A SAVOIR

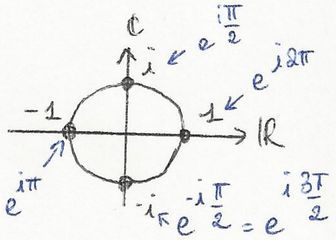
Simplification somme et produit : $\sum_{i}^{n} f(k+1) = \sum_{i+1}^{n+1} f(k)$

↳ astuce factorisation : $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$; $a^2-1=(a+1)(a-1)$; $1+\frac{a}{b}=\frac{b+a}{b}$; $\frac{(n+1)!}{n!}=(n+1)$

Complexe : forme algebrique : $z=a+ib$ avec $i=\sqrt{-1}$ → regroupement/dvpt ; conjugué : $\bar{z}=a-ib$

si "n" grand, astuce dvpt par formule du binome : $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$ avec $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

• Racine n-ième complexe :



donc $z^n \Rightarrow e^{i\frac{\theta}{n}\cdot k}$ avec $k=\{0,\dots n\}$

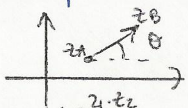
$(e^{i\theta})^n=(\cos\theta+i\sin\theta)=\cos n\theta+i\sin n\theta$

• Trinome dans ℂ : $ax^2+bx+c=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ avec $\sqrt{-\Delta}=i\sqrt{\Delta}$

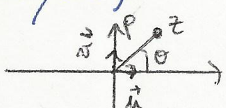
↳ demonstration completion du carré : $\Leftrightarrow a\left(\underbrace{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{id remarquable}}+\frac{\Delta}{4a^2}\right)=0$; verifier valeur interdite (division) et racine evidente (±1)

• Lieu geometrique et argument : Dans un plan orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, but trouver point M tel que : "ensemble de point"

$\arg(z)=(\vec{u},\vec{OM})=\theta$ avec $z=\rho e^{i\theta}$ et . $\arg(z_B-z_A)=(\vec{u},\vec{AB})$

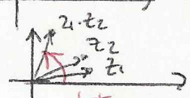


translation



} cas "point"

. $\arg(z_1\cdot z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2)$



rotation

↳ droite, demi-droite, cercle (possible)

• Decomposition element simple : methode euclidienne si $\deg(A)<\deg(B)$: $\frac{A(x)}{B(x)}=\varphi(x)+\frac{R(x)}{B(x)}$

partie entière

↳ une fois $R(x)$ simplifié, on cherche à factoriser $B(x)$ en trouvant racine ⇔ pôle

Exemple : pour $\frac{R(x)}{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)}$ on a : $\alpha=\frac{R(\lambda_1)}{(\lambda_1-\beta)}$, $\beta=\frac{R(\lambda_2)}{(\lambda_2-\alpha)}$ donc $\frac{A(x)}{B(x)}=\varphi(x)+\frac{\alpha}{(X-\lambda_1)}+\frac{\beta}{(X-\lambda_2)}$

$B(x)$ sous le pôle (pour generalisation)

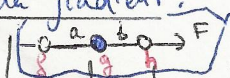
• Groupe $(G,*)$: $\underbrace{a*b\in G}_{\text{loi composition interne}}$; $\underbrace{(a*b)*c=a*(b*c)}_{\text{associativité}}$; $\underbrace{e*a=a}_{\text{element neutre}}$; abelien si symetrique

↳ (voir) Th caracterisation pour sous groupe

• Perceptrons : Produit scalaire (combinaison lineaire) + fonction d'activation = classifier lineaire, heaviside : $\sum w_i x_i + b_i \geq 0 \to 1$

XOR Test ↳ Erreur quadratique : $\sum_{i=1}^{N}\left(F(x,y)-XOR\right)^2 \longrightarrow 0$?

• Formule de gradient :



$\frac{\partial F}{\partial a}=\left(\frac{\partial b_i}{\partial a}\right)\frac{\partial F}{\partial b_i}=\left(\left(\frac{\partial h}{\partial a}\right)\frac{\partial b_i}{\partial h}\right)\frac{\partial F}{\partial b_i}=\left(\left(b_i\cdot f_*\cdot g_*'\right)\cdot\frac{1}{g_*}\right)\frac{\partial F}{\partial b_i}$

valeur instantanée/automatique

↳ descente : $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $P\to f(P)$: $P_{k+1}=P_k-\delta_k\cdot \text{grad}\, f(P_k)$; P_0 : points init aléatoire

À SAVOIR

- **Morphisme de groupe :** $\phi : (G, *) \to (H, \star)$ alors $\phi(G_1 * G_2) = \underbrace{\phi(G_1)}_{H_1} \star \underbrace{\phi(G_2)}_{H_2}$

  ↳ vérifier préalable si élément neutre ! exemple GL_n : groupe matrice inversible $\Rightarrow A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}$ vrai (sous groupe)

- **Permutation :** $\sigma = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & d & e & a & c \end{pmatrix}$ avec $\sigma(a) = b$; $\underbrace{\sigma(\sigma(a))}_{\sigma \circ \sigma(a)} = d$ $\quad \{c \to e,\ e \to c$

  ↳ produit de cycle disjoint : $\sigma = (a\ b\ d) \circ (c\ e) \to$ ordre 3 et 2 $\to$ ordre permutation : $PPCM(3,2) = 6$

  ↳ produit de transposition : $\sigma = (a\ b) \circ (b\ d) \circ (c\ e) \to$ signature $\varepsilon = (-1)^3$

- **Solution polynome dans $\mathbb{R}[X]$** (anneau, indeterminée) : ① Calculer degrée $\Rightarrow$ polynome (2 terme → simplifier) ② Poser le polynome $\Rightarrow$ identifier coefficients "a_i"

  ↳ degrée : • $\deg(P(X^n)) = n \deg(P)$; $\deg(X^n P(X)) = \deg(P) + n$; $\deg(P^{(n)}(X)) = \deg(P) - n$

  • $\deg(\lambda P(X)) = \deg(P)$; $\deg(P \circ P(X)) = \deg(P)^2$

- **Division euclidienne d'un polynome $P(X)$ par $D(X)$:** Pour $\deg(R) < \deg(D)$ on a : $\underbrace{P = QD + R}_{\text{anneau car distributif}}$ $\Rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} P(X) & D(X) \\ (\dots)\ -\ Q_n(X) \cdot D(X) & \hline \\ \hline R(X) & Q(X) = Q_n(X) + \dots + Q_0 \end{array}$$

  avec $Q_i = \alpha_i X^i$

  ↳ on cherche $R(X)$ et $Q(X)$

- **PGCD Polynome par Euclide :** Pour P, Q défini avec $\deg(P) > \deg(Q)$, on cherche $D(X)$, tq : Tant que $\deg(Q) < \deg(R)$

  on pose : $P = Q \cdot D_0 + R_0$
  $Q = R_0 \cdot D_1 + R_1$
  $(\dots)$

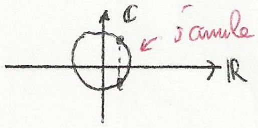
  $PGCD = R_{n-1}$, cas simple lorsque $R_n = 0$

- **Décomposition en produit d'irréductible (polynome $\mathbb{R}[X]$)** $\mathbb{R}[X] \xrightarrow{(0)} \mathbb{R}[X] \xrightarrow{(1)} \mathbb{C}[X] \xrightarrow{(2)} \mathbb{R}[X]$ (si besoin)

  (0) : reconnaître id remarquable : $\begin{cases} a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \\ a^2 + b^2 = (a+ib)(a-ib) \end{cases}$

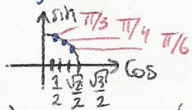
  (1) : Th fonda algèbre : $X^n + a \Leftrightarrow X^n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\sqrt[k]{a}\, e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right)$ car $e^{i\pi} = -1$

  (2) : regroupement racine conjugué : $\begin{cases} Z\bar{Z} = |Z|^2 \\ Z + \bar{Z} = 2\,\mathrm{Re}(Z) \end{cases}$ car



- **Résoudre équation trigonométrique :** ① Définir intervalle appartenance $(\sin, \cos) \in [0, 2\pi] : [-1, 1]$; tan : $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

  ② Solution dans cercle trigonométrique :



  ③ Déterminer periodicité $\exists k \in \mathbb{Z}$; note : $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$; $\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) = \sin(a+b)$

- **Vérif Application linéaire $\mathcal{L}$:** ① additivité : $f(x+y) = f(x) + f(y) \Rightarrow$ élém neutre : $\underbrace{f(-1,0) + f(1,0) = f(0,0) = (0,0)}_{\text{3 conditions vrai}}$

  $\mathbb{K}$: corps espace vectoriel ② homogénéité : $f(\lambda u) = \lambda f(u) : \forall \lambda \in \mathbb{K}$

