ALGEBRE

Principes :

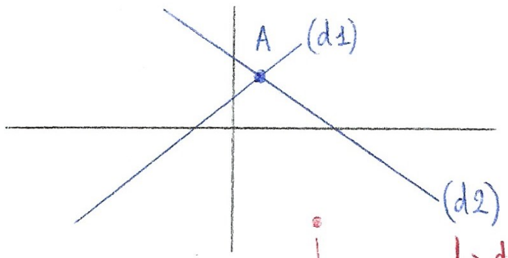
- Notions d'equation et de ses propriétés. L'equation est une relation d'egalité entre variables et dont le "but" est resoudre en determinant les valeurs → "base" de resoudre un problème quelconque.

exemple : ↳ $a \cdot x + b = c \longrightarrow x = \dfrac{c-b}{a}$ } solution equation lineaire.

- Systeme lineaire à 2 inconnues :

↳ • $a x + b y = c \cdot (d_1)$

• $d x + e \cdot y = f \cdot (d_2)$



. le point d'intersection A est solution

↳ $dx + e \cdot y - f = 0$

↳ $d \cdot x + e \cdot y - f \neq 0$

- Parametrisation d'une droite : Soit (d) passant par $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \\ w_2 - w_1 \end{pmatrix}$

arrivée ↑ ↑ départ

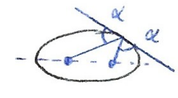
alors $(d)\begin{cases} x = x_A + a \cdot k \\ y = y_A + b \cdot k \\ z = z_A + c \cdot k \end{cases}$ parametre $k \in \mathbb{R}$

- Identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

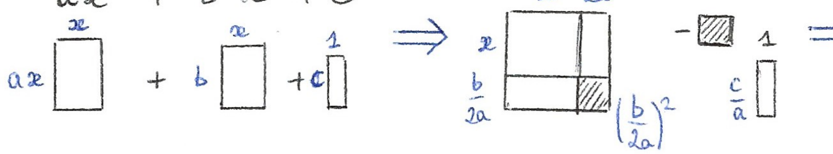
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

} Utilisation pour dev pt / reduire ecriture algébrique.

- Intersection d'un cone par un plan :  → Conique ⇒ Ellipse : $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ - 

- Complétude du Carré : equation du second degré ⟶ forme canonique

$ax^2 + bx + c$

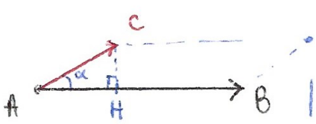


$\Longrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$

$\alpha \qquad \beta$

$\Longleftrightarrow a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2}\right)$ — Δ discriminant

- Produit scalaire ⇔ projeté :



$|\vec{AH}| = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos(\alpha) = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|$

- Produit vectoriel ⇔ surface ↳ + perpendiculaire ⇔ determinant dans base orthonormé direct. $a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ → FIN

- Polynomes :

↳ Expression formée uniquement de produit et de somme de constante et d'indeterminée.

$a_n \cdot X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ avec $n < \infty$

↳ Définition initiales : polynome = N-uplet $(a_0, \dots, a_n) \in A^{(\mathbb{N})}$ un anneau commutatif où N est le degrée du polynome.

Probleme : si $(a_n = 0)$ ou $(1, 1, 1, \dots) \times (1, 0, 0, \dots) \Rightarrow$ n'est plus un polynome de degrée N.

- Suite presque nulles : On note $A^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites d'élément de $\mathbb{A}$ dont tout les terme sont nulle à partir d'un certain rang.
  - exemple : $P = (2, 8, -3, 0, 0, 0, \dots)$ et $Q = (0, 0, 1, 0, 2, 0, \dots)$

↳ opération + et × : $(a+b)_k = a_k + b_k$; $(a \times b)_k = \sum a_i \cdot b_{k-i}$ avec $\underset{\text{suite}}{\tilde{a}} = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$

- Indeterminée : → construction polynome :
  - $\mathbb{1} = (1, 0, 0, \dots) = X^0$
  - $X = (0, 1, 0, \dots) = X^1$
  - $X^2 = (0, 0, 1, 0, \dots)$

  $P = (2, 8, 5, 0, \dots)$ ⇓ $P = 2 \times \mathbb{1} + 8 \times X + 5 \times X^2$

