

D Structure de la chromatine: Pour eucaryote, jorone ou de présente l'ADN dans le noyaux.

• Compaction de l'ADN: Euchromatin (condensée, transcription) → Heterochromatin (très condensée)

→ Proteine responsable: Association d'Histone (H3, H4, H2A, H2B) formé avec l'ADN le nucleosome.

D L'épigénétique: Expression de gènes dû à l'environnement avec potentiel de transmission

→ Mécanisme: Deméthylation de l'ADN, modification d'histones, ARNs non codants régulateurs.

D Expansion génique: Ensembles de processus biochimique dont l'information (gène) est lu pour la fabrication de molécules (rôle actif: Protéine)

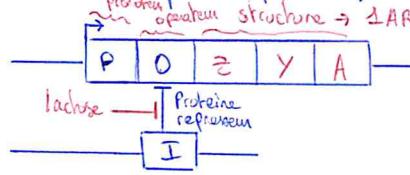
Exemple: Protéomes différents suivant "degré" (ecto, endo, meso) de l'embryogenèse

Régulation (ici eucaryote): (Region de contrôle → Region codante) → Transcription → Processing } noyau
→ Transport → Translation → Modification } cytoplasme

D Les Opérons: (pour bactérie) Unité d'ADN fonctionnelle regroupant des gènes sous le contrôle d'un signal moléculaire régulateur.

. L'O-lactose: Nécessaire aux transport (perméase) et aux métabolisme (β -gal) du lactose.

→ Régulation: Lac



Promoteur: Séquence de Shine-Dalgarno

{ Positive via activation → }
{ Negative via repression → }

→ Homéostasie: Stabilisation du système, ici via glucose: Lactose → Glucose \rightleftharpoons Glucose inactive cycle, ATP (hydrolyse)

→ Facteur de transcription: protéine nécessaire à l'initiation de la transcription (fixation de l'ARNp) → ici CAP+All

D Épissage de l'ARN: Processus par lequel l'ARN transcrit (messager) subit des étapes de coupures (messager)

(eucaryote)

↳ contient intron (non codant) et exons (codant)



→ pour les eucaryotes, l'Enhancer (en avant du code) \Leftrightarrow Opéateur (régulation)

→ mediamente en place l'ARN polymérase II

> Signification cellulaire: Mécanisme de communication; Sigaux: Direct/juxtaposition, courte distance / paracrine (molécule) → Voie = Pathway
Recepteurs: hormone, neurotransmetteur, cytokine (système immunitaire), facteur de croissance (vitamines)

> Voie métabolique: Ensemble de réaction chimique catalysé par des enzymes de manière séquentielle

→ Cycle de Krebs (acide citrique $\xrightarrow{\text{oxydation}}$ ATP), Glycolyse, Urée (Ammoniac), Calvin (photosynthèse)

> Traffic Véhiculaires: Permet à la communication, le transport, la spécification et la compartmentalisation.

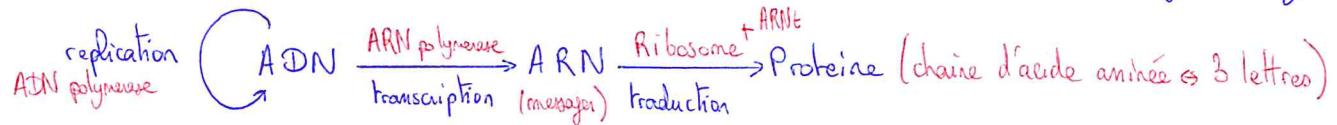
lysosomate \leftrightarrow actin. Eucaryote: cat Proteine de clathrin Golgi (lysosome) membrane selle... → degradatio Exocytose: sécrétion constitutive Endocytose: recyclage ou dégradation Ciblage = SNR Regulation = Rab Assistance = Chaperones

> Clonage bactérien: Multiplication d'un fragment d'ADN via bactérie.

Plasmide (vecteur) + Enzyme de restriction (digestion) { ADN + Ligase } (Insert) $\xrightarrow{+}$ Cellule compétente → Tétr bleu/vert (X-gal) Transformation

Concept en Biologie:

► Dogme de la Biologie moléculaire: Modèle de conservation et utilisation de l'information génétique



→ Théorie synthétique de l'évolution: Mutation génétique fait apparaître nouvelle caractéristique physique → si avantageux: Sélection naturelle ; Équilibre population: $e^{t/\kappa} = \alpha t$
note: Contingence (hasard) ↔ Convénience (determinisme)

> Diversité du monde du vivant: Designe la variabilité du monde du vivant → concept d'espèce:
(génétique, spécifique, écosystémique) → critère morphologique → moléculaire

- Structuration du vivant: Arbre phylogénétique { Eucaryote } + Cladistique { état pionnier → plesiomorphe }
 - (→ anciennement: Systémique avec taxons)
 - Archéen
 - Bactériac
 - anatomie comparée

• Metazoaire (Animaux) : Séparation entre bilateriens (axes) et non-bilatériens.

> Differentiation cellulaire: Spécialisation en type cellulaire (matériel génétique conservé)
→ Cellule pluripotente: souche (animaux) et meristématisque (plantes)

> Développement: Etude du processus de croissance

Oppenauer: Etude du processus de croissance
 → contrôles génétiques: Cellulaire, différentiation, morphogénèse } exemple: embryogénèse:
 monula → blastula → gastrula → neurula
 → organogénèse

> Cycle cellulaire: Etapes délimitant / constituant la vie d'une cellule.

→ Replication de l'ADN: Milrose: Prophase → Metaphase → Anaphase → Telophase → Interphase

→ contrôle de l'activité protéique: Phosphorylation (des)active → kinase, phosphatase

→ Multiplication sexuée (eucaryote): Méiose : Cellule germinale → gamètes.

> Génés Homéotiques: Détermine le plan d'organisation d'un être vivant bilatérien (axe de polarité)

- Gènes Hox (antero-postérieur) :

• Génere Pax (dorso - ventral)

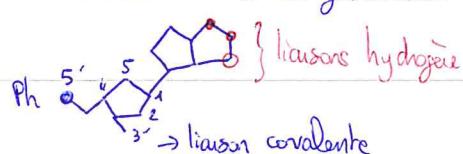
bras de chromosome :
(aryoïde)

A hand-drawn diagram of a chromosome. It is represented by a blue horizontal bar with two black hatched rectangular extensions at each end, labeled 'telomere'. The word 'centromere' is written below the center of the bar.

> Multicellularité: Ensemble de cellules en contact → Benefice: Taille, Ressources, ^{connexine, canaux ioniques}; Contrainte; Coureux
ex: Biofilm, tissu epithelial/conjonctif (mesenchyme + matrice)

► Hérité : Transmission aux sein d'espèces de "caractère" à la génération suivante.

→ Base → Nucleohides :



- VuHls mathématiques:
- Transformée de Fourier: $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-2\pi f t} dt = \text{TF}[x(t)]$
 - Dérivée d'ordre 1: $\frac{dy}{dt} \approx \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}$ soit (translation): $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0) e^{-2\pi f t} dt = X(f) e^{-2\pi f t_0}$
 - Convolution: $\text{TF}[x * y] = X(f) \cdot Y(f)$; résidu: $\oint f(p) = 2\pi j \sum \text{Res}$; $\text{Res} = \lim_{p \rightarrow p_0} (p-p_0) f(p)$
- Transformée en z: $x[n] \xrightarrow{Tz} \left\{ \begin{array}{l} x(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} \\ \text{causalité } u[n-m] \\ R_2 \rightarrow +\infty \end{array} \right.$ Couronne de convergence C : $R_1 < |z| < R_2$; \uparrow pôle causal ; \uparrow pôle non causal
- $Tz[ay[n-m]] = a z^m$
- Inversion: Réduction en élément simple: $\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{A}{(z-a)} + \frac{B}{(z-b)}$ \Rightarrow identification
 - Formule d'obt.: $\sum_{k=0}^{N-1} (az)^k = \frac{1-(az)^N}{1-az}$; $Tz[a \cdot u[n]] = X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a \cdot z^{-n}) = \frac{1}{1-az^{-1}}$ astuce: si forme différente, voir si devient scellable.
- S signaux Déterministe - Temps Continu:
- Observation spectrale: $X_{\text{obs}} = x \times F \xrightarrow{\text{Fenêtre}} X_{\text{obs}} = X * (T \text{sinc} T f) \xrightarrow{\text{Xmax}} \Delta f = 2/T$ pour 1/2 porte {enveloppe $\frac{1}{f}$ }
 - Hautiers relatives (écart entre 2 lobes en Amplitude): $\Delta X_w = 20 \log \left(\frac{X_2}{X_{\text{max}}} \right)$
 - Griture de résolution: $|f_1 - f_2| > \frac{1}{T} \approx \text{Ractif!}$
 - Représentation: α intenses et décroissantes dans \tilde{F} (lissage)
- Filtre: (linéaire et invariance temporelle); stabilité $H(x)$ bornée, $F(x)$ bornée {EB - SB}
- Reponse impulsuelle (RI): $\tilde{F}(x) = y = h * x \rightarrow$ poser: $e_s(t) = e_s \cdot e^{pt}$
 - Reponse en fréquence: $Y(f) = X(f) \cdot H(f) \rightarrow$ poser: $p = jw \rightarrow$ diagramme de Bode
 - Ordre d'un filtre: Défini par le nombre de pôles de la fonction de transfert: $H(p) = \frac{s(t)}{e^{pt}}$
 - Facteur de qualité: $Q = \omega / \Delta w$
 - Diagramme de Bode: $H(f)$ en représentation log-log
- Echantillonage: continu \rightarrow discret. $x[n] = x(nT)$
- Formule de Poisson: $y(f) = \frac{1}{T} \sum X(f - \frac{k}{T}) = \sum x(nT) e^{-2\pi f nT}$
 - Griture de Shannon: $2f_{\text{max}} < f_{\text{echantillonnage}}$. Théorème: $\text{TF}^{-1}[H(f) \cdot X(f)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \cdot \text{sinc} \left(\frac{t-nT}{T} \right)$ (interpolation)
- S signaux Déterministe - Temps discret: \rightarrow Causalité $R_2 \rightarrow +\infty$; pas de temps négatif
- TF Temps Discret: Porte: $X(e^{j\pi f}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-2\pi f nT} \propto \frac{\sin(\pi f N)}{\sin(\pi f)}$ $\xrightarrow{\text{TFD pour } \sum_{n=0}^N \rightarrow \text{fréquence réduite } \nu = \frac{f}{N}}$
 - Fenêtrage: Résolution: $P = \text{taille}$; Précision = "N"
- Filtre numérique:
- Fonction de Transfert: $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} \xrightarrow{\text{sortie}} \text{équation de récurrence (ER)}: y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$
 - Analyse: $\xrightarrow{Tz} H(z) \xrightarrow{z=e^{j\pi f}} H(e^{j\pi f})$ $\xrightarrow{\text{TFD}} H(e^{j\pi f})$ RI = $h[n]$ \rightarrow reviens à poser $x = \delta$ puis analyse de $y[0, \dots, n]$
 - Classes: RIF = $A = 1, H = B$
RII $\rightarrow h[n]$ s'obtient par inversion ou analyse récurrence.

Véneravire :

- Echelle et Dimensions: Ecosystème (resource + replicateur ~ km) \rightarrow Individu (~m) \rightarrow organisme (~cm) \rightarrow tissus (~0,1mm) \rightarrow Cellule (10^{-7}) \rightarrow Molécule
- Division cellulaire: 1h \rightarrow prokaryote, 1j \rightarrow eucaryote.
- Dogme central de la biologie moléculaire: ADN $\xrightarrow{\text{transcription}}$ ARN $\xrightarrow[\text{(ARN)}]{\text{traduction}}$ Protéine (composante d'acide aminé \rightarrow 3 lettres)
- Mécanotransduction: Différenciation cellulaire (souscrite) en fonction du substrat \rightarrow Durabilité dépendant (fonction)
- Expression génétique (circuit synthétique): Entrée: {Séquence d'ADN} \rightarrow sortie: {Protéine} $\xrightarrow{\text{opéron}}$ opéron → régulateur promoteur
- Réseaux trophiques (Graphes): chaînes alimentaires d'un écosystème: $\begin{cases} \text{Prédateur} \\ \text{Hôte} \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{relations: symbiose, ...}}$
- Système prédateurs-predateurs: $\dot{x} = x(\alpha - \beta y) \rightarrow \text{proie} = x$ (Isocline); $\dot{y} = y(\gamma - \delta x) \rightarrow \text{prédateur} = y$ (Isocline); $\dot{x} = x(\alpha - \beta y) \rightarrow \text{stabilité} = \frac{P_r}{G/2} = \frac{P_r}{G-C}$; $\dot{y} = y(\gamma - \delta x) \rightarrow \text{stabilité} = \frac{P_d}{G-C}$; $G = \text{Gain}$; $C = \text{pertes}$; Stabilité \Rightarrow Nash $(A.P.)_i = (A.P.)_j$

Cellules:

- Constituants: Lipides (membrane = isolation); Acide nucléique (héritage); Sucres (métabolite $\xrightarrow{\text{enzymes}}$ ATP + ADP + P); Protéine (fonction), acide aminé et philes \subset phobes
- Bactérie: (prokaryote), 2 types de paroi (Gram positif/négatif) \rightarrow peptidoglycan; [coque; bâton]; mobilité: flagelle: $m \ddot{v} = -6\pi \eta R \dot{\theta}$
- Mouvement Brownien: marche aléatoire $\langle \vec{O}\vec{M}^2 \rangle = \langle (\sum_i \vec{r}_i)^2 \rangle = \langle \sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i \rangle$
- Équations de Langevin: $m \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = -Y \cdot \vec{v} \cdot \vec{r} + \vec{F}(t) \cdot \vec{r} \rightarrow$ Équilibre statique (1 part): $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} k_B T$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Milieu = Thermostat.} \\ \text{Energie dissipée} \propto R^3 \\ \text{Pour mitochondrie} \rightarrow \text{Invagination est ATP synthase} \end{array} \right.$
- Transport intracellulaire: Eucaryote:  \rightarrow fission (donneur + coat) \rightarrow Transport actif (vesicule) \rightarrow Fusion (récepteur) (Dynamin \rightarrow scission; Arf1 \rightarrow lessivage) (Ciblage \rightarrow SNARE)
- Efficacité diffusif: $D = \frac{kT}{\pi a M} \rightarrow$ ion K⁺ (solvabilisé sel) $\rightarrow r = 1 \text{ Å}$ } Dans cytoplasme (émulsion colloïdale)
- Structure des protéines: hélice α ; feuillet β $\xrightarrow{\text{organisation de la chaîne polypeptidique}}$ Protéine $\rightarrow r = 3 \text{ nm}$
- Moteur moléculaire: production de travail \rightarrow mouvement; Myosine (muscle \rightarrow actine). Kinésine (déplace actine/glycane + fibrose via microtubule)

Polymère biologique:

- Compaction de l'ADN: Paire {AT} \rightarrow histone \rightarrow compacté \rightarrow chromosome $\left\{ \begin{array}{l} R = \sqrt{2 L_p L_t} \\ \text{rigidité: } B = E \\ \text{pénitance} \end{array} \right.$
- Modèle de Kratky Porod: (polymère semi-fluide) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Angulaire: } \langle \vec{t}_{\text{ini}} \cdot \vec{t}_f \rangle = (\cos \Theta)^2 \rightarrow \text{limite continue: } \langle \vec{t}(s) \cdot \vec{t}(0) \rangle = e^{-\frac{s}{L_p}} \\ \text{Rigidité (hamiltonien): } H = -\xi H_i = -\xi E \cdot t_i \cdot t_i \rightarrow H_i = -E \cos \Theta_i \Rightarrow \Theta_{\text{init}} = k_B T \ll E \end{array} \right.$
- Modèle de WLC: (extension d'un polymère) $\left\{ \begin{array}{l} \text{F. filaments: (polymère plié)} \\ \text{polymerisation} \rightarrow GTP; Depolymerisation} \rightarrow GDP \\ \text{Liaison: actine + myosine} \end{array} \right.$ $\xrightarrow{\text{équilibre: } E = E_c - F \Delta x}$ $\xrightarrow{\text{équation: } \Delta x = L_0 - L = 2R(\Theta - \sin \Theta)}$

Interactions moléculaires biologiques:

- Modèle de Bell-Evans: (rupture d'un lien adhésif) $\left\{ \begin{array}{l} \text{cellule-cellule} \rightarrow \text{adhésion} \\ \text{cellule-murier} \rightarrow \text{intégrine} \\ \text{+ anticorps/cellule} \end{array} \right\}$ Potentiel $P = [f_0 e^{-\frac{E}{k_B T}}] \cdot e^{-\frac{F \cdot x}{k_B T}} \xrightarrow{\text{appl. ATP + myosin}}$
- Calibration Pince-optique: \rightarrow pince optique $\vec{F} = (J \cdot g_{\text{ext}}) \vec{z} = \frac{J}{2} \vec{g}_{\text{ext}} (\vec{z}^2) \xrightarrow{\text{principe de Fermat (à l'optique)}}$ \rightarrow énergie d'interaction $W = \frac{1}{2} E \cdot z^2 = \frac{1}{2} k_B T$
- Appareil à force de surface: \rightarrow pince optique $dF = -\partial_z U \cdot dS \rightarrow F(z) = 2\pi R \cdot U(z) \xrightarrow{\text{courbure: } E(z) = \frac{1}{R}}$
- Modèle à 2 ressorts \rightarrow complexe d'adhérence: $\vec{F} = k_{\text{ext}} \vec{z} + k_{\text{adh}} \vec{z} \xrightarrow{\text{maxwell: }} \sigma(t) = E \cdot z + \eta \frac{dz}{dt} \xrightarrow{\text{équation: }} \frac{dE}{dt} = \frac{1}{Q} \sigma + \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt}$
- Rheologie des réseaux de filaments: (actine + myosine) $\sigma(t) = E \cdot z + \eta \frac{dz}{dt} \xrightarrow{\text{équation: }} \vec{F} = k \vec{z} + \xi \vec{z}$
- Imagerie super-résolution: Marqueur fluorescent (DAPI \rightarrow acide nucléique; GFP \rightarrow protéine (sous-unité)) \rightarrow observation facile d'Airy (Diffraction \rightarrow Fonction de Bessel)

Mémoires et Tissus:

- Rayon d'un tube de membranes: $R_0 = \frac{P_0}{P_{\text{ext}}} \xrightarrow{\text{loi de Laplace: }} \Delta P = Y \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$, conservation: $\Delta A = 0$; Pression capillaire: hyper \rightarrow coïncidence \rightarrow équilibre: $T = MR$
- Potentiel transmembranaire: Gradient d'ion entre les feuillets \rightarrow milieu électrique: $Q = \left(\frac{E - E_{\text{ref}}}{V} \cdot S \right) V$
- Adhésion différencielle: Modèle de Y pour formation de plissement \rightarrow correct avec tension interfaciale différencielle (actine corticale)
- Morphogénèse - embryon: {Auto-organisation par gradient}; Division (phases) \rightarrow Différenciation (gène exprimé) \rightarrow Feuillet \rightarrow Organogénèse

Matières molles: Etats de la matière condensée ou matériau ayant une réponse forte à un faible signal (exemples: polymère, tressé, dispersion colloïdale)

➤ Echelles: Spatial: $1\text{ \AA} < L < 10\text{ \mu m}$ et Temporel: $n\text{ s} < T < h$

➤ Notions communes:

- Interactions → Stabilité, auto-assemblage et comportement mécanique
- Entropie → Agitation thermique: $k_B T = 4 \cdot 10^{-21}\text{ J}$

➤ Interaction entre objets: Influence réciproque entre 2 objets
→ on cherche ratio Agitation thermique / potentiel d'interaction

• Electrostabilité (entre charge): Loi de Coulomb: $\vec{E}_1(2) = \frac{q_1 \vec{r}_{12}}{4\pi \epsilon_0 r_{12}^3}$ } action réaction $\Rightarrow \vec{F} = q_2 \vec{E}$

• Th de Gaus: $\int E \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int Q(r) dr$ → Équation de Poisson: $\Delta V + \frac{\rho(x)}{\epsilon} = 0$

• Van der Waals (dipole-dipole): Moment dipolaire: $\vec{q} = \sum q_i \vec{r}_i$; pour O_2 : $\vec{q} = 0$
(2 charges électrostatiques) au niveau linéaire

• Potentiel: $U_{vdw}(r) = -\frac{1}{r^6} \left[\frac{m_1^2 m_2^2 \text{kezam}}{3 \epsilon_0^2 k_B T} + \frac{m_1^2 \alpha_2^2 + m_2^2 \alpha_1^2 \text{Debye}}{\epsilon_0^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{h \cdot D \cdot \alpha_1 \alpha_2}{\epsilon_0^2} \right]$

• Lennard-Jones: Semi-empirique: $V_{LJ} \sim \frac{1}{r^6} + \text{sphère dur} \sim \frac{1}{r^{12}}$

• Constante de Hamaker: "A" → $W = \frac{P}{S} = A \cdot \frac{L_{c1} \text{ (plan, sphère...)}}{L_{c2} \text{ (plan, sphère...)}}$; $A_{12} = \pi \rho_1 \rho_2 C_{12}$; $A_{11} = \sqrt{A_{11} \cdot A_{22}}$

$$A_{12} : \begin{cases} > 0 \rightarrow \text{attraction} \\ < 0 \rightarrow \text{repulsion} \end{cases}$$

• Ions-molécules: Équation de Poisson avec Potentiel de Boltzman: $V(x) = V_0 \cdot e^{-x/\lambda}$ (linéarisation)
→ Longeur de Debye.

• Hydrogènes: liaison entre hydrogène et atome avec doublet électronique (\leftrightarrow electronegativité)

• Entropie: Agitation thermique \leftrightarrow Mvt Brownien: $D = \frac{k_B T}{6\pi\eta R}$; longeur $L^2 = 6D t$ collective individuelle

➤ Stabilité colloïdale: Suspension de substance dispersée dans une autre (2 phase) dont l'aggrégation/aglomération supplémentaire est limitée.

• DLVO: 2 particule dans solution: → stabilité pour $\frac{dV}{dx} = 0$ avec $V = \underbrace{V_{LJ}}_{\text{attraction}} + \underbrace{V_{Boltzman}}_{\text{repulsion}}$ → Hamaker.

• Depletion colloïdale: Pour de faible distance entre objet → effet de volume inclus → attraction

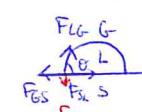
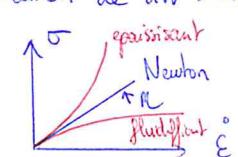
→ loi des Gaz Parfait: $P = n_2 \cdot k_B T \rightarrow F_2 = -n_2 k_B T \int_{\text{surface d'inclusion}} \uparrow \text{objet 2}$

(Approximation de de豫quin → force de Dotsawa)



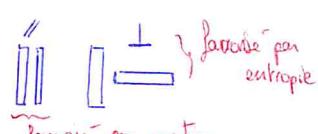
→ les surfaces doivent coïncider

D) Interface et rheologie :

- Pression de disjonction: Pression au interface d'un film mince $\Pi \propto -\frac{d}{d^n} \left(-\frac{A_{132}}{d^{n-1}} \right) = -\frac{A_{132}}{d^n}$
 $n=1$ (sphere), 2 (sphere), 3 (plan) \rightarrow à vérifier
- Young-Dupré: (Mouillage):  $\cos \theta = \frac{\gamma_{SG} - \gamma_{SL}}{\gamma_{LG}}$ } l'angle dépend du groupe (phile/phobe) choisi
 $\theta^{\circ} = 0$ (total) $\theta^{\circ} = 180^{\circ}$ (nul)
- Loi de Laplace: (minimisation de $dW \rightarrow dA$) soit $P_A - P_F = \gamma_{AP} \frac{dA}{dV} = \gamma_{AB} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$
- Comportement rheologique: 
- Gibbs-Duhem: $dF_A = dF_a \xrightarrow{(P,T) \text{ constant}} \Gamma = \frac{N}{A} = -\frac{d\gamma}{d\mu_{GP}}$ $\begin{cases} > 0 \\ < 0 \\ = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \text{si} \\ \text{écart} \\ \text{d'ions} \end{cases}$
- Nombre sans dimension: Reynolds $Re = \frac{\nu L}{\eta}$ $\begin{cases} \text{visqueux} \rightarrow < 1 \\ \text{turbulent} \rightarrow > 1 \end{cases}$ Peclet: $Pe = \frac{L_c \nu}{\alpha}$ $\begin{cases} \text{diffusion} \\ \text{convection} \end{cases}$

- Analyse harmonique (réponse du système linéaire): $G(\omega) = \underbrace{\Delta G'(\omega)}_{\text{élastique}} + i \underbrace{\Delta G''(\omega)}_{\text{visqueux}}$ avec $\sigma = G \otimes \dot{\gamma}$
- Visco-élasticité Maxwell (déformation fixé) $\begin{cases} \epsilon = \epsilon_p + \epsilon_R \\ \sigma = \sigma_p = \sigma \end{cases}$
- Voigt (contrainte fixé) $\begin{cases} \sigma = \sigma_R + \sigma_p \\ \epsilon_R = \epsilon_p = \epsilon \end{cases}$

D) Notions d'ordres (auto-assemblages) \rightarrow organisation des molécules \rightarrow Minimisation

- Transition de Onsager: (Desordre \rightarrow ordre) \rightarrow autre: $\frac{N}{V} \left(\underbrace{V_L - V_0}_{\sim D^3} \right) \sim 1$ 
- Approximation de Zwanzig: 3 directions seulement: $\mu = \frac{N_{x,y}}{N \rightarrow \sum_i^3 N_i}$ $\begin{cases} \mu = 0 \rightarrow \text{isotrope} \\ \mu = 1/3 \rightarrow \text{isotrope} \end{cases}$ favorisé par position
- Transition de Landau (phase d'ordre "n"): $F = a(T-T_S) s^2 - b \cdot s^3 + c s^4$ \rightarrow pour trouver T^* (puit \rightarrow stabilité)
- Tensio-actif \rightarrow CMC \rightarrow saturation de σ ($\sigma \propto c \leftrightarrow$ saturation de la surface) Neratiques (entre, cristal liquide) \rightarrow calcul de l'énergie de distortion (orientail, torsion, courbure, disindication \leftrightarrow défauts modifie angle de disposition)
- Coefficient du viriel: \rightarrow développement de l'équation d'état $P = c k T + \frac{1}{2} k T \cdot c^2 A_2 + \dots$ $\begin{cases} + = \text{repulsion} \\ - = \text{attraction} \end{cases}$ \rightarrow application pour polyéthylène/solvant. \rightarrow terme de volume exclu

D) Diffusion: \rightarrow étude de la structure / forme de l'éléments

- Analyse par dispersion: $I(q) = \underbrace{FF(q)}_{\text{forme (1 maille)}} \cdot \underbrace{S(q)}_{\text{structure (1 noeud)}}$ avec $FF(q) = V^2 \cdot f(x, qy, qz)$
 $\therefore S(q) < 1 \Rightarrow \text{repulsif}$ $f \rightarrow 1 \text{ pour } q \rightarrow 0$
 $> 1 \Rightarrow \text{attractif}$ (défini bord de comportement)

- Birefringence: Propagation anisotrope (1 direction) de la lumière \rightarrow observation via Polarisers/Analyseurs croisés

• Physique des polymères:

▷ Polymeres: Molécule de masse molaire élevée (macromol) constitué de monomère unis les uns aux autres par des liaisons covalentes.

• Synthèses: Polymerisation par étapes (Polycondensation) ou en chaînes (centres actifs) Polyaddition

▷ Chaine idéal: Chaîne sans interaction (volume exclu nul) dite "marche au hasard"

• Extrémité segment: $\vec{R} = \vec{r}_N - \vec{r}_0 = \sum_1^N \vec{a}_i$ 

• Modèle marche aléatoire: $\langle \vec{R}^2 \rangle = N \vec{a}^2$ avec $\langle \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j \rangle = a^2 \delta_{ij}$

• Structure invariante d'échelle \rightarrow Fractal \rightarrow Loi de puissance $N = \left(\frac{R}{a}\right)^d$

• Probabilité d'échirement spontané: $\frac{\partial P}{\partial N} = \frac{a^2}{2d} \Delta \vec{R} P$ (marche aléatoire \rightarrow diffusion) \rightarrow Équation de Schrödinger.

• Élasticité: Entropique sur petite déformation $\rightarrow S = k_B \ln P$; $F = -TS$; $\vec{f} = \frac{\partial F}{\partial \vec{R}}$

• Effet d'un potentiel:

\rightarrow Passage en limite continue: $\frac{z_N(x_0, x_N)}{2^N} = \left[\alpha \frac{z_{N-1}}{2^{N-1}} + \beta \frac{z_{N-1}}{2^{N-1}} \right] \left\{ e^{-\frac{V}{k_B T}} \right\} \rightarrow \left\{ 1 - \frac{V}{k_B T} \right\}$

\rightarrow Dominance du fondamentale $\Psi_0 \rightarrow$ Équation de Schrödinger.

▷ Chaine réel: Chaîne avec interaction (effet du volume exclu) \rightarrow Ajout d'une longeur de persistance \leftrightarrow rigidité

• Effet d'interaction: Ajout d'un potentiel: solvant: $V(r) \propto \left\{ \frac{1}{R^6}; \frac{1}{R^2} \right\}$ charge é⁻: $V(r) \propto \frac{1}{R}$

\rightarrow Détermination de R^* d'équilibre entre entropie ($\propto R^2$) et potentiel $V(r)$

\rightarrow Calculs perturbatif pour milieu dilué à interaction effective (phénomène critique) $\Rightarrow \phi = c^* \cdot a^d$

Soit: $F = F_{\text{ideal}} + V_{\text{interaction}} \rightarrow$ loi des gaz Parfait: $P = \frac{N}{V} k_B T = c k_B T$

Développement perturbatif de P pour "Vinter": $P = c k_B T \left(1 + \underbrace{\beta c}_{2 \text{ corps}} + \underbrace{\alpha c^2}_{3 \text{ corps}} + \dots \right)$

Pour 1 moléte: $V_{\text{inter}}(2 \text{ corps}) = \frac{1}{2} k_B T \cdot N \cdot c \cdot v(\tau)$

$v(\tau) > 0 \rightarrow H.T$ $\underbrace{a^3}_{\text{pour amplification (pour } F \text{ log)}}$

$< 0 \rightarrow S.T$

$\approx 0 \rightarrow$ chaîne quasi-ideal

\Rightarrow ^{un} coeffic.
du Viriel

D) Solutions de Polymères: Mélange de polymère avec un solvant (contrôle de la viscosité)

- Type de solvants:
→ dépend de T° & C

Bon:

repulsif → gonflement

Mauvais:

attractif → colapse

- Theorie de Flory: Valable pour bon solvant; Pour apprécier: dilué $\Rightarrow \infty \Rightarrow c < c^*$
↳ deut la stabilité $v(c) \sim a^3$
- Deut conformité: $R \sim a N \Rightarrow$ critique de gonflement

$$c^* \text{ unique pour } \mathcal{E}(c) = R \quad \cdot \nu = \frac{3}{d+2} \quad \Leftrightarrow \quad c^* = \frac{N}{(aN^\nu)^d} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{conformation} \\ \text{recouvrement} \end{array} \right.$$

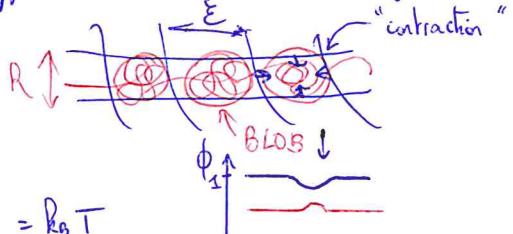
$$\rightarrow \text{Paramètre de Flory: } \chi = \frac{\text{volume exclu}}{\text{volume}} = \frac{v(c)}{a^3}$$

- Solution semi-dilué: Présence de longue de corrélation $\mathcal{E}(c)$

(Note: Champs moyen invalide \Leftrightarrow distribution moyenne \neq distribution de la grandeur la plus probable \mathcal{E})

$$\rightarrow \mathcal{E}(c) = R \left(\frac{c}{c^*} \right)^\lambda \quad \text{avec } \lambda = - \frac{\nu}{d-1}$$

- Ecartage: Effet d'interaction d'une longue chaîne de polymère (A) dans polymère (B) semi-dilué.



$$\rightarrow \text{Lia d'échelle: } \mathcal{E} = R_B T \quad (\text{B. Widom})$$

$$R = \sqrt{v_{blob}}^{1/2} \cdot \mathcal{E} ; \quad \text{Uniorphie} = v(c)c(\vec{F})$$

$$\mathcal{E} = g^{3/5} \cdot a ; \quad = V_{inter} + V_{intra}$$

↳ nb de polymère dans 1 BLOCS

- Polyélectrolyte: Polymère ionique (site)
- Copolymerie: 2 type de monomère \rightarrow phase cristal-s liquide (mesophases)

- Note: longue de corrélation $\mathcal{E}(c) \rightarrow$ distance moyenne entre point d'enchevêtrement des chaînes.

- Communication bactérienne:
- Quorum Sensing \rightarrow effet de la population: pour gram négative: Auto-inducteur I \leftrightarrow intra-espèce. Auto-inducteur II \leftrightarrow inter-espèce.
gram positive: cascade de phosphorylation par vesicule externe
- Biofilms: Aggrégat de micro-organisme en adhérence
 - \rightarrow 4 étapes de structuration (indiv \rightarrow colonie \rightarrow maturation \rightarrow propagation) \Rightarrow 3D via matrice de glycane (EPS)

- Prokaryote multicellulaire: 2 type cellulaire: somatique et germinale
 - \rightarrow calcul de sedimentation + poussé des flagelle: $\vec{g} \Delta M + 6\pi m \cdot a \cdot \vec{v}_{\text{sed}} = \begin{cases} \vec{0} & \rightarrow \text{sedimentation} \\ \vec{x} & \rightarrow \text{poussé} \end{cases}$
 - \rightarrow Equilibre entre flux métabolique et nutriment ($\propto a^2$) ($\propto a$)

- ▷ Comportement collectifs:
- \rightarrow le but est de modéliser les mouvements d'essaim (swarming)
 - note: Pour les bactéries il y a une hyperflagellation + sécrétion de surfactant \rightarrow s'observer en surface
 \hookrightarrow le mouvement individuel est hélicoïdale mais pas en groupe.

