

Evolutionary Neural Network Tools for Life Emergence and More

F. Furfaro

2021

Abstract

L'idée de vie artificielle remonte au année 1940 par principe d'autoréplication, meme époque ou les concepts sur l'intelligence artificielle sont créés. Nous proposons un modele à définition incomplete, mais suffisante pour etudier la fonctionnalisation des structure cerebrale lors de l'evolution. On combine l'apprentissage par renforcement et la modification aléatoire des connections intercouche. Pour tester notre modele, le jeu du chat et la souris est un exemple de choix pour etudier l'evolution des comportement basique de proie/predateurs, tout en etant assez complet pour une approche évolutive. Ces outils n'ont pas la prétentions de reproduire la vie sur ordinateurs, mais peuvent donner des idée, minime soit elle, pour l'optimisation des structure de reseau de neurones et d'avancer vers la creation de vie articiel. En effet, lors du processus d'apprentissage (evolution + descente de gradient), on on observe par l'apparition de structure et stratégie convergente. Ces structures sont conservé pendant un grand nombre de cycle alors meme que des reseau "challenger" sont toujours ajouter à chaque cycle de reproduction. En dehors, on observe que ce type d'algorithme peut s'averer efficace avec moins de neurone pour la classification MNIST.

Introduction

La vie est apparu il y a 3,8 milliards d'année et n'a pas cessé d'évoluer et de coloniser l'environnement [5]. Elle a commencer de maniere unicellulaire sans noyau [3, 7], à un large panel de forme avec l'appartition du noyau [4, 6] et de la multicellularité [2], et en parallele, l'apparition du potentiel d'action [ref] suivi d'une explosion de des variétés des systeme nerveux [ref], avec plus recement les systeme centraux [ref]. Pour autant, il est assez difficile de definir ce qui est vraiment vivant et cette question est toujours débattu. L'une des definition les plus simple est celle donnée par la NASA lors des programme de recherche de vie extra-terrestre : Un systeme chimique auto-entretenu capable d'évolution darwinienne. L'evolution darwinienne est un principe fondamentale dans l'etude des systeme complexe disposant d'heredité, de variation et de selection. On ne le retrouve pas seulement en biologie, mais on peut l'obervers dans l'evolution des courants musicaux, artistique, philosophique, technologique, societal et culturel [ref]. Une autres définition de la Vie existe, et elle est plus lié à l'une des transformation thermodynamique fondamentale : L'entropie. La vie serait : Une structure dissipative capable d'auto-catalyse, d'homéostatie et d'apprentissage [1]. Ce qui diminu localement l'entropie en favorisant l'auto-organisation. Mais ces deux definitions se restreigne à un systeme "chimique", est ce qu'un robot dotée d'une intelligence, voirent d'emotion humaine serait vivant dans cette définition ? (tout probleme n'est pas définissable). Aujourd'hui, il existe un grand nombre de simulation de vie sur ordinateurs (liste de 2-3) et certaine sont encore en cours d'execution depuis 1990. Et sont d'une grande importance pour comprendre l'emergence de la vie (avec les experiences de cellules minimaliste)

AUTOMATE : Dans notre cas, nous allons essayer de reproduire un systeme vivant à l'intersection de ses deux definitions. Un systeme auto-entretenu capable d'apprentissage evolutif. Qu'on restreindra dans un premiers lieux à "un systeme capable d'apprentissage évolutif" pour en developper les outils futurs. Pour cela on a creer un environnement de jeu simple : le jeu du chat et la souris, alternant ainsi deux comportements : proie/prédateur. On se base sur deux outils : les automates cellulaires et les reseaux de neurones évolutifs. Les automates sont a l'origine des objets mathématique permettant de resoudre des probleme de decidabilité mathématique [Von Newman]. On en retrouva ensuite des utilisation experiementale comme le plus connu "jeu de la vie" [Conway], qui à partir de 2 regles simple, faire emerger une forte complexité, voir meme reproduire une machine de Turing [ref à revoir]. L'état d'une cellule au temps $t+1$ est fonction de l'état au temps t d'un nombre fini de cellules appelé son « voisinage ». Le probleme est donc une grille ou l'on a des case "automates" qui se deplace dans la grille, elle a un adversaire qui va chercher soit à "attraper" l'automate, soit la "fuir". La decision de deplacement de l'automate est

contrôler/réguler par un réseau de neurone évolutif par principe d'apprentissage par renforcement. Les propriétés de l'automate changeront ainsi à chaque génération, aussi bien paramètre de "vue" de l'automate que les actions ou la structure du réseau.

STATISTIQUE : Les réseaux neuronaux ont été construits à partir du modèle de neurone biologique, le neurone formel [McCulloch & Pitts], où l'on constate qu'un neurone est une fonction "affine" avec une fonction d'activation. Aujourd'hui il s'est rapproché des méthodes statistiques non inductive (descriptive : on ne sait pas la loi de probabilité) pour résoudre des problèmes de régression, classification et partitionnement. Les principaux outils d'analyse de grosse donnée en statistiques sont, pour ne citer que les plus connus : La PCA, analyse de composante principale, qui permet de projeter l'ensemble des points sur les régressions multilinéaires des variables corrélées entre elles, ce qui réduit la dimension [Karl Pearson], Les SVM, séparateurs à vaste marge, généralisant les classificateurs linéaires par des vecteurs supports (théorie de la « régularisation statistique » + surapprentissage) [Vapnik] et enfin Le K-mean qui divise un ensemble de points par minimisation d'un certain nombre de graine barycentrique [Steinhaus, Lloyd]. Tous ces outils encore utilisés aujourd'hui, sont peu à peu remplacés par des réseaux de neurone vers 2000s après le succès de l'apprentissage profond en compétition.

APPRENTISSAGE : La question de l'apprentissage a été étudiée au cours des années 1950, où il a pu émerger les règles de Hebb [Hebb 1949] qui modifient simplement les valeurs des coefficients synaptiques d'un réseau simple couche, il eut un déclin en fin 1970 par l'impossibilité de résoudre le problème non linéaire XOR ou connexité [Minsky 1969]. Mais ce problème fut résolu par le perceptron multicouche, mais cette fois la modification des poids était plus compliquée. C'est le système de rétropropagation du gradient [1984] qu'on retrouve aussi dans le cerveau [Stuart 1997] et l'algorithme du gradient, par minimisation itérative de l'erreur, qui permet de résoudre ce problème. En parallèle, inspiré par les neurones moteurs de la vue, on développa le réseau de neurone convolutif qui réduit fortement le calcul des poids en entrée du réseau, car n'est pas entièrement connecté [Lecun, mais pas que]. Le souci de ce genre de réseau est qu'il faut un grand nombre de données pour adapter les poids, pour résoudre un problème de décision markovien, il y eut l'apparition du Q-learning convergent par l'apprentissage des récompenses [Watkins 1989 Dayan 1992] qui ont encore été améliorés par des réseaux adversariaux "actor-critic" à l'image des réseaux génératifs, il permet d'accélérer la convergence des poids [Konda 2003].

FONCTIONNALISATION : Néanmoins, ces réseaux optimisent l'apprentissage du réseau mais ne cherchent pas à maximiser la structure des couches du réseau. Seuls les réseaux de neurone récurrents ont été le plus traités car il y avait des problèmes de "vanishing gradient", surtout pour le traitement du texte. Une autre catégorie de réseau est apparue dans la fin des années 1990, les réseaux NEAT, où les poids et les connexions sont "appris" par un processus de sélection. Hors le cerveau n'a pas des poids qui ont été sélectionnés par l'évolution, mais ce qui est le cas la structure [Ref] dans la limite de la plasticité cérébrale des neurones à piques [WOLFGANG MAASS 1996]. L'idée est donc de s'inspirer des données en neurosciences récentes, où il est montré le principe de fonctionnalisation cérébrale que le cerveau est pré-cablé pour voir certains dangers ou encore marcher à la naissance [araignées Rakison, D. H. & Derringer, J 2008 et sommeil] et il n'y a pas eu besoin d'avoir un temps d'apprentissage long. À cette image, on a donc développé un algorithme où les couches interconnectées de manière aléatoire de façon à fonctionnaliser le problème "chat-souris" aussi bien dans la structure que dans l'apprentissage par renforcement.

Méthodes

L'ensemble du projet est disponible sur le lien github.com/fabienfrfr. Le projet a été codé intégralement en Python de façon à utiliser efficacement les bibliothèques logicielles : PyTorch pour les réseaux de neurone, Keras-Tensorflow pour la base de données MNIST, Numpy et Scipy pour les calculs scientifiques, Pandas pour l'analyse et le stockage des données, Networkx pour la représentation et l'analyse des graphes et enfin Matplotlib pour la visualisation et l'animation des données. On distingue 6 fichiers d'expérience, 2 fichiers d'analyse de données (DATA_ANALYSIS et EXTRA_FUNCTION) et un fichier de débogage modulaire. Dans les fichiers "expérience" on retrouve au plus bas niveau GRAPH_EAT encapsulant GRAPH_GEN, générant la liste des connexions pour chaque couche de neurone, ainsi que pRNN, générant la structure du réseau en fonction de la liste d'adjacence. À plus haut niveau, on retrouve AGENT qui contient les propriétés d'entrée/sortie de l'agent et son algorithme d'apprentissage et de mémorisation, ainsi que TAG-ENV contenant cette fois les règles du jeu "chat-souris". Enfin on a le MAIN qui va lister l'ensemble des agents et l'environnement associé pour lancer les expériences d'évolution. On retrouve aussi un fichier LOG qui permet de stocker au format *csv* les expériences.

1 Réseau de neurone évolutif

Le perceptron est un algorithme d'apprentissage fonctionnant comme une fonction de seuillage et décrivant le neurone formel. Une fonction de seuil est un classifieur linéaire qui a pour entrée un vecteur à valeurs réelles (virgule flottante) et une valeur $f(z)$ en sortie, qui peut être suivant la fonction d'activation : binaire (Heaviside), réel (Sigmoid) ou entre les deux (ReLU). Le perceptron se représente par le produit scalaire entre le vecteur d'entrée et le vecteur poids des neurones, soit l'application multilinéaire suivante :

$$o = f(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^n w_i x_i > \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce qui s'écrit dans la plupart des bibliothèques logicielles comme la séquence d'un neurone à “**n**” entrée, suivie d'une fonction d'activation.

Code PyTorch :

```
Layers = nn.Sequential(nn.Linear(N, 1), nn.ReLU())
x = Layers(x)
```

Le perceptron est un classifieur linéaire, il converge uniquement si l'ensemble des données d'entrée sont linéairement séparables (droite). Mettre à jour les poids “**w**” correspond à l'apprentissage du perceptron, la *regle delta* [Russell Ingrid 2002] est la plus simple et consiste à comparer linéairement la valeur obtenue par la sortie du réseau “**z**” et la valeur attendue par le réseau de neurones “**d**”. Il existe d'autres méthodes plus sophistiquées ou limitant les problèmes d'annulation tout aussi simple (Least Mean Square), mais ici présenté, la règle delta se présente sous la forme :

$$w_i(t+1) = w_i(t) + (d - z)x_i$$

Dans la plupart des bibliothèques logicielles, on précise le type de calcul de perte (loss ou criterion) avant la boucle d'apprentissage, ainsi que l'algorithme de calcul de la descente de gradient (optimizer). Les algorithmes les plus utilisés sont SGD “Stochastic Gradient Descent” plutôt adapté à la classification et “Adam” plutôt adapté au problème de régression [ref car pas sûr].

Code PyTorch :

```
LOSS = torch.nn.MSELoss(reduction='sum')
optimizer = optim.SGD(Layers.parameters())
### Loop
LOSS = LOSS(x_pred, x)
optimizer.zero_grad()
LOSS.backward()
optimizer.step()
```

Un réseau de neurone correspond à une interconnexion entre couche de neurone contenant “**n**” perceptrons. Une unique couche de “**n**” perceptron correspond au réseau le plus simple et permet de résoudre des problèmes linéairement séparables de type hyperplan. Comme toutes les entrées “**x**” sont interconnectées au “**n**” neurone, les vecteurs poids “**w**” forment une matrice “**m*n**” avec “**m**” le nombre d'entrée au réseau. La sortie s'exprime dans ce cas :

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} w_{0,0} & & \\ & \ddots & \\ & & w_{m,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 & \dots & x_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_n \end{bmatrix}$$
$$\vec{s} = f(\vec{y})$$

Pour que l'algorithme mette à jour efficacement les poids du réseau, on utilise un certain lot de données d'apprentissage, qu'on appelle “batch”, soit il contient l'ensemble des données de l'expérience, soit il est réparti en “mini-batch” pour éviter la sur-utilisation de la mémoire et augmenter la vitesse de convergence de la vallée de stabilité, la taille du lot ne doit pas être trop petite non plus car augmenter le bruit [ref mini-batch]. Dans ce cas, le vecteur d'entrée devient une matrice “**m*b**”, et la matrice des poids devient un tenseur d'ordre 3 “**n*m*b**”. La plupart des bibliothèques logicielles s'adapte automatiquement à la taille du batch, et n'a pas besoin d'être spécifié.