- **Évaluation de $\mathcal{L}$ d'un polynome :** Soit $P \to u(P)$, on pose dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ $\quad b_i$

  (suite presque nulle) $\quad a_n X^n + \dots + a_0$

  ↳ $u(1) \Leftrightarrow a_0 = 1$, $a_{i \neq 0} = 0$
  $u(X) \Leftrightarrow a_1 = 1$, $a_{i \neq 1} = 0$
  $\vdots$
  $u(X^n) \Leftrightarrow a_n = 1$, $a_{i \neq n} = 0$

  } suivant l'ordre dans la base, on retrouve la matrice $u(P) = \sum (\text{colonne } i) \cdot u(X^i)$

$$\begin{array}{c} u(1) \cdots u(X^n) \\ \begin{pmatrix} & & \\ & b_i & \\ & & \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ X^n \end{matrix} \end{array}$$

  } le déterminant indique colinéarité (non inversible) pour $\det(u) = 0$ si triangulaire sup, $\det =$ produit coefficient diagonaux

A SAVOIR

combinaison linéaire

- $\{(a_1, \cdots a_n), \cdots, (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\}$ base de $\mathbb{R}^n$: si "dim = n" vecteur (ou) la CL : $\lambda_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \vec{0}$ ($\vec{v_1}$, $\vec{v_n}$)

↳ pour cela : on echellone la CL, si $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ alors famille libre et generatrice, lié sinon

Prop : le rang de la famille et s.e.v. engendré sont invariant par op élémentaire "⟵"

exemple (possible) ↳ $\text{Vect}(u, v, w) = \text{Vect}(u, v, w - 2u) = \cdots = \text{Vect}(3v, w - 2u + v, u)$ $\lambda_1 + + \lambda_n = 0$, $\vdots$, $\lambda_n = 0$

non echellonnée — echellonnée

- Combinaison lineaire : "u" est la CL des "u_i" si $\vec{u} = x_1 \vec{u_1} + \cdots + x_n \vec{u_n}$ systeme d'equation compatible (n'a qu'une seule valeur possible)

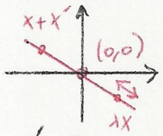
↳ note : si $\dim(u) \neq n$ verifier la colineanté (par echellonage)

3 vecteurs dans dim 2 ; 2 vecteurs dans dim 3

- Famille libre (u, v, w) si $\underbrace{a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}}_{\text{à resoudre}}$ avec $a = b = c = 0$ uniquement alors famille libre

↳ le nombre de vecteur n'est pas forcement $=$ à $\mathbb{R}^n$. ↳ ⇒ u, v, w non nul et non proportionnel, lié sinon

- F s.e.v. de E : ssi $\overbrace{\vec{0},\ \vec{X} + \vec{X'} \text{ et } \lambda \vec{X}}^{\text{caracterisation}} \in F$ ⟺ droite passant par $(0,0)$



↳ cas pratique $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y = x^2\}$; tester 2 vecteur $\in F$ mais dont la somme $\notin F$

$(1,1)$ et $(2,4)$ — $(3,5)$

↳ Theoreme intersection : l'intersection de 2 s.e.v. est un s.e.v.

↳ Cas union : $\{F\} \cup \{G\}$: $X \in F \overset{\text{definition}}{\subset} F \cup G$ mais $X + X' \notin F, G$

$X' \in G \subset F \cup G$ ↳ sauf si $F \subset G$ ou $G \subset F$

- Produit de matrice : Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$, $A.B$ défini ssi $(m, n) \times (n, p) = (m, p)$

↳ $c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} \cdot b_{rj}$; ex $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ ⇒ somme des produits

- Polynome minimale d'une matrice "carré" : Trouver expression polynomiale tq : $a_n M^n + \cdots a_1 M^1 = \overset{\text{annulateur}}{0}$

↳ Th Caley Hamilton : $\underbrace{\chi_c}_{\text{polynome caracteristique}} = \det(X \cdot I_n - M)$ avec $\det \begin{pmatrix} \boxed{a} & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} f & d \\ i & g \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

↳ astuce linearité du determinant : $\det(C_1, \ldots a C_i + C_i'', \ldots, C_n) = a \det(\ldots C_i' \ldots) + \det(\ldots C_i'' \ldots)$ simplificat°

↳ ⚠ si m̂ racine (double, ...) cas degrée minimal ! verifier si le polynome caracteristique est $\neq$ de celui d'I_n. (identité)

- Diagonalisation matrice :

① Calcul du polynome caracteristique : $\chi_c := a_n X^n + \cdots + a_0$ ⇒ ② factorisation sucessive par identificat° $(\lambda - a) Q(\lambda)$

astuce $n > 2$: Trouver les racines évidente : $\{-2, -1, 1, 2\}$ ⇒ systeme d'equation à resoudre ensuite

③ Resolution du systeme : $M \vec{v} = \lambda \vec{v}$ ⇒ ④ diagonale $\text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et matrice de passage $P \cdot P^{-1} = I_n$

note : $P = ((v_1), \ldots, (v_n))$ et $P^{-1} = \frac{1}{\det P} {}^t \text{com} P$: (car I_n) (→ formule de Laplace) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & g \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & g \end{pmatrix}$ et $\text{com} \begin{pmatrix} \boxed{a} & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

→ pour racine multiple : trouver une base associé : ex : equation de plan, droite...

$\text{com}(A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$

A SAVOIR

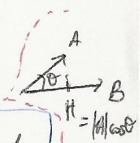
- **Operation elementaire** : invariance : $L_i \leftarrow \lambda L_i$; $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$; $L_i \leftrightarrow L_j$

↳ utile resolution systeme : echellonage : " $x_n \Rightarrow x_{n-1} \Rightarrow \cdots \Rightarrow x_0$ " implication à la suite

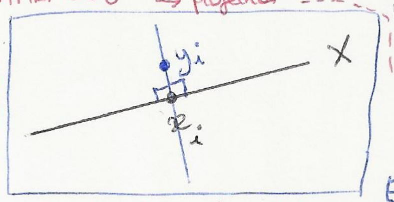
↳ pivot de gauss : $a_1 x_n + \cdots + a_1 x_0 = b_1$ ⋮ $a_n x_0 = b$

- **Orthogonalité** (x, y des vecteurs) $x, y \in E$ orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$ noté $x \perp y$

" $x_A x_B + y_A y_B = |A| \cdot |B| \cdot \cos\theta$ " → projection



orthogonal de X : $X^{\perp} = \{ y \in E, \ x \in X, \ \langle x, y \rangle = 0 \}$



⚠ espace hilbertien ⇒ X est une droite ! (ou segment...)

→ prouver $A^{\perp} \& B^{\perp}$, on pose $x \in A^{\perp}$, puis on cherche " $y \in B$ tq $\langle x, y \rangle = 0$) exemple : si $A \subset B$ alors si $x \in B$, $x \in A$

- **Produit scalaire** : bilineaire " $\langle x + \lambda y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle$ ", positive " $\langle x, x \rangle \geq 0$ " et symétrique " $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ "

↳ tester $u = (1, 1)$, si bilin : $\varphi(\lambda u, u) = \lambda \varphi(u, u)$ ↳ tester $u = (0, 1)$ (somme de 2 carrée) si positive : $\varphi(u, u) > 0$

cas générale : $u = (x, y)$ pour $\varphi(u, u)$

- **Decomposition de gauss** : Forme quadratique ⟶ Forme canonique $\left\{ ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \right.$

$$q = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_n^2 + a_{12} x_1 x_2 + \cdots + a_{nm} x_n x_m$$

si $x_1 x_i$

reconnaitre identité successible $(x^2 + yx2) = (x + y)^2 - y^2$

$$q = \left\{ a_1 \left(x_1 + \sum \frac{a_{12} x_2}{2a} \right) - \sum \frac{a_{12}^2 x_2^2}{4a} \right\} + \underbrace{a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_n^2 + \cdots + a_{nm} x_n x_m}$$

élimination, reecriture puis redecomposition de gauss si $x_i x_j$

- **Variation de la constante** : $a(x) \frac{dy}{dx} + b(x) y = c(x)$: sol gén = sol homogene ① + sol particuliere ②

① $a y' + b y = 0 \Leftrightarrow \int_0^t \frac{y'}{y} dx = -\int_0^t \frac{b(x)}{a(x)} dx \Rightarrow y_h(x) = \lambda \cdot f(x)$ → $\left[\frac{u'}{u}\right] = \ln(u)$

② $y_p = \lambda(x) \cdot f(x) \xrightarrow{(u \cdot v)' = u'v + v'u}$ introduit dans eq diff : $\lambda'(x) = g(x)$