- Definition formelle : Soit $P = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite presque nulle d'élément de $\mathbb{A}$

  ↳ $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, k > n \Rightarrow a_k = 0 \Rightarrow P = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot X^k$

  → P est appelé " polynome à coeff dans $\mathbb{A}$ ", l'ensemble des polynomes est notée $\mathbb{A}[X]$

- fonction polynomiale : fonction obtenu en évaluant un polynomes ≠ Polynome car valeur non d'indertermi…
  ↳ sauf si corps $\mathbb{A}$ infini

  ↳ $p : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$

  Aussi dans A cyclique (es fini), une fct polynomiale peut donner une fct nulle

- Polynome dans anneau cyclique : $\mathbb{A} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$ → $\dot{1} + \dot{0} = \dot{0} + \dot{1} = \dot{1}$ ← classe

  $\dot{1} + \dot{1} = \dot{0}$

  $\dot{1} \times \dot{1} = \dot{1}$ → $X^a + X^a = 0$, $X^a \times X^b = X^{a+b}$

  ↳ exemple : $(1 + X + X^3) + (1 + X + X^2) = X^2 + X^3$

  $(1 + X + X^3) \times (1 + X + X^2) = 1 + X^4 + X^5$

- Vocabulaire :
  - degrée de P, $\deg(P)$ telque : $n = \max\{k \mid a_k \neq 0\}$ $-\infty$ si $P = 0$
  - valuation de P, $\operatorname{val}(P)$ telque : $\min\{k \mid a_k \neq 0\}$ $+\infty$ si $P = 0$
  - coefficien dominant : " a_n " ; terme constant " a_0 "
  - polynome unitaire si $a_n = \mathbb{1}_A$

- Theoreme degrée :
  - Si $\mathbb{A}$ intègre (commutatif) alors $\forall P, Q \in \mathbb{A}[X]$ ~~dans a~~ : $\deg(P \cdot Q) = \deg P + \deg Q$
  - $\forall P, Q \in A[X]$ si $\deg(P) \neq \deg(Q)$ alors $\deg(P+Q) = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$

    sinon $\deg(P+Q) \leqslant \deg(P)$

- Groupe Abelien : $(A[X], +)$ un groupe comutatif d'élement neutre $0_{\mathbb{K}[X]} = (0, 0, 0, \dots)$

- Theoreme de Lagrange : Pour tout groupe fini G et tout sous groupe H de G, l'ordre de H (son cardinal → nb élement) divise celui de G :

$$|H| \text{ divise } |G|$$

- On note G/H l'ensemble de classe d'équivalence pour la relation de congruence modulo H.

- <u>Anneau commutatif</u> : $(A[X], +, \times)$ car multiplication distributive.
  ↳ <u>prop</u> : Si $\mathbb{A}$ est intègre, alors $\mathbb{A}[X]$ est intègre.

- <u>$\mathbb{K}$-espace vectoriel</u> : $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$ (loi externe) $\Big\}$ $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$
  $(\alpha, P) \longmapsto \alpha \cdot P = \alpha P$ → m̂ prop qu'un corps.
  ↳ si $(\alpha \cdot \beta) \cdot (P Q) = (\alpha \cdot P)(\beta \cdot Q)$ alors $\mathbb{K}$-algèbre.

- <u>Base</u> : Pour $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X], \deg(P) \leq n\}$ s.e.v de $\mathbb{K}[N]$, on a : (Base) $\{1, X, \dots, X^n\}$

- <u>Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$</u> : Etapes : $\begin{array}{c|c} X^n + 3X^2 & X+\alpha \\ X^{n-1} + \alpha X^{n-1} & X^{n-1} \end{array}$ } resolvable ?
  - <u>Theoreme</u> : Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$, il existe un couple $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, verifiant $\begin{cases} A = B \cdot Q + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$
  ↳ <u>ASTUCE</u> : $\dfrac{A}{Q} = a \cdot x + b + \dfrac{C}{Q}$ (reecriture)

- <u>Algorithme de Ruffini Horner</u> : calcul successif $\boxed{P(x) = (\dots(((a_n x + a_{n-1}) \cdot x + a_{n-2}) x + a_{n-3}) \dots) x + a_0}$

<u>dans $\mathbb{A}$</u> : <u>Th</u> : Soit $A, B \in \mathbb{A}[X]$, si le coeff dominant de B est un element inversible de $\mathbb{A}$, alors il existe un unique couple $(Q, R) \in A[X]^2$ → si 2 variables aussi !

