**.** On dit que f est **dérivable** (sur $\mathscr{D}$) si f dérivable en tout point $x_0 \in \mathscr{D}$.

Si f est dérivable sur $I \subset \mathscr{D}$, on peut définir la fonction dérivée (ou simplement "dérivée") $f' : x \in I \longmapsto f'(x)$.

$\boxed{\text{Illustration géométrique}}$

$$x \in \mathscr{D} \setminus \{x_0\} \longmapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

est la fonction taux d'accroissement en x_0 (de la fonction f).



La dérivée est le coefficient directeur de la tangente à la courbe en x_0. Ou encore l'équation de la tangente à la courbe en $\big(x_0, f(x_0)\big)$ est:

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(X - x_0)$$

Il s'agit bien de l'équation d'une droite passant par $\big(x_0, f(x_0)\big)$ et de coefficient directeur $f'(x_0)$.

<u>Exemples:</u>

- On voit immédiatement qu'une fonction constante sur un intervalle (non trivial) est dérivable et que sa dérivée est la fonction nulle.
- $x \in \mathbb{R} \longmapsto x^N$ où N est un entier non nul est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la dérivée est $x \in \mathbb{R} \longmapsto N x^{N-1}$.
  En effet, avec la formule du binôme de Newton, pour $h \neq 0$
  $$(x_0 + h)^N - x_0^N = \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} h^k x_0^{N-k}$$
  donc
  $$\frac{(x_0 + h)^N - x_0^N}{h} = \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} h^{k-1} x_0^{N-k} \longrightarrow \binom{N}{1} x_0^{N-1} = N x_0^{N-1}.$$
- La fonction valeur absolue (vue sur $\mathbb{R}$) $V : x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$, n'est pas dérivable en 0. Par contre elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
  En effet, sur $\mathbb{R}^{+*}$, $|x| = x$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$, $|x| = -x$.
  Par contre, en 0, on a $|0| = 0$ et $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \dfrac{|h|}{h} = 1$ alors que $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \dfrac{|h|}{h} = -1$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \dfrac{|x|}{x}$ n'existe pas !

Une petite subtilité: si on considère la fonction valeur absolue <u>restreinte</u> à $\mathbb{R}^+$: $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto V_+(x) = |x| = x$, alors cette fonction est dérivable (même en 0...).

Exercice: méditer cet exemple.

- La fonction *racine carrée* est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ mais elle est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et a pour dérivée $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ en tout $a > 0$.

  En effet, en 0; on a $\sqrt{0} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = +\infty$.

  Pour $a > 0$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $a + h \geqslant 0$, on a
$$\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \frac{(a+h)-a}{h\big(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\big)} = \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$$
  donc
$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$
- La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction cosinus.

  En effet, pour tout $a, h \in \mathbb{R}$, on a $\sin(a+h) = \sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h)$ donc, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$:
$$\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} = \sin(a)\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(a)\frac{\sin(h)}{h}$$
  Or $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \dfrac{\cos(h)-1}{h} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \dfrac{\sin(h)}{h} = 0$ donc on en déduit que
$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} = \cos(a).$$
- La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $-\sin$.

  Exercice: s'inspirer de la démarche précédente pour établir le résultat.

3.1. **Formules.**

Connaître le formulaire des dérivées !!

Justifions-en les formules (les fonctions sont supposées définies sur un domaine $\mathscr{D}$ contenant x_0)

- Combinaison linéaire: soient u et v dérivables en x_0, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\alpha u + \beta v$ est dérivable en x_0 et $(\alpha u + \beta v)'(x_0) = \alpha u'(x_0) + \beta v'(x_0)$.

  Il suffit d'écrire:
$$\frac{(\alpha u+\beta v)(x)-(\alpha u+\beta v)(x_0)}{x-x_0} = \alpha\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} + \beta\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}$$
  puis de passer à la limite.
- Produit: soient u et v dérivables en x_0. Alors uv est dérivable en x_0 et
$$(uv)'(x_0) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0).$$
  Il suffit d'écrire:
$$\frac{(uv)(x)-(uv)(x_0)}{x-x_0} = v(x_0)\Big(\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}\Big) + u(x)\Big(\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}\Big)$$

puis de passer à la limite en invoquant aussi la continuité de u en x_0.

$$\frac{(uv)(x)-(uv)(x_0)}{x-x_0}=v(x_0)\Big(\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}\Big)+u(x)\Big(\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}\Big)$$

- **Formule de dérivation des fonctions composées**: on suppose φ dérivable en x_0 et f dérivable en $\varphi(x_0)$ alors $f\circ\varphi$ dérivable en x_0 et

$$(f\circ\varphi)'(x_0)=\varphi'(x_0).f'\circ\varphi(x_0)\,.$$

Remarque: formule très importante car conjuguée avec la formule de combinaison linéaire et produit, on peut tout dériver (facilement)...

Pour justifier la formule, on peut être tenté d'écrire:

$$\frac{f\circ\varphi(x)-f\circ\varphi(x_0)}{x-x_0}=\Big(\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}\Big).\Big(\frac{f(\varphi(x))-f(\varphi(x_0))}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}\Big)$$

pour $x\neq x_0$; mais on peut très bien avoir $\varphi(x)=\varphi(x_0)$. Si ce n'est pas le cas alors la première parenthèse converge vers $\varphi'(x_0)$ et la seconde vers $f'(\varphi(x_0))$ (puisque $\varphi(x)\to\varphi(x_0)$ par continuité).

Toutefois, pour éviter cet écueil, on peut utiliser la caractérisation (existence du D.L. à l'ordre 1). Comme f dérivable en $\varphi(x_0)$, on a

$$f(y)=f(\varphi(x_0))+f'(\varphi(x_0))(y-\varphi(x_0))+(y-\varphi(x_0))\theta(y)$$

où $\theta(y)\to 0$ quand $y\to\varphi(x_0)$.

Par ailleurs, on a $\varphi(x)=\varphi(x_0)+\varphi'(x_0)(x-x_0)+(x-x_0)\eta(x)$ où $\eta(x)\to 0$ quand $x\to x_0$.

En combinant ces deux relations (avec $y=\varphi(x)$), on obtient

$$f(\varphi(x))=f(\varphi(x_0))+f'(\varphi(x_0))(\varphi(x)-\varphi(x_0))+(\varphi(x)-\varphi(x_0))\theta(\varphi(x))$$

donc

$$f(\varphi(x))=f(\varphi(x_0))+f'(\varphi(x_0))\big(\varphi'(x_0)(x-x_0)+(x-x_0)\eta(x)\big)+\big(\varphi'(x_0)(x-x_0)+(x-x_0)\eta(x)\big)\theta(\varphi(x))$$

qui est de la forme

$$f(\varphi(x_0))+\varphi'(x_0).f'(\varphi(x_0))(x-x_0)+(x-x_0)\tau(x)$$

où $\tau(x)=f'(\varphi(x_0))\eta(x)+\big(\varphi'(x_0)+\eta(x)\big)\theta(\varphi(x))\longrightarrow 0$ quand $x\to x_0$.

- On ne revient pas sur leur définition donc on admet que la dérivée d'exponentielle est elle-même et la dérivée de $\ln:\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}$ est $x\in\mathbb{R}^{+*}\mapsto\frac{1}{x}\cdot$ Ceci nous fournit deux limites usuelles intéressantes (alors qu'on a au départ une forme indéterminée) :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{e^x-1}{x}=1\qquad\text{et}\qquad\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

La première traduit simplement la dérivation en 0 de la fonction exp. La seconde traduit simplement la dérivation en 0 de $x\mapsto\ln(1+x)$ (qui s'annule en 0) et dont la dérivée est $x\mapsto\frac{1}{1+x}$ d'après le résultat précédent sur la composition.

Avec les règles précédentes, on peut en déduire tout le reste.

