Statistique et Informatique (3I005)

2016-2017

Nicolas Baskiotis

Université Pierre et Marie Curie (UPMC)
Laboratoire d'Informatique de Paris 6 (LIP6)
`http://webia.lip6.fr/~baskiotisn`

Cours 2 :

Dénombrements, probabilités conditionnelles

Plan

1. Quelques rappels du cours 1, Dénombrements
2. Indépendance
3. Probabilités conditionnelles

Le cours 1 en un slide

Pour calculer des probabilités, il faut définir :

- les *événements élémentaires* (i.e. les résultats de l'expérience aléatoire)
- l'*univers* Ω : l'ensemble des événements élémentaires
- une probabilité pour chaque événement élémentaire : sa fréquence d'apparition.

Propriétés

- Un *événement* E est un sous-ensemble de Ω (un ou plusieurs événements élémentaires) : $E \subset \Omega$
- Deux événements E_1 et E_2 sont *incompatibles* ssi aucun de leurs événements élémentaires n'est en commun : $E_1 \bigcap E_2 = \emptyset$
- Le complémentaire de E est l'ensemble des événements élémentaires qui ne sont pas dans E : $\overline{E} = \Omega \setminus E$
- Une mesure de probabilité sur Ω est une fonction $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ tq :
  1. $P(\Omega) = 1$: lors de l'expérience, un résultat est forcément observé
  2. pour tout événement $E \subset \Omega$, $1 \geq P(E) \geq 0$ (pas de probabilité négative !)
  3. Pour toute suite $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'événements *incompatibles* : $P(\bigcup_i E_i) = \sum_i P(E_i)$.
- En particulier, P est entièrement définie par $P(\{\omega\}), \forall\omega \in \Omega$;
- Evénements élémentaires équiprobables : $P(\{\omega\}) = \frac{1}{card(\Omega)} \forall\omega \in \Omega$,

Dénombrements (ou comment compter!)

Soit un ensemble $\Omega = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $card(\Omega) = |\Omega| = n$

Un tirage peut être

- ordonné : l'ordre des éléments compte (notation k-uplet (a, b, c, d))
- non ordonné : l'ordre ne compte pas (notation ensemble $\{a, b, c\}$)
- avec ou sans remise : un élément peut être tiré plusieurs fois ou non

Dénombrement de k-uplets

- nombre de k-uplets d'éléments de Ω: n^k (tirage avec remise, ordonné)
- nombre de k-uplets d'éléments distincts (tirage sans remise, ordonné, nombre d'arrangements de k parmi n) : $A_n^k = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)$
- Nombre de permutations (cas $n = k$): $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 1$
- Combinaison de k éléments (sous-ensembles distincts de k éléments) : $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (tirage sans remise non ordonné).

Dénombrements : exercices

Exemple du jeu de 52 cartes.

- On peut :
  - tirer avec ou sans remise
  - considérer la séquence des cartes (tirage ordonné) ou l'ensemble obtenu (non ordonné).
- Quelle est la probabilité d'obtenir :
  - que des dames sur 4 tirages ?
  - 1,2,3,4 de la même couleur et dans l'ordre ?
  - d'obtenir une configuration donnée après un mélange aléatoire ?
  - aucune dames sur 2 tirages ?

Dénombrements : exercices

Exemple : PMU

Un joueur parie toujours sur le même résultat :

- pour le quarté : les chevaux 1, 2, 3 et 4 vont terminer la course en premier (dans cet ordre).
- pour le 2 sur 4 : les chevaux 1 et 2 seront dans les 4 premiers arrivés.

On suppose qu'il y a toujours 15 chevaux dans une course, et que l'ordre d'arrivée des chevaux suit une probabilité uniforme.

Quelle est la probabilité que le joueur gagne au quarté et au 2 sur 4 ?

Dénombrements : exercices

Le singe savant

- Un singe organise au hasard 26 cartes représentant les lettres de l'alphabet. Quelle est la probabilité que le mot `SINGE` apparaîsse dans la chaîne ainsi formée ?
- On ne lui donne que les lettres du mot `SINGE`. Quelle est cette fois la probablité ?
- Et si le mot était `OUISTITI` ?

