Exercice de routine (CAPES/AGREG - MATH)

EXERCICE 1 - Simplifier!

Simplifier les sommes et produits suivants :

1. $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ **2.** $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$
3. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)}$.

EXERCICE 2 - Forme algébrique - Somme et produits

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = (2+5i)+(i+3)$ **2.** $z_1 = 4(-2+3i)+3(-5-8i)$ **3.** $z_3 = (2-i)(3+8i)$
4. $z_4 = (1-i)\overline{(1+i)}$ **5.** $z_5 = i(1-3i)^2$ **6.** $z_6 = (1+i)^3$

EXERCICE 3 - Racines n-ièmes

Résoudre les équations suivantes :

1. $z^4 = -1$ **2.** $z^5 = -i$.

EXERCICE 4 - A coefficients réels

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $2z^2+6z+5=0$ **2.** $z^2-6z+13=0$
3. $z^2+z+1=0$ **4.** $\frac{3z+2}{z+1} = z+3$

EXERCICE 5 - Lieu géométrique et arguments

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la relation demandée :

1. $\arg(z-2) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ **2.** $\arg(z-2) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ **3.** $\arg(iz) = \frac{\pi}{4}\ [\pi]$
4. $\arg\left(\frac{z}{1+i}\right) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ **5.** $\arg\left(\frac{z-2i}{z-1+i}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

EXERCICE 6 - En pratique

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

1. $\dfrac{1}{X^3-X}$ **2.** $\dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$ **3.** $\dfrac{X^3}{(X-1)(X-2)(X-3)}$
4. $\dfrac{2X^2+1}{(X^2-1)^2}$ **5.** $\dfrac{X^3+1}{(X-1)^3}$ **6.** $\dfrac{X^4+1}{(X+1)^2(X^2+1)}$

EXERCICE 7 - Sous-groupes ou non?

Dans les questions suivantes, déterminer si la partie H est un sous-groupe du groupe G.

1. $G = (\mathbb{Z},+)$; $H = \{\text{nombres pairs}\}$.
2. $G = (\mathbb{Z},+)$; $H = \{\text{nombres impairs}\}$.
3. $G = (\mathbb{R},+)$; $H = [-1,+\infty[$.
4. $G = (\mathbb{R}^*,\times)$; $H = \mathbb{Q}^*$.
5. $G = (\mathbb{R}^*,\times)$; $H = \{a+b\sqrt{2};\ a,b\in\mathbb{Q},\ (a,b)\neq(0,0)\}$.
6. $G = (\{\text{bijections de } E \text{ dans } E\},\circ)$; $H = \{f\in G;\ f(x)=x\}$ où E est un ensemble et $x\in E$.
7. $G = (\{\text{bijections de } E \text{ dans } E\},\circ)$; $H = \{f\in G;\ f(x)=y\}$ où E est un ensemble et $x,y\in E$ avec $x\neq y$.

EXERCICE 8 - Exemples ou contre-exemples de morphismes de groupes

Les applications $\phi: G\to H$ définies ci-dessous sont-elles des morphismes de groupes?

1. $G = (GL_n(\mathbb{R}), \times)$, $H = (\mathbb{R}, +)$, $\phi(A) = \mathrm{tr}(A)$.
2. $G = (M_n(\mathbb{R}), +)$, $H = (\mathbb{R}, +)$, $\phi(A) = \mathrm{tr}(A)$.
3. $G = (\mathbb{R}^*, \times)$, $H = (\mathbb{R}^*, \times)$, $\phi(x) = |x|$.
4. $G = (\mathbb{R}^*, \times)$, $H = (\mathbb{R}^*, \times)$, $\phi(x) = 2x$.
5. $G = (\mathbb{R}, +)$, $H = (GL_2(\mathbb{R}), \times)$, $\phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9 - Étude de permutations

Pour les permutations σ suivantes, décomposer σ en produits de cycles disjoints, en produit de transpositions, calculer l'ordre de σ, la signature de σ, calculer σ^{100} :

$$\sigma_1 = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{array}\right) \text{ et } \sigma_2 = \left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Exercice 10 - Quelques équations

Résoudre les équations suivantes, où l'inconnue est un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$:

1. $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$ **2**. $P'^2 = 4P$
3. $P \circ P = P$.

Exercice 11 - En pratique!

Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de

1. $X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7$ par $X^2 + 3X - 1$;
2. $X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38$ par $X^2 - X - 7$;
3. $X^5 - X^2 + 2$ par $X^2 + 1$.

Exercice 12 - Calculs de pgcd

Déterminer les pgcd suivants :

1. $P(X) = X^4 - 3X^3 + X^2 + 4$ et $Q(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 2$;
2. $P(X) = X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 1$ et $Q(X) = X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1$;
3. $P(X) = X^n - 1$ et $Q(X) = (X-1)^n$, $n \geq 1$.

Exercice 13 - Décomposer!

Décomposer en produits d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $X^4 + 1$ **2**. $X^8 - 1$ **3**. $(X^2 - X + 1)^2 + 1$

Exercice 14 - Équations trigonométriques

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\sin x = \frac{1}{2}$ **2**. $\tan x = \sqrt{3}$ **3**. $\cos x = -1$
4. $\sin(3x) = 1$ **5**. $\cos(4x) = -2$ **6**. $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$.

Exercice 15 - Applications linéaires ou non (sur $\mathbb{R}^n$)?

Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x + y, x - 2y, 0)$;
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x + y, x - 2y, 1)$;

3. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto x^2-y^2$.

Exercice 16 - Applications linéaires ou non (sur les polynômes)?

Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

1. $f:\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}^2,\ P\mapsto \big(P(0),P'(1)\big)$;
2. $f:\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}[X],\ P\mapsto AP$, où $A\in\mathbb{R}[X]$ est un polynôme fixé;
3. $f:\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}[X],\ P\mapsto P^2$.

Exercice 17 - Applications linéaires ou non (espace de fonctions)?

Soit E l'espace vectoriel $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

1. $\phi_1:E\to E,\ \phi_1(f)(x)=(f(x))^2$;
2. $\phi_2:E\to E,\ \phi_2(f)(x)=(f(x^2))$;
3. $\phi_3:E\to E,\ \phi_3(f)(x)=\int_0^x f(t)dt$;

Exercice 18 - Sur des polynômes

Soit $u\in\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$. Calculer $\det(u)$ dans chacun des cas suivants :

1. $u(P)=P+P'$;
2. $u(P)=P(X+1)-P(X)$;
3. $u(P)=XP'+P(1)$.

Exercice 19 - Bases?

Les systèmes suivants forment-ils des bases de $\mathbb{R}^3$?
$S_1=\{(1,-1,0),(2,-1,2)\}$;
$S_2=\{(1,-1,0),(2,-1,2),(1,0,a)\}$ avec a réel (on discutera suivant la valeur de a);
$S_3=\{(1,0,0),(a,b,0),(c,d,e)\}$ avec a,b,c,d,e réels (on discutera suivant leur valeur);
$S_4=\{(1,1,3),(3,4,5),(-2,5,7),(8,-1,9)\}$.

Exercice 20 - Combinaisons linéaires?

Les vecteurs u suivants sont-ils combinaison linéaire des vecteurs u_i?

1. $E=\mathbb{R}^2$, $u=(1,2)$, $u_1=(1,-2)$, $u_2=(2,3)$;
2. $E=\mathbb{R}^2$, $u=(1,2)$, $u_1=(1,-2)$, $u_2=(2,3)$, $u_3=(-4,5)$;
3. $E=\mathbb{R}^3$, $u=(2,5,3)$, $u_1=(1,3,2)$, $u_2=(1,-1,4)$;
4. $E=\mathbb{R}^3$, $u=(3,1,m)$, $u_1=(1,3,2)$, $u_2=(1,-1,4)$ (discuter suivant la valeur de m).

