Mesure :

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

Théorème de Vaschy-Buckingham (Pi) :

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0$$
$$F(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_p) = 0$$
$$\pi_i = q_1^{a_1}\, q_2^{a_2} \cdots q_n^{a_n}$$

Un choc élastique (3 loi de conservations) :

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{r_1}} \wedge m_1\vec{\mathbf{v_1}} + \vec{\mathbf{r_2}} \wedge m_2\vec{\mathbf{v_2}} = \vec{\mathbf{r'_1}} \wedge m_1\vec{\mathbf{v'_1}} + \vec{\mathbf{r'_2}} \wedge m_2\vec{\mathbf{v'_2}} \\ m_1\vec{\mathbf{v_1}} + m_2\vec{\mathbf{v_2}} = m_1\vec{\mathbf{v'_1}} + m_2\vec{\mathbf{v'_2}} \\ m_1\mathbf{v}_1^2 + m_2\mathbf{v}_2^2 = m_1\mathbf{v}_1'^2 + m_2\mathbf{v}_2'^2 \end{cases}$$

Solution vectorielle :

$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 - \frac{2m_2}{m_1+m_2}\, \frac{\langle \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2,\, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\rangle}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^2}\, (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2),$$
$$\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{2m_1}{m_1+m_2}\, \frac{\langle \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1,\, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\rangle}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|^2}\, (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$$

Symétrique par rotation :

$$R(\theta).\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.\vec{\mathbf{x}}$$

Champs de force global (PFD) :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{v}}}{\mathrm{d}t} = m\vec{\mathbf{\Gamma}}(\vec{\mathbf{x}}) \Leftrightarrow \mathbf{v}_{\vec{t+1}} = \vec{\mathbf{v}_t} + dt.\vec{\mathbf{\Gamma}}(\vec{\mathbf{x}})$$

Champes de force local (Vicsek) :

$$v(\mathbf{r}, \Theta) = \mathbf{r}.e^{i\Theta} = \Re(v) + i\Im(v)$$
$$\Theta_i(t+\Delta t) = \langle \Theta_j \rangle_{|r_i - r_j| < R} + \eta_i(t)$$
$$\mathbf{r}_i(t+\Delta t) = \mathbf{r}_i(t) + v\Delta t \begin{pmatrix} \cos\Theta_i(t) \\ \sin\Theta_i(t) \end{pmatrix}$$

Potentiel thermodynamique :

$$\mu_i = \left(\frac{\partial U}{\partial n_i}\right)_{V,S,n_{j\neq i}} = \left(\frac{\partial G}{\partial n_i}\right)_{P,T,n_{j\neq i}} \mathrm{d}U = -P\,\mathrm{d}V + T\,\mathrm{d}S + \sum_{i=1}^{N} \mu_i\,\mathrm{d}n_i G = V\,\mathrm{d}P - S\,\mathrm{d}T + \sum_{i=1}^{N} \mu_i\,\mathrm{d}n_i$$

Equation locale de diffusion (loi de Fick) :

$$c(t+1, x_i) = h + D\sum_{r<R} c(t, x_j) = h + D(c(t, x_{i+1}) + c(t, x_{i-1}))$$

Diffusion locale avec réactif (Turing) :

$$c(t+1, x_i) = sign\left[h + \sum_k D_k \sum_{r<R_k} c(t, x_j)\right]$$

Réseau de Bravais :

$$\mathbf{R} = n_1\mathbf{a}_1 + n_2\mathbf{a}_2$$

Méthodes d'approximation des milieux continues (serie de Taylor) :

$$f(x_0 + a) = f(x_0) + a\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x} + \frac{a^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2 f(x_0)}{\mathrm{d}x^2} + O(n)$$

Equation de la diffusion :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x}$$

Schéma d'Euler (Laplacien) :

$$u''(x,y) = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix} u(x,y)$$

Résolution dans l'espace propre du systeme :

$$\frac{U_{n+1}-U_n}{dt} - \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} U_n = 0 \Leftrightarrow U_{n+1} = M \cdot U_n$$