Dénombrements : exercices

Le singe savant

- Un singe organise au hasard 26 cartes représentant les lettres de l'alphabet. Quelle est la probabilité que le mot `SINGE` apparaîsse dans la chaîne ainsi formée ?
- On ne lui donne que les lettres du mot `SINGE`. Quelle est cette fois la probablité ?
- Et si le mot était `OUISTITI` ?

- Le mot `SINGE` apparaît dans A_{26}^{21} configurations, il y a $26!$ configurations possibles équi-probables, donc la probabilité est de $\frac{1}{21!}$.
- Cette fois, une configuration pour $5!$ possibles, donc $\frac{1}{5!}$.
- On peut numéroter les I : I_1, I_2, I_3, et les T : T_1, T_2. Il y a $3! * 2! * 1$ configurations possibles en échangeant les I et les T, donc la probabilité est $\frac{12}{8!}$.

Dénombrements : exercices

Tiroir à chaussettes

Un tiroir contient 20 chaussettes de 10 paires différentes. On en tire 4 au hasard. Quelle est la probabilité de :

- obtenir 2 paires;
- d'obtenir au moins 1 paire.

Dénombrements : exercices

Tiroir à chaussettes

Un tiroir contient 20 chaussettes de 10 paires différentes. On en tire 4 au hasard. Quelle est la probabilité de :

- obtenir 2 paires;
- d'obtenir au moins 1 paire.

→ On numérote les chaussettes de 1 à 20, tirage sans remise non ordonné,

- $\Omega = \{\{i, j, k, l\}, i \neq j \neq k \neq l\}$, $card(\Omega) = C_{20}^4$;
- il y a C_{10}^2 manières de faire 2 paires
- on calcul l'évènement complémentaire, $\frac{20*18*16*14}{4!}$

Le problème des partis
Problème du Chevalier de Méré (Pascal, Fermat)

Deux joueurs jouent à pile ou face

- 128 euros sont en jeu, 64 de la poche de chacun;
- le premier joueur marque 1 point si pile sort, sinon c'est le second;
- le premier qui arrive à 7 points gagne tout.
- La partie s'arrête sur un score donné (x, y) subitement;
- comment répartir équitablement l'argent ?

En particulier :

- si le score est de $(6, 6)$?
- si le score est de $(6, 5)$?
- si le score est $(1, 0)$?
- si le score est $(6, 0)$?

Le problème des partis
Problème du Chevalier de Méré (Pascal, Fermat)

Deux joueurs jouent à pile ou face

- 128 euros sont en jeu, 64 de la poche de chacun;
- le premier joueur marque 1 point si pile sort, sinon c'est le second;
- le premier qui arrive à 7 points gagne tout.
- La partie s'arrête sur un score donné (x, y) subitement;
- comment répartir équitablement l'argent ?

Solution de Fermat

- On note p pour pile, f pour face;
- soit p le nombre de points manquant au premier joueur, q au second pour gagner;
- une succession de partie : une séquence $pffppf..$
- dénombrer les parties favorables à chaque joueur.

Dénombrements : exercices

Deux personnes dans une file d'attente de n personnes dans un ordre aléatoire

- avec quelle probabilité sont-ils les deux premiers ?
- avec quelle probabilité sont-ils distants de r places ?

Rencontres

- On considère n points distincts dans le plan, tous reliés 2 à 2 par des arêtes, coloriées soit en bleu soit en rouge.
  De combien de manière peut-on colorer les arêtes ?
- Soit n personnes. Montrer que si $n \geq 6$ il est toujours possible de trouver 3 personnes telles que soit elles se connaissent toutes, soit aucune des 3 ne connaît aucune des autres.
- Et si $n = 5$?

Dénombrements : exercices

Deux personnes dans une file d'attente de n personnes dans un ordre aléatoire

- avec quelle probabilité sont-ils les deux premiers ?
- avec quelle probabilité sont-ils distants de r places ?