Par exemple:

- Soit u dérivable en x_0. Alors, en vertu de la formule de dérivation des fonctions composées, la fonction $e^u = \exp(u) = \exp \circ u$ est dérivable en x_0 avec dérivée $u'(x_0).\exp\big(u(x_0)\big)$.
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto x^\alpha = \exp\big(\alpha \ln(x)\big)$.
  Cette fonction est dérivable et la dérivée en $x \in \mathbb{R}^{+*}$ vaut, avec la formule précédente,
  $$\frac{\alpha}{x}\exp\big(\alpha\ln(x)\big) = \frac{\alpha}{x}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}\,.$$
  En particulier, on retrouve le cas de la racine carrée en prenant $\alpha = \frac{1}{2}\cdot$ Avec $\alpha = -1$, on a le cas de $x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{1}{x}\cdot$
- Soit $\alpha \in]0,+\infty[$, on considère la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \alpha^x = \exp\big(x\ln(\alpha)\big)$
  (il ne faut pas confondre cette fonction et la précédente bien sûr !)
  Cette fonction est dérivable et la dérivée en $x \in \mathbb{R}$ vaut, avec la formule précédente, $\ln(\alpha)\exp\big(x\ln(\alpha)\big) = \ln(\alpha)\,\alpha^x$.
- Soit u dérivable en x_0, à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, alors $\ln(|u|)$ est dérivable en x_0 et en ce point la dérivée est
  $$\Big(\ln(|u|)\Big)' = \frac{u'}{u}\cdot$$
  En effet, comme $u(x_0) \neq 0$, u est de signe constant sur un voisinage de x_0 (par continuité), disons négative pour fixer les idées: ainsi sur ce voisinage $\ln(|u|) = \ln(-u)$ et par la formule de composition, la dérivée est
  $$(-u')\cdot\frac{1}{(-u)} = \frac{u'}{u} \quad \text{au point } x_0.$$
- Soient u, v dérivables en x_0 avec v non nulle au voisinage de x_0.

  On utilise la formule pour le produit: $\big(u\cdot\frac{1}{v}\big)' = u'\cdot\frac{1}{v} + u\cdot\big(\frac{1}{v}\big)'$.

  Et d'après de dérivée pour la composition, on a $\big(\frac{1}{v}\big)' = v'\cdot\frac{(-1)}{v^2} = \frac{-v'}{v^2}\cdot$

  Puis on regroupe et on obtient
  $$\Big(\frac{u}{v}\Big)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\,.$$

Applications:

- dérivée d'une homographie: $\Big(\dfrac{ax+b}{cx+d}\Big)' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}\cdot$
- dérivée de la fonction tan: $\tan' = \dfrac{1}{\cos^2} = 1+\tan^2$.
  En effet
  $$\tan' = \Big(\frac{\sin}{\cos}\Big)' = \frac{\sin'\cos - \cos'\sin}{\cos^2} = \frac{\cos^2+\sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}\cdot$$

- Les autres formules se déduisent de ce qui précède. Exercice: écrire les détails.
- A contrario, le cas d'une fonction réciproque (f^{-1}) est plus délicat. On rappelle que l'on parle de $f^{-1} : J \to I$ seulement lorsque $f : I \to J$ est bijective. Une étude spécifique des fonctions réciproques sera faite plus tard. Toutefois, quitte à admettre la dérivabilité, on trouve la formule facilement: $f \circ f^{-1}(y) = y$ pour tout $y \in J$ donc, en vertu de la formule de dérivation des fonctions composées, on obtient en $y_0 \in J$
$$(f^{-1})'(y_0).f'\big(f^{-1}(y_0)\big) = 1$$
et on voit d'ailleurs tout de suite la condition nécessaire: $f'\big(f^{-1}(y_0)\big) \neq 0$ apparaître. On a alors $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'\big(f^{-1}(y_0)\big)}$.
Exercice: retrouver le cas de la fonction racine carrée à partir de cette formule.

Connaître le formulaire des dérivées !!

3.2. **Conséquences.**

Définition 3.5 (Classe $\mathscr{C}^1$)**.** On dit que $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ en $x_0 \in \mathscr{D}$ si f est dérivable sur un voisinage I de x_0 (dans $\mathscr{D}$) et la fonction dérivée $f' : I \to \mathbb{R}$ est continue en x_0.

De tout ce qui précède, on déduit immédiatement

Théorème 3.6 (**Principe de régularité automatique).** *Les fonctions obtenues à partir d'UNE formule impliquant des fonctions usuelles est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout intervalle ouvert inclus dans le domaine de définition.*

La dérivée est très utile pour déterminer un extremum local d'une fonction et ainsi comprendre les variations de cette fonction. Nous allons détailler cela.
Rappelons

Définition 3.7. Soit $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ une application.

- On a un **maximum (global)** en x_0, si $\forall x \in \mathscr{D},\ f(x) \leqslant f(x_0)$.
- On a un **minimum (global)** en x_0, si $\forall x \in \mathscr{D},\ f(x) \geqslant f(x_0)$.
- On a un **maximum local** en x_0, si $f(x) \leqslant f(x_0)$ sur un voisinage de x_0 dans $\mathscr{D}$: autrement dit, il existe $\delta > 0$ tel que
$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap \mathscr{D}, \qquad f(x) \leqslant f(x_0).$$
- On a un **minimum local** en x_0, si $f(x) \geqslant f(x_0)$ sur un voisinage de x_0 dans $\mathscr{D}$: autrement dit, il existe $\delta > 0$ tel que
$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap \mathscr{D}, \qquad f(x) \geqslant f(x_0).$$

Si la fonction est régulière, on a une condition nécessaire qui permet de détecter les extrema potentiels:

Théorème 3.8. *Soient $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ une application et $x_0 \in \mathscr{D}$, un point intérieur à $\mathscr{D}$.*
Si *f admet un extremum (maximum ou minimum) local en x_0, et f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.*

Remarque 1: si $\mathscr{D}$ est un intervalle ouvert alors tout élément de $\mathscr{D}$ est automatiquement intérieur à $\mathscr{D}$.

Remarque 2: comme déjà mentionné plus haut, l'hypothèse x_0 intérieur à $\mathscr{D}$ signifie qu'il existe un intervalle ouvert contenant x_0 et contenu dans $\mathscr{D}$. Lorsque $\mathscr{D}$ est un intervalle, cela signifie simplement que x_0 n'est pas un des bords.

Remarque 3: il s'agit bien d'une condition nécessaire. Elle n'est pas suffisante en général.
Par exemple $f(x) = x^3$ pour $x \in \mathbb{R}$ satisfait $f'(0) = 0$ mais il n'y a pas d'extremum local en 0.

Preuve. Pour fixer les idées, nous allons supposer que f admet un maximum local en x_0.

Pour $h > 0$ assez petit, on a $f(x_0 + h) \leqslant f(x_0)$ donc $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leqslant 0$.

On en déduit que

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leqslant 0.$$

Pour $h < 0$ assez petit, on a $f(x_0 + h) \leqslant f(x_0)$ donc $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geqslant 0$ d'où

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geqslant 0.$$

□

3.3. **Extrema, accroissements finis et conséquences.**

Méthode pour la recherche des extrema (globaux) d'une fonction <u>dérivable</u> sur un <u>intervalle</u>.

On commence par chercher les extrema locaux: pour cela, on identifie ce que l'on appelle les *points critiques*: là où la dérivée s'annule. Le théorème précédent nous indique que c'est parmi ceux-là que se trouvent les extrema locaux. En général, il n'y a que quelques points ainsi identifiés. On évalue la fonction en ces points.

On regarde la valeur de la fonction en les points au bord de l'intervalle (s'ils sont <u>dans</u> l'intervalle bien sûr), sinon on regarde la limite (on met alors en jeu les bornes sup ou bornes inf éventuelles).

En comparant les différentes valeurs obtenues, on identifie maximum/minimum s'il y en a..., éventuellement borne sup ou borne inf.

Cette méthode permet de s'affranchir de l'étude globale des variations de la fonction. Bien sûr, si on sait dresser le tableau de variation (cf ci-dessous) de la fonction, on arrive aussi à conclure. En fait, ces deux approches sont juste des variantes l'une de l'autre.

Nous allons justement aller un petit peu plus loin dans cette direction de l'étude des variations. Dans un premier temps, nous avons le très utile

Théorème 3.9 (**Théorème de Rolle**). *Soient $a < b \in \mathbb{R}$.*
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, qui est aussi dérivable sur $]a,b[$.
On suppose que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

En particulier

Corollaire 3.10. *Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.*
On suppose que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Preuve Th. Rolle. Si f est constante, le résultat est évident. Dans la suite, on écarte donc ce cas.

D'après le dernier théorème du chapitre précédent Th. 2.13, f admet un minimum global et un maximum global.