↳ $\lambda(x)$ doit disparaitre (simplification)

$$y_g = y_h + \underbrace{G(x) \cdot f(x)}_{y_p}$$

- **Second ordre** : $ay'' + by' + cy = \sum f(x) \xrightarrow{=0, \ y = e^{rx}} (ar^2 + br + c) e^{rx} = 0 \longrightarrow \underset{(\text{discriminant})}{\Delta} \longrightarrow$ " r "

(coeff constant)

→ $\Delta > 0$ $y(x) = A e^{r_1 x} + B e^{r_2 x}$

(superposition) $\Delta = 0$ $y(x) = (Ax + B) e^{rx}$ solution double → $\frac{d}{dr} \alpha x$

$r_1 + r_2$ $\Delta < 0$ $y(x) = (\cos \beta x + \sin \beta x) e^{\alpha x}$

↳ Cauchy Lipschitz sinon

principe superposition → $x^2 + \cos(x)$ (exemple) → solution particulière polynome + sinus → $\underbrace{y = y_h + y_p}$ Condition initiale

à linéariser (Moivre)

- **variable séparable** reecrire sous forme $y'(x) \underbrace{f'(y(x))} = g'(x)$ puis intégrer

[$\simeq f(y) \, dy$ $\simeq g(x) dx$] forme plus simple

ex $y'(1 + y') = x \Leftrightarrow (1 + y') \frac{dy}{dx} = x$ --→ astuce : $f(x) = u^{\alpha} \rightarrow f'(x) = \alpha u^{\alpha - 1} u'$

donc $(1 + y') dy = x \, dx$

A SAVOIR

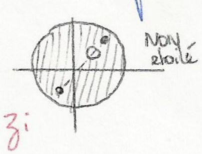
- Th Cauchy-Lip : Savoir si équation def par fct C^p admet solution C^{p+1} → nombre de fois dérivable
  ↳ si fct nulle existe, alors si C^p, existe fct solution non nulle → unicité Cauchy
  ↳ autonomes : $\dot{x}(t) = f(x(t))$; ordinaire $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$

$\ddot{x} = a\dot{x} + bx + c \iff \left\{ \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot v + b \cdot x + c \\ v \end{pmatrix} \right.$ → premier à résoudre si numérique

↳ réduction : $\ddot{x}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t)) \rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = f(t, x, y) \end{cases}$

- Syst équations diagonalisable : réécrire $X' = AX$ → polynome caractéristique → vérif Th rang si valep double
  → vecteur propre : $\mathrm{Ker}\,(\underbrace{A - \lambda I_n}_{M}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid M \cdot \vec{x} = 0\}$ → solution $X(t) = \sum \alpha_i\, e^{\lambda_i t} u_i$ (vecteur propre)
  ↳ valeur du vecteur pour laquelle la matrice s'annule par valeur propre. valeur propre
  Th du rang : $\mathrm{rg}\, A + \dim \mathrm{Ker} f\, A = \dim E$ → $\mathrm{rg}\, A = \dim \mathrm{Im}\, A \iff$ combinaison linéaire vecteur colonne → colinéarité

- Ouvert étoilé : ouvert tel que l'on ait au moins un point où l'on peut accéder à tout les autres sans sortir de l'ensemble : (par segment $[a, x]$)



$\forall x \in A : \{(1-t)a + tx \mid t \in [0,1]\}$ (homothétie + rotation)

→ tester le symétrique des pôles par rapport à z_i

- Résidu : identifier pôle de $f(z) = \dfrac{g(z)}{p_0(z) \cdots p_n(z)}$ (pôle → $p_0(z)$) ⟶ réécrire (pour chaque pôle) : $p_0(z)\, f(z) = \dfrac{g(z)}{p_1(z) \cdots p_n(z)}$

→ $\mathrm{Residu}\,(f(z), \text{pôle de } p_0(z)) = \lim\limits_{z \to \text{pôle}} \dfrac{g(z)}{p_1(z) \cdots p_n(z)}$ (prolongement par continuité : hopital ou DL) plus simple

astuce : $z^a = e^{a \log z}$

↳ ⚠ $(z^2+1)^2 = ((z+i)(z-i))^2 = (z+i)^2 \cdot (z-i)^2$
⇒ 2 pôle d'ordre 1 (?)

- Série de Laurent : DSE de fct holomorphe dans $\mathbb{C}$ ⇒ réécrire $f(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \underbrace{z^k}_{\text{extrême}}$
  ↳ rayon de convergence au voisinage singularité/pôle

relation : • $\exp(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ ⇒ séparation variable $f(z) = \underbrace{g(z) \cdot h(z)}$ → suivant $k < 0$, $k \geq 0$
↳ les z^n doivent s'annuler pour extrême "z^k"

• $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ ⇒ reconnaître dvpt élément simple "$1-x$" doit être limite ouverte du pôle → chg de variable $n \to n \pm k$

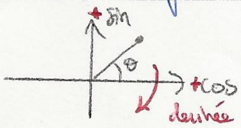
- Singularité isolé : Déterminer "a" tel que $f(a) \to +\infty$ ⇒ Dvpt limité (max) $e^x = 1 + x + O(2)$
  si $|f(a)| \to +\infty$ alors pôle, si $f(a) = L$ alors effaçable ; si plusieurs possibilité —
  → alors pose $u_n = 1/n \in \mathbb{R}$, $v_n = 1/in \in \mathbb{C}$ $\xrightarrow[+\infty]{}$ "a" mais si $f(u_n) \neq f(v_n)$ ($+\infty$) alors essentielle

- Ligne de niveau : (Th) gradient* de f perpendiculaire ; ensemble solution où $f(x,y) = k$ (x,y) $\quad * \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \vec{e_i}$
  - pas de solution $\mathbb{R}$ ⇒ courbe vide
  - si dénominateur : réécrire : reconnaître identité + cercle trigo $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ → vérifier indéfini en substituant → solution où non

À SAVOIR

- **Fonction en limite $(0,0)$** (coordonnée (x,y)) ↳ converge ? : Tester coordonnée "$y = x$" ou "$y = ax$" sinon inégalité triangulaire
  puis faire tendre (x, ax) / (x, x) vers "$x \to 0$" ↳ si $\neq$ alors n'a pas de limite
  inégalité : $|f(x,y)| \leq |f(x)| + |f(y)|$ avec $|x| = \sqrt{x^2}$ et $|\sin| \leq 1$

- **$\exists$ dérivée partielle** : Dériver $f(x,y)$ par rapport à variable comme si l'autre constante (fixé)



$(\cos(ax))' = -a\sin(ax)$; $(u \cdot v)' = u'v + v'u$ et $(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha - 1} u'$

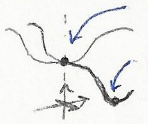
- **$\exists$ dérivée ordre 2 en "a"** : si Classe C^2 dans $\mathbb{R}^2$ où dérivée croisée égale : $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2}{\partial y \partial x}$ (définition)
  (Th de Schwarz-Young) → sinon n'est pas de classe C^2

- **Différentielle** : est une application linéaire : $df_{(x,y)}(h,k) = h\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + k\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \rightarrow df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$ (forme exacte $\Leftrightarrow \dfrac{\partial h}{\partial y} = \dfrac{\partial k}{\partial x}$)
  ↳ f peut-être un vecteur ! $\quad \omega = h\,dx + k\,dy$

- **Jacobien** : variation d'une fct d'un point M suivant coordonnée : $f(x,y) = \begin{pmatrix} \phi_1(x,y) \\ \phi_2(x,y) \\ \phi_3(x,y) \end{pmatrix} \rightarrow J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_0}{\partial x} & \frac{\partial \phi_0}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \end{pmatrix}$
  ↳ suivant "sortie" $\vec{x}$: $\dfrac{\partial \phi_1}{\partial x} + \dfrac{\partial \phi_2}{\partial x} + \dfrac{\partial \phi_3}{\partial x}$; chain rules (rappel) : $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$ ↳ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{\partial x}$

- **Extrema local** : Point critique de $f(x,y)$: $\begin{cases} \partial_x f = 0 \\ \partial_y f = 0 \end{cases} \rightarrow \underbrace{(a,b)}_{\text{solution}} \rightarrow$ min/max ? → chgt variable : $u = x - a$, $v = y - b$
  ↳ se ramener à $(0,0)$ (via chgt de variable) : $f(x,y) = \sum u$ et v → écriture : carré $(u,v) \pm$ cte → le signe du carré donne min/max
  $\lessgtr \boxed{a} \longrightarrow f(a,b)$

- **Nature extrema** : Point critique (a,b) : dérivée partielle ordre 1 ⇒ **Nature** : dérivée ordre 2 au pts
  ↳ "det" matrice hessienne : $\underbrace{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}}_{r} \cdot \underbrace{\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}}_{t}(a,b) - \left(\underbrace{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}}_{s}(a,b)\right)^2 = k$