Code PyTorch :

```
Layers = nn.Sequential(nn.Linear(N, M), nn.ReLU())
x = Layers(x)
```

Pour autant, les reseaux linéaire ne sont pas les seules à être employé et ne sont pas forcément les plus adaptés pour les problèmes d’images [ref]. En effet, une image est une donnée 2D dont les données spatiales sont localement liées, mais les informations ne sont pas interconnectées, c’est pour cela qu’il existe les réseaux de convolution. Ces réseaux ont l’avantage d’être interconnectés mais par fenêtre “spatiale” ce qui réduit fortement le nombre de calculs pour l’actualisation des poids. Elle est composée de “N” perceptrons, mais ne représente plus comme un produit tensoriel, mais comme un produit de convolution où les entrées sont moyennées pondérément par le glissement “C” d’une fenêtre de taille “k” sur les poids “w”. La sortie s’exprime de la sorte :

$$out(N_i, C_{out_j}) = bias(C_{out_j}) + \sum_{k=0}^{C_{in}-1} weight(C_{out_j}, k) \star input(N_i, k)$$

Dans le cas le plus simple, on peut considérer qu’il y a qu’une seule entrée par neurone, pour cela, le nombre d’entrée est égal au nombre de sortie du canal de la couche. Ensuite, la taille de la fenêtre est de “1” et le groupement de connexion doit être égal au nombre de neurones, qui est un nombre divisible de l’entrée et de la sortie par lui-même. Ce type de paramétrage est équivalent à N neurones indépendants à 1 seule connexion chacune. Contrairement au réseau linéaire, la taille du batch doit être spécifiée lorsqu’on donne les données d’entrée à la couche de convolution.

Code PyTorch :

```
Layers = nn.Sequential(nn.Conv1d(I, I, 1, groups=I), nn.ReLU())
x = Layers(x.view(BATCH_SIZE, I, 1)).view((BATCH_SIZE, I))
```

1.1 Fonctionnalisation

S’inspirer du cerveau “modèle” pour construire des algorithmes neuronaux a toujours été présent dans le développement de nouvelles méthodes en *Intelligence Artificielle*. Dans ce projet, nous nous sommes inspirés de la spécialisation fonctionnelle du cerveau. En effet, le moyen le plus efficace de réaliser des fonctions différentes c’est de confier la réalisation de chaque fonction à un outil particulier et spécialisé [Tooby, J. & Cosmides, 1992 ; Tooby, J. & Cosmides, 2015]. C’est pour cette raison que la sélection naturelle (survie, reproduction) a organisé notre corps en différents organes qui sont chacun spécialisés, mais aussi dans le domaine de la cognition [Confer, J. C. et al. 2010]. La spécialisation fonctionnelle du cerveau est observée empiriquement par plusieurs troubles neuropsychologiques, comme par exemple avec le syndrome de Capgras, où une défaillance d’une région entraîne la perte de reconnaissance des visages [Thomas Antérion, 2008].

Dans notre cas, nous avons simplifié le plus possible un cerveau, où l’on a en entrée des neurones de “vision”, suivis de couches séquentielles “fonctionnelles” et en sortie, des neurones “moteurs”. On distingue des neurones stables, les neurones d’entrée et de sortie qui ne changeront pas pendant le processus évolutif. Les neurones de “visions” sont à l’image des cônes de la rétine c’est-à-dire des neurones connectés à des batonnets de vue unique [Dale Purves, G-J Augustine, 2005] qu’on représente dans notre cas comme une couche de convolution “simple sparse” : une seule entrée par neurone. Les neurones “moteurs” quant à eux sont analogues aux motoneurones qui activent la contraction musculaire et donc le mouvement des organismes [Fitzpatrick, D. (2001) The Primary Motor Cortex], on les représente dans notre cas comme une couche linéaire de neurones où les sorties seront liées à l’action du réseau de neurone complet.

La vraie particularité du projet est que les couches intermédiaires “fonctionnalisées” ne sont pas construites manuellement, mais adaptées par un processus évolutif de sélection. Ainsi, l’objectif est de faire émerger une structure intermédiaire fonctionnalisée à notre problème, ici le “jeu du chat et la souris”. Les connexions intermédiaires sont initialement aléatoires avec au minimum une connexion entre la couche “n+1” et “n”, pour avoir toujours un lien entre l’entrée et la sortie et ne pas avoir de problème lors des calculs de poids des neurones. Au cours de l’apprentissage, on s’attend à ce que le réseau soit de plus en plus structuré.

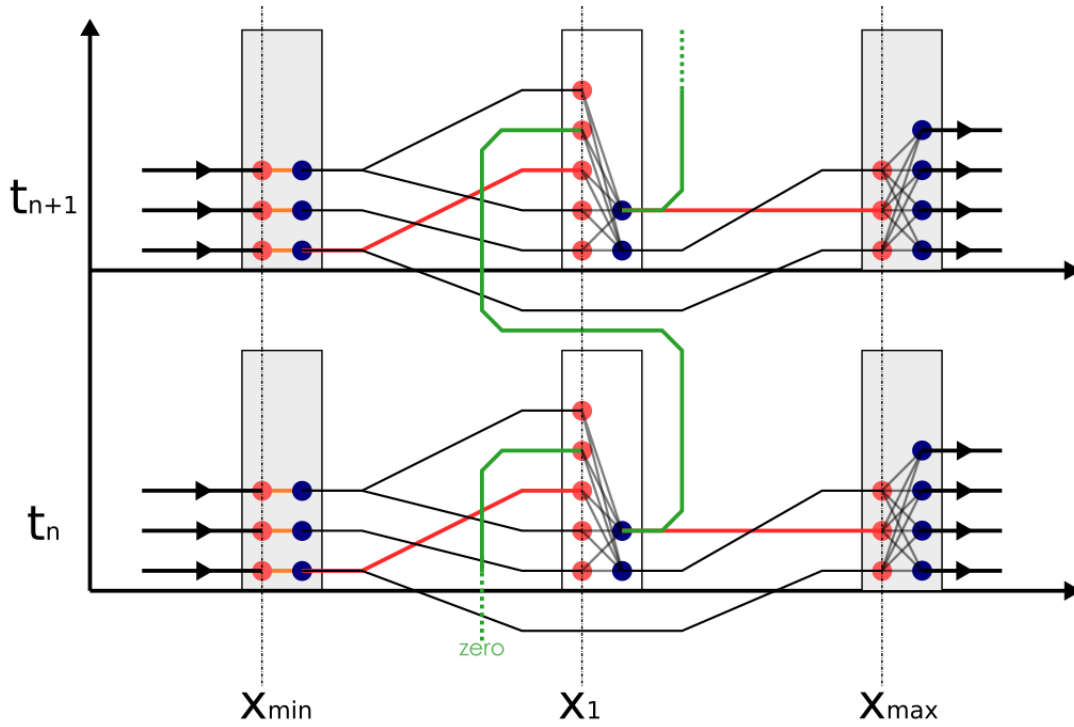


Figure 1: Réseau monocouche à connexion aléatoire; Le meme reseau est représenté 2 fois à deux intervalle de temps à la suite, les nombres entrée/sorties sont pour l'exemple. De bas en haut : La commucation entre deux temps. De gauche à droite : L'entrée vers la sortie.

Comme les connexions entre l'entrée d'une couche X_n et la sortie d'une couche en X_{n+m} , avec $m \geq 0$, n'est pas possible pour le calcul de la retropropagation à un temps donnée, on se trouve avec la connection $X_{n+m,t-1} \rightarrow X_{n,t}$. Ce type de connection laisse apparaitre une forme de reseau recurrent pour le calcul du gradient, mais comme nous voulons eviter les structure artificielle comme LSTM qui empeche le *vanishing gradient* des reseau recurrent [Ref LSTM], nous avons considéré cette entrée à "t-1" comme une **entrée virtuelle**. Cette entrée virtuelle, n'est pas la solution la plus elegante, mais est la plus flexible dans le cas ou les connexions sont complètement desordonné et reduit le temps de calculs car taille de l'entrainement est linéaire. Une couche connecté à une entrée virtuelle d'une couche elle meme connecté à une entrée virtuelle, permet de stocker une information à "t-2", la taille du stockage possible est proportionnel à la taille du reseau. L'entrée virtuelle consiste au détachement de la sortie du graphes computationnelle à l'algorithme du gradient. On obtient un réseau de "*neurones à propagation avant*" que l'on qualifiera dans le programme de **pseudo-récurrents** à cause des entrée virtuelle.

1.2 Construction du graphe

La topologie du reseau présenté precedement peut etre vu comme un graphe orienté acyclique, en effet, les connection entre l'entrée X_n et la sortie X_{n+m} sont vue comme des entrée virtuelle indépendante de la rétropropagation. Les connection intercouche peuvent etre négligé pour la construction initiale du graphe, car elles sont complètement connecté (voir code PyTorch *nn.linear*) . Pour les connexions entre les couches, on se retrouve face à plusieurs contraintes :

- Quel est le nombre minimale de connection pour que le reseau soit complement connecté ?
- Combien de connection sont attribué par couche ?
- Comment attribuer les connection par couche de neurone ?
- Comment stocker ces informations pour reconstruire le graphe ?

Empiriquement, le nombre total de perceptron dans la couche intermédiaire “ N_h ” est initialement défini comme la racine entière du nombre d’agent par génération d’entraînement et ne peut dépasser 32.

Propriétés “Unicité des entrée” : Les liens/connections entre les différentes couches de neurones dépendent de celle-ci. On peut se connecter plusieurs fois à une sortie, mais “une” entrée n’a qu’une “seule et unique” entrée.

À partir de cette propriété, si on veut que toute l’entrée soit non vide, on peut définir le nombre minimal de connection pour notre réseau comme la somme du nombre de perceptron de la couche intermédiaire “ N_h ” et du nombre de perceptron en entrée “ N_i ”. Ainsi, pour que le graphe soit complet, la relation du nombre minimal de connection “ C_{min} ” est :

$$C_{min} = N_h + N_i$$

Le nombre de connection total “ C_{tot} ” est ensuite attribué aléatoirement dans l’intervalle $[C_{min}, 2C_{min}]$. Puis le nombre de couche intermédiaire du réseau “ N_L ” est attribué aléatoirement dans l’intervalle $[1, C_{tot}]$. Lorsque “ C_{tot} ” et “ N_L ” sont définis, il reste à définir le nombre de connection et de perceptron qui va avoir chaque couche de neurone.

Propriétés “Connection limitée” : Il ne peut y avoir moins de “une et unique” connection par couche, mais elle ne peut dépasser l’écart entre “ C_{tot} ” et “ N_L ”.

Propriétés “Perceptron limité” : Il ne peut y avoir moins d’un “seul et unique” perceptron par couche, mais elle ne peut dépasser l’écart entre “ N_h ” et “ N_L ”.