Exercice 21 - Pour bien commencer...

Les familles suivantes sont-elles libres dans $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^4$ pour la dernière famille)?

1. (u,v) avec $u=(1,2,3)$ et $v=(-1,4,6)$;
2. (u,v,w) avec $u=(1,2,-1)$, $v=(1,0,1)$ et $w=(0,0,1)$;
3. (u,v,w) avec $u=(1,2,-1)$, $v=(1,0,1)$ et $w=(-1,2,-3)$;
4. (u,v,w,z) avec $u=(1,2,3,4)$, $v=(5,6,7,8)$, $w=(9,10,11,12)$ et $z=(13,14,15,16)$.

Exercice 22 - Est-ce un sous-espace vectoriel?

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont, ou ne sont pas, des sous-espaces vectoriels?

1. $E_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x+y+3z=0\}$;

2. $E_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x+y+3z=2\}$;
3. $E_3=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4;\ x=y=2z=4t\}$;
4. $E_4=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ xy=0\}$;
5. $E_5=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ y=x^2\}$;
6. $E_6=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ 2x+3y-5z=0\}\cap\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x-y+z=0\}$;
7. $E_7=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ 2x+3y-5z=0\}\cup\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x-y+z=0\}$.

Exercice 23 - Des calculs de produits

Calculer lorsqu'ils sont définis les produits AB et BA dans chacun des cas suivants :

1. $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$
2. $A=\begin{pmatrix}0&2&1\\1&1&0\\-1&-2&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&1&2\end{pmatrix}$
3. $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\\0&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&1&0&1\\2&1&0&0\end{pmatrix}$

Exercice 24 - Calcul du polynôme minimal

Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&-2\\2&2&-3\end{pmatrix}\text{ et }D=\begin{pmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{pmatrix}.$$

Exercice 25 -

Diagonaliser les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}0&2&-1\\3&-2&0\\-2&2&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&3&2\\-2&5&2\\2&-3&0\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&-1&2\end{pmatrix}.$$

On donnera aussi la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres.

Exercice 26 - Sans problèmes

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcl}x+y+2z&=&3\\x+2y+z&=&1\\2x+y+z&=&0\end{array}\right.\qquad\left\{\begin{array}{rcl}x+2z&=&1\\-y+z&=&2\\x-2y&=&1\end{array}\right.$$

Exercice 27 - Relations usuelles sur les orthogonaux

Soit E un espace préhilbertien, et A et B deux parties de E. Démontrer les relations suivantes :

1. $A\subset B\implies B^\perp\subset A^\perp$.
2. $(A\cup B)^\perp=A^\perp\cap B^\perp$.
3. $A^\perp=\mathrm{vect}(A)^\perp$;
4. $\mathrm{vect}(A)\subset A^{\perp\perp}$.
5. On suppose de plus que E est de dimension finie. Démontrer que $\mathrm{vect}(A)=A^{\perp\perp}$.

Exercice 28 - Produits scalaires sur $\mathbb{R}^2$

Les applications suivantes définissent-elles un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$?

1. $\varphi_1\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big)=\sqrt{x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2}$;
2. $\varphi_2\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big)=4x_1y_1-x_2y_2$;
3. $\varphi_3\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big)=x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+10x_2y_2$.

Exercice 29 - Décomposition en somme de carrés

Décomposer les formes quadratiques suivantes en sommes de carrés. En déduire si elles sont positives.

1. $q(x,y,z)=x^2+y^2+2z(x\cos\alpha+y\sin\alpha)$;
2. $q(x,y,z,t)=x^2+3y^2+4z^2+t^2+2xy+xt+yt$;

Exercice 30 - Varions la constante...

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'+y=\frac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$;
2. $(1+x)y'+y=1+\ln(1+x)$ sur $]-1,+\infty[$;
3. $y'-\frac{y}{x}=x^2$ sur $]0,+\infty[$;
4. $y'-2xy=-(2x-1)e^x$ sur $\mathbb{R}$;
5. $y'-\frac{2}{t}y=t^2$ sur $]0,+\infty[$;

Exercice 31 - Équations du second ordre à coefficients constants

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y''-2y'+y=x$, $y(0)=y'(0)=0$;
2. $y''+9y=x+1$, $y(0)=0$;
3. $y''-2y'+y=\sin^2 x$;

Exercice 32 - Équations à variables séparées

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\mathbf{1}.\ y'+e^{x-y}=0,\ y(0)=0 \qquad \mathbf{2}.\ y'=\frac{x}{1+y},\ y(0)=0$$
$$\mathbf{3}.\ y'+xy^2=-x,\ y(0)=0.$$

Exercice 33 - Équations autonomes

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\mathbf{1}.\ y'=1+y^2 \qquad \mathbf{2}.\ y'=y^2$$

Exercice 34 - Diagonalisable!

Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\mathbf{1}.\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& x+2y-z\\ y' &=& 2x+4y-2z\\ z' &=& -x-2y+z\end{array}\right. \qquad \mathbf{2}.\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& y+z\\ y' &=& -x+2y+z\\ z' &=& x+z\end{array}\right.$$

Exercice 35 - Ouverts étoilés

Parmi les ouverts suivants, déterminer lesquels sont étoilés :

1. $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ $(z_0\in\mathbb{C})$;

2. $\{z \in \mathbb{C};\ |z| < R\}$ $(R > 0)$;

3. $\{z \in \mathbb{C};\ r < |z| < R\}$ $(R > r > 0)$;

4. $\mathbb{C} \backslash D$, où D est une droite;

5. $\mathbb{C} \backslash D$, où D est une demi-droite.

Exercice 36 - Calculs de résidus

Calculer le résidu aux singularités isolées des fonctions suivantes :

$$f(z) = \frac{z^2+z+1}{z(z^2+1)^2}, \quad g(z) = \frac{z^a}{1-z}, \quad h(z) = \log(z).\sin\frac{1}{z-1}.$$

On prendra la détermination principale des fonctions $z \mapsto z^a$ et $z \mapsto \log(z)$.

Exercice 37 - Développement en séries de Laurent

Développer en séries de Laurent les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 \exp\left(\frac{1}{z}\right) && \text{dans } \{z;\ 0 < |z|\} \\ g(z) &= \exp\left(z + \frac{1}{z}\right) && \text{dans } \{z;\ 0 < |z|\} \\ h(z) &= \frac{1}{(z-1)(z-2)} && \text{dans : (i)}\{z;\ |z| < 1\},\ \text{(ii) } \{z;\ 1 < |z| < 2\},\ \text{(iii) } \{z;\ |z| > 2\}. \end{aligned}$$

Exercice 38 -

Déterminer les points singuliers isolés des fonctions suivantes, puis déterminer leur nature (singularité "apparente" ou "effaçable", pôle, singularité essentielle) :

$$\begin{array}{lll} z \mapsto \exp(1/z) & z \mapsto \dfrac{1}{\sin z} - \dfrac{1}{z} & z \mapsto \dfrac{1}{\exp(z)-1} - \dfrac{1}{z} \\ z \mapsto \exp\left(\dfrac{z}{1-z}\right) & z \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{\sin(1/z)}\right) & \end{array}$$

Exercice 39 - Lignes de niveau

Représenter les lignes de niveau (c'est-à-dire les solutions (x, y) de l'équation $f(x, y) = k$) pour :

$$f_1(x, y) = y^2,\ \text{avec } k = -1 \text{ et } k = 1 \qquad f_2(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{8 - x^2y^2} \text{ avec } k = 2.$$

Exercice 40 - Diverses limites

Les fonctions suivantes ont-elles une limite en $(0, 0)$?