- Modèle de Vicsek: (vectoriel sans interaction) \rightarrow le mouvement des particules suivent la moyenne des vitesses locales de toutes les particules comprises dans le champs de vision
- Sait
 - $\circ \vec{a}_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)$
 - $\circ \theta_i = \frac{1}{n_i} \sum \sin(\theta_j - \theta_i) + n_i$

\rightarrow les autres modèles prennent en compte les interactions par l'utilisation d'autre principe (volume espace, attraction --)

- Types de mouvement: Analogie colloïde: (mouvement quadratique moyen)
 - \circ Ballistique $\langle x^2 \rangle \propto t^2$
 - \circ Diffusif $\langle x^2 \rangle \propto D^2$

Matière Active:

→ implique mouvement sans l'action de force extérieur \Rightarrow force libre

Mobilité de cellules individuelles:

- Bactérie: Structure: interne \rightarrow nucléoïde, ribosome, membrane plasmide
externe \rightarrow paroi cellulaire, capsule, flagelle / pil.

- Moteurs: Structure d'une flagelle \rightarrow filament, nochet, corps basal (\Rightarrow gradient de proton)

Constitution du corps basal:

- Protéine
- Anneau M-S (moteur)
- Anneau C (interrupteur)
- Anneau P-L (guide)
- Bâtonnet

\Rightarrow Nombre de Reynold $\ll 1$ donc essentiellement visqueux \rightarrow mouvement reversible (indépendance temporel)
 \rightarrow mouvement doit briser la symétrie

- Marche aléatoire \rightarrow 1^{er} idée du déplacement bactérien

\hookrightarrow hypothèse: $v_x = \pm S/\tau$ (constant); Equiprobabilité (isotropie) ; pas d'interaction

$$\text{soit } \langle x(n) \rangle = \langle x(n-1) \rangle \text{ et } \langle x^2(t) \rangle^{1/2} = \sqrt{S^2/\tau \cdot t}$$

$$\rightarrow \text{Coefficient de diffusion } D = S^2/2\tau \xrightarrow{\text{Equipartition}} \langle \frac{1}{2} m v_{\text{drift}}^2 \rangle = \frac{k_B T}{2} \rightarrow D = \frac{k_B T}{6\pi \eta a}$$

- Run & tumble: Déplacement réel d'une bactérie avec flagelle \rightarrow phase de run \leftrightarrow déplacement (rotation trigo)
 \downarrow
 t_{run} \rightarrow Biais directionnel et distance de corrélation $\rightarrow D = \frac{v^2 \cdot \tau}{3(1-\alpha)}$ tumble \leftrightarrow brownien (rotation horaire)
 t_{tumble} \rightarrow appelé aussi "nageur"

- Interaction fluide bactérie \rightarrow Définit champs de vitesse autour de la bactérie \rightarrow dépend du type de transmission
 - * transmission: pusher (traction avant) et puller (propulsion arrière)
 - dipole \leftrightarrow dipole \leftrightarrow

- Système de Taxisme: \rightarrow mouvement en direction du gradient \rightarrow cascade de régulation récepteur + flagelle
 \rightarrow variation des longueurs de courses.
 \hookrightarrow cheAB \hookrightarrow cheYP

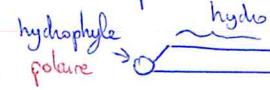
\rightarrow système d'adaptation $\Rightarrow t \sim \text{min}$ mais paradoxe du gain: $t \sim \text{rms}$ pour plus petite quantité
 $\xrightarrow{\text{exclusion d'aspartate}}$

- Motif: Chimiotaxisme (gradient chimique) \rightarrow réaction-diffusion - milieu succinate

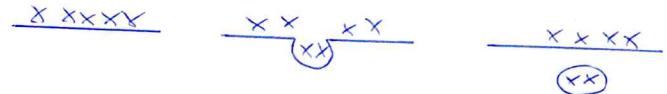
• Thermotaxisme \rightarrow Passage chaud/froid des récepteurs Tar et Tsr en fonction du % de méthylatose

• Aerotaxisme (oxygène) \rightarrow bande discrète ("niveau") \sim diffusion seule ici

Physique des membranes:

- ▷ Bicouche lipidique: membranes polaires constitué de 2 feuillets de lipides
- Element constitutif:  } amphiphile (\leftrightarrow surfactant)
 - Structure: Composition asymétrique des feuillets interne / externes
 - Propriétés:
 - Force de Van der Waals entre adjacents (\propto queue) $\rightarrow E \propto -1/r^6$
 - Semi-permeabilité (eau, $i\ddot{\alpha}n$), flexible, fluide ($i\ddot{\alpha}llement$); auto-assemblage.

Contexte cellulaire: phénomène endo/exocytose

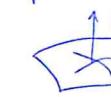


- ▷ Auto-Assemblage: Dans le cas où $C > C_{HC}$ \rightarrow gain d'énergie hydrophobe + Perd d'entropie. $\xrightarrow{?}$ \Rightarrow

- ▷ Echelles et Hypothèses:
- Taille: $1nm \rightarrow 10\mu m$; Energie: $k_B T \sim 4 \cdot 10^{-21} J$; $ATP \rightarrow ADP + P_i \sim 10-20$ micelle critique
 - Force: $4pN$; Temps: Loi de Boltzmann $1/\tau = (1/\tau_0) \cdot e^{-\Delta E/k_B T}$
- $\rightarrow T^\circ$ constant \Rightarrow Energie libre + Entropie à calculer.

- ▷ Thermodynamique: $F = U - TS$; $S = k_B \log \Omega_T$; $\Omega_T = \frac{M!}{N!(M-N)!}$; Stirling: $\log N! = N \log N -$ (+ Stat) $\xrightarrow{\text{approx}} E(C_p) \rightarrow$ sphère, cylindre, bicouche \leftrightarrow minimisation: $\frac{\partial E}{\partial p} - 4 \frac{\partial N}{\partial p} = 0 \rightarrow C_p$

- ▷ Propriétés mécaniques: \rightarrow définir Tension interfacial, conformation et interaction.

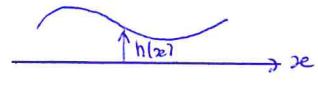
- Energie de courbure:
 - Moyenne (surface):  $\operatorname{div} \vec{n} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = C_1 + C_2 \rightarrow E = \frac{K}{2} \int (\operatorname{div} \vec{n})^2 dS$
 - Gaussienne (topologie): ellipsoïde $C_1C_2 > 0$; parabolique $C_1C_2 = 0$; hyperbolique $C_1C_2 < 0$
 - $E = \frac{1}{2} \int K C_1 C_2 dS \rightarrow$ Gauß-Bonnet: $\int_S C_1 C_2 dS = 4\pi(1-p)$

- Rôle de la tension de surface: Minimisation de la surface; tension globale nulle mais local $\neq 0$
 \rightarrow Calcul pipette: Équilibre (non dynamique): Laplace = Pénétration (gaz parfait)

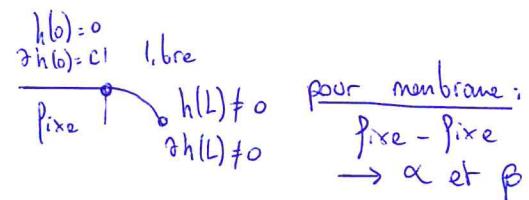
- Théorème de Fluctuation dissipation: \rightarrow relation entre fonction de réponse et fonction de corrélation
 $\rightarrow D = \frac{k_B T}{6\pi m a} \xrightarrow{\text{fluctuation}} \text{dissipation}$

- Hamiltonien de déformation: $H = \int dS \left(\frac{1}{2} K C^2 + \bar{K} k \right)$

► Conformation à l'équilibre:

- Approximation de Monge: $h = h(x, y)$ et $|Dh| \ll 1 \Rightarrow$ faible déformation 
- Approche de Helfrich: 1D: $H = \int_0^L dx \left(\frac{1}{2} K \left(\frac{d^2 h}{dx^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \sigma \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right)$ → contrainte interne seule
→ Fonctionnelle $H[h(x)]$ 2D: $\Delta h \ll C$ de la matrice symétrique $\nabla^2 h$
- Minimisation de la Fonctionnelle: → minimisation de la forme: $\delta H = H[h+dh] - H[h(x)] = 0$
→ Développement (ordre 1 seul) → IPP + forme différentiel Pour l'IPP: $u' = dh/dx$!
→ Les bords ne peuvent compenser ($\pm \infty$) → 0 soit $\left[\downarrow \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^L = 0$
→ Euler Lagrange: $K \partial_x^4 h - \sigma \partial_x^2 h - P = 0 \rightarrow$ à résoudre.

- Conditions aux limites: Energie = H (pour $T_{\text{choc}} = 0$)



► Propriété statique:

- Passage dérivé/polynôme: Parseval: $\int f(q) \cdot g^*(q) \frac{dq}{2\pi} = \int dx f(x) g^*(x)$ puis $\text{TF}\left[\frac{f(q)}{g(q)}\right] = \int f(x) g^*(x)$

- Théorème d'Equipartition: mode quadratique contribue à $\frac{k_B T}{2}$ → $\langle |h(q)|^2 \rangle = \frac{k_B T L^2}{\text{TF(Euler Lagrange)}}$

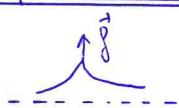
$$F = -k_B T \ln(z) \rightarrow z = \int D(h) e^{-\beta H(h)}$$

\rightarrow Longueur de persistance: $L_p \gg L \Rightarrow$ états plan

► Équation du mouvement de la membranes:

- Équation: Stokes (2: selon z et \perp): $-\nabla P + \eta \Delta v = f$; incompressible: $\nabla \cdot v = 0$
- Langvin: Stokes + "bruit" $\Rightarrow \langle \vec{f}_{\text{bruit}} \rangle = 0$ et $\langle \vec{f}_{\text{bruit}}(t) - \vec{f}_{\text{bruit}}(t') \rangle = 2D \delta(t-t')$
- Système actif: système dans lequel, il y a injection d'énergie qui met le système hors équilibre.

► Réponse d'une force ponctuelle:



- Petite déformation: $K \Delta u - \sigma \Delta u = f_0 \delta(\vec{r}) \rightarrow u(r) = \frac{f_0}{2\pi\sigma} \left(\frac{k_0 \cdot r}{\lambda} + \log(r/r_0) \right)$
- interaction si plusieurs forces + Pcf de Green

- Vocabulaire
- Energie interne: $dE = TdS - P_{ext}dV + \gamma_{ext}dn \rightarrow 3 \text{ couples: } (T, S); (P, V); (\gamma, n)$; rappel: $dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx$
 - Mathématiques: $\frac{\partial u(v)}{\partial x} = v' u'(v) = \frac{\partial u}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$; $(uv)' = \alpha u \alpha^{-1} u' = u'v + v'u$; $(1 + \frac{\alpha}{v})^v = 1 + \frac{\alpha}{v} \ll 1$
 - Capacité calorifique: $C_p = \frac{\delta Q_{rev}}{\delta T} = T \frac{\delta S}{\delta T} \Big|_{n,p} = \frac{\partial H}{\partial T} \Big|_{n,p}$; $C_v = \frac{\delta E}{\delta T} \Big|_{n,V}$; Green Ostroszadski: $\oint \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint \text{div} \vec{F} dV$
 - Constante thermo: $R_{\text{Tamb}} = \frac{1}{40} \text{ eV}$ avec $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/particule}$; $R = N_A R_0$; $1 \text{ cal} = 4,18 \text{ J}$; $G_x = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \text{ K}^{-4}$; $n = \text{nm}/M$

Transport de Chaleurs:

- Puissance (\Rightarrow) Intensité de chaleur: $I_q = \oint j_q \cdot d\vec{A} = j_q \cdot A$ (en W.)
- Rayonnement:
 - Loi de Planck: $j_l(\omega, T) = \frac{dE}{Vd\omega} = \frac{\pi \omega^3}{\pi^2 c^2} \left[\frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1} \right] \hat{N}_{\text{Planck}}, S=1$
 - Loi de Wien: par $\frac{dj_l}{d\lambda} = 0 \rightarrow \lambda_{\text{max}}^T (\text{nm}) = \frac{2898}{T(\text{K})}$
 - Loi de Stephan-Boltzmann: $dP_{\text{ray}} = \epsilon \sigma T^4 dA$; bilan thermique: $dE = dQ = P_{\text{ray}} dt \rightarrow \frac{dT}{dt} = \int_0^t \frac{1}{C} dt$
- Intensité: $(\alpha + p)^{\gamma} = \alpha^{\gamma} \left(1 + \frac{p}{\alpha}\right)^{\gamma}$
- Convection:
 - Loi de Newton: $j_c = h(T_{\text{env}} - T_{\text{fluid}}) \hat{N}$ (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$)
- Conduction/Diffusion:
 - Loi de Fourier: $j_c = -k \text{grad} T(\vec{r}, t)$ (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$) \rightarrow inhomogénéité de T soit $T_1 \rightarrow T_2$ pour $T_1 > T_2$
- Loi de conservation à Pression Constante: $\Delta H = \Delta E + \Delta(PV) = \Delta E + P_{\text{ext}}(V_f - V_i) = \Delta E - W = Q$
- Conservation de l'Enthalpie: $dH = H(t+dt) - H(t) = -I_q dt \Rightarrow \frac{dH}{dt} = -\text{div}(j_q) SV$
- Equation de diffusion de la chaleur: $\frac{\partial T}{\partial t} = D_q \Delta T + \frac{\text{Puissance}}{P_{\text{cp}}} \quad \text{avec: } \frac{dH}{dt} = \frac{dH}{dT} \cdot \frac{dT}{dt} = C_p \frac{dT}{dt} \Leftrightarrow H/T(t)$
- On a: $D_q = \frac{k}{P_{\text{cp}}}$ et $P_{\text{cp}} = \frac{C_p}{SV}$
- Cas particulier:
 - Régime (quasi) statique: $\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow I_q = \text{constante}$ (temps) soit $I_q = \frac{\Delta T}{R_q}$
 - Calculs de I_q , si problème polaire \rightarrow difficile à intégrer \int_R $R_{\text{tot}}^{\text{cond}} = \frac{L}{kA}$; $R_q^{\text{conv}} = \frac{1}{hA}$; $R_q^{\text{ray}} = \frac{1}{4\pi\sigma A T^4}$; $\frac{1}{R_{\text{tot}}} = \frac{1}{R_{\text{cond}}} + \frac{1}{R_{\text{conv}}} + \frac{1}{R_{\text{ray}}}$
 - Régime non statique: Changement de variable: $u = \frac{x}{\sqrt{4D_q t}}$; $\partial x = \frac{\partial u}{u} \cdot \partial t = \frac{\partial u}{u} \cdot \partial t$
 - On pose $g = \frac{dT}{du} \Rightarrow T(u) = A \text{erf}(u) + B$; continuité de $j_q(x)$ et T à l'interface \rightarrow $T_{\text{contact}} \neq T_{\text{fluid}}$ \rightarrow moyenne pondérée: $T_f = \frac{C_p T_1 + C_p T_2}{C_p + C_p}$ et $u_I = u_{II}$

Transport de Matières:

- Intensité de Matières: $I_n = \oint j_n \cdot d\vec{A} = j_n \cdot A$ (en mole.s⁻¹) soit: $I_n = \frac{\frac{d}{dt} \int_{\text{sortie}}^{\text{entrée}} n_r dA}{\text{sortie}}$ avec $n_r = \iiint \rho_n(\vec{r}, t) dV$
- Loi de Fick (stochiometrique): $j_n = -D_n \text{grad} \rho_n(\vec{r}, t)$ (en mole.s⁻¹.m⁻²) \rightarrow inhomogénéité de γ ; $u_1 \rightarrow u_2$ pour $u_1 > u_2$
- Loi de Arrhenius: $D_n(T) = D_0 e^{-\frac{E_a}{RT}}$ (en m².s⁻¹); $\text{Elastocapillarité} > \text{Elastostatique}$
on a: $\Delta D_n(H) \propto \sqrt{D_n(t)}$
- Equation de diffusion de particule: (T et P uniforme): $\frac{\partial \rho_n}{\partial t} = D_n \Delta \rho_n(\vec{r}, t) + P_{\text{diff}}(\vec{r}, t)$; $\frac{\partial \rho_n}{\partial x} = \sqrt{2D_n t}$; $\Delta x = \sqrt{2\ln 2} \sqrt{D_n t}$
- Plan d'épaisseur S_n : $\rho_n = \frac{1}{S_n 2\pi} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2S_n^2}}$; Interface 2 solide 100%: $\rho_n = \rho_{n0} (1 - \text{erf}(\frac{x-x_0}{\sqrt{2D_n t}}))$; $\text{erf} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x_0} e^{-u^2} du$
 \rightarrow ici $\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^x e^{-u^2} du = f \rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x}$
- Marche au hasard: $\frac{1-p}{2} \frac{p}{2} \frac{p}{2} \dots \frac{1-p}{2} \frac{p}{2} \frac{p}{2} \dots = p_n(x) \cdot L \cdot dA$; $P_n \frac{dN_n}{dt}$ $\Rightarrow D_n = \frac{1}{2} D_{\text{ent}} L^2$
- Loi de Transport: $j_n(\vec{r}, t) = -\alpha_i \text{grad} (u_i(\vec{r}, t)) = -\alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial \vec{r}} \cdot \text{grad} \rho_n(\vec{r}, t)$
P Relation d'Éuler: $E + PV - TS = G = \sum u_i n_i$; \rightarrow Relation de Gibbs-Duhem: $du_i = -s dT + V dP \Rightarrow \rho_n$

- Généralité:
- ▷ Loi de transport de matière: $j_n^i(\vec{r}, t) = -\alpha_i \vec{\text{grad}}(u_i(\vec{r}, t)) = -\alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial p_{ni}} \cdot \vec{\text{grad}} p_{ni}(\vec{r}, t)$
 - ▷ Relation d'Euler: $E + PV - TS = H - TS = G = \sum u_i n_i$; Densité de courant d: $\vec{j}_{el} = N_A q \cdot \vec{j}_n = \sigma_{el} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)$
 - ▷ Relation de Gibbs du tens: $du = -S dT + v dP \rightarrow$ corps pur
→ relation de Clapeyron: Transfert d'ordre 1: $\frac{dP}{dT} = \frac{S_{G-L}}{v_{G-L}} = \frac{L_{S-G}}{T(v_G-v_L)}$ pour $u_L = u_G$
 - ▷ Équation de VdW: $(P + \frac{a}{(v)^2})(v - b) = RT \rightarrow$ correction de $PV = nRT$ pour G non parfait
→ devait être état métabolique
 - ▷ Mélange ideal de GP: $u_i^{MIGP}(T, P, c_i) = u_i(T, P) + RT \ln(c_i) \rightarrow$ sens strict
 $\sum c_i = 1 \rightarrow$ toujours réduire l'énergie d'un système à $c_i(g)$; astuce: $n_{mole} = \text{cste } VGP \rightarrow$ faire la différence du système pour ne plus dépendre de P
- Transport sous champs:
- ▷ Potentiel chimique sens large: $u_i^{MIGP}(T, P, c_i) = u_i^{ss} + E_p(\vec{r})$ avec $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\text{grad}}(E_p(\vec{r}))$
 - ▷ à l'équilibre: $u_i^{MIGP} = \text{cste}$ donc $P \rightarrow P(\vec{r}) \text{ et } c_i \rightarrow c_i(\vec{r})$
 - ▷ Composition des courants, coordonnées cylindriques, PFD: $v_{abs} = v_r \cdot \hat{u}_r + v_\theta \cdot \hat{u}_\theta; \vec{a}_{abs} = a_r \cdot \hat{u}_r + a_\theta \cdot \hat{u}_\theta \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} = |\vec{\Omega}| \cdot \hat{u}_z; |\vec{\Omega}| = \omega \\ \vec{an} = r \cdot \hat{u}_r + z \cdot \hat{u}_z \end{array} \right.$
 - ▷ Relation d'Einstein: $D_m^i = \alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial p_{ni}} \Big|_{T,P} = \left(\frac{C_p^i}{m_i} \right) p_{ni} \frac{\partial u_i}{\partial p_{ni}} \Big|_{T,P} = \frac{\|\vec{U}_{lim}\|}{\|\vec{F}_{rott}\|} p_{ni} \frac{\partial u_i}{\partial p_{ni}} \Big|_{T,P}$
 - ▷ Équation de conservation de la matière: $\frac{\partial p_n}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}_n) = 0 \quad (\text{sans source})$
 - Réexpression de la loi de Newton: $j_n^{ext}(x) = n \cdot f_m \cdot p_n(x) \rightarrow$ (transport de matière) : appliquer principe de superposition
- Couplage transport chaleur/matières:
- ▷ Matrice cinétique: $\vec{j}_n = L_{nn} \vec{A}_n + L_{nq} \vec{A}_q \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{A}_q = \vec{\text{grad}}\left(\frac{1}{T}\right) = -\frac{1}{T^2} \vec{\text{grad}} T; \vec{A}_n = -\frac{1}{T} \vec{\text{grad}} u \\ \text{Relation d'Onsager: } L_{qn} = L_{pq} \rightarrow L_{qp} L_{nn} > L_{qn} L_{pq} \end{array} \right.$
 - À T uniforme: $\alpha = \frac{L_{nn}}{T} \text{ et } \sigma_{el} = \frac{L_{nn}}{T} N_A^2 q^2; \text{ Pouvoir thermoelectrique: } \mathcal{E} = \frac{L_{pn}}{L_{nn} N_A \cdot q T} \stackrel{via}{=} j_q$
 - À $\vec{j}_n = \vec{0}$: $K = \frac{L_{nn} L_{qq} - L_{qn} L_{pq}}{L_{nn} + 2}$
 - ▷ Équation de conservation de l'entropie: $dps = \frac{1}{T} dP_E - \frac{1}{T} dp_n \rightarrow \frac{\partial ps}{\partial t} = \frac{1}{T} \frac{\partial P_E}{\partial t} + \frac{\partial p_n}{\partial t}$
→ $\frac{\partial ps}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}_S) = j_E \vec{\text{grad}}\left(\frac{1}{T}\right) + j_n \vec{\text{grad}}\left(-\frac{1}{T}\right) = \dot{p}_{ts}/dt \geq 0$
 - ▷ Effet Peltier: $\vec{j}_q = (\underbrace{\mathcal{E}_{AB}}_{\mathcal{E}_B - \mathcal{E}_A} \cdot T \cdot \vec{j}_{el}) \xrightarrow{\substack{\text{Peltier} \\ \text{effet}}} \vec{P}_A \xrightarrow{\substack{\text{chaleur} \\ \text{matière}}} \vec{P}_B$
 - ▷ Effet Seebeck: $\vec{\text{grad}} V = \vec{E}_{See} = \mathcal{E}_S(T) \vec{\text{grad}} T \xrightarrow{\substack{T \\ T+\Delta T \\ x+x_0 \\ x+x_0}} \int_{P_F}^{P_N} dV = \int_{T_F}^{T_C} (\mathcal{E}_P(T) - \mathcal{E}_N(T)) dT \rightarrow$ étude par portion + approximation en droite
 - ▷ Fonctionnal: Mohens: $SC \xrightarrow{\substack{\text{SC} \\ \downarrow |W|}} SF; \eta = \frac{|W|}{|Q_{el}|} = \frac{1}{4};$ Refrigérant: $SC \xleftarrow{\substack{\text{Q}>0 \\ \downarrow m, W>0}} SF; \eta = \frac{|Q_{el}|}{|W|} = 3$

- Relation thermodynamique: $dE = T dS - P_{\text{ext}} dV - \gamma_{\text{ext}} dN$ et $G_p = \frac{\partial H}{\partial T} \Big|_{n,p}$; $G_v = \frac{\partial E}{\partial T} \Big|_{n,V}$

- Loy générale de conservation locales d'une grandeur extensibles:

- Puissance / Intensité: $I = \oint \vec{j} \cdot d\vec{A}$

- Pour la chaleur: Loi de Stephan Boltzmann: $\vec{j}_q^{\text{ray}} = \epsilon \sigma T^4 \vec{n}$

- Loi de Newton: $\vec{j}_q^{\text{conv}} = h (T_{\text{paroi}} - T_{\text{fluide}}) \vec{n}$

- Loi de Fourier: $\vec{j}_q^{\text{vif}} = -K \vec{\nabla} T$ \rightarrow inhomogénéité de $T^\circ \Leftrightarrow$ moyen

- \sim loi de Wien: $\lambda(\mu\text{m}) = \frac{2898}{T(\text{K})}$
- \sim Diffusion: $\frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} = \begin{cases} D_q \Delta T \\ D_q \Delta T + P_{\text{piss}} \end{cases} \rightarrow \frac{D_q}{P_{\text{piss}}} = \frac{k}{P_{\text{cp}}}$

▷ Déterminations de la température de contact: 1) Eq de Diff. 2) changt de val: $u = \frac{\partial T}{\partial \ln x}$ et $y = \frac{dT}{dx}$
 3) Continuité des T° aux lim 4) Continuité des courants de chaleur

- Pour la matière:

- Loi de Fick: $j_n^i(\vec{r}, t) = -D_n^i \vec{\nabla} p_n^i(\vec{r}, t)$

- $\rightarrow \Delta L_n(t) = \sqrt{D_n \cdot t}$
 \rightarrow inhomogénéité de $y \Leftrightarrow$ moyen

- Loi d'Arrhenius: $D_m(t) = D_0 \cdot \exp\left(-\frac{E_a}{k_B T}\right)$

- \rightarrow dépend fortement de la T°

- \rightarrow Diffusion: $\frac{\partial p_n^i(\vec{r}, t)}{\partial t} = \begin{cases} D_n^i \Delta p_n^i(\vec{r}, t) \\ D_n^i \Delta p_n^i(\vec{r}, t) + P \frac{d n_i}{dt} \end{cases}$

- \rightarrow la diffusion de la matière se fait à T et P uniforme (espace)

\rightarrow En série, on additionne les T° ; en parallèle, on additionne les courants.

\rightarrow En régime stationnaire, on est à "t" constant $\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$ et $I = \text{cste}$

- Loi de Transport: $j_n^i = -\alpha \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_i(\vec{r}, t)$

- Loi de Newton: $j_n^{\text{conv}}(\alpha e) = p_n \cdot v_{\text{lim}}$

- Relation de Gibbs-Duhem: $du = -S dT + \nu dP \rightarrow$ corps pur

- Loi des Gaz parfaits: $P \cdot V = n R T$

sous strict

\leftarrow • Mélange de gaz parfaits: $\varphi_i^{\text{Migf}}(T, P, C_i) = \varphi_i^{\text{pur}}(T, P) + R T \ln(C_i)$

• Transport de la matière sous champs:

• Loi d'Ohm: $\vec{J}_{el} = \sigma_A \cdot q \cdot \vec{J}_n$ et $\vec{J}_{el} = \sigma_{el} \vec{E}$

• Force et Energie potentiel: $\vec{F} = -\vec{E}_p$; $\vec{j}_q^{\pm} = E_{pot}^{\pm}(T(x \mp v \cdot t)) \cdot \vec{j}_n^{\pm}$

• Potentiel chimique aux sens large: $u_i(T, p, c_i) = u_i^{ss} + E_p^{\text{ext}}(\vec{r}) = \text{cste à l'équilibre}$

• Relation d'Einstein: $D_n^i = \frac{|v|}{|F_{rot}|} \cdot p_{ni} \left. \frac{\partial u_i}{\partial p_{ni}} \right|_{T, p}$ avec $\frac{|v|}{|F|} = \frac{I \delta c}{n m_i}$

• Couplage transport matière / chaleur:

• Matrice cinétique: $\vec{j}_n^{\pm} = L_{nn} \vec{A}_n + L_{nq} \vec{A}_q$ avec $A_n = -\frac{1}{T} \vec{\nabla} u$

Petite inhomogénéité de T et q $\vec{j}_q^{\pm} = L_{nq} \vec{A}_n + L_{qq} \vec{A}_q$ $\vec{A}_q = \vec{\nabla} \left(\frac{1}{T} \right)$

• relation de Onsager: $L_{nq} = L_{qn}$ et $L_{qq} L_{nn} \geq L_{qn} L_{nq}$

• Pouvoir thermoélectrique: ① $\vec{j}_q^{\pm} = \epsilon(T) \cdot T \cdot \vec{j}_{el}$ et ② $\vec{\text{grad}} V = \epsilon(T) \vec{\text{grad}}(T)$
 $j_{el}^{\pm} = j_q^{\pm} - j_n^{\pm}$ à la jonction

• Effet Peltier: Un courant électrique crée un gradient de T° : $I \rightarrow \Delta T$

• Effet Seebeck: Un gradient de T° crée un courant électrique: $\Delta T \rightarrow I$

Principe élémentaire:

• Développement limité: $p(x+L) = p(x) + L \frac{\partial p(x)}{\partial x}$

• Efficacité: $\eta = \frac{\text{sortie}}{\text{entrée}}$ • matériau: $\eta = \frac{I}{|Q_u|}$

• générateur: $\eta = \frac{|Q_c|}{|W|}$

- 1) Loi de Fourier: $\vec{j}_q(\vec{r}, t) = -K \vec{\text{grad}}(T(\vec{r}, t))$, $[K] = \frac{[j_q]}{[\text{grad} T]} = \frac{W \cdot L}{K L^2} = W \cdot L^{-2} k'$
- 2) Loi de Fick: $\vec{j}_n(\vec{r}, t) = D_n \vec{\text{grad}}(p_n(\vec{r}, t))$, $[D_n] = \frac{[j_n]}{[\text{grad} p_n]} = \frac{N \cdot T^{-1} L^{-2}}{N \cdot L^{-3} \cdot L^{-1}} = T^{-1} L^2$
- 3) Loi d'Ohm: $\vec{j}_{el}(\vec{r}, t) = \sigma_{el} \vec{E}(\vec{r}, t)$, $[\sigma_{el}] = \frac{[j_{el}]}{[E]} = \frac{A \cdot L^{-2}}{V \cdot L^{-2}} = A V^{-1} \cdot L^{-2} = S L^{-4} L$

- 4) Energie interne: $dE = T dS - P_{ext} dV - q_{ext} dn_i \Leftrightarrow q_{ext} = - \left. \frac{\partial E}{\partial n_i} \right|_{S, V}$
- 5) Relation de Gibbs: $dU = -S_{mole} dT + V_{mole} dP \Leftrightarrow V_{mole} = \left. \frac{\partial U}{\partial P} \right|_T = \frac{RT}{P} \sim PV = nRT$
- 6) Loi fondamentale "transport de particule": $\vec{j}_i(\vec{r}, t) = -\alpha_i \vec{\text{grad}}(u_i(\vec{r}, t))$, $[\alpha_i] = \frac{[j_i]}{[\text{grad } u_i]} = \frac{N \cdot T^{-1} L^{-2}}{ML^2 T^{-2} \cdot N}$
- 7) Relation entre D_m et α_i : $D_m = \alpha_i \left. \frac{\partial u_i}{\partial p_i} \right|_{T, P} = \frac{C_f r}{m_i} p_m \left. \frac{\partial u_i}{\partial p_i} \right|_{T, P} = \frac{\| \text{Vtcm} \|}{\| \text{Frot } \|^2} \frac{p_m \alpha_i}{\| \text{Vtcm} \|} = N^2 T^{-3} L^{-3} M$
 $\sim [\alpha_i] = \frac{[v]}{[F]} \cdot [p_n] = \frac{LT^{-1}}{M \cdot L T^{-2}} \cdot N \cdot L^{-3} = NT^{-3} L^{-3} M^{-2}$ relation d'Einstein

- 8) Relation entre D_m et σ_{el} : $j_{el} = N_A \cdot q \cdot j_n = p_N q \vec{v}$; $q_{moli} = \frac{\| \text{Vtcm} \|}{\| \vec{E} \|}$
Potentiel chimique "sens large": $u_i^{HGP}(T, P, c_i) = u_i^{ss}(T, P, c_i) + E_p(\vec{r})$ $\xrightarrow{\text{cste à l'équilibre}}$ $u_i^{ss} = u_i(T, P) + RT \ln C_i$
 $\xrightarrow{\text{molaire?}}$ $E_p(\vec{r}) = N_A q \sigma_{el} V(\vec{r})$
- 9) Relation d'Einstein entre D_m et σ_{el} : $\sigma_{el} \vec{E} = N_A \cdot q \cdot D_m \vec{\text{grad}} p_n(\vec{r}, t) \Leftrightarrow \sigma_{el} = N_A \cdot q \frac{\| \vec{\text{grad}} p_n(\vec{r}, t) \|}{\| \vec{E} \|} \cdot D_m$

- 10) Pouvoir thermoélectrique ϵ d'un corps: $\vec{j}_q = (\epsilon_{AB}) \cdot T \cdot \vec{j}_{el}$ et $\vec{\text{grad}} V = \epsilon(T) \cdot \vec{\text{grad}}(T)$
 $[\epsilon] = \frac{[j_q]}{[T][j_{el}]} = V \cdot K^{-1}$
 $\rightarrow \epsilon = \frac{L_{qn}}{L_{nn} N_A \cdot q \cdot T} \sim \text{matrice cinétique (à T uniforme)}$

→ À savoir aussi: nette = emis - reçus

$$\{S, E, n\} \rightarrow \bullet \text{ Loi de conservation grandeurs ext: } \left. \frac{\partial \rho_x}{\partial t} \right|_{\vec{r}} + \text{div}(\vec{j}_x(\vec{r}, t)) = \begin{cases} 0 \\ \rho_{\text{ext}} \end{cases}$$

quasi-stationnaire $\Rightarrow \{I_q = \text{cste} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0\}$

• Loi de Newton: $j_q^{\text{conv}} = h (T_{\text{paroi}} - T_{\text{loin}}) \hat{n}$; • $j_n^{\text{champ}} = \underbrace{v_{\text{lim}}}_{\text{champs}} \cdot p_n(\infty)$

• Stephan Boltzmann: $j_q^{\text{ray}} = \epsilon \sigma T^4 \hat{n}$

• Intensité: $I_{q,n} = \oint j_{q,n} \cdot d\vec{A} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Saut } \frac{d\vec{A}}{d\vec{r}} = p_n(\infty) \cdot L dA P_d / V \\ \text{pour matière} \end{array} \right\}$
 $\int \vec{j}_q(\infty) = \epsilon p(T(\infty)) \cdot j_n^{\text{ext}}(\infty)$

• Matrice cinétique: $\vec{j}_n = L_{nn} \vec{A}_n + L_{nq} \vec{A}_q$

$\vec{j}_q = L_{qn} \vec{A}_n + L_{qq} \vec{A}_q$

$\left\{ \begin{array}{l} \vec{A}_q = \vec{\text{grad}}\left(\frac{1}{T}\right) = -\frac{1}{T^2} \vec{\text{grad}} T \\ \vec{A}_n = -\frac{1}{T} \vec{\text{grad}} u \end{array} \right.$

On sait: $L_{qn} = L_{qn} \Leftrightarrow L_{qn} \ln n \geq L_{qn} L_{qq}$

• Relation Thermo: $C_p = \frac{\partial Q}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial T}; C_V = \frac{\partial E}{\partial T}; R_{\text{Thermal}} = \frac{1}{k_B} eV; R = N_A R_B; \frac{\partial}{\partial x}$

• Math: DL: $f(x+a) = f(x) + a \frac{\partial f}{\partial x}$

Analyse dimensionnelle: but: simplifie le problème → Bilan des forces avec hypothèse stationnaire ; aussi: bien analyser l'évolution ($L^{1/2}$) sur schéma / do

► Formule utiles: Force visqueuse: $dF = \eta \frac{dV_x}{dy} dS$; vitesse moyenne: $\bar{u} = \frac{1}{S} \int v \cdot dS$; Volume sphère: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$; Digue: $S = \pi L$

(Sphère) Effet visqueux: $\vec{f} = \gamma \vec{v} = b \pi \eta R \vec{v}$; Effet inertiel (Turbulent): $f = \frac{1}{2} \rho v^2 C_a$; Reynolds: $Re = \frac{Turb}{Visq} > 10^3$ turbulent

• regime transitionnel $\frac{2}{Re} \approx 1 \Rightarrow$ longueur d'arrêt (\equiv couche limite): $d = v \cdot \frac{\eta}{\gamma}$ différentiel en $\frac{x}{L}$ $\frac{Le \rightarrow 1}{Visq} \rightarrow$ visqueux

• Force pression: $F_p = (P + dp) dS - P dS$; Digue: $dS = 2\pi r dr$; forme différentielle: $(f(x+\delta x) - f(x)) dx = f'(x) dx = d_f$

► Nouvelles: $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$ (Lagrange)

► Théorème II: Adaptation: $\frac{f}{\pi R} = g \left(\frac{R}{m} \right)$ unité liée à f } sans dimension } si forme solution inconnue mais ED
avec la $\frac{f}{\pi R} = [R]$ unité indépendante de f } recherche via: $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial E} \cdot \frac{\partial E}{\partial x}$

Pour système: $[f] = [A]^{\alpha} \cdot [B]^{\beta} \cdot [C]^{\gamma}$ avec système d'unité: $MLTQ$, 3 inconnues $\alpha, \beta, \gamma = 3$ équations
à savoir: $[R]$ mesurable ; $[E] = ML^2 T^{-2}$ → recherche système 2×2 non nuls puis adapté à la fin et pris dans le public.