→ Soit i et j les positions des deux personnes, $\Omega = \{\{i,j\}, i < j \in \{1, \cdots n\}\}$, $card(\Omega) = C_n^2$, équi-probables,

- 1 configuration
- $n - r$ configurations

Rencontres

- On considère n points distincts dans le plan, tous reliés 2 à 2 par des arêtes, coloriées soit en bleu soit en rouge.
  De combien de manière peut-on colorer les arêtes ?
- Soit n personnes. Montrer que si $n \geq 6$ il est toujours possible de trouver 3 personnes telles que soit elles se connaissent toutes, soit aucune des 3 ne connaît aucune des autres.
- Et si $n = 5$?

Plan

1. Quelques rappels du cours 1, Dénombrements
2. **Indépendance**
3. Probabilités conditionnelles

Indépendance

Définition

Deux événements E et F sont **indépendants** si:

$$P(E \cap F) = P(E) \times P(F)$$

Autrement dit, si connaître le résultat de l'un n'a aucune influence sur la probabilité du deuxième.

Exemples : lancer de deux dés

- les deux chiffres obtenus après un lancer sont indépendants l'un de l'autre,
- les événements “le premier dé affiche 6” et “la somme des deux dés vaut 4” ne sont pas indépendants.

Indépendance mutuelle

Définition

Les événements $E_1, ..., E_n$ sont dits **mutuellement indépendants** si, pour toute partie $\mathbb{I}$ de l'ensemble $\{1, .., n\}$:

$$P(\bigcap_{i\in\mathbb{I}} E) = \prod_{i\in\mathbb{I}} P(E_i)$$

Événements non mutuellement indépendants : lancer d'un dé

- $E_1 = \{1, 2, 3\}$, $P(E_1) = \frac{1}{2}$,
- $E_2 = \{3, 4, 5\}$, $P(E_2) = \frac{1}{2}$,
- $E_3 = \{1, 2, 3, 4\}$, $P(E_3) = \frac{4}{6}$,

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(\{3\}) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{6},$$

mais $P(E_1 \cap E_3) = P(E_1) \neq P(E_1) \times P(E_3)$.

Indépendance mutuelle

Définition

Les événements $E_1, ..., E_n$ sont dits **mutuellement indépendants** si, pour toute partie $\mathbb{I}$ de l'ensemble $\{1, .., n\}$:

$$P(\bigcap_{i \in \mathbb{I}} E) = \prod_{i \in \mathbb{I}} P(E_i)$$

Attention ! La propriété doit être vérifiée pour **tous** les sous-ensembles d'événements !

Événements non mutuellement indépendants : lancer de deux pièces

On note :

- A l'évènement “la première pièce donne pile”
- B l'évènement “la deuxième pièce donne face”
- C l'évènement “les deux pièces donnent le même résultat”

Indépendance mutuelle ou non ?

Indépendance mutuelle (2)

Un exemple important : le produit d'espaces probabilisés

Soient $\Omega_1, ..., \Omega_n$, n ensembles discrets, et soit P_i une mesure de probabilité sur Ω_i. Alors, la mesure de probabilité Q définie sur $\Omega_1 \times ... \times \Omega_n$ par:

$$Q\left(\{(\omega_1, ..., \omega_n)\}\right) = \prod_{i=1}^{n} P_i\left(\{\omega_i\}\right).$$

Q est appelée le produit des mesures $P_1, ..., P_n$.
Alors, soient $A_1 \subset \Omega_1$, ..., $A_n \subset \Omega_n$, qui définissent les événements suivants:

$$E_i = \left(\prod_{j<i} \Omega_j\right) \times A_i \times \left(\prod_{j>i} \Omega_j\right).$$

Les événements E_i sont mutuellement indépendants.

Exemple : lancer de n dés

On lance n fois le même dé ($\Omega_i = \{1, ..., 6\}$). Alors, les événements E_i définis par "le résultat du i-ème lancer est 1" sont mutuellement indépendants.

Plan

1. Quelques rappels du cours 1, Dénombrements

2. Indépendance

3. **Probabilités conditionnelles**

Probabilités conditionnelles et indépendance : exemple

Roulette russe

Deux balles sont insérées côte à côte dans un pistolet dont le barillet peut contenir 6 balles. Le barillet est positionné ensuite au hasard.

