# MATHEMATIQUES

**Axiomes d'extensionnalité :** $A \subset B$ $B \subset A$ $dim(A)=dim(B)$ $A=B$ $A \cup B = A+B-A \cap B$
$E=\{x \in \mathbb{Z} | -3 < x \leqslant 2\} = \{-2,-1,0,1,2\}$ $P(A)=Card(A)/Card(\Omega)$

**Logique :** $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

**Relation binaire :** $x \Re y$ $x \Re x$ $x \Re y \Leftrightarrow y \Re x$ $(x \Re y \wedge y \Re x) \Rightarrow x=y$ $(x \Re y \wedge y \Re z) \Rightarrow x \Re z$

**Application :** $f: E \rightarrow F | x \mapsto f(x)=y$ $E \rightarrow E$ $f \circ f^{-1}=e$ $c_{i,j}=\sum_{R=1}^{n} a_{i,R} \cdot b_{R,j}$ $dim(E,F)=dim(M_{np})=n \times p$

**Structure interne :** $(E, *)$ $a*b \in E$ $(a*b)*c=a*(b*c)$ $e*a=a$ $x(y+z)=xy+xz$ $a*b=b*a=e$
$\varphi:(G,+) \rightarrow (H,*)$ ; $\varphi(G_1+G_2)=\varphi(G_1)*\varphi(G_2)=H_1*H_2$

**Linéarité :** $f(x,y)=f(a \cdot x+y)=a \cdot f(x)+f(y)$ $F \neq \varnothing$ $F \subset E$

**Base vectorielle :** $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$ $x=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i$ $L_i \leftarrow \lambda \cdot L_i$ ; $L_i \leftarrow L_i + \lambda \cdot L_j$ ; $L_i \leftrightarrow L_j$

**Théorème de géométrie :** $(DE) \| (BC)$ $(d')$ $(AB) \nparallel (AC)$

**Produit scalaire :** $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = \langle u|v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\widehat{(u,v)})$ $\frac{\langle u|v \rangle}{\langle u|u \rangle} \vec{e}_i$

**Equation paramétrique :** $f(t)=\overrightarrow{AM(t)}=t \cdot \vec{u}$ $q(x,y)=ax^2+bxy+cy^2=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\left(\frac{4ac-b^2}{4a}\right)y^2$

**Conique :** $\Delta=b^2-4ac$ $d=|det(\overrightarrow{AP},u,v)|/\|u \wedge v\|$ $\|u \wedge v\|=\|u\| \cdot \|v\| \cdot \sin(u,v)$

**Lieu géométrique :** $arg(z)=(\vec{u},\overrightarrow{OM})=\theta$ ; $z=\rho e^{i\theta}$ $arg(Z_1 \cdot Z_2)=arg(Z_1)+arg(Z_2)$

**Noyau :** $Ker f = f^{-1}\{e_F\}=\{x \in E | f(x)=e_F\}=\{X \in \mathbb{R}^n | A \cdot X = 0\}$ $Ker f = e_E$

**Image :** $Img f = f(E)=\{y \in F | \exists x \in E, f(x)=y\}=vect((\overrightarrow{v_{colonne}})_n)$ $Img f = F$

**Théorème du rang :** $Rg(f)+dim Ker(f)=dim(E)$ $Rg(f)=dim(Img(f))$

**Théorème isomorphisme :** $f: G \rightarrow G', f(x \cdot H)=f(x \cdot Ker f)=f(x)$ $Card(G)=Card(Ker(f)) \times Card(Img(f))$

**VVE propre :** $M_{nn} \cdot \vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$ $\exists B$, $M_\lambda' = P^{-1} M P$ $P^{-1}=\frac{{}^t com(P)}{det(P)}$ $p_m(X):=det(X.I-M)=\prod_i (X-\lambda_i)$
$det(C_1,...,a C_i'+C_i'',...,C_n)=a\, det(...C_i'...)+det(...C_i''...)$ $det(A_3)=a_{(i,1)}.det(A_{2,i+1})$ ; $det(A_2)=ad-bc$

**Décomposition PLU :** $A=P.L.U$ $det(A)=det(P).det(L).det(U)$ $P=\delta_{i,\sigma(j)}=\begin{matrix} 1 & i=\sigma(j) \\ 0 & i \neq \sigma(j) \end{matrix}$

**Evaluation polynome :** $P=a_n X^n+...+a_0$ $(1,X,...,X^n)$ $P \rightarrow u(P)=\sum (C_i) \cdot u(X^i)$

**Théorème fondamental de l'algèbre :** $(X-1)^n$ ; $1=e^{i\frac{2\pi k}{n}}$ $\frac{A(x)}{B(x)}=Q(x)+\frac{R(x)}{B(x)}$

**Division euclidienne :** $P(X)=D(X) \cdot Q(X)+R(X)$ $PGCD(P,D)=PGCD(D,R)$ $PPCM=\frac{|P.D|}{PGCD(P,D)}$

**Nombre premier :** $a \times m + b \times n = PGCD(a,b)=1$ $a^p \equiv a \mod p \equiv a[p]$ $n=p_1^{\alpha_1}.(...).p_m^{\alpha_m}$

**Théorème de Lagrange :** $H<G$ , $|H| divise |G|$ $\forall g \in G$ , $g^{card(G)}=e$ $\exists g$ , $\langle g \rangle = \{g^k\}$