À partir de ces deux propriétés, on peut définir par récurrence l’attribution aléatoire du nombre de connection et perceptron par couche intermédiaire de neurone. Le schéma de l’évolution de la densité de probabilité uniforme à discrétiser est le suivant :

$$f_{C_n}(x) = \begin{cases} \frac{1}{(C_{tot}-C_{n-1}-N_L-n)-1} & \text{pour } 1 \leq x \leq (C_{tot} - C_{n-1} - N_L - n) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_{N_n}(x) = \begin{cases} \frac{1}{(N_h-N_{n-1}-N_L-n)-1} & \text{pour } 1 \leq x \leq (N_h - N_{n-1} - N_L - n) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Une fois l’attribution du nombre de connection réalisée par couche, il est nécessaire de positionner ces couches spatialement pour le calcul de la rétropropagation. Dans notre cas, nous avons limité le nombre de couche à 32, avec une seule et unique couche possible par position spatiale discrète. Ainsi la position des couches intermédiaires est attribuée aléatoirement et sans remplacement dans l’intervalle $[1; 31]$, où la position **zero** est réservée à l’entrée et **32** à la sortie. Les positions spatiales des couches de neurone n’influencent pas le calcul de la rétropropagation, ainsi, les connections entre couches sont relatives à l’ordre positionnel. On stocke ensuite l’ensemble des connections possibles dans une liste. Mais une fois le positionnement des couches réalisé, comment connecter les nœuds de façon à ce qu’il y ait un lien entre l’entrée et la sortie et qu’il n’y ait pas que des entrées virtuelles ?

Pour cette question, nous avons considéré 3 cas où l’attribution des connections suit des lois uniformes discrétisées avec des densités de probabilité différentes. On distingue les 3 cas suivants :

1. La première connection : on se connecte à l’une des sorties de la couche la plus proche derrière, si c’est la première, on se connecte à l’une des sorties des neurones d’entrée. En effet, il est nécessaire qu’il y ait au moins un chemin qui mène d’entrée vers la sortie pour la rétropropagation, ce cas garantit cette condition.

La probabilité est directement définie par $P(X_k) = \begin{cases} 1 & X_k = X_{k+1} - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ pour ce cas.

2. Tant que toutes les connections n’ont pas été attribuées : On privilégie les connections vers l’arrière à 2/3 des probabilités. De cette façon, on limite l’excès d’entrée virtuelle sans que cela ne soit impossible. Cette règle a été définie empiriquement et ne semble pas avoir d’effet sur le processus de sélection sur le long terme (non calculé). La probabilité est calculée à partir de la discrétisation de la densité de probabilité discrétisée

$$f_X = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{pour } a \leq x \leq b \\ \frac{1}{3} & \text{pour } b \leq x \leq c \text{ dans ce cas.} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Lorsque toutes les connections avec les neurones de sortie ont été au moins attribuées une fois, alors il n’y a plus de contrainte spatiale au choix des neurones de sortie : La probabilité suit une loi uniforme sur l’ensemble de l’intervalle de définition spatiale.

Au cours de ce processus, les connections des couches au sortie sont listées dans l'ordre d'attribution par couche, ce qui nous donne une liste d'adjacence par couche. Chacune des listes ont par définition la taille du nombre de connection par couche. En representant l'ensemble des listes dans une matrice d'adjacence, on remarque que la diagonale sépare les connections en amont des connection en aval. La matrice à par définition la structure d'un graph orienté.

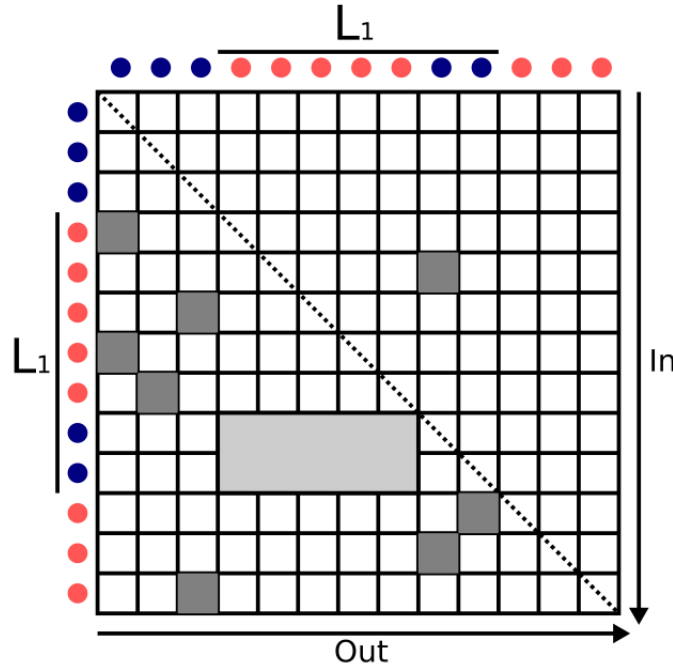


Figure 2: Matrice adjacente des liens du reseau de neurone précédent. En rouge, les noeud de connection (entrée d'une couche) et en bleu, les noeuds de perceptron (sortie de couche). Les case grisé correspondent à une connection de poids constants (1 par défauts).

Cette matrice, n'est pas utiliser dans le processus de restructuration du reseau. La matrice etant creuse, on peut se limiter à un ensemble de liste adjacente par couche de neurone. La representation en liste simplifie la restructuration du reseau et optimise la taille d'utilisation de la mémoire. Cette matrice sera toutefois necessaire pour l'analyse des donnée de graphe, on la reconstruira à posteriori. Les connection intercouches representé en gris clair sur la [Fig 2.] ne sont pas stocké en mémoire car ils sont définit par des opérations tensoriel déjà implémenté.

2 Methodes d'apprentissage

Les methodes d'apprentissages standards ont besoin d'un grand nombre de donnée pour que l'ajustement des poids permettent à un modele d'être prédictif [ref]. Avec l'ere du Big Data, cette approche fut concluante, meme si elle risque de favoriser le surapprentissage d'un reseau en classifiant trop avec les données d'entrainement [ref]. Pour autant, dans le vivant, il n'y a pas besoin d'un tres grand nombre d'experience pour qu'un cerveau apprenne efficacement un probleme [ref]. Dans certain cas, le cerveau est meme pré-cablé chez certaine espece pour repondre à certaine fonction, on peut citer comme exemple la marche des enfants à la naissance [ref] ou des mammifere juvénile proie [ref]. C'est le principe de fonctionnalisation cérébrale qu'on essaye ici de reconstituer en selectionnant des reseau "optimum" à la descente de gradient d'un probleme de decision. A partir du graphe vu precedement, on peut reconstruire les connections entre les différentes couches du *réseau de neurones à propagation avant*. L'algorithme "forward" de la plupart des bibliothèques logiciel se retrouve restructuré, mais est compatible avec la structure des graphes computationnels classiques.

Algorithm 1 Forward construction by Adjacency List; \mathbf{X} correspond au Tenseur d'entrée de taille $I \times \text{Batch}$. \mathbf{NET} correspond au information des neurones (index, position, liste adjacente). \mathbf{Trace} correspond à la mise en mémoire des sorties des couches modulés des liste de neurones \mathbf{Layers} (PyTorch : *nn.ModuleList*). \mathbf{h} correspond à la copie détaché de la liste des Tenseurs Trace à t-1.

```

Batch size, Input size  $\leftarrow \text{dim}(\mathbf{X})$ 
BATCH_  $\leftarrow \text{np.arange}(\text{len}(\mathbf{x}))$ 
Trace[-1]  $\leftarrow \mathbf{Layers}[-1](\mathbf{X}.\text{view}(\text{Batch size}, \text{Input size}, 1)).\text{view}(\text{Batch size}, \text{Input size})$ 
for i, network index ordered by position do :
    tensor  $\leftarrow []$ 
    for j,k in NET[i, -1] :
        if j == 0 :
            tensor += [Trace[-1][BATCH_,None,k]]
        else :
            if (NET[i, 3] >= NET[i, 3]) :
                tensor += [h[j][BATCH_,None,k]]
            else :
                tensor += [Trace[j][BATCH_,None,k]]
    tensor_in  $\leftarrow \text{torch.cat}(\text{tensor}, \text{dim}=1)$ 
    Trace[i]  $\leftarrow \mathbf{Layers}[i](\text{tensor\_in})$ 
    Trace[-2]  $\leftarrow \mathbf{Layers}[-2](\text{tensor\_in})$ 
for t in range(len(Trace)):
    h[t][BATCH_]  $\leftarrow \text{Trace}[t][\text{BATCH\_}].\text{detach}()$ 
return Trace[i], Trace[-2]
```

Une fois le reseau completement cablé, celui ci est equivalent à un *réseau à propagation avant* avec plusieurs entrée intermédiaire. Ces entrée intermédiaire corresponde comme on l'a vu dans la partie precedante au *entrée virtuelle*. L'objectif qui suit est d'optimiser le calcul de la fonction de cout $J(a, b)$ avec $J(a, b) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m (f - y)$. Dans notre cas, on distingue deux etapes dans l'optimisation du calcul la fonction de perte, d'abords à "**temps courts**" qui correspond à un apprentissage classique de descente de gradient à chaque cycle de reproduction, et à "**temps long**" où l'on va selectionner à chaque étapes les reseau qui auront le mieux reussi pendant de l'entrainement à temps court. La premiere étapes correspond à une methodes classique en apprentissage par renforcement, le Q-learning, la seconde, plus exploratoire, correspond à l'ajout de mutation dans le graphe du reseau qui va changer les connections entre les différents noeuds.

2.1 Temps courts : Q-Learning

A temps courts on cherche un algorithme de descente de gradient adapté à notre probleme. La plupart du temps, on donne un jeu de donnée d'entrainement adapté à un probleme, comme par exemple *MNIST* pour la reconnaissance des chiffres au format image, ou encore, *ImageNet* pour la detection et classification d'image d'objet. Dans notre cas, on a essaie de reproduire un systeme "vivant" caractérisé par un automate cellulaire [Voir partie suivante]. Ainsi, le système suit une succession d'états et d'action distincts dans le temps et ceci en fonction de probabilités de transitions. L'évolution du systeme correspond à un processus de decision markovien, représenté par une chaine de markov. Une chaine de markov est une suite de variable aléatoire (X_n) dans l'espace probabilisé (E, B, P) , où pour chaque n , sachant X_n, X_{n+1} indépendant de X_k , on a la probabilité de transition (Hypothèse de Markov) :

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n)$$

Dans notre cas, on associe à chaque transition, des action et des récompense associé à l'agent de facon à le guider dans le temps. On peut représenter cela suivant le couple de matrices (T, R) , où \mathbf{T} correspond à la matrice de transition et \mathbf{R} , la matrice des récompense. La complexité est que l'on ne connait pas la probabilité de transition.

Le but dans un processus décisionnel markovien est de trouver une bonne « politique » pour le décideur : une fonction π qui spécifie l'action $\pi(s)$ que le décideur choisira lorsqu'il sera dans l'état s . Une politique décrit les choix des actions à jouer par l'agent dans chaque état. L'agent choisit une politique à l'aide de la fonction de récompense R . Lorsqu'une politique et un critère sont déterminés, deux fonctions centrales peuvent être définies : V , la fonction valeurs des états qui représente le gain engrangé par l'agent s'il démarre à l'état s et Q , la fonction de valeur des états-actions qui représente le gain engrangé par l'agent s'il démarre à l'état s et commence par effectuer l'action a . Les expressions de V et Q , sont ainsi déterminées par les relations de récurrence :

$$V_{k+1}(s) = (1 - \alpha)V_k(s) + \alpha[r + \gamma V_k(s')]$$

$$Q_{k+1}(s, a) = (1 - \alpha)Q_k(s, a) + \alpha[r + \gamma \max_{a'} Q_k(s', a')]$$

Cette dernière correspond à l'équation de Bellman et c'est elle qui est utilisée pour calculer la fonction de coût du réseau de neurone lorsqu'on réalise une action. La première équation ne peut être utilisée seule car elle nous donne l'efficacité de l'agent pour une action donnée, mais peut être utilisée en cas d'utilisation de réseau adversariaux [Ref actor-critic]. Dans notre cas, on réalise initialement une suite d'événements avec une matrice de transition aléatoire (réseau non entraîné), puis on calcule la fonction de perte entre la prédiction des valeurs Q obtenue au cours de l'expérience avant l'action et le résultat de l'équation de Bellman Q après l'action d'un batch d'entraînement donnée, puis on répète N_{cycle} fois cette étape avant le prochain cycle de reproduction.

