- Construire la solution d'un problème :
  - But : Montrer que l'objet "A" vérifie les propriétés d'un objet "B" (plus générale)
    → Intermédiaire : Théorème, Lemme, résultat admis (non démontré au préalable)
    ↳ justifier hypothèse du Théorème. ↳ citer référence
- Parfois, il faut déterminer les propriétés d'un objets sans vérification (si défini avant)

exemple : • Dimension d'un noyau de matrice
- Déterminant, rang, image, valeurs propre d'une matrice.
- Rayon de convergence d'une série entière
- Coefficient de Fourier d'une fonction périodique
- Intervalle d'une fonction
- Domaine de continuité d'un objet

↳ Souvent dans les préliminaire d'un problème, et/ou début d'exercice.

- Une supposition doit être justifiér : pas d'évidence ou d'argument d'autorité (principe d'une démonstratio)
- Un problème doit être réalisé dans l'ordre, ne pas hésiter à reformuler ce à quoi correspond l'objet d'étude. Favoriser l'utilisation de quantificateur.

↳ "Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$" devient : On a une fonction "f" appartenant à l'ensemble des ...

- Raisonnement :
  ↳ Démarche pour construire un raisonnement correct.

- Preuve par récurrences : (induction complète) Par un processus par étapes, on démontre qu'une propriété est vraie pour tout entiers.
  → Le domaine d'entier doit être préciser.
  → L'hypothèse de récurrence est énoncé (forme quantificateur)
  → L'initialisation et l'hérédité sont identifié et traiter

$ab = ba$

Exemples : Binôme de Newton : vérifier $(a+b)^n = \sum \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall a,b \in A^2$

- Initialisation : $n=0$; $(a+b)^0 = 1$; $\binom{0}{0} a^0 b^{0-0} = 1$
- Hérédité : rang n ; $(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n \Rightarrow (a+b) \cdot \left(\sum \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right)$

  on développe, on pose $p = k+1$, on refactorise (...)

  → on obtient : $\left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}\right)$

▷ Raisonnement par l'absurde : On suppose la negation de ce que l'on veut montrer, puis on montre que cela conduit à une absurdité (contradiction).

Exemples : Irrationnalité de $\sqrt{2}$, on suppose $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p, q premiers entre eux
(raccourci)

↳ Ainsi : $2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$ donc p^2 est paire $\Rightarrow p$ est pair *

si pair, $p = 2k$, finalement on obtient q pair, ce qui est absurde

▷ Contraposition : Au lieu de montrer que $A \Rightarrow B$ on montre non $(B) \Rightarrow$ non (A)

* Exemples : Si "n^2" pair alors "n" est pair, tel que : n^2 pair $\Rightarrow n$ pair
(ok interdit)

devient : non (n pair) $\Rightarrow$ non (n^2 pair) $\Leftrightarrow$ n impair $\Rightarrow n^2$ impair

Donc $n = 2k+1$; $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2k' + 1$ ok

→ Dans une demonstration, le sens reciproque doit toujours etre verifié, ou du moins mentionné (implication reciproque $B \Rightarrow A$)

exemple ↳ reciproque du Th de Pythagore : si $AB^2 = AC^2 + BC^2$ alors le triangle ABC est rectangle en C.

• Incomprehension frequentes : (et imprecision / erreur)

▷ En geometrie : segment $[AB]$, droite (AB) et longeur AB

→ on ne peut pas diviser par un segment ... idem vecteur $\overrightarrow{AB}$

▷ Condition necessaire et suffisante : On considere P et Q deux propositions

≠ (→ Q est une condition necessaire pour avoir P, si dès que P est vrai alors Q vrai

→ Q est une condition suffisante pour " P, s'il suffit que Q soit vrai pour avoir P vrai

▷ Changement de base : Agit sur un objet mathematique et modifie sa representation matricielle → or une matrice peut representer une large variété d'objet !

