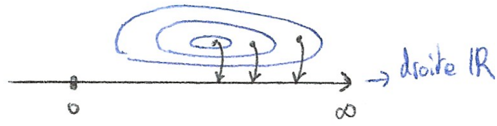
MESURE

• Principe et Problématique :

→ Fonction qui associe une grandeur numérique à un certain sous-ensemble d'un ensemble donnée :

$$\mu : P(E) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$



→ Generalisation de concept de longeurs, aire ou volumes dans un espace.

↳ mesure physique ⇔ uniquement des distances sur appareil etallonée. ex : $\underbrace{7}_{\text{grandeur/valeur}}$ $\underbrace{\text{cm}}_{\text{unité}}$

• Condition : • $\mu(\emptyset) = 0$

• $\mu\left(\bigsqcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$ → vrai uniquement si fini $\begin{cases} \cancel{m(A)} + m(B) = \cancel{m(A)} + m(C) \\ \text{ssi } m(A) < \infty \end{cases}$

• Mesure de comptage : $E = \mathbb{N}$ $\quad m : P(E) \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $\quad A \longmapsto \text{card}(A)$ } Fondement des probabilités avec $E = \underset{\text{univers}}{\Omega}$ et $P(\Omega) = 1$

• Construction d'une structure borélienne : → définition d'un ensemble mesurable dans un espace métrique ?

• Semi-Anneaux : • structure : $(S, +, \times, 0, 1)$ avec $S \subset P(\Omega)$

• propretes : • $(S, +, 0)$ commutatif • $\times$ est distributif

• 0 est absorbant pour $\times$: $x \in E$, $x \times 0 = 0 \times x = 0$

• Condition : • $\forall A, B \in S$, $A \cap B \in S$ → stable par intersection fini

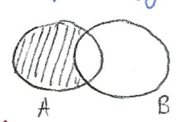
• $\forall A, B \in S$; $\exists C_i \in S$ 2 à 2 disjoint tel que : $C_i \cap C_j = \emptyset$

• Clan : Semi-anneau d'ensembles : $\mathcal{C} \subset P(\Omega)$

• Conditions : • $\forall A, B \in \mathcal{C}$, $A \cup B$ → stable par union d'element fini.

• $\forall A, B \in \mathcal{C}$, $A_{/B} \in \mathcal{C}$ → stable par difference.

↳ $= A \cap B^c$



• Une Algebres : → anneau commutatif $(E, A, +, \cdot, \times)$, une A-algèbre :

module sur A

• Conditions : • $G \subset P(X)$ partie

• $G \neq \emptyset$

• $\forall A, B \in G$, $A \cup B \in G$

• $A^c \in G$

} une Algebre-fini est une tribu

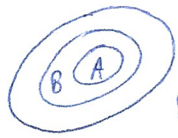
Rappel : Une famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un generalisation de suite

Structure borélienne :

- **Tribu** : Soit Ω, un ensemble non vide, et soit $\mathcal{B}$, une famille non vide de parties de Ω. On dit que $\mathcal{B}$ est une tribu, si :
  - $E \in \mathcal{B} \Rightarrow \Omega \setminus E \in \mathcal{B}$
  - $\forall (E_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$; $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{B}$

↳ propriétés : Soit $(\Omega, \mathcal{B})$ un espace mesurable.

- Si $A, B \in \mathcal{B}$, alors $A \cup B \in \mathcal{B}$
- $\forall (E_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{B}$
- Si $A, B \in \mathcal{B}$, et $A \subset B$ alors $B \setminus A \in \mathcal{B}$



$B \setminus A = (\Omega \setminus A) \cap B$

↳ **Tribu engendrée** : On appelle tribu engendrée par C (famille quelconque) et on note $\sigma(\mathcal{C})$ la plus petite tribu de partie Ω contenant C.

propriétés : • $(C_i)_{i \geq 1}$ famille de tribus de Ω = $\bigcap_{i\in I} C_i \rightarrow$ une tribu

↳ **Tribu Borelienne** : Soit (E, d) un espace metrique. Notons Θ, l'ensemble des ouverts de E. On appelle tribu borelienne de E, et on note $\mathcal{B}(E)$, la tribu $\sigma(\Theta)$. $\Rightarrow$ intersection de toute les tribu qui contient les ouverts.

propriétés : • ouvert, fermée, $\{x\}$ sont boreliens
• tout sous-ensemble denombrable est borelions. $\rightarrow \mathbb{R}$ par reunion d'intervalle.

