MATHEMATIQUES

Axiomes d'extensionnalité : $A \subset B$ $\quad B \subset A$ $\quad dim(A) = dim(B)$ $\quad A = B$ $\quad A \cup B = A + B - A \cap B$

$E = [n \in [-10, x] \cap \mathbb{Z} \mid x \in \mathbb{R} \;;\; -3 < x \leqslant 2] = [-2, -1, 0, 1, 2]$ $\quad P(A) = Card(A) / Card(\Omega)$

Logique : $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ $\quad \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

Relation binaire : $x \Re y$ $\quad x \Re x$ $\quad x \Re y \Leftrightarrow y \Re x$ $\quad (x \Re y \wedge y \Re x) \Rightarrow x = y$ $\quad (x \Re y \wedge y \Re z) \Rightarrow x \Re z$

Application : $f : E \rightarrow F | x \mapsto f(x) = y$ $\quad E \rightarrow E$ $\quad f \circ f^{-1} = e$ $\quad c_{i,j} = \sum_{R=1}^{n} a_{i,R} \cdot b_{R,j}$ $\quad dim(E, F) = dim(M_{np}) = n \times p$

Structure interne : $(E, *)$ $\quad a * b \in E$ $\quad (a * b) * c = a * (b * c)$ $\quad e * a = a$ $\quad x(y + z) = xy + xz$ $\quad a * b = b * a = e$

$\varphi : (G, +) \rightarrow (H, *) ; \varphi(G_1 + G_2) = \varphi(G_1) * \varphi(G_2) = H_1 * H_2$

Linéarité : $f(x, y) = f(a \cdot x + y) = a \cdot f(x) + f(y)$ $\quad F \neq \varnothing$ $\quad F \subset E$ $\quad u_{[a,b]} + u_{[b,c]} = u_{[a,c]}$

Base vectorielle : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$ $\quad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i$ $\quad L_i \leftarrow \lambda \cdot L_i \;;\; L_i \leftarrow L_i + \lambda \cdot L_j \;;\; L_i \leftrightarrow L_j$

Théorème de géométrie : $(DE) \| (BC)$ $\quad (d')$ $\quad (AB) \nparallel (AC)$

Produit scalaire : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = \langle u | v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\widehat{(u, v)})$ $\quad \frac{\langle u | v \rangle}{\langle u | u \rangle} \vec{e}_i$

Equation paramétrique : $f(t) = \overrightarrow{AM(t)} = t \cdot \vec{u}$ $\quad q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right) y^2$

Conique : $\Delta = b^2 - 4ac$ $\quad d = |det(\overrightarrow{AP}, u, v)| / \|u \wedge v\|$ $\quad \|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \sin(u, v)$ $\quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Lieu géométrique : $arg(z) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \theta \;;\; z = \rho e^{i\theta}$ $\quad arg(Z_1 \cdot Z_2) = arg(Z_1) + arg(Z_2)$

Noyau : $Ker f = f^{-1}\{e_F\} = \{x \in E | f(x) = e_F\} = \{X \in \mathbb{R}^n | A \cdot X = 0\}$ $\quad Ker f = e_E$

Image : $Img f = f(E) = \{y \in F | \exists x \in E, f(x) = y\} = vect((\overrightarrow{v_{colonne}})_n)$ $\quad Img f = F$

Théorème du rang : $Rg(f) + dim\, Ker(f) = dim(E)$ $\quad Rg(f) = dim(Img(f))$

Théorème isomorphisme : $f : G \rightarrow G', f(x \cdot H) = f(x \cdot Ker f) = f(x)$ $\quad Card(G) = Card(Ker(f)) \times Card(Img(f))$

VVE propre : $M_{nn} \cdot \vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$ $\quad \exists B,\; M_\lambda' = P^{-1} M P$ $\quad P^{-1} = \frac{{}^t com(P)}{det(P)}$ $\quad p_m(X) := det(X.I - M) = \prod_i (X - \lambda_i)$