1. $f(x, y) = (x + y) \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$

2. $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

3. $f(x, y) = \frac{|x+y|}{x^2+y^2}$

Exercice 41 - Calcul de dérivées partielles

Justifier l'existence des dérivées partielles des fonctions suivantes, et les calculer.

1. $f(x, y) = e^x \cos y$.

2. $f(x, y) = (x^2 + y^2) \cos(xy)$.

3. $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2y^2}$.

Exercice 42 - Ordre 2

Calculer les dérivées partielles à l'ordre 2 des fonctions suivantes :

1. $f(x,y)=x^2(x+y)$.
2. $f(x,y)=e^{xy}$.

Exercice 43 - Différentielle

Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables, et calculer leur différentielle

1. $f(x,y)=e^{xy}(x+y)$.
2. $f(x,y,z)=xy+yz+zx$.
3. $f(x,y)=(y\sin x,\cos x)$.

Exercice 44 - Matrices jacobiennes

Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables, et calculer leur matrice jacobienne.

1. $f(x,y,z)=\left(\frac{1}{2}(x^2-z^2),\sin x\sin y\right)$.
2. $f(x,y)=\left(xy,\frac{1}{2}x^2+y,\ln(1+x^2)\right)$.

Exercice 45 - Extrema locaux

Déterminer les extrema locaux des fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x,y)=x^2+xy+y^2-3x-6y$
2. $f(x,y)=x^2+2y^2-2xy-2y+1$
3. $f(x,y)=x^3+y^3$
4. $f(x,y)=(x-y)^2+(x+y)^3$

Exercice 46 - Extrema locaux

Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :

1. $f(x,y)=y^2-x^2+\frac{x^4}{2}$;
2. $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$;
3. $f(x,y)=x^4+y^4-4(x-y)^2$.

Exercice 47 - Equivalents ou pas?

Quels sont les équivalents corrects parmi les propositions suivantes?

1. $n\sim_{+\infty}n+1$	**2**. $n^2\sim_{+\infty}n^2+n$	**3**. $\ln(n)\sim_{+\infty}\ln(10^6n)$
4. $\exp(n)\sim_{+\infty}\exp\left(n+10^{-6}\right)$	**5**. $\exp(n)\sim_{+\infty}\exp(2n)$	**6**. $\ln(n)\sim_{+\infty}\ln(n+1)$.

Exercice 48 - Prolongeable par continuité?

Dire si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier :

1. $f(x)=\sin(x)\sin(1/x)$ si $x\neq 0$;
2. $g(x)=\cos(x)\cos(1/x)$ si $x\neq 0$;
3. $h(x)=\sin(x+1)\ln|1+x|$ si $x\neq -1$.

Exercice 49 - Vrai ou faux

Les propositions suivantes sont elles vraies ou fausses :

1. L'image par une fonction continue d'un intervalle ouvert est un intervalle ouvert.
2. L'image par une fonction continue d'un intervalle fermé est un intervalle fermé.
3. L'image par une fonction continue d'une partie bornée est une partie bornée.
4. L'image réciproque par une fonction continue d'un intervalle est un intervalle.

Exercice 50 - Calculs de limites avec le nombre dérivé

En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer les limites suivantes :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{1.} \lim_{x\to 0} \dfrac{e^{3x+2}-e^2}{x} & \mathbf{2.} \lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} \\ \mathbf{3.} \lim_{x\to 1} \dfrac{\ln(2-x)}{x-1} & \mathbf{4.} \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\exp(\cos x)-1}{x-\frac{\pi}{2}}. \end{array}$$

Exercice 51 - Calculs de limites avec le nombre dérivé

Étudier les limites suivantes :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{1.}\ \dfrac{x\sin x}{1-\cos x} \text{ en } 0 & \mathbf{2.}\ \dfrac{\sin x - \sin 2x}{x^2} \text{ en } 0 \\ \mathbf{3.}\ \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} \text{ en } 0 & \mathbf{4.}\ \dfrac{\cos^2 x - 1}{x} \text{ en } 0 \end{array}$$

Exercice 52 - Somme et produit de DLs

Calculer les développements limités suivants :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{1.}\ \dfrac{1}{1-x} - e^x \text{ à l'ordre 3 en 0} & \mathbf{2.}\ \sqrt{1-x}+\sqrt{1+x} \text{ à l'ordre 4 en 0} \\ \mathbf{3.}\ \sin x\cos(2x) \text{ à l'ordre 6 en 0} & \mathbf{4.}\ \cos(x)\ln(1+x) \text{ à l'ordre 4 en 0} \\ \mathbf{5.}\ (x^3+1)\sqrt{1-x} \text{ à l'ordre 3 en 0} & \mathbf{6.}\ \big(\ln(1+x)\big)^2 \text{ à l'ordre 4 en 0} \end{array}$$

Exercice 53 - Limites de fonctions

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{1.}\ \dfrac{\sin x - x}{x^3} \text{ en } 0; & \mathbf{2.}\ \dfrac{1+\ln(1+x)-e^x}{1-\cos x} \text{ en } 0; \\ \mathbf{3.}\ \left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x} \text{ en } 0; & \mathbf{4.}\ \dfrac{2x}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} \text{ en } 0; \\ \mathbf{5.}\ \dfrac{\exp(\sin x)-\exp(\tan x)}{\sin x - \tan x} \text{ en } 0; & \mathbf{6.}\ \dfrac{x^{x^x}\ln x}{x^x-1} \text{ en } 0^+; \end{array}$$

Exercice 54 - Équations

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\mathbf{1.}\ \ln(x^2-1)-\ln(2x-1)+\ln 2 = 0 \qquad \mathbf{2.}\ \log_{10}(x+2)-\log_{10}(x+1)=\log_{10}(x-1).$$

Exercice 55 - Système d'équations

Résoudre les systèmes d'équations suivantes :

$$\mathbf{1.}\ \left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 30 \\ \ln(x)+\ln(y) &=& 3\ln 6 \end{array}\right. \qquad \mathbf{2.}\ \left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2 &=& 218 \\ \ln(x)+\ln(y) &=& \ln(91) \end{array}\right.$$

Exercice 56 - Valeur exacte

Calculer

$$\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right),\quad \arccos\left(\cos\frac{-2\pi}{3}\right),\quad \arccos\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right).$$

Exercice 57 - Ensembles de définition

Donner les ensembles de définition des fonctions suivantes :

1. $\sqrt{2x^2-12x+18}$	**2**. $\ln(x^2+4x+4)$
3. $\sqrt{\frac{8-16x}{(7+x)^2}}$	**4**. $\ln(3-x)+\frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$.

Exercice 58 - Limites et quotients

Calculer les limites suivantes si elles existent. On pourra étudier le signe du dénominateur.

1. $\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{x^2-11x+28}{x^2-25}$	**2**. $\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{x^2-11x+28}{x^2-25}$
3. $\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{x^2-9x+20}{x^2-25}$	**4**. $\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{x^2-9x+20}{x^2-25}$

Exercice 59 - Dénombrables?

Les ensembles suivants sont-ils dénombrables?