Code PyTorch :

```
old_state, action, new_state, reward, DONE = MEMORY
actor = MODEL(old_state)
pred_q_values_batch = torch.sum(actor.gather(1, action), dim=1).detach()
pred_q_values_next = MODEL(new_state)
target_q_values_batch = reward + (1-DONE)*GAMMA*torch.max(pred_q_values_next, 1)[0]
MODEL.zero_grad()
loss = criterion(pred_q_values_batch, target_q_values_batch)
```

L'action "acteur" correspond à la sortie du réseau, et correspond à la probabilité d'action optimale. Normalement, à chaque pas de temps, on choisit la valeur maximale en sortie du réseau et l'on attribue une probabilité d'action aléatoire, c'est le **dilemme exploration-exploitation**. Ce dilemme permet au réseau de neurone d'explorer des paramètres et de ne pas se stabiliser dans une vallée non optimale. Mais dans notre cas, nous avons choisi d'attribuer une probabilité d'action à chaque "*pas*" de l'entraînement à partir de la sortie du réseau, qui est équivalent à un dilemme d'exploration-exploitation.

Code Python :

```
DILEMNA = np.squeeze(action_probs.detach()).numpy()
p_norm = DILEMNA/DILEMNA.sum()
next_action = np.random.choice(self.IO[1], p=p_norm)
```

2.2 Temps longs : Structure neuronale

À partir des différents modèles de réseau entraînés à temps courts, l'objectif qui suit est de sélectionner ceux qui ont eu le meilleur score d'entraînement, puis de modifier légèrement la structure du graphe neuronal. Le calcul des scores est relatif à l'environnement d'entraînement et est très utilisé dans les modèles évolutifs. L'attribution des points sera plus détaillée dans la partie 3. Le principe est le suivant : Lors du premier entraînement à temps court, on a N_r réseaux en parallèle et distincts, chacun va suivre le processus d'entraînement vu dans la sous-partie précédente. Ensuite, les N_b réseaux ayant le meilleur score sont sélectionnés, N_b réseaux gardent la même topologie pour le cycle suivant, N_m réseaux par N_b meilleurs réseaux héritent d'une mutation aléatoire. Enfin N_c nouveaux réseaux aléatoires sont introduits dans le processus d'entraînement suivant, ceux-ci peuvent hériter de paramètres optimisés des réseaux précédents, mais pas de la structure du réseau, c'est les réseaux "compétiteurs". Les nombres d'agents sont définis comme $N_r = (N_b + 1)^2$, de façon à ce que N_r est une racine entière, $N_m = N_b$, tel que le nombre total de mutations soit $N_{mtot} = N_b^2$ et enfin $N_c = N_b + 1$, de cette façon, on a bien $N_r = N_b + N_{mtot} + N_c$. Dans notre modèle, on distingue 5 types de mutations sur le graphe neuronal :

1. Ajouter une connexion : Ne change pas le nombre de couche neuronale, mais ajoute une connexion à l'une d'entre elles. Comme on n'ajoute pas de neurone, la liste des connexions possibles ne change pas et le nouveau nœud va être connecté aléatoirement à un neurone pré-existant.

2. Ajouter un neurone à l'une des couches : Comme on ajoute une connection de sortie possible, on renouvelle la liste des connection. Mais vu que le reseau doit etre complet, on rajoute également une connection dans l'une des couches qui va se connecter exclusivement à cette dernière connection de sortie.
3. Ajouter une couche 1*1 : L'ajout d'une couche n'est composé que d'une connection d'entrée et d'une seule et unique sortie, ce qu'y est equivalent à un seul neurone. La position de la couche doit etre différent de celle precedante et compris entre [1,31]. L'entrée de cette nouvelle couche se connecte uniquement vers l'arriere (pas forcement ? juste position différent ?), par contre, il n'est pas necessaire que la sortie soit connecté vers l'avant, le reseau etant complet, seul lui meme est interdit. Si ce neurone se connecte vers l'arriere, il devient equivalent à un générateur d'entrée virtuelle. Comme on ajoute une connection de sortie, la liste de connection et une nouvelle connection est ajouté tout comme l'ajout d'un neurone. **(necessite correction)**
4. Enlever une connection doublon : Enlever une connection quelconque n'a pas été envisagé dans notre cas, car ils changerait radicalement la structure du reseau. En effet, elle supprimerai possiblement plusieurs connection, ce qui rendrait fortement le reseau incomplet. Par contre, comme le reseau peut etre connecté plusieurs fois à la meme sortie, il est possible d'enlever une connection doublon. Cela ne changerait pas la liste des connections de sortie possible. **(necessite correction)**
5. Enlever un neurone : Cette opération contient deux contrainte, on ne peut pas supprimer un neurone qui correspond au premier lien d'une couche donnée et que le décalage des connections soit possible. Corrolaire des définitions : on ne peut pas supprimer une couche qui ne contient qu'un seul et unique neurone et de meme pour la connection d'entrée. Tout comme l'ajout de neurone, la liste des connections de sortie possible est mise à jours. **(necessite correction)**

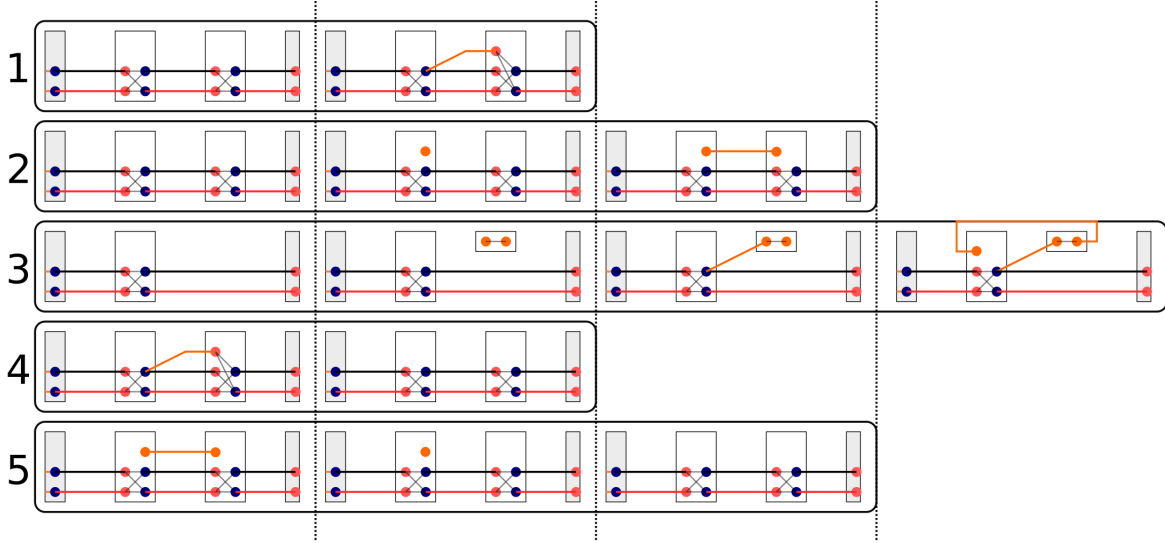


Figure 3: Algorithm visual des mutations. Respectivement les 5 types de mutations citer en paragraphes. De gauche à droite, l'etat initial vers l'etat final. Les propriétés du graphe sont à titre indicatives, cette representation tres simplifié ne reflète pas l'optimum d'une fonction. Les opérations $1 \leftrightarrow 4$ et $2 \leftrightarrow 5$ sont symétriques, l'opération 3, n'a pas de symetrie stable simple.

Dans notre modele, on conserve au minimum un neurone par couche et toujours le premier, et on ne supprime pas les couches de neurone. Ce choix plus simple permet de conserver la symetrie des opérations $1 \leftrightarrow 4$ et $2 \leftrightarrow 5$ [voir Fig 3], mais aussi de maintenir une structure vestigiale du reseau. En effet, au cours de l'evolution certaine structure sont maintenu, mais ne sont pas les choix optimums por remplir certaine fonction. Par exemple, le chemin qu'emprunte les vaisseau sanguin entre la tete et le coeur chez les mammifere emprunte un chemin non optimal, pourtant il est maintenu car serait trop couteux evolutivement pour changer de trajectoire [ref necessaire]. La vallée de stabilité evolutive lié à ce choix criticable est plus abordé en discussion.

3 Regles du jeu : TAG-GAME

Dans le cadre des processus de decision markovien, les donnée sont généré au cours de l'entrainement, c'est l'**environnement** d'entrainement. Cet environnement contient des regles et s'apparente à un jeu, la bibliotques la plus utilisé en python est *OpenGym* et sa structure à servi d'exemple pour realiser l'environnement de notre probleme. Dans notre cas, on souhaite reproduire certaine stratégie de survie que l'on observe dans le vivant, en particulier, les stratégies de prédatons et de fuites d'une proie. On a choisi pour cela le **jeu du chat et de la souris**, ou *Tag game* en anglais, en effet, on alterne entre proie lorsqu'on est souris, et prédateurs lorsqu'on est chat, ce qui pousse le modele à s'adapter à deux configurations différente. Le chats et la souris ont des "couleurs" différentes suivant les états chat/souris/adversaire/agent. Les étapes d'une partie sont les suivantes :

1. Initialement, l'agent est une proie "la souris". Il doit eviter de se faire attraper par le prédateur, "le chat". Le prédateur n'est pas un agent "intelligent", celui-ci calcul uniquement le déplacement optimal qui minimise la distance euclidienne entre le chat et la souris pour l'etat suivant. *Chat = 1, Souris = 2.*
2. Lorsque l'agent se fait "attraper" par le prédateur, il en devient lui meme un et les role s'inverse. L'agent doit maintenant attraper la proie, la nouvelle souris. La souris cette fois n'est pas un agent "intelligent", celui ci calcul uniquement le déplacement optimal qui maximise la distance euclidienne entre le chat et la souris pour l'etat suivant. *Chat = 3, Souris = 4.* La nouvelle position des agents/adversaire est calculer comme la collision entre les deux pour ne pas rester bloquer sur la meme position au temps t+1. La collision est définit comme la symmetrie axiale des deux vecteurs de deplacement à l'instant t, soit l'équation (**à implementer**) :

$$\bullet \begin{cases} Thales \\ Pythagore \end{cases}$$

3. On revient à l'étapes 1 si l'agent attrape la souris, la partie s'arrete apres N_g pas de temps.

On a dans ce cas, un agent qui interagit avec un environnement de jeu. L'agent contient les informations de **vue** et d'**action** qui va transmettre à l'environnement. L'environnement contient les information de la position de l'agent et son adversaire, ainsi que les regles de jeu et comptage de points. L'environnement peut etre vue comme une grille à limite périodique (CLP) de dimension $N \times M$ où les agents et adversaire sont des automates cellulaires avec des fonctionnement différents. L'agent dispose de 9 entrée "états", 3 sortie "action" et un reseau de neurone entre les deux, où les propriété positionnel entrée/sortie sur la grille sont généré aléatoirement en debut d'experience, puis maintenu à la descendance. Ainsi, l'agent lit 9 case sur une grille 5×5 centré sur la position de l'agent, soit 36% de son environnement local, et l'agent se déplace d'une seul case parmit 3 mouvement d'une grille 3×3 centré sur la position de l'agent, soit 33,3% de son environnement local. Par contre, l'adversaire voit uniquement la position de l'agent et de lui-meme, mais n'est qu'une fonction mathématique se deplacant suivant 4 trajectoires, haut (0,1), bas (0,-1), gauche (-1,0) et droite (1,0), minimisant ou maximisant la distance entre elle et l'agent suivant son état "chat" ou "souris". La informations positionnel sont discretisé (grille), le calcul du déplacement de l'adversaire revient à :

$$\begin{cases} d_2 = \sqrt{(v_{adv} - v_{agent})^2} \\ m_{vt} = \begin{cases} m_{vt} - \min(d_2) & \text{if IT} \\ m_{vt} + \max(d_2) & \text{else} \end{cases} \end{cases}$$

Enfin, l'environnement attribue des points à chaque étapes du jeu, l'ensemble des points donne le score de l'agent. L'attribution des points à l'agent est un parametre important en apprentissage par renforcement, un desequilibre des points peut rendre soit un agent tres "agressif" ou encore à l'opposé "passif" [ref necessaire et importante]. Pour cela, les points ont été reflechi en fonction de la taille de grille de jeu, pour une grille de jeu 16×16 , la moyenne des déplacement pour atteindre le centre quelque soit la position est d'environ 8 déplacement. Dans cette configuration, pour un calcul équilibré, les comptages des points sont les suivants :

- -1 par "pas" de temps où l'agent est un prédateur "chat"
- +10 si l'agent attrape la proie "souris" et devient la proie à son tour.
- +1 par "pas" de temps où l'agent est une proie "souris".