Un de ces extrema globaux n'est pas $f(a)$ (sinon f serait constante): autrement dit on a un extremum global en un point $c \in]a,b[$ (puisque $f(c) \neq f(a) = f(b)$), et c'est donc aussi un extremum local. D'après Th.3.8, on a $f'(c) = 0$. □

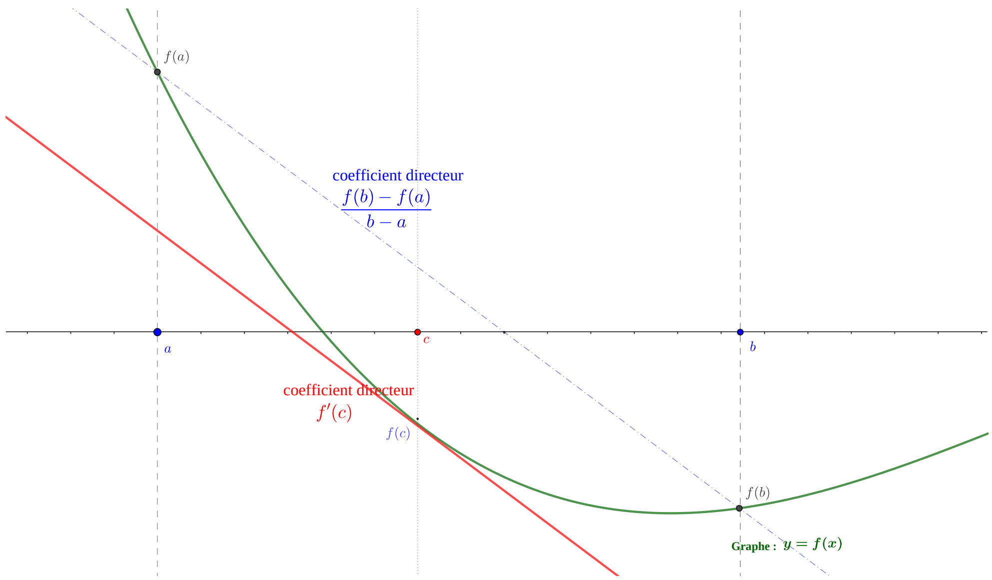
Une conséquence importante du théorème de Rolle (en fait c'est équivalent) est

Théorème 3.11 (**Egalité des accroissements finis**). *Soient $a < b \in \mathbb{R}$.*
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, qui est aussi dérivable sur $]a,b[$.
Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

En particulier si f dérivable sur $[a,b]$, on a la conclusion précédente.

Illustration géométrique:



Preuve. On applique le théorème de Rolle à la fonction

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

qui a la même régularité de continuité et dérivabilité que f et vérifie

$$F(a) = F(b) = f(a).$$

On a donc $F'(c) = 0$ pour un $c \in]a,b[$, soit $f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$. □

En corollaire immédiat, nous avons

Corollaire 3.12 (Inégalité des accroissements finis). *Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}^+$.*
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[a,b]$ telle que $|f'(t)| \leqslant M$ pour tout $t \in [a,b]$.
Alors

$$|f(b) - f(a)| \leqslant M(b - a).$$

En particulier, si f est de classe $\mathscr{C}^1$, on a

$$|f(b)-f(a)| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)|.(b-a)$$

On peut aussi déduire du Th.3.11 les propriétés importantes sur le sens de variation. Une version précise est la suivante

Théorème 3.13. *Soient $a<b\in\mathbb{R}$.*

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue, qui est aussi dérivable sur $]a,b[$.

Alors

- *On suppose que pour tout $x\in]a,b[$, $f'(x)\geqslant 0$, alors f est croissante sur $[a,b]$.*
- *On suppose que pour tout $x\in]a,b[$, $f'(x)\leqslant 0$, alors f est décroissante sur $[a,b]$.*
- *On suppose que pour tout $x\in]a,b[$, $f'(x)=0$, alors f est constante.*

On a aussi la version "stricte":

- *On suppose que pour tout $x\in]a,b[$, $f'(x)>0$, alors f est strictement croissante sur $[a,b]$.*
- *On suppose que pour tout $x\in]a,b[$, $f'(x)<0$, alors f est strictement décroissante sur $[a,b]$.*

Preuve. Si on sait qu'en tout $x\in]a,b[$, on a $f'(x)\geqslant 0$ alors pour tous $\alpha<\beta\in[a,b]$, on a

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(c)$$

où $c\in]\alpha,\beta[\subset]a,b[$, d'après Th.3.11. Ainsi, par hypothèse (et puisque $\beta-\alpha>0$) on obtient $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\geqslant 0$ donc $f(\beta)\geqslant f(\alpha)$. On en déduit que f est croissante sur $[a,b]$.

Exercice: démontrer les autres points sur le même modèle de preuve. □

En pratique c'est la version suivante que l'on utilise le plus souvent:

Théorème 3.14. *Soit $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I.*

- *f est croissante si et seulement si pour tout x intérieur à I, $f'(x)\geqslant 0$ si et seulement si pour tout $x\in I$, $f'(x)\geqslant 0$.*
- *f est décroissante si et seulement si pour tout x intérieur à I, $f'(x)\leqslant 0$ si et seulement si pour tout $x\in I$, $f'(x)\leqslant 0$.*
- *f est constante si et seulement si pour tout x intérieur à I, $f'(x)=0$ si et seulement si pour tout $x\in I$, $f'(x)=0$.*

On rappelle qu'un point est intérieur à un intervalle d'extrémités a,b si il appartient à $]a,b[$.

Preuve. Il suffit de faire la preuve du premier point, tous les autres s'en déduisent facilement.

Supposons que f soit croissante alors, en tout $x\in I$, on a pour tous les $h\in\mathbb{R}^*$ tels que $x+h\in I$, on a $f(x+h)-f(x)\geqslant 0$ si $h>0$ et $f(x+h)-f(x)\leqslant 0$ si $h<0$ (comme on travaille sur un intervalle I non trivial, on est sûr qu'à gauche de x ou à droite de x, on peut effectivement trouver de tels $x+h$, et même les deux dès que x est intérieur). Donc dans tous les cas, on a

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geqslant 0$$

donc

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geqslant 0\,.$$

Si on sait qu'en tout x intérieur à I, on a $f'(x) \geqslant 0$ alors on a la résultat directement comme conséquence du théorème 3.13.

Le second point s'en déduit en appliquant le premier point $-f$.

Le dernier point est une conséquence des deux premiers. □

Parfois, on est intéressé par la **stricte** monotonie:

Théorème 3.15. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I.*

- *Si pour tout x intérieur à I, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.*
  En particulier,
  $\forall x \in I,\ f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ *est strictement croissante sur I.*
- *Si pour tout x intérieur à I, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.*
  En particulier,
  $\forall x \in I,\ f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ *est strictement décroissante sur I.*

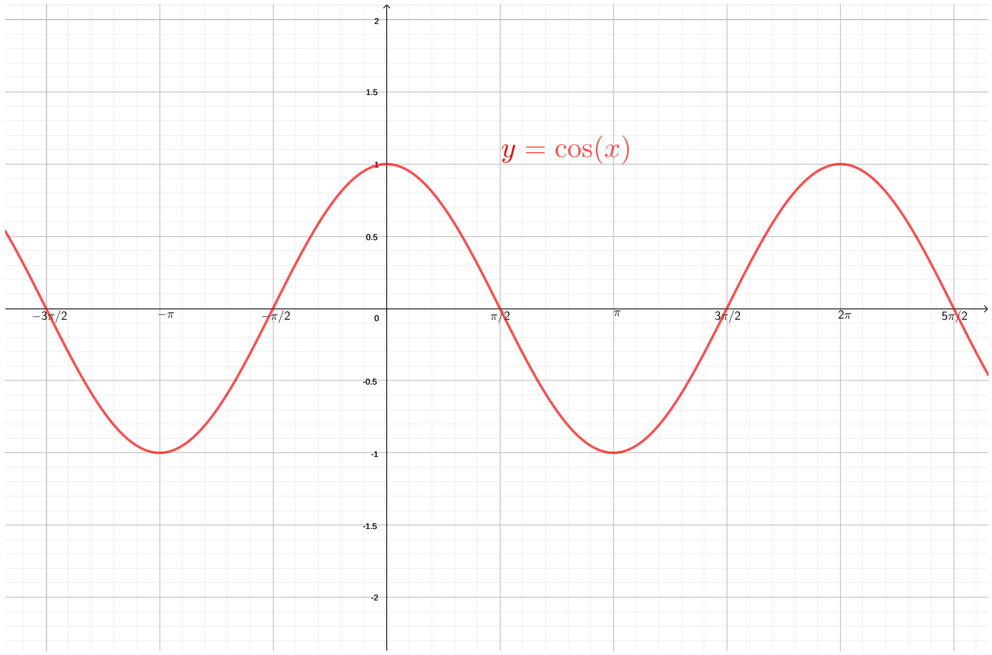
Pour la preuve, adapter la preuve de 3.14 ou 3.13.