$det(C_1, \ldots, a C_i' + C_i'', \ldots, C_n) = a\, det(\ldots C_i' \ldots) + det(\ldots C_i'' \ldots)$ $\quad det(A_3) = a_{(i,1)}.det(A_{2,i+1}) \;;\; det(A_2) = ad - bc$

Décomposition PLU : $A = P.L.U$ $\quad det(A) = det(P).det(L).det(U)$ $\quad P = \delta_{i,\sigma(j)} = \begin{matrix} 1 & i = \sigma(j) \\ 0 & i \neq \sigma(j) \end{matrix}$

Evaluation polynome : $P = a_n X^n + \ldots + a_0$ $\quad (1, X, \ldots, X^n)$ $\quad P \rightarrow u(P) = \sum (C_i) \cdot u(X^i)$

Théorème fondamental de l'algèbre : $(X - 1)^n \;;\; 1 = e^{i\frac{2\pi k}{n}}$ $\quad \frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$

Division euclidienne : $P(X) = D(X) \cdot Q(X) + R(X)$ $\quad PGCD(P, D) = PGCD(D, R)$ $\quad PPCM = \frac{|P.D|}{PGCD(P, D)}$

Nombre premier : $a \times m + b \times n = PGCD(a, b) = 1$ $\quad a^p \equiv a \bmod p \equiv a[p]$ $\quad n = p_1^{\alpha_1}.(\ldots).p_m^{\alpha_m}$

Théorème de Lagrange : $H < G \;,\; |H| divise |G|$ $\quad \forall g \in G \;,\; g^{card(G)} = e$ $\quad \exists g \;,\; \langle g \rangle = \{g^k\}$

Composition de transposition : $\sigma = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} = (a \;\; b \;\; c) = (a \;\; b) \circ (b \;\; c)$ $\quad \sigma \circ \sigma(a) = c \;;\; \epsilon(\sigma) = (-1)^{N_t}$

Contraposé : $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$ $\quad \forall : (n^2[2] = 0 \Rightarrow n[2] = 0) \Leftrightarrow \begin{matrix} (\neg(n[2]) = 1 \Rightarrow \neg(n^2[2]) = 1) \\ ((2k+1)[2] = 1 \Rightarrow (2k+1)^2[2] = 1) \end{matrix}$

Absurde : $(A \Rightarrow B) \wedge (\neg B \Rightarrow \neg A)$ $\quad \sqrt{2} = p/q \;;\; p[2] = 0, q[2] = 0 \Rightarrow \sqrt{2}[2] = 0$

Récurrence : $\downarrow \begin{matrix} P(0) \\ \forall n, P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{matrix}$ $\quad \downarrow \begin{matrix} (a+b)^0 = 1 \;;\; \binom{0}{0} a^0 b^{0-0} = 1 \\ \forall n, (a+b)^n = \sum \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \end{matrix}$ $\quad \binom{n}{k} = \frac{1}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} \;;\; (n+1)! = n!(n+1)$

Inégalité : $|\langle x | y \rangle| \leqslant \|x\| \|y\|$ $\quad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ $\quad P(|X| < a) \leqslant \frac{E(|X|^p)}{a^p}$

Limite : $u(n) \sim_{+\infty} v(n)$ $\quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u(n)}{v(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v(n)}{u(n)} = 1$ $\quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, ax)$

Exponentiel : $(e^{i\theta})^n = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ $\quad e^{a+b} = e^a + e^b$ $\quad \ln(a^n) = n \ln(a)$ $\quad \log_p(x) = \frac{\ln(t)}{\ln(p)}$

Théorème valeur intermédiaire : $\forall f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $\quad \forall u \in [f(a), f(b)]$ $\quad \exists c \in [a, b] \;,\; f(c) = u$

Théorème continuité : $f : I \rightarrow \mathbb{R} \;,\; ([|x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \epsilon])$ $\quad C_l : [a^-, a^+]$

Boule : $B(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}$ $\quad A = \{(x, r) \in \mathbb{R}^2, a \leqslant f(x, y) \leqslant b\}$

Théorème point fixe : $g : E \rightarrow E$ $\quad g(x) = x$ $\quad d(f(x), f(y)) < k.d_E$ $\quad k \in [0, 1]$