$k < 0$ (concave) : pts col
$k > 0$ (convexe) : min/max

- **Equivalence en $+\infty$** : $u(n) \underset{+\infty}{\sim} v(n)$ si $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u(n)}{v(n)} = 1 = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{v(n)}{u(n)}$ (alors (astuce)) → sinon n'est pas équivalent !
  Pour "$n+1$" réécrire "$n\left(1 + \frac{1}{n}\right)$" car $e^{n+m} = e^n \cdot e^m$ et $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$

- **Prolongement par continuité en "a"** : Forme : $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ → 2,5 possibilité
  ① si $g(x)$ ou $h(x) \to 0$ alors Encadrement via inégalité de Cauchy-Schwarz (multiplication)
  ② si $g(x) \neq 0$ et $h(x) \to +\infty$ (et réciproquement) alors $(u_n), (v_n) \to 0$ et $f(u_n) = f(v_n)$ prolongeable
  (ex) T $\quad T + \frac{\pi}{2}$

A SAVOIR

$\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle

- **Interval continu** : Son image par une fonction est un intervalle, la réciproque est fausse.

preuve : (TVI) $[y_1, y_2] \subset f([x_1, x_2])$ mais caractère ouvert, semi-ouvert, fermé et/ou borné (ou infini) non conservé

Im

→ trouver des contre exemples $]\,,[$ $[\,,[$ $[\,,]$ ex via $\sin(x)$, $\frac{1}{x}$

- **Limite via dérivée** : taux d'accroissement : $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ → 2 possibilités

① soit Poser $f(x)$ et trouver $f(x_0)$; ② sinon écrire $f'(x)$ ⓒ Finalement $f'(x_0)$

- **Limite trigo via dérivée** : réécriture : $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \left[\lim_{x \to x_0}\left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right)\right] \cdot h(x) = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$ (plus simple) *

($u(x) \to 0$, $v(x) \to 0$: contrainte énoncée ; $\underbrace{\quad}_{g'(x)}$; $h(x) \to \neq 0$)

→ $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$ (pythagore) ;

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ → paire $f(-x) = f(x)$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ → impaire $f(-x) = -f(x)$

* ⚠ $(1-\cos)' = \sin(0)$ à enter : formule !

- **Relation DL** : Somme : ne change pas l'ordre $o(x^n)$; Produit : change ordre ⚠

Usuelle : e, $\sin$, $\cos$: convergence série entière ; Arc : Intégration série hypergéométrique (géométrique), Taylors sinon

$\sum a_n z^n$ $\quad \sim \sum a_k q^k$ $\quad \sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

- **Limite via Dépt limité** : si $\lim \frac{u}{v} = \frac{u'}{v'}$ (Hôpital → toujours plus compliqué) ne marche pas (ex : $v = x^2$ $= 1-\cos(x)$ → formule trigo possible) → dépt limité à l'ordre annulateur

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$; $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$; $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$ } Indispensable

⚠ revient à expression "exp" via : $a^x = e^{x\ln(a)}$, mais $x^{x^x} = (x^x)^x \neq x^{(x^x)}$ en log

- **Equation Logarithmique** : $\ln(P(x)) - \ln(Q(x)) = \ln(C)$ → on veut réécrire $\ln\left(\frac{P}{Q}\right) = \ln(C)$ pour composition exponentiel (bijectif)

Pour cela : vérifier si $P(x), Q(x) > 0$ et si "~~composé~~" la solution $\in$ à l'intervalle (Union !) vérifier ~~composé~~

Astuce : $-\ln(a) = \ln\left(\frac{1}{a}\right)$; $\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$; $n\ln(a) = \ln(a^n)$

- **Relation entre coefficient et racine** $P = aX^2 + bX + c \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$ (Viète) pratique aussi si l'on connait l'une des deux solutions

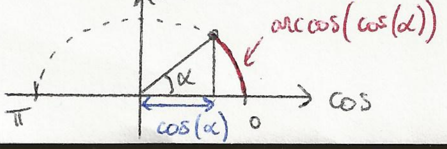
→ utile prop algébrique + bijectivité log : $\ln(x) + \ln(y) \iff \ln(xy) \iff xy$

→ reconnaître identité remarquable aussi : $\boxed{xy = C \iff 2xy + x^2 + y^2 = 2C + x^2 + y^2}$

- **Arc cos** : fonction réciproque de "cos" sur $[0, \pi]$ ⇒ périodicité 2π et parité $\cos(-x) = \cos(x)$

rq : $\forall x \in [0, \pi]$, $\arccos(\cos(x)) = x$

vérifier intervalle !!



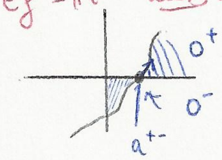
À SAVOIR

- **Ensemble définition "composition"** : sens "gauche → droite" $\overrightarrow{\underset{1}{f} \circ \underset{2}{g} \circ \underset{3}{h}}(x) = \underbrace{f(g(h(x)))}_{1\ 2\ 3}$

1) $f(x)$ défini si $x \geqslant a$ 2) $g(x) \geqslant a$ inégalité vérifié (...) finalement (restriction) $x \in E_f \,|\, \{R_g\}$

⚠ si $E_g > 0$ et $E_f = \mathbb{R}^+$ alors $x \in \mathbb{R}$

- **Limite à gauche/droite** :



Pour $\lim\limits_{x \to a^{+-}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 3 cas : 1-2 : $f(x) \underset{a^{+-}}{\sim} \lambda^{+-}$ et $g(x) \underset{a^{+-}}{\sim} 0^{+-}$; 3 : $f(x) \underset{a^{+-}}{\sim} 0^{+-}$ et $g(x) \underset{a^{+-}}{\sim} 0^{+-}$ → $\pm\infty$

3ème cas : forme indéterminée : lever via factorisation même racine ! (si possible ! dans certain cas, plus besoin de distinguer gauche/droite)

- **Ensemble dénombrable** : S'il peut y avoir surjection avec $\mathbb{N}$: $n \mapsto \varphi(n)$ ou partie d'ensemble dénombrable

(astuce bijection) → montrer "$g \circ f = id_g$" ou "$f \circ g = id_F$" ; $f = a^n \to g = \dfrac{\ln(u)}{\ln(a)}$ ↳ $A \subset B$ ← dénombrable → compliqué

($\mathbb{R}$ indénombrable, $\mathbb{N}$ dénombrable), $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$; $\phi(a,b) \mapsto a + b\sqrt{2}$ ⇒ surjection de $\mathbb{Q}^2$ dans $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

- **Intégrale curviligne** $\displaystyle\int_C \omega$ ← $(n-1)$ forme différentielle ; $\omega = \underbrace{\lambda_1(x)}\,dx_1 + \dots + \underbrace{\lambda_n(x)}\,dx_n$ 1-forme

C ← contours/bords ↗ soit donnée, sinon dessin segment $x = \frac{1}{2}y$ règle de la chaîne

Étapes : ① Écrire les 1-forme suivant même variable "x" ② réécrire différentielle $dx_i = \dfrac{dx_i}{dx}dx$; ③ Recherche intégrale

$x = x$; $y = f(x)$; $z = g(y) = g(f(x))$; (...)

- **Intégrale double** : $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \underbrace{a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d}_{\text{à réadapter (sinon)}}\} \Rightarrow \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$

⚠ si a,b constant et $c(x), d(x)$ alors ordre inversé ! → ⚠ ordre dx ① puis dy ②

↳ astuce indépendance inégalité : si $\varphi_1(y) \leqslant x \leqslant \varphi_2(y) \Rightarrow \varphi_1(y) \leqslant \varphi_2(y) \Rightarrow y \leqslant \phi$

- **Convergence intégrale impropre** : Intervalle de continuité → Pb bord / signe constant → "limite primitive $a = x$" ou "critère de comparaison"

↳ critère $0 \leqslant f \leqslant g$ si g conv → f aussi, soit (Rieman) $\lim\limits_{u \to +\infty} u\, f(u) = 0 \Leftrightarrow f(u) = \dfrac{o}{u}$ si $\displaystyle\int \frac{1}{u}$ conv alors $\displaystyle\int f(u)$ aussi ; forme $(t-a)^\alpha$

- **Reconnaissance forme primitive** : $\underbrace{\displaystyle\int \alpha u^{\alpha-1} u' = [u^\alpha]}$; $\underbrace{\displaystyle\int \frac{u'}{u} = [\ln(u)]}_{u > 0}$; $\underbrace{\displaystyle\int u' v'(u) = [v(u)] ; \int u'v + v'u = [u \cdot v]}_{\text{vrai aussi lorsque } \boxed{v = u}}$

