TOPOLOGIE :

- **Principe et problématique :** Topos - logia ⟺ le lieu - l'études
  - ↳ généralisation concept d'espace et de distance.
  - ↳ Défini le concepte de continuité / limites
    - → 2 objets sont equivalent si l'on peut les deformer de l'un à l'autre de facons continu (sans dechirement / recollement)

- **Transformation topologique :**

Une transformation topologique entre espaces X et Y est une application

$$f : X \longrightarrow Y$$ vérifiant :

- f est bijective
- f est continue
- f^{-1} est continue

} Les 2 espaces X et Y sont appelés homéomorphes (similaire)

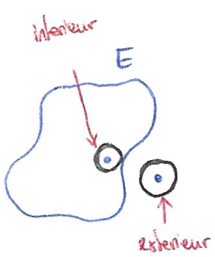
→ invariant après transformation → voisinage (bord + int/ext)

- **Espace metriques :** → structure : espace + distance : (E, d)
  - On appelle distance sur E, toute application "d" definie sur le produit $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$. Les éléments sont des points.

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

propriétés :
- Symetrie $\forall (a,b) \in E^2, \; d(a,b) = d(b,a)$
- separation $\forall (a,b) \in E^2, \; d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
- inegalité triangulaire $\forall (a,b,c) \in E^3, \; d(a,c) \leqslant d(a,b) + d(b,c)$

- ~~Voisinage~~ :
- **Boules :** Type de voisinage particulier dans un espace metrique.

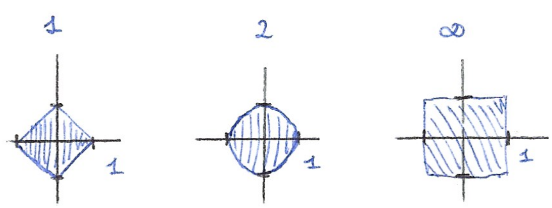


fermée : $B_f(a, r) = \{ x \in E \mid d(x,a) \leqslant r \}$ si $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

ouverte : $B(a, r) = \{ x \in E \mid d(x,a) < r \} = \;]a-r, a+r[$ (definition intervalle)

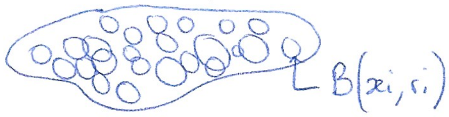
→ Dans un espace à 2 dimensions $\mathbb{R}^2$, la boules unité $B(0,1)$, on a plusieurs normes :

- normes 1 : $\|\vec{x}\| = |x_1| + |x_2|$
- normes 2 : $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}$
- norme "infini" : $\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$



- **Espace métrique (suite)**
  - Sphère : (généralisation) Bord d'une boule : $S(a,r) = \{x \in E \mid d(x,a) = r\}$
  - Diamètre d'un ensemble : $A \subset E$, $\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(x,y) \mid x, y \in A\}$, bornée si $< \infty$
  - Distance entre 2 parties : $d(A,B) = \inf\{d(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$ $\Leftrightarrow$ plus petite distance

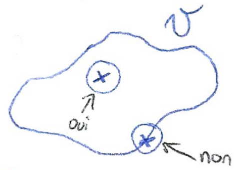
- **Espace topologique :** $\rightarrow$ Structure : espace + topologie : $(E, \mathcal{O}_d)$
  - Un espace topologique est un ensemble E muni d'une collection $\mathcal{O}$ de sous-ensemble, qu'on appelle : les ouvert de E, vérifiant :
    - $\emptyset$ et E sont ouvert
    - toute réunion d'ouvert quelconque est ouvert (dénombrable)
    - toute intersection finie d'ouvert est ouvertes.
  - $\rightarrow$ Une telle collection $\mathcal{O}$ s'appelle une topologie sur E. $\rightarrow \mathcal{O}_d = \{\mathcal{O} \subseteq E\}$
  - Ouvert $\mathcal{O}$: $\mathcal{O} \subset E$, est ouvert ssi, $\forall x \in \mathcal{O}$, $\exists r > 0$, $x \in B(x,r) \subset \mathcal{O}$



  - $\exists r_i > 0$, $\mathcal{O} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B(x_i, r_i)$