- base
- homomorphisme
- endomorphisme
- forme quadratique

} chaque objet à un chgmt de base ≠

- Equivalence de norme en dimension fini : Les normes sont comparable de manière uniforme et induisent le même topologie d'espace vectoriel normée.
  → n'est pas quantitatif

- Trigonalisation : simplification sans perte de generalité mais implique changement de base
  → changement des coefficients de la matrice de départ.

- Système d'équation linéaire : l'existence de solution depend de l'existence de valeur propre
  → Attention à la commutativité. $ab \neq ba$ et l'inversibilité d'une matrice

- Notion d'invariance : Toujours s'interoger sur l'influence des paramètres (intégrale constante)
  Si $g : E \to E$, un invariant de g est un point fixe, càd $g(x) = x$ application identique
- Variable d'intégration : Seule les variable indépendante peuvent sortir de l'intégrale.
- Inegalité entre nombre complexe : Inegalité triangulaire $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ≃ minoration
- Notion de convergence : converge si $< +\infty$ sinon diverge
  → avant d'appliquer une inegalité, il faut montrer la convergence de l'intégrale ou de la série (exemple : intégrabilité de la fonction) → sinon absurde.

Les outils indispensables :

↳ Dans le cadre de la géométrie euclidienne, il est indispensable d'utiliser la règle et le compas → constructibilité.

▷ Linéarité : Une variable y dépend linéairement des variables $x_1, \dots, x_n$, alors s'exprime sous forme de combinaison linéaire $y = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$
  → défini indépendance linéaire et dimension, exemple : $f(a \cdot x + y) = af(x) + f(y)$

▷ Relation d'équivalence : Une relation d'équivalence, sur un ensemble E est une relation binaire ∼ sur E qui est à la fois reflexive, symétrique et transitive.

- reflexive : $\forall x \in E, \quad x \sim x \to \forall M \in GL_n(\mathbb{K}),\ M^{-1}M = I_n \in T_n^+$
- symetrique : pour $x, y \in E$ vérifie $x \sim y$ ~~alors~~ et aussi $y \sim x$
- transitive : pour $x, y, z \in E$, si $x \sim y$, $y \sim z$ et aussi $x \sim z$

} circulaire

aussi ⇒ classe d'équivalence $[x]$ de $x \in E$ comme $y \in [x] \Leftrightarrow x \sim y$

• Indispensable (suite) :

• **Critère de convergence :** De nombreuse fonction peuvent apparaître comme une série de fonction plus simple

↳ le comportement au limite permet de déterminer si converge tend vers un $\mathbb{R}$

↳ cas simple : paramètre → n, réécriture Rieman, variable muette

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \xrightarrow{+\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\operatorname{Arctan}(x)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

↳ exemple Rieman :

$$\int_{x \to a}^{+\infty \to b} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$$

- $\int_0^b \frac{1}{t^\alpha}\,dt \rightarrow$ converge ssi $\alpha < 1$ (converge en 0)
- $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \rightarrow$ converge ssi $\alpha > 1$ (converge en $+\infty$)

• **Inégalité de Cauchy-Schwarz :** Relation d'ordre entre le produit scalaire de x et y et leur norme → établit inégalité triangulaire

égaux si linéairement dépendant ⟺ colinéaire

Pour tout vecteur $x, y \in E$: $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$

• Notions, précision et exemples (N.P.E.)