Application à l'étude des fonctions

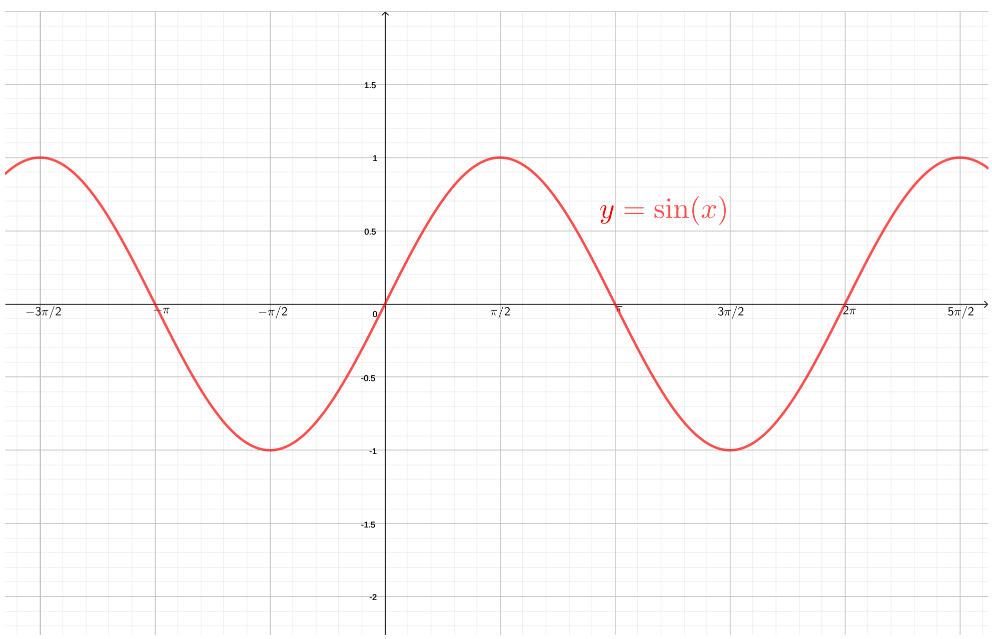
Etant donnée une fonction $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ (mais $\mathscr{D}$ pas toujours donné)

(1) On commence par déterminer (ou confirmer si $\mathscr{D}$ donné) l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$, puis l'ensemble sur lequel f est continue (si f est donnée par UNE formule explicite alors c'est $\mathscr{D}_f$). On détermine aussi l'ensemble de dérivabilité.
(2) On calcule la dérivée de f (là où c'est légal !). Le signe de f' détermine la monotonie sur un intervalle (cf. Th.3.14).
(3) On commence à dresser la tableau de variation en faisant apparaître en première ligne l'ensemble de définition, les valeurs limites de $\mathscr{D}$ éventuellement interdites, les valeurs critiques (là où la dérivée s'annule, là où elle change de signe): une seconde ligne pour préciser le signe de la dérivée, une troisième pour le sens de variation.
(4) On calcule les valeurs ou les limites (si elles existent) au bord des sous-intervalles.
(5) Eventuellement on s'intéresse aux asymptotes, position par rapport à ces asymptotes, etc...

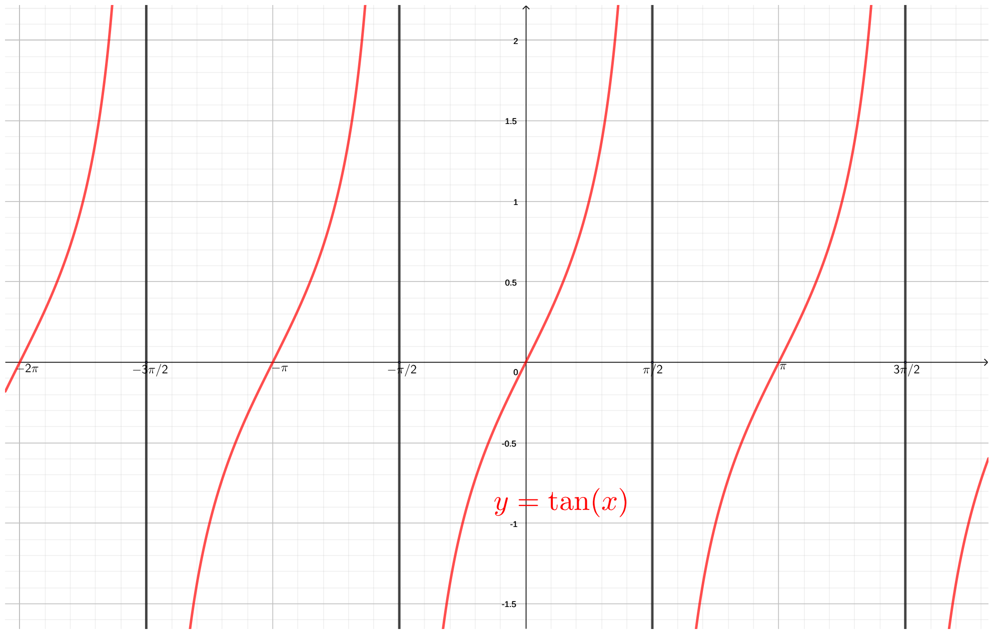
Quelques courbes usuelles:



$y = \cos(x)$
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
$-3\pi/2$
$-\pi$
$-\pi/2$
$\pi/2$
π
$3\pi/2$
2π
$5\pi/2$

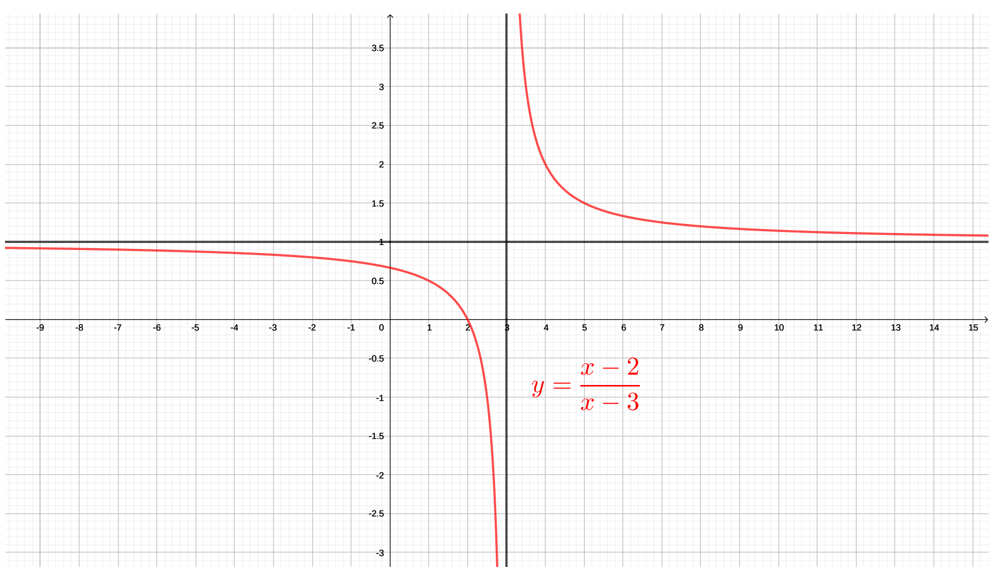


$y = \sin(x)$
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
$-3\pi/2$
$-\pi$
$-\pi/2$
$\pi/2$
π
$3\pi/2$
2π
$5\pi/2$



<u>Un exemple de fonction homographique:</u>

Etudier/représenter graphiquement $x \longmapsto \dfrac{x-2}{x-3}$



Un exemple pathologique (et pourtant si):

Certaines fonctions n'ont pas toujours l'air dérivable (et pourtant):
Pour $\alpha > 0$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on considère

$$\theta_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \\ L & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Pour quels α, L cette fonction est continue, dérivable, $\mathscr{C}^1$?

En fait θ_α est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ d'après les théorèmes généraux pour tout $\alpha > 0$ (et cela marcherait même pour $\alpha \in \mathbb{R}$).

- θ_α est continue en 0 pour tout $\alpha > 0$ lorsqu'on choisit $L = 0$.
- θ_α est dérivable en 0 exactement quand $\alpha > 1$ et alors $\theta'_\alpha(0) = 0$.
- θ_α est de classe $\mathscr{C}^1$ en 0 exactement quand $\alpha > 2$.
- En particulier θ_2 est dérivable mais n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ en 0.

Une variante
Pour $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on considère

$$\psi_N(x) = \begin{cases} x^N \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

En fait ψ_N est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ d'après les théorèmes généraux pour $N \geqslant 1$. On vérifie aussi que ψ_N est continue en 0.

- ψ_N est dérivable en 0 exactement quand $N \geqslant 2$ et alors $\psi'_N(0) = 0$.
- ψ_N est de classe $\mathscr{C}^1$ en 0 exactement quand $N \geqslant 3$.
- En particulier ψ_2 est dérivable mais n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ en 0.

4. Primitives et Intégration

4.1. Primitives.

Définition 4.1.

Soit $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $F : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ est une **primitive** de f si F est dérivable et $F' = f$.

Pour connaître les primitives usuelles, il s'agit donc de reconnaître des dérivées.

Signalons que, sur un intervalle, **si** on connaît une primitive alors on les connaît toutes:

Proposition 4.2.