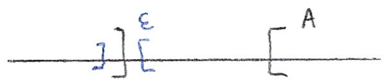
  - Base : Recouvrement de E, $B \subset \mathcal{O}$ ssi : • $\forall \mathcal{O} \in \mathcal{O}_d$, $\exists \underbrace{(u_i)_{i \in I}}_{\text{suite}} \in B$, $\mathcal{O} = \bigcup_{i \in I} u_i$
    - • $\forall \mathcal{O} \in \mathcal{O}_{d \setminus \{\emptyset\}}$, $\forall x \in \mathcal{O}$, $\exists U \in B$, $x \in U \subset \mathcal{O}$

  - Voisinage d'un point : $v \in \boxed{\mathcal{V}(x)}$ si $\exists \mathcal{O} \in \mathcal{O}_d$, $x \in \mathcal{O} \in v$



prérequis

  - Point d'adhérence : (espace métrique) $A \subset E$, $x \in \bar{A}$ si $\forall \varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$
    - $\rightarrow \overset{\xrightarrow{\text{intérieur}}}{\mathring{A}} \subset A \subset \bar{A}$



  - Frontière (espace métrique) : $Fr(A) = \bar{A}_{|\mathring{A}} = \overset{\circ\circ\circ}{A}$

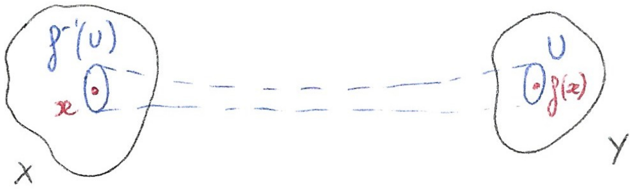
  - Valeur d'adhérence : Point d'une suite (u_n) de E près duquel s'accumule une infinité de terme à la suite
    - $\rightarrow (x_n)_{n \geq 1}$ est convergente ssi $\exists x \in E$, $\forall v \in \overbrace{\mathcal{V}(n)}^{\text{voisinage}}$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\underset{\text{rang}}{\forall n \geq N}$, $\boxed{x_n \in v}$

(espace métrique) $\rightarrow (E, d)$, $(x_n) \rightarrow x$; $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, $\forall n \geq N \rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$ et $x_n \in B(x, \varepsilon)$

converge vers un ouvert

① Continuité : (dans un espace topologique)

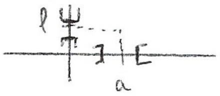
- Une application $f : X \to Y$ entres espace topologique est dites **continues** si la préimage de tout ouvert est ouverte. Càd que pour tout ouvert $U \subset Y$, sa préimage (aussi appellé image reciproque) $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X.



$$f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \in U\}$$

→ Dans un espace metrique : $\lim (f(x)) = l$ ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists n > 0, \forall x \in A, d(x,a) < n \}$ alors $\delta(f(x), l) < \varepsilon$

↳ limite (ε, δ)

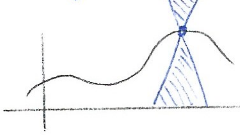


- Caracterisation de la limite : f est continu en a, ssi $\forall \omega \in \mathcal{V}(f(a)), f^{-1}(\omega) \in \mathcal{V}(a)$

- Théorème : (homéomorphisme) Soit E, F deux espace topologique, f est une application de E dans F continue. Les proprietes suivante sont equivalentes :
  - $\forall \theta \in \theta_{d_F}^*$ alors $f^{-1}(\theta) \in \theta_{d_E}$
  - $\forall A \in F$ fermée, $f^{-1}(F)$ est fermé de E

- Application Lipschitzienne : Propriété de regularité plus forte que la continuité.

  Def : Soit 2 espace metrique $(E, d_E), (F, d_F)$. $f : E \to F$ est k-lip si



$$\forall (x,y) \in E^2,\ d_F(f(x), f(y)) \leq k \cdot d_E(x,y)$$

→ si . $k \in]0,1[$ alors f est contractante (→ clé du Th du point fixe)

  . f est bi-lip ssi f bijective et f, f^{-1} sont lip.

