FORMULAIRE - MG

disjoint → $\{\emptyset\}$

- **Axiome d'extensionalité** : si $A \subset B$ et $B \subset A$ alors $A = B$; $A \cup B = A \oplus B - \underbrace{A \cap B}$

aussi : Analyse (unicité) → Synthèse (existence)

- **Relation d'équivalence** : relation binaire $\sim$ sur E : réflexive $x \sim x$ (inversible) ; symétrique : $x \sim y$, $y \sim x$; transitive : $x \sim y$, $y \sim z$, $x \sim z$ (circulaire)

- **Application** : fonction → $f : E \to F$; antécédent (unplet) → $x \mapsto f(x) = y$ (image) → unicité "x"

Classement : $E \to E$: endomorphisme ; Bijection $\Leftrightarrow f \circ f^{-1} = e$: isomorphisme

- **Structure interne** $(E, *)$: $\underbrace{a * b \in E \; ; \; (a*b)*c = a*(b*c) \; ; \; e*a = a}_{\text{Groupe}}$ (élément neutre) ; $\underbrace{x(y+z) = xy + xz}_{\text{Anneau}}$ (Distributivité)

↳ stabilité ...... loi composition interne .... associativité ...... commutativité → $a*b = b*a = e$ ← symétrique ⇒ abélien

- **Linéarité** : combinaison linéaire : $f(ax + y) = a \cdot f(x) + f(y)$, si $F \neq \emptyset$ alors sous espace vectoriel $F \subset E$

- **Noyau** : $\operatorname{Ker} f = f^{-1}\{e_F\} = \{x \in E \mid f(x) = e_F\} \overset{\text{matrice}}{=} \{X \in \mathbb{R}^n,\ A \cdot X = 0\} = e_E$ ← injectif - $f(x) = f(x')$

$(E \to F)$

- **Image** : $\operatorname{Im} f = f(E) = \{y \in F \mid \exists x \in E,\ f(x) = y\} = \operatorname{Vect}((\vec{v}_{\text{colonne}})_n) = F$ ← surjectif ; $\sum \alpha v_i$; non colinéaire / → Base si libre-génératrice

- **Th. du Rang** : $\operatorname{Rg}(f) + \dim \operatorname{Ker}(f) = \dim(E)$ avec $\operatorname{Rg}(f) = \dim(\operatorname{Im}(f))$ / ligne

↳ opération élémentaire ← "invariant"

- **Produit scalaire** : (⇔ projection) loi externes : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \langle u, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$ ("transposé") $= xx' + yy'$ → orthonormalisat° : $\frac{\langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle}$

- **Th. isomorphisme** : $f : G \to G'$, $f(xH) \overset{\text{injectif}}{=} f(x)$ ($\operatorname{Ker}(f)$; si groupe) $\leftrightarrow \operatorname{Ker} f$ (quotient) $\leftrightarrow \operatorname{Card}(G) = \operatorname{Card}(\operatorname{Ker}(f)) \times \operatorname{Card}(\operatorname{Im}(f))$

dénombrable ← fini

- **V. Propres** : si $M_{nn} \cdot \vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i \xrightarrow{\det(M) = 0} \exists B_{\text{ase}}$ (réduction) : $M'_\lambda = {}^tP \cdot M \cdot P$ (transposé, passage ; $\det P$; P^{-1}) → $P_M(x) := \det(XI_n - M) = \prod(X - \lambda)$ (Caley Hamilton)

- **Décomposition PLU** : $A = P \cdot \underbrace{L \cdot U}_{\text{Triangulaire}}$ (permutation) → $\det(A) = \det(P) \cdot \det(L) \cdot \det(U)$ et $P = \delta_{i,\sigma(j)} = \{^0_1$

- **Th. fonda algèbre** : $\deg(P) = \max\{a_k^k\}$; $\operatorname{val}(P) = \min\{a_k^k\}$; Polynôme admet racine $\mathbb{C}$: (évidente) $1 = \left(e^{\frac{i 2\pi k}{n}}\right)^n$ (Astuce) → décomposition élément simple dénominateur ↳ $\sum \frac{a_n}{Q_k(x)}$; ↳ $(X - 1)^n = 0$

- **Division euclidienne** : $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$; $\operatorname{PGCD}(P, D) = \operatorname{PGCD}(D, R)$; $\operatorname{PPCM} = \frac{|P \cdot D|}{\operatorname{PGCD}(P, D)}$

(polynôme (suite presque nulle) ; reste ; Diviseur ; quotient)

- **Nombre premier** : Bezout : $a \times m + b \times n = \operatorname{PGCD}(a, b)$ ($\mathbb{Z}$) $= 1$ (si premier entre eux) ; Fermat : $a^p \equiv a \bmod p \equiv a[p]$ → classe d'équivalence dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

- **Th. de Lagrange** : $H < G$ (ss groupe), $|H|$ divise $|G|$ avec $\forall g \in G$, $g^{\operatorname{Card}(G)} = e$ et $\exists g$, $\langle g \rangle = \{g^{\mathbb{Z}}\}$ générateur

- **Parité → contraposé** : $\forall : (n^2 \text{ pair}) \Rightarrow (n \text{ pair}) \Leftrightarrow (n\ \overline{\text{pair}}) \Rightarrow (n^2\ \overline{\text{pair}}) \Leftrightarrow (n \text{ impair}) \Rightarrow (n^2 \text{ impair})$ ↳ $n = 2k+1$