à un coefficient près à trouver

$\alpha \in \mathbb{R}$, id : $n \to$ puissance, $q \to$ racine

- **Limite de suite** : Mettre "u_n" sous forme de Riemann : $u_n = \dfrac{1}{n}\left(f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + \dots + f(b)\right) \xrightarrow{n \to +\infty} \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

astuce : $n + m = n\left(1 + \dfrac{m}{n}\right)$ et $\left(\prod a_i\right)^n = \exp\left(\underbrace{n\left(\sum \ln(a_i)\right)}\right)$

subtilité : si $a = 0$, parfois $f(a) = 0$; aussi $f(\alpha x) \Leftrightarrow f\left(\alpha\left(a + \frac{b-a}{n}\right)\right)$

composition des limites : $f \xrightarrow{a} b$, $g \xrightarrow{b} c$, $g(f) \xrightarrow{a} c$

À SAVOIR

- **Th. de convergence dominée:** limite de l'integrale d'une suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mesurable $(\mathcal{M})$: (bornée et continu par morceau)

$\hookrightarrow$ condition : ① Convergence simple : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \xrightarrow{s} f(x)$ (suivant intervalle) (marche si on obtient une constante)

② Integrable sur interval : $|f_n(x)| \leq M$ $\Big\}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(y)\,dy = \int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(y)\,dy$ (regularité)

$\hookrightarrow$ but calculer une integrale "n"

- **Limite d'integrale impropre:** Tester le découpage: $\lim \int_0^{+\infty} f_n = \lim \left(\int_0^1 f_n + \int_1^{+\infty} f_n\right) = \lim \int_0^1 f_n = \int_0^1 \lim f_n$

$\hookrightarrow$ comparer convergence dominée de $\int_0^1 f_n$ et $\int_1^{+\infty} f_n$ si $f_n(x) \xrightarrow[0\to1]{} f(x) \geq |f_n(x)|_{1\to+\infty}$ alors

$\hookrightarrow$ definir intervalle

- **Rayons de convergence:** soit "regles d'alembert" $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{R}$ pour forme $\sum a_n x^n$ (à reecrire sinon)

sinon etude du cas bornée: $\lim\limits_{+\infty} (a_n R^{b\cdot n})$ ssi $|a_n R^{b\cdot n}| < 1$ $\hookrightarrow$ s'aider astuce factoriel

- **Regularité:** C^∞ si $f(x)$ coïncide avec dvpt en serie entiere quelque soit l'intervalle.

$\hookrightarrow$ $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{sur } I_g \\ h(x) & \text{sur } I_h \end{cases}$, C^∞ si (pour) dvpt serie entiere $g(x) = h(x)$ $\rightarrow$ vrai aussi, si l'intervalle est un point (ex: singularite)

(↑ fct continu) (dvpt en serie entiere)

- **Convergence serie $\sum u_n$:** Equivalence $u_n \underset{+\infty}{\sim}$, puis regle Rieman: trouver "a", tq: $n^a u_n \underset{+\infty}{\to} l$, conv si $a > 1$

$\hookrightarrow$ si factoriel, pour $n \geq 2$: $n! > 2^{n-1}$ $\hookrightarrow$ trouver v_n telque: $\lim \frac{u_n}{v_n} = 1$

- **Contre-exemple convergence (proposition):** Tester : $u_n = \frac{1}{n^2}$, parité $\underbrace{u_{2n} \neq u_{2n+1} \text{ et conv abs } |\sum u_n| \leq \sum |u_n|}_{\text{serie alternée}}$ (ex: $u_{2n} < u_{2n+1}$)

Astuce serie alternée : $(-1)^n = (-1)^{-n}$

- **Assertion remarquable convergence:** Si les "f_n" continu en a, alors "f" aussi $\rightarrow$ ~~Faux~~ pour $f_n \xrightarrow{s} f$ (simple)

Tester $f_n(x) = x^n$ $\rightarrow$ discontinu  (sur $[0,1]$) (mais) $\rightarrow$ VRAI pour $|f_n - f| < \varepsilon$ (unif)

(0 ou 1) (discontinu)

- **Calcul nature suite:** majoration $|u+v| \leq |u|+|v|$; $|u \cdot v| \leq |u|\cdot|v|$; $|\sin(x)| \leq 1$ $\hookrightarrow$ Th gendarme. Factoriser terme dominant : $a^n + b^n = a^n\left(1 + \frac{b^n}{a^n}\right)$ ($]-1,1[$) $\Big\}$ Croissance comparée ensuite

. Quantité conjugé: $z - \bar{z} = 2/(z+\bar{z})$ $\rightarrow$ plus simple pour conv, racine aussi: $z = \sqrt{a+b}$, $\bar{z} = \sqrt{a-b}$

- **Encadrement (u_n) avec sommation:** Comparer terme denominateur entre "k", "m" et "n" (indice, limite inf, limite sup)

$\hookrightarrow$ $u_n = \sum\limits_{k=m}^{n} \frac{n}{n+k}$ soit $m \leq k \leq n$ donc $n+m \leq n+k \leq n+n \Rightarrow \frac{n}{n+m} \geq \frac{n}{n+k} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\sum \geq \frac{n}{2}}$

$\rightarrow$ Analyser terme par terme pour retrouver relation finale

- **Verification assertion (u_n):** contraposition $(A \Rightarrow B) = \text{non } B \Rightarrow \text{non } A$; suite geometrique : $u_{n+1} = q \times u_n = u_0 q^n$

$\forall n \in \mathbb{N}$ devient $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; majoration : $u_{2n} = n$ et $u_{2n+1} = 0$

- **Proposition qualif remarquable:** majoration / borne : $\exists M > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (conv), $|u_n| \leq M$; monotone croissante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$

(inverse) $\forall M > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $u_n \geq M$ $\hookrightarrow$ "$\wedge$" "et" pour les deux

À SAVOIR

remarque : n'est pas majoré non plus si parité

- **Convergence operation de 2 suite $(u_n), (v_n)$** : Tester $(u_n, v_n) = \begin{cases} (n, -n) \to \text{addition } (u_n + v_n) \\ (0, n) \to \text{multiplication } (u_n \times v_n) \end{cases}$

↳ absurde sinon

note, une suite bornée ne converge pas forcément : $(-1)^n = (-1, 1, -1, \dots) \Rightarrow$ diverge !
(pas de limite défini)

- **Application lineaire continue** : Soit $u : (\underset{\text{ensemble}}{E}, N_p) \to (F, \underset{\text{norme}}{N_q})$ si $\|u(x)\|_p \leqslant C \|x\|_q \Rightarrow$ continue

intégrale ou somme $\to$ $x \mapsto u(x)$

$C > 0$ ↑ à supposer et voir si contradiction

$\neq \pm\infty$

↳ inégalité de Holder : $\|f \cdot g\|_1 \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q$

$\sum |x \cdot y| \leqslant \left(\sum |x|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum |y|^q\right)^{1/q}$

} $p = q = 2$ alors Cauchy-Schwartz

- **Compacité** : Un ensemble est dit compact de $\underbrace{\mathbb{R}^n}_{\text{espace métrique}}$ si bornée et fermée $\Leftrightarrow$ suite cauchy convergente $\Leftrightarrow$ entraîne sous recouv fini

↳ $\mathbb{R}^2$ • bornée si pour $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \sum_{ij} a_{ij} x^i y^j \leqslant L\}$ on a : $\underset{\sum \max}{\|(x,y)\|_\infty} \leqslant L \Leftrightarrow x, y \in I_{\text{fermée}}$ solution

↑ ne doit pas être arbitraire

toujours retrouver une inégalité

↳ astuce : ① fixer "x" puis determiner "y" : (x_E, y_E)

② "ou" choisir $(x_E, y_E) = (a, -a)$

} puis calculs norme ∞

exemples : $x^2 + y^2 = 0 \to x^2 \geqslant 0$ et $x \in [-1, 1]$

• E fermée si E est image reciproque du singleton $\{L\}$ est fermée par l'app continue $f(x,y) = \sum a_{ij} x^i y^j$

- **Espace vectoriel normée $(E, \|\cdot\|)$** : Pour $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$ on a : (3 props)

$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \to$ tester si un autre couple donne "0"

$\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|x\| \to$ homogeneité

$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \to$ inégalité triangulaire

↳ Boule : $B(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\}$

⚠ x, a sont des vecteurs coordonnée ! r un scalaire !