- Theoreme d'accroissement fini : $\exists c \in]a,b[, \left| \dfrac{f(x) - f(y')}{x - y} \right| = |f'(c)| \leq M$ (bornée)

- Application uniformement continu : propriété de continuité sur espace continu ⟺ plus general que espace métrique

  Ecart : $d : E \times E \to \overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty]$

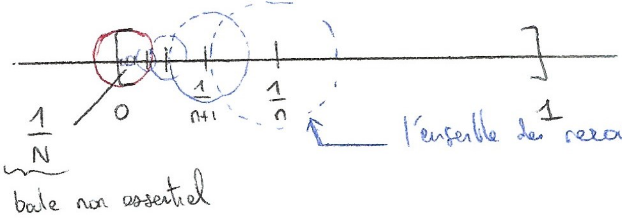
  $f : (E, d) \to (F, \delta)$ uniformement continu si :

  → $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0, \forall x, y \in E$

  Alors $d(x,y) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$

2 Compacité : Ensemble fermé + bornée.
↳ pas d'équivalent cadre général de la topologie.

- Un espace topologique K est dit compact si tout recouvrement de K par des ouverts admet un sous-recouvrement fini. ⇒ Def Borel-Lebesgue.



$A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$

← l'ensemble des recouvrement, ne recouvre pas [0

Propriété. $\forall (\theta_i)_{i \in I}$ famille d'ouvert de E, si $K \subset \bigcup_{i \in I} \theta_i$ alors $\exists J \subset I$ où $K \subset \bigcup_{j \in J} \theta_j$

- E est compact si $\forall (\theta_i)_{i \in I} \in \theta_{dE}$, si $E = \bigcup \theta_i$ alors $\exists J \subset I$ où $E = \bigcup_{j = J} \theta_j$

- Th. fondamentale de Bolzano-Weierstrass : Un espace metrisable K est compact ssi toute suite $(x_n)_{n \geq 1}$ d'élément de K admet au moins une valeur d'adhérence dans K. (avec $\phi \notin K \subset E$)

- Th de Heine : Si K metrique compact, alors f est continu sur K
  → f est unif continu sur K.

- Th de Stone-Weierstrass : L'ensemble des fonction polynomiale $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $(\mathcal{C}(E, \mathbb{R}), \|\cdot\|)$ → l'ensemble des fct continu

- Densité dans $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ signifie que pour toute intervalle ouverte non vide de $\mathbb{R}$, contient une infinité de rationnel.
(prérequis complet)

Propriété d'Archimède : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n > x$

- Theoreme : L'image direct $f(K)$ d'un compact K par une application f est compact
  → on a forcement un minimum et un maximum d'une fonction $\neq \infty$

Espace complet : Espace metrique dans lequel toute suite de Cauchy converge.

- $\mathbb{Q}$, $\exists (x_n) \subset \mathbb{Q} \mid x_n \to x$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $\mathbb{Q}$ incomplet

- $\mathbb{R}$ est complet car $\forall (x_n) \subset \mathbb{R}$, $x_n \to x$ alors $x \in \mathbb{R}$ alors $\mathbb{R}$ complet

- **Espace complet (suite)** : (E,d) métrique
  - Suite de cauchy (dans espace métrique) : On pose la distance plutôt que la valeur absolue.
    ↳ def : $(x_n)_{n\geq 1} \subset E$, suite de cauchy ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : \boxed{d(x_n, x_m) < \varepsilon}$

    propriétés : ① $(x_n)_n$ de cauchy est bornée
    ② si $(x_n)_{n\geq 1}$ a une valeur d'adhérence $v \in E$ et si $(x_n)_n$ cauchy dans E
    alors ~~~~ $(x_n)_{n\geq 1} \to v$
    ③ Toute suite convergente est de Cauchy.