► Équations utiles:

- Conservation quantité extensive ϕ : $\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = W_{source}$; $J = \phi v \phi$; système mécanique: $W = \frac{\partial}{\partial x}(F)$; $\phi = f$ stationnaire $\partial/\partial t = 0$ (dimensionnement)
- Laplacien polaire: $\Delta \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \stackrel{!}{=} 0$ donc $\vec{A} \rightarrow \phi(r) = -\frac{A}{r} + B$
- Intégration polaire: $\int dS = \int r d\theta dr$; mathématiquement, si $\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$ alors le rapport est égal à une constante

Méthode: $H = \int_{2\pi} \rho(x(\theta)) |J| d\theta$; $|J| = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \theta} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \end{bmatrix}$ → exemple oscillante poutre: $y(x, \theta) = f(x) \cdot g(\theta)$

► Loi de Hooke: $\sigma = E \cdot \epsilon$; $E = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\nu}{\nu \phi} = \frac{G(\alpha+\delta\alpha)-G(\alpha)}{\delta\alpha}$; ondes: PFD: $F(x) - F(\alpha+\delta\alpha) = -\frac{\partial F}{\partial x} \delta\alpha$; $dm = \rho S dx$

$$\frac{\Delta d}{d} = -2 \frac{\Delta L}{L} \text{ (en suivant Fey): } \frac{\Delta x}{x} \Big|_{Fey} = -2 \frac{\Delta y}{y} \Big|_{Fey} \quad \left\{ \text{à faire suivant } F(x, y, z) \right\}$$

► Compressibilité: $\chi = -\frac{\alpha^2}{F} \frac{\Delta V}{V} = -\frac{\alpha^2}{F} \left(\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z} \right)$; à savoir: $\frac{\Delta x}{x} = \sum \frac{\Delta x_i}{x_i} \Big|_{Fey}$

► Flexion des poutres: rayon de courbure: $\mathcal{C} \approx \frac{d^2 y}{dx^2}$; $\delta\alpha = \frac{1}{4} \epsilon d\alpha$ soit: $\epsilon = \frac{2r}{\frac{1}{4} d\alpha}$ pour

• Moment: $\vec{M}_F = \vec{F} \wedge d\vec{r} \rightarrow M = \int -r dF = \mathcal{C} E \left[\int r^2 dS \right]$ cylindre: $dS = 2\sqrt{a^2 - r^2} dr$ $I = R^2 S$ (moment d'inertie)

• Equilibre fibre neutre: $\frac{dT}{dx} = K(\alpha) \quad \text{équation}$; $T(\alpha) = -\frac{\partial M}{\partial x}$
⇒ Equation repressant déformation \Leftrightarrow bilan des moments ($[M] = [\text{Energie}]$)

• Conditions aux limites: Extrémité fixe: $y(0) = 0$; $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = \tan \alpha$
Extrémité libre: $y(L) = y_0$; $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=L} = 0$ } les 2 fixe: $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=\frac{L}{2}} = 0$
 $\lambda \approx L$

Onde dispersive: $V_g + V_\phi$

► Torsion: $\tan \Theta = \frac{R \sin \Phi(\alpha)}{\alpha} \approx \frac{R \Phi(\alpha)}{\alpha} = \frac{R \Phi}{L}$ soit. Déformation / cisaillement: $\gamma(r) = r \frac{d\Phi}{d\alpha}$

$$\bullet \text{Contraintes: } \frac{dF(r)}{dr} = \tau(r) = G \gamma(r) \rightarrow \text{appliable pour } \mathcal{C} = \int r dF$$

Note: Séparation de variables: $y(x, t) = \phi(x) \psi(t) \rightarrow \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 \psi(t)}{\partial t^2} = (\text{constante})$ (relation Einstein) \sum des éléments diagonaux

Elasticité Tensoriel: (champ) $E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ \rightarrow Contraintes: $\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} = \lambda \delta_{ij} E_{ij} + 2\mu E_{ij}$; normal: $T_{ij} = \sigma_{ij} \cdot \eta_{ij}$

► Relations: $E_{ij} = \frac{1}{2(1-\nu)} \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2(1+2\nu)} \delta_{ij} \sigma_{ii}$; Coefficient de Lamé: λ (sans interprétation)
 ν : module de cisaillement

► Vocabulaire: 1) compression isotrope \Leftrightarrow change de volume ($\vec{0}$ diagonal (-P)) ; 2) cisaillement pur \Leftrightarrow pas de change de volume ($\vec{0}$ symétrique non diagonal $\rightarrow \operatorname{tr}(\vec{0})=0$)

► Coefficient Young et Poisson: Pour $\{E_{22} = T/E\}$ $\Rightarrow E = \nu \frac{(3\lambda+2\nu)}{\lambda+\nu}$; $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\nu)}$

► Équation du mouvement: $\rho \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} = \rho \vec{f}_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ Navier $\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x^2} = \rho \vec{f} + (\lambda+\nu) \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \nu \Delta \vec{u}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{schéma: longitudinal} \\ \text{ordres: transverse} \\ i=1 \end{array} \right.$
Déplacement: $\vec{u} = \vec{x}' - \vec{x}$

Calculs variationnelles:

► Fonctionnelle: $J = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx$ condition stationnaire: $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \Rightarrow$ Equations d'Euler Lagrange
 → extremum à trouver

• Intégrale première: pour $\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \rightarrow C_1 = F - y' \frac{\partial F}{\partial y}$ à résoudre; Si contrainte: $F_c = F_{x=0} + \lambda \underbrace{y(x)}_{=0 \text{ ou } x=0}$ multiplicateur

• Application: Longeur minimal entre 2 points A, B du plan $(x, y) \rightarrow$ on cherche la fonction $y(x)$

► Longeur d'un arc de courbe, plan cartésien: $L_{AB} = \int_A^B \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = J \rightarrow$ on cherche le minima en résolvant l'intégrale
 on trouve: $y(x) = ax + b$

Hydrostatique:

► Tension de surface: {cohésion} • Hydrostatique: $\gamma = \frac{\partial F}{\partial A}$

• Mécanique: $\delta W = F dx = 2 \gamma \cdot l dx$

► Loi de Laplace: $P_{int} - P_{ext} = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$; ménisque: $\frac{1}{R} \sim \frac{d^2 y}{dx^2}$ → si non simplifié astuce: $\gamma' = \frac{(g')^2}{2}$
 $(g')' = \alpha g^{x-1} \cdot g' \cdot \frac{g'^3}{2} = 2(g')^2$

► Moillage:, Loi de Young: $\gamma_{SG} = \gamma_{SL} + \gamma_{GL} \cdot \cos \theta$
 • Longeur capillaire: $l_c = \left(\frac{\gamma}{\rho g} \right)^{1/2}$; • Loi de Junin: $H = \frac{2 l_c^2}{r} \cdot \cos \theta$

Hydrodynamique:

► Description Eulerienne: écoulement = champ $\vec{v}(\vec{r}, t)$; ligne de courant: $\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$; trajectoire: $\frac{dr}{dt} = \vec{v}(\vec{r}, t)$

► Équation du mouvement: • masse: $\cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{v}} \cdot \cancel{dS} = - \cancel{\int \frac{\partial P}{\partial r} dr} ; \text{Débit: } Q = \int \vec{v} dS ; \Delta V = [\phi(r) - \phi(r+dr)] dt$
 • Euler: $y=0 : \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \cancel{\rho} + \cancel{\rho \vec{g}} ; \text{quantité de mat: } \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \delta_{ij} + \rho V_i V_j)$

Contrainte: • $\sigma_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}}_{\text{déformation}} \right) + \frac{1}{2} \left(\underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}}_{\text{rotation}} \right)$; Continuité: • vitesse aux limites
 (constante) $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \eta \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$

• Navier Stokes: $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = - \vec{\nabla} P + \eta \Delta \vec{v}$ pour fluid négligé

► Écoulement potentiel: • $\vec{w} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ (irrotational); • Laplace, $\vec{v} = \vec{\nabla} \phi$; Circulation: (Stokes): $M = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l}$
 • relâche de Bernoulli: $\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + V(r) = E(r)$ constante

$$F = \oint_L \vec{w} \cdot d\vec{E}$$

► Lubrification: $\{a \ll L\}$: équation de Lubrification $\frac{\partial v_{II}}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla}_{II} P + \frac{M}{\rho} \frac{\partial^2 v_{II}}{\partial z^2} ; (v_{II} \equiv v_r)$
 pour de: $\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v$ $v_3 \sim \frac{a}{L} v_r \ll v_r$ $\cancel{\text{en pas négligé si grande v}}$

► Nombre de Reynolds → pour nombre sans dimension: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = - \vec{\nabla} P + \frac{M}{\rho U L} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2}$
 $z = h \tilde{z} \Rightarrow \left\{ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \right\}$

► Onde de surface: 1) linéaire: linéarisation $\equiv A(x, t) = 0$ dans les fonctions composées; de cette façon: $A(x, t) = A_0 e^{i(kx - \omega t)}$
 • Trajectoire: $x(t) = \bar{x} + \Delta x$ $y(t) = \bar{y} + \Delta y$ } Équation d'ellipsoïde pour Laplace

$$\begin{cases} A(x, t) \\ \uparrow \\ \text{---} \end{cases}$$

2) Non Linéaire: Équation de KdV: $\frac{\partial A}{\partial t} + C_0 \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{3}{2} C_0 \frac{A}{h} \frac{\partial A}{\partial z} + C_0 \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 A}{\partial z^3} = 0$

termes non linéaires termes dispersifs → étendant la portée de l'onde

► Dispersion: $A(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} D(k) \cdot e^{i(kx - \omega(k)t)} dk$ deux équations du problème

► Instabilité: Traitement perturbatif: $f = f_0^{(2)} + f_1(x, y, z, t) \{ \rightarrow \text{adimensionnement} \} \rightarrow \text{linéarisation}$: $\alpha f_0(x) \cdot \beta f_1(x, y, z, t) = 0$

D) Relativité restreinte:

- Postulat: la vitesse de la lumière est indépendante du référentiel.

• Généralité: Invariance de l'équation d'onde $\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} \right\}$

- Quadrivecours: Position: $X = \begin{pmatrix} x_0 & \Rightarrow ct \\ x_1 & \Rightarrow x \\ x_2 & \Rightarrow y \\ x_3 & \Rightarrow z \end{pmatrix}$; Energie Impulsion: $P = \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} \frac{E/c}{P}$

(système isolé). Dans un même référentiel: $P(t_{initial}) = P(t_{final})$. Simplification: $\hbar = 1 \Leftrightarrow c = 1$

• Transformation de Lorentz: (suivant x et ct seul)

- $x'_0 = \gamma (x_0 - \beta x_1)$ avec $\beta = \tanh(\theta) = \sqrt{1-\gamma^2}$
- $x'_1 = \gamma (x_1 - \beta x_0)$ avec $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \cosh(\theta)$

• Invariant relativiste:

- Distance $\Delta X^2 = X_0'^2 - X_1'^2 - X_2'^2 - X_3'^2 = c^2 \Delta t^2$ - (..)
- Masse $P^2 = m^2 c^2 = (E^2/c^2) - \vec{P}^2 = \left(\sum_{i=1}^3 P(i) \right)^2$ particule
- Quelque soit le référentiel: $P_{initial}^2 = P_{final}^2$

• Energie partielle massive: $E = \gamma m c^2$ avec $E = T + mc^2$, temps de vie: $\tau = \gamma \tau'$ Intervalle de temps propre $\Delta \tau$ indéfini par ref f.

• Référentiel de centre de masse: $R \rightarrow \vec{P} = \vec{0}$ repos, seut \Leftrightarrow centre de masse

• Chaleurs de réaction: $Q = \sum \text{Mouvement} - \sum \text{Mouvement}_i = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2$ → en MC, les vitesses s'additionnent

D) Section efficace (σ) → surface avec laquelle une particule a une "chance" d'interagir.

Cible épaisse. (épaisseur Δ)

Probabilité d'interaction: Pour déviation directe: $P = \sum_{n=0}^N P(n)$ avec $P(N) = \left\{ \prod_{i=1}^{N-1} P(\text{pas d'interaction}_i) \right\} \cdot P(\text{interaction, centre de dimension spatial})$

$$P(1) = \delta S/S = p \delta \sigma$$

$$P(2) = (1-p)(1)P(1)$$

$$\dots$$

$$\approx \text{Approximation milieux continus: } dP = p \delta \sigma dz ; dN_{int} = N(z) dP \rightarrow P = 1 - \frac{N(\Delta)}{N_0}$$

Pas d'interaction

• Section efficace différentiel: $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) \rightarrow d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta ; \frac{d\sigma}{d\Omega} = 2\pi b$

$$\rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b(\theta)}{\sin\theta} \frac{db}{d\theta} \rightarrow \text{section efficace totale: } \sigma_{tot} = \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

Modèles:

- Rutherford (EM): $b \tan\theta = \frac{a}{2T_0}$ avec $a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q_i Q_c$

- Sphère dure (collision): $\frac{b}{R} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\alpha$

Physique nucléaire et nucléaire.

D) Energie de liaisons:

- Energie de liaison nucléaire: $B_n(A, z) = \left(z \cdot m_p + (A-z) m_n - \overbrace{M(A, z)}^{\text{nouveau}} \right) c^2$
- Energie de liaison atomique: $B_a(A, z) = \left(M(A, z) + z \cdot m_e - \overbrace{M_a(A, z)}^{\text{atomes}} \right) c^2$
- Excès de masse d'un atome: $\Delta(A, z) = M_a(A, z) - A \cdot u$

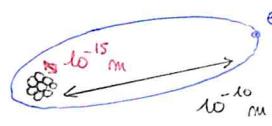
$$u = 1/\bar{N}_A, \quad 1a = \frac{1}{\bar{N}_A} \text{ Hartree}$$

. Relations: $B(A, z) = B_a(A, z) + B_n(A, z)$

- $B_n(A, z) > B_a(A, z)$ can

- $M_a(A, z) > M(A, z)$

- $A = z + N$; loi de conservation: Charge, nucléon (nature, antinature)



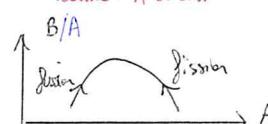
D) Formule de Bethe-Weizsäcker (semi empirique):

$$B(A, z) = \underbrace{a_V A}_{B_V} - \underbrace{a_S A^{2/3}}_{B_S} - \underbrace{a_C \frac{z(z-1)}{A^{1/3}}}_{B_C} + \underbrace{\frac{a_A (N-z)}{A}}_{B_A} + \delta + c.c$$

- $B_V \Rightarrow$ terme volumique ~ interaction nucléon-nucléon $\rho_0 = A/100$ épaisseur de paix
- $B_S \Rightarrow$ terme de surface ~ moins lié en surface; $a_S = \frac{4\pi G_N}{2}, N_S = \frac{4\pi R^2}{2} e; R = r_0 A^{1/3}$ } goutte liquide
- $B_C \Rightarrow$ terme coulombien (répulsion) ~ $B_C = - \int dU$ (Gauss) } répulsion électrostatique $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R}$
- $B_A \Rightarrow$ terme d'asymétrie ~ $T_n = \frac{3}{5} \cdot n \cdot E_F(n) \rightarrow T_n + T_p = T_{\text{tot}} \cdot A + B_A; n, p \Rightarrow$ Fermions \rightarrow niveau d'Energ
- $B_p \Rightarrow$ terme d'appariement ~ spin (0, +δ, -δ) → isotone = A constant

Vallée de Stabilité:

$$\frac{\partial M(A, z)}{\partial z} = 0$$



Terme de gravitation: $B_g = \underbrace{a_g A(A-1)}_{A^{1/3}}$ avec $a_g = G \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{m_n}{r_0}^2$ (analogie: $a_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{r_0}$)

note: $Q = 1 \text{ Bautz-Bapst}$

D) Déintigration et Datation:

Probabilité de déintigration: $\lambda = \frac{1}{\tau} = - \frac{1}{N(t)} \frac{dN(t)}{dt} \rightarrow N(t) = N(0) e^{-t/\tau}$ → deuxième: $N(t) = \frac{N_0}{2} \rightarrow T = \tau$

Achivité: $a = \lambda N(t)$; Source d'élément (sans interaction): $\frac{dN}{dt} = - \lambda N + S$

Nombre moyen de déintigration: $\langle n \rangle = \sum n P(n) \rightarrow$ astuce dupt de Taylor

Type de déintigration: Conservation de A: $\beta^-: n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$

$\beta^+: p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$

CE:

Emission: $p: {}_Z^A X \rightarrow {}_{Z-2}^{A-4} Y + n \rightsquigarrow Q = \Delta(X) - \Delta(Y) - \Delta(n)$

n:

"s p d f"

Modèle en couches; On regarde N et z séparément.

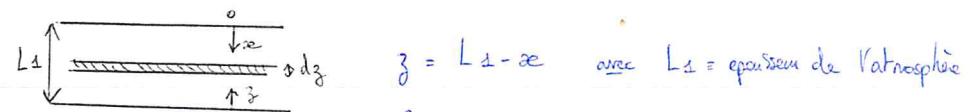
Nombre magique: Présence de "sous" autre bande → 2, 8, 20, 28, 50 ...; $J^\pi = (-1)^L$ $L \rightarrow 0, 1, 2, 3$

Potentiel nucléaire: Harmonique ($\rightarrow \omega$): $V(r) = -\frac{V(0)}{1 - 1/r^2}$ → Lignes: $E_n, \ell = \left(2(n+\frac{1}{2}) + \frac{\ell+1}{2} \right) \hbar \omega$ avec $S = \frac{1}{2}$

Radiation et Thermique :

Energie renouvelable:

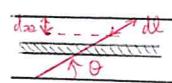
Absorption et masse d'Air:



$$z = L_0 - dz \quad \text{avec } L_0 = \text{épaisseur de l'atmosphère}$$

$$\bullet \text{ Absorption: } \frac{dI}{dz} = -I(z) \cdot \sigma \cdot n(z) \rightarrow I(z) = I_0 e^{-\int_{L_0}^z \sigma n(z) dz} = I_0 e^{-k \cdot m_1} \Rightarrow m_1 = m_0 \int_{L_0}^{z_1} n(z) dz$$

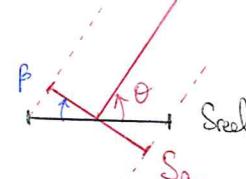
Masse d'air:



$$I(\theta) = I_0 \cdot e^{-k \cdot m_0} \quad \text{avec } m_0 = \frac{m_0}{\sin \theta} \int_0^\infty n(z) dz = \frac{m_1}{\sin \theta} = m_1 \cdot AM$$

$$= I_0 \left(\frac{I_1}{I_0} \right)^{AM} = \frac{1}{\sin \theta}$$

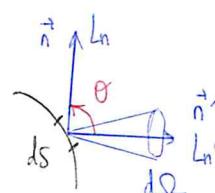
Surface apparente:



$$\text{soit } P = I_\theta \cdot S_a = I_\theta \cdot S \cdot \frac{\cos \beta}{\sin \theta}$$

Energie solaire thermique:

Emissivité d'un corps Lambertien:



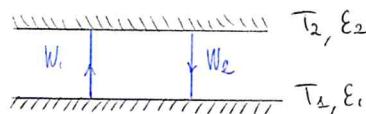
$$\bullet \text{ Propriété: } L_n' = L_n = L$$

$$\bullet \text{ Luminance: } L_n' = \frac{d^2 \phi_n'}{dS \cos \theta}$$

$$\bullet \text{ Emissivité: } M = \frac{d\phi}{dS} \quad \left\{ \begin{array}{l} d\phi = \int_{\frac{1}{2} \text{ espace}} d^2 \phi_n' = L dS \\ \int_{\frac{1}{2} \text{ espace}} \cos \theta d\Omega \end{array} \right\}$$

$$\rightsquigarrow \text{Pour une sphère: } dS = (r \sin \theta d\phi) \cdot (r d\theta) \rightarrow d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi \rightarrow \text{on intègre de } 0 \text{ à } \frac{\pi}{2} \rightarrow [M = \pi L]$$

Echange radiatif entre 2 surfaces grises: ("corps noir" x "émetteur" \Rightarrow opaque + réfléchissant)



$$\bullet \text{ Propriété: } \tau_i = 0 ; \text{ loi de Kirchhoff: } \alpha_i = E_i$$

$$\bullet \text{ Loi de S.B: } E_i^\circ = \sigma T_i^4 \rightarrow \phi_i = E_i \cdot \sigma \cdot T_i^4$$

$$\text{Par conservation de l'Energie } (1 = \rho_i + \tau_i + \alpha_i): \quad \text{système } 2 \times 2: \quad W_i = E_i E_i^\circ + \rho_j W_j, \quad \text{Net: } \phi_{\text{ref}} = W_1 - W_2$$

Cellules solaires:

Principes:



$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho(\alpha)}{\epsilon_r \cdot \epsilon_0} \quad \uparrow E \quad \downarrow E_g \quad \begin{array}{l} \text{Conduction} \\ (\epsilon_r = 1 - \epsilon_g) \\ \text{Valence} \end{array}$$

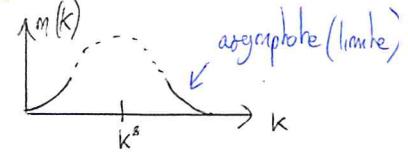
Δ si $E > E_g \rightarrow$ absorption de E_g se

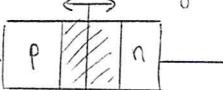
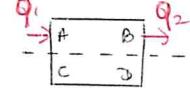
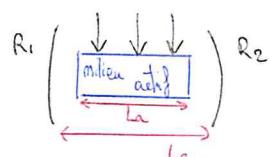
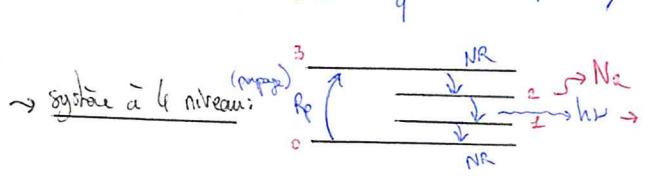
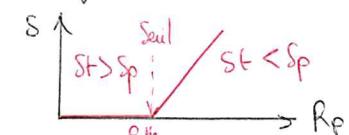
Hypothèse corps noirs:

$$\bullet \text{ Efficacité: } \eta = P_o / P_{ray} ; \quad \bullet \text{ Analyse dimensionnel: } \begin{cases} V_g = E_g / q \\ V_s = hT / q \end{cases} \quad \left\{ k = V_g / V_s \rightarrow \text{efficacité } \eta(k) \right.$$

$$\bullet \text{ Nombre de photons / temps / surface: } Q_s = \int_{E_g}^{\infty} \frac{M_D}{h\nu} d\nu \quad \begin{array}{c} \uparrow E \\ \text{graphique} \end{array} \quad \bullet \text{ Puissance délivrée: } P_e = h \cdot \nu g \cdot A \cdot Q_s \quad \bullet \text{ Puissance reçue / surface: } P_s = \int_0^{\infty} Q_s \cdot h \cdot \nu d\nu = \alpha T_s^4$$

$$\bullet \text{ Energie moyenne: } \bar{E}_{ph} = P_s / Q(O, T_s) \rightarrow \text{efficacité: } \eta(k) = P_e / P_s \cdot A \quad \rightarrow \eta_{theo} > \eta_{real} !$$



- D) Semi-conducteur et dopage:**
- Loi d'action de masse:** $n = N_c \cdot e^{-\frac{E_c - E_F}{kT}}$; $p = N_v \cdot e^{\frac{E_v - E_F}{kT}}$; $n \cdot p = n_i^2$ $\rightarrow \begin{cases} E_c \rightarrow E_c - eV(z) \\ E_v \rightarrow E_v - eV(z) \end{cases}$
 - Fonctionnement:** **intrinsèque**: condition de neutralité: $n = p = n_i \rightarrow n_i = \sqrt{n \cdot p} = \sqrt{N_c N_v} \cdot e^{-\frac{E_g}{kT}}$
 - Conductivité:** $\sigma_0 = e n_i (\mu_n + \mu_p)$
 - extrinsèque (avec impureté):** **Dopage donneur:** $\rho_d = \frac{1}{e(n \mu_n + p \mu_p)} \ll \rho_0$
 - Nd, Na?** $p + Nd = n + Na \rightarrow$ via DL on peut savoir densité porteur majeur et mineur (n ou p) \rightarrow via n .
→ on peut en déduire E_F
- D) Détection opto-électrique:**
- Junction PN** $\{V_{bi} = V_h - V_p\}$ 
 - zce \Rightarrow zone de dépletion \rightarrow loi de Poisson (Théorie de Gauss) $\rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho(x)}{\epsilon_0 \epsilon_r}$; $E_x = -\frac{dV}{dx}$**
 - W = $|zep| + |zen| = W_p + W_n$; neutralité: $W_p N_p = W_n N_d \rightarrow$ via $E_{min} \rightarrow 0$!**
 - À l'extérieur de la ZCE:** $\vec{J}_n(zen) + \vec{J}_p(zen) = \vec{J}_n(zep) + \vec{J}_p(zep)$
 - On a $J_n = J_{npp} + J_{n\bar{p}}$ mais en polarisation $J_n \approx J_{npp}$ \rightarrow dans toute les autres théoriques!**
 - Courant de diode:** $I(V) = I_{sat}(e^{\frac{eV}{kT}} - 1) - I_{ph}$; **Courant de Bruit:** $i_B^2 = 2 \cdot e \cdot I_{sat} \left(1 + e^{\frac{eV}{kT}} \right) \Delta V$
 - Réponse spectrale (sensibilité):** $R(\lambda) = \frac{I_{ph}}{P_{inc}}$; **Eff. contre quantiques**: $\eta = \frac{J_{ph}/e}{I_{sat}(1-R)}$ \rightarrow Porteur signal Incident
 - Puissance équivalente de Bruit:** $NEP = i_s/R$ telle que: $\frac{i_s}{i_B} = 1$; **Détection spécifique:** $D^* = \sqrt{D \cdot A}$; $\frac{dI}{dV}|_{V=0} = \frac{1}{R}$
 - Densité de courant de saturation:** $I_{sat} = e \left(\frac{D_n \cdot n_p^0}{L_n} + \frac{D_p \cdot n_i^0}{L_p} \right)$ avec $L_n = \sqrt{D_n \tau_n}$; $n_p^0 = n_i/N_d$ et $P_n^0 = n_i/Nd$
- D) Matrice ABCD:** $\begin{pmatrix} r_f \\ o_f \end{pmatrix} = M_{ABCD} \begin{pmatrix} r_i \\ o_i \end{pmatrix}$; pour 1 mètre milieu: $\det(M_{ABCD}) = 1 \Rightarrow \cos \theta = \frac{A+D}{2}$
- calculs matriciel \rightarrow $M_{ABCD} = M_n \dots M_1 \rightarrow (1)$ correspond à la première zone
- Faisceau Gaussien:**  $q_2 = \frac{A q_1 + B}{C q_1 + D}$; **lentille mince:** $\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - j \left(\frac{\lambda}{\pi W^2} \right)$ (onde sphérique!) (R $\rightarrow \infty$) pour onde plane!
 - Beam waist (W) sur lentille mince:** $M_{lentille} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$; $M_{espace} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; **conjugaison:** $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{f}$
 - Flux rayon de courbure $\Rightarrow M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{pmatrix}$; miroir plan $= R \rightarrow \infty$**
 - Beam waist sur courbure à 2 miroir courbés:** $M_{ABCD} = M_R \cdot M_A$; $M_R = M_a^2$; **stabilité:** $q_2 = q_1 \Rightarrow C q_1^2 + (D-A) q_1 - B = 0$
 - Fréquence de résonance:** $E(x, y, z) = e^{-j\omega z} \cdot u(x, y, z)$; $u(x, y, z) = \frac{1}{q} e^{-j \cdot k \cdot \frac{(x^2 + y^2)}{2q}}$; $\sigma = e^{j\phi} \rightarrow \Delta \phi = -2kL + \phi$
- D) Mode LASER:** 

 $\frac{dN_2}{dt} = R_p - R_{ESP} - R_{NR} - R_{EST}$; $\frac{dS}{dt} = -\frac{S}{\tau_p} + V_a (\beta R_{ESP} + R_{EST})$ $\rightarrow R_{ESP} = N_2/\tau_{ESP}$
 $R_{NR} = N_2/\tau_{NR}$ $\frac{\partial \tau_{NR}}{\partial \tau_{ESP}} \sim$
 $R_{EST} = W_{21} \cdot N_2 = B \cdot S \cdot I$
- Evolution:** $\frac{dN_2}{dt} = R_p - R_{ESP} - R_{NR} - R_{EST}$; $\frac{dS}{dt} = -\frac{S}{\tau_p} + V_a (\beta R_{ESP} + R_{EST})$ $\rightarrow R_{ESP} = N_2/\tau_{ESP}$
 $R_{NR} = N_2/\tau_{NR}$ $\frac{\partial \tau_{NR}}{\partial \tau_{ESP}} \sim$
 $R_{EST} = W_{21} \cdot N_2 = B \cdot S \cdot I$
 - Régime statique:** **Pompage continu:** $\frac{dN}{dt} = \frac{dN}{dt} = 0$; **Seuil laser pow** $\{G_{av} = P_{thres}\}$
 - Rate equations:** $\frac{dN_2}{dt} = R_p - \frac{N_2}{\tau_c} - \frac{\sigma_c c}{v} \cdot N_2 \cdot S$; $\frac{dS}{dt} = -\frac{\gamma_c c}{L_c} \cdot S + V_a \cdot \frac{\sigma_c c}{v} \cdot N_2 \cdot (S+1)$
 - rapport:** $f = \frac{\sigma_a}{\sigma_e} \frac{\tau_c}{\tau_e}$ ^{absorption} _{émission}; $N_t = N_2 + N_1$; **inversion de population:** $N = N_2 - f N_1$
- 

Energie renouvelables:

Notions d'économie:

- Base: • Valeurs actualisé:

• Facteur de charges:

$$VA(F, r, n) = F \cdot (1+r)^{-n}$$

plus dépense/gain

$$Fch = \frac{\text{Efficacité} - \text{Produit durant période}}{\text{Eminimale} - \text{si constant}}$$

intérêt

Valeurs actualisées de l'emprunt:

avec r = taux d'emprunt
 i = taux d'inflation

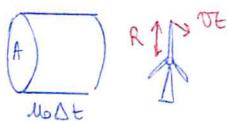
$$\bullet PV_n = \sum_{i=1}^n VA_i$$

$$\text{Suite géométrique: } \sum_{i=n}^{m-1} q^i = \frac{q^n - q^{m-1}}{1-q} \quad \Delta i > 0$$