- **Irrationnalité → Absurde** : $\sqrt{2} = p/q$ si p et q pairs → $\sqrt{2}$ pair ⇒ absurde

- **Binôme → Récurrence** :
  - initialisation : $(a+b)^0 = 1$; $\binom{0}{0} a^0 b^{0-0} = 1$
  - récurrence : $(a+b)^n = \sum \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

  avec $\binom{n}{k} = \frac{1}{k!} \cdot \underbrace{\frac{n!}{(n-k)!}}_{\text{arrangement}}$ "k parmis n"

FORMULAIRE - AP

- Formule de Moivre : $(e^{i\theta})^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \underbrace{\cos(n\theta)}_{Re(z)} + i\,\underbrace{\sin(n\theta)}_{Im(z)}$; $\ln(a^n) = n\ln a$
- Critère d'intégrat° Riemann : si $\lim_{t\to a^+} (t-a)^\alpha f(t) = 0$ alors $\int_a^b f(t)\,dt = \frac{b+a}{n} \sum_n^{n\to\infty} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ converge ; $a_k \cdot \mathbb{1}_{A_k}$ (indicatrice) escalier
- Th encadrement (comparaison) : si $f \leqslant g \leqslant h$ et $\lim_a f = \lim_a h = L$ alors $\lim_a g = L$ convergence en "a"
- Critère convergence : simple (local) : $\lim(f_n(x)) \xrightarrow{S} f(x)$; unif (global) : $\sup|f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{+\infty} 0$; absolu : $|\sum u_n| < \varepsilon$ (cauchy)
- Th Continuité : "Espace topologique" $x \in$ Voisinage ouvert $\to$ ouvert ; Espace métrique (E, d), $f : I \to \mathbb{R}$ intervalle, réunion d'intervalle dans $\mathbb{Q}$ (densité) $\to$ connexité ; $([|x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon])$ $\to$ classe de continuité C^n $\to$ homéomorphe si f^{-1} aussi
  ↳ si fermé (boule) : espace Compact ~
- Règles d'Alembert : convergence normal série : $|f_n(x)| \leqslant a_n$; entière (analytique) : $\sum a_n \cdot x^n$ (polynome) indep x ; $\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$ avec $R = \frac{1}{\ell}$
- Série Taylor : $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ avec $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$; usuelle : $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$; $x \ll 1 \to$ voisinage
- Th. fonda analyse : si f, Riemann-intégrable : $A'(x) = f(x)$ et $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ $\xrightarrow{\text{chasles}}$ $\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$
- Règle Hopital : $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x) = 0} = \frac{f'(x)}{g'(a) \neq 0}$ $\longrightarrow$ prolongement par continuité avec $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
  ↳ sinon, restriction ; discontinuité divergence
- Th convergence dominée : $(f_n)_n \in (E, A, \mu) \xrightarrow{S} f$ (partie ; mesure Lebesgue) alors $\lim_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f|\,d\mu = 0 \to$ fct étagée $\in L^p$
- Dérivée : $f'(x) = \frac{df}{dx}$ ↳ forme différentielle ; $(f\circ f^{-1})' = 1$; $v(u)' = u' \cdot v'(u)$ et $(u \cdot v)' = u'v + v'u$
- Inégalité (Axiomes) : Cauchy-Schwarz : $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$; $|\int f(x) \cdot g(x)|$; triangulaire : $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$; $|\int (f+g)^2|^{1/2}$; $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$
  (aussi) ↳ réciproque théorème de pythagore $\to$ norme 2
- T.V.I. : $\forall f : [a,b] \to \mathbb{R}$; $\forall u \in [f(a), f(b)]$, $\exists c \in [a,b]$, $f(c) = u$ $\to$ bijection monotone si signe inver... $\to$ continuité
- T.A.F. : $\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c) \longrightarrow$ inégalité $|f'(c)| \leqslant M$ bornée $\to$ concave / convexe
- Th changt variable : si primitive (Liouville) et $J \neq 0$ (inversion local) alors : $\int_V g(y_1 \dots y_n)\,dy_1 \dots dy_n \stackrel{\text{paramétrisation}}{=} \int_U g(F(x_1, \dots, x_n)) |\det J_F(x_i)|\,dx_1 \dots dx_n$; matrice dérivée partielle ; ↳ calcul variationnel
- Astuce calculs : somme nulle $(+\varepsilon - \varepsilon = 0)$; séparer terme pair/impair ; comparer suite $(n+1)$ et (n) ; $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
  ⊕ résidu : pole intégrale fct holomorphe $\mathbb{C}$
- Th. Cauchy-Lipschitz : $x^{(p)} = f(t, x, \dots, x^{(n)}) \longrightarrow$ réécriture système ordre 1 : $y'' + y = 0 \longrightarrow X(t) = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$
  L "n" équation $\Leftrightarrow$ "n" inconnues
  --- Espace complet $\Leftrightarrow$ suite cauchy conv
- Th. point fixe : si $g : E \to E$ invariant alors $g(x) = x$ (identique) si $d(f(x), f(y)) \leqslant k \cdot d_E$ et $k \in]0,1[$ f contractante, k-Lipschitzienne
  ↳ autre : variété topologique
- Th de Transfert : Axiome $P(\Omega) = 1$; $G = E[g(X)] = \int g(x) f_X(x)\,dx \stackrel{\text{"moyenne"}}{=} \sum g(x_i) \cdot f(x_i)$ et $F_X(x) = P(X \leqslant x)$; primitive ; $P_i\ f\ x_i$; espérance ; variable aléatoire
  ↳ $P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$