• **Réduction d'intervalle d'un courbe paramétré :** Soit $(x(t), y(t))$ défini sur I

→ on peut réduire en exploitant symétrie, suivant O_x : $\begin{cases} x(a-t) = x(t) \\ y(a-t) = -y(t) \end{cases}$

• **Produit vectoriel :** le produit vectoriel de $\vec{u}, \vec{v}$ non colinéaire se déduit comme l'unique vecteur $\vec{w}$ (orthogonal)

↳ norme : $\|\vec{w}\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$

(sens direct) car (déterminant)

↳ $$u \wedge v = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

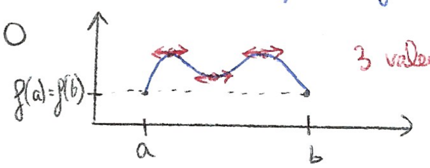
• **Notation de Grassmann :** " $N = M + \vec{u}$ " → N est l'image du point M dans la translation du vecteur $\vec{u}$

→ espace euclidien sans angle et distance (Affine)

NPE (suite) : **SUPPLEMENT** ⑤

- Theoreme de Rolle : Soit a et b deux reel tel que $a < b$ et f une fonction à valeur continue sur $[a,b]$ et derivable sur $]a,b[$ tel que : $f(a) = f(b)$

→ alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$



3 valeurs "c"

- Representation Th accroissement fini :

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ il existe un point où la pente de la tangente est egale à la pente totale.

- Moyenne pondérée : valeur affecté par coefficient. $M = \{m_1, \dots, m_n\}$ et $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$

↳ $$\tilde{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$ quotient de la somme pondérée des m_i par la somme des poids

- Le noyau : Le noyau de f est l'ensemble : $\ker f = f^{-1}\{0_F\} = \{x \in \underset{\text{ensemble depart}}{E}, f(x) = \underset{\text{arrivée}}{0_F}\}$

↳ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, noyau $\operatorname{Ker} A = \{X \in \mathbb{R}^3, AX = 0\}$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

donc $AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \overset{\text{echellonage}}{\Longleftrightarrow} \begin{matrix} L_1 \\ -(L_2 - 2L_1) \end{matrix} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$

→ paramétrisation : $\begin{cases} x + y = -z \\ y = -3z \end{cases} \Longleftrightarrow L_1 - L_2 \begin{cases} x = -z + 3z = 2z \\ y = -3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = -3z \\ z = z \end{cases}$

Donc $\operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} z, z \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{vect}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

- L'image d'une matrice : $\operatorname{Im}(f) = f(E) = \{ y \in F \mid \exists x \in E, f(x) = y \}$

↳ espace vectoriel engendrée par les colone de la matrice : $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

→ rang et base de l'image → vecteur libre ? relation de liaison : $a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A \xrightarrow{\text{on prend valeur}} 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{0} \leftrightarrow$ pas libre

→ on enleve n'importe lequel $\operatorname{Im} A = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ → libre car non proportionnelle (colinéaire)
→ Base

Rang de A ? $\operatorname{Rang}(A) = \dim(\operatorname{Im}(A)) = 2$

• **Elimination de gauss-Jordan** : Un système est échellonnée si ① le nombre de coeff nulles croît strictement ligne après ligne, si premier vaut 1 et le seul par colonne alors réduit

note : Les opération élémentaires sur une famille de vecteur sont des manipulation algebrique qui ne modifient pas le propriété d'independance lineaire

→ $L_2 \leftarrow 3L_2$ est l'opération remplacer la ligne 2 par 3 fois L_2

↳ 3 cas possibles : ① $L_i \leftarrow \lambda L_i$, ② $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, ③ $L_i \leftrightarrow L_j$

→ transformation en un système equivalent.

1) Passage échellonnée :

(à la suite)

$$\begin{cases} -x_2 + 2x_3 + 13x_4 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 17x_4 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 20x_4 = -1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \downarrow \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3 \end{array} \iff \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 17x_4 = 4 \\ x_2 - 2x_3 - 13x_4 = -5 \\ x_3 + 5x_4 = 4 \end{cases}$$

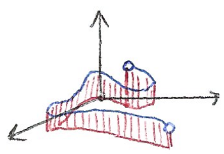
2) Passage échelloné reduite :

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \end{array} \iff \begin{cases} x_1 \quad - 4\underset{\text{variable libre}}{x_4} = -2 \\ x_2 \quad - 3x_4 = 3 \\ x_3 + 5x_4 = 4 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & +5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