Si $f : I \to \mathbb{R}$ admet une primitive F (où I est un intervalle), alors toutes les autres primitives sont de la forme $F + c$, où $c \in \mathbb{R}$ (i.e. elles diffèrent de f d'une constante)

Preuve. Soit G une primitive de f, alors $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$. Ainsi $G - F$ a une dérivée nulle sur un intervalle donc elle est constante, disons à $c \in \mathbb{R}$. D'où le résultat: $G = F + c$.
La réciproque est évidente: $F + c$ est une primitive de f. □

Connaître le formulaire des dérivées ET celui des primitives !!

En fait si on connaît bien l'un , on connaît essentiellement l'autre...

Mais pour savoir calculer des primitives de fonctions plus générales, la stratégie est de recourir aux techniques d'intégration. En effet, le théorème fondamental de l'analyse (cf ci-dessous) établit un lien étroit entre Intégrale et Primitive.

4.2. Intégrale.

Le cours qui suit adopte un point de vue (élémentaire) directement inspiré du cours (destiné aux physiciens) d'Etienne Matheron: `http://matheron.perso.math.cnrs.fr/documents.htm`, qui lui-même suit le point de vue adopté dans les petites classes pour introduire l'intégrale. En fait, nous nous contenterons d'un cadre encore plus simple. Le cours d'analyse 2 qui introduira au S2 la notion d'intégrale de Riemann sera bien plus rigoureux et approfondi. En particulier certains points seront ici admis, et l'esprit de ce chapitre est d'obtenir rapidement les propriétés fondamentales de l'intégrale permettant d'établir les techniques simples, mais importantes, de calculs d'intégrales impliquant les fonctions usuelles.

Nous allons concrètement calculer des intégrales de fonctions continues sur un segment, mais pas seulement. Il n'est pas abusif de demander de savoir calculer des intégrales de fonctions ayant un point de discontinuité “raisonnable”: par exemple un fonction créneau qui intervient naturellement en électronique n'est pas exagérément pathologique mais n'est pas continue.
C'est pourquoi nous introduisons maintenant la notion suivante:

Définition 4.3.

On dit qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux si il existe des points $a_1, \ldots, a_s \in [a, b]$ tels que

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{s+1} = b\,,$$

des fonctions continues $f_i : \left[a_i, a_{i+1}\right] \to \mathbb{R}$ telles que

$$f = f_i \qquad \text{sur } \left]a_i, a_{i+1}\right[.$$

De façon équivalente, f admet un nombre fini de points de discontinuité
(éventuellement aucun) de nature particulière:

Plus précisément, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux si f admet

- soit aucun point de discontinuité
- soit $p \geqslant 1$ points de discontinuité, disons en les points $d_1 < \ldots < d_p$ dans $[a, b]$, et en chacun de ces points, f a une limite à gauche et à droite (sauf éventuellement au bord où il n'y a bien sûr que la limite à gauche ou à droite).

En particulier, une fonction continue par morceaux est bornée !

En effet, dans la définition de la page précédente, chaque fonction f_i est bornée ($1 \leqslant i \leqslant s$). Donc f est bornée sur chaque sous-intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ donc sur $[a, b]$.

Nous allons maintenant pouvoir définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment...

4.3. **Définition de l'intégrale d'une fonction positive.**

On va pouvoir définir maintenant l'intégrale d'une fonction positive continue par morceaux sur un **segment**. Elle passe par la notion de sous-graphe

Définition 4.4.

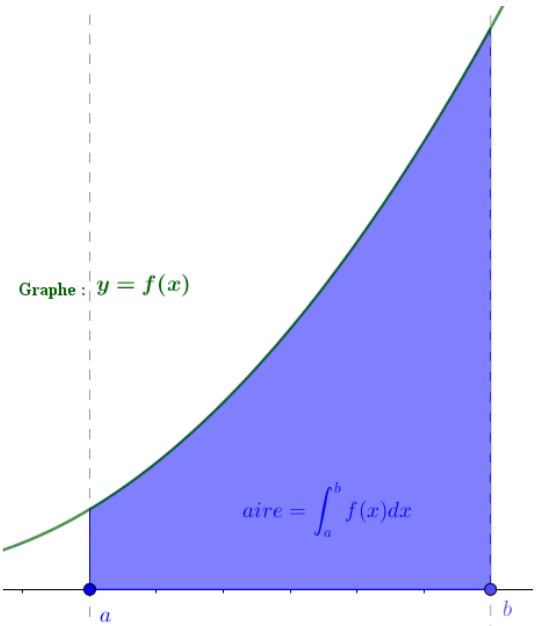
On appelle **sous-graphe** d'une fonction positive définie sur un intervalle I:

$$SG(f, I) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\right\}$$

Ainsi de façon naturelle on définit (pour l'instant $a \leqslant b$ dans ce qui suit)

Définition 4.5 (Intégrale d'une fonction positive)**.**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et positive.



L'intégrale est l'aire du sous-graphe

$SG(f, [a, b])$

(on admet que cela existe et que cela correspond à l'idée intuitive que l'on a de l'aire d'une partie de $\mathbb{R}^2$)

4.4. **Exemples et propriétés.**

Notations: précisons que cette intégrale est notée $\int_a^b f(x)\,dx$
On note parfois aussi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \int_{[a,b]} f\,dx \text{ à éviter pour l'instant}$$

Quelques exemples très simples

- Si $a = b$, $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.
- Une fonction constante: Soit f la fonction constante à K ($K \geqslant 0$ car on considère les fonctions positives pour l'instant) sur $[a, b]$. Clairement, il s'agit d'évaluer l'aire du rectangle de hauteur K et de base de longueur $b - a$. Ainsi

$$\int_a^b K\,dx = K(b-a)\,.$$

- La fonction identité: Soit $f : x \in [a, b] \mapsto x \in \mathbb{R}^+$
  ($a \geqslant 0$ puisqu'on considère les fonctions positives). Il s'agit d'évaluer la différence entre les aires de deux triangles rectangles. Ainsi

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\,.$$

Quelques propriétés

Proposition 4.6.

- *Additivité par rapport au domaine - relation de Chasles: Soient $a < b < c \in \mathbb{R}$ et $f : [a,c] \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux, positive*

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

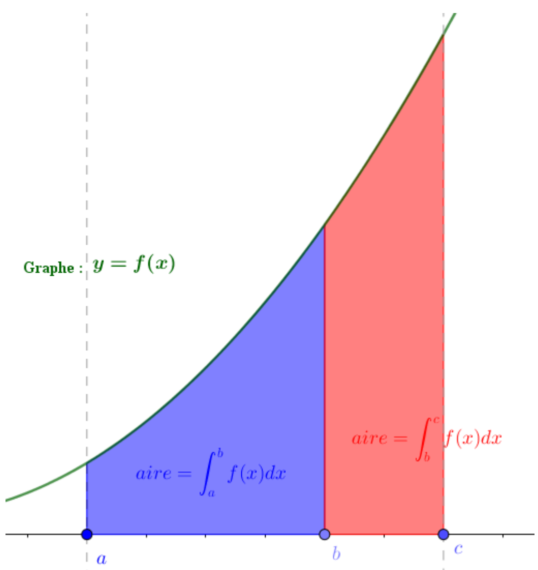
- *Croissance Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ continues par morceaux, positives.*

  On suppose que $f \leqslant g$ sur $[a,b]$. Alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$

- *"Linéarité" Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ continues par morceaux, positives Alors*
  - $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
  - $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx \qquad$ *(où $\lambda \geqslant 0$).*

Preuve: On en admet une bonne partie. Toutefois,

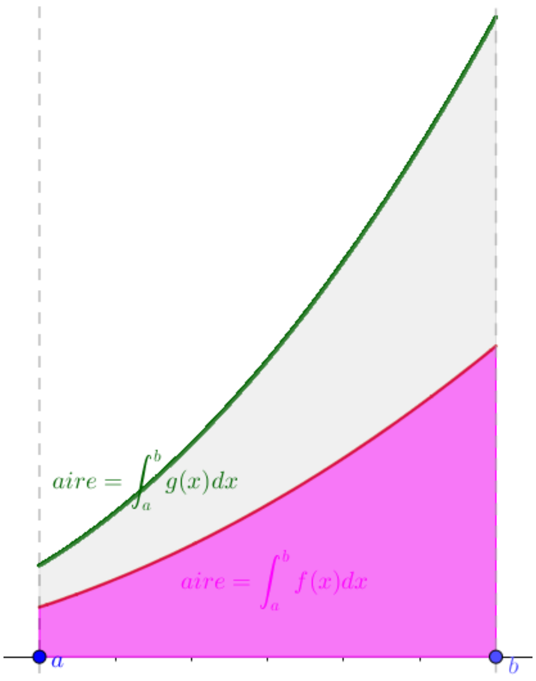
• Chasles:



il s'agit de voir que l'aire de $SG(f,[a,c])$ est la somme des aires de $SG(f,[a,b])$ et $SG(f,[b,c])$.