- -10 si l'agent est attrapé par le prédateur "chat" et devient le prédateur à son tour.^

Corrolaire : L'agent restant le plus longtemps sous l'état proie (souris) et le moins longtemps sous l'état prédateur (chats) à le plus grand score de jeu.

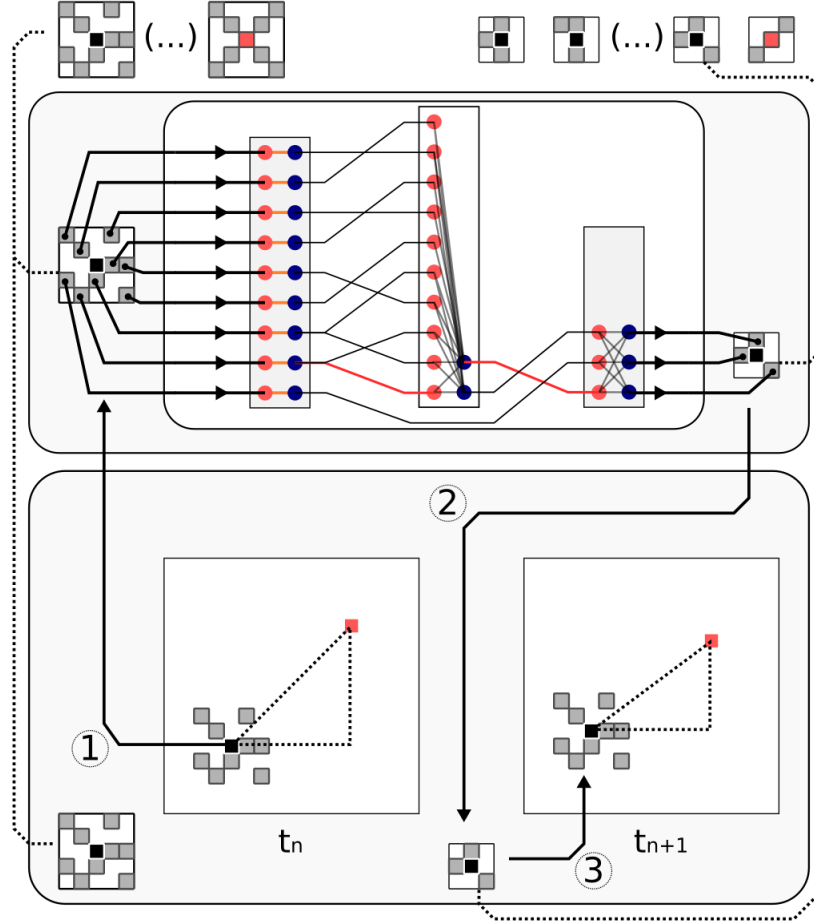


Figure 4: Les interactions entre un agent et un environnement de jeu. En haut, la génération aléatoire des positions relative possible des entree et sortie. Suivi des interactions entre l'agent en haut et l'environnement de jeu en bas. 1 : envoi de l'environnement des informations d'entrée (pixel) à l'agent; 2 : envoi de l'information de sortie de l'agent (mouvement) à l'environnement; 3 : mise à jour de la carte de jeu, l'adversaire effectue son déplacement à ce moment.

Les case des positions relative d'entrée et de sortie sont défini aléatoirement, mais comme le pourcentage des case utilisé sur la grille est au alentours de 35%, les combinaisons possibles sont de l'ordre factoriel. Pour la sortie, on a 3 positions parmi un total de 9 cases, ce qui donne $\binom{9}{3} = 84$ et comme le probleme est symetrique au 4 mouvement de l'adversaire (exemple : $(1, 2, 3) \iff (7, 8, 9)$), le nombre de combinaison est de l'ordre du nombre du nombre d'agent par génération. Par contre, pour l'entrée, on a 9 positions parmi un total de 25 cases, ce qui donne $\binom{25}{9} = 2042975$ ce qui pose un probleme de convergence de la vision optimal. Mais, comme les quadrant d'observation sont equivalent, on peut considerer uniquement les 9 cases par quadrant, ce qui nous donne par ratio de 36% $\binom{9}{3} = 84$, cela est presque un ordre au dessus du nombre de génération et ne pose moins probleme de stabilité. Les cases ayant obtenu les meilleurs scores sont classé dans l'ordre et l'on attribue la somme des points par case sur les grilles d'observation et d'action. La normalisation de la grille donne la probabilité de choisir l'une des cases pour les etapes suivantes des "challenger" et sera plus abordé dans la partie résultats. Pour

les action, on observe quelque cas typique : 3-cyclique (Exemple : $(1, 6, 8) \Rightarrow (\nwarrow, \downarrow, \rightarrow)$), 4-cyclique (Exemple : $(1, 3, 8) \Rightarrow (\nwarrow, \downarrow, \downarrow, \nearrow)$), semi-2-cyclique (Exemple : $(2, 6, 8)$), asymétrique (Exemple : $(1, 2, 3)$) et statique (Exemple : $(1, 5, 8)$). Les positions des entrée et des sorties sont donc aussi selectionné dans le processus evolutif des agents.

Résultats

Pour générer l'ensemble des données expérimentale, il est nécessaire d'avoir plusieurs agents par génération pour la convergence de la densité de probabilité des positions d'entre/sortie et plusieurs génération pour verifier s'il y a une convergence des structures neuronales. Pour que le nombre d'agent par génération soit de l'ordre du nombre de combinaison d'entree/sortie, nous avons choisi 25 agents par cycle de reproduction. 25 est le carré de 5, ce qui compatible avec l'algorithme de mutation de la structure neuronale. Ce qui donne, 4 meilleurs agents par cycle, ceux ci sont maintenu au prochain cycle et chacun recoit 4 mutation, ce qui fait 20 agents ayant des propriétés analogue à la génération precedente, les 5 restants sont des nouveaux agents avec des structures neuronale aléatoire, mais avec informations d'entrée/sortie hérité de la densité de probabilité des evement precedent. Les grilles de jeu sont de 16×16 , ce qui permet à l'agent de pas voir tout le plan de jeu, mais ne pas que l'adversaire soit trop loin lorsque l'agent est un prédateur. L'avantage de cette configuration est que l'on peut représenter l'ensemble des environnement à un temps donnée par une grille $(5 \times 16) \times (5 \times 16)$, ce qui facilité la visualisation et l'interpretation des resultats. Il est possible aussi de représenter cette grille par décomposition de deux nombre premier si le nombre d'agents par cycle n'est pas le carré d'un nombre. Cette methode correspond à la verification de la parité puis recurrence des nombre impaire jusqu'à la racine entiere supérieur du module du nombre d'agent par génération :

$$n \% \begin{cases} 2 \\ \text{impair}(\sqrt{n}) \end{cases} . \text{ Cette derniere n'a pas été utilisé ici, mais est inclu dans le programme.}$$

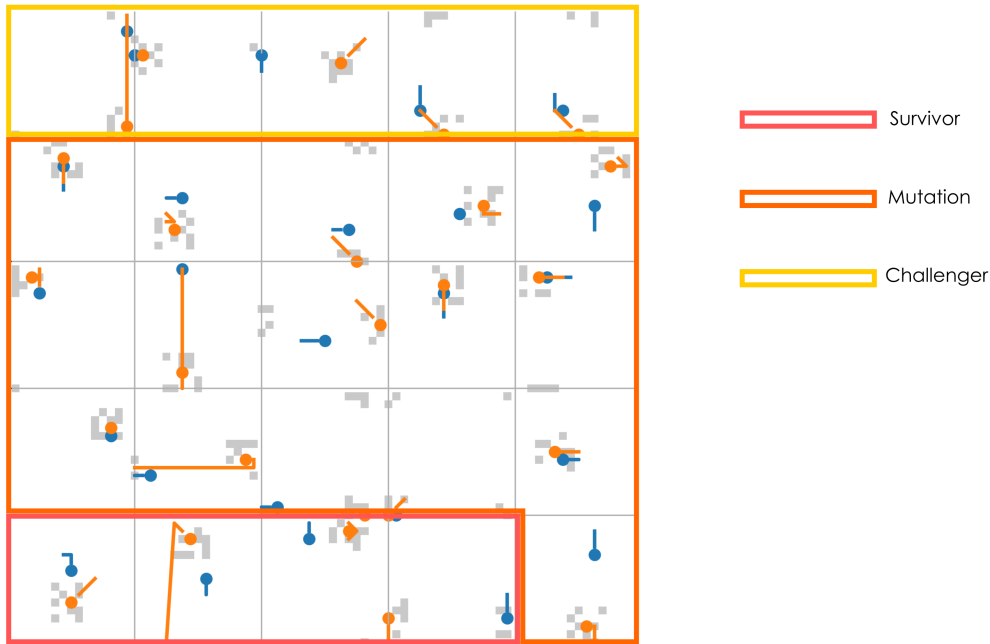


Figure 5: Representation d'une donnée expérimentale à un instant t . En encadré, les différentes catégories d'agent (survivant, mutation et compétiteur). En points bleu, les adversaires et en orange, l'agent intelligent. Les cases grisé correspond à la vue de l'agent à un instant t .

Le nombre de génération n'est pas clairement défini, mais peut, tout comme le nombre d'agent par génération, être justifié par la loi des grands nombres, si l'on considère que la loi de probabilité à une espérance. On va donc vérifier, pour 25 agents par génération, combien, il faudrait pour que la densité moyenne des entrée et des sortie

converge. Soit $N_a = 25$, le nombre de d'agent par génération, $N_c = 84$ le nombre de configuration de combinaison maximal entre entrée et sortie et N_g le nombre de génération que l'on cherche. Soit X_n , la variable aléatoire indépendante nous donnant une combinaison à chaque tirage, la limite à l'infini de l'inégalité de markov devient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{1}{N_g} X - p\right| \leq \varepsilon\right) = 0$$

De cette façon, la moyenne est un estimateur de l'esperance. On trouve pour un ε de 1% et d'un calcul par itération directe, une valeurs de 10 générations pour que la moyenne converge. Cette approximation n'est pas valable pour la convergence du reseau de neurone, ainsi, on considere que les données experimentale seront exploitable qu'a partir de $N_g > 10$.

4 Caractérisation de la convergence de la densité positionnelle des entrées/sorties

L'entrée de l'agent est défini comme la combinaison de 9 cases parmi 25, sa sortie est défini comme la combinaison de 3 cases parmi 9 [Section §3]. On cherche à verifier l'existence ou non des configurations "vue" et "déplacement" optimales au probleme du jeu du chat et la souris. Dans notre cas, à chaque cycle de reproduction, on ordonne les scores pour chacun des agents, et on additionne les scores obtenu par case de la grille de l'agent sur la grille complete. Comme le probleme est symetrique suivant les 4 directions, on considere les 4 rotation de $k\pi/2$ dans le comptage des points. On réalise cela par le produit matriciel des positions centré avec la matrice de rotation

$\begin{pmatrix} x_0 + x_c & y_0 + y_c \\ \vdots & \vdots \\ x_n + x_c & y_n + y_c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. La normalisation de la grille nous donne la proportion des meilleurs

scores obtenus des événement aléatoire. Si l'on considère que la distribution suit une loi avec esperance, alors le *théoreme de transfert* nous permet d'exprimer l'esperance d'une fonction d'une variable aléatoire X_n en fonction d'une intégrale convergente. Numériquement, il correspond à l'agorithme de *Monte-Carlo*, décrit comme :

$$G = E[g(X)] = \int g(x)f_X(x)dx$$

A partir de ce calcul, on obtient la densité de probabilité de succes lorsqu'on génère une nouvelle grille d'entrée "vue" et de sortie "déplacement". Par la loi des grands nombres, on a vue que cette densité convergent au moins à partir de 10 cycle de reproduction. On peut ainsi représenter ces deux densités sur des grilles à deux dimensions.