1. $\{2^n;\ n\geq 0\}$;
2. $\mathbb{N}\times\mathbb{R}$;
3. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2};\ a,b\in\mathbb{Q}\}$;
4. l'ensemble des nombres premiers;
5. l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 60 -

Calculer les intégrales curvilignes $\int_C\omega$ dans les exemples suivants :

1. $\omega=xydx+(x+y)dy$, et C est l'arc de parabole $y=x^2$, $-1\leq x\leq 2$, parcouru dans le sens direct.
2. $\omega=y\sin xdx+x\cos ydy$, et C est le segment de droite OA de $O(0,0)$ vers $A(1,1)$.

Exercice 61 -

Calculer l'intégrale double suivante $\int\int_D f(x,y)dxdy$, avec

1. $f(x,y)=x$ et $D=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; y\geq 0,\ x-y+1\geq 0,\ x+2y-4\leq 0\big\}$.
2. $f(x,y)=x+y$ et $D=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\leq x\leq 1;\ x^2\leq y\leq x\big\}$.
3. $f(x,y)=\cos(xy)$ et $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 1\leq x\leq 2,\ 0\leq xy\leq\dfrac{\pi}{2}\right\}$.
4. $f(x,y)=xy$ et $D=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ xy+x+y\leq 1.\big\}$.
5. $f(x,y)=\frac{1}{(x+y)^3}$ et $D=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 1<x<3,\ y>2, x+y<5\big\}$.

Exercice 62 - Convergence d'intégrales impropres - 1

Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes?

1. $\displaystyle\int_0^1\ln tdt$	**2**. $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty}x(\sin x)e^{-x}dx$	**4**. $\displaystyle\int_0^{+\infty}(\ln t)e^{-t}dt$
5. $\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$	

Exercice 63 - Reconnaissance de formes

Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes :

$$f(x)=\frac{x}{1+x^2}\qquad g(x)=\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}\qquad h(x)=\frac{\ln x}{x}$$
$$k(x)=\cos(x)\sin^2(x)\qquad l(x)=\frac{1}{x\ln x}\qquad m(x)=3x\sqrt{1+x^2}.$$

Exercice 64 - Limites de suites

Calculer la limite des suites suivantes :

1. $u_n=\dfrac{1}{n}\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)+\dots+\sin\left(\dfrac{n\pi}{n}\right)\right)$.
2. $u_n=n\left(\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dots+\dfrac{1}{(n+n)^2}\right)$.
3. $u_n=\dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}$.
4. $u_n=\sqrt[n]{\left(1+\left(\dfrac{1}{n}\right)^2\right)\left(1+\left(\dfrac{2}{n}\right)^2\right)\dots\left(1+\left(\dfrac{n}{n}\right)^2\right)}$.

Exercice 65 - Théorème de convergence dominée - 1

Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, des suites suivantes :

1. $\left(\displaystyle\int_0^{\pi/4}(\tan t)^n dt\right)$ **2.** $\left(\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{1+t^n}\right)$

3. $\left(\displaystyle\int_0^1 f(t^n)dt\right)$, $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue.

Exercice 66 - Découpage - 1

Déterminer la limite des suites suivantes :

1. $\left(\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^n+e^x}\right)$ **2.** $\left(\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt[n]{1+x^n}}\right)$

Exercice 67 - Rayon de convergence - 1

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}x^n$ **2.** $\sum_n\frac{n!}{(2n)!}x^n$ **3.** $\sum_{n\geq 1}\frac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}}x^n$

4. $\sum_n(\ln n)x^n$ **5.** $\sum_n\frac{\sqrt{n}x^{2n}}{2^n+1}$ **6.** $\sum_n(2+ni)z^n$

7. $\sum_n\frac{(-1)^n}{1\times 3\times\dots\times(2n-1)}z^n$

Exercice 68 - Rayon de convergence et somme - 1

Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en termes de fonctions usuelles :

1. $\sum_{n\geq 0}\frac{n-1}{n!}x^n$ **2.** $\sum_{n\geq 0}\frac{n+2}{n+1}x^n$ **3.** $\sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)(n-2)}{n!}x^n$

4. $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!}x^{2n}$

Exercice 69 - Régularité

Montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^∞ :

1. $f(x)=\sin(x)/x$ si $x\neq 0$, $f(0)=1$.
2. $g(x)=\text{ch}(\sqrt{x})$ si $x\geq 0$ et $g(x)=\cos(\sqrt{-x})$ si $x<0$.
3. $h(x)=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}$ si $x\in]-\pi,0[\cup]0,\pi[$, $h(0)=0$.

Exercice 70 - Majorations et équivalences - 1

Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n}{n^3+1}$ **2**. $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$ **3**. $u_n = n\sin(1/n)$

4. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ **5**. $u_n = \dfrac{(-1)^n+n}{n^2+1}$ **6**. $u_n = \dfrac{1}{n!}$

7. $u_n = \dfrac{3^n+n^4}{5^n-2^n}$

Exercice 71 - Vrai/Faux

Soit (u_n) une suite de nombres réels. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si $u_n > 0$ et si la série $\sum u_n$ converge, alors u_{n+1}/u_n a une limite strictement inférieure à 1.
2. Si $u_n > 0$ et si la série $\sum u_n$ converge, alors (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
3. Si $u_n > 0$, et si la série $\sum u_n$ converge, alors la série de terme général u_n^2 converge.
4. Si $(-1)^n n u_n \to 1$, la série $\sum u_n$ converge.
5. Si $(-1)^n n^2 u_n \to 1$, la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 72 - Vrai/Faux

Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction f sur un intervalle I. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si les f_n sont croissantes, alors f aussi.
2. Si les f_n sont strictement croissantes, alors f aussi.
3. Si les f_n sont périodiques de période T, alors f aussi.
4. Si les f_n sont continues en a, alors f aussi.

Reprendre l'exercice en remplaçant la convergence simple par la convergence uniforme.

Exercice 73 - Nature

Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

1. $u_n = \dfrac{\sin(n)+3\cos\left(n^2\right)}{\sqrt{n}}$ **2**. $u_n = \dfrac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}$

3. $u_n = \dfrac{n^3+5n}{4n^2+\sin(n)+\ln(n)}$ **4**. $u_n = \sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}$

5. $u_n = 3^n e^{-3n}$.

Exercice 74 - Par encadrement

Etudier les suites (u_n) définies par

$$1.\ \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n+k} \qquad 2.\ u_n = \sum_{k=0}^{2n+1}\frac{n}{n^2+k}.$$

Exercice 75 - Vrai/Faux

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. On justifiera les réponses :

1. Soit (u_n) une suite croissante et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors les propositions "si (u_n) converge vers ℓ, alors $u_n \leq \ell$ quelque soit $n \in \mathbb{N}$ et "s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > \ell$, alors (u_n) ne converge pas vers ℓ" sont équivalentes.
2. Si (u_n) est une suite géométrique non-nulle de raison $q \neq 0$, alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{q}$.
3. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à termes positifs convergeant vers 0. Alors, (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
4. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante et que (u_n) vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier n, alors (u_n) est croissante.

5. Toute suite non-majorée tend vers $+\infty$.

Exercice 76 - Avec des quantificateurs

Soit (u_n) une suite de nombres réels. Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1. (u_n) est bornée.
2. (u_n) n'est pas croissante.
3. (u_n) n'est pas monotone.
4. (u_n) n'est pas majorée.
5. (u_n) ne tend pas vers $+\infty$.

Exercice 77 - Vrai/Faux

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Lorsqu'elles sont vraies, les démontrer. Lorsqu'elles sont fausses, donner un contre-exemple.