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

• Croissance:



il s'agit de voir que l'aire de $SG(f,[a,b])$ est inférieure à l'aire de $SG(g,[a,b])$

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

• La linéarité est délicate à ce stade: on l'admet... Toutefois, si l'une des fonctions est constante (disons à $C \geqslant 0$), cela revient à translater le graphe (vers le haut) de C.

Le résultat est donc facile dans ce cas ! (Exercice: écrire les détails...)

4.5. **Intégrale de fonction de signe quelconque.**

Définition 4.7.

Soient $a \leqslant b \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux.

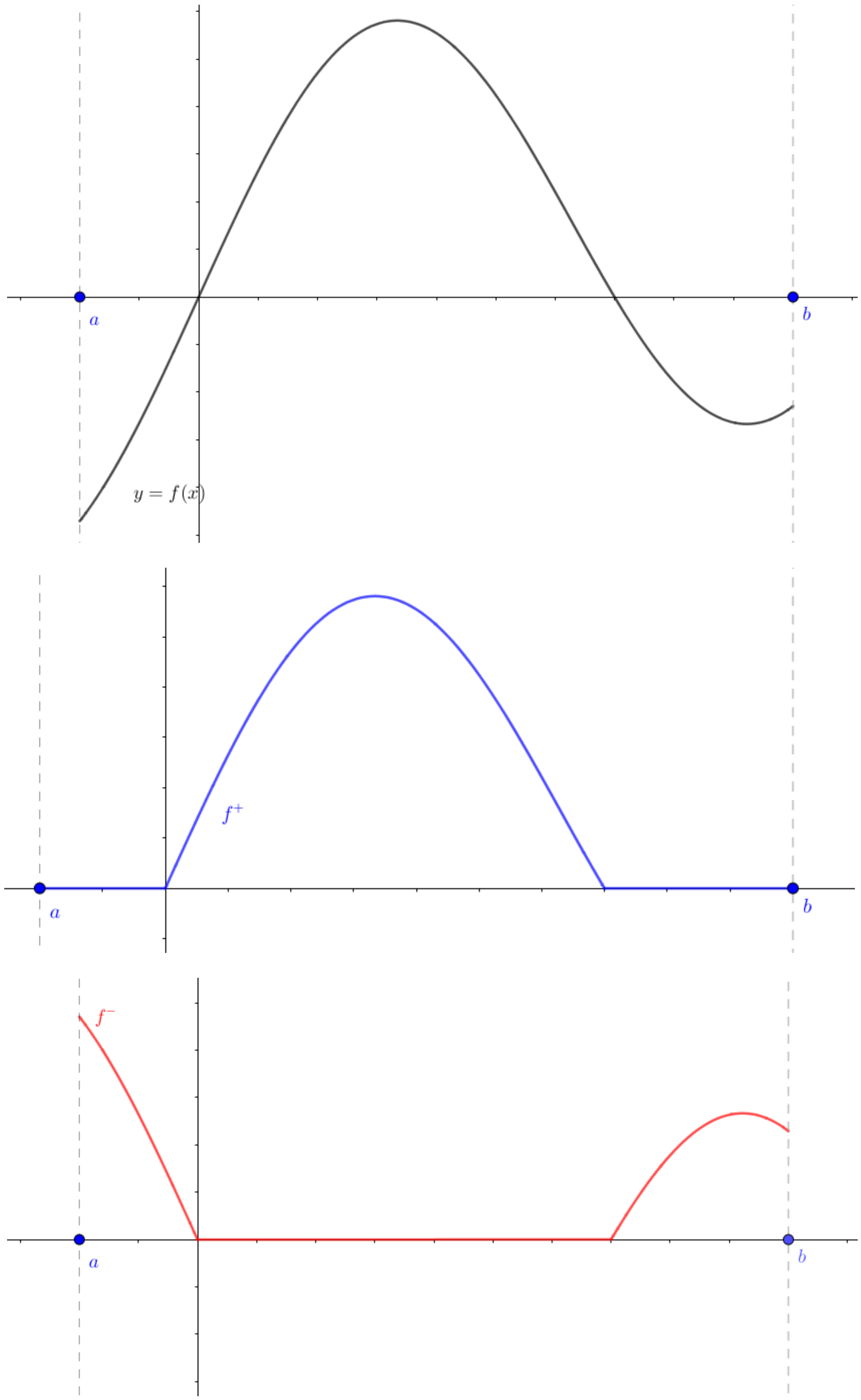
On peut définir la **partie positive** et la **partie négative** d'une fonction:

- $f^+(x) = \max\big(f(x), 0\big)$ est la partie positive de f.
- $f^-(x) = \max\big(-f(x), 0\big)$ est la partie négative de f.

Ce sont des fonctions positives ! et continues par morceaux

De plus

$$f = f^+ - f^- \qquad\qquad |f| = f^+ + f^-$$



a
b
$y = f(x)$
a
b
f^+
f^-
a
b

Soient $a \leqslant b \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Avec les notations précédentes,

$$\int_a^b f^+(x)\,dx \qquad \text{et} \qquad \int_a^b f^-(x)\,dx \quad \text{sont bien définies.}$$

Définition 4.8. Avec les notations précédentes, on définit

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f^+(x)\,dx - \int_a^b f^-(x)\,dx$$

Définition 4.9 (Extension de la définition à des bornes non ordonnées)**.**

Lorsque $\alpha > \beta$, on définit

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = -\int_\beta^\alpha f(x)\,dx$$

On va étendre les propriétés vues dans le cas de fonctions positives.

Théorème 4.10.

- *Relation de Chasles: Soient $a,b,c \in \mathbb{R}$ (pas d'ordre a priori) et $f : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux avec $a,b,c \in I$*

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

- *Croissance Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues par morceaux.*
  On suppose que $f \leqslant g$ sur $[a,b]$ (avec $a \leqslant b$). Alors
  $$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$$
- *Linéarité Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues par morceaux*
  Alors
  - $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
  - $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx \qquad$ *(où $\lambda \in \mathbb{R}$).*

Propriété de majoration

Une autre propriété importante, très utile pour majorer les intégrales: soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux.

Théorème 4.11 (Inégalité triangulaire intégrale).

On suppose $a \leqslant b$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Rq: sans information sur l'ordre de a et b, on peut écrire $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right|$

Preuve. on a pour tout $x \in [a,b]$:

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$$

donc

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^b -|f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$$

□

4.6. **Théorème fondamental de l'analyse.** Le théorème suivant est très (très) important. Ce théorème et ses conséquences nous permettront de calculer concrètement des intégrales.

Théorème 4.12 (Théorème fondamental de l'analyse)**.**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et $a \in I$.
Alors

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est bien définie pour tout $x \in I$ et F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I avec $F' = f$.

Corollaire 4.13 (Conséquences du théorème fondamental de l'analyse)**.**

- *Une fonction continue sur un intervalle admet des primitives. De plus,*

$$\forall a, b \in I, \qquad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

où F est n'importe quelle primitive de f.

- *Pour $F : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, on a*

$$\forall a, b \in I, \qquad F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\,dx$$

Preuves admises.

En pratique, dans le contexte précédent, (F est une primitive quelconque de f)

Notation

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b = \Big[F\Big]_a^b$$

Lorsque f est continue par morceaux, pour calculer une intégrale, on découpe l'intégrale en plusieurs morceaux (avec Chasles) pour se ramener à des intégrales de fonctions continues.

Exemples:

- Soient $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

- Soit $X > 0$
$$\int_1^X \frac{1}{t}\,dt = \Big[\ln(t)\Big]_1^X = \ln(X)$$
- $$\int_0^1 \frac{x}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\Big[\ln\big(x^2+2\big)\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{3}{2}\Big)$$
- $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = \Big[-\ln\big(\cos(x)\big)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\ln(2)$$

4.7. **Boîte à outils.** L'outil suivant est particulièrement utile

Théorème 4.14 (**Intégration par parties).**

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I.
$$\forall a,b \in I, \qquad \int_a^b u'(t)v(t)\,dt = \Big[u.v\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt$$

Preuve Il suffit d'intégrer la relation
$$(u.v)' = u'.v + u.v'$$
et on obtient
$$\Big[u.v\Big]_a^b = \int_a^b (u.v)'(t)\,dt = \int_a^b u'(t)v(t)\,dt + \int_a^b u(t)v'(t)\,dt$$

Exemples d'applications de l'I.P.P.