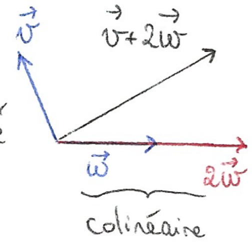
- <u>Racine</u> : Soit $P \in \mathbb{A}[X]$ ~~est non nul et de degré~~ et soit $\alpha \in \mathbb{A}$, on dit que α est racine de P, si et seulement si $P(\alpha) = 0$ → $P(X) = (X - \alpha) \cdot Q(X)$

- <u>Racine et division euclidienne</u> : Soit $P \in \mathbb{A}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{A}$, α est une racine de P, si et seulement si P est multiple de $X - \alpha \Leftrightarrow R = 0 \Rightarrow$ ⚠ Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
  → X^3 n'implique donc pas 3 racine ! si polynome compliqué, racine evidente $\alpha = \pm 1$

- <u>multiplicite</u> : $N = \{ N \in \mathbb{N} \mid (\cancel{X} - \alpha)^n \text{ divise } P \}$ → N non vide et majoré

- <u>Theoreme fondamentale de l'algebre</u> (Alembert-Gauss) : Tout polynome non constant à coefficient complexes admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$ → $1 = \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n$ pour $\forall k \in \mathbb{Z}$

- <u>Espaces vectoriel</u> : (e.v.)



  ↳ Ensemble d'objet respectant les proprietes d'un <u>vecteurs</u> : addition + linearité
    ↳ vecteur, fonction numérique, suite dans $\mathbb{N}$, matrice, ...

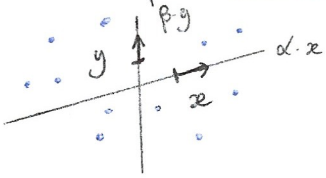
- <u>Definition $\mathbb{K}$-ev</u> : $\mathbb{K} \times E \longrightarrow E$ $(E, \mathbb{K}\text{-ev})$
  $(a, x) \longmapsto a \cdot x$

  ↳ <u>proprietés</u> :
  - $(E, +)$ est un groupe comutatif ⟨ • Associativité • + commutative • 0_E element neutre pour + • $\forall x \in E, \exists y \in E, x + y = 0_E$
  - $\forall x \in E$, $1_{\mathbb{K}} \times x = x$
  - Distributivité de "$\times$" par rapport à "+"

↳ pour montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel, montrer $F \subset e.v$ (sous e.v)

- Sous espace vectoriel : $F \subset E$, ① $F \neq \emptyset$ $(0_E \in F)$

② F est stable par combinaison linéaire : $\forall x, y \in F$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a : $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F$



- tout les vecteurs (representation par point) correspond au S.E.V. engendré par x et y.

→ si respecte ① et ② → s.e.v → e.v.

ex : $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 0\} \rightarrow (0,0)$ et $\alpha(x,y) + \beta(x',y') \in F$

- Famille de vecteur : soit E un $\mathbb{K}$-ev et I ensemble quelconque

$$f : I \longrightarrow E \qquad i \longmapsto (u_i)_{i \in I} = f(i)$$

avec $I = \{1, \dots, n\}$ et $(u_i)_i = (u_0, \dots, u_n)$ (combinaison linéaire x) $x = \sum_{j \in J} \alpha_j \cdot u_j$

↳ S.e.v engendré par famille : $A \subset E$: $vect(A)$: l'ensemble des C.L. de famille d'élmt de A.

$vect(A)$ est le s.e.v. de E si $A \subset F$ où F un s.e.v alors $vect(A) \subset F$

- Famille génératrice : $(u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteur de E, est dite generatrice si :

$$E = vect(u_i)_{i \in I} \Leftrightarrow \forall x \in E, \exists (\alpha_i)_{i \in I} \in \mathbb{K} \text{ telque: } x = \sum_{i \in I} \alpha_i \cdot u_i$$

- Famille lié : $(u_i)_{i \in I}$ est dite lié si $\exists j \in I$, $u_j \in vect((u_i)_{i \in I})$