- Quel est le risque que le premier coup soit fatal ?
- Le premier coup n'était pas fatal. Est-il plus risqué de tirer directement ou de positionner le barillet au hasard puis de tirer ?

Probabilités Conditionnelles

Considérons deux événements E et F, Supposons qu'on ne s'intéresse à la réalisation de E, étant donnée la réalisation de F. Cela revient à estimer la réalisation de $E \cap F$ par rapport à F

Définition

Soit Ω un ensemble dénombrable et P une mesure de probabilisé sur Ω. Soit F un événement *de probabilité non nulle*. On appelle probabilité conditionnelle sachant F l'application:

$$P(. \mid F) : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$$

définie par

$$\forall E \in \mathcal{P}(\Omega), P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

Cette application est une mesure de probabilité sur Ω.
Note : $P(E \mid F)$ se lit "probabilité de E sachant F".

Probabilités conditionnelles et indépendance : exemple

Paradoxe des deux enfants (M. Gardner, 1959)

1. Mr. Jones has two children. The older child is a girl. What is the probability that both children are girls?

   M. Jones a deux enfants. Le plus vieux est une fille. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?

2. Mr. Smith has two children. At least one of them is a boy. What is the probability that both children are boys?

   M. Smith a deux enfants. Au moins un des deux est un garçon. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons ?

Probabilités conditionnelles et indépendance : exemple

Paradoxe des deux enfants : problème 1

M. Jones a deux enfants. Le plus vieux est une fille. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?

- Problème insoluble en général !
  Quelle est la mesure de probabilité considérée ?
- Considérons l'hypothèse suivante :
  1. la probabilité d'avoir un garçon est égale à la probabilité d'avoir une fille,
  2. le sexe du premier enfant est indépendant du sexe du second.
- On a alors ($F =$ "fille", $G =$ "garçon"):
  - $\Omega = \{(\underbrace{F}_{\text{1er enfant}}, \underbrace{F}_{\text{2ème enfant}}), (F,G), (G,F), (G,G)\}$
  - $A_i =$ "le $i$ème enfant est une fille" ($P(A_1 \cap A_2) \underbrace{=}_{\text{indépendance}} P(A_1) \times P(A_2) = \frac{1}{4}$).
- Donc $P(A_2 \cap A_1 | A_1) = \dfrac{P((A_2 \cap A_1) \cap A_1)}{P(A_1)} = \dfrac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} = 1/2.$

Probabilités conditionnelles et indépendance : exemple

Paradoxe des deux enfants : problème 1

M. Jones a deux enfants. Le plus vieux est une fille. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?

- Problème insoluble en général !
  Quelle est la mesure de probabilité considérée ?
- Considérons l'hypothèse suivante :
  1. la probabilité d'avoir un garçon est égale à la probabilité d'avoir une fille,
  2. le sexe du premier enfant est indépendant du sexe du second.
- On a alors ($F =$ "fille", $G =$ "garçon"):
  - $\Omega = \{(\underbrace{F}_{\text{1er enfant}}, \underbrace{F}_{\text{2ème enfant}}), (F,G), (G,F), (G,G)\}$
  - $A_i =$ "le $i$ème enfant est une fille" ($P(A_1 \cap A_2) \underbrace{=}_{\text{indépendance}} P(A_1) \times P(A_2) = \frac{1}{4}$).
- Donc $P(A_2 \cap A_1 | A_1) = \dfrac{P\big((A_2 \cap A_1) \cap A_1\big)}{P(A_1)} = \dfrac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} = 1/2.$

Probabilités conditionnelles et indépendance : exemple

Paradoxe des deux enfants : problème 1

M. Jones a deux enfants. Le plus vieux est une fille. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?

- Problème insoluble en général !
  Quelle est la mesure de probabilité considérée ?
- Considérons l'hypothèse suivante :
  1. la probabilité d'avoir un garçon est égale à la probabilité d'avoir une fille,
  2. le sexe du premier enfant est indépendant du sexe du second.
- On a alors ($F =$ "fille", $G =$ "garçon"):
  - $\Omega = \{(\underbrace{F}_{\text{1er enfant}}, \underbrace{F}_{\text{2ème enfant}}), (F,G), (G,F), (G,G)\}$
  - $A_i =$ "le $i$ème enfant est une fille" ($P(A_1 \cap A_2) \underbrace{=}_{\text{indépendance}} P(A_1) \times P(A_2) = \frac{1}{4}$).
- Donc $P(A_2 \cap A_1 | A_1) = \dfrac{P((A_2 \cap A_1) \cap A_1)}{P(A_1)} = \dfrac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} = 1/2.$