1. Si (u_n) et (v_n) divergent, alors (u_n+v_n) diverge.
2. Si (u_n) et (v_n) divergent, alors $(u_n\times v_n)$ diverge.
3. Si (u_n) converge et (v_n) diverge, alors (u_n+v_n) diverge.
4. Si (u_n) converge et (v_n) diverge, alors $(u_n\times v_n)$ diverge.
5. Si (u_n) n'est pas majorée, alors (u_n) tend vers $+\infty$.
6. Si (u_n) est positive et tend vers 0, alors (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.

Exercice 78 - Sont-elles continues?

Déterminer si l'application linéaire $T:(E,N_1)\to(F,N_2)$ est continue dans les cas suivants :

1. $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|f\|_1=\int_0^1|f(t)|dt$ et $T:(E,\|.\|_1)\to(E,\|.\|_1),\ f\mapsto fg$ où $g\in E$ est fixé.
2. $E=\mathbb{R}[X]$ muni de $\|\sum_{k\geq 0}a_kX^k\|=\sum_{k\geq 0}|a_k|$ et $T:(E,\|.\|)\to(E,\|.\|)$, $P\mapsto P'$.
3. $E=\mathbb{R}_n[X]$ muni de $\|\sum_{k=0}^n a_kX^k\|=\sum_{k=0}^n|a_k|$ et $T:(E,\|.\|)\to(E,\|.\|)$, $P\mapsto P'$.
4. $E=\mathbb{R}[X]$ muni de $\|\sum_{k\geq 0}a_kX^k\|=\sum_{k\geq 0}k!|a_k|$ et $T:(E,\|.\|)\to(E,\|.\|)$, $P\mapsto P'$.
5. $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|f\|_2=\left(\int_0^1|f(t)|^2dt\right)^{1/2}$, $F=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|f\|_1=\int_0^1|f(t)|dt$ et $T:(E,\|.\|_2)\to(F,\|.\|_1),\ f\mapsto fg$ où $g\in E$ est fixé.

Exercice 79 -

Déterminer si les ensembles suivants sont, ou ne sont pas, compacts :

$$\begin{array}{ll} A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^4=1\} & B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^5=2\}\\ C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+xy+y^2\leq 1\} & D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+8xy+y^2\leq 1\}\\ E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y^2=x(1-2x)\}. & \end{array}$$

Exercice 80 - Vrai/faux

Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si (E,N) est un espace vectoriel normé, $x\in E$, $r>0$ et $B(x,r)$ est la boule de centre x et de rayon $r>0$, alors pour tout $\lambda>0$, $\lambda B(x,r)=B(x,\lambda r)$.
2. $N:(x,y)\mapsto|5x+3y|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
3. Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et x,y deux vecteurs de E tels que $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$. Alors $x\in\mathrm{vect}(y)$.
4. Soit $E=\mathbb{R}_1[X]$. Alors $N:P\mapsto|P(0)|+|P(1)|$ est une norme sur E.

5. Si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur E, et si on note $B_1=\{x\in E;\ N_1(x)\leq 1\}$ et $B_2=\{x\in E;\ N_2(x)\leq 1\}$, alors il existe $a,b>0$ tels que $aB_1\subset B_2\subset bB_1$.
6. Soit (u_n) une suite de l'espace vectoriel normé $(E,\|\cdot\|)$ et soit $\ell\in E$. Alors (u_n) converge vers ℓ si et seulement si $(\|u_n-\ell\|)$ tend vers 0.
7. Une suite (u_n) de l'espace vectoriel normé $(E,\|\cdot\|)$ converge si et seulement si toute suite extraite de (u_n) converge.

Exercice 81 - Quelques suites de suites

Dire si les suites suivantes sont convergentes dans ℓ^2, et si c'est le cas, calculer leur limite.

1. $x(n)=(\frac{1}{n},0,0,0,\dots)$,
2. $x(n)=(1,1/2,1/3,\dots,1/n,0,0,\dots)$,
3. $x(n)=(1,1/\sqrt{2},1/\sqrt{3},\dots,1/\sqrt{n},0,0,\dots)$,
4. $x(n)_m=1$ si $n=m$, 0 sinon,
5. $x(n)_m=\frac{1}{m}+\frac{1}{nm^3}$,
6. $x(n)_m=\frac{1}{m}+\frac{1}{nm^{1/3}}$.

Exercice 82 - Egalités et inégalités avec des valeurs absolues

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|x+3|=5$ **2**. $|x+3|\leq 5$
3. $|x+2|>7$ **4**. $|2x-4|\leq|x+2|$

Exercice 83 - Exemples

Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés :

$$\begin{array}{ll} A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 0<|x-1|<1\} & B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 0\leq x\leq y\}\\ C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid |x|<1,\ |y|\leq 1\} & D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\in\mathbb{Q}\text{ et }y\in\mathbb{Q}\}\\ E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\notin\mathbb{Q}\text{ ou }\ y\notin\mathbb{Q}\} & F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2<4\}. \end{array}$$

Exercice 84 - Fonction triangle

Calculer la transformée de Fourier de la fonction triangle définie par :

$$f(x)=\begin{cases}1+x & \text{si } -1\leq x\leq 0\\ 1-x & \text{si } 0\leq x<1\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Exercice 85 - Abscisse de convergence

Déterminer l'abscisse de convergence de la transformée de Laplace des fonction suivantes :

1. $e^{2t}\cos(\omega t),\ \omega\in\mathbb{R}$ **2**. $t^ne^{-3t},\ n\geq 0$
3. $\cosh(at),\ a>0$

Exercice 86 - Recherche d'original

Retrouver l'original des transformée de Laplace suivantes :

1. $\frac{1}{(p+1)(p-2)}$ **2**. $\frac{-1}{(p-2)^2}$
3. $\frac{5p+10}{p^2+3p-4}$ **4**. $\frac{p-7}{p^2-14p+50}$
5. $\frac{p}{p^2-6p+13}$ **6**. $\frac{e^{-2p}}{p+3}$

Exercice 87 - Équations du second degré

Résoudre, dans $\mathbb{Z}^2$, les équations diophantiennes suivantes :

1. $xy = 2x + 3y$.
2. $x^2 - y^2 - x + 3y = 30$.
3. $x^2 - 5y^2 = 3$.

Exercice 88 - Des équations de Bezout

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{Z}^2$:

1. $2x + 5y = 3$;
2. $323x - 391y = 612$;
3. $162x + 207y = 27$;
4. $221x + 247y = 15$.

Exercice 89 - Calculs de pgcd

Soient $n \in \mathbb{Z}$. Calculer les pgcd suivants :

1. $(n^2 + n) \wedge (2n + 1)$ **2**. $(15n^2 + 8n + 6) \wedge (30n^2 + 21n + 13)$

Exercice 90 - Inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

1. Est-ce que $\overline{18}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$? Si oui, quel est son inverse?
2. Est-ce que $\overline{42}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/135\mathbb{Z}$? Si oui, quel est son inverse?

Exercice 91 - Équations linéaires

Résoudre, dans $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$, les équations ou systèmes d'équations suivants :

1. $\bar{7}y = \bar{2}$.
2. $\left\{ \begin{array}{rcl} \bar{3}x + \bar{7}y & = & \bar{3} \\ \bar{6}x - \bar{7}y & = & \bar{0} \end{array} \right.$

Exercice 92 - Équations du second degré

Résoudre

1. $x^2 + x + \overline{7} = \overline{0}$ dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.
2. $x^2 - \overline{4}x + \overline{3} = \overline{0}$ dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

Exercice 93 - Un peu d'astuce

1. On note z_1, z_2, z_3 les trois racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $P(z) = z^3 - 4z + 8\sqrt{2}$ et A_1, A_2, A_3 les points du plan complexe d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3. Quel est l'affixe de l'isobarycentre de A_1, A_2 et A_3?
2. Soit A, B et C trois points du plan. Déterminer les points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$.