↳ revient à verifier si colinéaire

- Famille libre : $(u_i)_{i \in I}$, $\forall J \subset I$ fini, $\sum_{i \in J} \alpha_i \cdot u_j = 0$ alors $\forall j \in J$, $\alpha_j = 0 \Leftrightarrow$ non lié

- Base d'une famille libre : $(u_i)_{i \in I}$ est une base ssi generatrice minimal et libre maximal

- Theoreme de la base incomplete : si $B = (v_i)_{i \in I}$ une famille generatrice et $(u_i)_{i \in I}$ une famille libre de E, alors $B' = \{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_k\}$ est une base ⚠ sous les doublons

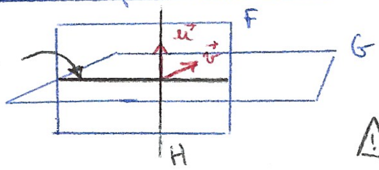
- Dimension : E un $\mathbb{K}$-ev, est de dimension fini ssi $\forall$ famille generatrice fini, tq : $\dim E = card(B)$ ↑ Base

prop :
- Toute les bases de E, ont le m̂ cardinal
- Toute famille de $n+1$ vecteur est lié ↳ ex : $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ $(i$ et $1)$
- $\mathcal{F}$ libre $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ generatrice $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ est base ($\mathcal{F}$ famille de vecteur $(e_1, \dots, e_n)$)

↳ si $F \subseteq E$ (s.e.v) et $\dim E = \dim F$ alors $\boxed{E = F}$

• **Somme d'espace vectoriel** : soit $F \leqslant E$ et $G \leqslant E$, somme ⟺ $F \cup G$

FnG



dimension : $\dim(F+G) = \dim(\text{vect}(F\cup G)) = \dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)$

avec $\text{vect}(F\cup G) = \{f+g \mid f\in F, g\in G\} = \{\sum \alpha_i f_i$ ou $\sum \gamma_i g_i\}$

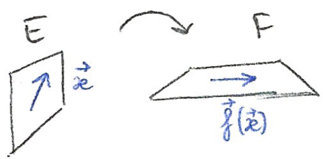
⚠ pour $H \leqslant E$ et $\vec u \in H$, $\vec v \in G$, $\vec u+\vec v \notin H\cup G$

• **Somme directe** : $F \oplus G \iff F \cap G = \{0\}$ alors $\dim(F\oplus G) = \dim F + \dim G$

• **Sous espace supplémentaire** : G est supplémentaire de F si $E = F \oplus G$

• **Application linéaire** : E et F deux espaces vectoriel, $\forall x \in E$, $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E.

on a : $\mathcal{L} ; E \to F$
$\vec x \mapsto f(\vec x)$



• $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot e_i$

• $f(x) = f(\sum \alpha_i \cdot e_i) = \sum \alpha_i \cdot f(e_i)$

↳ propriétés
• $\forall x \in E$, $f(-x) = -f(x)$
• $f(0_E) = 0_F$

→ si $\mathcal{L}(E,E)$ alors endomorphisme ; → si $f(E,F)$ linéaire et bijective → isomorphisme
+ $F = E$ alors → automorphisme.

• **Matrice** : Toute application linéaire $E \to F$ est équivalent à une matrice

$$\mathcal{L}(E,F) \iff M_{\underset{\text{dim } E}{p},\underset{\text{dim } F}{q}}(\mathbb{K})$$

$$x \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \overset{M_{2,2}}{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}} \cdot \overset{\vec v}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

"déformation"

• **Théorème d'isomorphisme** : E de base B, F de base B', E, F e.v dimension fini, alors :

$$\Psi : \mathcal{L}(E,F) \to M_{n,p}(\mathbb{K})$$
$$f \longmapsto \text{Mat}_{B,B'}(f)$$

isomorphisme tq. $\mathcal{L}(E,F) = \dim M_{n,p}(\mathbb{K}) = n \times p$.

• **Image d'une famille de vecteurs** : $f \in \mathcal{L}(E,F)$, dimension fini
↳ • si f injective, alors l'image d'une famille libre est libre
• si f surjective, alors l'image d'une famille génératrice est génératrice.