↳ **Tribu Trace** : Pour $A \subset \Omega$, on a : $\mathcal{B}_A = \{A \cap B,\ B \in \mathcal{B}\}$ → element interne (de partie de A)
La tribu $\mathcal{B}_A$, s'appelle la tribu trace de $\mathcal{B}$ sur A.

Fonction mesurables : → implique "integrable"

- **Continuité** : Une application $f : E \rightarrow E'$, espace metrique, continue ssi $f^{-1}(\Theta)$ est ouvert dans E, $\forall \Theta \subset E'$.

↳ Soit $(\Omega, \mathcal{B})$ et $(\Omega', \mathcal{B}')$ deux espaces mesurables. une application $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ est mesurable si

$$\forall A \in \mathcal{B}',\ f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$$

→ si $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$ et $\forall C \in \mathcal{C},\ f^{-1}(C) \in \mathcal{B}$ → alors f est mesurable

Fonction mesurable (suite)

↳ la mesurabilité une une notion locale ⇔ voisinage.

Def. $f : (\Omega, \mathcal{B}) \longrightarrow (\Omega', \mathcal{B}')$ } alors $\Omega = \bigsqcup_{k \geq 1} \Omega_k$ avec $(\Omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$

→ l'application f est mesurable ssi sa restriction sur Ω_k est mesurable

Integrale de Lebesgue.

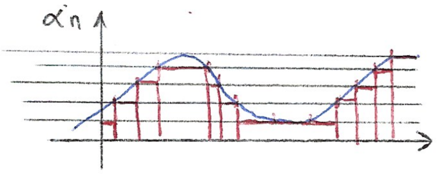
. Mesure de Lebesgue: Il existe une unique mesure borelienne λ_n sur $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\lambda_n(P) = |P|, \text{ pour tout pavé } P.$$

$$\lambda_3(P) = L \times H \times l \longrightarrow \text{Decomposition en Pavé.}$$

. Fonction étagés : . Une fonction etagés sur Ω est une application $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ qui est mesurable et ne prend qu'un nombre fini de valeur réelles.

. On note $\mathcal{E}(\Omega)$, l'ensemble de toute les fonction etalés sur Ω et $\mathcal{E}^+(\Omega)$ l'ensemble des fonction etalé positives sur Ω.



$$\varphi = \sum a_k \mathbb{1}_{P_k}$$

→ suite approximente

marche m si discontinuité

. Integrale de Lebesgues des fonctions positive: $(\Omega, \mathcal{B}, m)$ espace mesuré

Definition: $f : \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$; $\displaystyle\int_\Omega f^+ dm = \sup \left\{ \int_\Omega \varphi dm \mid \varphi \in \mathcal{E}(\Omega) \text{ et } 0 \leq \varphi \leq f \right\}$

quelque soit f : $\displaystyle\int_\Omega f \cdot dm = \int_\Omega f^+ dm - \int f^- dm$

" espace vectoriel de "

→ les classe de fonction integrable aux sens de Lebesgue sont noté L^P → fonction puissance : x^P

↳ voir analyse

Variables Aleatoire:

ici ↳ La Tribu correspont à la collection de sous ensemble où l'on peut attribuer la probabilité

→ si indénombrable (exemple $[0, 1]$) correspond à l'union denombre d'intervalle $P([a, b$

→ sinon, la Tribu n'est pas necessaire.