- **Espace des suite ℓ^p** : converge si $\underset{\text{suite de suite}}{\|x(n)\|_p} = \left(|x_1(n)|^p + \dots + |x_n(n)|^p\right)^{1/p}$ converge

↳ cas particulier $p = 2$: converge si $\underbrace{|x_m - y_m| \leqslant \|x + y\|}_{\text{critère de Cauchy}}$ avec $(x(n))_m$ $_{n \geqslant 1}$ $\xrightarrow{\text{rang } N}$ x_m

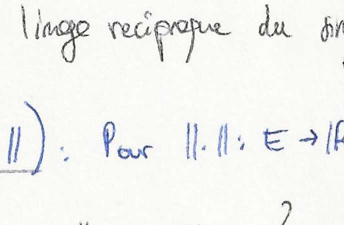
$(x(n))_m = (x_1(n), \dots, x_m(n))$

- **Inegalité valeurs absolu** : $|ax + b| \leqslant c(x) \to$ chgt de signe en "$-\frac{b}{a}$"

$\to$ trouver solution dans interval $[-\infty, -\frac{b}{a}]$, $[-\frac{b}{a}, +\infty]$

$S = \{x, y\}$ si égalité ≠ strict

↳ representation graphique :



} permet de visualisé les incompatibilité pour chaque interval.

- **Ensemble ouvert ou fermée** : $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, a \leqslant f(x,y) \leqslant b\}$ verifier aussi bien ouvert que fermée

↳ ouvert : A ouvert de E si $\forall x \in A, \exists r > 0$, tq : borne $a, b \notin \left]f(x,y) - r, f(x,y) + r\right[\Rightarrow B(x, r) \subset A$

fermée : A fermée de E si $\underset{\text{complémentaire}}{A^c}$ ouvert de $E \Rightarrow \forall (u_n)_F \to \ell \in E$, alors $\ell \in F$

Tester $\frac{1}{n}$ pour borne "0"

A SAVOIR

• Transformée de Fourier par Interval : $\tilde{f}(\omega)_{[\alpha,\beta]} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\cdot e^{-i\omega x}\, dx$ vrai pour $\alpha \to -\infty$, $\beta \to +\infty$

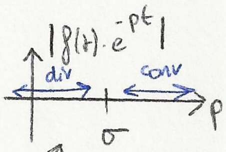
↳ IPP

↳ relation de chasles : $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{sur } [-\infty, a] \\ h(x) & \text{sur } [a, +\infty] \end{cases}$ alors $\tilde{f}(\omega) = \tilde{g}(\omega)_{[-\infty, a]} + \tilde{h}(\omega)_{[a, +\infty]}$

astuce $e^{+i} + e^{-i} \propto \sin$

→ remarque, vérifier valeur de "ω" permise ou non !

• Abscisse de convergence Laplace : valeur "σ" tel que $\mathcal{L}(f(\sigma))$ converge absolument :



$f = g \cdot h$

↳ étapes : $|f(t)\cdot e^{-pt}| \leqslant |g(t)|\cdot|h(t)|\cdot|e^{-pt}|$ association exp → trouver valeurs de "p" tel que $\lim_{t\to+\infty} |f(t)\cdot e^{-pt}|$

↳ astuce : $t = \frac{2k\pi}{\omega}$ pour $\cos(\omega t) = 1$

• Transformée inverse de laplace : $\frac{P(p)}{p^2+bp+c}$
- → racine → décomposition élém simple → forme usuelle (solution système via racine de p)
- → forme canonique $x^2 - bx + c = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \beta = (x - \alpha)^2 + \beta$

↳ Forme usuelle : • $\frac{1}{p+a} \mapsto e^{-at}\,\mathcal{U}(t)$; • $F(p)\,e^{-ap} \mapsto f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)$

astuces $t\cdot u(t-1) = t\cdot u(t-1) \underbrace{- u(t-1) + u(t-1)}_{=0}$

• Equation diophantiennes : solution sont des nombre relatif $(\mathbb{Z}^2)$, retrouver forme $P(x,y)\cdot Q(x,y) = n$ ⇒ divisible par n solution

↳ Etapes : . Factorisation forme canonique : $ax^2 + by^2 - cx - dy = e \Leftrightarrow (x-\alpha)^2 - (y-\beta)^2 = e - R$

• On reconnait identité remarquable $a^2 - b^2$ puis $P(x,y)$ doit diviser $e - R$ → liste solution $S = \{\dots\}$

Lemme de Gauss

• On fixe une solution pour $P(x,y)$, cela implique solution $Q(x,y)$ puis résoudre système $\begin{cases} P(x,y) = S_a \\ Q(x,y) = S_{b(a)} \end{cases}$

• Equation de Bézout : ① Pour $ax + by = c$ réécrire via Euclide $D(ax+by) = D\cdot c$

diviseur commun (a, b, c)

pgcd

↳ PGCD(a, b)

② reformuler : $dx + ey = f$, si $d \wedge e = 1$, ∃ solution → trouver solution particulière (x_0, y_0) de $dx + ey = 1$ (objectif)

doit diviser pour être vrai

③ Comparaison. $d(x - fx_0) + e(y - fy_0) = 0$ → Lemme de gauss : $d \mid e(y - fy_0)$, $e \mid d(x - fx_0)$ ⇒ $d \mid (y - fy_0)$, $e \mid (x - fx_0)$

④ Donc ∃k, tel que : $S = \{(x = fx_0 + ek,\ y = fy_0 + dk)\}$

⑤ Par le pgcd(d, e) on remonte jusqu'à $ax + by = c$ → on choisit aussi des valeurs de (x_0, y_0) qui marche

↳ $R = A - QB$

• PGCD : $a(n) \wedge b(n)$ Pour $\deg(a) > \deg(b)$: $a = q_1 b + r_1 \to b = q_2 r_1 + r_2$

↳ à la suite : $a \wedge b = b \wedge r_1 = (\dots)$ ∄ tant que $\deg(a^*) > \deg(b^*)$ → nouveau à chaque étape

Astuce identité : si dans $a \wedge b$, on remarque $\alpha \cdot a = b^2$ et que diviseur divise a, b et 1 alors $a \wedge b = 1$

• Inversible anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: si $ab \equiv 1 \mod n$ alors premier entre eux → pas de diviseur commun sauf 1

↳ écrire algo euclide (a et n), l'avant dernière ligne donne (pour R) : $1 = A - PQ$, on remonte pour avoir : $au + nv = 1$

conséquence Th de Bezout : $a(u+b) + b(v-a) = 1$ aussi !!

À SAVOIR

$\bar{a}\cdot\bar{a}^{-1}$ avec $\bar{a}^{-1} = \bar{u}$

Equation lineaire dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: soit $\bar{a}\,y = \bar{b}$ on cherche l'inverse de $\bar{a}$ tq : $\bar{1}y = \bar{b}\cdot\bar{u}$

↳ algo euclide : $n = q_1 \cdot a + r_1 \rightarrow a = q_2 \cdot r_1 + r_2$ jusqu'à $\underset{r_n}{1} = r_{n-1} - q_n \cdot r_{n-2}$

↳ forme equation de Bezout à retrouver (remonter euclide) : $a\cdot \underbrace{u}_{1} + n\cdot \underbrace{v}_{0} = 1$ (modulaire)

↳ si système d'équation, pivot de gauss : ⚠ arithmétique modulaire

• **Equation du second degrée dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$** : $x^2 + \bar{b}x + c = 0 \iff x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - R = 0$

• "$\bar{b}$" doit être un entier divisible de 2, astuce : si $b = \bar{1}$ alors $b = (\overline{n+1}) \iff \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - R = 0$

• Trouver une forme de "$\bar{R}$" où la racine donne un nombre entier compris entre $1 \rightarrow n-1$ (peut dépasser "n")

On retrouve : $\underbrace{(x + \alpha)^2 - \beta^2}$ $= \underbrace{(x + \alpha + \beta)(x + \alpha - \beta)}$

rester sur cette forme si anneau et chercher valeur de "t" dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $t^2 = \bar{\beta}$

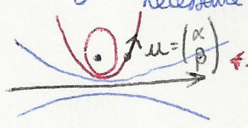
si n premier alors "corps" : 2 solution par addition α, β

• **Barycentre** : $a\vec{GA} + b\vec{GB} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{\text{reduction } \forall M}_{\text{via barycentre } G \text{ de } \{(A,a),(B,b)\}}$: $a\vec{MA} + b\vec{MB} = a(\vec{MG} + \vec{GA}) + b(\vec{MG} + \vec{GB}) = (a+b)\vec{MG}$ ← relation de Chasles

↳ cas degeneré si vrai $\forall G$ $(a + b = 0)$; Astuces : isobarycentre pour $a = b$ → milieu de deux points ⇒ point d'affixe racine de polynome

• **Reduction equation conique** : $ax^2 + bxy + cy^2 + px + qy + r = 0$ → pb avec "xy" : rotation necessaire

① Nature : $\Delta = b^2 - 4ac$: $\begin{cases} < 0 & \text{elliptique} \\ > 0 & \text{hyperbole} \\ = 0 & \text{parabole} \end{cases}$ $\rightarrow \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\rightarrow y^2 = 2px$