Probabilités conditionnelles et indépendance : exemple

Paradoxe des deux enfants : problème 1

M. Jones a deux enfants. Le plus vieux est une fille. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?

- Problème insoluble en général !
  Quelle est la mesure de probabilité considérée ?
- Considérons l'hypothèse suivante :
  1. la probabilité d'avoir un garçon est égale à la probabilité d'avoir une fille,
  2. le sexe du premier enfant est indépendant du sexe du second.
- On a alors ($F =$ "fille", $G =$ "garçon"):
  - $\Omega = \{(\underbrace{F}_{\text{1er enfant}}, \underbrace{F}_{\text{2ème enfant}}), (F,G), (G,F), (G,G)\}$
  - $A_i =$ "le $i$ème enfant est une fille" ($P(A_1 \cap A_2) \underbrace{=}_{\text{indépendance}} P(A_1) \times P(A_2) = \frac{1}{4}$).
- Donc $P(A_2 \cap A_1 | A_1) = \dfrac{P\big((A_2 \cap A_1) \cap A_1\big)}{P(A_1)} = \dfrac{P\big(A_2 \cap A_1\big)}{P(A_1)} = 1/2.$

Probabilités conditionnelles et indépendance : exemple

Paradoxe des deux enfants : problème 2

M. Smith a deux enfants. Au moins un des deux est un garçon. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons ?

- Considérons la même mesure de probabilité qu'avant,
- on note : $A = \{(G,G)\}$, $B = \{(G,G),(G,F),(F,G)\}$.
- Alors : $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1}{3}$.

Probabilités conditionnelles et indépendance : exemple

Paradoxe des deux enfants : problème 2

M. Smith a deux enfants. Au moins un des deux est un garçon. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons ?

- Considérons la même mesure de probabilité qu'avant,
- on note : $A = \{(G,G)\}$, $B = \{(G,G),(G,F),(F,G)\}$.
- Alors : $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1}{3}$.

Probabilités conditionnelles et indépendance : exemple

Paradoxe des deux enfants : problème 2

M. Smith a deux enfants. Au moins un des deux est un garçon. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons ?

- Considérons la même mesure de probabilité qu'avant,
- on note : $A = \{(G,G)\}$, $B = \{(G,G),(G,F),(F,G)\}$.
- Alors : $P(A|B) = \dfrac{P\big(A \cap B\big)}{P(B)} = \dfrac{1}{3}$.

Probabilités Conditionnelles (2)

Application en chaîne de la formule des probabilités conditionnelles

- Par définition, si $P(F) \neq 0$, on a $P(E \cap F) = P(E|F)P(F)$
- Plus généralement, si $E_1, ..., E_n$ sont n événements, on a :

$$P(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n) = P(E_1) \prod_{i=2}^{n} P(E_i \mid E_1 \cap ... \cap E_{i-1})$$

Exemple

Quelle est la probabilité de tirer trois boules de la même couleur dans une urne contenant 7 boules rouges et 5 boules bleues, en tirant les trois boules l'une après l'autre et sans remise?

Probabilités Conditionnelles (2)

Application en chaîne de la formule des probabilités conditionnelles

- Par définition, si $P(F) \neq 0$, on a $P(E \cap F) = P(E|F)P(F)$
- Plus généralement, si $E_1, ..., E_n$ sont n événements, on a :

$$P(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n) = P(E_1) \prod_{i=2}^{n} P(E_i \mid E_1 \cap ... \cap E_{i-1})$$

Exemple

Quelle est la probabilité de tirer trois boules de la même couleur dans une urne contenant 7 boules rouges et 5 boules bleues, en tirant les trois boules l'une après l'autre et sans remise?
Posons

- R_i=`La` i^{eme} `boule tirée est rouge`, $i \in \{1, 2, 3\}$
- B_i=`La` i^{eme} `boule tirée est bleue`, $i \in \{1, 2, 3\}$

On a alors $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1)P(R_2|R_1)P(R_3|R_2 \cap R_1) = \frac{7}{12} \times \frac{6}{11} \times \frac{5}{10}$.