Valeurs actualisées nette:

$$VAN = SVA(\text{gains}) - SVA(\text{dépenses})$$

Energie Eoliens:



$$E_0 = \frac{1}{2} m u_0^3 \quad ; \quad m = \rho A u_0 \Delta t \rightarrow E_{vent} = \frac{1}{2} \rho A \Delta t u_0^3 \quad ; \quad P_0 = E_0 / \Delta t$$

$$\lambda = \frac{4\pi}{\text{nb de pales}} \quad ; \quad \text{Chiffre de vitesse: } \lambda = \frac{vt}{u_0} = \frac{wh}{u_0} \rightarrow \text{determine vitesse de vent optimal}$$

\rightarrow au delà $\lambda \nexists \Rightarrow$ difficulté à décoller.

$$\text{Puissance idéale: } P_{idéal} = C_p \cdot P_0 \quad \text{avec } C_p = \frac{17}{27} \quad ; \quad \text{Puissance éoliene: } P_{éol} = \frac{1}{\eta_{eff}} P_{idéal}$$

Calculs de vitesse:

$$\bullet \text{Méthode 1: } u(z) = u_{10} \left(\frac{z}{z_{10}} \right)^n \rightarrow \text{calcul de la rentabilité par } P(D, z)$$

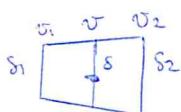
\rightarrow dimensionnement du mat \rightarrow couple par rapport: Pro haut / Pro bas

$$\bullet \text{Méthode 2: Loi de Rayleigh: } \phi(u) = \frac{2u}{c^2} e^{-\left(\frac{u}{c}\right)^2} \Rightarrow \text{distribution gaussienne}$$

$$\rightarrow \text{Puissance moyenne: } \bar{P} = \frac{\int_0^\infty P(u) \phi(u) du}{\int_0^\infty \phi(u) du} \rightarrow \begin{aligned} &\text{élimination sur l'année} \\ &\text{calcul enrou relatif} \\ &\text{calcul du facteur de charges.} \end{aligned}$$

$u = \text{cse}$
 $du = \text{cdse}$

Limite de Betz:



$$\bullet \text{Conservation de la quantité de mouvement: } \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{r \rightarrow \infty} \quad \text{avec } \Delta F = \dot{m} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

Δ debit massique

• Calcul de puissance:

$$\bullet P_{(réal)} = \dot{m} \Delta F = \rho \delta v^2 (v_1 - v_2) \stackrel{\text{et}}{=} P_{(réal)} \frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2} \dot{m} (v_1^2 - v_2^2) = \rho S \frac{v^2}{2} (v_1^2 - v_2^2)$$

$$\rightarrow v = \frac{v_1 + v_2}{2} \quad (\text{relation de Betz})$$

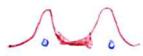
$$\bullet \text{Optimisation: } P_{max} \xrightarrow{\text{réal}} v_2 \text{ max} \rightarrow \frac{dP}{dv_2} = 0 \rightarrow C_p = \frac{P_{max} \text{ réal}}{P_{réal}} = \frac{16}{27}$$

$$\bullet \text{Facteur d'induction (interférence): } a = \frac{v_1 - v}{v_1} \text{ soit } v = v_1 (1-a) = \frac{v_1 + v_2}{2} \Rightarrow C_p = P(v_1) / P_o(v_1) = 4a(1-a)$$

$$\bullet \text{Éolienne en série: } P_{tot}(v_1) = P'(v_1) + P''(v) \quad \text{avec } P_{tot} = \frac{C_p \text{ tot} \rho S v_1^3}{2} \rightarrow \text{analogique pour } P' \text{ et } P''$$

en dernier $C_p'' = \frac{16}{27}$! $C_p' \leftrightarrow a' \text{ réel pour } \frac{dC_p}{da} = 0$

Structure de bande:

► Modèle liaison forte: interaction $e \leftrightarrow$ cristal  ; N atomes nulle $\equiv N$ bandes

⇒ Ré souche équation de Schrödinger: $[H_{\text{atom}} + V(r)]|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$ → à projeter suivant l'atomes du motif
 potentiel cristallin $\zeta + \epsilon(R)$ tout les électrons se limitent au 1^{er} voisin (ne pas oublier le centre d'agitation)

soit: $C_R = \epsilon(R) + \frac{\langle \Psi(r) | V(r) | \Psi(r) \rangle}{\langle \Psi(r) | \Psi(r) \rangle}$; (1) $\left\{ \begin{array}{l} \Psi(x+a) = e^{i k a} \Psi(x) \pm \Psi(x) = \sum_n c_n \phi_n(x) \\ \text{identification + récurrence} \end{array} \right.$
 \uparrow \uparrow
 \uparrow atomes du motif

o Théorème de Bloch: $\Psi_R(\vec{r}) = \sum_R C_R(\vec{k}) \Psi_0(\vec{r} - \vec{R}) \rightarrow C_R(\vec{k}) = C_0 e^{i k \cdot \vec{R}}$

→ pour 1 cristal 2D: $\frac{\alpha_{m,n}}{\alpha_{0,0}} = \frac{\beta_{m,n}}{\beta_{0,0}} = \frac{\gamma_{m,n}}{\gamma_{0,0}} = e^{i(k_x m a + k_y n b)}$

o Caractérisation: recouvrement: $\alpha(\vec{R}) = \langle \Psi_0(\vec{r}) | \Psi_0(\vec{r} - \vec{R}) \rangle \geq 1$.

éch. cristallin: $\beta = -\langle \Psi_0(\vec{r}) | V(\vec{r}) | \Psi_0(\vec{r}) \rangle = 0$

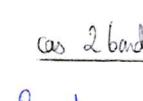
transfert: $\gamma(\vec{R}) = -\langle \Psi_0(\vec{r}) | V(\vec{r}) | \Psi_0(\vec{r} - \vec{R}) \rangle > 0$

o Dans un prolonier: $\Psi_0(r) = \Psi_{m,n} \rightsquigarrow$ nœud; $\Psi_0(\vec{r} - \vec{R}) = \Psi_{m \pm 1, n \pm 1}$ { 1^{er} voisin
 $= \psi_{m,n}$ (plusieurs bandes)}

o 1ZB: proche de Γ, Q : $E(k_{\text{hyb}}) = E(\Gamma_Q) + C_0 e^{i R \cdot \vec{P}_{00} Q}$; ici $E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2 m^*(A)}$; atomes superposés → bande à moitié remplie \Rightarrow règle du duit (si solaire 1 bande = valise)

o Orbitales: 2p:  3d: 

cas 2 bandes:

 $\langle \phi_{m,n}^{2p} | H | \phi_{m,n}^{2p} \rangle = \pm t$

o Energies: $E = \frac{1}{N} \int_{\text{électrique}} \rho(\vec{R}) E(\vec{R}) d\vec{R}$; Masse effective: $\frac{1}{m^*} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 E(\vec{R})}{\partial \vec{R}^2}$

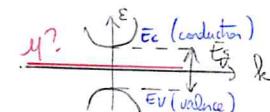
Résonance:

 $\langle \phi_{m,n}^{2p} | H | \phi_{m,n}^{2p} \rangle = \pm t$

o Semi-conducteurs:

► Approximation non dégénérée:
 { Note: $E_F = \mu$ pour $T=0K$ }

$E_C - \mu \gg kT$ { simplifie f_{FD} }

$\mu?$ 

► Loi d'Action de masse:

$n = \frac{1}{V} \int_{E_C}^{+\infty} \rho(E - E_C, m_C^*) f_{FD}(\varepsilon) dE = N_C e^{-\frac{(E_C - \mu)}{kT}}$

$p = \frac{1}{V} \int_{-\infty}^{E_V} \rho(E_V - E, m_V^*) (1 - f_{FD}(\varepsilon)) dE = N_V e^{-\frac{(\mu - E_V)}{kT}}$

► S.C. intrinsèques: $n = p$

► S.C. extrinsèques $n - p = \Delta n \neq 0 \rightarrow$ densité de porteur (dissocié) \propto impureté

→ Calculs de $\frac{\Delta n}{n_i}$ + $\langle n \rangle$ et $\langle p \rangle \Rightarrow \Delta n \approx N_d - N_a$

► Fonction P.N.: Champs \vec{E} générée: $\vec{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{x}$ → Équation de Poisson: $\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0 E_r}$

• Modèle de Schottky: $\rho(x)$ réduit à des rectangles

• Équilibre: $j^e + j^{\text{dp}} = 0 \rightarrow$ n et p charge de forme:

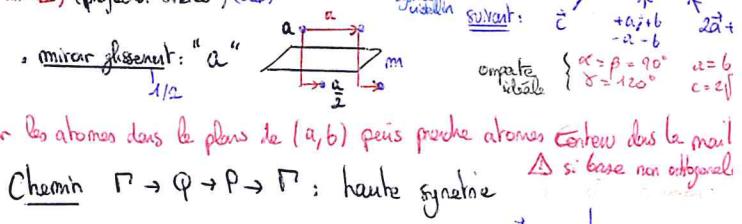
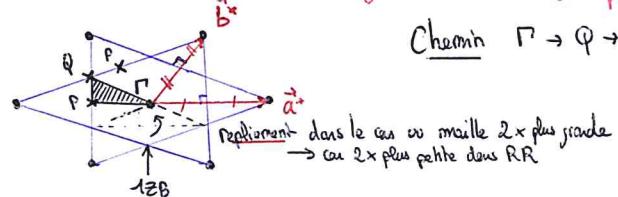
$E_C \rightarrow E_C - q\phi(x)$
 $E_p \rightarrow E_V + q\phi(x)$

- Conductivité des Métaux: $(\text{gas } e^-)$
- Modèle de Drude: $\vec{v} = -q \frac{\vec{E}}{m} t + \vec{v}_0$; $\langle v \rangle = \langle -q \frac{\Delta t}{m} \vec{E} \rangle = -q \frac{C}{m} \vec{E}$ pour $\langle \Delta t \rangle = \int_0^{+\infty} t P(t) dt$ avec $P(t) = \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau}$
- Ohm Kirchhoff: $j = \sigma \vec{E} = -n q \langle v \rangle$; Fréquentiel: $\frac{d\langle v \rangle}{dt} + \frac{k}{m} \langle v \rangle = -\frac{q}{m} \vec{E}$, Energie séchée: $\Delta w_i = \frac{1}{2} m v_i^2 \rightarrow \omega = \langle \Delta w_i \rangle \cdot \frac{\tau}{\tau}$
- \vec{E} alternatif: $\langle v(t) \rangle = \langle v(w) \rangle e^{iwt}$; Effet Hall: $m \frac{d\langle v \rangle}{dt} = -q \vec{E} - \frac{m}{e} \langle \vec{v} \rangle - q \langle \vec{v} \rangle \wedge \vec{B}_0 \rightarrow$ suivant $(x, y) \times (0, g \cdot q^{-1}) \rightarrow$ force
- Densité e^- : $n = (m \cdot e)/V$
- Modèle de Sommerfeld: Conditions Limites Periodique: $\Psi(kz) = \Psi(kz+L)$; Eq de Schrödinger: $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = E \Psi$, solutions: $\Psi(kz) = A e^{ikz} + B e^{-ikz}$
- Conducteurs: Niveau de Fermi coupe plusieurs bandes.

- Densité d' e^- de conduction: $\rho_{FD} = \frac{\text{Nb électr}}{\text{Volume}} = \frac{1}{(\frac{2\pi}{L})^3}$; États disponibles: $N = \frac{V_{\text{tot stat}}}{(fermion)} \leftrightarrow 2 = \frac{V_{\text{tot stat}}}{V_{\text{1 état}}} = \frac{\frac{4}{3} \pi k_F^3}{(\frac{2\pi}{L})^3} \Rightarrow \begin{cases} E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}; V_F = \frac{\hbar k_F}{m} \\ T_F = E_F / k_B; E_A = \frac{\hbar^2}{2m} |k_F|^2 \end{cases}$
- Densité d'état d'Énergie: $\rho(E) dE = 2 \rho(k_F) d^3 k$ avec $d^3 k \approx 4\pi k_F^2 dk$
- e^- disponible: $N = \int_0^{E_F} \rho(E) dE$; Énergie gaz: $E = \int_0^{E_F} \rho_{FD} E \rho(E) dE$; $\rho_{FD} \approx 1$ pour $T=0K$ ($\rho_{FD} = \frac{1}{e^{\frac{E}{k_B T}} + 1}$)

② $\rightarrow +3D$: Condition aux limites fixe: $(k_z = \frac{\pi}{a})$ à prendre en compte.

- Cristallographie: cristal = motif + réseaux
- Structure Atomique: Réseau Direct: $\vec{R} = n\vec{a} + m\vec{b} + l\vec{c}$; Réseau Reciproque: $\vec{G}_{HKL} = h\vec{a}^* + k\vec{b}^* + l\vec{c}^*$ avec: $\begin{cases} \vec{a}^* = 2\pi \frac{\vec{b} \wedge \vec{c}}{V_0} \\ V_0 = \vec{a} \cdot \vec{b} \wedge \vec{c} \\ \vec{a}^* \cdot \vec{a} = 2\pi \text{ et } \vec{a}^* \cdot \vec{b} \rightarrow \text{cycle long } \frac{2\pi}{\vec{a}^*} \rightarrow \text{peut se dérouler suivant vecteur unitaire} \end{cases}$
- Distance Interatomique: $d_{HKL} = 1/\|\vec{G}_{HKL}\|$; "multiplicité" $\Rightarrow m-1$ translation supplémentaire $\vec{t} \rightarrow \frac{\vec{R} \cdot \vec{G}}{\vec{t} \cdot \vec{G}} = 2\pi n$
- Diffraction: $A(\vec{G}) = \sum_n e^{-i\vec{G} \cdot \vec{R}}$
- Multiplicité: $m = \left[\frac{1}{8} : \text{coins}; \frac{1}{4} : \text{arête}; \frac{1}{2} : \text{face} \right] \times \text{Nb d'atomes par plan} \rightarrow$ Plan Empilement compacte: $A+B+C+A+B+C$ pour relatif Astuce: visualiser l'ensemble des plans suivant - maille nonordinaire (réduire l'obscureté) → prendre orientation du dessin
- Groupes: Réseaux de Bravais, 14 modèles: P, I, F, A, B, C; Groupes ponctuels: 32 possibles ex: Hexagonal: $\frac{6}{m} \frac{2}{m} \frac{2}{m} \rightarrow m$ si plusieurs sites d'entourages différents \rightarrow maille ponctuelle (nouvelles mailles) $m=1 \leftarrow$ se ramener à $m=1$ (projection stéréo) (2D)
- Groupes d'espaces: rotation hélicoïdale: $\begin{cases} \text{par: } A_{41} \\ \text{et: } A_{42} \end{cases} \rightarrow$ mirroir glissant: "a" $\begin{cases} \text{sur: } \vec{z} \\ \text{à: } a \\ \text{et: } m \\ \text{avec: } \alpha = \beta = 90^\circ \\ \gamma = 120^\circ \\ c = 2 \end{cases}$
- Motifs: Ensemble d'atomes devient en coordonnées réduites (\vec{a}, \vec{b}) \rightarrow Projeter les atomes dans le plan de (a, b) puis prenez atomes contenus dans la maille
- Zones de Brillouin: (RR)



- Structure électronique:
- Chaines atomiques: $V = \frac{1}{2} \sum_{m \neq n} V(x_m - x_n)$; approx 1^{er} voisin: $m = n+1$; approx harmonique: DL ordre 1 = 0
soit: $V(x_m - x_{n+1}) = \frac{p}{2} (x_m - x_{n+1})^2 \rightarrow x_m = n \alpha + \alpha_n$; condition de PBVK: $\alpha_m + \alpha_N = \alpha_n$ (minimise)
- $\rightarrow V = \frac{p}{2} \sum_n (x_n - x_{n+1})^2 \Rightarrow$ Dynamique: $m \ddot{x}_n = \sum_{j \neq n} F_j = -\frac{\partial V}{\partial x_n}$ avec $\frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} = 0$ (cas indép)
- Structure simple: chaîne monocaténique: $m \ddot{x}_n = -\beta (x_n - x_{n+1} - x_{n-1}) \rightarrow$ soluté ordre plan $x_{n+1} = x_n e^{\pm i \omega t}$
vitesse de groupe: $\frac{\partial x}{\partial k}$ $\omega \rightarrow$ relation de dispersion
- soit: $\det(a_1 a_2) = a_1 a_2 - a_2 a_1$ $\det(C(\omega)) = 0 \rightarrow \omega_{1,2}^2 =$ repliement
 \rightarrow factoriser système avec λ_{1p} et λ_{2p+1}
- Structure Réel: {motif à N atomes} \equiv N équations soit: $V = \frac{p}{2} \sum_{m \neq n} (x_{m,n} - x_{m',n'})^2$
solutions $x_{m,n} = x_{0,0} e^{i(k \cdot R - \omega t)}$ et: $x_{m+1,n+1} = x_{m,n} e^{2\pi i (\alpha + \beta)}$ \rightarrow à adopter suivant le paramètre de maille.
- Validité du modèle d'énergie libre: $R_F = \alpha \Gamma N$ avec N correspondant aux points de hauts symétrie d'une face d'un polyèdre $\rightarrow \alpha < 1$
- Si $|R_F| < |\Gamma H|$ e^- conduction ne peut être décrit par modèle \rightarrow replier la maille par la sphère de Fermi; Surface: limite présentant caractéristique

- > 1) Etats $|\Psi(t)\rangle \rightarrow$ principe de superposition : $|\Psi_1\rangle + |\Psi_2\rangle \in \mathcal{S}$ pour $|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle \in \mathcal{S}$
 > 2) Grandeur mesurable : $A = (A^\dagger)^\dagger = A^\dagger$; $\langle i|A|j\rangle = (\langle j|A|i\rangle)^\dagger$; $\langle \alpha|\Psi\rangle = \Psi(\alpha)$
 > 3) Mesure : Normalisation des états propres : $\langle u_n|u_m\rangle = 0$; $\langle u_n|u_n\rangle = 1$ / Normalisation : $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(t)|^2 dt = 1$
 > 4) Probabilité : $P_i(an) = |\langle u_n|\Psi\rangle|^2$ avec $|\Psi\rangle = \sum C(n) |u_i\rangle$ \rightarrow projection suivant $\langle u_n|$
 > 5) Équation de Schrödinger : $i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = H |\Psi(t)\rangle \rightarrow H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle \rightarrow C_n(t) = C_n(t_0) e^{-\frac{E n t}{\hbar}}$ donc $|\Psi(t)\rangle = \sum C_n(t) |u_n\rangle$
 > $H = \frac{\partial^2}{2m} + V(x)$
 > Outils : • réflexion: $\langle \alpha|x|x'\rangle = x \delta(x-x')$; $\langle x|P|x'\rangle = i\hbar \delta'(x-x') = -i\hbar \delta(x-x') \frac{dx}{dx}$; Dirac: $\int f(\alpha) \delta(x-x_0) dx = f(x_0)$
 • Projection: $P_n = |u_n\rangle \langle u_n| \Rightarrow \sum P_n = 1$ (relation de fermeture) $\Rightarrow 1 = \int dx' |x\rangle \langle x'| \rightarrow$ utile pour la projection suivant états
 • Moyenne: $\langle A^n \rangle = \langle \Psi | A^n | \Psi \rangle = \sum A^n P_i(an)$; $\langle \Psi | A | \Psi \rangle = \int A \Psi^*(x) \Psi(x) dx$
 • Bra-Ket: $|u\rangle = \alpha |u_1\rangle + \beta |u_2\rangle$; $\langle u| = \alpha^* \langle u_1| + \beta^* \langle u_2| \rightarrow$ opérateur évolutions associé E_i à $|u_i\rangle$: $U|u\rangle = U_i|u_i\rangle$
 • Commutateur: $[A, B+C] = [A, B] + [A, C]$; $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$; $[x, p] = i\hbar$; antisymétrique: $[x, H] = \frac{1}{2m} (p^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2) = 0$

Particules Confinées : solubilis: solution de carié sommable \rightarrow ne peut diverger.

- > Généralité : mouvement confiné \equiv énergie quantifiée; potentiel symétrique \equiv fonction d'onde de parité définie; potentiel invariant \equiv système conservatif
 • Équation de Schrödinger: $\frac{d^2\Psi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x)) \Psi(x)$; Conditions de continuité: Ψ et Ψ' aux limites; si $V_0 = \Psi_I = \Psi_{II}$; $\Psi_I = \Psi_{II}$
 > Potentiel symétrique: séparation solutions paire/impaire; propriétés: paire: $\Psi_{II}(x) = \Psi_{II}(-x)$; impaire: $\Psi_{II}(x) = -\Psi_{II}(-x)$
 > Potentiel périodique: Théorème de Bloch: $\Psi(x-d) = e^{-ikd} \Psi(x)$ avec $V(x) = V(x+da)$
 • Propriété: $T(da)|x\rangle = |x+da\rangle$; $T(da) = 1 + ikda$; $T(a) = e^{-i\frac{p}{\hbar}a} \Rightarrow$ projection espace moment $k|k\rangle \sim (a = e^{-ika})$
 △ $[x, T(da)]|x\rangle = da|x+da\rangle \neq daT(da)|x\rangle \simeq da|x\rangle$
 • Continuité: $\Psi_I(0) = \Psi_{II}(0) \rightarrow \textcircled{1}$ $\left. \begin{array}{l} \Psi(a), \Psi'(a) \\ \Psi_I(0) = \Psi_{II}'(0) \end{array} \right\} \rightarrow \textcircled{2}$ \rightarrow système 2×2 $\det(C) = 0 \rightarrow$ relation de dispersion $E(k)$
 \rightarrow avec Bloch

Oscillateurs Harmoniques:

- > Hamiltonien: $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{x}^2$; exemple possible: $V(x) = \frac{1}{2} k x^2$ avec $V(x) = \int F dx \approx \vec{F} = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{x}$
 > Changement de variables: $\tilde{x} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{x}$; $\tilde{p} = \sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}} \hat{p}$; $\tilde{H} = \frac{1}{2} \hat{H} = \frac{1}{2} (\tilde{x}^2 + \tilde{p}^2) \rightarrow \tilde{H} = \hat{N} + \frac{1}{2} \hbar I \Rightarrow E_n = \hbar\omega n$
 > Opérateurs: $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{x} + i\tilde{p})$; $\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{x} - i\tilde{p})$; $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a} \perp \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger = \hat{N} + \hbar I$; $|\hat{N}|\Psi_n\rangle = n|\Psi_n\rangle$
 Actions: $\hat{N}a|\Psi_n\rangle = (\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{N})|\Psi_n\rangle = (n+1)a^\dagger|\Psi_n\rangle$; utilisation: $a^\dagger|\Psi_n\rangle = [N, a^\dagger]|\Psi_n\rangle$; comparaison: $\{Na^\dagger|\Psi_n\rangle = (n+1)a^\dagger|\Psi_n\rangle\} = +N a^\dagger|\Psi_n\rangle - a^\dagger N|\Psi_n\rangle \rightarrow C a^\dagger|\Psi_n\rangle = |\Psi_{n+1}\rangle$
 $\Rightarrow \hat{a}^\dagger|\Psi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\Psi_{n+1}\rangle$ et $\hat{a}|\Psi_n\rangle = \sqrt{n-1}|\Psi_{n-1}\rangle$ \rightarrow différentielle obtenue par $\langle \alpha|a|\Psi_0\rangle = 0$
 • Generalisation: $|\Psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \hat{a}^\dagger |\Psi_{n-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |\Psi_0\rangle$ \rightarrow projection suivant $\langle \alpha| \rightarrow \Psi_n(x) \propto \Psi_0(x)$ Gauss-Hermite

Théorie des perturbations stationnaires:

- > Hamiltonien: $\hat{H} = \hat{H}^0 + \hat{H}^1$; $H^0|n^0\rangle = E_n^0|n^0\rangle$ résoluble (non perturbé); $V_{00} \Rightarrow E_n^0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m a^2} n^2$ (exemple)
 > Dévpt en série perturbative: $(\hat{H}^0 + \hat{H}^1)(|n^0\rangle + |n^1\rangle + |n^2\rangle) = (E_n^0 + E_n^1 + E_n^2)(|n\rangle) \rightarrow$ équation polynomiale
 > Ordre N: $H^\alpha|n^\alpha\rangle \perp E^\beta|n^\beta\rangle$ avec $\alpha + \beta = \gamma + \varepsilon = N \rightarrow$ si la somme des exposants du problème $\neq N \Rightarrow$ non pris en compte
 > Ordre 1: Correction à l'énergie: (projection suivant $\langle n^0|$): $E_n^1 = \langle n^0|\hat{H}^1|n^0\rangle$ exemple: $E_n^1 = \int_0^a H^1(x) |\Psi_n^0(x)\rangle^2 dx$
 • Correction sur les états: $\{base\ ordre^0\} \rightarrow$ projeter suivant $\langle m^0|$ puis projeter ordre 1 dans 0 (\parallel et \perp)
 Par rapport à l'état fondamental: $n=1$ $|n_1\rangle = \sum |m^0\rangle \frac{\langle m^0|\hat{H}^1|n^0\rangle}{E_n^0 - E_m^0}$ exemple: $E_n^0 - E_m^0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m a^2} (n^2 - m^2)$
 > Ordre 2: Correction à l'énergie: $E_n^2 = \langle n^0|\hat{H}^1|n^1\rangle = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m^0|\hat{H}^1|n^0\rangle|^2}{E_n^0 - E_m^0}$ exemple: $\langle \Psi_n^0 | a^{\pm 2} | \Psi_m^0 \rangle$
 DL ubiq: $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2$
 - $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$
 - $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$
 - $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$
 $= \sqrt{n+1} \cdot \sqrt{n+2} \langle \Psi_n^0 | \Psi_{m+2}^0 \rangle$
 \Rightarrow ensemble des termes $\delta_{n,m+2} = 1$ pour $m = n-2$

Theorie des perturbations non stationnaire:

- $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'(t)$
- ordre 0: $|\psi(t)\rangle = |i^0\rangle e^{\frac{iE_0}{\hbar}t}$
- ordre 1: $|\psi(t)\rangle = \sum_n d_n(r) e^{-\frac{iE_n}{\hbar}t} |n^0\rangle$ (reste schrodinger ordre 1)
- discret: $|i^0\rangle \rightarrow |f^0\rangle$
- Probabilité de transition: $P_{i \rightarrow f}(t) = |\langle f | \psi(t) \rangle|^2 = |\langle f | H' | i^0 \rangle|^2 = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^t e^{iE_i t'} \langle f | H'(t') | i^0 \rangle dt' \right|^2$ avec $w_f = \frac{E_f - E_i}{\hbar}$
- Perturbation sinusoidale: $\hat{H}'(t) = \hat{W} \sin(\omega t) \rightarrow$ 2 termes: resonant et anti-resonant

cas discret: Antiresonance négligée \rightarrow valeurbo temps court (sinus) lié à ΔE

cas discret/continu: Densité de proba de transition: $SP = \int_{E \in \Delta E} \rho(E) |\langle \alpha | \psi(t) \rangle|^2 dE$

$$\text{Règle de Fermi: } SP = 0 \text{ pour } E_i \notin \Delta E ; R(i,f) = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | H' | i^0 \rangle|^2 \rho(E) = \frac{SP}{E}$$

- Theorie générale du moment cinétique: loi de conservation "Einstein": $\frac{d\langle A \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [H, A] \rangle$
- $L_z = Xp_y - Yp_x$; équation aux valeurs propres \rightarrow coordonnées polaires $i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \Psi_{l,m}(r, \varphi) = l \Psi_{l,m}(r, \varphi) \rightarrow l_z = m$ (ordre vectoriel $(1, -1, 0)$)
- Relation: $[L_z, L_k] = i\hbar \sum_{l=1}^3 \epsilon_{ijk} l_l \Rightarrow L_z |\alpha\beta\rangle = \beta |\alpha\beta\rangle$ (M.C.: $\langle L^2 - L_z^2 \rangle = \frac{\alpha - \beta}{2}$) $\rightarrow L^2 |\alpha\beta\rangle = \alpha |\alpha\beta\rangle$ (valeurs max: $\alpha > \beta^2$) $\rightarrow L^2 |l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |l, m\rangle$
- $L_z |l, m\rangle = \hbar m |l, m\rangle$
- Etats propres: $L_z = L_x + iL_y \rightarrow |l, m\rangle = \hbar \sqrt{(l+m)(l+m+1)} |l, m \pm 1\rangle$ \rightarrow fct propre commune pour projeter suivant $\langle r, \theta, \varphi \rangle \Rightarrow \Psi_{l,m} = R(r) \cdot Y_l^m(\theta, \varphi)$

Potential central:

$$\begin{aligned} \text{Equation radiale: } \Psi = \frac{U(r)}{r} Y_l^m(\theta, \varphi) + \text{Hamiltonien sphérique} \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 U(r)}{dr^2} + \left(\frac{\hbar^2 P(l+1)}{2m r^2} + U(r) \right) U(r) = E U(r) \\ \Rightarrow [H, L^2] = [H, L_z] = 0 \end{aligned}$$

Aтомes d'Hydrogénies: (+hydrogénoides)

$$\begin{aligned} \text{Hamiltonien: } H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{r} \rightarrow \text{pot relatif} \rightarrow \text{interaction coulombienne} \times \frac{-ze^2}{r} \rightarrow \text{Equation radiale: } R = \frac{r}{a_0/2} ; \lambda RL = \sqrt{-\frac{Eh^2}{EI}} \quad \{ dr \rightarrow dR \} \\ \text{Etude aux limites: } U RL(p \rightarrow 0) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{asympotique } (p \rightarrow +\infty) : U RL(p) = e^{-p/a_0} \frac{y RL(p)}{p} \text{ (dans une série de puissance (Taylor))}$$

$$\Rightarrow E RL = -\frac{E I}{(k+p)^2} \Leftrightarrow E_n = -\frac{z^2 E I}{n^2} \rightarrow z \neq 1 \text{ si hydrogénide}$$

- Spin:
 - Opérateurs: $S^2 |s, ms\rangle = \hbar^2 s(s+1) |s, ms\rangle ; S_z |s, ms\rangle = \hbar m_s |s, ms\rangle$
 - Résultats expérimentaux: $s = 1/2$ et $m_s = \pm 1/2$

$$Up \text{ et Down: } |1\rangle = |\frac{1}{2}, \uparrow\rangle ; |1\rangle = |\frac{1}{2}, \downarrow\rangle$$

$$\text{Etats propres: } S_{\pm} = S_x \pm iS_y \rightarrow S_{\pm} |s, ms\rangle = \hbar \sqrt{(s \mp m_s)(s \pm m_s + 1)} |s, ms \pm 1\rangle$$

$$\text{Matrice de Pauli: } \vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \text{ avec } \vec{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \vec{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \vec{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ avec } \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j$$

$$\text{Spins: Fct dionde up/down: } [\Psi](\vec{r}) = \begin{pmatrix} \Psi_{\uparrow}(\vec{r}) \\ \Psi_{\downarrow}(\vec{r}) \end{pmatrix} \text{ avec } \langle \vec{r}, \varepsilon | \vec{r}, \varepsilon' \rangle = \delta(\vec{r} - \vec{r}') S_{\varepsilon, \varepsilon'}$$

Homogène: $y^{(n)}(x) + \dots + y(x) = 0$; non homogène: $y^{(n)}(x) + \dots + y(x) = g(x)$

Separation de variables: $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \Rightarrow \int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$

ordre 1: $a(t)x' + b(t)x = 0$; $x(t) = k e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt}$: intégration directe

Differential exacte: $A(x,y)dx + B(x,y)dy = dV(x,y) \Rightarrow \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right)$

si: $(x,y) = u(x,y) \Leftrightarrow A(x,y) = \int \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \text{ et } B(x,y) = \int \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \Rightarrow u_t$

ordre 2: $ax'^2 + bx' + cx = 0 \Delta > 0: x(t) = x_0 e^{\pm i\omega t}$ et $\Delta < 0: x(t) = (x_0 + iy_0)e^{\pm \omega t}$

Réolution ordre n: Solution complémentaire (E_0): $y_c = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x)$ solution $y_c + y_p$ Intégrale particulière [E] indépendant de y_c (si $y_p = a e^{rx}$ alors $y_p = b e^{rx}$) à poser dans l'équation (si $\cos(rx)$ faire $P_r[e^{rx}]$)