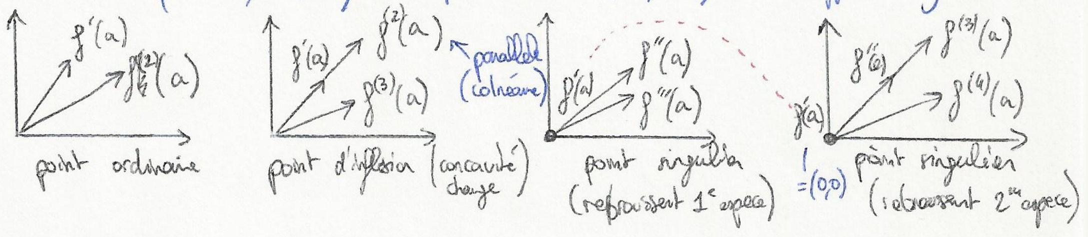


② rotation angle θ : (enlève xy) : $\begin{cases} \theta = \pi/4 & \text{si } a = c \\ \tan(2\theta) = \frac{b}{a - c} & \text{sinon} \end{cases}$ donc $\begin{cases} x = \cos(\theta)X - \sin(\theta)Y \\ y = \sin(\theta)X + \cos(\theta)Y \end{cases}$

③ nouveau repère : $AX^2 + BY^2 + PX + QY + R = 0$ (comparer nature) : courbe paramétrée (translation) : $\begin{pmatrix} x(t) - x_0 \\ y(t) - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}$ $P/2A$, $Q/2B$

• **Arc paramétrée** : Application $t \mapsto (u(t), v(t))$ exemples $t \mapsto (t, t^2)$ de support $y = x^2$

↳ Nature en $t = a$:



• **Immersion/submersion** : Matrice jacobienne en X de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ tel que : $Jf(X)$ envoie sur $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$

↳ q est defini comme le rang de Jf : rang $J = \dim(\mathrm{Im}\,J)$ = nb ligne, sauf combinaison lineaire colonne

↳ vecteur nulle vrai

↳ $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$

si $n \leqslant q$: injective → immersion
$n > q$: surjective → submersion
} verifier ensuite point

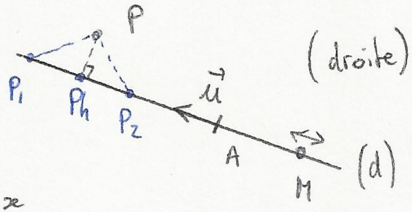
rappel : $(x, y, z) \mapsto (u, v)$: $Jf = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u & \partial_z u \\ \partial_x v & \partial_y v & \partial_z v \end{pmatrix}$

À SAVOIR

- **Sous-variété :** Soit $S = \{(x,y) \in M \times U \mid y = f(x)\}$ le graphe d'une fonction

↳ sous variété "S" si submersion :
- $S \leq M \times U$ ← suffisant si fonction bien défini
- $S = f^{-1}(\{0\})$ → vérifier dans "df" si "0" permit
- pas de point double ⇒ surjection.

- **Distance "point" / "paramétrisation" :**



(droite) $A(x_A, y_A, z_A)$ et $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$

$M(x,y,z) \in (d)$ donc $\exists t : \vec{AM} = t\vec{u}$

↳ on obtient coordonnée "M" : $\begin{cases} x = x_A + t u_x \\ y = y_A + t u_y \\ z = z_A + t u_z \end{cases}$

pour un plan : on a en plus $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ tq : $\vec{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$

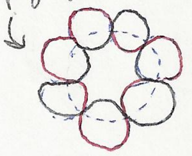
↳ si point "P" en dehors, déterminer $\underbrace{\overset{\text{droite}}{u}, v}_{\text{plan}}, (\dots)$ ensuite (d) : $d = \dfrac{\|\vec{AP} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$, plan : $d = \dfrac{|\det(\vec{AP}, \vec{u}, \vec{v})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$

rappel : $\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \sin(u,v)$

$\|u\| = \sqrt{\sum_i u_i^2}$; $\sin = \sqrt{1 - \cos^2}$ ← produit scalaire (si θ non évident)

- **Longueur arc géométrique (C^p) :** $L = \displaystyle\int_I \|f'(t)\|\, dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$

piège $[0, 2\pi] \to [0, 4\pi]$



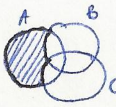
↳ ⚠ ne marche que pour des courbes paramétrée ! utile épicycloïde

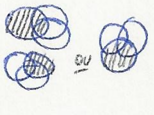
- **Proposition probabilité :** cas général : $P(A \overset{\text{"ou"}}{\cup} B) = P(A) + P(B) - \{P(A \overset{\text{et}}{\cap} B)\}$ → incompatible = 0 (Ⓐ Ⓑ disjoint) ; → indépendant $= P(A) \times P(B)$

↳ Axiomes : $P(\bar{A}) = 1 - \overset{N_A/N_\Omega}{P(A)}$; $P(\Omega) = 1$, $P(\phi) = 0$; complet si 2 à 2 incompatible $A_i \cap A_j = \phi$ \ $B \neq f(A)$

- **Probabilité en écrit (ensemble) / dessin (Venn)**

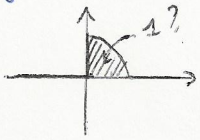
↳ soit A, B, C événement de Ω
- seul / tous / tel "évent" se réalise ⇔ "et" ⇔ $\cap$, seul si A : $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$
- Au moins / plus "n" des "N" se réalise ⇔ "ou" ⇔ $\cup$, au moins 1 : $A \cup B \cup C$



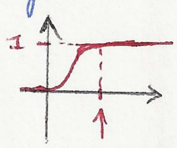


- **Variable aléatoire continu :** Une fct est de densité de proba si sont intégrale suivant $\mathbb{R}$ converge vers 1.

↳ $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \xrightarrow{(a,b) \pm \infty} 1$



alors Fonction répartition : $P(X \leq x) = F_X = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(x)\, dx$



espérance : $E[X] = \displaystyle\int x f(x)\, dx$; si $f(x)$ paire : $f(x) = f(-x)$ ↳ $E[X] = 0$

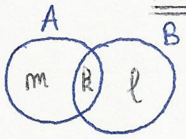
à partir d'ici, tout les éléments sont indexés

- **Application correspondante :** $f : E \to F$:
- non surjective si $f^{-1}(\{a\}) \notin E$ (pas antécédent)
- non injective si $f(a) = f(b) = c$
- bijective si $\forall y \in F, \exists! x \in E, f(x) = y$

↳ tester valeur évidente 1 et 0 :
- $a = 1$
- $a \neq b$ mais $\hat{m}$ c

A SAVOIR

- Diagramme de Venn :



- $k \in A \cap B$
- $m \in A \backslash B \Leftrightarrow A \cap \bar{B}$
- $\{\underbrace{k, l}_{\text{et}}, m\} \subset A \cup B$

} 1 elements : $\in$

} plusieurs : $\subset$

↳ $A^c = \bar{A}$, prop : $A \cap A^c = \phi$

- Ecriture en extension : donner tous les élément d'un ensemble : $\{x \in \mathbb{Q}, \exists(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, x = \frac{n}{p}, \overbrace{\alpha \leq n \leq \beta p \leq N}^{\mathbb{R}}\}$

↳ dans exemple, attention aux répétition $\left(\frac{2}{3} = \frac{4}{6}\right)$, les bords ne sont pas forcément inclus / piege valeurs $n \leq \beta p$ et $x = \frac{n}{p}$

- Double inclusion : $E \subset F$ / $F \subset E$ / (dim F = dim E) alors $E = F$ donc si $x \in E$, $x \in F$

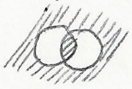
↳ $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = a\}$ $F \subset E$ plus facile (ici) ① on remplace ② on verifie si m̂ égalité

$F = \{(u(t), v(t)), t \in \mathbb{R}\}$ ③ ⇒ ensemble non fini : unicité solution par analyse/synthèse

↳ injectivité : trouver et poser $t = g(x,y)$

- Implication logique : $p \overset{\text{implique}}{\Rightarrow} q \overset{\text{équivaut}}{\Leftrightarrow} \underset{\text{non}}{\neg} p \overset{\text{ou}}{\vee} q$; si $p \Rightarrow q$ et $q \Rightarrow p$ alors $p \Leftrightarrow q$

↳ operateur "ET inclusif" (coïncidence : XNOR)



- Implication simple geometrie (triangle/quadrilatère)

↳ les implications peuvent s'écrire sous forme d'assertion logique !

- Clause logique : Passage d'une forme conjonctive (operateur "ET") à une forme disjonctive (operateur "ou") par loi de Morgan :
  - $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$
  - $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$

associativité (+ commutativité) "ou" : $(A \vee B) \vee C = A \vee B \vee C$

"et" : $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge B \wedge C$

& la distributivité de "ou" par rapport à "et" : $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$

- Table verité implication :

P	Q	P ⇒ Q
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	V

démontre $\neg p \vee q$

⚠ ≠ relation causale !