• **Integrale curviligne** : Integrale où la fonction est à evaluer sous une courbe Γ

Pour un champ scalaire, $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, l'intégrale de ligne le long d'une courbe lisse par morceau $C \subset U$ est

$$\int_C f(\vec{r})\, ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \cdot |\vec{r}\,'(t)|\, dt$$



↳ courbe paramétré $f(x,y) = \alpha\, u(x) + \beta\, v(y)$

• **Theorème de Stokes** : L'integrale d'une forme differentielle "ω" sur la frontière d'une variété orientable "Γ" est egale à l'integrale de sa derivée exterieur "$d\omega$" sur l'ensemble "S".

$$\hookrightarrow \oint_\Gamma \underbrace{\vec{F} \cdot d\vec{\Gamma}}_{\omega} = \iint_S \underbrace{\overset{\text{gradient}}{\vec{\nabla}} \underset{\text{produit vectoriel}}{\times} \vec{F} \cdot d\vec{S}}_{d\omega}$$

⟹ Astuce pour se retrouver avec une equation differentielle à resoudre si $\hat{m}$ parametre d'integration

- Theoreme de Cauchy : si $f(z)$ est analytique partout à l'interieur d'un contour C fermé

alors $\oint_C f(z)\,dz = 0$ → devellopable en serie entière

- Theoreme de Taylor : Soit $k \geq 1$ un entier et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction "k" fois derivable au point $a \in \mathbb{R}$, Alors il existe une fonction $hk : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que :

$$\rightarrow f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underbrace{hk(x)}_{x \to a\, = 0}(x-a)^k$$

↳ principe theorique du developpent limité.

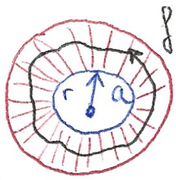
- Prolongement analytique : Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $f, g : U \to \mathbb{C}$ deux fonction holomorphe qui coincide sur un ensemble E ayant un point d'accumulation dans U, alors : $f = g$ sur U

fct complexe infiniment derivable

- Serie de Laurent : Si f est holomorphe das la couronne $V = \{z \in \mathbb{C} \mid r_2 < |z-a| < r_1\}$

alors $\forall z$ de V, "f" est somme de la serie en z :

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n (z-a)^n$$



"C_n" decoule du Th d'integration de Cauchy ↳ convergence uniforme $\forall$ compact de V

$$\hookrightarrow C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}}\, d\xi = r^{-n} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) \cdot e^{-in\theta} \cdot \frac{d\theta}{2\pi}$$

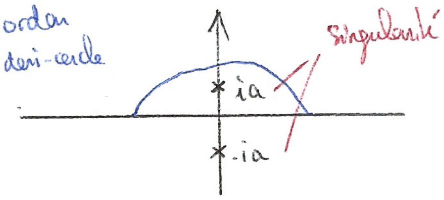
↑ ordre de la derivée

- Lemme de Jordan et Residu :

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2} \xrightarrow{?} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,dz$$

ordre valeur ou C_n compense

Jordan = demi-cercle



donc $I = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z = ia) = 2\pi i \cdot \lim_{z \to ia} \underbrace{(z-ia)}_{\text{pole ordre 1}} \overbrace{\frac{1}{(z-ia)(z+ia)}}^{f(z)}$

$= 2\pi i \frac{1}{2ia} = \frac{\pi}{a}$ → resultat primitive (non connu)

- Raisonnement par analyse-synthèse : → demontrer existance et unicité d'un objet

Analyse 1) On suppose objet existe → si oui, preuve d'unicité = objet Θ

Synthèse 2) verification propriété de l'objet Θ → assure existance

- Racine d'un polynome : valeur pour laquelle $P(\alpha) = 0$

↳ Dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, le polynome $X^3 - X$ admet 6 racines

en effet : $n^3 - n = (n-1)n(n+1) \rightarrow$ multiple de 6

- Caracteristique d'un corps : l'ordre pour la loi additive de l'element neutre de la loi multiplicative si cet ordre est fini. morphisme d'anneau :

$$\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow k$$

injective

$$n \mapsto n \cdot 1_k = \underbrace{1_k + \dots + 1_k}_{n \text{ termes}} = 0_k$$