Exercice 94 - Réduction de l'équation d'une conique

Pour les coniques suivantes, déterminer la nature, les éléments caractéristiques et une équation réduite :

1. $x^2 - xy + y^2 = 1$
2. $x^2 + \sqrt{3}xy + x - 2 = 0$
3. $2xy - 2\sqrt{2}x - 1 = 0$
4. $\frac{x^2}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}xy + \frac{3}{4}y^2 - (1 + 3\sqrt{3})x - (3 - \sqrt{3})y + 13 = 0$

Exercice 95 - Tous les cas?

Déterminer la nature au point $t=0$ des arcs paramétrés suivants :

1. $t\mapsto(t+2t^2-t^3,t+2t^2-t^7)$ **2.** $t\mapsto(-t+t^2,t^2+t^3)$
3. $t\mapsto(-t^2-2t^3,-t^3-t^5)$ **4.** $t\mapsto(t^2+3t^3+t^4,-2t^2-6t^3+t^4)$.

Exercice 96 - Immersions, submersions?

Les fonctions suivantes sont-elles des immersions? des submersions?

1. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\ (x,y)\mapsto(x,y,0)$
2. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ (x,y,z)\mapsto(y,z)$
3. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ (x,y,z)\mapsto xy+2yz+3xz$
4. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\ t\mapsto(\sin(2t),\sin(3t))$
5. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ (x,y,z)\mapsto(x^2+y^2+z^2,xy)$
6. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\ (x,y)\mapsto(e^x,\cos(y),\sin(y))$.

Exercice 97 - Sous-variété?

Les ensembles suivants sont-ils des sous-variétés (si c'est le cas, on précisera la dimension) :

1. $\mathcal{S}_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ z=x-2(x^2+y^2)\}$.
2. $\mathcal{S}_2=\{(t,t^2);\ t\in\mathbb{R}\}$.
3. $\mathcal{S}_3=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2=1\}$.
4. $\mathcal{S}_4=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ xy=0\}$.
5. $\mathcal{S}_5=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x>0 \text{ et } y\geq 0\}$.

Exercice 98 - Distance à un plan et à une droite

Calculer la distance

1. du point $M(1,1,1)$ au plan $\mathcal{P}$ paramétré par :
$$\begin{cases}x= & 1+2t+t'\\ y= & t+t'\\ z= & 2+t+t'.\end{cases}$$
2. du point $M(0,2,4)$ à la droite (D) d'équation :
$$\begin{cases}x+y-3z+1 & =0\\ 2x+y-5z & =0.\end{cases}$$

Exercice 99 - Longueur de l'astroïde

Calculer la longueur de l'astroïde de paramétrage
$$\begin{cases}x(t)=\cos^3 t\\ y(t)=\sin^3 t\end{cases},t\in[0,2\pi].$$

Exercice 100 - Longueur d'une arche de cycloïde

Calculer la longueur d'une arche de cycloïde de paramétrage
$$\begin{cases}x(t)=t-\sin t\\ y(t)=1-\cos t\end{cases},t\in[0,2\pi].$$

Exercice 101 - Vrai/Faux

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses?

1. Deux événements incompatibles sont indépendants.
2. Deux événements indépendants sont incompatibles.
3. Si $P(A)+P(B)=1$, alors $A=\bar{B}$.
4. Si A et B sont deux événements indépendants, alors $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.
5. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ deux systèmes complets d'événements. Alors $(A_n\cap B_p)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est un système complet d'événement.

Exercice 102 - Écriture ensembliste

Soit Ω un univers et soient A,B,C trois événements de Ω. Traduire en termes ensemblistes (en utilisant uniquement les symboles d'union, d'intersection et de passage au complémentaire, ainsi que A, B et C) les événements suivants :

1. Seul A se réalise;
2. A et B se réalisent, mais pas C.
3. les trois événements se réalisent;
4. au moins l'un des trois événements se réalise;
5. au moins deux des trois événements se réalisent;
6. aucun ne se réalise;
7. au plus l'un des trois se réalise;
8. exactement deux des trois se réalisent;

Exercice 103 - Densité ou non?

Parmi les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$, déterminer lesquelles sont la densité d'une variable aléatoire à densité. Calculer le cas échéant leur fonction de répartition et préciser si elles admettent une espérance.

1. $f_1(x)=\begin{cases}\cos x & \text{si } x\in[0,\pi/2]\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$

2. $f_2(x)=\frac{1}{1+x^2},\ x\in\mathbb{R}$

3. $f_3(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^2},\ x\in\mathbb{R}$

4. $f_4(x)=\begin{cases}1+x & \text{si } x\in[-1,0]\\ 1-x & \text{si } x\in[0,1]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

5. $f_5(x)=\begin{cases}\frac{1}{|x|^3} & \text{si } |x|>1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

6. $f_6(x)=\sin x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

Exercice 104 - Quelques exemples

Les fonctions suivantes sont-elles injectives? surjectives? bijectives?

$$f_1:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ n\mapsto 2n,\ \ f_2:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ n\mapsto -n$$

$$f_3:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^2,\ \ f_4:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+,\ x\mapsto x^2$$

$$f_5:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto z^2.$$

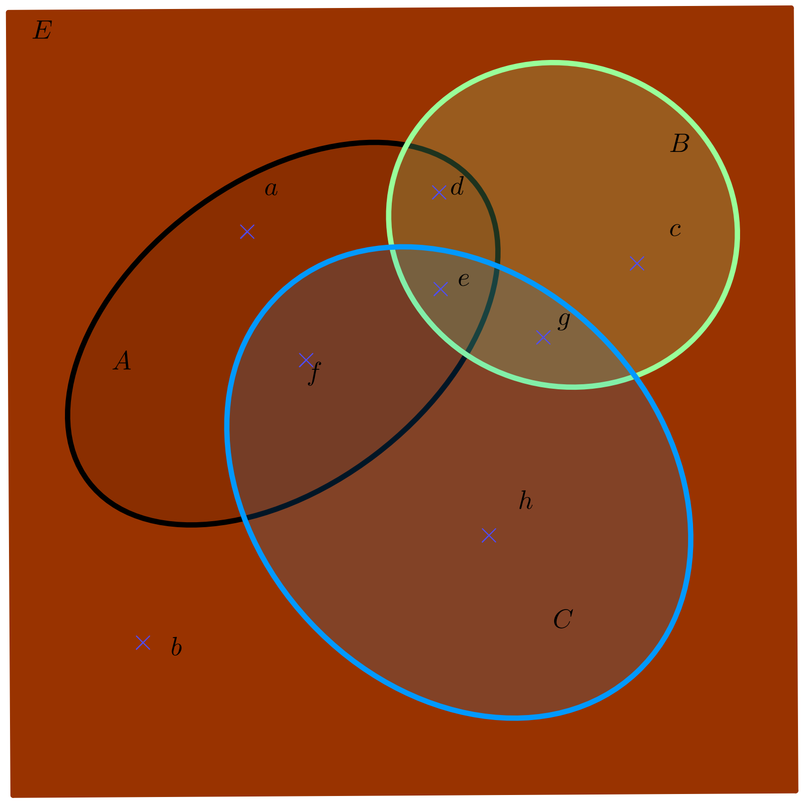
Exercice 105 - Encore des exemples

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives?