Wronskien: $W(y_1, \dots, y_n) = \det \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \neq 0$ les solutions sont indépendantes

coefficients constants: $a_n \frac{d^n y}{dx^n} + \dots + a_0 y = f(x) \rightarrow y(x) = A e^{\lambda x}$ solution λ_i réel et différent → combinaison linéaire $y_c = C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$ λ_i complexe → $C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \quad \begin{cases} \lambda_1 = \alpha + i\beta \\ \lambda_2 = \alpha - i\beta \end{cases}$ λ_i apparaît le fois → $(C_1 + C_2 e^{\pm i\beta x}) e^{\alpha x} + \dots$

coefficients non constants: $a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + \dots + a_0(x) y(x) = f(x)$

cas 1 → $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \Rightarrow \frac{d}{dx} [b_1(x)y' + b_0(x)y] = f(x)$ → $a_0 - a_1'(x) + a_2''(x) = 0$

cas 2: Réolution général pour: $a_2(x)y'' + a_1(x)y' = f(x)$ - sinon faire un intégrant unique → $y''(x) + \frac{a_1(x)}{a_2(x)}y'(x) = \frac{f(x)}{a_2(x)} \rightarrow y(x) = e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx} \rightarrow y(x) = e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx} \frac{d}{dx} \left[\frac{dy}{dx} \right] = \frac{d}{dx} \left[y'(x) \right] = f(x) e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx}$

cas 3: $a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = f(x) \rightarrow b_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + b_1 \frac{dy}{dx} + b_0 = f(x) e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx}$

systèmes: $\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n M_{ij} y_j(x) \equiv \frac{dy}{dx} = M \cdot y \rightarrow y = C \cdot V e^{\int M dx}$

cas 4: $\begin{pmatrix} x & y \\ y' & y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ y' & y'' \end{pmatrix} \rightarrow \text{équivalent: équation caractéristique (on fixe } x \text{ ou } y \text{ → on adapte)}$

cas 5: $\frac{dy}{dx} = C_1 V_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 V_2 e^{\lambda_2 x} \quad y_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}; y_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

cas 6: $\frac{dy}{dx} = M \cdot y(x) + P(x); \quad y_p = Y(x) \int Y'(x) \cdot P(x)$

enracinée Partielle: $A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dF}{dP} \frac{dP}{dx}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{dF}{dP} \frac{dP}{dy}$

cas 7: $A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow b/a = \lambda_1, \lambda_2 \rightarrow u = f(\lambda_1 x + \lambda_2 y) + g(x \lambda_1 y) \quad (\Delta = B^2 - 4AC)$

cas 8: Separation des variables: $U(x,y,z,t) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \cdot T(t) \rightarrow$ résolution par partie

cas 9: $\frac{\partial X}{\partial x} \frac{1}{X} = -\lambda^2 \rightarrow \text{solutions: } X(x) = A e^{-\lambda x} + B e^{\lambda x}$ Combiner toutes les "n" solutions → Condition Limite

cas 10: Transformée de Fourier: $F[u(\tilde{x},t)] = (\frac{2\pi}{\lambda})^{\frac{3}{2}} \int u(\tilde{x},t) \cdot e^{-\frac{i2\pi}{\lambda} \tilde{x} \cdot \tilde{t}} d\tilde{x}$

cas 11: $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int f(x) dx = \frac{\partial}{\partial t} \int f(x) dx = \frac{\partial}{\partial t} \int f(x) dx$

cas 12: $\hat{u}(k,0) = f(k) \rightarrow \hat{u}(k,t) \stackrel{\text{éventiel}}{\approx} f(k) \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot G(k,t) \rightarrow$ solution de $\hat{u}(k,t) = f(k) \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot G(k,t)$

cas 13: $\Delta \int \frac{f}{dt} dx = \frac{f}{dt} \int dx$

cas 14: $k \nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow \text{solution de } u(t,x) = u_0(x) + \frac{1}{2} k^2 t$

cas 15: $\Delta \nabla^2 u = 0 \rightarrow \text{on obtient éqn diff + équation varia convolution}$

Associativité: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

distributivité: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

cas 16: $P(A) \in [0,1]; P(\emptyset) = 1; P(A) = 1 - P(\bar{A}); \bar{A} \cap \bar{B} = \bar{A \cup B}$

cas 17: indépendance: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

cas 18: conditionnel: $P(A|B) = P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

cas 19: independance: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

cas 20: Permutation: (ordonner "R" objets parmi "n"): " $P_R = \frac{n!}{(n-R)!}$ " binomiale

cas 21: Combinaison: (choisir "R" objets parmi "n"): " $C_R = P_R \cdot \frac{1}{R!} = \frac{n!}{(n-R)! \cdot R!}$ "

cas 22: Coefficient multinomiale: $\eta_j = \frac{n!}{n_1! \cdots n_m!}; (X_1, \dots, X_m)^n = \sum_{n_1, \dots, n_m} \eta_j (X_1 \cdots X_m)^{n_j}$

cas 23: Variables aléatoires: discrete: $f(x) = P(X=x) = P_i \text{ si } x_i = x_i$ Fonction de prob. $\sum f(x_i) = 1; f(x) = P(X \leq x) = \sum f(x_i); f(x, x < x_i) = f(x_i) - f(x)$

cas 24: continue: Fonction de Prob.: $P(x < X < x+dx) = f(x)dx; \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

cas 25: Partie discrète et continue: $f(x) = \sum_i P_i \delta(x - x_i)$

cas 26: Distribution / Densité de proba: mode: \hat{x} moyenne: $\langle x \rangle = \mu = E[x]$ médiane: \hat{x} st. dev: $\sigma = \sqrt{V[x]}$

cas 27: Esperance: $E[g(x)] = \int g(x) \cdot f(x) dx$

cas 28: Variance: $V[x] = E[(x - \mu)^2]$; écart-type: $\sigma = \sqrt{V[x]} = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \mu^2}$

cas 29: Fonction Variable aléatoire: $Y = Y(\tilde{x})$; $P(Y < y + dy) = g(y)dy = \int_Y g(\tilde{x}) d\tilde{x}$

cas 30: inverse à visuel → $g(y)dy = \int_{\tilde{x}(y)}^{\tilde{x}(y+dy)} g(\tilde{x}) d\tilde{x} = \int_{\tilde{x}(y)}^{\tilde{x}(y+dy)} \frac{dy}{d\tilde{x}} d\tilde{x} \leftrightarrow g(y) = g(\tilde{x}(y)) \frac{dy}{d\tilde{x}}$

cas 31: $M(x) = \prod_{i=1}^n M_i(x_i) = (e^{\mu_i + \frac{\sigma_i^2}{2}})^n$

cas 32: Binomiale: $B(x, n, p) = P(X=x) = C_n x^x (1-p)^{n-x}$; $\mu = np; \sigma = \sqrt{npq}$

cas 33: Poisson: $P(x, \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}; \mu = \lambda; \sigma^2 = \lambda$

cas 34: Gaussiane: $G(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \rightarrow$ finale ($\sigma=1$) $T = \frac{x-\mu}{\sigma}$

cas 35: Fonction génératrice de moments: $m_0 = \int x^n f(x) dx \rightarrow m_1 = E[x]; m_2 = E[x^2]$ → $M(x) = E[e^{tx}] \rightarrow \frac{d^n M(x)}{dt^n} \Big|_{t=0} = E[x^n] = m_n$; cas 36: $M(x) = e^{\mu x + \frac{\sigma^2}{2} x^2}$

cas 37: Théorème Centrale Limite: $Z = \frac{X_i}{\sqrt{n}}$ cas 38: lim $n \rightarrow \infty$ la distribution est une gaussienne

cas 39: Statistique: écart-type: $\sigma = \sqrt{V}$ moyenne: $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2}$; variance: $\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \bar{x}^2 - \bar{x}^2$

cas 40: Covariance: $\text{cov}(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

cas 41: Coefficient de corrélation: $\rho(x, y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} = \begin{cases} -1 & \text{anti-corrélat} \\ 0 & \text{non corrélat} \\ 1 & \text{positif corrélat} \end{cases}$

cas 42: Estimateurs: $\hat{\alpha}_i = \hat{f}(x_1, \dots, x_n) \rightarrow$ qualité Biases: \hat{x} plus proche autour de $E[x]$ (du paramètre): $\hat{\alpha}_i = f(x_1, \dots, x_n)$ Convergence: $\lim \hat{\alpha}_i = \alpha$ Erreur quadratique moyenne: $V\hat{x}$ faible

cas 43: moyenne: $\hat{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \bar{x}$ - incertitude $\bar{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ correction de Bessel

cas 44: variance: $S^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \rightarrow$ biaisé → $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$

cas 45: Inégalité: f pas rapport à x (cas affine): $F = aX + b \rightarrow V[F] = E[F^2] - E[F]^2$

cas 46: $\rightarrow \hat{\sigma}^2 = \sqrt{V[F]} = |a| \hat{\sigma}_{x^2} = \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}} \hat{\sigma}_x^2 = a^2 (E[X^2] - E[X])^2$

cas 47: généralisation à 2 variables: $\hat{\sigma}^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}} \right)^2 \hat{\sigma}_x^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{x=\bar{x}} \right)^2 \hat{\sigma}_y^2 + 2 \left(\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}} \right) \text{cov}(x, y)$

cas 48: cas: $f(x, y) = xy$ ($x - y$ indépendant): $\hat{\sigma}^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

cas 49: Regression linéaire: $y = mx + c$; $\hat{m} = \text{cov}(x, y) / \text{Var}(x)$ (idem Algo) $\hat{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{m}x_i)^2$ $\hat{c} = \bar{y} - \hat{m}\bar{x}$ $\hat{\sigma}_c^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

Analyse complexe. $\operatorname{ran} v = \bar{a}$

- $z = a+ib = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}; \bar{z} = a-ib; \rho = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$
- $\overline{z+z'} = \bar{z}+\bar{z'}; \overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}; \overline{z \bar{z}} = |\bar{z}|^2 = x^2+y^2; i = \sqrt{-1}$
- $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}}; (\sqrt[2k]{1})^k = (e^{i\frac{2\pi}{k}})^k = (w_k)^k; \log z = \log|z| + i\theta$
- $a^t = e^{t \ln a}; \ln(a^n) = n \ln a; dz = \rho e^{i\theta} d\theta$

Paramètres: $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\nu(x,y)$

Dérivée: $f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right]$ existe $\Rightarrow \Delta z = \Delta x + i\Delta y$

Fonction holomorphe: Cauchy: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$

infiniment dérivable
valeur constante $\Rightarrow f = cte$
non solution de \bar{z}

infinité de variables

Laplace: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Green Stoltz: $\oint \rho dy \cdot q dx = \iint (q_x + q_y) \rho dy dx$

Fonction analytique: $f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z-z_0)^n$

Singularité: $f(z) \cdot$ diverge (∞) \Rightarrow ordre $n = \frac{1}{z^\infty}$
 \rightarrow n'est plus analytique en z_0

essentiel: $\frac{1}{z^\infty}$ (aussi)

Intégration: $\int_C f(z) dz = \int_C (u+iv)(dx+idy) = \int_C u dx - \int_C v dy + i \left(\int_C u dy + \int_C v dx \right)$

transformation

$\Rightarrow \int_a^b f(z) dz = \int_a^b u dx dt - \int_a^b v dy dt + i \left[\int_a^b u dy dt + \int_a^b v dx dt \right]$

Pour singularité ordre 1: $\oint \frac{1}{z} dz = 2\pi i; \oint \frac{1}{z^2} dz = \pi i$

Théorème de Cauchy: $\oint_C f(z) dz = 0$

Intégrale de Cauchy: $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \cdot f(z) \cdot dz$

Série de Taylor: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$

Série de Laurent: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^{n-p} = \sum_{m=-p}^{\infty} a_m (z-z_0)^m$

$a_m = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}} dz$

Residu: ordre 1: $\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z-z_0)f(z)]$ rayon de convergence

ordre m: $\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)]$

$\operatorname{Res}(f, z_0) = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{z_0}\right), \omega \rightarrow 0$

Théorème Residue: $\oint f(z) dz = 2\pi i \sum_j \operatorname{Res}(f, z_j)$

Condition d'holomorphie: Lemme de Jordan: $\operatorname{Im} = \oint e^{iz} f(z) dz \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{} 0$

$\oint f(z) dz = f_R + f_P = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz \rightarrow \Delta à la forme$

La forme principale: $P \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{R}^{-R} f(x) dx \right]$

Zone de Fourier rapport: $\operatorname{Im} v = [u, v] - [u, \bar{v}] = v$

Condition de Dirichlet: continu, périodique, convergente

Série: $s(H) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nwt) + b_n \sin(nwt)) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n e^{inkt}$

$C_n = C_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k e^{-ikwt} + C_{-n} e^{ikwt}; n \in \mathbb{N}, R.E.$

Coefficient:

$$a_0 = C_0 = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) dt \quad w = 2\pi/T$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos(nwt) dt; b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \sin(nwt) dt$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) e^{-ikt} dt; C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}; C_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

$$\text{Égalité de Parseval: } \frac{1}{T} \int_a^{a+T} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2 = \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Transformé de Fourier:

$$F[f(t)]_w = \hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iwt} dt \quad (w \rightarrow t)$$

$$F^{-1}[\hat{f}(w)]_t = f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(w) e^{iwt} dw \quad (k \rightarrow x)$$

Propriétés: Linéarité: $F[a g_1(x) + b g_2(x)] = a \hat{g}_1(k) + b \hat{g}_2(k)$

Contraction: $F[f(ax)] = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{k}{a}\right)$

Translation: $F[f(x+a)] = \hat{f}(k) \cdot e^{ika}$

modulation: $F[f(x)e^{ixa}] = \hat{f}(k-ia)$

Convolution: $F \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u) \cdot g(u) du \right] = \sqrt{2\pi} \hat{f}(k) \hat{g}(k)$

Corrélation: $F \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+u) g^*(u) du \right] = \sqrt{2\pi} \hat{f}(k) [\hat{g}(k)]^*$

Dérivation: $F[f^{(n)}(x)] = (ik)^n \hat{f}(k) \quad \Delta dx \neq dt$

Parseval-Plancherel: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)|^2 dk$

Transformé de Laplace:

$$\mathcal{L}[f(t)]_s = \hat{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\hat{f}(s)]_t = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} e^{-st} \hat{f}(s) ds$$

Propriété: $\mathcal{L} \left[\frac{d^n f}{dt^n} \right] = s^n \hat{f}(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - \frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}} \Big|_{t=0}$

$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \cdot \mathcal{L}[f(-t) H(t)] = \hat{f}(s) \cdot e^{-ts} \cdot \mathcal{L} \left[\int_0^t f(u) du \right] = \frac{1}{s} \hat{f}(s)$

$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \hat{f}^{(n)}(s); \mathcal{L}[e^{iat}] = \frac{1}{s-iw}$

Dirac: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-a) = f(a); \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixa} ds$

Heaviside: $H'(x) = \delta(x)$

$F[\delta(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, F[H(x)] = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{k-iF} = \frac{1}{2\pi} \cdot P\left[\frac{1}{k}\right] + \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Variante ininfinie:

Differential exacde: $d\bar{f} = \sum \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} dx_i = \nabla \bar{f} \cdot d\vec{x}$; $\bar{f}(B) - \bar{f}(A) = \int_A^B d\bar{f} \rightarrow$ indépendant du chemin $A \rightarrow B$

Théorème d'invariance local: si $y_i(x_i) \rightarrow dy_i = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_i} \right) dx_i$ } $J = \det J_i^j \neq 0$

Extrema des fonctions: 2 variables: $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$; $S = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$; $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$; $\text{Rame: } s^2 - rt < 0 : r > 0 \text{ min}; s^2 - rt < 0 : \text{max}; s^2 - rt > 0 : \text{selle}$

Variables: $H_{ij} = \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}$: min \rightarrow valeur propre > 0 (coup de vent)

max \rightarrow valeur propre < 0

Intégration: On considère 3 grandeurs x, y, z avec $Z(x, y, z)$ connue $\frac{\partial Z}{\partial (x,y)} = x \frac{\partial Z}{\partial y} + y \frac{\partial Z}{\partial x}$

Forme différentielle: $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) dy \quad (1)$; $dx = \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)_y dz + \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z dy \quad (2) \rightarrow (1)$

On a $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_y \cdot \left(\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right)_y = 1 \text{ et } \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)_y \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z + \left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} \right)_z = 0 \text{ pour } x, y \text{ indép}$

On retrouve: $\left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)_y = \frac{1}{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right)_y}$; $\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z = -\frac{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} \right)_z}{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right)_y}$ permutation circulaire

Ordre de grandeurs SI: $M L T Q N$ longueur charge masse temps mole; Énergie: MLT^{-2}

Équation: $[e^{\alpha m} h^{\gamma} E^{\delta}] = MLT^{-2}$

Dérivée: $(u(v))' = (u(v))' = v' u'(v)$

Équation: $(u')' = \alpha u^{\alpha-1} u' ; (u \cdot v)' = u'v + uv'$

Développement de Taylor: $f(Q,t) = f_0(t) + \frac{f_1(t)}{1!} Q + \frac{f_2(t)}{2!} Q^2 + \frac{f_3(t)}{3!} Q^3 + \dots + O(Q^4)$ (suppl)

Postulat Généralisé: température $\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U}$; $\frac{\partial S}{\partial U} > 0 \rightarrow S(U, T) \text{ invariable}$ $U(S, T) \text{ Postulat d'état}$

S à 0 avec T: $\lim_{U \rightarrow U_{\min}} S = 0 ; \lim_{U \rightarrow U_{\max}} \frac{\partial S}{\partial U} = 0$

Élimination terme linéaire: $f_1(t)Q + \frac{1}{2} f_2(t)Q^2 = \frac{f_1}{2} (Q + \frac{f_2}{f_1} t)^2 - (\frac{f_1}{f_1})^2 = \frac{1}{2} f_2 (Q - \frac{f_1}{f_2} t)^2$

Note: $Edu E = (q + dq)^2 / 2c \approx \frac{1}{2} dq \approx Tdq \text{ et } C = E_u E \cdot S/c ; dU = EdV ; \frac{\partial U}{\partial dV} = E$

Potentiel Thermodynamique: Transformation de Legendre "P" Partion de f_{ij}, \dots, y_n

on note $y_p = \left(\frac{\partial f}{\partial y_p} \right)_{y_1, \dots, y_{p-1}, y_{p+1}, \dots, y_n}$ partie de la fonction de variables

et $F = f - y_p y_p$ donc $dF = \frac{\partial F}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_n} dy_n$

potentiel usuel: libre de Helmholtz: $F(T, V, N) = U - TS - PV$

Enthalpie: $H(S, p, N) = U + PV$ Exemple: $U(S, x, N) ; G(T, x, N) = U - TS + PV$

Libre de Gibbs: $G(T, p, N) = U - TS + PV$ Exemple: $U(S, x, N) ; G(T, x, N) = U - TS + PV$

Grand pot: $\Omega(T, V, N) = U - TS - VN$ $(TS - XdX + YdY + ZdZ) + VN = TS - XdX - VN$

Lawell: $\Phi(T, x, v) = U - TS - Pv$ $\frac{\partial \Phi}{\partial T} = -S ; \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -V ; \frac{\partial \Phi}{\partial v} = P$ isotherme

Réponse: $C_{p,T} = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p$; meas: $X_T = -\frac{1}{T} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_{T,N}$ isotherme $\Delta H = \int_{T_1}^{T_2} C_{p,T} dT = \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p dT$

quantité fondamentale: Euler: $\left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \right)_j = \alpha_j$ si $y_i = \alpha_j$ $\Rightarrow f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha_1 f_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$\Rightarrow TS - XdX - YdY = U \rightarrow dy = -\frac{S}{N} dT + \frac{X}{N} dX \rightarrow$ Gibbs-Duhem

ultime: $\boxed{[1]} \rightarrow \Sigma \text{ constante}$ adiabatique Σ décrit par $\{U_1, \alpha_1, U_2, \alpha_2\}$ adiabatique $\rightarrow V_1, V_2$ liée

On a: $V = U_1 + U_2 \rightarrow \Sigma \text{ décrit par } \{U_1, \alpha_1, U_2, \alpha_2\} \rightarrow \{U, \alpha, \alpha_1, \alpha_2\}$

Nouvel état: $\left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_{\alpha_1, \alpha_2, U_1, U_2} = 0$ et $\left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_{\alpha_1, \alpha_2, U, \alpha} \leq 0$ avec $dS = dS_1 + dS_2 = 0 \rightarrow T_1 = T_2 \text{ à l'équilibre}$

Principe adiabatique: $\Sigma \rightarrow S_1 \text{ constante}$ on relâche contrainte $\Sigma \rightarrow Y$; $\Delta U = Q + W$, $\Delta S \geq Q/T_0$ et $\Delta U \geq \Delta S$; $\Delta(U - TS) \leq 0$

$\hookrightarrow A = U - T_0 S ; A(T_0, Y, U) \rightarrow \frac{\partial A}{\partial Y} = 0 \text{ et } \frac{\partial A}{\partial U} = 0 \rightarrow dA = 0 \rightarrow 0 = dU - T_0 dS$

$\Delta S = \frac{1}{T_0} dU + \frac{Y}{T_0} dY + \frac{1}{T_0} dy \text{; à l'équilibre } T = T_0 \text{ et } Y = 0$

Stabilité: pour $\left(\frac{\partial^2 A}{\partial S^2} \right)_U > 0$ min $\text{cat} \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_U > 0$; $C_{\alpha} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_U > 0$

intérieure: $C_{\alpha} > 0 ; X_T > 0 ; \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_U > 0 ; -\left(\frac{\partial X}{\partial T} \right)_{S,T \text{ au } q=0} < 0$

Concepts généraux sur un microsystème (système)

État macroscopique à "l'équilibre" → état défini par les valeurs propres de Σ

Grandeurs: Particule extérieure (ext), particule intérieure (int), fonction d'état (U, S, F) \rightarrow différentiel

Intensive (local); extensive (additive)

Équations d'état: Relation entre grandeurs à l'éq. Transformation, reversible, quasi-stationnaire, cyclo

Principe: Loi Zener: Si 2 Σ sont à l'équilibre avec 1 troisième \rightarrow équilibrage entre eux

Loi 1: Fonction d'état U (énergie interne additive) $\rightarrow \Delta U = Q + W \rightarrow dU = dQ + dW$

Travail: $\dot{T}U = \dot{F} \cdot \dot{dL}$ (meca)

Thermodynamique: $\sum X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum y_i \frac{\partial f}{\partial y_i}$ chaleur: $dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right) dT ; C_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{p,V}$

Principe: Loi 2: Il n'existe pas de transformation dont le seul effet est d'extraire une quantité de chaleur d'un réservoir \rightarrow et de la convertir entièrement en travail "Kol"

"Clausius": à une température donnée et de la livrer à un réservoir température plus élevée

Machine Thermique: a recevoir Q_1 --- $\frac{Q_1}{W}$ --- Q_2 rendant machine thermique:

Machine monotrope ne peut pas fournir de travail $W = -Q_2 = 1 + \frac{Q_1}{Q_2}$

Machine de Carnot: $1 \rightarrow 2 \text{ et } 3 \rightarrow 4: \text{ transfert isochore}$ $2 \rightarrow 3 \text{ et } 4 \rightarrow 1: \text{ transmission adiabatique}$

Inégalité de Clausius: $\Delta S = \phi \frac{dQ}{T_{ext}} \leq 0$ réversible, $\frac{dQ}{T_{ext}} = \frac{dS}{dQ}$

Entrapte: Si Σ évolue en état déstabilisé et on relâche contrainte intérieure, le Σ ne peut évoluer qu'en augmentant l'entropie (S est additive)

Loi 3: $S \xrightarrow{T_0} 0 \rightarrow 0$

Grandeur conjuguées: on a $dS = \frac{dU}{T_{ext}}$ et $dU = dQ + dW$! dU/dM si magnét

Exemples: $dS = \frac{1}{T_{ext}} dU \pm \frac{1}{T_{ext}} dV$ et $\frac{1}{T_{ext}} dV = \frac{dS}{dV}$ $\Delta S(T, H) \neq S(T, H)$

partie extensive/intensives: $\Sigma \triangleq \lambda \Sigma$ soit $\frac{\partial \Omega}{\partial I} / \lambda \Sigma \rightarrow \frac{\partial \Omega}{\partial I} / \lambda \Sigma \rightarrow \text{intensives}$

extensives: $I \triangleq I$ soit $\frac{\partial \Omega}{\partial I} / \lambda I \rightarrow \lambda \Omega / \lambda I / \lambda I \rightarrow \text{extensives}$

Transformations de Phases: Par Gibbs: $G = U - TS + \hat{\alpha} \bar{X}$; $G = E N_i y_i + \frac{p}{\hat{\alpha}}$

$\rightarrow \frac{\partial G}{\partial T} = \mu_i$ et $\frac{\partial G}{\partial p} = V$; regle du caractère: $\eta_i p = l + 2$; $\sum N_i^j = N \rightarrow \text{constante}$

Système PVT: compte épaulable (cas particulier) droite abscisse de phase abscisse chimique $\frac{1}{2} N_i^j = N^j$ (total)

Relation de Clapeyron (chaleur latente): $H = G + TS \rightarrow \Delta H = H^+ - H^- = (G^+ - G^-) + T(\frac{\partial G}{\partial T})$

One: $g = \frac{G}{N} ; dg = vdp - sdT ; v = \frac{V}{N} \text{ et } s = \frac{S}{N} \rightarrow$ le log de la carte de condensate

$\rightarrow \frac{dp}{dt} = \frac{S^+ - S^-}{V^+ - V^-} = \frac{T \Delta h}{T \Delta v} = \frac{l}{L}$ mole avec $h = H/N$ $l_{sub} = l_{vap} + l_{cond}$

Regle du Loup: $v_{\text{vap}} = \frac{v_{\text{vap}} + v_{\text{cond}}}{2}$ $\rightarrow \frac{v_{\text{vap}} - v_{\text{cond}}}{v_{\text{vap}} + v_{\text{cond}}} = \frac{v_{\text{vap}} - v_{\text{cond}}}{2v_{\text{vap}}}$

Équation d'état: $(P + \frac{(N)^2}{V}) (V - N) b = NRT$ $Q = nL$

Isotherme de VdW: pour diffusion (cas particulier)

Construction de Maxwell: pour diffusion (cas particulier)

On a: $g = g_B + \int_{P_1}^{P_2} v dt$ $\rightarrow \frac{P_2}{P_1} \frac{v_2}{v_1} = \frac{P_2 - P_1}{T_2 - T_1}$ isotherme; $\frac{P_2}{P_1} = \frac{v_2}{v_1} ; \frac{P_2^2}{P_1^2} = \frac{v_2^2}{v_1^2}$ $\rightarrow \frac{T_2 - T_1}{P_2 - P_1} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{P_2^2 - P_1^2}$ $T_2 = 8T_1$

Loi des états correspondants: $\frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1}{T_2} ; \frac{P_2}{P_3} = \frac{T_2}{T_3} ; \frac{P_3}{P_1} = \frac{T_3}{T_1}$ isotherme; $T = T_1$

Transition continue (para/ferro): $\frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1}{T_2} ; \frac{P_2}{P_3} = \frac{T_2}{T_3} ; \frac{P_3}{P_1} = \frac{T_3}{T_1}$ isotherme; $T = T_1$

Modèle de London: au voisinage de $T = T_c$ legendre

$A = U(S, H) - TS + dA = -SDT + \frac{1}{2} V H dM$ $(DS + SDT)$

$\rightarrow A(T, H) = A_0(T_c) + \alpha_2(T_c - T)^2 + \alpha_4(T_c)H^4$ $\frac{1}{2} V H dM = 0$

$T > T_c \rightarrow M = 0$ et $T < T_c \rightarrow M = \frac{1}{2} \frac{V^2}{2 \pi R T_c} (T_c - T)^2$ Approche phonovoltaïque

Etude des propriétés macroscopiques des solides à travers des grandeurs microscopiques

2 type de solide: cristallin: arrangement ordonné triplement périodique (ordre grade élevé)

(polycristallin, monocristallin)

amorphe: arrangement désordonné à grande distance

Forts: gazeux $\frac{8}{30}$ \rightarrow liquide $\frac{8}{30} \rightarrow$ solide $\frac{8}{30} \rightarrow$

Potential d'interaction (solide):

• liaison forte { covalente ionique métallique ; liaison faible: f Van der Waals pair non lié

covalentes: entre atomes électronegativité similaire - saturable et dirigée
ionique: entre atomes d'électronegativité différente - non saturable et non dirigée
metallique: délocalisation de é de conduction - entre atome perte électrons.

+ Van der Waals: Interaction dipôle-dipole

+ Hydrogène: Entre atome fort électrique + atome d'hydrogène

Empilement compact: relation entre potentiel d'interaction et ordre cristallin (considérez sphère dur)

Structure hexagonale: { empilement ABC

Structure cubique: { empilement ABC (cubique centré)

△ atom, molécule
Crystal = motif O + réseaux $\xrightarrow{\text{à}} \text{répetition périodique}$
△ peut avoir plusieurs réseaux possibles

Hypothèse de la cristallographie:

le cristal est infini (échelle micro), Agitation thermique négligeable, triplement périodique

Compteure: $C = \frac{\text{Volume}}{\text{Volume}} = \frac{1}{\text{Volume}} = \left(\frac{M_{11}v_1 - M_{12}v_2}{M_{12}v_1 - M_{22}v_2} \right) \frac{\text{premier voisin}}{\text{second voisin}}$
ab (regard/paille) plus dur (dépend arrangement) $d[100] = a \rightarrow$ densité de rangée

Réseau cristallin. Opération symétrique d'un cristal: translation: $\vec{t} = u\vec{a} + v\vec{b}$

direct: si O est le noyau d'origine: $\vec{OM} = u\vec{a} + v\vec{b}$ (u, v entiers)

(2D) surface d'une maille simple: $\vec{a} \wedge \vec{b}$
maille élémentaire: parallélépipède

(3D) relation: $\vec{O}M = u\vec{a} + v\vec{b} + w\vec{c}$: maille élémentaire: parallélépipède

(unité de maille) $M[100] = (\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c})h$ volume: produit mixte ($\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$)

3 types de maille multiple: base centrale (A, B ou C), face centrale (F), coin (I)

diracs: Rangée: droite passant par 2 noyaux: $[u, v, w]$ (400) (410) (420)

plan réticulaire: plan passant par 3 noyaux non collinéaires (hkl) (400) (410) (420)

reciproque: interviennent dans la description de la propagation de l'onde

= espace de vecteur d'onde $|k| = 1/\lambda$

• différence de marche: $d = (\vec{U}_d - \vec{U}_i) \cdot \vec{k}$
en phase si $d = n\lambda$

or $K_d = K_i = 1/\lambda$: on a $(\vec{U}_d - \vec{U}_i) \cdot \vec{k} = \vec{n}$

→ on introduit l'espace réciproque (non orthogone): $\begin{cases} \vec{a}^* \cdot \vec{a} = 1; \vec{b}^* \cdot \vec{b} = 1; \vec{c}^* \cdot \vec{c} = 0 \\ \vec{a}^* \cdot \vec{b} = 0; \vec{b}^* \cdot \vec{c} = 0; \vec{c}^* \cdot \vec{a} = 0 \\ \vec{a}^* \cdot \vec{c} = 0; \vec{b}^* \cdot \vec{a} = 0; \vec{c}^* \cdot \vec{b} = 0 \end{cases}$

→ $K_d = \vec{K}_i = u\vec{a}^* + v\vec{b}^* + w\vec{c}^*$

→ $OIV = h\vec{a}^* + k\vec{b}^* + l\vec{c}^*$

• On a: $a^* = q(b \wedge c)$; or $\vec{a} \cdot \vec{a} = 1 \rightarrow q(b \wedge c)a = 1$ soit $q = \frac{1}{V_0}$

on trouve: $a = (b^* \wedge c^*) / V_0$ avec $V_0^* V_0 = 1$ Indice de Plan:

Relations: $[hkl] \rightarrow (hkl)^* = h\vec{a}^* + k\vec{b}^* + l\vec{c}^*$ + plan commun entre rayons

$[h^*k^*l^*] \rightarrow (h^*k^*l^*)^* = h^*\vec{a} + k^*\vec{b} + l^*\vec{c}$ (hkl)

→ distance réticulaire: $1/d[hkl]^2 = (h\vec{a}^* + k\vec{b}^* + l\vec{c}^*)^2$; $d[hkl] = \frac{1}{(h\vec{a}^* + k\vec{b}^* + l\vec{c}^*)}$

Système cristallin plan: 5 systèmes possibles (cubique, rectangulaire, losange, hexagonal)

Tridimensionnel: 7: (triclinique, monoclinique, orthorombique, rhomboédrique, hexagonal, triclinique, monoclinique, orthorombique) ($a \neq b \neq c \neq 90^\circ$)

Orthorombique ($a \neq b \neq c$, $\gamma = 90^\circ$): $d[hkl] = 1 / \sqrt{\frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2}}$

Réseau de Bravais: réseau cristallin construit sur la maille multiple + système

(2D) oblique → oblique; losange + rectangle I - centrale; P = primaire $\rightarrow 1$

isométrie: transformation géométrique qui transforme un objet en un objet identique (D) ou en son image par un plan miroir (I) Indirect Direct

Opération: $D \times D = D$; $I \times I = D$; $\pm^n \times D^m = I$ ou D (la paire ou pas)

Type: Translation, Rotation, Symétrie / plan, Symétrie / point (inversion)

Roto-inversion: Composition rotation autour d'un axe et inversion / un point

→ inversion:
(roto-inversion de T de $2\pi/n$ par rapport à un axe perpendiculaire au plan)

→ on retrouve 3 isométrie: translation, rota-inversion, rotation

Opérations de symétrie: Isométrie qui laisse un objet invariant, à chaque élément de symétrie est associé un élément de symétrie.

• Rotation et axe d'ordre "n":
invariant par rot $\frac{2\pi}{n}$ → ordre 2
aut. $n \frac{2\pi}{m} = 2\pi$ → ordre m

• Roto-inversion sur axe d'ordre "n":
ordre 4 (rotée T4)

- Translation (objet infini et périodique): t opération de sym + nt l'est aussi

- Axe hélicoïdal: axe rotation + translation

- Miroir avec glissement: symétrie miroir + translation

Axe de rotation ordre n: $\vec{V}' = S \vec{V}$ élément de sym $V = h\vec{a} + k\vec{b} + l\vec{c}$

matrice rotation de $\frac{2\pi}{n}$: $A' = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{n} & -\sin \frac{2\pi}{n} & 0 \\ \sin \frac{2\pi}{n} & \cos \frac{2\pi}{n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{tr}(A') = \text{det}(A')$ déterm la rotation

→ axe compatible 1, 2, 3, 4, 6, 12, 18, 24, 36, ... (base $(0,0,1)$)

Roto-inversion: $S = -E A$ base (a, b, c)

Axe commun: équation des plans: $(2\pi)x + 2y - 3 = 0$
(2x) $x + 2y = 0$

Groupe ponctuel.