. sinon $\ker\varphi$, un idéal de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ principal donc $\exists p \in \mathbb{Z}$ tel que $\ker\varphi = p\mathbb{Z}$

- Morphisme de groupe : Application entre 2 groupe qui respecte structure de groupe.

$$\rightarrow f(x * y) = f(x) * f(y)$$

exemple : $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$: $x \longmapsto f(x) = \ln(|x|)$

$f: G \rightarrow G'$ $\rightarrow$ image : $\mathrm{Im}(f) = f(G) = G'$ ← surjectif

$\rightarrow$ noyau : $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{e'\}) = \{e\}$ ← injectif

- Theoremes d'isomorphismes :

1er : Soit G et G' deux groupe et $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes.
Alors f induit un isomorphisme $\hat{f}$ de $G/\ker f$ sur $f(G)$ defini par :

$$\hat{f}(xH) = f(x)$$ où H est le noyau de f

Donc si G, un groupe fini, alors $\boxed{\mathrm{Card}(G) = \mathrm{Card}(\ker(f)) \times \mathrm{Card}(\mathrm{Im}(f))}$

2e : Soit G un groupe, N un sous-groupe normal* de G et H, un sous-groupe de G

* distingué ou invariant

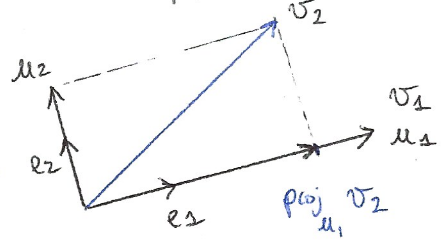
Alors ~~f induit un isomorphisme~~ $H \cap N$ est un s-groupe normal de H et on à l'isomorphisme $H/(H \cap N) \simeq HN/N$ avec $HN = \{hn \mid h \in H, n \in N\}$

3eme : Soit G un groupe, N et M deux sous-groupe normaux de G, tel que M est inclu dans N. Alors N/M est un sous groupe normal de G/M et on a l'isomorphisme suivant :

$$(G/M)/(N/M) \simeq G/N$$

- Théorème de Lagrange : Soit G un groupe fini, et H un sous-groupe de G, alors $\text{card}(G) / \text{card}(H)$ = indice de H dans G ; et $\boxed{\forall g \in G, \quad g^{n} = e}$ ← cardinal de G

- Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt : Soit E, un e.v euclidien, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors il existe une unique base orthonormale $(u_1, \dots, u_n)$ de E tel que
  - $\forall p \in \{1, \dots, n\}$, $\text{vect}(u_1, \dots, u_p) = \text{vect}(e_1, \dots, e_p)$
  - $\forall p \in \{1, \dots, n\}$, $(e_p, u_p) \geqslant 0$



→ projection orthogonale : $\text{proj}_{u}(\vec{v}) = \dfrac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \vec{u}$

algorithme ↳ $\vec{u}_k = \vec{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \text{proj}_{u_j}(\vec{v}_k)$

- Courbure de Gauss : Courbure K d'une surface en un point est le produit des courbures principale k_1 et k_2 en un point donnée.

$$K = k_1 \cdot k_2$$

↳ courbure d'une courbe → valeurs propre opérateur de formes

→ opérateur de formes : $(S_x v, w) = \langle df(v), w \rangle$

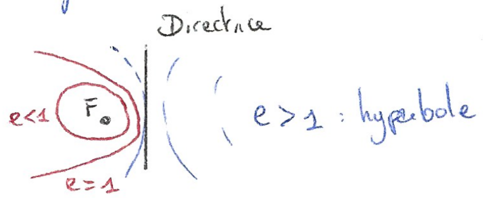
- Isométrie : Transformation qui conserve les longueurs (cas particulier de similitude)