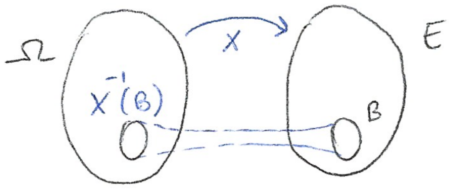
. On appelle $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et l'orsqu'on choisi une mesure, ~~on~~

on a : $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré

définition μ (de la mesure)

Tribu

- Variable aléatoire (suite) :
  - Une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une mesure $\mathbb{P}$ vérifiant $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ → Axiomes Kolmogorov
  - → Un espace muni d'une probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ s'appelle un espace probabilisé
  - ↳ Définition : Une variable aléatoire à valeur dans $(E, \mathcal{E})$ est une fonction $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{E})$ qui est mesurable, càd pour tout $B \in \mathcal{E}$, sa préimage par X est mesurable : $X^{-1}(B) \in \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{P}(X^{-1}(B))$ existe.



→ l'espace probabilisé est défini par loi des grands nombre : $\mathbb{P}\left(\lim_{n\to+\infty} \bar{X}_n = E(X)\right) = 1$

(défini expérimentalement/empiriquement ; $\bar{X}_n$: suite d'évènement aléatoire moyénée ; $E(X)$: espérance)

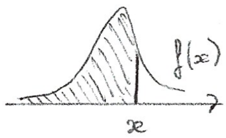
- La loi d'une variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{E})$ est la mesure-image de $\mathbb{P}$ par X, càd. une mesure de E, noté $\mathbb{P}_X$, donnée par :

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$$

- Pour un espace probabilisé discret, on a : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\mathrm{Card}(A)}{n}$, $\forall A \in \mathcal{A}$

- Fonction de répartition : Fonction F_X qui $\forall x \in \mathbb{R}$, associe la probabilité d'obtenir une valeur inférieur ou égale :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$



→ densité de probabilité : $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$ avec f_X la densité de proba

→ Passage discret : $f(x) = \sum_i^n P_i\, \delta(x - x_i)$ avec δ impulsion de Dirac

- Relation élémentaire :
  - $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  - $P(\phi) = 0$
  - $P(B|A) \cdot P(A) = P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B)$ (A sachant B) → raisonnement par inférence

Th de Bayes (proba conditionnel) : $P(A|B) = \dfrac{\text{vraissemblance}}{P(B)}$

- Distribution sur la droite $\mathbb{R}$:

↳ representation en histogramme de la loi de Probabilité.

- Esperance : Indicateur de position de la variable aleatoire, defini par :

$$E\left[g(x)\right] = \sum_i g(x_i).f(x_i) \xrightarrow{ex} \text{moyenne} : \mu = \frac{1}{n}\sum_i^n x_i \Big\} \begin{matrix}\text{arithetique} \\ \downarrow \\ \hat{m} \text{ poids de } \mathbb{P}\end{matrix}$$

p.e ≠ mediane : (coupe l'ensemble en 2 parts egale) → $P(X \leq m) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow F_X(m) = 1 - \lim_{x \to m^-} F_X(x)$

- Moment : ordre $r \in \mathbb{N}$ d'une variable aleatoire, est un indicateur de dispersion

ordre existant

$$\rightarrow m_r(f) \triangleq \int_{x \in I} x^r . f(x)\, dx \xrightarrow{r=1} m_1 = E\left[f(x)\right]$$

$$\xrightarrow{r=2} m_2 = E\left[\left(f(x) - m_1\right)^2\right] \xrightarrow{ex} \text{variance si } f(x) = x$$

- Fonction generatrice de moment : $M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] \longrightarrow$ les ordres d'un dvpt limite donne le moment → Analyse

- Loi Binomiales : loi de parametre n et p, de probabilité discrete d'une variable aleatoire X, dont la fonction de masse est donnée par :

$k = \{0, \dots, n\}$ $\qquad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ avec la combinaison $\binom{n}{k} = P_k^n . \frac{1}{k!}$