De même, $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{5}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{3}{10}$

Probabilités conditionnelles (3)

Exemple

On tire successivement et sans remise 4 lettres du mot “ATTACHANT” Quelle est la probabilité d’obtenir “CHAT” ?

Rat de laboratoire

Une expérience est conduite pour étudier la mémoire des rats. Un rat est mis devant trois couloirs. Au bout de l’un d’eux se trouve de la nourriture qu’il aime, au bout des deux autres, il reçoit une décharge électrique. Cette expérience élémentaire est répétée jusqu’à ce que le rat trouve le bon couloir. Sous chacune des hypothèses suivantes, avec quelle probabilité la première tentative réussie est-elle la k-ème ?

- le rat n’a aucun souvenir des expériences précédentes,
- le rat se souvient uniquement de l’expérience précédente,
- le rat se souvient des deux expériences précédentes.

Formule de Bayes, théorème des probabilités totales

Formule de Bayes

Soient E et F deux événements de probabilité non nulle. Alors :

$P(E \cap F) = P(F \mid E) \times P(E) = P(E \mid F) \times P(F)$, soit

$$P(E \mid F) = \frac{P(F|E)P(E)}{P(F)}.$$

Théorème des probabilités totales

Soit $(F_i)_i$ une partition de Ω (aussi appelé ensemble complet d'événements) :

- si $i \neq j$ alors $F_i \cap F_j = \emptyset$ (F_i et F_j sont incompatibles),
- $\bigcup_i F_i = \Omega$.

Alors $\forall E \subset \Omega, P(E) = \sum_i P(E \cap F_i) = \sum_i P(E|F_i)P(F_i)$.

De plus, pour tout i, $P(F_i|E) = \dfrac{P(E \mid F_i) \times P(F_i)}{\sum_{j=1}^{N} P(E \mid F_j) \times P(F_j)}$.

Formule de Bayes : exemple

Exemple

On enlève aléatoirement une carte d'un jeu de 52 cartes, et on ignore laquelle. On tire ensuite au hasard une carte dans ce jeu incomplet et c'est un coeur. Quelle est la probabilité pour que la carte manquante soit un coeur?

Formule de Bayes : exemple

Exemple

On enlève aléatoirement une carte d'un jeu de 52 cartes, et on ignore laquelle. On tire ensuite au hasard une carte dans ce jeu incomplet et c'est un coeur. Quelle est la probabilité pour que la carte manquante soit un coeur?
On considère les événements suivants:

- CP: La carte perdue est un coeur
- TC: Tirer un coeur du jeu incomplet

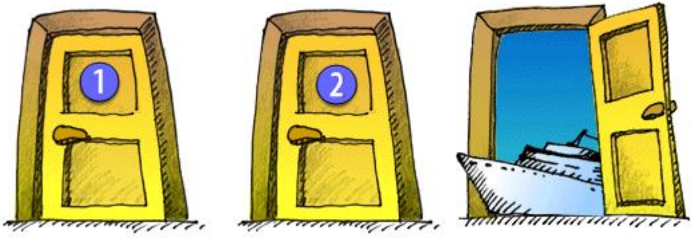
Nous avons alors $P(CP) = \frac{1}{4}$ et $P(TC \mid CP) = \frac{12}{51}$
TC peut s'écrire comme: $TC = (TC \cap CP) \cup (TC \cap \bar{CP})$ et

$$P(CP \mid TC) = \frac{P(TC \mid CP) \times P(CP)}{P(TC \mid CP) \times P(CP) + P(TC \mid \bar{CP}) \times P(\bar{CP})} = \frac{\frac{12}{51} \times \frac{1}{4}}{\frac{12}{51} \times \frac{1}{4} + \frac{13}{51} \times \frac{3}{4}} = \frac{12}{51}$$