Espace métrique : $d_Y(f(a), f(b)) = d_X(a, b)$ avec $f : X \to Y$

- Conique : Courbe plane algébrique défini comme l'intersection d'un cône de révolution avec un plan. Ensemble de point M vérifiant :

$$\frac{d(M, F)}{d(M, D)} = e$$

foyer — excentricité — directrice



- Base orthonormée : base constitué de vecteur de norme 1 et orthogonaux 2 à 2

Exemple (canonique) : Pour i variant de 1 à n
$e_i = (\delta_{1,i}, \dots, \delta_{n,i})$

avec $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ et $B = (e_1, \dots, e_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

↑ symbole de Kronecker

- **Groupe distingué :** On dit qu'un sous groupe H d'un groupe G est "normal" dans G, s'il est stable par conjugaison : $\forall h \in H,\ \forall x \in G,\ x h x^{-1} \in H$ ou $xH = Hx$

  on note alors : $H \trianglelefteq G$

- **Groupe de permutation :** bijection de E fini sur lui même

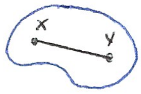
Exemple (s-groupe monogène) : ① $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ (image) $\quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ (invariant)

② matrice de permutation (exemple) : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (matrice carrée) $\hookleftarrow$ possible réécriture

- **Générateur d'un groupe :** Soit A partie de G, A engendre G si le plus petit sous-groupe de G contenant A est G tout entier.

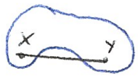
Exemple : $\langle \sigma \rangle = \{ \overset{\sigma^4}{Id}, \sigma, \sigma^2, \sigma^3 \} = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ cyclique (exemple précédent)

- **Convexité :** Un ensemble C est dit convexe lorsque, pour tous x et y de C, le segment $[x, y]$ est tout entier contenu dans C :



convexe

$$\forall x, y \in C,\ \forall t \in [0;1],\ t x + (1-t) y \in C$$



non convexe

Astuce de calculs "somme nulle" : Assez fréquent lorsqu'on cherche une forme donnée

exemple : $f(t) = t \cdot u(t-1) - u(t-1) + u(t-1) = (t-1)u(t-1) + u(t-1)$

$\longrightarrow$ ici pour l'utilisation des transformée usuelle de Laplace.

autre astuce produit conjugée dans les fraction pour simplifier dénominateur

$$f = x + y \xrightarrow{\text{conjugué}} \bar{f} = x - y$$

- **Astuce forme différentielle :** Lorsqu'on a la solution d'une équation différentiel d'une forme donné $\longrightarrow$ dérivée la solution (vérifier convergence + Th fonda analyse)

  $\rightarrow$ rappel $(u \cdot v)' = u'v + v'u$

- **Dérivée de la valeur absolu :** $f(x) = |x| = \sqrt{x^2} \longrightarrow f'(x) = u' \cdot v'(u)$

  donc $f'(x) = 2x \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{x^2}\right)^{-1} = \frac{x}{|x|}$

- <u>Limite de fonction</u> : On dit que f admet ℓ (fini ou infini) comme limite à gauche en x_0 si la restriction de f à $]-\infty, x_0]$ admet comme limite en x_0 :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \quad \rightarrow + \text{ pour limite à droite}$$

- <u>Theoreme de la bijection entre segment</u> : Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$ et à valeurs réelles, alors elle constitue une bijection entre $[a, b]$ et l'intervalle fermée dont les bornes sont $f(a)$ et $f(b)$

$\longrightarrow$ Ce theoreme n'est pas vrai pour les nombres rationnel <u>car</u> $\mathbb{Z}$ fermé :