1. $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ n\mapsto n+1$.
2. $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ n\mapsto n+1$.
3. $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ (x,y)\mapsto(x+y,x-y)$.

Exercice 106 - Diagramme de Venn

On considère le diagramme de Venn suivant, avec A, B, C trois parties d'un ensemble E, et a, b, c, d, e, f, g, h des élements de E.



Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. $g \in A \cap \bar{B}$;
2. $g \in \bar{A} \cap \bar{B}$;
3. $g \in \bar{A} \cup \bar{B}$;
4. $f \in C \backslash A$;
5. $e \in \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$;
6. $\{h, b\} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$;
7. $\{a, f\} \subset A \cup C$.

Exercice 107 - Écriture en extension

Écrire en extension (c'est-à-dire en donnant tous leurs éléments) les ensembles suivants :

$$A = \left\{\text{nombres entiers compris entre } \sqrt{2} \text{ et } 2\pi\right\}.$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{Q};\ \exists (n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ x = \frac{p}{n} \text{ et } 1 \leq p \leq 2n \leq 7\right\}.$$

Exercice 108 - Deux descriptions d'un même ensemble

Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 4x - y = 1\}$ et $C = \{(t + 1, 4t + 3);\ t \in \mathbb{R}\}$. Démontrer que $A = C$.

Exercice 109 - Autour de l'implication

Trouver des propositions P et Q telles que

1. $P \implies Q$ est vrai et $Q \implies P$ est vrai.
2. $P \implies Q$ est faux et $Q \implies P$ est vrai.
3. $P \implies Q$ est faux et $Q \implies P$ est faux.

Exercice 110 - Forme normale conjonctive et disjonctive

Écrire sous forme normale conjonctive et sous forme normale disjonctive les propositions ci-dessous :

1. $(\neg p \wedge q) \implies r$;
2. $\neg(p \vee \neg q) \wedge (s \implies t)$;
3. $\neg(p \wedge q) \wedge (p \vee q)$;

Exercice 111 - Vraies ou fausses

Déterminer parmi les propositions suivantes lesquelles sont vraies :

1. 136 est un multiple de 17 et 2 divise 167.
2. 136 est un multiple de 17 ou 2 divise 167.
3. $\exists x \in \mathbb{R},\ (x+1=0 \text{ et } x+2=0)$.
4. $(\exists x \in \mathbb{R},\ x+1=0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R},\ x+2=0)$.
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ (x+1 \neq 0 \text{ ou } x+2 \neq 0)$.
6. $\exists x \in \mathbb{R}^*,\ \forall y \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R}^*,\ z - xy = 0$;
7. $\forall y \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R}^*,\ z - xy = 0$;
8. $\forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*,\ \exists x \in \mathbb{R}^*,\ z - xy = 0$;
9. $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ |a| < \varepsilon$;
10. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbb{R},\ |a| < \varepsilon$.

Exercice 112 - Nature des relations

Dire si les relations suivantes sont réflexives, symétriques, antisymétriques, transitives :

1. $E = \mathbb{Z}$ et $x\mathcal{R}y \iff x = -y$;
2. $E = \mathbb{R}$ et $x\mathcal{R}y \iff \cos^2 x + \sin^2 y = 1$;
3. $E = \mathbb{N}$ et $x\mathcal{R}y \iff \exists p, q \geq 1,\ y = px^q$ (p et q sont des entiers).

Quelles sont parmi les exemples précédents les relations d'ordre et les relations d'équivalence?

Supplément :

Exercice 1 - DSE en 0

Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes. On précisera le rayon de convergence de la série entière obtenue.

1. $\ln(1+2x^2)$	**2**. $\dfrac{1}{a-x}$ avec $a \neq 0$
3. $\ln(a+x)$ avec $a > 0$	**4**. $\dfrac{e^x}{1-x}$
5. $\ln(1+x-2x^2)$	**6**. $(4+x^2)^{-3/2}$

Exercice 2 - Exemples

Déterminer l'intérieur et l'adhérence des parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes :

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x>0\} \\ B &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ xy=1\} \\ C &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ xy>1\} \\ D &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 2\}\setminus\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2<1\}. \end{aligned}$$

Exercice 3 - Premier ordre, à coefficients constants

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $7y'+2y=2x^3-5x^2+4x-1$;
2. $y'+2y=x^2-2x+3$;
3. $y'+y=xe^{-x}$;
4. $y'-2y=\cos(x)+2\sin(x)$;

Exercice 4 - Exemples de groupes - avec des fonctions

Les ensembles suivants munis des lois considérées sont-ils des groupes?

1. G est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définies par $x\mapsto ax+b$, avec $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$, muni de la composition;
2. G est l'ensemble des fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition;
3. $G=\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$, où
$$f_1(x)=x,\ f_2(x)=-x,\ f_3(x)=\frac{1}{x},\ f_4(x)=-\frac{1}{x},$$
muni de la composition.

Exercice 5 - Quelques sous-groupes usuels

Soit $(G,\cdot)$ un groupe. Démontrer que les parties suivantes sont des sous-groupes de G :

1. $C(G)=\{x\in G;\ \forall y\in G, xy=yx\}$ ($C(G)$ s'appelle le centre de G);
2. $aHa^{-1}=\{aha^{-1};\ h\in H\}$ où $a\in G$ et H est un sous-groupe de G.
3. On suppose de plus que G est abélien. On dit que x est un élément de torsion de G s'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $x^n=e$. Démontrer que l'ensemble des éléments de torsion de G est un sous-groupe de G.

Exercice 6 - Des propriétés bien connues

Traduire en termes de morphismes de groupes les propriétés bien connues suivantes (dont le domaine de validité a volontairement été omis) :

1. $\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$;
2. $|zz'|=|z||z'|$;
3. $\sqrt{xy}=\sqrt{x}\sqrt{y}$;
4. $e^{x+y}=e^xe^y$;
5. $\det(MM')=\det(M)\det(M')$.

Exercice 7 - Vrai/faux

1. En dimension finie, un endomorphisme admet un nombre fini de vecteurs propres.
2. Si A est diagonalisable, alors A^2 est diagonalisable.
3. Si A^2 est diagonalisable, alors A est diagonalisable.
4. Tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension impaire admet au moins une valeur propre.

5. La somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable.

Exercice 8 - Trigonalisation - sans indications

Trigonaliser les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 - Vrai/Faux

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E stables par u, alors u est diagonalisable si et seulement si les deux endomorphismes induits u_F et u_G sont diagonalisables.
2. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal.
3. Si le polynôme caractéristique d'une matrice est égal à son polynôme minimal, alors la matrice est diagonalisable.

Exercice 10 - Intégration par parties - Niveau 3

Calculer les intégrales suivantes :

$$\mathbf{1.}\quad I=\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}dt \quad \mathbf{2.}\quad J=\int_0^1 x(\arctan x)^2dx \qquad \mathbf{3.}\quad K=\int_0^1 \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}dx$$

Exercice 11 - Changements de variables - Recherche de primitives

En effectuant un changement de variables, donner une primitive des fonctions suivantes :

$$\mathbf{1.}\quad x\mapsto \frac{\ln x}{x} \qquad \mathbf{2.}\quad x\mapsto \cos(\sqrt{x})$$

Exercice 12 - Exemples de familles non sommables

Démontrer que les familles suivantes ne sont pas sommables :

1. $\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x\in\mathbb{Q}\cap[1,+\infty[}$;
2. $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$, $a_{n,p}=\frac{1}{n^2-p^2}$ si $n\neq p$ et $a_{n,n}=0$.