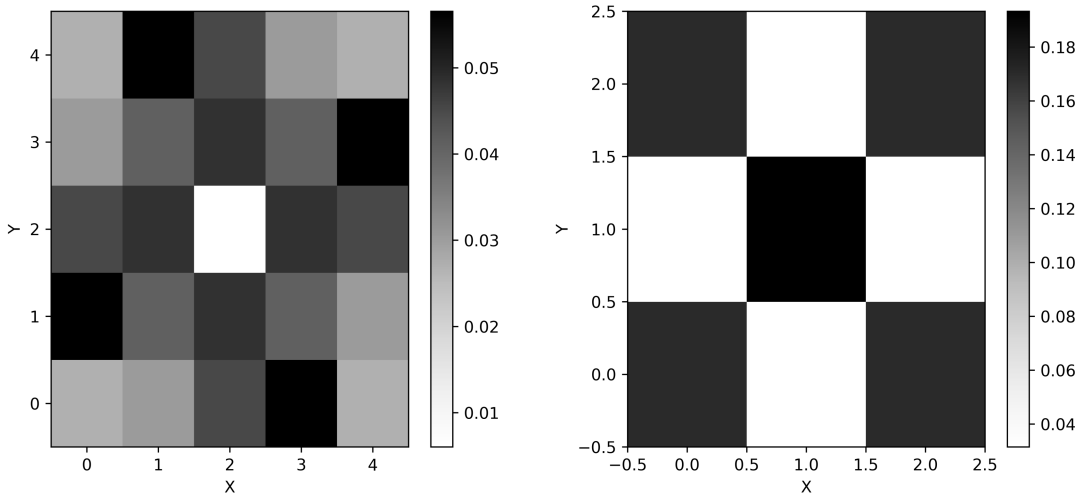


Figure 6: Mesure de la densité positionnel de succes des entree/sorties. A gauche, l'entree correspondant à la vue de l'agent et à droite la sortie, correspondant au mouvement relatif de l'agent. En nuance de gris le niveau de probabilité d'avoir plus de succes avec cette case.

On obtient pour l'entrée et la sortie deux distributions spatiale différente [voir Figure 6]. Pour l'entrée on observe 4 positions dominantes et 1 position centrale faible. Pour la sortie, on observe 4 positions en diagonal forte. En entree, l'ensemble des positions $(0, 1)$, $(1, 4)$, $(3, 0)$ et $(4, 3)$ à la probabilité la plus forte et est symétrique à l'ensemble $(1, 0)$, $(0, 3)$, $(4, 1)$ et $(3, 4)$. Cet ensemble d'entrée correspond au position au quasi-extremité de la grille 5×5 , ce qui pourrait permettre d'anticiper le mouvement de l'adversaire. Ensuite, les positions d'entree $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 1)$ et $(3, 2)$ corresponde au case qui entoure le centre de la grille, celle-ci permettent de "voir" l'adversaire lorsque celui ci est au plus proche en terme de mouvement. De plus, ces dernieres prolonge les cases en diagonale precedante. En sortie, on l'ensemble des position $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$ et $(2, 2)$ ont par somme, la probabilité la plus forte. Cette ensemble de sortie correspond au position en diagonale. On remarque que les positions qui entoure le centre $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$ et $(2, 1)$ ont les probabilités les plus faibles. Ces deux observations sur la sortie implique que le mouvements est privilégié en diagonale et semi-2-cycliques. Ces cases pourrait etre privilégier car l'adversaire n'a que 4 deplacement ($\uparrow, \downarrow, \leftarrow, \rightarrow$) non diagonaux, ce qui donne un avantage en cas de déplacement diagonal. Par contre, l'absence de symetrie complete des mouvements de l'agents ne semble pas etre un désavantage pour l'obtention d'un meilleurs score.

On remarque que les positions optimales en entrée pourrait etre corrélé avec les mouvements optimaux de sortie. En effet, les mouvements diagonaux necessite de savoir si un adversaire est positionné à sa diagonale avant que l'adversaire est fait le mouvement à $t+1$. Par exemple, si l'agent peut faire les mouvements $(1, 6, 9) \iff (\nwarrow, \emptyset, \swarrow)$, si l'adversaire est en position relative $(3, 0)$, alors en $t+1$, l'adversaire sera en $(3, 1)$, si l'agent fait le mouvement (\swarrow) , dans ce cas, il sera à la meme position que l'adversaire ce qui lui fera perdre des points, alors qu'il sera à la position a plus éloigné si il fait le mouvement (\nwarrow) . Pour vérifier la correlation entre l'entrée et la sortie, on peut regarder la convergence des familles de densité des entrées et sorties. Pour cela, on mesure la densité projeté suivant une seule dimension spatiale entre $t=0$ et $t=N_g$, ainsi que sa variation entre chaque génération.

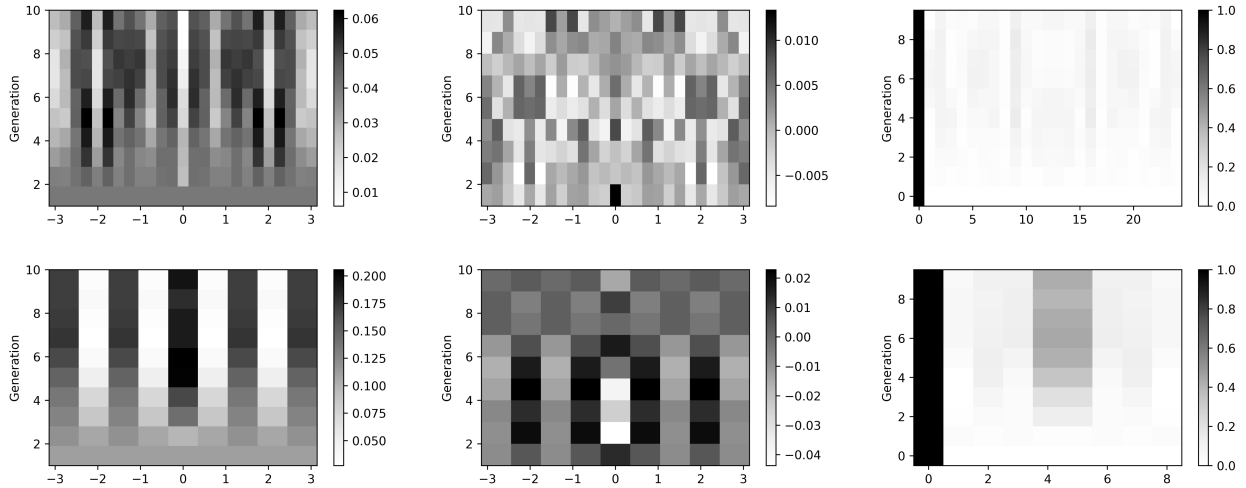


Figure 7: Mesure de la densité positionnel projeté de succes des entree/sorties en fonction du temps. À gauche, l'entrée et à droite la sortie. En haut, la densité de probabilité avec en nuance de gris le niveau de probabilité d'avoir plus de succes avec cette case. Au milieu, la variation de probabilité avec en nuance de gris le niveau de variation. En bas, les frequences harmoniques au cours du temps.

On obtient l'evolution de la distribution spatiale des entrée et des sorties [Voir figure 7]. On observe que pour l'entrée, certaine position se stabilise à partir de la 4eme génération, mais qu'il peut y avoir une alternance des positions en quasi-limite avec des positions plus centrale. Par contre, pour la sortie, les positions sont plus stable et se stabilise complètement à partir de la 5eme générations, la variation de la distribution devient quasi-homogène et semble tendre à etre constant. La variation de l'entrée est bien plus importante, on n'atteind pas d'homogénéité, meme apres 10 cycles, ce qui semble montrer qu'il y a des positions dominante, mais celle-ci oscilleront tout le temps entre plusieurs position : la suite d'entrée est semble etre semi-alternée convergente. La convergence de la suite semi-alternée pour chaque position d'entrée u_n est verifié par le rayon de convergence R_n du critere de Leibnitz :

$$u_n = (-1)^n \epsilon_n \iff R_n \leq |a_{n+1}|$$

Comme la densité de sortie semble être un invariant, et que l'entrée oscille entre quelques positions d'instabilité, on peut considérer qu'il n'influencera pas trop fortement le processus de sélection de réseau une fois stabilisé. De même l'écart fréquentiel des positions défini par la transformée de Fourier " $f_j = \sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{-\frac{2\pi i}{n} jk}$ " se stabilise (pas sur). Ainsi les challengers qui hériteront de la densité de probabilité d'I/O ne devraient pas influencer leur victoire par leurs propriétés d'entrée/sortie, mais de la nouvelle structure aléatoire. Cette hypothèse forte, sera vérifiée dans les parties suivantes et plus discutée en fin de partie.

5 Caractérisation de la connectivité du réseau de neurone

Le réseau de neurone est défini comme un graphe orienté acyclique [1.2]. Comme celui-ci est généré aléatoirement, il est nécessaire d'explorer l'étude de certains paramètres de graphes pour caractériser s'il existe ou non des propriétés dominantes au cours de la sélection.

Contrairement à la mesure de la densité, au cours de la sélection, les agents ayant les meilleurs scores sont sélectionnés, mais, les nouvelles structures sont définies aléatoirement comme à l'instant initial. Les agents sélectionnés subissent 5 mutations aléatoires, on cherche à mesurer l'effet de la mutation sur la structure du réseau et la sélection. Pour cela, on peut représenter l'ensemble des matrices adjacentes ayant eu les meilleurs résultats au cours des générations. Le graphe étant dirigé acyclique, il n'y a pas de problème de *clique* à prendre en compte.

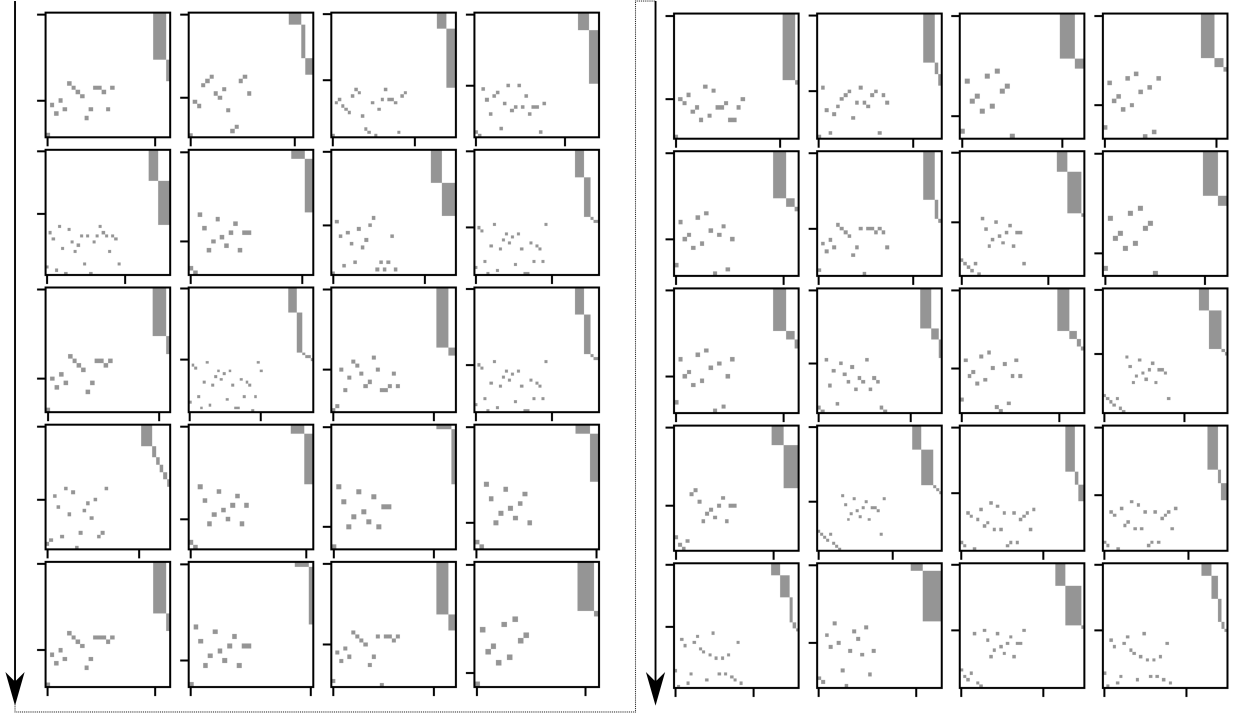


Figure 8: Evolution des réseaux des 4 meilleurs agents par générations. À gauche, de la première génération à la 5ème et à droite, de la 5ème à la dernière génération.