[S(O), t]: opération de symétrie d'un cristal: S(O) rotation ou roto-i; t = translation

La forme en groupe:

1) le produit de l'opération de symétrie est aussi une opération de symétrie

$\rightarrow (S, t)(S', t') \vec{O}_{T'} = (S, t)(S'(\vec{O}_T) + t') = S(S'(\vec{O}_T) + t') + t = (SS', St')$

2) Il y a un élément neutre (E, 0): $(E, 0)(S, t) = (S, t)$

3) Admet opération inverse; si $(S, t)^{-1} = (S', t')$ alors $(S', t')(S, t) = (E, 0) + \bar{S} = \bar{S}, t$

Table de multiplication: Pour pentagone, base rectangle $\begin{array}{c} A_2 \\ A_2 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_2 \end{array} \xrightarrow{\text{rotation A}} \begin{array}{c} M_1 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_2 \\ A \end{array}$ (base inversée)
+ élément de symétrie: rotation A (base inversée), miroir M₁, M₂ + identité A² = E

• ordre du groupe: nombre opérations distinctes \neq
→ commutatif si ab = ba \rightarrow ici on a un tableau symétrique

Definition: $(S(O), t)$ opération quelconque avec direction d → d' est la direction obtenue par l'applicat: $d' = (S(O), t)d = S(O)d$ (couplage de la translation)

Projection stéréographique: représentation dans un plan des directions givées de l'espace 3D:

Plan:
Pôle: $P_1(R, \theta, \varphi)$ → direction orientée vers "pôle" opposé
 $P_2(R, \theta, \varphi)$ → direction: Hord: O
 $P_3(R, \theta, \varphi)$ → Hord: X

Opération de symétrie:

rotation ordre n:
groupes cycliques: $\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}$

Notation de Hermann-Mauguin → 3 symboles

rotation: 1 2 3 4 6 12
roto-inversion: $\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}$

rotation: 1 2 3 4 6 12
roto-inversion: $\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}$

Groupe ponctuel (suite)

Dénombrément:

- groupe propre: conséquence d'opération de symétrie associé à un axe de rotation
 - groupe cyclique: op associé à 1 axe de rot An
 - groupe diédral: axe ordre n + axe ordre 2 ⊥ n22 si n pair ou n23: impossible
 - groupe cubique: axe ordre 2 ou 3 + axe ordre 3

groupe impropre: contient au moins 1 op impropre (rot-inv) + opérations propres

$$\text{notation: } G = \{E, S_1, S_2, \dots, S_n\} + \{I_1, I_2, \dots, I_m\}$$

sous groupe A $\{E, S_1, S_2, \dots, S_n\}$ (d'ordre n)

- contenant l'inversion: $A = I$

$$\rightarrow \text{deduit groupe cyclique: } G = \{1\} + I \{1\} = \bar{1} \quad \text{G} = \{2\} + I \{2\} = 2/m \quad \text{G} = \{3\} + I \{3\} = 3/m$$

\rightarrow deduit groupe diédral: 222 \rightarrow mmm; 32 \rightarrow $\bar{3}m$; 422 \rightarrow 4mm

\rightarrow deduit groupe cubique: 23 \rightarrow $m\bar{3}$; 432 \rightarrow $m\bar{3}m$

- ne contenant pas l'inversion: $A \neq I$; on a $G_{2n} = G_n + I \{k\}$

\rightarrow groupe $2n$ admet sous-groupe d'ordre n: les G_r "n"

\rightarrow groupe $n22$ admet sous-groupe d'ordre n: les G_r "n". $n=2p$ si n paire admet G_r "p22"

\rightarrow groupe 432 admet groupe 23 comme sous-groupe d'ordre n

$$2n \rightarrow n \quad \text{G}_n + I \{1\} = \frac{1}{2} \text{G}_{2n}$$

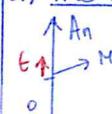
Groupe d'espace:

Ensemble d'opérations de symétrie laissant invariant la structure.
lien groupe ponctuel: $[S_i, t]$, t sous-groupe de G donc:

$$\begin{aligned} G_E &= T[S_1, t_1] + \dots + T[S_n, t_n] \quad \text{A n'est pas translation} \\ &= [S_1, t_1] + \dots + [S_n, t_n] \quad (\text{modulo } T) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \text{lien: } G_p = [S_1, 0] + [S_n, 0].$$

1) Axe hélicoïdal:



$$\text{rappel: } [S, t]^2 = [S^n, nt] = [E, nt]$$

Ordre An	1	2	3	4	6
Axe assoc	\emptyset	$2i$	$3;2$	$4;3$	$6;1$
Translation	\emptyset	$\bar{c}/2$	$\bar{a}\bar{c}/3$	$\bar{n}\bar{c}/4$	$\bar{n}\bar{c}/6$
Symbol	\emptyset	\mathcal{S}	Δ	$\bar{\Delta}$	$\bar{\Delta}$

2) 3 est une rototo-inversion d'ordre 2 (mirroir) et t est // au plan miroir \rightarrow miroir avec glissement

Opération de type $[m, t] \rightarrow [m, t]^2 = [m^2, mt+t] = [E, 2t]$ $t = a/2$ au

miroir + au plan de projection:

notation	symbole	translation	m	c	b
m	—	aucune	—	—	—
a, b	---	$a/2$ suivant proj	—	—	—
c	$a/2$ de c + proj	—	—	—
n	----	$a/2$ \perp projection	—	—	—

Réseaux: $I: T = (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})/2$; plan z \rightarrow position équivalente $(x, y, z + \frac{1}{2})$

$$F: T = (\bar{a} + \bar{b})/2$$

$$A: T = \frac{1}{2}(\bar{b} + \bar{c}),$$

$$B: T = \frac{1}{2}(\bar{c} + \bar{a}),$$

rappel: $A: \bar{b} \perp \bar{c}$; $B: \bar{c} \perp \bar{a}$; A et B sont \perp

Complément:

$$(FC \rightarrow CC): \vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}; \quad (CC \rightarrow P): \vec{A} = \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

Ordre de groupe: Nb direction \otimes Nb total d'opérations de symétrie (voir Table de multiplication)

Non commutativité des op: $m \times \vec{A} \neq \vec{A} \times m$ ligne \times colonne

Elément générateurs $\{A, m, n\}$ Op min pour observer proj stéréographique.

Nom Herman Morin:

\rightarrow plan de projection défini: $\perp \vec{c} \perp \vec{b} \perp \vec{a}$; $\perp \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

exemple: cube \rightarrow diag diag 3 voies pour cube

Amplitude diffracté: $A = F(\vec{q}) \sum_n e^{2\pi i \vec{t}_n \cdot \vec{q}}$; $\vec{t}_n = \vec{u} \vec{a} + \vec{v} \vec{b} + \vec{w} \vec{c}$

1^{er} cas: $q \in R$. Reciproque: $q = ha + kb + lc$; h, k, l entier; $A = NF(\vec{q})$

2nd cas: $q \notin R$. h, k, l non entier; $\sum e^{2\pi i(ha+kb+lc)}$ intérêtu

\rightarrow pour pouvoir écrire en \mathbb{Z} plutôt qu'en \mathbb{R} il faut que: $q(r) = \sum p_e S(r - r_e)$

$$F_{hk\ell} = P_E \sum_j e^{2\pi i q_j \cdot \vec{r}_{Ej}}; \quad \vec{r}_{Ej} = (a_j, b_j, c_j)$$

pour \vec{q} élévée à position équivalente

Condition d'extinction (destructive): $F_{hk\ell} = F_{hk\ell} \times F_{hk\ell} = 0$

Caractère: due au réseau: $P =$ pas d'extinction \rightarrow le maille + translation géométrique "sans \vec{q} "

rappel: $d_{hk\ell} = a / \sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$; $I: h + k + l$ impair (si $\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$ pair \rightarrow pas d'extinction)

$F = h, k, l$ de parité différente

Rapport enracine "raie" = d_n / d_{n+1} permet de retrouver réseau via diffraction

Δ il peut y avoir des extinctions du au motif, ne faisant pas apparaître des valeurs "d_{hkℓ}" dans le diffractogramme. Ex: diamant, extinction pour $h+k+l = 4n+2$

Rayons X: Interaction rayonnement-matière; $E = \hbar \omega$; $p = \hbar k$

relation Ec et λ : $p^2 = (E_0 + Ec)^2 - Ec^2$; $\lambda = hc/Ec$

Photon incident: sans interaction; absorption; transmission (effet photoélectrique)

Diffusion classique: "Modèle Thomson" ($P_{tot} = P_{int}$); incidence int: $E_0 = E_0 e^{-\int \vec{p} \cdot d\vec{H}}$ position: $\vec{p}(t) = -e \vec{z}(t) + \text{rayonement analogique dipôle oscillant}$ Champs rayonné: $E_p = -e^2 E_0 \sin \theta / 4\pi \epsilon_0 c^2 r^2$ int: $\vec{e}_0 \perp \vec{p}$ (limite $r \gg \lambda_{inc}$)

2 électrons distants de r : champs d'électrons: dipôle rayé: $\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} s$

différence de marche $\delta = r_{1p} - r_{2p} = 2\pi \vec{q} \cdot \vec{r}$ avec $\vec{q} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2$

Distribution de charge $p(r)$: $A = A_0 \iiint_V p(r) e^{i\vec{p} \cdot d\vec{V}}$

Diffusion par un atome: $A = A_0 \iiint_{\text{Atom}} p(r) e^{i\vec{p} \cdot d\vec{V}} = A_0 \iiint_{\text{Atom}} p(r) e^{i2\pi \vec{q} \cdot \vec{r}} d\vec{V}$

cylindre $dV = 2\pi r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ $d\Phi = 2\pi r q \cos \theta$ et $q = \frac{2}{\lambda} \sin \theta$

$$A = A_0 \int_0^\infty p(r) dr \int_0^{2\pi} e^{i2\pi q \cdot \vec{r}} d\theta \int_0^\pi \sin \theta d\phi \text{ Facteur de diffusion}$$

Diffusion par le cristal: $A = \iiint_{\text{maille}} p(r) e^{i2\pi \vec{q} \cdot \vec{r}} dV = \sum_{n=1}^N e^{i2\pi \vec{q} \cdot \vec{r}_n}$ Fonction "I" d'Interférence

atome "i" au point r_i : $F(q) = \iiint_{\text{maille}} p(r - r_i) e^{i2\pi \vec{q} \cdot \vec{r}} dV = \sum_{j=1}^N p(r_j - r_i) e^{i2\pi \vec{q} \cdot \vec{r}_j}$

Intensité diffracté: $|A|^2 \propto |F(\vec{q})|^2$

$\rightarrow \vec{q} \cdot \vec{t}_n \notin \text{entier } \mathbb{Z} \Rightarrow F(\vec{q}) = 0$; $\vec{q} \cdot \vec{t}_n \in \text{entier } \mathbb{Z} \Rightarrow \vec{q} = \vec{h} + \vec{k} + \vec{l}$

$\rightarrow \vec{q} \in \text{Réseau Reciproque} \rightarrow A = NF_{hk\ell}$; loi de Bragg: $2d_{hk\ell} \sin \theta = n\lambda$

Généralité et résultats:

relativité: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ; E = \gamma m c^2$; $T = (\gamma - 1) m c^2$; $P = \sqrt{\gamma^2 - 1} m c$

matrice: $L_n = n \hbar$; $r = a n^{\frac{3}{2}}$; $E_n = -\frac{E_1}{n^2}$; $n_b e = 2 n^2$; $a = \frac{\hbar^2}{m e^2} = 0.514$ (action)

Postulat: $1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}$

Etat $|\Psi(t)\rangle$; densité de proba $|\Psi(r,t)|^2 = \frac{d\rho(r)}{dr}$

réalisation $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(r,t)|^2 dr = 1$; produit scalaire $\langle \Psi | \Psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(r,t)^* \Psi(r,t) dr$

Base: x, p ; $\Psi(p) = \langle p | \Psi \rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(r,t) e^{-ipr/\hbar} dr$

Gradien mesureable $\hat{A} \rightarrow A|\Psi\rangle$; si observable $A = A^+ = (A^*)^*$

Opérateur $A|\Psi(t)\rangle = a|\Psi(t)\rangle$, A opérateur "observable"; a : valeur propre

Probabilité $P(an) = \sum_{i=1}^{an} |\langle u_i | \Psi \rangle|^2$ fonction propre de A ; $|u_i\rangle = an|u\rangle$ amplitude de probabilité

Opérateur $|\Psi'\rangle = P_i |\Psi\rangle \frac{1}{\sqrt{P(an)}}$; P_i : opérateur de projection = $|u_i\rangle \langle u_i|$

Équation de Schrödinger: $H|\Psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle$

Opérateur d'énergie: $H = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(r,t) + V(r) \Psi(r,t)$

Opérateur d'impulsion: $X = X^+$; $P = P^+ = \hbar \frac{\partial}{\partial X}$

Opérateur d'hermitien: $A|\Psi\rangle = |\Psi\rangle \Rightarrow \langle \Psi' | = \langle \Psi | A^+ = \langle \Psi | A$ (cas où A hermitien)

Si $A = A^+$, $\langle \Psi | A | \Psi \rangle = \langle \Psi | A | \Psi \rangle^*$, rappel: $V \cdot W = V^t \cdot W(\frac{1}{2})$

Si $A = A^+$ et $B = B^+$ alors $\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$ avec $\langle u | w \rangle \leq 1$

Opérateur H: $H = H^+ \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x,t) = H\Psi(x,t)$

Opérateur d'évolution: $U = e^{-iHt}$ $\rightarrow \Psi(x,t) = U \Psi(x,0)$

Commutateur: $[A, B] = AB - BA \rightarrow [x, p] = i\hbar$, $\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$

Théorème fint opérateur: $\langle [A, [A, B]] \rangle = \langle [B, [A, B]] \rangle = 0$

de: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors $[A, f(B)] = [A, B] \frac{\partial f(B)}{\partial B}$

Théorème d'Einstein: $\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [A, H] \rangle + \langle \frac{\partial A}{\partial t} \rangle$

! A(|\Psi\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}

image matriciel: Base continue: $\int |x\rangle \langle x| dx = 1$ et $\langle x|x\rangle = \delta(x-x')$

! B: $\sqrt{n} = (e^{\frac{i\pi n}{2}})^k$ Base discrète: $\sum_{i,j} |u_i\rangle \langle u_j| = 1$ et $\langle u_i|u_j\rangle = \delta_{ij}$

matrice \rightarrow combinaison linéaire $A|u\rangle = \sum_{j=1}^{n_b} (p_j u_j)$

vecteur propre $\det(A - \lambda I) = 0$ et vecteur propre $(A - \lambda I)|v\rangle = 0$

opérateur rotation: $R_{ij} = (k|i)(j|k)$ Rotation II: $R_{ij}^2 = -1$ si $i \neq j$

fonction de potentiel: $\psi(x) = A \psi(x) e^{i\omega t}$ - H indépendant du temps + 1 dimension

amplitude incidente: $\psi(x) = E \psi(x)$. Solution $\psi(x) = \int A(R) e^{i\omega t} dk$

postulat: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx = E \psi(x)$

approximation: $\psi(x) = \frac{1}{D\hbar} e^{\frac{i\omega x}{\hbar}}$ si amplitude non harmonique + une de Fourier car sinon $\int |\psi(x,t)|^2 dx \rightarrow \infty$

exemple: $\psi = \psi_I + \psi_{II}$

Condition sur les singularités de I et II : $\psi_I = \frac{C_1}{x} e^{ikx}$ et $\psi_{II} = C_2 e^{ikx} + C_3 e^{-ikx}$

Zone I: Solution $\psi_I = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$; $k = \frac{2\pi E}{\hbar}$

Zone II: Solution $\psi_{II} = C e^{ikx} + D e^{-ikx}$; $k = \frac{2\pi E}{\hbar}$ pour Amplitude

en amplification: $A = 1$; $B = Ar = r$; $C = At = t$; $D = 0$

rapport: $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$

effet tunnel: $r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$; $t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$; $T = |t|^2 / |r|^2$

On pose $\psi(x)$ dans l'équation pour trouver $E(x)$ dont $R + T = 1$

Théorème de Potentiel (Langmuir): 3 zones $\rightarrow T_A e^{-\alpha x} + C = 0$ effet tunnel

Condition d'onde: $0 \leq E < V_0$ solution: $\psi_{II} = C e^{2kx} + D e^{-2kx} \rightarrow C = 0$ direct

3 dimensions: $U = 0 \rightarrow \infty \rightarrow H = H_x + H_y + H_z \rightarrow 3$ quantité exclusive

3 dimensions: $E_{111} = E_{111} = E_{112} = E_{112}$ si $ax = ay = az$ non couplé

Indépendance du temps: $\psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) \chi(t)$

Équation aux dérivées partielles: $\psi(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z)$

Équation aux dérivées partielles: $\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x) + \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} Y(y) + \dots \right) = E_x + E_y + E_z \rightarrow$ étude séparée

solutions: $E_{nx} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \frac{n_x^2}{a_x^2}$; $\psi(x) = X(x) = \sqrt{\frac{2}{a_x}} \sin(n_x \frac{\pi x}{a_x}) \rightarrow$ solution à l'échelle via constante + CI

Système à 2 niveaux: $E \uparrow$ à 2 niveaux E_1 et E_2 à 2 niveaux E_1 et E_2 à 2 niveaux

base: $|E_1\rangle$ et $|E_2\rangle$ \rightarrow $H = |E_1 \ 0 \ 0 \ E_2|$; $W = |W_{11} \ W_{12} \ W_{21} \ W_{22}|$

couplage: $H = H_0 + W$

équation: $\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^*(x) \psi_2(x) dx = 0 = |\Psi_1| \cdot |\Psi_2| \cos \theta$

diagonalisation: $H = |E_1 + W_{11} \ W_{12} \ W_{21} \ E_2 + W_{22}| \rightarrow$ vecteur propre $|SAS^{-1}|$

vecteur propre: $|E_{\pm}\rangle = \alpha |E_1\rangle + \beta |E_2\rangle$ avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ soit $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

valeurs: $E_{\pm} = E_1 + E_2 + W_{11} + W_{22} \pm \sqrt{(E_1 - E_2 + W_{11} - W_{22})^2 + 4W_{12}^2} + W_{12}$

réponse non au système

On pose: $W_{11} = W_{22} = 0 \rightarrow E_{\pm} = E_m \pm \sqrt{E_d^2 + |W_{12}|^2}$

major: $E_m = E_1 + E_2$ et $E_d = E_1 - E_2$ (différence)

minimisation: minimisation de l'énergie pour rechercher E_m^2

! $|\Psi(t)\rangle = U|\Psi(0)\rangle = U|\Psi_1\rangle = U e^{i\frac{\omega}{2} (\cos \frac{\theta}{2} |E_1\rangle - \sin \frac{\theta}{2} |E_2\rangle)}$

! $U = e^{-iHt} = \sum_n (E_n)^n H^n$ \downarrow \leftrightarrow propagation sur les états propres $|\Psi_1\rangle$ et $|\Psi_2\rangle$

! $|\Psi(t)\rangle = e^{i\frac{\omega}{2} (\cos \frac{\theta}{2} e^{\frac{iE_d t}{\hbar}} |\Psi_1\rangle - \sin \frac{\theta}{2} e^{\frac{-iE_d t}{\hbar}} |\Psi_2\rangle)}$

Système 2-particles: Système particule en 2D \uparrow état électronique

Spin: Fermion Spin $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ (anti-correlé) \uparrow état tressé $\{\psi(x, t) \otimes \text{Spin}\}$

Posion: Spin 0, 1, 2, ... (entre) $\{\psi(x, t) \otimes \text{Spin}\}$

Sz: $\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$; $S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\vec{S} = \begin{pmatrix} \vec{S}_x \\ \vec{S}_y \end{pmatrix} = \vec{L}$

! $S_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ \uparrow état électronique

UVTI mathématique et formalité.

Triplet proba.: (Ω, \mathcal{B}, P) ; fond de partition: $F(x) = P(X \leq x)$

$dF = f(x)dx = P(x < X < x+dx)$; Densité de proba: $f(x) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{F(x+dx) - F(x)}{dx}$

Moyenne: $\bar{A} = \int_{\Omega} A(x)f(x)dx$; Développement: $\begin{aligned} &\text{permis: } C_n \\ &\text{arrangement: } A = \frac{n!}{p!(n-p)!} \end{aligned}$

Stirling: $(n > 10)$, $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$; loi grande nombre: $\sum_{i=1}^n x_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{X}$; $\Delta x = \frac{\bar{x}}{N}$

Théorème central limite: $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left[\left|\frac{\sum x_i - n\bar{x}}{\Delta x \sqrt{n}}\right| < b\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ loi normale

Entropie: $S = -k \sum_{i=1}^N p_i \ln p_i$; $(\ln(n!) = n\ln(n) - n)$

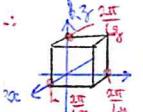
Description système macro: $i \in \Omega | \Psi = H|\Psi\rangle \xrightarrow{\text{op}} H|\Psi_e\rangle = E|\Psi_e\rangle$

Postulat mesure: $P(a) = |\langle a|\Psi\rangle|^2$; $A|a\rangle = a|a\rangle$ (MQ).

(PhysStat) $\bar{A} = \sum_{\Omega} P_{\Omega} \langle \Psi_{\Omega} | A | \Psi_{\Omega} \rangle$ avec $P_{\Omega} = P_{\Omega} \text{ et } P_{\Omega} A_{\Omega} = P_{\Omega} (E_{\Omega})$

$\bar{A} = \sum_{\Omega} P_{\Omega} (E_{\Omega}) g(E_{\Omega}) \xrightarrow{\text{continu}} \int_0^{+\infty} dE p(E) f(A|E)$. Densité d'état: $p(E) = \frac{d\phi}{dE}$

'article masse m dans volume V': $H = \frac{P^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta$; $\Psi(x,t) = \Phi(x) e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$

\therefore  Separation variable: $\Psi(\vec{x}) = X(x_1)Y(x_2)Z(x_3) + 3 \text{ équations}$

$\Psi(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i(\hbar k_1 x_1 + \hbar k_2 x_2 + \hbar k_3 x_3)}$; $E_x = E_y = E_z = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

$\phi(E) = \frac{\text{Volume sphère rayon } k}{\text{Volume élémentaire}} = \frac{\frac{4}{3}\pi k^3}{8\pi^3/3} = \frac{V}{3} \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}$

Gaz parfait sans spin N partiel dans V: $H = \sum_i^N \hbar i; E = \sum_i^N E_i; E_i = \frac{\hbar^2 k_i^2}{2m}$

$\phi(E) = \frac{\text{Volume sphère dans un espace de dimension } 3N}{\text{Volume élémentaire d'une maille}} = \frac{S_{3N}(r)}{(8\pi^3)^N}$

$S_N(r) = \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(\frac{N}{2} + 1)}; \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} dt [e^{-t} t^{x-1}]$ propriété: $\Gamma(1) = 1; \Gamma(n+1) = n!$

$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$

$\rightarrow \phi(E) = \frac{d\phi}{dE} = \frac{2N}{2} \left(\frac{m}{8\pi^3 \hbar^2}\right)^{3N/2} \cdot \frac{V^N}{\Gamma(\frac{3N}{2} + 1)} \cdot E^{3N/2-1}$ Approximation Maxwell-Boltzmann: $\frac{1}{(N!)^2}$ particule indiscernable

Statistique quantique: (sous Σ identique = particule identique)

Fermions: $\xi_{\lambda}^F = \sum_{N_A} e^{-\beta N_A (E_{\lambda} - \epsilon)} = 1 + e^{-\beta(E_{\lambda} - \epsilon)}$ ordre 0

No moyen d'occupation: $\bar{N}_{\lambda}^F = \frac{1}{\beta} \partial_{\epsilon} \ln \xi_{\lambda}^F = \frac{1}{e^{\beta(E_{\lambda} - \epsilon)} + 1}$

Bosons: $\xi_{\lambda}^B = \sum_{N_A=0}^N e^{-\beta N_A (E_{\lambda} - \epsilon)} = \sum_{N=0}^{\infty} q^N$ si N fini: $\frac{1-q^{N+1}}{1-q}$ si N → ∞: $\frac{1}{1-q}; q < 1$

nb moyen d'occupation: $N_{\lambda}^B = \frac{1}{\beta} \partial_{\epsilon} \ln \xi_{\lambda}^B = \frac{1}{e^{\beta(E_{\lambda} - \epsilon)} - 1}$

Maxwell-Boltzmann: $\bar{N}_{\lambda}^{MB} = e^{-\beta(E_{\lambda} - \epsilon)} \rightarrow \Xi_{\lambda}^{MB} = e^{-\beta E_{\lambda}} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{q^N}{N!} \psi(N)$ absolue $\bar{N}_{\lambda} \ll 1$ 1^{er} ordre d'où $\Xi^{MB} = q^N/N!$

Gaz de Fermi: Fonction: $F^F(E) = \frac{1}{e^{\beta(E-4)} + 1}$ limite continue de N A

grandeur et limite thermique: $N = \int_0^{+\infty} dE p(E) F^F(E)$ avec $p(E) = \frac{(2s+1)(2m)}{(2\pi^2)^{3/2}} \frac{1}{\hbar^3} \frac{1}{V^3}$

$J^F = \frac{1}{\beta} \sum_{\lambda} \ln(1 - \bar{N}_{\lambda}^F); P = -\left(\frac{\partial J}{\partial V}\right)_{T, \epsilon} = \frac{2}{3} \frac{E}{V}$

Temperature de Fermi: $E_F = \hbar \omega_T \rightarrow T_F = \epsilon_F \approx T \ll T_F$

Gaz de Bose: Fonction: $F^B(E) = \frac{1}{e^{\beta(E-4)} - 1}$ I⁰ AV

grandeur et limite thermique: $N = \int_0^{+\infty} dE p(E) F^B(E)$ avec $p(E) = AV \epsilon^{1/2}$

lien I: $\epsilon = \beta E \rightarrow N = \frac{AV}{\beta^{3/2}} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{1/2}} \frac{e^{-\beta x}}{(e^{\beta x} - 1)} = I^0(\beta)$

Note: Zeta de Riemann: $\zeta(y+1) \cdot \Gamma(y+1) = \int_0^{+\infty} dx \frac{e^{-x}}{e^{-y-x}}$ → $I^0(\beta) = \frac{N}{AV} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{3/2}$

Temperature de Bose: $T > T^B$: $P = -\left(\frac{\partial J}{\partial V}\right) = \frac{2}{3} \frac{E}{V}$

T < T^B divergence de N: $\frac{N}{V} \sim 1 \left(\frac{1}{T_B}\right)^{3/2}$ (fraction particule condensée)

Ensemble canonique

Moyenne temporelle: $\bar{A} = \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt$; Probabilité d'état: $\alpha = \frac{P_{\Omega}(t)}{n} = P_{\Omega}$ (prob. d'occ)

Value moyenne: $\bar{A} = \sum_{\Omega} P_{\Omega}(t) A_{\Omega}$; Équilibre: $dP_{\Omega}/dt = 0$

Hypothèse ergodique: Moyenne temp = Moyenne d'ensemble

Paramètre extérieur: Fixé à Δ près ($E \pm \Delta E$); variable interne: Fluctuent autour de \bar{A}

Ensemble microcanonique: Isolé à l'équilibre, E fixé à ΔE près

Postulat équi-probabilité: $P_{\Omega} = \frac{1}{\Omega(E)}$ si $E \leq E_{\Omega} \leq E + \Delta E$; $P_{\Omega} = 0$ sinon

Variable indépendante: E, N, V ou B ; Fonction y: nombre d'état Σ ; potentiel: entropie S

Entropie canonique: $S^c = -k \sum_{\Omega} P_{\Omega} \ln P_{\Omega} = +k \sum_{\Omega} \frac{1}{\Omega} \ln \Omega = k \ln \Omega$ Pi

Ω(E) = p(E) dE $\rightarrow S^c = k \ln p(E)$ (rappe: S extensive: $S(Ap) = \lambda S(E)$)

Sakur-Tetrode (GP sans spin): $S = k N \left[\ln \frac{V}{N} + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{m E}{3\pi^2 k N} \right) + \frac{3}{2} \right]$ discernable $\rightarrow E = \frac{3}{2} N k T$; $PV = N k T$ indiscernable

Distribution stat de variable internes: $dF = \frac{w(y) dy}{e^{-\beta E}} = f(y) dy$ avec $w(E, \alpha; y)$ est varia

Entropie partielle: $S = k \ln w(y) \rightarrow f(y) = e^{-\frac{1}{k} (S(y) - S^c)}$

DL de S(y) aux voisins de y_m (+probable): $f(y) = f(y_m) e^{-\frac{(y-y_m)^2}{2\sigma^2}}$ génom gau σ² = 1/k

Relâchement contrainte \rightarrow second principe Thermo:

→ système partiellement couplé: $H = H_1 + H_2 + H_3$ caractère équilibre Σ / Ω

$w(E; E_1) dE_1 = p_1(E_1) dE_1 \cdot p_2(E_2) dE_2 = p(E_1) p(E-E_1) dE_1 dE_2$

Jacobien: $dE_1 dE_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial E_1} & \frac{\partial E_1}{\partial E_2} \\ \frac{\partial E_2}{\partial E_1} & \frac{\partial E_2}{\partial E_2} \end{vmatrix} dE dE_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} dE dE_1 = dE dE_1$

avec $dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx$

Ensemble canonique: T fixé, Ω en contact avec thermostat \mathbb{T} ; $(\Sigma + \Omega)$ isolé

à l'équilibre: $T_{\mathbb{T}} = T_{\Omega} = T$

Variable indépendante: T, N, V ou B ; Fonction y: partition com Σ ; potentiel: énergie libre F

Définition: $P_{\Omega} = \frac{\text{Nb état } \Omega_{\text{tot}}/\Sigma}{\text{Nb état } \Omega_{\text{tot}}} = \frac{\Omega_{\Omega}(E_{\Omega} = E_{\text{tot}} - E_{\Omega})}{\Omega_{\text{tot}}} = C \cdot e^{-\beta S(E_{\Omega})}$

avec $S = k \ln \Omega \rightarrow P_{\Omega} = \frac{1}{\Sigma} e^{-\beta E_{\Omega}}$ avec $\beta = \frac{1}{kT}$ normalisation Σ P_{\Omega} = 1

surt fonction de partition: $Z = \sum_{\Omega} e^{-\beta E_{\Omega}} = \int_0^{+\infty} p(E) e^{-\beta E} dE$ (Approx continu)

E = -\partial \ln Z (normalisation) $= \sum_{\Omega} g(E_{\Omega}) e^{-\beta E_{\Omega}}$; g la dégenerance

Entropie canonique: $S = -k \sum_{\Omega} P_{\Omega} \ln P_{\Omega}$ soit l'énergie libre: $F = \bar{E} - TS = \frac{-1}{k} \ln Z$

Distribution P(y) = Σ P_{\Omega}: $\int_0^{+\infty} p(E) e^{-\beta E} dE = p(E) dE e^{-\beta E} = F = F_1 + F_2$

DL au voisinage de E_m : $p(E) = f(E_m) e^{-\frac{(E-E_m)^2}{2\sigma^2}}$ normalisée par $f(E_m) = \frac{1}{\sqrt{\pi \sigma^2}}$

Système de sous- Σ indép: $H = \sum_i h_i$

- cas discernable: factorisation de Z : $Z = \sum_{\Omega} e^{-\beta E_{\Omega}} = \left(\sum_{\lambda} e^{-\beta E_{\lambda}}\right)^N = \prod_{\lambda} Z_{\lambda}$ particule individuelle
- cas indiscernable: $E_{\Omega} = \sum_{\lambda} N_{\lambda} E_{\lambda} \rightarrow$ Max-Boltz: $\prod_{\lambda} \frac{N_{\lambda}!}{N!} = \frac{1}{N!} \rightarrow Z = \frac{N!}{N^N}$

Ensemble grand canonique: $\Sigma_{\text{tot}} = R + \Sigma$ avec $R = \mathbb{T} + \mathbb{V}$ ↔ réservoir public

variable indép: T, \mathbb{T}, V ou B ; Fonction y: partition grand can \mathbb{V} ; potentiel: "grand" J

Prob: $P_{\Omega} = C \exp\left(\frac{1}{k} (S^c(E_{\Omega}, N_{\Omega}) - E_{\Omega} + \frac{1}{4} N_{\Omega})\right) = C \exp(-\beta(E_{\Omega} - \epsilon N_{\Omega}))$

normalisation \rightarrow fonction de partition: $\Xi = \sum_{\Omega} \exp(-\beta(E_{\Omega} - \epsilon N_{\Omega}))$ et $C = \frac{1}{\Xi} e^{\beta \bar{E}}$

Distribution: $\bar{N} = \sum_{\Omega} N_{\Omega} P_{\Omega} = \frac{1}{\beta} \partial_{\epsilon} \ln \Xi$; $\partial_{\epsilon} \ln \Xi = \bar{N} - \bar{E} \Leftrightarrow \bar{E} = \frac{1}{\beta} (\bar{y} \partial_{\epsilon} \bar{y} - \partial_{\epsilon} \bar{y} \bar{y}) \ln \Xi$

Grand potentiel: $J = \bar{E} - TS - \bar{y} \partial_{\epsilon} \bar{y}$

Limite Thermodynamique: $\Xi = \sum_{N=0}^{+\infty} e^{\beta y N} Z(N, T) \xrightarrow{\text{continu}} \int_0^{+\infty} e^{\beta y N} Z(N, T) dN$

avec $F = -\frac{1}{\beta} \ln Z$ et en DL $F(N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \Xi = e^{-\beta(F(T, N) - yN)} \cdot \sqrt{2\pi e^{\beta y^2}}$

surt à la limite: $S_{\Omega} = S_c = S^c$

Factorisation de Ξ : $\Xi = \sum_{\lambda} e^{-\beta(E_{\lambda} - \epsilon N_{\lambda})} = \prod_{\lambda} \frac{N_{\lambda}!}{N_{\lambda}^{N_{\lambda}}} e^{-\beta E_{\lambda}}$

$\Xi = \prod_{\lambda} \left(\sum_{N_{\lambda}=0}^{+\infty} e^{-\beta E_{\lambda}} \right) \rightarrow$ grande fct de partition individuelle

Note: en magnétisme: $H_{\text{ext}} = -\mu_B E$; $X = \frac{1}{V} \lim_{B \rightarrow 0} \frac{\partial \bar{E}}{\partial B}$; oscillateur: $E_{\text{osc}} = \frac{\hbar^2}{8m} \frac{v^2}{L^2}$

renormal: $\sum f(n\delta\epsilon) = \frac{1}{\delta\epsilon} \cdot \delta\epsilon \sum f(n\epsilon)$ pour 1D

Mécanique: $\sum F = m \cdot a$; $\vec{OM} = p(t) \vec{u}_p$; $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{P}_{ext} \Rightarrow \vec{u}_p = \vec{u}_0 + \vec{v}_p$ (continuité = 0; orthogonalité = 1)