Exercice 13 - Tribu image réciproque

Soit E et F deux ensembles, $\mathcal{T}$ une tribu sur F et $\phi : E\to F$ une application. Montrer que $\mathcal{T}'=\{\phi^{-1}(A);\ A\in\mathcal{T}\}$ est une tribu sur E.

Exercice 14 - Loi de Pascal

On lance une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile vaut p. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir r fois pile. Quelle est la loi de X?

Exercice 15 - Diagonalisable?

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$. Soit

$$A=\begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable?

Exercice 16 - Sous-groupes du groupe des matrices inversibles?

Dire si les parties suivantes de $GL_n(\mathbb{R})$ sont des sous-groupes de $GL_n(\mathbb{R})$.

1. $H_1=\{A\in GL_n(\mathbb{R});\ A \text{ diagonale avec tous ses coefficients diagonaux non-nuls}\}$.

2. $H_2=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix};\ a>0,\ b\in\mathbb{R}\right\}$ (ici, $n=2$).

3. $H_3=\left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ a & b\end{pmatrix};\ a>0,\ b\in\mathbb{R}\right\}$ (ici, $n=2$).

Exercice 17 - Isomorphismes

On considère l'ensemble de matrices $G=\left\{\left(\begin{array}{cc}a & b\\ 0 & 1\end{array}\right):a,b\in\mathbb{R},a\neq 0\right\}$.

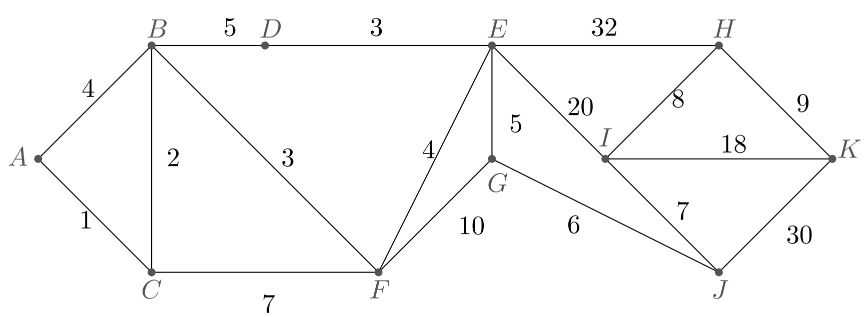
1. Démontrer que G est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$.
2. On considère l'application $\varphi:G\to\mathbb{R}^*$ définie par

$$\varphi\left(\left(\begin{array}{cc}a & b\\ 0 & 1\end{array}\right)\right)=a.$$

   (a) Démontrer que φ est un morphisme de groupes.
   (b) Déterminer un sous-groupe distingué H de G tel que $G/H\simeq\mathbb{R}^*$.
   (c) Donner un isomorphisme $\psi:H\to(\mathbb{R},+)$.

Exercice 18 - Plus court chemin

Cherchez le plus court chemin de A à K dans le graphe suivant. On détaillera les calculs.



Exercice 19 - Temps d'arrêt

On note H_n la somme $H_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}$. On admet que (H_n) tend vers $+\infty$. Écrire un algorithme qui détermine le plus petit entier n tel que H_n dépasse un réel a donné.

Exercice 20 - Renversant!

Écrire une fonction qui prend en entrée un entier naturel a et retourne cet entier écrit à l'envers. Par exemple, si $a=1234$, la fonction devra retourner $a=4321$. On pourra utiliser les fonctions quotient(n,p) et reste(n,p) qui donnent le quotient et le reste de la division de n par p.

Exercice 21 - Orthonormalisation de Schmidt

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Schmidt la base suivante :

$$u=(1,0,1),\ v=(1,1,1),\ w=(-1,-1,0).$$

Exercice 22 - Erreur commise

Majorer l'erreur commise dans les approximations suivantes :

$$\mathbf{a.}\sqrt{10001}\simeq 100;\ \mathbf{b.}\frac{1}{0,999^2}\simeq 1;\ \mathbf{c.}\cos 1\simeq\frac{1}{2}.$$

Exercice 23 - Quelques calculs

Calcuter la dérivée n-ième des fonctions suivantes :

$$\mathbf{1}.x \mapsto x\exp(x) \qquad \mathbf{2}.x \mapsto x^2 \sin x \qquad \mathbf{3}.x \mapsto x^{n-1}\ln(1+x).$$

Exercice 25 - Tribu engendrée

Soit $\Omega = \mathbb{Z}$. On considère $\mathcal{T}$ la tribu engendrée par les ensembles $S_n = \{n, n+1, n+2\}$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Quels sont les éléments de la tribu $\mathcal{T}$?

Exercice 26 - Mesurables!

Prouver que les fonctions suivantes sont mesurables (boréliennes):

1. la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$;
2. la fonction $x \mapsto x+1$ si $x > 0$ et $-x$ si $x \leq 0$;
3. la derivée f' d'une fonction dérivable f.

Exercice 27 - Insertion dans une liste triée

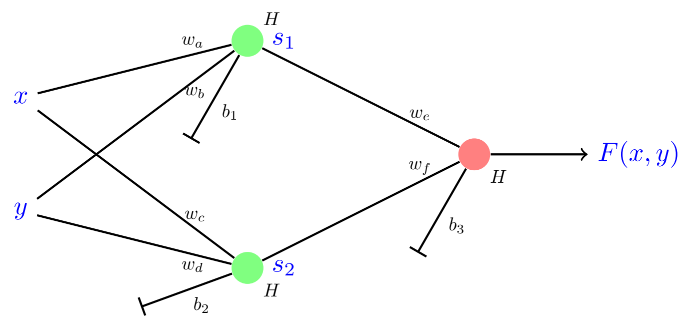
Écrire une fonction qui prend en argument une liste triée l et un entier *elt* et qui renvoie la liste triée obtenue par insertion à sa place de *elt* dans l. On fera attention à ce que la liste l peut être vide.

Exercice 28 - Connexité - I

Soit G un graphe non-orienté simple d'ordre $2p$. On suppose que le degré de chaque sommet est au moins égal à p. Démontrer que ce graphe est connexe.

Exercice Perso 1 - Réseau de neurone XOR.

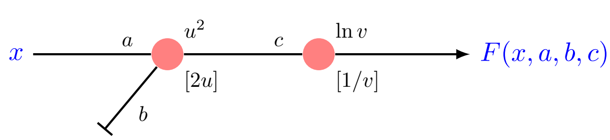
Soit 3 neurones vérifiant l'application $F(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, avec H, la fonction d'activation Heaviside.



1. Tracer pour chaque neurone l'ensemble réalisable de sortie suivant la valeurs des éléments $\{w_a, w_b, b_1, w_c, w_d, b_2, w_e, w_f, b_3\}$:
   (a) $\{-1, 3, 0, 2, 1, 0, 1, 1, -2\}$
   (b) $\{-1, 3, 0, 2, 1, 0, 1, 1, -1\}$
   (c) $\{1, -1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1\}$: comparer la premiere couche avec un neurone de convolution "moyenne".
2. Pour des entrées binaires, lequels des trois vérifient la porte logique XOR ? Calculer l'erreur quadratique pour chaque cas.

Exercice Perso 2 - Gradient d'un réseau de neurone.

Soit 2 neurones vérifiant l'application $F(x,a,b,c) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que :



1. Calculer les valeurs pour chacune des sortie et des dérivations automatiques.
2. Rappeler la formule du gradient pour la variation des poids des neurones (a,b,c) à chaque instant.
3. Calculer la descente de gradient pour deux itérations et déduire la convergence.