On obtient ainsi un ensemble de grille de matrices adjacentes de taille $N_b \times N_g$, avec N_g , le nombre de génération et N_b , le nombre de meilleurs agents par génération. On n'observe pas de structure très organisée dominante au dixième cycle, le réseau ne semble pas converger vers une structure d'équilibre. Pour autant, la matrice adjacente n'est pas suffisante pour avoir les informations des graphes, il est nécessaire de vérifier certains paramètres si l'on veut caractériser le réseau. Pour cela, on va comparer les **indicateurs de centralité**, tels que les "*degrés*", "*proximité/excentricité*", "*intermédiarité*" et "*centralité propre*" entre les 4 meilleurs réseaux et les 4 pires réseaux au cours du temps.

Le degré (ou valence) d'un sommet d'un graphe est le nombre de liens (arêtes ou arcs) reliant ce sommet, avec les boucles comptées deux fois. Il est défini pour un graphes orienté comme (...), tel que $deg(s) = d^+(s) + d^-(s)$. L'intermédiarité, *betweenness* en anglais, est une mesure de centralité d'un sommet d'un graphe. Elle est égale au nombre de fois que ce sommet est sur le chemin le plus court entre deux autres nœuds quelconques du graphe $g(v) = \sum_{s \neq v \neq t} \frac{\sigma_{st}(v)}{\sigma_{st}}$ (...). La proximité, *closeness* en anglais, d'un nœud x est défini comme la somme des distances à tous les autres nœuds, et la proximité est définie par Bavelas comme l'inverse de l'éloignement $C(x) = \frac{1}{\sum_y d(y,x)}$. Enfin la centralité propre, ou *eigencentrality* en anglais, est une mesure de l'influence d'un noeud dans un réseau et est défini par l'équation du vecteur propre de l'ensemble des voisin $x_v = \frac{1}{\lambda} \sum_t x_t$.

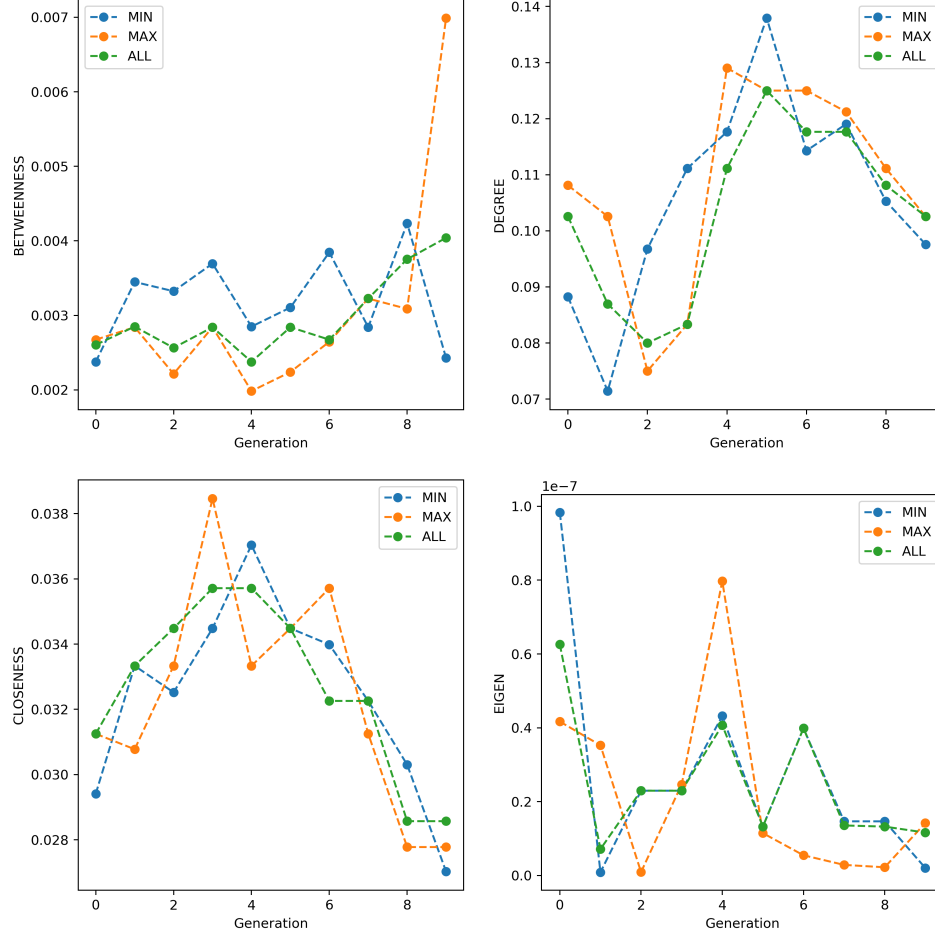


Figure 9: Comparaison des indicateurs de centralité entre les meilleurs et les pire agents. Pour chaque graphe, en abscisse le temps, en ordonnée le parametre “degree”, “betweenness”, “closeness” et “eigen”. Attention, les points sont tres proches, les effets de courbures sont accentué.

Ces différent indicateurs nous donne l'evolution de la centralité des graphes au cours des génération. Elles sont des mesures censées capturer la notion d'importance dans un graphe, en identifiant les sommets les plus significatifs indépendamment des algorithmes d'apprentissage. On obtient ainsi 4 courbes temporelles. On remarque que les courbes de centralité propre et de degré n'ont pas d'impact significatif. Par contre on observe 2 tendances différentes suivant l'indicateurs de proximité et de d'intermédiarité : L'intermédiarité augmente, mais la proximité diminue pour les agents ayant obtenu le plus grands score. Ces deux indicateurs sont plus lié à la structure des chemins qu'au flux de réseau.

Ces deux observations implique que les reseaux les plus optimaux au dernier instant sont plus efficace si le chemins entre l'entrée et la sortie est le plus longs possible, mais avec plus de proximité entre couches. Pour autant,

les données sont très comprimées, ces indicateurs ne sont probablement pas très corrélés avec l'efficacité du réseau sur le long terme.

6 Caractérisation de la convergence évolutive

Les deux observations précédentes nous ont montré qu'il y a une corrélation entre la convergence des entrées et des sorties, mais qu'il n'y a pas de convergence significative de la centralité du réseau de neurone. Néanmoins, il est possible que la structure du réseau de neurone se conserve et est un impact sur l'efficacité de résolution du problème du jeu du chat et la souris. Pour cela, il est nécessaire de suivre l'arbre des relations de parenté entre les agents entre générations, c'est la phylogénèse. Chacun des nœuds de l'arbre représente l'ancêtre commun de ses descendants, soit une "fratrie" de taille N_b . On associe à chaque nœud la valeur du score obtenu, puis on mesure la distance qui sépare la première génération mère à la dernière génération pour chaque branche du réseau.

Cette approche consiste à résoudre un problème de plus court chemin d'un graphe orienté acyclique. Tel qu'on minimise $\sum_{i,j \in A} w(i,j)x_{ij}$, avec $w(i,j)$, le coût de l'arc (i,j) . L'approche permet de quantifier le nombre de générations où une famille d'agent arrive à être conservée au cours du temps et à partir de combien de générations, on observe un agent qui est le plus efficace quelque soit l'ajout de nouveaux challengers dans le processus évolutif.

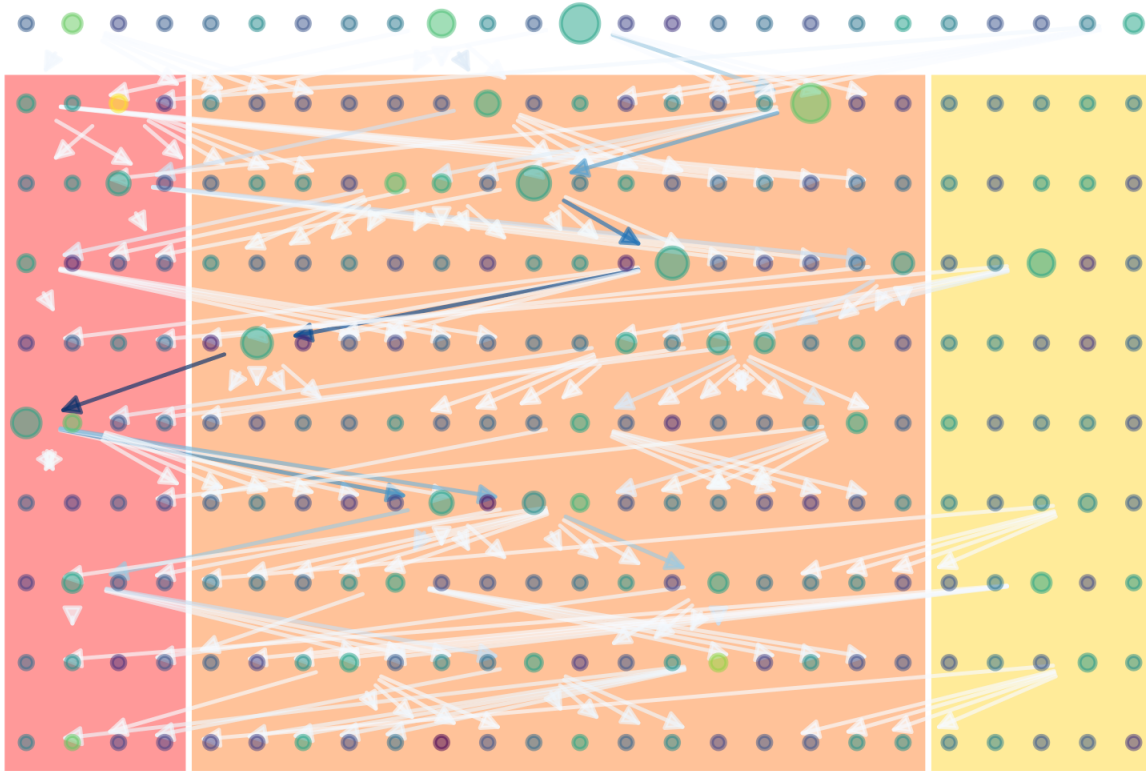


Figure 10: Arbres phylogénétiques des agents en fonction de leurs scores. De haut en bas, les générations successives. Les couleurs des nœuds correspondent au score de l'agent à la fin de l'expérience, leur taille est proportionnelle à leur nombre de descendance. En rouge les meilleurs scores. Les encadrés correspondent aux catégories d'agents : survivant, mutant et compétiteurs. (améliorer la représentation graphique)

En sommant l'ensemble des plus courts chemins, on obtient un réseau de flot, où chaque arête correspond à celle qui a mené au plus de descendance. On observe qu'un seul agent de la première génération a réussi à se maintenir jusqu'à la dernière génération, celui-ci a même été le meilleur de la 5ème génération et deuxième de la

génération suivante, ce qui l'a fait maintenir deux fois sans mutations. Un agent "challenger" de la 4eme génération a réussi à se distinguer et se maintenir jusqu'à la dernière génération. Seul deux agents de la 4eme générations se sont maintenu jusqu'à la dernière, mais ceux-ci domine à 50% la population d'agent à la dernière. Même après la stabilisation des densité positionnel d'entrée et de sortie, aucun agent challenger n'arrive à se maintenir plus d'une génération. On remarque que l'agent ayant eu le meilleurs score de l'ensemble des parties est apparu à la 2eme générations, mais celui-ci n'a pas tenu plus d'une génération ensuite.

On a donc 2 populations à la génération finale, pourtant, on aimerait savoir par quel moyen, ces agents ont réussi à ce maintenir autant. Est-ce qu'il y a une strategies mis en place par les agents pour rester le plus longtemps proie, et le moins longtemps prédateurs ? Est ce qu'il y a une stratégie qui converge au fil des génération ? La convergence évolutive est le résultat de mécanismes évolutifs ayant conduit des espèces, soumises aux mêmes contraintes environnementales, ici le jeu du chat et la souris, à adopter indépendamment plusieurs traits semblables. Dans notre cas, pour deux reseau de neurone different, on aurait 2 stratégie similaire. Pour cela, on va mesurer pour les deux groupes agents de la dernière génération ayant le plus grands ancetre, les mouvement recurant des agents par la dispersion des trajectoire et la périodicité des actions.

