MATHEMATIQUES

Axiomes d'extensionnalité : $A\subset B \quad B\subset A \quad dim(A)=dim(B) \quad A=B$ $\quad A\cup B=A\oplus B-A\cap B \quad A\cap B=A.B|A=B.A|B$

$E=\{n\in[-10,x]\cap\mathbb{Z} \mid x\in\mathbb{R} \;;\; -3<x\leqslant 2\}=\{-2,-1,0,1,2\}$ $\quad (A_1,A_2)|B=(A_1|B).(A_2|(B,A_1))$

Conditional (t+1)

Logique : $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(\neg p\vee q) \quad \neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$

Equivalence

Relation binaire : $x\,\mathfrak{R}\,y \quad x\,\mathfrak{R}\,x \quad x\,\mathfrak{R}\,y\Leftrightarrow y\,\mathfrak{R}\,x \quad (x\,\mathfrak{R}\,y\wedge y\,\mathfrak{R}\,x)\Rightarrow x=y \quad (x\,\mathfrak{R}\,y\wedge y\,\mathfrak{R}\,z)\Rightarrow x\,\mathfrak{R}\,z$

Ordre

Endomorphisme

Application : $f:E\rightarrow F|x\mapsto f(x)=y \quad E\rightarrow E \quad f\circ f^{-1}=e \quad c_{i,j}=\sum_{R=1}^{n}a_{i,R}\cdot b_{R,j} \quad dim(E,F)=dim(M_{np})=n\times p$

Groupe — Anneau

Structure interne : $(E,*) \quad a*b\in E \quad (a*b)*c=a*(b*c) \quad e*a=a \quad x(y+z)=xy+xz \quad a*b=b*a=e$

$\varphi:(G,\bigstar)\rightarrow(H,*)\,;\varphi(G_1\bigstar G_2)=\varphi(G_1)*\varphi(G_2)=H_1*H_2$

Linéarité : $f(x,y)=f(a\cdot x+y)=a\cdot f(x)+f(y) \quad F\neq\varnothing \quad F\subset E \quad u_{[a,i]}+u_{[i,j]}+u_{[j,c]}=u_{[a,c]}$

Base vectorielle : $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot e_i=0\Rightarrow\lambda_i=0 \quad x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot e_i \quad L_i\leftarrow\lambda\cdot L_i; \quad L_i\leftarrow L_i+\lambda\cdot L_j; \quad L_i\leftrightarrow L_j \quad (A|I_n)\rightarrow(I_n|A^{-1})$

Théorème de géométrie : $(DE)\|(BC) \quad (d') \quad (AB)\nparallel(AC) \quad \tan(\phi)=\frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)}=\frac{[AB]}{[BC]}$

Produit&vecteur : $\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R} \quad \vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'=\langle u|v\rangle=\|u\|\cdot\|v\|\cdot\cos(\widehat{(u,v)}) \quad \frac{\langle u|v\rangle}{\langle u|u\rangle}\vec{e}_i; \quad \vec{u}\otimes\vec{v}=u_i\cdot v$

$[u,v,w]=det_B(u,v,w)=(u\wedge v)\cdot w$

Equation paramétrique : $f(t)=\overrightarrow{AM}=k\cdot\vec{u} \quad q(x,y)=ax^2+bxy+cy^2=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{4ac-b^2}{4a}\right)y^2$

Conique : $\Delta=b^2-4ac \quad d=|det(\overrightarrow{AP},u,v)|/\|u\wedge v\| \quad \|u\wedge v\|=\|u\|\cdot\|v\|\cdot\sin(u,v) \quad (a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Lieu géométrique : $arg(z)=(\vec{u},\overrightarrow{OM})=\theta \quad z=\Re(z)+i\Im(z)=\rho e^{i\theta} \quad arg(Z_1\cdot Z_2)=arg(Z_1)+arg(Z_2)$

$i^2=j^2=k^2=ijk=-1 \quad q=a+bi+cj+dk=a+\vec{v} \quad q_1q_2=(a_1a_2-\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2)+(a_1\vec{v}_2+a_2\vec{v}_1+\vec{v}_1\wedge\vec{v}_2)$

Noyau : $Ker\,f=f^{-1}\{e_F\}=\{x\in E|f(x)=e_F\}=\{X\in\mathbb{R}^n|A\cdot X=0\} \quad Ker\,f=e_E$ Injectif

Solution as CL

Image : $Img\,f=f(E)=\{y\in F|\exists x\in E,f(x)=y\}=vect((\overrightarrow{v_{colonne}})_n) \quad Img\,f=F$ Surjectif

Théorème du rang : $Rg(f)+dim\,Ker(f)=dim(E) \quad Rg(f)=dim(Img(f))$

Théorème isomorphisme : $f:G\rightarrow G',f(x\cdot H)=f(x\cdot Ker\,f)=f(x) \quad Card(G)=Card(Ker(f))\times Card(Img(f))$

VVE propre : $M_{nn}\cdot\vec{v}_i=\lambda_i\vec{v}_i \quad \exists B,\; M_\lambda{}'=P^{-1}MP \quad P^{-1}=\frac{{}^t com(P)}{det(P)} \quad p_m(X):=det(X.I-M)=\prod_i(X-\lambda_i)$