Concrètement, subtilité si "=" avec 2 valeurs differentes

- Relation binaire : Relation "$\mathcal{R}$" écrit $x \mathcal{R} y$, typique (exemple) $y = f(x)$ ou $f(x,y) = c$

cette relation est :
- reflexive si $x \mathcal{R} x$ vrai → $x = 1$ (suivant cas particulier)
- symetrique si $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow y \mathcal{R} x$ vrai → $x = 1$, $y = -1$
- antisymetrique si $(x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} x) \Rightarrow x = y$ vrai
- transitive si $(x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z$ vrai

↳ relation d'equivalence → r.s.t.

↳ relation d'ordre → r.a.t

A SAVOIR

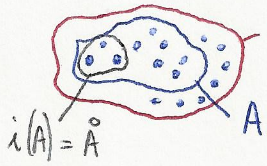
- **DSE en 0** : forme $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right) x^n$; produit cauchy : $f \cdot g = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} \right) x^n$

↳ chgt de variable si dérivée continûment dérivable (difféomorphisme) et bijective : $u(x) \to t$; astuce : $x \pm a = a\left(1 \pm \frac{x}{a}\right)$

condition nécessaire !

↳ factoriser les carré ; idem $1/(x \pm a)$

- **Intérieur et adhérence d'ensemble** :



. intérieur $\mathring{A}$ si union des boule $\in A$

adhérence : ensemble des points voisinage de rencontre $A \to \bar{A} \subset A$

↳ (x_n) converge vers A et $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

↳ tenter $x_n = x + \frac{1}{n}$ et $y_n = y$

alors pour $xy \Rightarrow x_n y_n = 1 + \frac{y}{n}$

(rappel)

↳ Boule : $B(p, r) = \{ x \in M \mid d(x, p) < r \}$ — centre, rayon

L ensemble d'une métrique

- **Equation diff premier ordre, $a(x)$ = cte** : $y'(x) + a(x) \cdot y(x) = b(x)$;

① Eq homogène, $b(x) = 0$: $y_h(x) = \lambda e^{-A(x)}$ (sans second membre)

② solution particulier si $a(x)$ = cte : dépend forme $b(x)$; forme combinée : $y_p(x) = p(x) e^{q(x)}$ — polynome, $\in \mathbb{C}$

degrée sup à $b(x)$

⊕ solution général

⚠ $y_p'(x) = p'(x) e^{q(x)} + p(x) q'(x) e^{q(x)}$ → poser et réduire écriture le plus possible

- **Groupe $(G, \circ)$** : "G" ensemble, "∘" opération ; 4 prop :
  - composition interne . $\forall (a,b) \in G$, $a \circ b \in G$
  - associativité . $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
  - élément neutre . $e \circ a = a$
  - symétrique . $\exists b$, $a \circ b = e$] en démonstration

↳ démonstration par l'absurde possible

↳ pour $G = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\circ = \circ$: associatif mais non distributif

composition $f \circ g = f(g)$

- **Th caractérisation sous-groupe** : $(G, \circ)$ groupe, $H \subset G$ (sous-groupe) si
  - $H \neq \{\emptyset\}$ ou $e \in H$
  - H stable produit, $\forall x, y \in H$, $x \cdot y \in H$
  - H stable inverse, $\forall x \in H$, $x^{-1} \in H$

↳ Exemple : $H(G) = \{ x \in G, f(x) \} \to \begin{cases} f(e) \in G \\ f(x_1 \cdot x_2) \in G \\ f(x^{-1}) \in G \end{cases}$

remplacer x par $(\ldots)$

- **Morphisme de groupe** : Application entre 2 groupes qui respecte structure groupe : $(G_1, *) \to (G_2, \circ)$

vérifier élément de restriction

↳ élément restriction : inversible (souvent) + domaine de restriction (évident)

ex ↳ $\mathbb{R}^*$; ex ↳ $\mathbb{R}^+$

- **Matrice d'une représentation linéaire** : $T(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$; $V_p = \{ \alpha \vec{v_p}, \alpha \in \mathbb{R} \}$; $A^n = P D^n P^{-1}$

endomorphisme si $\Leftrightarrow \in E \to \in E$; ensemble des vecteurs propres ; si diagonalisable "D"

- **Trigonalisation de M** : Si racine double polynome caractéristique : compléter vecteur indépendant $\boxed{\vec{u_3}}$

soit $M \cdot \vec{u_3} = \vec{v}_{CM3} = a \vec{v}_{p1} + b \vec{v}_{p2} + c \vec{u_3}$ donc $\vec{v}_{cp_3} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

vecteur 3ª colonne de M ; vecteur complété $M_{\text{Trigonalisé}}$

Test

ainsi M semblable à $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & a \\ 0 & \alpha_2 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ avec $P = (\vec{v}_{p1}, \vec{v}_{p2}, \vec{u_3})$

α : valeur propre
$\vec{v_p}$: vecteur propre

A SAVOIR

- **$\mathbb{K}$-espace vectoriel :** loi de composition interne "+", loi de composition externe "$\cdot$"
  ↳ pour $u \in \mathcal{L}(E)$, F de E est stable par "u" si $u(F) \subset F$, $u_F(x) = u(x)\ \forall x$, alors endomorphisme induit

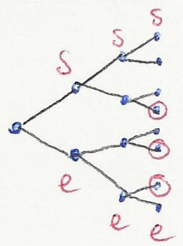
- **Intégration par partie :** Notation de Leibniz : $\dfrac{d(uv)}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$ soit $\int d\,uv = \int u\,dv + \int v\,du$
  ↳ ordre par règle (non systématique) LPET. astuces fréquente : décomposition élém simple + chgt variable

- **Changement de variable pour primitive :** 2 cas : • $f(x) \cdot g(x)$, $u = f(x)$ tq : $du = f'(x)\,dx$
  ↳ but : identification de la différentielle • $f(g(x))$, $u = g(x)$ tq : $x = h(u)$ soit $dx = h'(u)\,dx$

- **Famille "sommable" :** $(u_i)_{i \in I}$ somme de suite non ordonnée convergente : $\left\| \sum_{i \in J} u_i - \sum_{i \in I} u_i \right\| \leq \varepsilon$
  ex $i \in \mathbb{N}$ $j \in [0, 100]$
  ↳ test : la "sous-famille" J doit converger (démonstration simple) si résultat indep de l'ordre choisi

- **Tribu (ou σ-algèbre) :** Soit X un ensemble, on appelle "tribu" sur X, un ensemble A de partie X tq :
  ↳ ① $\emptyset \in A$; ② pour $B \in A$, $B^c \in A$ (complémentaire) ; ③ pour $B_n \in A$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in A$ (dénombrable)

- **Loi binomiale :** répétition d'une loi de Bernoulli : loi d'une variable aléatoire discrète qui ne possède que 2 résultat possible : succes (1) ou echec (0)



au moins 1 fois "succes"

$k = 1$

$n = 3$ ↳ 3 lancé (épreuves) /essaie

probabilité de tomber sur la valeurs "succes" sur n essaie : dés : 1/6 (non truqué)

↳ $P(X = k) = B(n, p) = 3 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \binom{3}{1} (1/6)^1 (5/6)^{3-1}$

• Triangle de pascal : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

- **Loi géométrique :** épreuve de Bernoulli tq : $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$ → allure suite géométrique
  Pour $P(X_1 \neq X_2) = 1 - P(X_1 = X_2)$ → $\sum_{k=1}^{+\infty} P((X_1 = k) \cap (X_2 = k)) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k) P(X_2 = k)$ → allure série géométrique
  si indépendante
  $\sum_i^j q^k = \dfrac{q^i - q^{j+1}}{1 - q}$

- **Sous-groupe Matrice :** Th caractérisation $(id, *, ^{-1})$ → doit respecter condition ensemble de H.
  ↳ multiplication : $\begin{pmatrix} a_{00} & \\ & a_{ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{00} & \\ & b_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_k^n a_{ik} b_{kj} \end{pmatrix}$, inversible : $AA^{-1} = \mathbb{1}$; diagonale : $D(\lambda)^{-1} = D\left(\frac{1}{\lambda}\right)$

- **1er Th isomorphisme :** soit G un groupe et $\varphi : G \to G'$ un morphisme de groupe alors $G/\ker \varphi \to G'$ (quotienter) injectif
  ↳ pour cela, trouver valeur de G, tq $\varphi(G) = 1_H = \ker \varphi(G) = H$
  preuve : $\varphi(x \cdot h \cdot x^{-1}) = f(e_G) = 1_H$ ici $1_H = e_H$