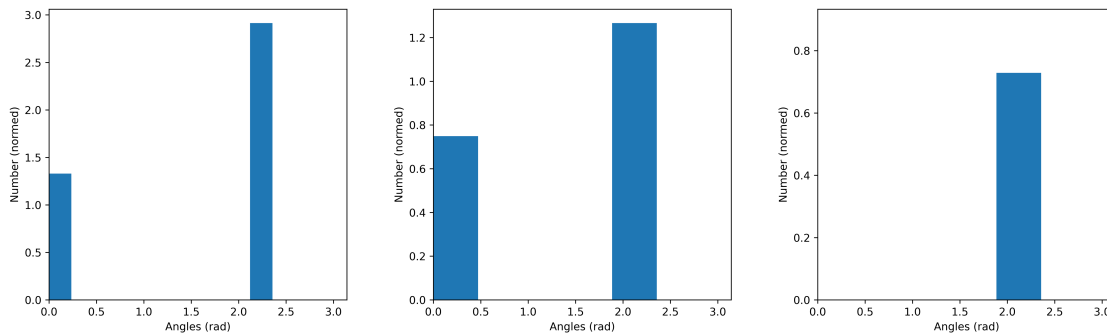


Figure 11: Convergence des strategie en fonction des embranchement les plus long : mesure de la dispersion moyenne, position moyenne et schéma recurrence (mouvement repeter de l'agent). De gauche à droite, de celui qui a le plus d'ancetre à celui en a le moins.

On mesure l'angle des vecteurs de déplacement par l'arc tangente $\arctan(\frac{x}{y})$. Ces mesure montre qu'il y a convergence des mouvements des meilleurs agents, où l'on observe que les agents oscillant entre mouvement statique (30%) et mouvement en diagonal (70%) est favorisé au cours de l'évolution. Néanmoins, nous sommes en conditions de limites périodique ou l'adversaire ne se déplace que sur les quatres directions ($\uparrow\downarrow\leftarrow\rightarrow$), ce qui donne un nette avantage à n'importe qu'elle reseau ne se déplaçant qu'en diagonale. D'autant plus que la condition limites periodique $\text{mod}(v, N)$ permet d'envoyer l'agent à l'opposé de l'adversaire sans que lui puisse le suivre car ne peut franchir la limite.

Ces dernieres observations montre bien qu'il y a une stratégie dominante, mais qu'un reseau quelconque suffit pour resoudre se probleme, il est necessaire de modifier les regles du jeu pour avoir un probleme plus optimal :

- Déplacement "collision" apres changement d'états (évite stabilisation).
- Pénaliser l'agent si répétition du meme mouvement N fois (à définir) .
- Pénaliser "legerement" l'agent s'il franchit la limite périodique de la grille. (probleme : l'agent doit voir limite : si on pose un valeurs au bord, c'est une condition limite semi-periodique)

Discussion

L'études de l'apparition de la vie et de la resolution des problemes d'apprentissage font partie de deux domaines tres différents en science. Pourtant, ces deux domaine ont souvent été impliqué l'un dans l'autre, l'un dans l'analyse des

données expérimentales de problème de régression, classification et partitionnement (corrélation de gène, transcriptome, etc, [source]), l'autre dans l'inspiration pour créer des modèles d'apprentissage lié au réseau de neurone. Ici on a vu un problème qui lie les deux, comment les réseaux de neurones peuvent se structurer au cours de l'évolution ? Cette problématique permettrait de modéliser l'apparition de vie intelligente, tout en créant de nouveaux outils pour l'apprentissage non supervisé.

CONTRAINTE GÉOMÉTRIQUE : Néanmoins cette étude peut comporter plusieurs contraintes limitantes. La première est directement liée à la géométrie des problèmes d'automates cellulaires dans des grilles 2D. Lorsque les bords du haut sont reliés à ceux du bas, et ceux de gauche, sont reliés à ceux de droite, on obtient des conditions limites périodiques de type géométrie torique. Cette géométrie simple à mettre en œuvre comporte plusieurs problèmes "LISTER LES PROBLÈMES + REF". Une autre façon, serait soit d'avoir des liens entre les limites, mais cela changerait complètement la symétrie du problème, tel que d'avoir une grille avec des limites décalées comme un pavage, ou encore d'avoir un rayon de limite, de façon à ce que le problème corresponde à un cercle, plutôt qu'à un carré.

VALLÉE DE STABILITÉ LIMITÉE : L'autre contrainte est liée au modèle de construction du réseau : il ne peut y avoir de suppression de couche de neurone. Ce choix est motivé par le fait de ne pas déstructurer complètement la topologie du réseau à chaque suppression de couche. Mais en faisant cela, on se peut retrouver avec des couches avantageuses à une génération donnée, mais inutile voire désavantageuses à une génération future. À cette génération, il est plus probable que l'agent soit plus efficace qu'un agent généré aléatoirement, on se retrouve avec un problème connu en biologie évolutive : l'apparition de structure vestigiale. Ces structures ne sont pas les plus optimales pour atteindre la vallée de stabilité du problème "physique" la plus basse, mais leur suppression nécessiterait trop de mutation, ce qui ferait sortir l'agent de la vallée de stabilité obtenue par le réseau de neurone.

COMPORTEMENT DE TRICHE : Malgré cela, on a obtenu une stratégie convergente au cours du processus évolutif et cela pour deux réseaux de neurone différents. Néanmoins le fait que le problème soit de condition limite périodique et que l'adversaire ne peut pas se déplacer en diagonale, on se retrouve avec un artefact de trajectoire. En effet, l'agent est favorisé s'il fuit la grille suivant une trajectoire diagonale. Ce critère est donc à prendre en considération pour ne pas surinterpréter les résultats. Cette observation de "triche" du réseau de neurone dans le cadre d'apprentissage par renforcement n'est pas quelque chose d'inconnu. En effet, plusieurs modèles, comme le NEAT peuvent générer des structures qui exploitent les failles d'un jeu, comme le cas où l'agent tourne en rond entre l'arrivée et le départ dans un jeu de course, ou encore l'araignée qui marche à l'envers pour optimiser sa marche [ref].

VERS UNE SYSTÉMISATION : L'optimisation de la structure du réseau est un problème qui pourrait être plus envisagé dans l'avenir des réseaux de neurones. Comme on l'a vu, il existe déjà des modèles qui optimisent la structure comme NEAT, mais il en existe d'autres. Pour ne citer que lui, il y a le modèle GNN, *Graph Neural Network*, celui-ci est par contre réservé à l'analyse des graphes. Le modèle GNN va construire un sous-graphe résultant de la convolution de plusieurs graphes à étudier, ce sous-graphe correspond au réseau de neurone le plus optimisé pour donner les informations d'un graphe de grande taille [Jie Zhou 2020]. Dans notre cas, nous avons utilisé un processus évolutif qui va changer les connexions entre couches uniquement, pour n'importe quel type d'information d'entrée, même les graphes [articles maximilien, vectorisation graph]. Néanmoins, il est possible de rendre notre modèle modulaire, en effet, il peut y avoir un niveau supplémentaire de connexion si celui-ci contient plus de fonction, ou que les entrées changent au cours du temps, comme par exemple le cas de l'étude l'évolution de la morphologie [Michał Joachimczak 2015 : passe science trouvaille]. On aurait plusieurs fonctions définies évolutivement via notre modèle, ceux-ci seraient liés à des sorties d'action, mais aussi quelque connexion entre modules neuronaux, elle-même générée par un processus évolutif similaire. L'ensemble formerait ce qu'on pourrait appeler un système.

VERS DES MODÈLES COMPLETS : Notre modèle répond à la question : Comment construire un réseau de neurone où aussi bien la structure que le processus d'apprentissage pour que soit fonctionnalisé ? Cela reste dans le cadre d'un système capable d'apprentissage évolutif, mais la pour le compléter, il faudrait que le système s'auto-entretienne, et pour cela, il faudrait ajouter la notion de nourriture/nutriment. De plus, nos agents sont indépendants les uns des autres, ce qui ne reproduit pas ce qu'il se passerait dans un écosystème réel. On pourra ainsi avoir une mesure de la valeur sélective, ou *fitness* en anglais. Pour compléter l'approche, on faudrait créer un environnement où l'ensemble des agents y serait contenu et où leur survie et reproduction serait incluse dans les règles du jeu. On peut penser le cas, où il y a des agents et de la nourriture distribuée aléatoirement avec des "tailles/ressources" différentes. Lorsqu'un agent prend de la nourriture, il gagne en taille jusqu'à sa limite, et s'il double en quantité de ressource, il va engendrer une descendance avec une mutation. Si l'agent rencontre un autre agent plus grand que lui, celui-ci peut lui faire perdre des ressources jusqu'à sa disparition et réciproquement. L'environnement contiendrait un

certain nombre limité d'agent, ou lorsque se nombre diminue, il y a une certaine probabilité de génération spontanée d'agent contenant certaine propriété optimal des agents precedant, et si celui ci dépasse, un des agents avec le moins de succes evolutif meurt aléatoirement, on qualifierai cela d'accident. Le nombre de ressource dans l'environnement apparaitrait par génération spontanée et serait plus probable que la génération spontanée d'agent. Ce type de modele semble favoriser la compétition du plus fort, il serait interessant de voir si l'on observe des comportements de coopération émerger. Aussi, on pourrait ajouter de la complexité au modele en rajoutant des regles connu en science sociale, comme la dynamique de ségregation lié à l'erreur fondamental d'attribution [Polygon, SCHELLING 1971 + Attribution], les mouvement collectif et l'exploration [Vicsek], le dilemme du prisonnier lié à la coopération [Donnant-donnant], les contrainte géographique et de langues [Braudel, Marshall], ou encore, l'héritage culturel [Bourdieu]. Ces outils pourrait etre interessant pour des simulations de vie et pour mieux comprendre l'emergence des structure sociale [Strauss, Sim's].

VERS UNE GÉNÉRALISATION : Pour aller plus loin, notre modele de structuration neuronal peut etre utiliser dans le cadre d'un probleme plus pratique et plus simple : la fonctionnalisation de la classification. En effet, il est possible d'utiliser une version β implémenté et modulaire de notre modele dans le cas d'un probleme d'analyse de données. Les nombres de reseaux aléatoire par processus d'apprentissage sont appellé des graines, à l'image des methodes de partitionnement. Celui ci s'utilise de cette facons en Python :

```
import functional_fillet as ff
# init
model = ff.model(BATCH_SIZE, NB_GEN, NB_SEEDER)
# training
model.fit(DATA, LABEL)
# predict
result = model.predict(DATA_NEW)
```

L'avantage de cela est qu'on peut aussi comparer l'efficacité de notre reseau evolutif "structuré" avec un reseau de neurone classique predefini. Un base de donnée simple et qui ne dispose pas d'un nombre élevé d'etiquette est le jeux de donnée MNIST, adapté pour la reconnaissance de chiffre sur une image. Il sera possible ensuite d'analyser l'effet de différent parametre comme la taille du "batch" et la taille du nombre de graine par génération. Il sera aussi possible d'etudier la vitesse d'apprentissage d'un reseau : Est ce qu'un reseau tres adapté à un probleme apprend vite au debut, mais atteint un plafond moins optimale qu'un reseau moins adapté au debut, mais à la suite devient plus performant ? Cette question de comparasion entre le cycle d'hérédité et cycle d'entrainement est un probleme ouvert et pourra etre abordé dans le cadre d'un futur projet.

References

- [1] Stuart Bartlett and Michael L. Wong. Defining lyfe in the universe: From three privileged functions to four pillars. 10(4):42. Number: 4 Publisher: Multidisciplinary Digital Publishing Institute.
- [2] John Tyler Bonner. The origins of multicellularity. 1(1):27–36.
- [3] Roger Buick. When did oxygenic photosynthesis evolve? 363(1504):2731–2743. Publisher: Royal Society.
- [4] S. Blair Hedges, Jaime E. Blair, Maria L. Venturi, and Jason L. Shoe. A molecular timescale of eukaryote evolution and the rise of complex multicellular life. 4(1):2.
- [5] J. Huxley. Evolution. the modern synthesis. Publisher: London: George Alien & Unwin Ltd.
- [6] Andrew Knoll, Malcolm Walter, Guy Narbonne, and Nicholas Christie Blick. The ediacaran period: a new addition to the geologic time scale. 39(1):13–30. _eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1080/00241160500409223>.
- [7] S. J. Mojzsis, G. Arrhenius, K. D. McKeegan, T. M. Harrison, A. P. Nutman, and C. R. L. Friend. Evidence for life on earth before 3,800 million years ago. 384(6604):55–59. Number: 6604 Publisher: Nature Publishing Group.