Dérivée : $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{df}{dx}$ $\quad (f \circ f^{-1})' = 1$ $\quad v(u)' = u'.v'(u)$ $\quad (u.v)' = u'v + v'u$

Théorème accroissement fini : $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ $\quad |f'(c)| \leqslant M$

Hopital : $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(y)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$ $\quad (u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha - 1} u'$ $\quad (\ln(u))' = u'/u$

Théorème encadrement : $f \leqslant g \leqslant h$ $\quad \lim_a f = \lim_a h = L$ $\quad \lim_a g = L$ $\quad \lim\inf (u_n) = \lim\sup (u_n)$

Critère de convergence : $\lim (f_n(x)) \rightarrow_s f(x)$ $\quad \lim\sup |f_n(x) - f(x)| \rightarrow_{+\infty} 0$ $\quad |\sum u_n| < \epsilon$ $\quad u(x) - \sum (-1)^n v_n \leqslant |a_{n+1}|$

Règle d'Alembert : $|f_n(x)| \leqslant a_n$ $\quad \sum a_n x^n$ $\quad \lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = l = \frac{1}{R}$

Régularité : C^∞ $\quad C^2 : \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}$

Serie de Taylor : $a_k = \frac{f^{(n)}(a)}{k!}$ $\quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - a)^k$ $\quad (1 + x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$

Suite Lᵖ : $\|x(n)\|_p = (|x_1(n)|^p + (\ldots) + |x_1(n)|^p)^{1/p}$ $\quad A = B$

Jacobien : $J_F(M) = \begin{pmatrix} \partial f_1 & \partial x_n \\ \partial x_1 & \partial f_m \end{pmatrix}$ $\quad \phi(x, y) \rightarrow \phi(r, \theta) \;;\; J_\phi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r \sin\theta \\ \sin\theta & r \cos\theta \end{pmatrix}$

Résidu : $f(z) = \frac{q(z)}{p_0(Z).(\ldots).p_n(z)}$ $\quad Res(f(z), p_i(z)) = \lim_{z \rightarrow p_i} q(z) / \prod_{j \neq i} p_j(z)$

Critère d'intégration : $\lim_{t \rightarrow [a^+, +\infty]} (t - a)^\alpha f(t) = 0$ $\quad \int_a^b f(t)\, dt = \frac{b - a}{n} \sum_{n}^{N \rightarrow +\infty} f(a + k(b - a)/n)$

Théorème fondamental d'analyse : $A'(x) = f(x)$ $\quad \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$

Théorème changement de variable : $\int_V g(y_i)\, dy_i = \int_U g(F(x_i)).|det J_F(x_i)|\, dx_i$ $\quad dy = f'(x) dx \;,\; \alpha = f'(a)$

Théorème convergence dominée : $(f_n) \in (E, A, \mu) \rightarrow f$ $\quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n(\mu)\, d\mu = \int \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\mu)\, d\mu$

Transformée : $\tilde{f}(\omega) \propto \int_\alpha^\beta f(x).e^{-pt}$ $\quad A = B$ $\quad F(t - 1) u(t) = F(t - 1) u(t) + u(t - 1) - u(t - 1)$

Equation différentielle : $a(x) y' + b(x) y = c(x)$ $\quad \int \frac{y'}{y} = -\int \frac{b(x)}{a(x)}$ $\quad y_p = \lambda(x).f(x)$ $\quad y_p = P[X].e^{Q[X]} ; Q[X] \in \mathbb{C}$

Théorème Cauchy-Lipstchitz : $x^{(p)} = f(t, x, \ldots, x^{(n)})$ $\quad y'' + y = 0 \rightarrow X(t) = (y, y')$ $\quad X(t) = \sum \alpha_i e^{\lambda_i t} u_i$

Théorème de transfert : $G = E[g(X)] = \int g(x) f_X(x)\, dx = \sum g(x_i).f(x_i)$ $\quad F_X = P(X \leqslant x)$

Théorème central limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n < z) = \Phi_{N(0,1)}(z)$ $\quad \sigma \rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\quad A = B$