Cinétique chimique de $2A + B \xrightarrow{\mathbf{k}} 2C$:

$$\frac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}[B]}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}[C]}{\mathrm{d}x} = -k[A]^2[B]^1$$

Modèle de Gray-Scott :

$$\begin{cases} U + 2V \xrightarrow{1} 3V \\ P \xrightarrow{\mathrm{f}} U \\ V \xrightarrow{\mathrm{f+k}} P \\ U \xrightarrow{\mathrm{f}} P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -uv^2 + f(1-u) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= +uv^2 - (f+k)v \end{aligned}$$

Marche aléatoire (Chaine de Markov) :

$$\mathbb{P}\Big(X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i\Big) = \mathbb{P}\left(X_{n+1} = j \mid X_n = i\right).$$

Force electromagnétique :

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} \Leftrightarrow X < R \Rightarrow X_{t+1} = X_t$$

Dimension Fractale (autosimilarité) :

$$a^{D_h} \ ; \ D_h = \frac{\ln(N)}{\ln(\frac{1}{r})}$$

Évolution du rapport de dimension :

$$C(r) \equiv N^{-1} \sum_{r'} \rho(r')\rho(r'+r)$$

Entropie (theorie de l'information) :

$$H_b(X) = -\mathbb{E}[\log_b P(X)] = \sum_{i=1}^{n} P_i \log_b\left(\frac{1}{P_i}\right) = -\sum_{i=1}^{n} P_i \log_b P_i$$

Lagrangien (symetrie de Noether) :

$$L = E_c - E_p = T - V$$

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}$$

Double pendule (Espace des phases $\dot{\theta}(\theta)$):

$$\dot{p}_{\theta_1} = \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -\tfrac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) + 3\frac{g}{l}\sin\theta_1\right)$$

$$\dot{p}_{\theta_2} = \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -\tfrac{1}{2}ml^2\left(-\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) + \frac{g}{l}\sin\theta_2\right)$$

Fonction de transfert :

$$Y(s) = H(s)\ X(s)$$

Réponse impulsionnelle :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau.$$

-

Transformations en Z :

$$H[z] = \frac{Y[z]}{X[z]} = \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$$

Series de Fourier (Diffusion) :

$$\frac{Y'(t)}{\alpha Y(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} T(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha t}{L^2}}$$

Coefficient de Fourier (Parseval) :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{T}\int_T |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \|f\|^2$$

Harmonique d'un signal :

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_T f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\frac{n}{T}t}\mathrm{d}t$$

Filtre passe-bande (second ordre) :

$$h(jw) = \frac{A_0}{1 + j \cdot Q \cdot (x - \frac{1}{x})}$$

Filtre de Kalman ($X_t = X_{t-1} + v_{(x,t-1)}.dt$.) :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k$$

Régulateur PID :

$$u(t) = K_\mathrm{p}\epsilon(t) + K_\mathrm{i}\int_0^t \epsilon(\tau)\,d\tau + K_\mathrm{d}\frac{d\epsilon(t)}{dt}$$

Commande linéaire quadratique :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)\mathbf{y}(t) = C(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t)$$

Méthodes Monte-Carlo (Theorement de transfert) :

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X)\right] \overset{\text{def.}}{=} \int_\Omega \varphi\big(X(\omega)\big)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) = \int_\mathbb{R} \varphi(x)\mathbb{P}_X(\mathrm{d}x)$$

Fonction d'un transition d'etats optimum :

$$V^*(s) = \max_{a\in A}\sum_{s'\in S}[R(s,\pi(s),s') + \gamma V^*(s')]T(s,a,s')$$

Equation de Bellman :

$$Q^*(s,a) = \sum_{s'\in S}[R(s,a,s') + \gamma \max_{a'\in A} Q^*(s',a')]T(s,a,s')$$

Récompense et Regret (Exploration/Exploitation) :

$$r_n = n\mu^* - \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(\mu_{I_k})$$