Un premier exemple important est celui permettant d'intégrer la fonction ln:

Soit $X > 0$
$$\int_1^X \ln(t)\,dt = \int_1^X 1.\ln(t)\,dt = \int_1^X u'(t)v(t)\,dt$$
avec $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln(t)$.
$$\int_1^X \ln(t)\,dt = \Big[t\ln(t)\Big]_1^X - \int_1^X t.\frac{1}{t}\,dt = X\ln(X) - \Big[t\Big]_1^X = X\ln(X) - X + 1.$$
On en déduit qu'une primitive de ln est $x \mapsto x\ln(x) - x$.

Autres exemples:

- $\displaystyle\int_0^2 xe^{2x}\,dx = \Big[\frac{1}{2}xe^{2x}\Big]_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = e^4 - \Big[\frac{1}{4}e^{2x}\Big]_0^2 = \frac{3}{4}e^4 + \frac{1}{4}$
- Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(x)\,dx$.
- Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^2e^{-x}\,dx$.

Nous allons voir maintenant le **second outil** très utile...

Théorème 4.15 (Changement de variable).

Soient $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathscr{C}^1$ *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *continue avec* $\varphi([a,b]) \subset I$.

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f\circ\varphi(t)\,.\,\varphi'(t)\,dt$$

Preuve Soit F la primitive de f qui s'annule en $\varphi(a)$:

$$F(s) = \int_{\varphi(a)}^{s} f(x)\,dx. \quad \text{Ainsi} \quad \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = F\circ\varphi(b)$$

Par ailleurs la fonction $G(s) = \displaystyle\int_a^s f\circ\varphi(t)\,.\,\varphi'(t)\,dt$ est bien définie pour tout $s \in [a,b]$. Pour tout $s \in [a,b]$, on a

$$(F\circ\varphi)'(s) = \big(F'\circ\varphi(s)\big).\varphi'(s) = \big(f\circ\varphi(s)\big).\varphi'(s) = G'(s).$$

Donc $F\circ\varphi = G$ à constante près. Mais $F\circ\varphi(a) = 0 = G(a)$.
Ainsi $F\circ\varphi = G$ sur $[a,b]$, en particulier en b.

Application concrète:

En pratique, on utilise la formule de changement de variable dans les deux sens.

De plus, les changements de variable sont (strictement) monotones et donc $\varphi([a,b]) = \big[\varphi(a), \varphi(b)\big]$ (attention... sans préjuger de l'ordre)

Méthode

Typiquement, on part de $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$.

- On "devine" (expérience des exercices précédents, donné par l' énoncé ,...) le changement de variable à effectuer. C'est à dire quel φ on va choisir pour poser $x = \varphi(t)$.
- Il y a alors **3** étapes mécaniques:
  - (le plus facile normalement) Remplacer x par $\varphi(t)$ dans l'expression de $f(x)$ (l'intégrande).
  - (trop souvent oublié) Remplacer le "dx" par "$\varphi'(t)\,dt$".
  - Gérer les bornes: remplacer $\alpha = \varphi(a)$ et $\beta = \varphi(b)$ par a et b

  (attention à préserver l'ordre des bornes: en particulier si φ est décroissante on se retrouve alors avec a (en bas) supérieur à b (en haut) si on avait $\alpha < \beta$ au départ)
- On termine le calcul, ou au moins on progresse...

Exemples:

- Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

  On considère φ qui nous permettra de changer "1− un carré" en "un carré"...
  On pense à la trigonométrie...

  On pose $x=\sin(t)$. Ainsi

  $$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\,\cos(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,dt$$

  On utilise alors que $\cos^2(t) = \dfrac{\cos(2t)+1}{2}$ puis

  $$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t)+1\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2t)+t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\,dt = \frac{\pi}{4}$$

Remarque: en fait c'était facile à voir géométriquement avec la définition...
En effet, $y=\sqrt{1-x^2}$ avec $x\in[0,1] \iff y^2+x^2=1$ et $y\geqslant 0$ et $x\in[0,1]$. Donc on parle de la partie du cercle unité située au dessus de l'axe des abscisses, à droite de l'axe des ordonnées. Donc on doit évaluer l'aire d'un quart de disque de rayon 1..

Cela vaut clairement $\dfrac{1}{4}\pi$

- Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

  On pose $x=\tan(t)$. Ainsi, comme on a en tête que $\sin\dfrac{\pi}{4} = \cos\dfrac{\pi}{4}$, on obtient $\tan\dfrac{\pi}{4}=1$.

  Ainsi on pose $\varphi(t)=\tan(t)$ pour $t\in[0,\pi/4]$

  $$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2(t)}\left(1+\tan^2(t)\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt$$

  Donc

  $$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

- Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

  On pose $\varphi(t)=\sin(t)$ pour $t\in[0,\pi/3]$ $\left(\text{on se souvient que } \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

  $$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}\cos(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} dt$$

  Donc

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{3}$$

4.8. **Les fractions rationnelles.**

On souhaite par exemple calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2(x+2)}\,dx$.

On commence par trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{1}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{(x+1)} + \frac{c}{(x+2)}$$

(on sait qu'une telle décomposition existe: ce sera vu au S2)

En multipliant tout par $(x+1)^2$ puis en prenant $x=-1$, on trouve $a=1$.

En multipliant tout par $(x+2)$ puis en prenant $x=-2$, on trouve $c=1$.

Enfin en prenant par exemple $x=0$, on trouve $b=-1$. Bref, au final , on a

$$\frac{1}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{(x+2)}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2(x+2)}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x+2}\,dx$$

Mais

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \left[\frac{-1}{x+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

et

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx = \left[\ln(x+1)\right]_0^1 = \ln(2)$$

et

$$\int_0^1 \frac{1}{x+2}\,dx = \left[\ln(x+2)\right]_0^1 = \ln(3) - \ln(2)$$

Au final

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2(x+2)}\,dx = \frac{1}{2} - 2\ln(2) + \ln(3) = \frac{1}{2} + \ln(3/4)$$

• Un autre exemple classique est le suivant: soient $n \in \mathbb{N}$ un entier et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$I_n = \int_\alpha^\beta \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$$

On a $I_0 = \beta - \alpha$.

On peut calculer les autres par récurrence, avec la relation:

$$(\mathscr{R}_n) \qquad 2nI_{n+1} = (2n-1)I_n + \left[\frac{x}{(x^2+1)^n}\right]_\alpha^\beta$$

En effet:

$$I_n = \int_\alpha^\beta \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx = \int_\alpha^\beta \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx = \int_\alpha^\beta \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx + I_{n+1}$$

Or par I.P.P.

$$\int_\alpha^\beta \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx = \frac{-1}{2n}\int_\alpha^\beta \frac{(-2nx)}{(x^2+1)^{n+1}}\cdot x\,dx = \frac{-1}{2n}\left(\left[\frac{1}{(x^2+1)^n}\cdot x\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx\right)$$

En réarrangeant, on a

$$2n\int_\alpha^\beta \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx = -\left[\frac{x}{(x^2+1)^n}\right]_\alpha^\beta + I_n$$

Or on avait

$$I_n = \int_\alpha^\beta \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx + I_{n+1}.$$

On obtient finalement

$$2nI_n = -\left[\frac{x}{(x^2+1)^n}\right]_\alpha^\beta + I_n + 2nI_{n+1}.$$

Ou encore

$$(2n-1)I_n + \left[\frac{x}{(x^2+1)^n}\right]_\alpha^\beta = 2nI_{n+1}$$

qui était la relation annoncée $(\mathscr{R}_n)$...

Il y a une autre façon d'aborder le calcul de I_n: par changement de variable !

On pose $\varphi(t) = \tan(t)$ pour $t \in [\theta, \theta'] \subset]-\pi/2, \pi/2[$

On a alors

$$I_n = \int_\theta^{\theta'} \frac{1}{(\tan^2(t)+1)^n}\,(1+\tan^2(t))dt = \int_\theta^{\theta'} \frac{1}{(1+\tan^2(t))^{n-1}}\,dt$$

mais on se souvient que

$$1+\tan^2(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$$

donc

$$I_n = \int_\theta^{\theta'} \big(\cos(t)\big)^{2(n-1)}\,dt$$

On calcule alors cette intégrale par linéarisation par exemple...

Ainsi si on veut calculer $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx$ Exo: la calculer par récurrence

Avec le changement de variable précédent, nous sommes amenés à calculer (puisque $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$)

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \big(\cos(t)\big)^4\,dt$$

Or

$$\big(\cos(t)\big)^4 = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{4it}+4e^{2it}+6+4e^{-2it}+e^{-4it}\right)$$

soit

$$\big(\cos(t)\big)^4 = \frac{1}{8}\cos(4t) + \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{3}{8}$$

Finalement

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(4t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(2t)\,dt + \frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{3}$$

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{8} = \frac{7\sqrt{3}}{64} + \frac{\pi}{8}\,\cdot$$

• Signalons **un autre changement de variable classique**.