(Th) - Relation espace complet/fermé : (E,d) complet, si $F \subset E$ avec $(F, d_{Fermé})$ alors F complet.
  - Théorème des segment emboîtés : → caractérisation d'un complet par des fermée.
    Soit (E,d) complet, ssi $\forall (F_n)_{n\geq 1}$ suite décroissante tq : $\dim(F_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
  - Théorème de Baire : $(O_n)_{n\geq 1}$ suite d'ouvert "dense" dans E alors $\bigcap_{n\geq 1} O_n = E$
  - Théorème de Banach-Picard (point fixe) : Si $f : E \to E$ continu et contractante (voir continuité)
    alors la fonction f admet un unique point fixe $(a_n)_{n\geq 1} \to a \in E \Leftrightarrow f(a) = a$

- **Connexité** : Façon de distinguer les espaces (invariant) par classification (déchirement/recollement (interdit))
  ↳ . Deux points $x, y \in X$ sont dans la même composante, s'il existe un chemin entre eux. càd une application continu $c : [0,1] \to X$ tel que $c(0) = x$, $c(1) = y$
  - La composante connexe de x est l'ensemble des $y \in X$ qui peuvent être lié à x par un chemin.
  - Un espace X, s'appelle connexes par arcs, s'il y a qu'une seule composante connexes.

Définition : E connexe si $\nexists u, v \in O_E$ tq $E = u \cup v$ avec $u = \emptyset$ ⓐ $v = \emptyset$

propriété : ① les partie de E ouvert et fermé sont $\emptyset$ et E.
② si ① vrai, alors $f : E \to \{0,1\} \Rightarrow$ continu $\Rightarrow$ constante
③ si $\forall f$ vérifie ② alors E connexe.

- **Espace normée (de Banach)** Structure compatible avec "algèbre linéaire → analyse fct."
  ↳ E est un K-espace vectoriel si complet (métrique) et muni d'une norme càd :

$$\boxed{\mathcal{N} : E \to \mathbb{R}^+}$$

- Espace normé (suite)

- Homeomorphisme : $f : (E, \mathcal{O}_{dE}) \to (E, \mathcal{O}_{dF})$ homéomorphe ssi f bijective, et f, f^{-1} continu.

  ↳ sur les boules : $\varphi : E \to B(a,r)$
  $$x \mapsto a + \frac{r x}{1 + \|x\|}$$

  → Si l'application de $E \to F$ est linéaire, $(f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y))$ alors isomorphisme

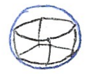
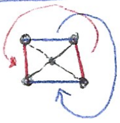
- Theoreme de Riez : Soit E, un espace normé, alors $\dim(E) < \infty$
  $\Leftrightarrow Bf(0,1)$ est compacte.

- Espace de Hilbert : Un espace de Hilbert est un espace prehilbertien complet, càd un espace de Banach, dont la norme $\|\cdot\|$ découle d'un produit scalaire (ou hermitien $\langle\cdot,\cdot\rangle$) tel que : $\|x\| = \sqrt{\underbrace{\langle x, x\rangle}_{\text{produit scalaire dans } \mathbb{C}}}$

- Dimension topologique : (invariant)
  ↳ La dimension topologique d'un espace X est égale à "n" si pour tout recouvrement de X par des ouvert suffisament petit, il existe un point de X qui est dans au moins $n+1$ ouvert.

  ↳ montre que $\mathbb{R}^m \not\sim \mathbb{R}^n$ pour $m \neq n$

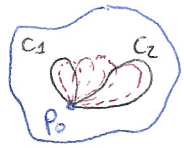
- Caracteristique d'Euleur : Permet de verifier si 2 objets "geometrique" sont homéomorphes.
  Pour un polyèdre, est defini par : $\chi = \overset{\text{sommet}}{S} - \overset{\text{arête}}{A} + \overset{\text{face}}{F}$

  - cube inscrit :  $= 2$
  - Tore :  $= 0$

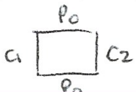
- Groupe fondamentale : Structure $(G, *)$
  ↳ m̂ propriétés qu'un groupe.

  - homotopie : Une homotopie entre 2 chemin c_1 et c_2 est une application continue

  $h : [0,1] \times [0,1] \to X$ verifiant :
  - $h(0,x) = c_1(x)$, $\forall x \in [0,1]$
  - $h(1,x) = c_2(x)$, $\forall x \in [0,1]$
  - $h(t,0) = h(t,1) = P_0$, $\forall t \in [0,1]$

  → Deux chemins lié par une homotope, s'appellent homotopes. L'ensemble des chemins homotopes à un chemins donnée s'applle sa classe d'homotopie.

  On peut representer sous forme carré  → la composition forme le groupe fondamentale