• **Théorème du rang** : $\dim E < \infty$ avec $\ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$

• $\forall f \in \mathcal{L}(E,F)$: $\dim(E) = \dim \ker(f) + \underbrace{rg(f)}_{\text{dimension de l'image de } f} = \dim \ker(f) + \dim(\overset{\text{image}}{\text{Img}}(f))$

• $f \in \mathcal{L}(E)$, $E = \ker f \oplus \text{Im}(f) \iff \ker f \cap \text{Im} f = \{0_E\}$

Rappel : Noyau = mesure non injectivité

- **Matrice de passage :** $P_{B \to B'} = \underset{B',B}{Mat}(Id) = \begin{pmatrix} e_1' \cdots e_n' \\ \\ e_1 \cdots e_n \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} e_1 \\ \\ e_n \end{matrix}$ • $\left(P_{B\to B'}\right)^{-1} = P_{B' \to B}$

- **Changement de coordonnée :** $x \in E$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vecteur collone dans B ; $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ dans B'

  alors $X = P_{B\to B'} X'$ et $X' = P_{B\to B'}^{-1} X$

- **Changt base matrice :** $f : \underset{Bc,B'}{E} \longrightarrow \underset{Bc,B'}{F}$ avec Bc : base evidente dite canonique

  ↳ $M' = P'M_{Bc,Bc}P = M_{B',B'}$

- **Determinant :** Aire caractérisant la deformation apres applicaton lineaire

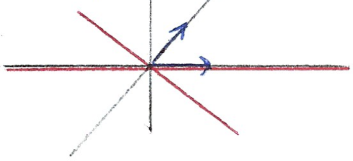
  (Leibniz) $\det(X, X') = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$ → compression de l'espace si $\det(M) = 0$

  $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) . \prod a_{\sigma(i),i} = \det(A)$ ↳ signature permutation → $\varepsilon(\sigma) = (-1)^m$

- **Matrice inversible :** $A \cdot B = B \cdot A = \mathbb{1}_n$ → l'ensemble des matrice inversible $M_n(K)$ se nome $GL_n(K)$ (groupe)

  → $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t com A}$ → transposé de la comatrice :

- **Valeurs propre et vecteur propre :** → Ensemble de vecteur qui lorsqu'on applique une trasformation $\vec{v}$, cela revient à une multiplicaton par un scalaire : λ



  $A \cdot \vec{v} = \lambda . \vec{v} \iff (A - \lambda I_d)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \det(M) = 0$

  → Base propre : $[\vec{v}_1 .. \vec{v}_n]^{-1} . A . [\vec{v}_1 .. \vec{v}_n] = [{}^{\lambda} \ddots {}_{\lambda}]$ → matrice diagonale (calcul simple)

- **Polynome caracteristique :** racine = valeurs propre : $(X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n)$

  ↳ Trace $Tr(A)$ = somme des terme diagonaux

- **Echellonnage et Pivot de Gauss-Jordan :**
  - Echange de 2 lignes
  - Multiplicaton d'une ligne par scalaire non null
  - Ajout du multiple d'une ligne à une autre ligne

  ↳ facilite calcul de A^{-1}
  ↳ resolution systeme d'equation ⇔? substitution combinaison

  matrice augmentée, echellonée : $\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & A \\ d & e & f & B \\ g & h & i & C \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{array}\right)$

- **Forme bilinéaire et quadratique :**

  ↳ E un $\mathbb{K}$-ev et Q fct de E dans $\mathbb{K}$, forme quadratique si $f : E \times E \to \mathbb{K}$ est une forme bilinéaire symétrique : $Q(x) = f(x,x)$; $\frac{1}{4}\left(Q(x+y) - Q(x-y)\right) = f(x,y)$ (polarisation)

⇔ **Produit scalaire :** $\langle X, AY \rangle = ({}^t X) Y = \langle X | Y \rangle$

- **representation matricielle :** $X \to {}^t X A X$: $q(x,y,z) = (x,y,z) A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

- **orthogonalité et singularité :** si symetrique : toujours reflexive : $\forall x,y \in E$, $(x|y) = 0 \iff (y|x) = 0$

  ↳ cas particulier, d'autre propriété de structure existe (symetrique, alternée, defini, ...)

- **Lemme des noyaux (reduction endomorphisme) :** f endomorphisme de E.

  $\bigoplus_{i=1}^{n} V_i = \ker\left[\left(\prod_{i=1}^{n} P_i\right)(f)\right]$ → polynome annulateur via th de Caley Hamilton (?)