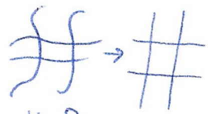
$$\mathbb{Z} = \mathbb{R} / \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1[\quad \rightarrow \text{ ouvert sur reunion intervalle ouvert = fermée (?)}$$

- <u>Theoreme de Cauchy-Lipschitz</u> : Soit l'equation differentielle $y' = f(t, y)$, avec f de classe C^1 definie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Si (t_0, y_0) est un point de U, il existe une unique solution maximal au probleme de Cauchy $y' = f(t, y)$, <u>et</u> $y(t_0) = y_0$. En outre, toute autre solution à ce probleme de Cauchy est restriction de la solution maximale.

etude des solutions stationnaire en physique

- <u>Matrice jacobienne</u> : Matrice de la differentielle de f en a (si diff seconde = hessienne)

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ "linearise" l'espace vectorielle 

$\rightarrow$ chgmt de variable integrale multiple

$\hookrightarrow$ <u>Theoreme</u> : Soit U, un ouvert de $\mathbb{R}^n$, F une injection de classe C^1 de U dans $\mathbb{R}^n$ et $V = F(U)$. Jacobien au voisinage de M, non nulle (Th inversion locale)

① <u>si</u> g est une fonction mesurable de V dans $[0, +\infty]$, on a l'egalité pour la mesure sur $\mathbb{R}^n$

$$\int_V g(y_1, \dots, y_n)\, dy_1 \dots dy_n = \int_U g(F(x_1, \dots, x_n)) \cdot |\det J_F(x_1, \dots, x_n)|\, dx_1 \dots dx_n .$$

⚠ ordre ! (si produit vectoriel d'une k-forme)

② <u>si</u> g est une fonction integrable sur V à valeurs complexes, alors $(g \circ F)|\det J_F|$ est integrable sur U et les deux integrale coincide encore

- **Theoreme fondamentale de Liouville :** Seule les fonction ayant des primitives de la forme :

" $a = c_1 \frac{\partial u_1}{u_1} + \dots + c_n \frac{\partial u_n}{\partial u_n} + \partial v$ " ont une primitive ! avec a, élmt de F où G extention differentielle de F

↳ exemple : Integrale de Gauss $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$, n'a pas de primitive

↳ astuce integrale double : $I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda e^{-x^2} dx = \iint_{-\infty\,-\infty}^{\infty\,\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx\, dy$

↳ chgmt de variables (Jacobien !) $I^2 = \iint e^{-(r^2 \underbrace{\cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta}_{=1})} \cdot r\, dr\, d\theta = \pi$

- **Decomposition LU :** decomposition d'une matrice en produit L (lower) et U (upper), 2 matrices triangulaire

Exemples $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = LU$ avec $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}$

$= PLU$
↳ permutation

(facile !) ⟶ calcul du determinant : $\det(A) = \det(P) \cdot \det(L) \cdot \det(U)$

- **Groupe generale lineaire (GLn) :** groupe des matrices n×n inversible à coef dans $\mathbb{K}$ + multiplicat°

(bonus) ↳ $GL(n)$ est dense dans $M_n(n)$ → algebre de Lie associé à $GL(n)$ (composition interne bilineaire)

- **Groupe spécial orthogonale : $(SO(n))$** → groupe des rotations vectoriel plane, homéomorphe au cercle unité : $SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle| \, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right.$

- **Mineur principaux :** determinant d'une sous matrice de A obtenu en extrayant les lignes et collone de même indices : $\det A_{i,i}$

- **Action de Groupe :** Soit G un groupe operant sur un ensemble E, et x un elmt de E, on appelle :
  ↳ loi de composition externe

  - stabilisateur de x, la partie de G defini par $\overset{\mathrm{Stab}(G)}{\widetilde{G_x}} = \{ g \in G \mid g \cdot x = x \}$
  - orbite de x, la partie de E defini par : $\mathrm{Orb}(x) = \{ g \cdot x \mid g \in G \}$