$det(C_1,\ldots,aC_i{}'+C_i{}'',\ldots,C_n)=a\,det(\ldots C_i{}'\ldots)+det(\ldots C_i{}''\ldots) \quad det(A_3)=a_{(i,1)}.det(A_{2,i+1}) \;;\; det(A_2)=ad-bc$

Décomposition PLU : $A=P.L.U \quad det(A)=det(P).det(L).det(U) \quad P=\delta_{i,\sigma(j)}=\begin{matrix}1 & i=\sigma(j)\\ 0 & i\neq\sigma(j)\end{matrix}$

Evaluation polynome : $P[X]=a_nX^n+\ldots+a_0 \quad (1,X,\ldots,X^n) \quad P\rightarrow u(P)=\sum(C_i)\cdot u(X^i)$

Théorème fondamental Algèbre : $(X-1)^n \;;\; 1=e^{i\frac{2\pi k}{n}} \quad \frac{A(x)}{B(x)}=Q(x)+\frac{R(x)}{B(x)} \quad \downarrow \quad P\circ P=X.P'^2 \quad deg(P)^2=2(deg(P)-1)+1$

Division euclidienne : $P(X)=D(X)\cdot Q(X)+R(X) \quad PGCD(P,D)=PGCD(D,R) \quad PPCM=\frac{|P.D|}{PGCD(P,D)}$

Nombre premier : $a\times m+b\times n=PGCD(a,b)=1$ $\quad a|bc\wedge PGCD(a,b)=1\Rightarrow a|c\Leftrightarrow ak=c \quad a^p\equiv a\,mod\,p\equiv a[p]\Leftrightarrow\frac{a^p-a}{p}=k\in\mathbb{Z} \quad n=p_1^{\alpha_1}.(\ldots).p_m^{\alpha_m}$

Théorème de Lagrange : $H<G \;,\; |H|\,divise\,|G| \quad \forall g\in G \;,\; g^{card(G)}=e \quad \exists g \;,\; \langle g\rangle=\{g^k\}$

Composition de transposition : $\sigma=\begin{pmatrix}a & b & c\\ b & c & a\end{pmatrix}=(a\;b\;c)=(a\;b)\circ(b\;c) \quad \sigma\circ\sigma(a)=c \;;\; \epsilon(\sigma)=(-1)^{N_t}$

Contraposé : $A\Rightarrow B\equiv\neg B\Rightarrow\neg A \quad \forall:(n^2[2]=0\Rightarrow n[2]=0)\Leftrightarrow\begin{matrix}(\neg(n[2])=1\Rightarrow\neg(n^2[2])=1)\\ ((2k+1)[2]=1\Rightarrow(2k+1)^2[2]=1)\end{matrix}$

Absurde : $(A\Rightarrow B)\wedge(\neg B\Rightarrow\neg A) \quad \sqrt{2}=p/q \;;\; p[2]=0,q[2]=0\Rightarrow\sqrt{2}[2]=0$

Récurrence : $\downarrow\begin{matrix}P(0)\\ \forall n,P(n)\Rightarrow P(n+1)\end{matrix} \quad \downarrow\begin{matrix}(a+b)^0=1 \;;\; \binom{0}{0}a^0b^{0-0}=1\\ \forall n,(a+b)^n=\sum\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\end{matrix} \quad \binom{n}{k}=\frac{1}{k!}\frac{n!}{(n-k)!} \;;\; (n+1)!=n!(n+1)$

Inégalité : $|\langle x|y\rangle|\leqslant\|x\|\|y\| \quad \|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\| \quad P(|X|<a)\leqslant\frac{E(|X|^p)}{a^p} \quad P(A)=Cd(A)/Cd(\Omega)$

Limite : $u(n)\sim_{+\infty}v(n) \quad \lim_{n\rightarrow+\infty}\frac{u(n)}{v(n)}=\lim_{n\rightarrow+\infty}\frac{v(n)}{u(n)}=1 \quad \lim_{x\rightarrow0}f(x,x)=\lim_{x\rightarrow0}f(x,ax)$

Exponentiel : $(e^{\pm i\theta})^n=(\cos(\theta)\pm i\sin(\theta))^n=\cos(n\theta)\pm i\sin(n\theta) \quad e^{a+b}=e^a+e^b \quad \ln(a^n)=n\ln(a) \quad \log_p(x)=\frac{\ln(t)}{\ln(p)}$

Théorème valeur intermédiaire : $\forall f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R} \quad \forall u\in[f(a),f(b)] \quad \exists c\in[a,b] \;,\; f(c)=u$

Théorème continuité : $f:I\rightarrow\mathbb{R} \;,\; ([|x-a|<\delta \;\Rightarrow\; |f(x)-f(a)|<\epsilon]) \quad C_l:[a^-,a^+]$

Boule : $B(a,r)=\{x\in E \mid \|x-a\|<r\} \quad A=\{(x,r)\in\mathbb{R}^2,a\leqslant f(x,y)\leqslant b\}$