Lorsqu'on a une fraction rationnelle en les fonctions trigonométriques, on utilise souvent le changement de variable

$$t = \tan\frac{x}{2}$$

à l'aide des formules

- $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$
- $\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$
- $\tan(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$

Par exemple, si on veut calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2-\cos(x)}\,dx$$

On pose $x = \varphi(t)$ de façon à ce que $t = \varphi^{-1}(x) = \tan\dfrac{x}{2}$.

Comme $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, soit

$$\frac{1}{2-\cos(x)} = \frac{1}{2-\frac{1-t^2}{1+t^2}} == \frac{1+t^2}{1+3t^2}$$

Pour les bornes $\quad 0 = \tan\dfrac{0}{2} \qquad$ et $\qquad 1 = \tan\dfrac{\pi/2}{2}$

La partie délicate est la dernière mais on remplace dx par $\varphi'(t)dt$, or on a

$$t = \tan\frac{\varphi(t)}{2} \implies 1 = \frac{\varphi'(t)}{2}\left(1+\tan^2\frac{\varphi(t)}{2}\right) = \frac{\varphi'(t)}{2}\left(1+t^2\right)$$

ou encore $\quad \varphi'(t) = \dfrac{2}{1+t^2}$ d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2-\cos(x)}\,dx = \int_0^1 \frac{1+t^2}{1+3t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{2}{1+3t^2}\,dt$$

Reste à calculer

$$\int_0^1 \frac{2}{1+3t^2}\,dt$$

On pose $u = \sqrt{3}t \Leftrightarrow t = \dfrac{u}{\sqrt{3}}$

$$\int_0^1 \frac{2}{1+3t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2}{1+u^2}\,du$$

puis (on a déjà croisé cette situation), on fait le changement $u = \tan(\theta)$ qui donne

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2}{1+u^2}\,du = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2}{1+\tan^2(\theta)}\,(1+\tan^2(\theta))d\theta = \frac{2\pi}{3}$$

Ainsi

$$\int_0^1 \frac{2}{1+3t^2}\,dt = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

4.9. **Intégrales de Wallis.** (complément: n'est pas censé être connu)

Il s'agit d'une suite d'intégrales très classiques, que l'on croise régulièrement.
Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin(t)\right)^n\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt$$

Par exemple: $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,dt = \Big[-\cos(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

Autre remarque: en faisant le changement de variable $\theta = \dfrac{\pi}{2} - t$ ou encore $t = \dfrac{\pi}{2} - \theta$, on a

$$W_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)(-1)\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(\theta)\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt.$$

La suite $\left(W_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante vers 0: soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad 0 \leqslant \sin^{n+1}(t) \leqslant \sin^n(t) \qquad \text{car } 0 \leqslant \sin(t) \leqslant 1.$$

Ainsi

$$0 \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$$

et on va voir ci dessous que

$$(\mathscr{P}_n) \qquad W_n \leqslant \frac{\pi}{2\sqrt{n+1}}$$

il est clair (puisque $W_n \geqslant 0$) que cette majoration implique que $W_n \longrightarrow 0$.

En fait, on sait donner une expression de $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt$ pour tout n.

Cela passe par une relation de récurrence entre les termes d'indice pairs d'une part et impairs d'autre part:

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t).\sin^{n+1}(t)dt = \Big[(-\cos(t)).\sin^{n+1}(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t).(n+1)\cos(t).\sin^n(t)dt$$

donc

$$W_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(t))\sin^n(t)dt = (n+1)\big(W_n - W_{n+2}\big)$$

Finalement

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

donc pour tout entier $p \geqslant 1$

$$W_{2p} = \frac{2p-1}{2p} W_{2p-2} = \left(\frac{2p-1}{2p}\right)\left(\frac{2p-3}{2p-2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right) W_0 = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{(2p)(2p-2)\cdots 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

donc

$$W_{2p} = \frac{(2p)(2p-1)(2p-2)\cdots 2 \times 1}{[(2p)(2p-2)\cdots 2]^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{\left[2^p.(p\cdots 1)\right]^2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot$$

Finalement

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{4^p.(p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\binom{2p}{p}}{4^p} \cdot \frac{\pi}{2}$$

De même, on trouve

$$W_{2p+1} = \frac{4^p.(p!)^2}{(2p+1)!}$$

Revenons sur la convergence annoncée ($\mathscr{P}_n$)**.** Il y a plusieurs façons de s'y prendre.

Par exemple, de la façon suivante, en utilisant la relation de récurrence en rouge: on montre l'inégalité ($\mathscr{P}_n$) par récurrence.

Pour $n = 0$, $\mathscr{P}_0$ est vrai. Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\mathscr{P}_k$ est vraie pour tout $k \leqslant n$.

On considère W_{n+1}.

Si $n = 0$, on voit que $W_1 = 1 \leqslant \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} \cdot$

Si $n \geqslant 1$, alors on a

$$W_{n+1} = \frac{n}{n+1} W_{n-1} \leqslant \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{n}} = \frac{\pi\sqrt{n}}{2(n+1)}$$

puisque $\mathscr{P}_{n-1}$ est vraie.

Or on voit que $\dfrac{\sqrt{n}}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$ car $n(n+2) = n^2 + 2n \leqslant n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

Ainsi $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

On conclut donc que, par récurrence, $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Une variante de l'argument précédent, un peu plus astucieuse, donne plus rapidement une majoration meilleure (sauf pour les tout premiers termes) et donc permettant de conclure aussi sur la convergence (et permettrait d'avoir facilement un équivalent de W_n): toujours grâce à la relation de récurrence en rouge, on a, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$(n+2)W_{n+1}W_{n+2} = (n+1)W_{n+1}W_n = (n+1)W_nW_{n+1} \quad \text{donc cette suite est constante,}$$

ou encore

$$(n+1)W_{n+1}W_n = W_1W_0 = \frac{\pi}{2} \cdot$$

Ainsi

$$(n+1)W_{n+1}^2 \leqslant (n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$$

ce qui donne pour $n \geqslant 1$:

$$W_n \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2n}}\,.$$

Exercice: justifier que $W_n \geqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{2(n+1)}}\,.$

Encore d'autres façons de montrer que $W_n \to 0$:

- Les matheux verront plus tard le Théorème de convergence dominée qui permet de montrer très très rapidement la convergence vers 0 de W_n. On ne va pas le faire ici donc (cf cours L3) mais on peut utiliser une méthode "à la main" de la façon suivante:

  Soit $\varepsilon > 0$. On va supposer dans la suite que $\varepsilon \in]0, \pi/2[$, ce qui est suffisant.

  Soit $n \in \mathbb{N}$. On a par Chasles

  $$0 \leqslant W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \big(\sin(t)\big)^n \,dt + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(t)\big)^n \,dt$$

  D'une part, comme $\big(\sin(t)\big)^n \leqslant 1$ pour tout t, on peut majorer la seconde intégrale par

  $$\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} 1 \,dt = \varepsilon\,.$$

  D'autre part, en posant $\lambda = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$, on a, pour tout $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2} - \varepsilon$,

  $$\big(\sin(t)\big)^n \leqslant \lambda^n$$

  car sin est croissante sur $[0, \pi/2]$. Ainsi

  $$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \big(\sin(t)\big)^n \,dt \leqslant \frac{\pi}{2} \cdot \lambda^n$$

  Mais $0 \leqslant \lambda < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2} \cdot \lambda^n = 0$.

  On peut donc trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

  $$\forall n \geqslant n_0\,, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \big(\sin(t)\big)^n \,dt \leqslant \varepsilon$$

  et on obtient alors

  $$\forall n \geqslant n_0\,, \qquad 0 \leqslant W_n \leqslant 2\varepsilon$$

  ce qui établit bien

  $$\lim_{n\to+\infty} W_n = 0\,.$$

- Enfin, plus tordu… (ou plus original) ?

  On va exploiter le fait que l'on a déjà établi $\big(W_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive. Donc on sait qu'il y a convergence (vers une limite $\ell \geqslant 0$).

  Par ailleurs, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$.

  $$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) W_n$$

Ainsi

$$W_{n+4} = \left(1 - \frac{1}{n+4}\right) W_{n+2} = \left(1 - \frac{1}{n+4}\right)\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) W_n \leq \left(1 - \frac{1}{n+4}\right)^2 W_n.$$

On voit alors facilement par récurrence (sur k) que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$W_{n+2k} \leq \left(1 - \frac{1}{n+2k}\right)^k W_n.$$

En particulier, avec $k = n$, on a

$$W_{3n} \leq \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^n W_n.$$

On peut passer à la limite sur n et on obtient

$$\ell \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}} \ell$$

ce qui impose $\ell = 0$ puisque $\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}} < 1$.

On a donc

$$\lim_{n \to +\infty} W_n = \ell = 0\,.$$