**Composition de transposition :** $\sigma=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}=(a\ b\ c)=(a\ b) \circ (b\ c)$ $\sigma \circ \sigma(a)=c$ ; $\epsilon(\sigma)=(-1)^{N_t}$

**Contraposé :** $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$ $E \rightarrow E$ $E \rightarrow E$

**Absurde :** $(A \Rightarrow B) \wedge (\neg B \Rightarrow \neg A)$ $E \rightarrow E$ $E \rightarrow E$

**Récurrence :** $P(0)$ $\downarrow$ $\forall n, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ $E \rightarrow E$ $E \rightarrow E$

**Inégalité :** $|\langle x|y \rangle| \leqslant \|x\| \|y\|$ $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$ $P(|X|<a) \leqslant \frac{E(|X|^p)}{a^p}$

**Limite :** $u(n) \sim_{+\infty} v(n)$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u(n)}{v(n)}=\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v(n)}{u(n)}=1$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,x)=\lim_{x \rightarrow 0} f(x,ax)$

**Exponnentiel :** $(e^{i\theta})^n=(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$ $e^{a+b}=e^a+e^b$ $\ln(a^n)=n\ln(a)=\log_n(a)$

**Théorème valeur intermédiaire :** $\forall f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ $\forall u \in [f(a),f(b)]$ $\exists c \in [a,b]$ , $f(c)=u$

**Théorème continuité :** $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , $([|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\epsilon])$ $\leftrightarrow$

**Boule :** $B(a,r)=\{x \in E \mid \|x-a\|<r\}$ $A=\{(x,r) \in \mathbb{R}^2, a \leqslant f(x,y) \leqslant b\}$

**Théorème point fixe :** $g: E \rightarrow E$ $g(x)=x$ $d(f(x),f(y))<k.d_E$ $k \in [0,1[$

**Dérivée :** $f'(x)=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{df}{dx}$ $(f \circ f^{-1})'=1$ $v(u)'=u'.v'(u)$ $(u.v)'=u'v+v'u$

**Théorème accroissement fini :** $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ $|f'(c)| \leqslant M$

**Hopital :** $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(y)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$ $(u^\alpha)'=\alpha u^{\alpha-1} u'$

**Théorème encadrement :** $f \leqslant g \leqslant h$ $\lim_a f = \lim_a h = L$ $\lim_a g = L$

**Critère de convergence :** $\lim (f_n(x)) \rightarrow_s f(x)$ $\lim \sup |f_n(x)-f(x)| \rightarrow_{+\infty} 0$ $|\sum u_n| < \epsilon$ $u(x)-\sum (-1)^n v_n \leqslant |a_{n+1}|$

**Règle d'Alembert :** $|f_n(x)| \leqslant a_n$ $\sum a_n x^n$ $\lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}|=l=\frac{1}{R}$

**Régularité :** $C^\infty$ $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}$

**Serie de Taylor :** $a_k=\frac{f^{(n)}(a)}{k!}$ $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$ $(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$

**Suite Lᵖ :** $\|x(n)\|_p=(|x_1(n)|^p+(...)+|x_1(n)|^p)^{1/p}$ $A=B$

**Jacobien :** $J_F(M)=\begin{pmatrix} \partial f_1 & \partial x_n \\ \partial x_1 & \partial f_m \end{pmatrix}$ $\phi(x,y) \rightarrow \phi(r,\theta)$ ; $J_\phi=\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$

**Résidu :** $f(z)=\frac{q(z)}{p_0(Z).(...).p_n(z)}$ $Res(f(z),p_i(z))=\lim_{z \rightarrow p_i} q(z)/\prod_{j \neq i} p_j(z)$

**Critère d'intégration :** $\lim_{t \rightarrow a^+} (t-a)^\alpha f(t)=0$ $\int_a^b f(t)dt=\frac{b-a}{n}\sum_n^{N \rightarrow +\infty} f(a+k(b-a)/n)$

**Théorème fondamental d'analyse :** $A'(x)=f(x)$ $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$

**Théorème changement de variable :** $\int_V g(y_i)\,dy_i=\int_U g(F(x_i)).|det J_F(x_i)|\,dx_i$ $dy=f'(x)dx$ , $\alpha=f'(a)$

**Théorème convergence dominée :** $(f_n) \in (E,A,\mu) \rightarrow f$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n(\mu)d\mu=\int \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\mu)d\mu$

**Transformée :** $\tilde{f}(\omega) \propto \int_\alpha^\beta f(x).e^{-pt}$ $A=B$ $A=B$

**Equation différentielle :** $a(x)y'+b(x)y=c(x)$ $\int \frac{y'}{y}=-\int \frac{b(x)}{a(x)}$ $y_p=\lambda(x).f(x)$ $y_p=P[X].e^{Q[X]}$; $Q[X] \in \mathbb{C}$

**Théorème Cauchy-Lipstchitz :** $x^{(p)}=f(t,x,...,x^{(n)})$ $y''+y=0 \rightarrow X(t)=(y,y')$ $X(t)=\sum \alpha_i e^{\lambda_i t} u_i$

**Théorème de transfert :** $G=E[g(X)]=\int g(x) f_X(x)\,dx=\sum g(x_i).f(x_i)$ $F_X=P(X \leqslant x)$

**Théorème central limite :** $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n<z)=\Phi_{N(0,1)}(z)$ $\sigma \rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $A=B$