Théorème point f xe : $g:E\rightarrow E \quad g(x)=x \quad d(f(x),f(y))<k.d_E \quad k\in[0,1]$

Dérivée : $f'(x)=\lim_{h\rightarrow0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{df}{dx} \quad (f\circ f^{-1})'=1 \quad v(u)'=u'.v'(u) \quad |u|=\sqrt{x^2} \quad (u.v)'=u'v+v'u$

Théorème accroissement f ni : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \quad |f'(c)|\leqslant M \quad f((1-t)a+tb)\leqslant(1-t)f(a)+tf(b)$

Positive := croissante

Unique := concave / convexe

Hopital : $\lim_{x\rightarrow a^*}\frac{f(x)}{g(y)}=\frac{f'(a)}{g'(a)} \quad (u^\alpha)'=\alpha u^{\alpha-1}u' \quad (\ln(u))'=u'/u$

Théorème encadrement : $f\leqslant g\leqslant h \quad \lim_a f=\lim_a h=L \quad \lim_a g=L \quad \lim\inf(u_n)=\lim\sup(u_n)$

Critère de convergence : $\lim(f_n(x))\rightarrow_s f(x) \quad \lim\sup|f_n(x)-f(x)|\rightarrow_{+\infty}0 \quad |\sum u_n|<\epsilon \quad u(x)-\sum(-1)^nv_n\leqslant|a_{n+1}|$

$P_{n+1}=P_n.T\rightarrow P(X=E_i).T=P(X=E_i)$

Règle d'Alembert : $|f_n(x)|\leqslant a_n \quad \sum a_nx^n \quad \lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l=\frac{1}{R} \quad S_j-S_{i-1}=\sum_i^j q^k=\frac{q^i-q^{j+1}}{1-q}$

Régularité : $C^1:\lim_{t\rightarrow p}f(t)=f'(p) \quad C^2:\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}$

Serie de Taylor : $a_k=\frac{f^{(n)}(a)}{k!} \quad P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-a)^k \quad (1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n \quad e^{ix}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^n}{n!} \quad \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$

Suite Lᵖ : $\|x(n)\|_p=(|x_1(n)|^p+(\ldots)+|x_n(n)|^p)^{1/p}$

Jacobien : $J_F(M)=\begin{vmatrix}\partial f_1 & \partial x_n\\ \partial x_1 & \partial f_m\end{vmatrix} \quad \phi(x,y)\rightarrow\phi(r,\theta) \;;\; J_\phi=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix} \quad K=\partial_x^2\cdot\partial_y^2-(\partial_x\partial_y)^2$

Résidu : $f(z)=\frac{q(z)}{p_0(Z).(\ldots).p_n(z)} \quad Res(f(z),p_i(z))=\lim_{z\rightarrow p_i}q(z)/\prod_{j\neq i}p_j(z)$

Critère d'intégration : $\lim_{t\rightarrow[a^+,+\infty]}(t-a)^\alpha f(t)=0 \quad \int_a^b f(t)\,dt=\frac{b-a}{n}\sum_n^{N\rightarrow+\infty}f(a+k(b-a)/n) \quad \sum(n+m)=\sum(n(1+\frac{m}{n}))$

Théorème fondamental d'analyse : $A'(x)=f(x) \quad \int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$

Théorème changement de variable : $\int_V g(y_i)\,dy_i=\int_U g(F(x_i)).|detJ_F(x_i)|\,dx_i \quad dy=f'(x)dx \;,\; \alpha=f'(a)$

Théorème convergence dominée : $(f_n)\in(E,A,\mu)\rightarrow f \quad \lim_{n\rightarrow+\infty}\int f_n(\mu)\,d\mu=\int\lim_{n\rightarrow+\infty}f_n(\mu)\,d\mu$

Transformée : $\tilde{f}(\omega)\propto\int_\alpha^\beta f(x).e^{-pt} \quad \mathrm{T}(f(t-\tau)u(t-\tau))=\tilde{f}(\omega).e^{-\tau\omega} \quad t.u(t-1)-u(t-1)+u(t-1)$

Equation dif érentielle : $a(x)y'+b(x)y=c(x) \quad \int\frac{y'}{y}=-\int\frac{b(x)}{a(x)} \quad y_p=\lambda(x).f(x) \quad y_p=P[X].e^{Q[X]};Q[X]\in\mathbb{C}$

Théorème Cauchy-Lipstchitz : $x^{(p)}=f(t,x,\ldots,x^{(n)}) \quad y''+y=0\rightarrow X(t)=(y,y') \quad X(t)=\sum\alpha_ie^{\lambda_it}u_i$

Théorème de transfert : $G=E[g(X)]=\int g(x)f_X(x)\,dx=\sum g(x_i).f(x_i) \quad F_X=P(X\leqslant x)$

Théorème central limite : $Z_n=\frac{\bar{X}_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \quad \lim_{n\rightarrow+\infty}P(Z_n<z)=\Phi_{N(0,1)}(z) \quad \sigma\rightarrow\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad I_n=\left[\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$