Monty Hall - (Merci à Christophe Gonzales)

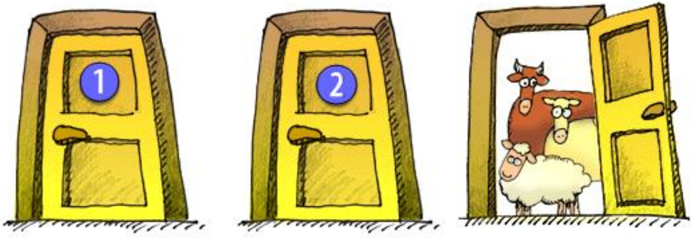
http://www.apprendre-en-ligne.net/random/monty/

Exemple de Monty Hall



- derrière une des portes, il y a un voyage à gagner

Exemple de Monty Hall



- derrière une des portes, il y a un voyage à gagner
- derrière les autres portes, il y a des ... moutons

Exemple de Monty Hall

- derrière une des portes, il y a un voyage à gagner
- derrière les autres portes, il y a des ... moutons

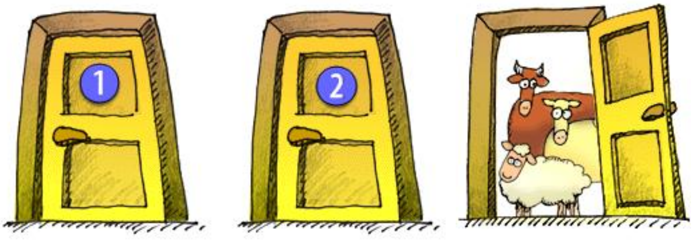
Quelle est la probabilité que le bateau se trouve derrière une des portes ?

Exemple de Monty Hall

L'animateur demande de choisir une des trois portes pour gagner le voyage....

le joueur choisit la porte 2

Exemple de Monty Hall

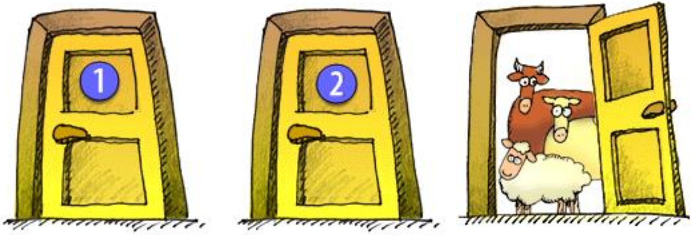


L'animateur demande de choisir une des trois portes pour gagner le voyage....

le joueur choisit la porte 2

Il ouvre ensuite une des deux autres portes derrière laquelle il y a des moutons.

Exemple de Monty Hall



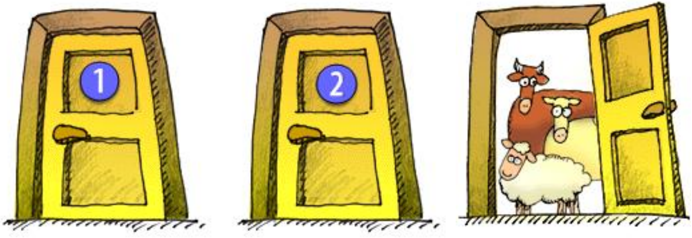
L'animateur demande de choisir une des trois portes pour gagner le voyage....

le joueur choisit la porte 2

Il ouvre ensuite une des deux autres portes derrière laquelle il y a des moutons.

Question: Conserver la porte 2 ou choisir la porte 1 ?

Exemple de Monty Hall



L'animateur demande de choisir une des trois portes pour gagner le voyage....
le joueur choisit la porte 2

Il ouvre ensuite une des deux autres portes derrière laquelle il y a des moutons.

Question: Conserver la porte 2 ou choisir la porte 1 ?

Pour cela, on va calculer la proba que le bateau soit derrière les portes 1 et 2.

Exemple de Monty Hall

Les événements élémentaires

- B_1 : le bateau est derrière la porte 1
- B_2 : le bateau est derrière la porte 2
- B_3 : le bateau est derrière la porte 3
- E : l'animateur a choisi, parmi les portes 1 et 3, d'ouvrir la porte 3