Monant couple: $\frac{dL}{dt} = \vec{J} \cdot \vec{\omega} = \sum \vec{M}$; $\vec{M} = \vec{OM} \wedge \vec{F}$; $|M| = |\vec{OM}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin(\varphi)$

$\vec{F} = m \vec{a}$; $J_a = J_{ref}^2 \cdot \sum m_i^2$; $\Delta E_F = -W_{ext} = - \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l}$; $\vec{F} = -\text{grad } \Phi$

Electrochimie: $i = C \frac{du(t)}{dt}$; $u = L \frac{di(t)}{dt}$; $q = Cu(t)$; $u = r_i(t)$

$(d) = R \sqrt{L \cdot C}$; $E = (R \cdot i(t)) \cdot L = \frac{1}{2} C u^2 = \frac{1}{2} L i^2$; $E = \frac{1}{dt} \Phi \Rightarrow \Phi = L \cdot i(t)$

$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$; $\Phi = B \cdot S \cdot \cos(\varphi)$; $\vec{F} = q \vec{E} + q v \vec{B}$

Force, Friction, Couple: $\Psi = 2M \cdot \ln \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_2}{r_3} \cdot \frac{r_3}{r_4} \cdot \frac{r_4}{r_5}$

Ressort: $\vec{T} = -k(x - x_0) \vec{u}_x$; Fil de Torsion: $\Gamma = -C(\theta_B - \theta_A) \vec{u}_\theta$

Frottement solide: $|R_f| = \mu |R_n|$; Frottement visqueux: $\vec{f} = \gamma (\vec{v}_M - \vec{v}_F)$

= frottement → oppose au mouvement → oscillations; à l'équilibre $T_f = mg$

Loye des gaz parfaits: $PV = nRT$

$\frac{dP}{dt} = \alpha \frac{dV}{dt}$ → $dP = \alpha V \frac{dV}{dt}$ → $dV = \frac{dP}{\alpha V}$ → $\Delta V = S \cdot \Delta t$ → $\Delta P = -\alpha P S \frac{\Delta t}{V}$ → $F = S \Delta P = -\alpha P_0 S \frac{\Delta t}{V} = m \cdot a$

Équation différentielle: $a(H)x' + b(t)x = 0 \Rightarrow g(t) = R e^{-G(t)}$; $G' = \frac{b(t)}{a(t)}$

$a x'' + b x' + c x = 0$ $\Delta > 0 \rightarrow$ périodique: $f(t) = \lambda e^{i\omega t} + 4 e^{i\omega t}$

$a x'' + b x' + c x = 0$ $\Delta = 0 \rightarrow$ critique: $f(t) = (\lambda t + 4) e^{i\omega_0 t}$

$a x'' + b x' + c x = 0$ $\Delta < 0 \rightarrow$ périodique: $f(t) = (\cos \beta t + i \sin \beta t) e^{i\sqrt{\Delta} t}$

isométrisme: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$; $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$u = \sin/cos$; $v = \cos/\sin$; $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

équivalence limite: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \Rightarrow a=0$

oscillateur couplé:

cas général (sans frottement): $a \ddot{\Psi}_1 + c (\Psi_1 - \Psi_2) = 0$; $a \ddot{\Psi}_2 + c (\Psi_2 - \Psi_1) = 0$ → On pose

$\Psi_1 = X_1 e^{i\omega t}$; $\Psi_2 = X_2 e^{i\omega t}$

→ on annule les $e^{i\omega t}$ puis on pose l'égalité X_1/X_2 pour avoir la forme:

$\det \begin{pmatrix} \frac{a}{X_1} - \omega^2 & -c/a \\ -c/a & \frac{c}{X_2} - \omega^2 \end{pmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$ (pour simplifier)

$\frac{c}{X_2} = S$ système rég. linéaire; $= 0$ (condition de couplabilité)

, $\omega^2 = \lambda$ pour le calcul des valeurs propres → on retrouve 2 valeurs propres: $\omega_1, \omega_2 = \sqrt{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}} / 2a$

→ $\omega_1 = \sqrt{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}} / 2a$ → en phase; $\omega_2 = \sqrt{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}} / 2a$ → en opposition de phase

on pose dans une équation les valeurs propres (via à une) → on trouve Ψ_1 et détermine le rapport entre X_1 et X_2

→ solution: $\Psi_1(t) = A_1 e^{i\omega_1 t} + B_1 e^{i\omega_2 t}$

cas symétrique: Passage variable normale découplé: $\Psi_t = \Psi_1 + \Psi_2$ (some 2x2); $\Psi_t = \Psi_1 - \Psi_2$ (différence); $\Psi_t = \Psi_1 + \Psi_2$ → $\Psi_t = \Psi_1 - \Psi_2$ → $\Psi_t = (\Psi_1 + \Psi_2)/2$; $\Psi_t = (\Psi_1 - \Psi_2)/2$

cas反对称: On applique les solutions transitoires mais on prend en compte la solution particulière en la posant dans l'équation

et retrouve



Énergie: $Q = 2\pi \langle E_m \rangle$; $\langle E_m \rangle = \langle E_p \rangle + \langle E_c \rangle$

(Forçage) harmonique: $\langle P(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt$

Amplitude de résonance: On pose $A_0 e^{i\omega t} = y$ dans l'équation: $\ddot{y} + \omega_0^2 y = \frac{1}{m} \int_0^T P(t) dt$

Rappel: forme oscillatoire harmonique: $\ddot{\Psi}(t) + 2\zeta \omega_0 \dot{\Psi}(t) + \omega_0^2 \Psi(t) = P(t)$

Déphasage réponse/forçage: $\tan \varphi = \frac{Im(A_0)}{Re(A_0)}$

Portrait de Phase: $\dot{\Psi} = f(\Psi) \rightarrow \text{élimination } \dot{\Psi}: \frac{\Psi^2}{A} + \frac{\dot{\Psi}^2}{B} = 1$

Periodique: ellipse; $\Delta \omega = 0$; $E = 0$

Pseudoperiodique: spirale; $\Delta \omega \neq 0$; $E \in]0; 1[$

Aperiodique: $\Delta \omega \geq 0$; $E \geq 1$

Phénomène non linéaire: $\Psi \rightarrow$ doublement de fréquence $\omega \rightarrow 2\omega$

$\Psi \rightarrow$ intermodulation $\omega \rightarrow \omega_1 + \omega_2$

Rappel: les conditions initiales permettent de trouver la forme des amplitudes

Champs d'oscillateurs:

Cas présent: $\ddot{\Psi}_n + 2\omega_0^2 \Psi_n + \omega_0^2 (\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1}) = 0$

cas limite: $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n = -k(\Psi_n - \Psi_{n-1}) - k(\Psi_n - \Psi_{n+1}) - \frac{mg}{k} \Psi_n$ à l'équilibre $\vec{T} = 0$

Periode: $\Im \Theta_n = mg \Theta_n \sin \Theta_n - C(\Theta_n - \Theta_{n-1}) - C(\Theta_n - \Theta_{n+1})$

Solution: $\Psi_n = A_n e^{i\omega_n t} = A e^{i(\omega_n t + \phi)} + B e^{i(\omega_n t + \phi + \pi)}$ → 2 ordres progressifs

→ on pose la solution dans l'équation pour trouver $\omega^2 \rightarrow$ équation caractéristique

$\rightarrow \omega = 2\omega_0 / \sin \frac{\pi}{N+1}$ → relation de dispersion → ω propre avec masse identique

→ on recherche la valeur pour laquelle Ψ_n s'annule en 0 → on trouve le

$\Psi_0(t) = 0 \rightarrow (A+B)e^{i\omega_0 t} \rightarrow B = -A \rightarrow \Psi_0 = A_2 i \sin(\omega_2 t) e^{i\omega_2 t}$

$\Psi_{N+1}(t) = 0 \rightarrow \sin(\omega_{N+1} t) = 0$ pour $\omega_{N+1} a = \pi/2 \rightarrow$ valeur discrète

$\rightarrow \Psi_{n,p} = 2i A \sin \left(\frac{\pi n}{N+1} \right) e^{i\omega_n t}$

$\Psi_n = \sum_{p=1}^N \Psi_{n,p}$

Approximation limite continue:

$\omega = 2\pi/T$ Ordre: $f(t, \vec{x}, \vec{\dot{x}})$

$\lambda = C T$ $\lambda = 2\pi/\omega \rightarrow$ période (spiralée)

$R = 2\pi/\lambda \rightarrow$ rayon (spiralée)

\rightarrow on fait un double limite de rayon 3 pour ne pas avoir une annulation des termes

\rightarrow on retrouve une onde de propagation $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \Psi(x, t) + \left(\frac{k}{m} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$

Poser: $\Psi(x, t) = A(x) e^{i\omega t} \rightarrow$ on retrouve quadratique dissipation

Propriétés générales des ondes: Hypothèse: homogénéité, périodicité dans le temps, caractère longitudinal (local), vitesse de propagation

Eq prop Alenbert: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$

Onde progressive: $f(t - \frac{x}{c})$

Onde stationnaire: $f(t - \frac{x}{c}) + g(t + \frac{x}{c})$

Condition au bord:

- Extremité fixe-fixe: $\lambda p/2 = L/p$
- Extremité fixe-libre: $\lambda p/2 = L/(p-\frac{1}{2})$
- Extremité libre-libre: $\lambda p/2 = L/p$

Onde plane: \vec{n} : normal au front, $\vec{k} = (\frac{\omega}{c}) \hat{n}$, dispersion: $\epsilon k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n^2$

Rotation complexe: $\vec{j} = A e^{i(\omega t + \phi)}$

Vitesse de phase: $\omega \vec{k} = \frac{\omega}{R} \vec{n}$ (avec $R = \frac{\pi}{\phi}$)

Vitesse de groupe: $v_g = \frac{du}{dt}$ (avec $w(R) = w(k_0) + \frac{dw}{dk}(k-k_0)$)

Poche d'onde: $u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(\omega t - kx)} \sum_n A(k) e^{i(\omega t - kx)}$ (série de Fourier)

Rappel série de Fourier: $A(k) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$

Impédance caractéristique: $Z_c = -\frac{F_y}{v_y}$

Forces: $\vec{F}_\perp = -Z_c \vec{w} \hat{A} \sin(\omega t - kx)$; $\vec{\Psi} = -\vec{w} \hat{A} \sin(\omega t - kx)$

Reflexion sur Singulante: (solution harmonique) $\Psi(x, t) = A e^{i(\omega t - kx)} + B e^{i(\omega t + kx)}$

Intuitivité de la position (impulsion):

Equations:

- $\Psi_1(x, t) = A_1 e^{i(\omega t - k_1 x)} + B_1 e^{i(\omega t + k_1 x)}$; $F_1(x, t) = \vec{k}_1 \cdot \vec{Z}_1$
- $\Psi_2(x, t) = A_2 e^{i(\omega t - k_2 x)} + B_2 e^{i(\omega t + k_2 x)}$; $F_2(x, t) = \vec{k}_2 \cdot \vec{Z}_2$

$r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$; $t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$; $I_1 = \frac{|P_1|}{2} = \frac{Z_1 \omega^2 A_1^2}{2} \text{ pour } I_1$

Different types of waves:

Onde électrique: $C = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln(\frac{r_2}{r_1})}$ et $L = \frac{m}{2\pi} \ln(\frac{r_2}{r_1})$; $Z = \frac{C}{L}$

Loi de Kirchhoff: $U(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}$

Condition aux limites:

$$\begin{aligned} i(x+dx, t) &= i(x, t) - \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} \quad (1) \\ \frac{\partial i}{\partial x} dx &= -cdx \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (1) \\ V(x+dx, t) &= V(x, t) - Ldx \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} \quad (2) \\ \frac{\partial V}{\partial x} dx &= -Ldx \frac{\partial i}{\partial x} \quad (2) \end{aligned}$$

Onde plane: $\vec{F}(x) \rightarrow \vec{F}(x+dx) = m \vec{a}$

Contrainte Moyenne déformative: $\frac{\partial F}{\partial x} dx = \rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rightarrow F = AT$ avec $T = \frac{1}{E} \frac{\partial u}{\partial x}$ (Hooke)

RFD: $\rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \text{div} \vec{\sigma}$ (lame) $\rightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

Énergie: $E = \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho e$ $e = gh$

Conservation masse: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = 0$

Impédance: $Z_c = \rho / (v_s s)$ $\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{Z_c} \text{ grad } p$; $\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{Z_c} \text{ div } \vec{v}$

Surpression perturbée: $P = P_0 + p$

Volume: $\rho(\vec{x}, \vec{v}) \vec{v} + \vec{p} \vec{v} = \vec{F} - \vec{\nabla} P$ (Euler)

Énergie: $E = \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho e$

Debit: $S v_{0x} = S v_x$

Équation de propagation: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho \chi \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ $\rightarrow u \text{ peut être } \vec{p} \vec{w} \vec{v}$

Onde de compression mécanique (retour): $\Psi(x+dx) = \Psi(x) + \frac{f(x) dx}{Z}$

Impédance caractéristique: $Z_c = -\frac{F_y}{v_y}$

Forces: $\vec{F}_\perp = -Z_c \vec{w} \hat{A} \sin(\omega t - kx)$; $\vec{\Psi} = -\vec{w} \hat{A} \sin(\omega t - kx)$

Equations:

- $\Psi_1(x, t) = A_1 e^{i(\omega t - k_1 x)} + B_1 e^{i(\omega t + k_1 x)}$; $F_1(x, t) = \vec{k}_1 \cdot \vec{Z}_1$
- $\Psi_2(x, t) = A_2 e^{i(\omega t - k_2 x)} + B_2 e^{i(\omega t + k_2 x)}$; $F_2(x, t) = \vec{k}_2 \cdot \vec{Z}_2$

En posant $E = k dx$ $\rightarrow T = -E \frac{\partial \Psi}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = -E \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$

RFD: $-\frac{\partial T}{\partial x} dx = \rho dx \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$ \rightarrow à poser pour avoir équation de propagation

Onde EM: $\text{div} \vec{D} = 0$; $\text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ $\left. \begin{array}{l} \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} \end{array} \right.$ charges d

$\text{div} \vec{H} = 0$; $\text{rot} \vec{D} = -\epsilon_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ $\left. \begin{array}{l} \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} \end{array} \right.$ charges ma

$\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = -\mu_0 \text{rot} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ $\oplus \text{grad}(\text{div} \vec{E}) \cdot \vec{A} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{H}$ \rightarrow $\vec{E} = E_0 \frac{1}{c} \vec{t}$

$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$

$\text{rot}(\text{grad} \vec{A}) = 0$

$\text{div}(\text{rot} \vec{A}) = 0$

Généralité - Optique Undimensionnelle:

onde électromagnétique: $\vec{E} = q\vec{E} + q\vec{v}\lambda\vec{B}$; $\rho = [C \cdot m^{-3}]$; $\vec{J} = \epsilon_0 v \vec{v}$

équations de Maxwell: $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$; $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$; $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

$\bullet \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ → satisfait: $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{v} \times \vec{J} = 0$; $\epsilon_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ (conservation de la charge)

Type: Polarisation: $\vec{P} = N\vec{p}$; moment dipolaire; $\vec{p} = \Sigma q_i \vec{r}_i$
Amortissement: $\vec{P}_i = N\vec{m}_i$; moment magnétique $\vec{m}_i = IS\vec{n}$

en milieu matériel: $\rho = \rho_0 b + \rho_{pol}$; $\vec{J} = \vec{J}_0 b + \vec{J}_{pol}$ avec $\left\{ \begin{array}{l} \rho_{pol} = -\nabla \vec{P} \\ \vec{J}_{pol} = \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \end{array} \right.$
 $\rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$; $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_0 b \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_0 b + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right.$

en milieu transparent: $\vec{P} = \epsilon_0 X \vec{E}$; $\vec{H} = \vec{D} \rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ et $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$
 $\rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 0$; $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$; $\nabla \cdot \vec{B} = 0$; $\nabla \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

→ Equations d'ondes: $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B}) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$; $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c$
 $\vec{E}(\vec{r}, t) - \nabla^2 \vec{E}$ donc; $\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$

Rappel: relation vectoriel: $\vec{u} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{r} - (\vec{u} \cdot \vec{r})\vec{w}$
 $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 u_3 - u_2 u_2 \\ u_2 u_3 - u_1 u_2 \\ u_1 u_2 - u_1 u_2 \end{pmatrix}$

entilles:
convergente: B → F'
convexe: B → F'
divergente: B → F' (renverse)
lentille réel: F → F'
lentille virtuel: F → F' (renverse)
relation de vergence: $\frac{1}{OA'} + \frac{1}{OA} = \frac{1}{OF}$ (schéma de la lentille)

réflexion: $\theta_i = \theta_r$ (R) → $\theta_i = \theta_r$ (R')
refraction: $n \sin \theta_i = n' \sin \theta_r$

Interférence - Division du front d'onde:

onde plane: $\vec{E}_{1,2} = \text{Re}[\vec{E}_0 e^{i(kz_{1,2} + \phi_{1,2} - wt)}]$ où $I = \frac{n}{2} |\vec{E}_0|^2$ et $I = I_1 I_2 / I_{12}$
 $I_{12} = \frac{n}{2} \text{Re}[\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2^* e^{i(k(z_1 - z_2) + \phi_1 - \phi_2)}]$
hors polarisé: $E_{12} = \alpha E_0$; $I_{12} = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\phi)$ avec $\Delta\phi = k(z_1 - z_2) + \phi_1 - \phi_2$

Chemin optique: $dz = \frac{2\pi}{\lambda} n dz$; $\Delta t = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{n} dz$ (différence de marche); δ ; $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta + \phi_1 - \phi_2$

réalité des franges: $C = \frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}} + I_{\text{min}}} = \frac{2I_1 I_2}{I_1 + I_2}$; $C=1 \Rightarrow I = 4I_1 \cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)$

Frac de Young: $r_1 = \sqrt{(x+a/2)^2 + y^2 + z^2}$; $r_2 = \sqrt{(x-a/2)^2 + y^2 + z^2}$
→ Fringe: $\delta = r_1 - r_2 = p\lambda$; équation fringe-interf: $x^2 - y^2 + z^2 = \left(\frac{p\lambda}{2}\right)^2$
simplif: $x = p\lambda/2$ → $\delta = \frac{\lambda d}{a}$ (interférence); $\delta = \frac{\lambda d}{a}$

Doublet de Fresnel: si le le train d'onde $I = 2I_0 [1 + \cos(\vec{p}_1 \cdot \vec{s})] + 2I_0 [1 + \cos(\vec{p}_2 \cdot \vec{s})]$
 $\vec{p}_1 = (\vec{p}_1 + \vec{k}_1)/2$ et $\Delta\phi = \vec{k}_2 - \vec{k}_1$
→ $I = 4I_0 [1 + \cos(\vec{p}_1 \cdot \vec{s}) \cos(\frac{\Delta\phi}{2}) \delta]$

"N" onde monochromatique (possible indice de refraction)

cohérence héliopolaire: longueur de cohérence $l_c = C \cdot \frac{\lambda}{\Delta\lambda} (R_0) = T_0 / D_{\text{ph}}$ (sinus cardinal)
 $I = \int_0^\infty 2S(R_0) [1 + \cos(\vec{p}_0 \cdot \vec{s})] dR_0 \rightarrow I = 2I_0 [1 + \frac{\sin(\Delta\phi \frac{\lambda}{2})}{\lambda R_0} \cos(\vec{p}_0 \cdot \vec{s})]$

cohérence spatiole: $\phi_1 - \phi_2 = k \left[\left(S + \frac{a}{2} \right)^2 + e^2 - \left(S - \frac{a}{2} \right)^2 + e^2 \right]$
 $I = \int_{-P/2}^{P/2} 2I_0 \left[1 + \cos(\Delta\phi(s)) \right] ds = 2I_0 \left[1 + \frac{\sin(\frac{\pi R_0}{2})}{\frac{\pi R_0}{2}} \cos\left(\frac{2\pi a s}{\lambda d}\right) \right]$ (source multiple au centre)

Résumé: $\vec{E}_n = \text{Re}[\vec{E}_0 e^{i(n\Delta\phi - wt)}] \rightarrow \vec{E} = \text{Re}[\vec{A} e^{iwt}]$
 $\vec{A} = \vec{E}_0 \sum_{n=0}^{\infty} \text{exp}(in\Delta\phi) = \vec{E}_0 \frac{1 - \exp(iN\Delta\phi)}{1 - \exp(i\Delta\phi)}$ (suite géométrique) $S = \frac{S - qS}{S(1-q)}$
 $I \rightarrow I = I_0 \frac{\sin^2(\frac{N\Delta\phi}{2})}{\sin^2(\Delta\phi/2)}$; $I_{\text{max}} = N^2 I_0$ (intérieur de l'objectif) $(\Delta\phi = 2\pi t)$

Critère de Rayleigh: $\Delta\phi = \frac{\lambda}{d}$ (même en phase); $N=1$ (final)

Vague planee: $V(r, t) = V(r, v, t)$ $\rightarrow \tau = s - \frac{y}{v}$

Équations d'ondes: $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$; commutativité de $\left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t} \right] \times \left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t} \right]$ (dérivée seconde) avec $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$ et $z = \vec{E} \cdot \vec{m}$; $t = \frac{\vec{E} \cdot \vec{m}}{v^2}$ (régressive) (progressive)

→ solution général: $V = V_+(z) + V_-(z) e^{i\omega t} + V_+(z) e^{-i\omega t} + V_-(z) e^{i\omega t}$

→ onde plane monochromatique (harmonique): $V(r_0, t) = V_0(t) = A \cos(\omega t + \delta)$; $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$
en remplaçant "t" par " $t - \frac{c-z}{v^2}$ " on a: $V_+(z) = A \cos(\omega(t - \frac{c-z}{v^2}) + \delta)$

si on introduit vecteur onde: $\vec{E} = \frac{\omega}{v^2} \vec{A} = \left(\frac{\omega}{c} \right) \vec{A}$ aussi $V_+ = \text{Re}(A \exp(i\vec{K} \cdot \vec{r}))$ avec: $A_0 = A \exp(-i\delta)$

Pour O.E.M.: $\vec{E} = \text{Re}[\vec{E}_0 \cdot \exp(i(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t))]$ (maxwell: $\vec{E} \cdot \vec{E}_0 = 0$; $\vec{E}_0 = -\frac{i\omega}{c} \vec{B}$) $\vec{B} = \text{Re}[\vec{B}_0 \exp(i(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t))]$

Longueur d'onde: $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi v^2}{\omega} = \frac{1}{n} \frac{c}{v} = \frac{\lambda}{n}$

Polarisations: $\vec{E}(\vec{B})$ devant une ellipse ($\vec{E}_0 \cdot \vec{B} = 0$) $\phi = \vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t$

Relations: $t' = t - t_0 \rightarrow \vec{E} = \text{Re}[\vec{E}_0 \exp(i\phi) \cdot \exp(i\omega t')] \rightarrow \vec{E}_0 \exp(i\phi) = \vec{E}_1 + i\vec{E}_2$
par décomposition: $\vec{E}_0 = \vec{E}_0' + i\vec{E}_0''$; condition $\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = 0 \rightarrow \text{Im}(\vec{E}_0) = \frac{1}{2} \vec{E}_0' \cdot \vec{E}_0''$
 $\rightarrow \vec{E} = \vec{E}_1 \cos(\omega t) + \vec{E}_2 \sin(\omega t)$

Onde sphérique: $V = V(r, t)$; $\nabla^2 V = \vec{r} \cdot \vec{\nabla} V$ $\vec{E}(r, t) = \frac{\vec{E}_0}{r} e^{ikr - i\omega t}$
 $\vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta \vec{A}_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta \vec{A}_\theta) + \frac{\partial}{\partial \phi} (r \vec{A}_\phi) \right]$
 $\vec{V} = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \vec{\phi} \rightarrow \nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}$

Vecteur de Poynting: $\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H}$; $\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E}_0 \wedge \vec{H}_0^*] = \frac{n}{2} |E_0|^2 / \lambda_0^2$
 $Z_0 = \sqrt{\frac{4\pi}{\epsilon_0 \mu_0}} = 377 \Omega$

Interférence - Division d'amplitude:

laser à faces parallèles: $\vec{A}_1 = \vec{A}_2 = \vec{A}$ (vecteur de phase)

en incidence normale ($\theta_i = 0$): $I_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \cdot I_{11} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \cdot I_0 = 1$ (vecteur de phase)

Onde 1: $A_r = r_{12}$; $A_t = t_{12} r_{12}$; Onde 2: $A_r = t_{12} r_{12}$; $A_t = t_{12} r_{12}^2 t_{11}$

Observation à l'œil: $AC = CD = \text{cos} \theta_r$; $BC = \text{etan} \theta_r$; $AD = 2BC$; $AE = AD \sin \theta_r$
loi de réfraction $\rightarrow S = n_2 (AC + CD) \cdot n_1 AE = 2n_2 \text{cos} \theta_r$

pour $n < n_2$ et $\theta_i > \theta_c$ (dissipage): $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} (S + \pi)$ $\theta_c = \frac{\lambda}{n_2}$

Fraise claire pour $\Delta\phi = 2\pi p \rightarrow \cos \theta_r = \frac{\lambda (2p-1) \pi}{2 \ln n_2 + \theta_c}$ soit $p = \frac{2\pi n_2}{\lambda} + \frac{\theta_c}{2}$

Rays de Poynting: $R_p = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E}_0 \cdot \vec{H}_0^*] = \frac{1}{2} \frac{\pi R_0}{\lambda} \sqrt{\frac{\lambda}{n_2}} (p - p_c)$

Lumière blanche: orange: extraction bleu-violet ($\lambda = 0,4 \mu m$)
vert: $S = 0,4 \mu m = \frac{2\pi}{\lambda} S = 2\pi \rightarrow \Delta\phi = 3\pi$ ainsi $\theta = 2\pi n \text{cos} \theta_r$ $k = (2\pi/2) / \Delta\lambda$

Laser dièdre (condensé): $\vec{A}_1 = \frac{2\pi}{\lambda} (\sin \theta_i \hat{x} + \cos \theta_i \hat{y})$; $\vec{A}_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (\sin \theta_i \hat{x} + 2\pi \cos \theta_i \hat{y})$
 $\theta_i = \theta_c + 2\alpha$ $\vec{P} = r \cos \theta_i \hat{x} + r \sin \theta_i \hat{y}$ (déphasage π négatif)
 $\vec{E} = \frac{1}{2} \vec{E}_0 (\exp(i(\vec{P}_1 \cdot \vec{r})) + \exp(i(\vec{P}_2 \cdot \vec{r}))) \exp(i\omega t) + \frac{1}{2} \vec{E}_0^* (\exp(-i(\vec{P}_1 \cdot \vec{r})) + \exp(-i(\vec{P}_2 \cdot \vec{r})))$

solt: $I = 2I_0 (1 + \cos((\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot \vec{r}))$ avec $I_0 (n=1) = \frac{|E_0|^2}{2\pi}$ explic

$\Delta\phi = (\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot \vec{r} = \frac{-4\pi r}{\lambda} \sin \alpha \cos(\theta_i + \beta + \alpha)$

Fraise brillante: $(\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot \vec{r} = 2\pi p \rightarrow p = \frac{-2\pi}{\lambda} \sin \alpha \cos(\theta_i + \beta + \alpha)$ diffusif $\rightarrow dp = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \alpha \sin(\theta_i + \beta + \alpha) d\theta_i$

+ Point d'intersection: $D = \frac{A \cos \theta_i}{\cos \alpha} (\cos(-\alpha - \theta_i) \hat{x} + \sin(-\alpha - \theta_i) \hat{y})$

distance de焦距: $r_0 = -D \cdot \lambda$; intensité: $i = \frac{\lambda}{\pi r_0^2}$

Principe géométrique de l'interféromètre à rayon rétro-

$$E_T = E_0 t_{12} t_{21} \exp\left(\frac{i\phi}{2}\right) \sum_{N=0}^{2N} r_{21} \exp(iN\phi)$$

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2c \cos \theta \rightarrow E_T = E_0 \exp\left(\frac{i\phi}{2}\right) \frac{t_{12} t_{21}}{1 - r_{21}^2 \exp(i\phi)}$$

avec: $r_{21} = -r_{12}$ et $t_{12} t_{21} + r_{12} = 1 = T + R$

$$\vec{E}_T = E_0 \exp\left(\frac{i\phi}{2}\right) \cdot \frac{T}{1 - R \exp(i\phi)} \text{ donc } I_T = I_0 \frac{T^2}{(1+R^2-2R \cos\phi)} = (1-R)^2 + 4R \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

et $I_T = \frac{I_0}{1+m \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$ avec $m = \frac{4R}{(1-R)^2}$;

$$\vec{r}_{21} = E_0 \left[r_{12} + t_{12} t_{21} \sum_{N=0}^{2N+1} r_{21} \exp(i(N+1)\phi) \right] = E_0 r_{21} \left[1 - \frac{T \exp(i\phi)}{1 - R \exp(i\phi)} \right]$$

et $I_R = \frac{I_0 m \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}{1+m \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$; de telle sorte on obtient $I_0 = I_R + I_T$

Intensité et finesse: I_{\max} pour $\phi = 2\pi P$; $I_{\min} = \frac{I_0}{1+m}$; $C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{m}{2m+1}$

Argentum à mi-hauteur de I_T : telle que $I_T = I_0/2$; $\frac{1}{C} = \frac{1}{2} \left| \frac{\partial I}{\partial \phi} \right| / \Delta \phi$

$$\Delta \phi = \frac{4}{\text{FWHM}}$$
 (premier max); $F = \frac{2\pi}{\Delta \phi} = \frac{\pi}{\text{FWHM}} = \frac{\text{période}}{\text{FWHM}}$

Observation entre lentille convergente: $R_p = f \sqrt{\frac{\lambda}{e}} (\rho_0 - p)$ avec $\rho_0 = \frac{2e}{\lambda}$

Analysé des fréquences: maximum de T pour $\epsilon_F = p \frac{\lambda}{2}$ soit $S = 2e = p\lambda$

$\Delta S < \Delta \lambda$: $\rho \frac{\lambda}{2} = (\rho_1 + \rho_2) \frac{\lambda}{2} \rightarrow \lambda - \lambda_2 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2\rho}$

$$\epsilon_{F,1} = \left(p + 2 + \frac{1}{p} \right) \frac{\lambda^2}{2}$$

Condition de résonance: $e = p \frac{\lambda}{2}$; différence: $\Delta U_L = U_2 - U_1 = C/2ep$

$\omega' = \omega_0 + \alpha \Delta U_L$ avec $\alpha = \frac{C}{D} = \lambda_1 - \Delta \lambda$

$\Delta U_L > \text{FWHM}$

critère de Rayleigh: $S_{\min} = \frac{\lambda_1}{2e}$ alors $\Delta S_{\min} = \frac{1}{F}$ soit $\Delta U_{\min} = \Delta U_L / F$

Diffraction Équation d'Heinrich: $\nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$; $V(r,t) = V_0(\frac{r}{c}) e^{-i\omega t}$

Approximation de Fresnel: (champ proche) $D < \frac{2a^2}{\lambda}$

approximation circulaire distante $V_0(\vec{R}, \vec{z}) = \int V_0(\vec{p}, 0) G_z(\vec{R}-\vec{p}) d\vec{p}$; $G_z(\vec{p}) = e^{-i\sqrt{R^2-p^2}}$

$V_0(\vec{R}, D) = V_0(\vec{R}) = \frac{\exp(i\phi(\vec{p}))}{i\lambda D} \int V_0(\vec{p}) \exp\left[\frac{i\phi(\vec{p})}{2D}\right] d\vec{p}$

on considère une source "variable"

Principe de Huygen-Fresnel: $V_0(\vec{R}) = \frac{1}{i\lambda D} \int V_0(\vec{p}) \frac{\exp(i\phi(\vec{p}))}{d} d\vec{p}$; $d = \sqrt{D^2 + (\vec{R} - \vec{p})^2}$

pour $D \gg R, p$ $\rightarrow \text{DL}$ de "d"; $(1+t)^n = 1 + n\epsilon t + \frac{n(n-1)}{2!} t^2$

Approximation de Fraunhofer: (champ lointain) $D > \frac{2a^2}{\lambda}$ \rightarrow terme proportionnel à p^2 négligé

$V_0(\vec{R}) = \frac{\exp(i\phi(\vec{D} + \frac{R^2}{2D}))}{i\lambda D} \int V_0(\vec{p}) \exp(-ik\vec{p} \cdot \vec{R}) d\vec{p} = \int ds = p d\Omega$

on considère une source "moyenne"

$\vec{k} = \frac{\vec{R}_0 \vec{R}}{D} = \frac{2\pi i \vec{R}}{\lambda D}; \sin \theta \approx \theta$

Principe de Huygen: linéarité de la diffraction: $V_0(\vec{R}) + V_0(\vec{R}') = V_0(\vec{R})$

enfin: \rightarrow objet de phase = obstacle - $e \cdot \phi(\vec{p})$

réflexion répétée 2 équations de sphère: $\begin{cases} x^2 + y^2 + (z - R_1)^2 = R_1^2 \\ x^2 + y^2 + (z + b)^2 = R_2^2 \end{cases}$ $\frac{dz}{dx} = \frac{R_1 - R_2}{2b}$

$\vec{p}_0 = z\hat{z} - z_1\hat{z} = do - \frac{R_1^2}{R_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$; distance focale: $f = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$

$V_{do}(\vec{p}) = V_0(\vec{p}) e^{i k_0 d o} e^{-i k_0 \frac{x^2 + y^2}{2f}}$

$V(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V_0(\vec{p}, 0) e^{-i k_0 \frac{(x-p_x)^2 + (y-p_y)^2}{2f}} d\vec{p}$

Laser: $\vec{E} = E_0 \vec{t}_{12} \vec{t}_{21} \exp\left(\frac{i\phi}{2}\right) \sum_{N=0}^{2N} r_{21} \exp(iN\phi)$ $\vec{P} = \vec{P}_0 + \vec{O}_M$ $\vec{P}_M = \vec{P}_0 + \vec{O}_M$

Approche mécanique classique: \rightarrow atomes \rightarrow niveau stationnaire \rightarrow bohr \rightarrow En \rightarrow niveau statique

Polarisation aberrante: \rightarrow transmission entre niveau \rightarrow $E(\vec{r}, t), \Psi(\vec{r}, t, \vec{p}) \Rightarrow$ oscillateur $\omega_{21} = \frac{E_0 - E_1}{\hbar}$

Brugge) Flouitz: $F = e E_{22}$; PFD: $\text{moo} = h \omega_e - \hbar \omega - e E \oplus$ approximation dipolaire $E \text{ ind}$

On admet des solutions: $E(t) = E_0 e^{-i\omega t}$ $\omega = \omega_0 e^{-i\omega t}$ $\left\{ \omega_0 = \frac{e E_0}{m} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + \frac{\omega_0^2}{c^2}}$

$\rightarrow \vec{p} = \text{polarisat.}; \vec{p} = N \vec{p} = N(-\omega_0) \vec{a} = \vec{P} \vec{a} \rightarrow P = -N \omega_0 \vec{a} = P_0 \vec{a}$

$(Q/\vec{p}^2) = (C/\vec{p}) \cdot (V/\vec{p})$ simplif. \rightarrow on retrouve: $P_0 = -N \omega_0 \omega = E_0 X \vec{E}$

$X = \frac{N e^2}{m c \omega_0} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 - i \omega / \tau} = \frac{N e^2}{2 m \omega_0 \tau} \cdot \frac{1}{\omega_0 - \omega - i \tau} ; \tau = \frac{\omega}{2 \omega_0 \tau} \approx \frac{1}{2 \tau}$

$X' = \text{Re}[X] = \frac{N e^2}{2 m \omega_0 \tau} \cdot \frac{\omega_0 - \omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + \tau^2}; X'' = \text{Im}[X] = \frac{N e^2}{2 m \omega_0 \tau} \cdot \frac{\tau}{(\omega_0 - \omega)^2 + \tau^2}$

indice de réfraction: $n^2 = \epsilon_r = 1 + X = n^2 - n^2 \sin^2 n \approx n^2 + 2 n^2 \sin^2 n$

Inversion population: $\vec{E}_1 \xrightarrow{\text{hv}} \vec{E}_2 \xrightarrow{\text{hv}} \vec{E}_3 \xrightarrow{\text{hv}} \vec{E}_1$

Condition d'utilisation: Gain: $G(1-n) \geq 1$ avec $G = \exp(-4\pi n R_l) \approx \exp(-2\chi R_l)$

$$G = \exp\left[\frac{(N_2 - N_1) e^2 l}{m c \omega_0 \tau} \cdot \frac{\tau}{(\omega_0 - \omega)^2 + \tau^2}\right] \rightarrow g(\omega) = \frac{(N_2 - N_1) e^2}{2 m \omega_0 \tau} \cdot \frac{\tau}{(\omega_0 - \omega)^2 + \tau^2}$$

Mode Laser: $\Delta \omega_L = C/2epn^2$; $\Delta \omega = \Delta U_L / F$

$\Delta \omega_{\text{imp}} = \Delta U_L [p + \frac{1}{2}(m+n+1)]$

Onde optique de Fourier.