→ Permutation (ordonner "k" objet choisi parmis "n") : $P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$

- Loi de Poisson : Binomiale sur un intervalle de temps : $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

- Convergence de variable aleatoire :

↳ But : savoir si une suite d'evenement aleatoire converge vers une valeurs fixe

→ Construction de modèle → cas "Somme" uniquement ici

- Theoreme centrale Limite : La somme de suite de variable aleatoire indépendant tend vers une loi gaussiene normale.

suite

$$\lim \mathbb{P}\left((Z_n) \leq z\right) = \lim \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z\right) = \Phi(z)$$

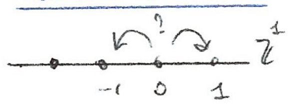
$\Phi(z)$, la fonction de repartition de la loi normal centree reduite $\mathcal{N}(0,1)$

tel que : $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \rightarrow f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

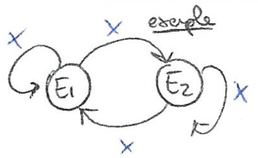
- **Calcul stochastique :**

  ↳ Etude des phenomènes qui evoluent au cours du temps de manière aleatoire.

  - **Marche aleatoire :** Succession de "pas" aleatoire. Soit $d \geq 1$ et $(e_1, \dots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{Z}^d$. Soit (X_i) une suite de variable aleatoire indepeante à valeurs dans $\{(\pm e_1, \dots, \pm e_d)\}$. On appelle la marche aleatoire, la suite : $(S_n)_{n \geq 1}$ telque : $S_n = X_1 + \dots + X_n$

1D 

  - **Chaine de Markov :** Suite de variable aleatoire (X_n) dans $(E, B, \mathbb{P})$ ← Etats, pour chaque n, sachant X_n, X_{n+1} est indép de X_k $(k \leq n-1)$ → proba de transition



$$\rightarrow \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = i_n)$$

- **Test d'hypothese :** (inductive) → verifier si les données proviene d'une variable aleatoire de loi de probabilité donnée.

  - **Une statistique :** (indicateur) (X, A) et (Y, C) espace mesurable : $T : (X^n, A^{\otimes n}) \rightarrow (Y, C)$ (produit cartesien ; tribu produit)

    ↳ estimateur ⇔ mesure d'un biais de mesure : Fluctuation autour de $E[X]$ → qualité

    ↳ modèle

  - **Test chi-deux (χ^2) :** (non parametrique) Comparaison de la distribution par la variance → par rapport à un modèle

$$\rightarrow \chi^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(n_j - np_j)^2}{np_j}$$

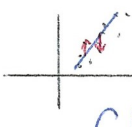
- **Statistique (descriptive) :** → ensemble de données important

  * ⚠ facteur de confusion ⇔ Paradoxe de simpson — non corrélé

  - **Coefficient de correlation** → mesure du lien entre variable X et Y*

    covariance : $\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{N} \sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) \Longrightarrow$ corr : $\rho(x, y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}$ $\begin{cases} -1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{cases}$

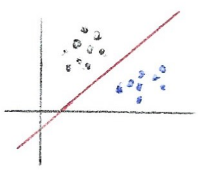
  - **Regression lineaire** Ajustement affine d'un jeu de donnée (par $y = m \cdot x + c$)



$$m = \rho(x, y) \longrightarrow \text{cas } \underline{\text{variance}} \longrightarrow \text{DL de la fonction generatrice de moment}$$
$$V[F] = V[aX + b]$$

  - **Classement :** Analyse discriminante → donnée etiquetté ou non

    cas lineaire : $g(x) = f(w^T \cdot x - w_0) = f\left(\sum_j^N w_j x_j + w_0\right)$



  - **Partitionnement :** Division en N paquet de donnée

    K-moyennes : minimisation distance euclidienne : $\arg\min_S \sum_{i=1}^{k} \sum_{x_j \in S_i} \| x_j - \mu_i \|^2$