Insertion d'une lentille: $H = -\frac{q}{f} : V_0(\vec{R}) = \frac{e^{i k_0 (p + q + nd)}}{-\lambda^2 \vec{P} \vec{q}}$

fonction de transfert: $\vec{F} = \exp\left[i k_0 \left(\frac{q^2}{2f} - \frac{q^2}{2f} + \frac{(\vec{R} - \vec{p})^2}{2f}\right)\right]$ $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{X}{f}$; $k_y = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{Y}{f}$

en posant $\frac{1}{f}$ par rotation et $k_0^2 = k^2 \rightarrow$ dirac dans $\vec{F}(\vec{q}, \vec{R})$: $\delta\left(\frac{\vec{p}}{f} + \frac{\vec{R}}{f}\right)$

changeant la variable: \vec{p}' $V_0(\vec{R}) = \frac{1}{f} \exp(i\phi(\vec{R})) V_0(\vec{p}' = \frac{\vec{R}}{f})$

condition d'observation TF: $\vec{P} = \vec{q} = \vec{f}$

réseau infini: (fente): $V_0(\vec{p}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_0(\vec{p} - n\vec{d}) = [V_0(\vec{p}') * \delta_d(\alpha) * \delta_d(y)]$

note "peigne de dirac": $\delta_d(\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nd)$; $\text{TF}[\delta_d(\alpha)] = \frac{2\pi}{d} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\frac{x}{d})$

Filtrage - Montage (F): $V_F(\vec{R}) = \frac{e^{i k_0 (q + nd)}}{i \lambda f} \vec{F} \frac{F \vec{F}^T}{\vec{F}^T \vec{F}} [V_0(\vec{p}')] \quad \text{Filtre} \rightarrow \vec{d}$

$V_E(\vec{q}') = -\exp(i k_0 (q + nd + n'd)) \frac{F \vec{F}^T}{\lambda^2 f^2} \frac{F}{\vec{F}^T \vec{F}} \frac{F}{\vec{F}^T \vec{F}} [V_0(\vec{p}')] \quad \vec{q}' = \frac{q}{f}$

$\tau = -\frac{1}{f} \frac{q}{f}$ \rightarrow Filtre passe bas: Plan Fourier: $\vec{R} = \vec{q}$; "fente possible": $F(\vec{f}) = \text{rect}(\frac{X}{a}) \cdot \text{rect}(\frac{Y}{b})$

Filtre passe haut: complémentaire de F bas: $F(\vec{R}) = 1 - \text{rect}(\frac{X}{a}) \cdot \text{rect}(\frac{Y}{b})$

Limite optique de Fourier: Coherence temporelle possible ($\Delta t \lambda$)

coherence spatiale à N source problématique (ex: source étendue)

solution: filtre spatial nécessaire

démonstration: $\vec{v} = \frac{\vec{R}}{f}$

s'étendu: $\vec{v} = \frac{\vec{R}}{f}$

Generalité fluides:

$$\text{Fond-profil} = \frac{\rho \cdot g \cdot a}{\Delta t} \vec{e}_x$$

PFD: $\int f_l \cdot dL + \int f_s \cdot dS + \int f_v \cdot dV = \rho \cdot dV \cdot \frac{d^2 r}{dt^2}$

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \int P \cdot d\vec{S}, \text{ forme différante: } f' = \frac{dP}{dx}; df = f'(dx) \cdot dx$$

Force appliquée sur volume élémentaire = cube $\frac{F_{ext}}{dV} = \frac{F_2 - F_1}{dV} = \frac{F_{ext}}{dV}$ (cylindre)

Loi hydrostatique: $f_v(r) - \text{grad } P(r) = 0 \Rightarrow \Delta P = \rho g \Delta z + p_{atm}$

$$p_{isobare} = p_{atm} - \rho g z$$

$$(p_{12}=0) = p_{atm}$$

Principe d'Archimède: $P_A = + \rho f_l \cdot g \cdot V_{vol} \cdot \vec{e}_x$

Convention signe: $\vec{dS} \wedge \vec{n}$ (soppose au \vec{F}_{ext}) $\rightarrow \vec{dF} \wedge \vec{n}$ soit: $dS = C_n d\vec{n}$

Débit volumique: $D_V = \iint_S v \cdot dS = \frac{[m^3]}{[s]}$

(dimension physique) $[P] = [F]/[S] = [p]/[D_V]$

Viscosité: $F_{ext} = \eta \frac{\vec{v}_0}{h}$: Force présente - \perp à S
Force visqueuse - tangent à S

Trigonométrie: $(adj)^2 + (opp)^2 = Hyp^2; \sin = \frac{opp}{hyp}; \cos = \frac{adj}{hyp}; \tan = \frac{opp}{adj}$

Théorème: si $BC \parallel B'C'$ alors $\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$ cylindre. $\pi r^2 \cdot h$

Volumétrie: Ellipsoïde: $\frac{4}{3}\pi(a \cdot b \cdot c)$; Cone: $\frac{1}{3}\pi r^2 h$; Tore: $2\pi Rr^2$

Inémautique des fluides $\vec{T}(r, t), P(r, t), \rho(r, t) \rightarrow$ intensive

Vitesse: Champ $\vec{v}(r, t) \rightarrow$ tangent à la ligne de courant

Accélération $\frac{\partial \vec{v}(r, t)}{\partial t}, \vec{a} = \sum_{i=1}^N v_i \vec{e}_i, \vec{r} = \sum_{i=1}^N x_i \vec{e}_i$

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_i \rightarrow \vec{v} = \sum \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \vec{e}_i$$

Conservation de la masse: (i): $M = \iiint_V \rho(r, t) d^3 r; \frac{dM}{dt} = 0$

$$(ii): \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

$$\rightarrow \text{incompressible si } J_f = \frac{\partial \rho}{\partial \vec{v}} < \frac{1}{3}$$

Taux de déformation: $M_i M'_i = \omega(M_i, t) dt$

$$\rightarrow \vec{M} \vec{M}' = \vec{M} \vec{M}' + dt \left\{ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \vec{e}_2 \right\} dx_1$$

friction

déformation

Rotation: on a $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0$ et $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$

vortex: $\frac{1}{2} \vec{rot} \vec{v} \rightarrow$ à enlever en synthétise

Gradient de vitesses tout de déformation $G_{ij} = w_{ij} + e_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + t_{ij}$$

mais $t_{ij} = f_{ij} \left(\frac{1}{2} \text{div} \vec{v} \right) = 0$ donc $e_{ij} = d_{ij} \rightarrow$ à concerter

équation: $\partial W = \gamma \partial A; \partial W = - T \cdot \partial \vec{z} = \gamma \partial \vec{A}$
 $\rightarrow \delta(T) = \gamma(b)(1-b(T-T_0))$ tension ab interface

Y: Force / unité longeur: $\vec{F}_{interface} = - \gamma L \vec{e}_x (\cos \theta_c)$

$$\vec{F} = \gamma dL (\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + \gamma dL (\vec{e}_2 + \vec{e}_1)$$

$$\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = 2 \sin(\frac{d\theta}{2}) \hat{n} = d\theta n = \frac{dL}{R}; \vec{e}_2 + \vec{e}_1 = \frac{dL}{R}$$

Loi de Laplace: $P_B - P_A = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right); P_B = P_{atm} + \frac{\gamma}{R_1}$
 $P_A = P_{atm} - \frac{\gamma}{R_2}$

Relation de Young (mouillage) $\cos \theta_c = \frac{\gamma_{ls} - \gamma_{lg}}{\gamma_{lg}}$

mouillant $0 \leq \theta_c \leq 90^\circ$

longueur capillaire: $l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$

Loi de Jurin: $H = \frac{2\gamma}{\rho g} \cdot \cos \theta_c$

Menisque (surface courbe):

concave: $dS = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\frac{dx^2}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2}} dx = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta = f'(x); R = \frac{ds}{d\theta} \rightarrow \frac{1}{R} = \frac{ds}{d\theta} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{1}{(1 + f'(x))^2}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\theta}{dx} \tan'(0) = \frac{d\theta}{dx} [1 + f'(x)^2] \text{ soit } \frac{y}{R} = \frac{\gamma}{\rho g} = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}} = f(x)$$

→ intégration en multipliant chaque terme par f' telle que $(ff')^2 = f'^2/2$

Dynamique des fluides:

Tenseur des contraintes: $\vec{dF} = \vec{\sigma} \vec{dS} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dS_1 \\ dS_2 \\ dS_3 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \sigma_{ii} = -P; \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \Rightarrow \vec{\sigma} = -P \vec{I} + \vec{\sigma}$$

($i,j = 1, 2, 3$) $\rightarrow \sigma_{ij} = 2m \sigma_{ij} + 3m' t_{ij} = 2m \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right)$

à l'origine de surface: $\sigma_{xx} = \frac{dY}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$ gradient de T^o

Navier Stokes: (fluide visqueux newtonien) rappel: $\vec{f} = \rho \vec{g}$

cas général: $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} + \vec{\nabla} \vec{P} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} P + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}$

fluide incompressible: $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \vec{\nabla} P + m \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}$ (à projeter sur les axes)

$\Delta v = \Omega R \rightarrow$ solution de la forme: $v_r = ar + \frac{b}{r}$ scalaire veche

rappli: $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) \text{ ou } (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) \vec{v} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) \vec{v}$

en cylindrique: $\sigma_{rr} = \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \right) \rightarrow C = \sigma_{rr} \cdot 2\pi rh$

Symétrie par rapport au plan (plan): $\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y$
 → par translation suivant plan: $\frac{\partial}{\partial x} = 0; \frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ (Ox)

Invariance: Incompressibilité: $\text{div} \vec{v} = 0 \rightarrow v_r \leq \frac{1}{3} + v_y \cdot \frac{dr}{r}$
 régime stationnaire atteint: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$\rightarrow (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) = 0$ car $v_y = 0$ et $\frac{\partial}{\partial r} = 0$

continuité: (C) intérieur ($y=0 \rightarrow \vec{v} = \vec{0}$); $y = h \rightarrow \vec{v} = \vec{v}$); viscosité: $\sigma_{xy} = \eta \frac{\partial v_y}{\partial r}$

PFD objet "flottant": En statique $m \ddot{v} = \vec{P} + \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{visc} = 0$

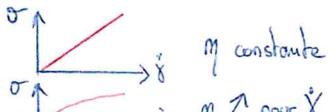
symétrie (translation, rotation)

taux de déformation: $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \rightarrow e_{ij} = \dot{\gamma}_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$

Contrainte: $\sigma = \eta \dot{\gamma}$ (en pratique $\dot{\gamma} = \frac{\omega}{r}$)

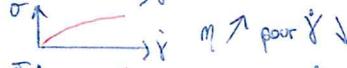
Comportement:

Fluide neutonien



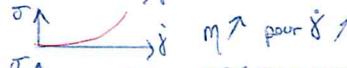
η constante

Fluide rheofluidifiant



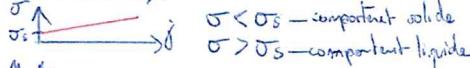
$\eta \nearrow$ pour $\dot{\gamma} \downarrow$

Fluide rheopassif



$\eta \nearrow$ pour $\dot{\gamma} \uparrow$

Fluide à seuil



$\sigma < \sigma_s$ - comportement solide

$\sigma > \sigma_s$ - comportement liquide

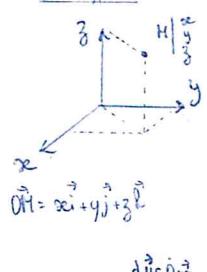
→ Thixotropie.



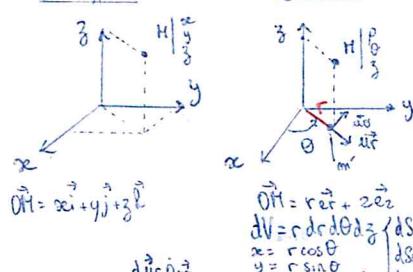
$\eta \downarrow$

Rappel coordonnées:

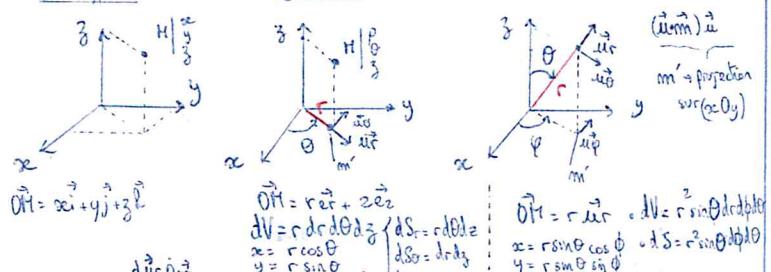
Cartésiens:



Cylindrique:



Sphérique:



Ecoulement lamininaire/transitoire/turbulait:

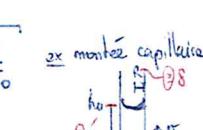
Re petit

Re haut

Nombre de Reynolds: $Re = \frac{\rho v L}{\eta} = \frac{\rho L}{\nu}$ = $\frac{\rho L}{\nu}$ - viscosité cinétique

Équation de diffusion: $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ (\vec{v} negligible synchrone: $\vec{v} = v(z) \hat{i}_z$)

τ = temps caractéristique pour établissement régime stationnaire

Couche limite: $\delta = \sqrt{D \cdot \tau} = \sqrt{D \cdot \frac{L}{\nu}}$ ex: montée capillaire
[longueur] 

Navier-Stokes = Euler + Couche limite + couplage

Onde de gravité: $G = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} C$ avec $k = \frac{\omega}{C}$

Nombre de Froude: $Fr = \frac{V}{\sqrt{g k c}}$

Solide de Rankine: engendré par ligne de courant $\vec{v} = \vec{v}(r, \theta, z)$ au point de stagnation $\phi = \phi_s + \phi_t$

Ecoulement créé par un dipôle: $\phi = \phi_s + \phi_p = \frac{\Omega}{2\pi} \ln \frac{r_s}{r_p}$

moment dipolaire: $\vec{p} = \vec{Q} \cdot \vec{d} \vec{e}_z = \vec{Q} \vec{d}$

On retrouve avec $\frac{1}{r} \ll 1$: $\phi = -\frac{\vec{Q} \cdot \vec{r}}{2\pi r^2} = -\frac{\Omega d}{2\pi r} \cos \theta$ (3D)

avec $r_p^2 = \| \vec{P}_0 + \vec{O} \|^2$ $\vec{Q} \cdot \vec{r} = \frac{Q}{4\pi r^3} = \frac{Q}{4\pi r^3} \frac{d \cos \theta}{r^2}$ (3D)

source à source infini = source unique et sans masse. En cylindre ou rotation: $\phi = \phi_s + \phi_t + \phi_{rot}$

source + masse $\rightarrow \vec{v} = \vec{v}_s + \vec{v}_m$

Loi conservation locale:

· masse: $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \text{div}(\vec{v}) = 0$ (incompressible: $\text{div} \vec{v} = 0$) \rightarrow description lagrangienne (courant creux)

· quantité de mouvement: $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}_v - \vec{\nabla} p$ (équation d'Euler)

· Energie: $\epsilon_c = \frac{1}{2} \rho v^2$

$[\rho / \text{m}^3] = [\text{P}]$ $\epsilon_p = \rho g z$ en \vec{f}_v conservatrice $\rightarrow \vec{f}_v = -\text{grad } \epsilon_p$

\rightarrow long ligne de courant $\vec{n} \cdot \text{grad} (\epsilon_c + \epsilon_p + p) = 0$

\rightarrow relation de Bernoulli: $\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + p = C(t)$

· Débit: $S_1 v_1 = S_2 v_2$
 \Rightarrow écoulement permanent $\Rightarrow S_2$
 \Rightarrow surface collinaire à v
 \Rightarrow fluide parfait incompressible
 \Rightarrow 1 ligne de courant \Rightarrow conservation

Loi conservation "integrale":

· masse: $\frac{dM}{dt} = \iint_S (\rho \vec{v}) \cdot \vec{n} dS$; écoulement stationnaire: $\frac{dM}{dt} = 0$

(Débit vol) $D = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS \rightarrow D_1 = D_2$

· quantité de mouvement: $\iint_V \rho (\vec{v}, t) \cdot \vec{v} (\vec{v}, t) dV$ \Rightarrow écoulement permanent $\frac{d}{dt}$

\rightarrow intégration Eq. Euler: $\iint_V \frac{\partial (\rho \vec{v})}{\partial t} = \iint_V \vec{v} dV - \iint_S \{ p \vec{n} + \rho (\vec{v}, n) \}$

Rappel: théorème du volume: $\iint_V \text{div} \vec{f} \cdot dV = \iint_S \vec{f} \cdot dS$

Gradient: $\iint_V \text{grad } f \cdot dV = \iint_S f \cdot dS$

decomposé en fonction de x, y, θ, ρ
et des surfaces S

Ecoulement Potentiel. $\Delta \eta$ négligable $Re \gg 1$

écoulement irrotationnel: $\vec{w} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{0}$ (vorticité nul)

$\rightarrow \vec{v} = \text{grad } \phi = \vec{\nabla} \phi$ ϕ : potentiel de vitesse.

Théorème de Kelvin (circulation): $\Gamma(t) = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l}$

avec $\frac{d\Gamma(t)}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \Gamma = \vec{0}$

potentiel Stokes (simplification): $\Gamma(t) = \iint_Q \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \phi dS = 0$

turbulente: $\Gamma = \int_C \vec{v} dl = \int_0^{2\pi} V_r r d\theta = 2\pi r V_r$

Ex: $\phi = \phi_{pot} + \phi_{turb}$; $\phi = \phi_{pot} + \phi_{stat}$

Équation de Laplace: $\Delta \phi = 0$ \rightarrow addition des solutions

source-pot: $\phi = \int_C \vec{v} dl = \int_0^{2\pi} V_r r d\theta = V_r \cdot 2\pi r$ Euler $\phi_{pot} = V_r r \cos \theta = V_r x$

Équation de Bernoulli: $\vec{f}_v = -\rho \text{grad} \phi \rightarrow \text{grad} \left(\frac{\rho \phi}{2} + \rho v^2 + p \right) = \vec{0}$

généralisation: $\rightarrow \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \frac{v^2}{2} + \rho \Phi_v + p = f(t)$

Fonction de courant: $\begin{cases} V_x = \frac{\partial \phi}{\partial y}; V_y = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{A} \Rightarrow \vec{A} = \frac{1}{\rho} \vec{\phi} \end{cases} \Rightarrow V_x = \frac{\partial \phi}{\partial y}; V_y = \frac{\partial \phi}{\partial x}$

point de stagnation: $\vec{V} = \vec{0}$ ligne de courant $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y}; \frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{\partial V_y}{\partial y}$

Force exercée obstacle, axisymétrique (2D), force quelconque

$\vec{F} = \vec{V} + \vec{V}_s$ sans obstacle $\rightarrow \|\vec{V}\|^2 = \|\vec{V}_s\|^2 + \vec{V}_s \cdot \vec{V}$

\rightarrow conservation de l'impulsion (régime stationnaire)

trainée: $F_T = \iint_{\text{Sous}} P \cdot n \text{d}^2S = 0$ (aérodynamique) force normale

Portance: $F_s = \iint_{\text{Sous}} P \cdot n \text{y d}^2S$ (normal) $\rightarrow \vec{F}_s = \rho \vec{V} \times \vec{A}$

représentation informatique		représentation normative
Définition de conception: Problème soluble par M. de Turing	{ procédur (l-t-ent) registre-mémoire action = algo}	base
• Identification d'une solution mathématique		Nombre entier: $\exists x = (1234)_{10} = (10011010010)_2 = \sum_{i=0}^m 2^i \cdot b_i$
• Ecriture d'algo - conversion 1 action = 1 mot		$[0, 2^{n-1}]$
• Ecriture programme		negatif: Complément binaire + ajout de 1 devant exponent
- exécuter programme		$[-2^{n-1}; 2^{n-1}]$ ($0 \rightarrow 1$), ($1 \rightarrow 0$)
Forme: Fonction norm (var: type) : type ;	entrée sortie	• Table: $2^0 = 1$ $2^4 = 16$ $2^8 = 256$ { pour recherche
Déclaration Variable	affectation	$2^1 = 2$ $2^5 = 32$ $2^9 = 512$
Debut Instruction	comparaison	$2^2 = 4$ $2^6 = 64$ $2^{10} = 1024$ } soustraire la
Fin	complexe	$2^3 = 8$
Type de fonction: Iterative, utilisation de boucle		val de départ
"range(d, f, step)" \Rightarrow déterministe; pour i variant de 1 à N: $O(N)$		Nombre réel: $x = \sum_{i=-n}^m 10^i \cdot x_i = \sum_{i=-n}^m 2^i \cdot b_i$
indéterministe; tant que a > 2 faire: $O(\frac{N}{2})$		(virgule flottante) ex: codage: $0,349803 \times 10^2 = -34.9803$
• Recursivité: Rappel de la fonction des conditions		signe mantisse exposant
exemple: {	instruction	généralisation $\rightarrow (-1)^s \times (1 + \sum_{i=1}^{23-\text{bit}} m_i \cdot 2^{-i}) \cdot 2^{\text{expos}}$
else	retourner fonction (N+1)	(type float) $= (-1)^s \times \text{mantisse} \times 2^{p-2^{-1}+1}$
returne O(N)		$m \in [1; 2]$ $p \in [1, 2^{-2}]$
Passage Recursif \leftrightarrow itératif: Analyse recursion peu étages		Opérateur de décalage sur N bits $a \ll n = \sum_{i=0}^N b_i \cdot 2^i = \frac{a}{2^n}$
→ renvoyer version recursive \geq version itérative		\rightarrow utilisable pour calculs de $\sqrt{2^k}$ telle que $\sqrt{2^k} = 1 \ll \frac{k}{2}$ (cas pair), $= (1 \ll \frac{k}{2}) \sqrt{2} (\text{cas impair})$
Passage Valeur-adresse: Paramètre scalaire \rightarrow pas d'effet hors fonction (valeur)		
recopie la valeur		
Paramètre tableau \rightarrow visible hors fonction (Adresse)		
des variables		
\rightarrow Affecter un tableau à un autre donne 2 variables pointant vers les m ^{es} éléments		
Algorithmes de Tri		Recherche du zéro.
Par sélection: (échange de valeur)	$O(n)$ $O(n)$	• Séquentiel: Comparaison un à un avec l'écart E
Par insertion	$O(n^2)$ $O(1)$	• Interpolation: Analogie fonction linéaire (estimation par une droite)
Par complexe	$O(\frac{n^2}{2})$ $O(1)$	• dichotomie: Principe diviser pour résoudre
Rapide	$O(2n)$ $O(M)$	Recherche sur f : fonction réel, continue, on connaît l'intervalle de recherche
	$O(N \lg N)$ $O(N)$	Hypothèse: • On sait que la solution est sur l'intervalle $[a, b]$
↓		• Énumération: divise peu intervalle E \rightarrow robuste mais lent
1 fonction recherche		• Dichotomie: isolation de la solution dans intervalle de taille moitié
1 fonction partition		• Position fausse: Dichotomie + interpolation (à l'intersection d'une droite)
	principe recherche dichotomie (diviser pour résoudre)	• On part d'un point proche de la solution
def rdicho(tab[], premier, dernier, def: int)		• Newton-Raphson: Approximation en x _n par sa tangente \rightarrow dérivée nécessaire
\rightarrow milieu = (premier + dernier) / 2 \rightarrow si impair $\frac{3}{2} = 1, \frac{3}{2} = 1,5$		• Sécante: À partir de 2 points, on trace la droite
\rightarrow if (def == tab[milieu]):		\rightarrow Newton-Raphson. $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
→ résultat = milieu		\rightarrow Secante. on suppose $f'(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$
→ else (premier == dernier):		
→ résultat = -1		
→ else (def < tab[milieu]):		
→ résultat = rdicho(tab, premier, milieu-1, def)		
→ else:		
→ résultat = rdicho(tab, milieu, dernier, def)		
→ returnne résultat		

Electrocinétique: $E = RI$ et $R = \rho \frac{L}{S}$, $\frac{E}{\rho} = \frac{I}{S}$, $\frac{E}{\rho} = \frac{V}{L}$

Thermique: $\Delta T = R_{th} \cdot \phi$ et $R_{th} = \frac{1}{k} \cdot \frac{l}{S}$

Magnétisme: $F_{mag} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \cdot \vec{A}$ et $\vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\vec{H}}{S}$, $H = \frac{1}{M_0} \cdot \vec{B}$, $n = N/N_A$, $n = m/M = V/V_m$, $\text{rendez: } m_p = p_s/p_e$, $\text{transfert: } m_n = v_s/v_e$

Hydraulique: $\vec{m} = -\vec{F}_{ext}$

Loi d'Archimède: $P_A = \rho_{fluide} \cdot V_{corp} \cdot g$; $v = \Omega R$

Bernoulli: $z + \frac{v^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} = Cte$; $F = \rho S \frac{dv}{dz}$

$\rho = m/V$; $D_V = m^3/s$; $P = \vec{F}/\vec{S} = Ph/Q_V$

Mathématique:

enracine partielle: $dF = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i$

$f'(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$; Differential: $df = f(x+dx) - f(x)$

arche supérieure: $\frac{\partial^{i+j+k}}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} F = f'_i x^i y^j z^k$

$\rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial y^j} = f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} F$

Produit scalaire: $\vec{u} \cdot \vec{v} = ux' + vy' + zz'$
 $= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

rapport: $\vec{AB} \left| \begin{array}{l} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{array} \right. \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

produit vectoriel: $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 v_2 - u_2 v_1 \\ u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \end{pmatrix} \rightarrow \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v})$

analyse vectoriel:
 $\text{grad } F = \vec{\nabla} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix}$

$\text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

$\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \dots \right)$

ordre 0 = scalaire
 1 = vecteur
 2 = tenseur bilitaire
 Δ = variation totale.
 δ = variation locale.
 ∂ = variation partielle.
 S = quantité élémentaire.

Intégration de Green: $\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$

Intégrale de Stoke: $\int_M dw = \int_{\partial M} i^* w$

Intégrale de Flux-divergence: $\iint_V \text{div } \vec{F} \cdot dV = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$

Gradient: $\iint_V \text{grad } F dV = \iint_S F d\vec{S}$

rotationnel: $\iint_V \text{rot } \vec{v} dV = - \iint_S \vec{v} \wedge d\vec{S}$

Intégrale: $\iint_R f(x, t) dx dt = \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} f(x, t) dt dx$

Coordonnées cartésiennes: $\vec{OM} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

(V=πr²h) cylindrique: $\frac{d\vec{r}}{dt} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$, $P = \|\vec{OM}\|$, $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, $z = h$

(V=4/3 πr³) sphérique: $\frac{d\vec{r}}{dt} = r^2 \sin \theta \cos \theta \hat{i} + r^2 \sin \theta \sin \theta \hat{j} + r \hat{k}$, $x = \rho \sin(\theta) \cos(\phi)$, $y = \rho \sin(\theta) \sin(\phi)$, $z = \rho \cos(\theta)$

Position: $\vec{OM} = \rho \hat{u}_R$

Vitesse: $\vec{v}(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt}$

accélération: $\vec{a}(M) = \frac{d^2 \vec{O}}{dt^2}$

Fréquentiel: W indépendant !
chemin suivie

Statique: $\text{PFS} \Rightarrow \sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R} = \vec{N} + \vec{F}$ action réciproque

Dynamique: $\text{PFD} \Rightarrow m \cdot \vec{a} \left(\frac{M}{R} \right) = \sum \vec{F}$

→ projection des forces sur l'axe: $J \cdot \vec{\alpha} = \sum \vec{M}$

Gravitation: $\vec{F} = \frac{G(m_1 \cdot m_2)}{r^2} \hat{r}$ lavorien

EP: $dW \left(\frac{F}{R} \right) = \vec{F} d\vec{OM}$ L=T-V

EC: $\frac{1}{2} \cdot m \cdot \left\| \vec{v} \left(\frac{M}{R} \right) \right\|^2$ S=0

moment cinétique: $\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge \vec{p}$, $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{z}$

Transformation de Lorentz (relativité restante):
 $\Delta t' = \Delta t - v \cdot \frac{\Delta x}{c^2}$; $\Delta x' = \Delta x - v \cdot \Delta t$

quantité de mouvement: $\vec{p} \left(\frac{M}{R} \right) = m \cdot \vec{v} \left(\frac{M}{R} \right)$

Loi de Biot et Savart:
Loi de Coulomb: $\vec{F}_{1/2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3}$

E: $\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r^2}$ soit $\vec{F}_{1/2} = \vec{E}_1 \cdot q_2$

Laplace: $d\vec{F} = I \vec{dl} \wedge \vec{B}$

Équation de Maxwell:

forme local:

Gauss: $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$; $\rho(r, t) = q \delta^3(\vec{r})$

Thomson: $\text{div } \vec{B} = 0$; $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$; $B = 4\mu_0(H + M)$

Faraday: $\vec{\text{rot}} \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$; $\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

Amperé: $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Force de Lorentz: $F = q \vec{E} + q \vec{v} \wedge \vec{B}$; Onde E.M.: $\vec{H} = \vec{E} \wedge \vec{H}$

Thermodynamique:

Loi de conservation: $\Delta E = \Delta U + \Delta E_C + \Delta E_P = \alpha W + \alpha Q$; $PV = nRT$

enthalpie: $H = U + PV$; $dH = T \cdot dS + V \cdot dP$; $Q = m \int_{T_1}^{T_2} C dt$; $L = L_0 (1 + \epsilon t)$

Coefficient thermodynamique: dilatation: $\alpha = \frac{1}{V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T}$; compressibilité: $\beta = \frac{1}{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial T}$

Loi de l'Entropie: $\sum \frac{dQ}{T} \leq 0$ irréversible \rightarrow réversible Cycle de Carnot: $A \xrightarrow{C} B \xrightarrow{B} C \xrightarrow{A} A$ adiabatique

Diagramme de Phase: $\text{liquide} \xrightarrow{\text{point critique}} \text{vapeur}$ point triple

Theorie cinétique des gaz: $\sum \frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} PV = \frac{3}{2} RT$

Physique quantique: Effet photoélectrique: $E = h\nu = W + E_C$; $c = \nu \cdot \lambda$, $\nu = \frac{1}{T}$; $P = \hbar$

Equation d'onde: $\Delta \Psi = \vec{\text{grad}} [\text{div } \Psi] - \text{rot} [\text{rot } \Psi] = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t}$

Equation de Schrödinger: $\Psi \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x) \Psi$; $dP = |\Psi|^2 d\zeta$

$\Psi_{n,l,m} = R_n(l(r)) \cdot Y_{l,m}(\theta, \phi)$

Oscillateur (poudre): $w_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{m}}$; centre de masse: $w_0 = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m}}$

Resonance: $m \frac{d^2 z}{dt^2} + kz = 0$; Pendule: $L \frac{d^2 \theta}{dt^2} + g\theta = 0$; Électrique: $L \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$

$j = C du/dt$
 $u = L di/dt$

