MATHEMATIQUES

Axiomes d'extensionnalité : $\quad A \subset B \quad B \subset A \quad dim(A)=dim(B) \quad A=B \quad A \cup B = A+B-A \cap B$
$$E=[n \in [-10,x] \cap \mathbb{Z} \mid x \in \mathbb{R} \; ; \; -3 < x \leqslant 2]=[-2,-1,0,1,2] \qquad A \cap B = A.B \mid A=B.A \mid B$$
Conditional (t+1)

Logique : $\quad (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \qquad \neg (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

Relation binaire : $\quad x \Re y \qquad x \Re x \qquad x \Re y \Leftrightarrow y \Re x \qquad (x \Re y \wedge y \Re x) \Rightarrow x=y \qquad (x \Re y \wedge y \Re z) \Rightarrow x \Re z$

Application : $\quad f:E \to F \mid x \mapsto f(x)=y \quad \overset{\text{Endomorphisme}}{E \to E} \quad f \circ f^{-1}=e \quad c_{i,j}=\sum_{R=1}^{n} a_{i,R} \cdot b_{R,j} \quad dim(E,F)=dim(M_{np})=n \times p$

Structure interne : $\quad (E, \ast) \quad \boxed{a \ast b \in E \quad (a \ast b) \ast c = a \ast (b \ast c) \quad e \ast a = a \quad x(y+z)=xy+xz} \quad \boxed{a \ast b = b \ast a = e}$
$$\varphi:(G, \star) \to (H, \ast); \varphi(G_1 \star G_2)=\varphi(G_1) \ast \varphi(G_2)=H_1 \ast H_2$$

Linéarité : $\quad f(x,y)=f(a \cdot x+y)=a \cdot f(x)+f(y) \qquad F \neq \varnothing \qquad F \subset E \qquad \sum u_{[a,b]}+u_{[b,c]}=u_{[a,c]}$

Base vectorielle : $\quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad x=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i \quad L_i \leftarrow \lambda \cdot L_i; \; L_i \leftarrow L_i + \lambda \cdot L_j; \; L_i \leftrightarrow L_j \quad (A \mid I_n) \to (I_n \mid A^{-1})$

Théorème de géométrie : $\quad (DE) \parallel (BC) \qquad (d') \qquad (AB) \nmid (AC) \qquad \tan(\phi)=\dfrac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)}=\dfrac{[AB]}{[BC]}$

Produit scalaire : $\quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad \vec{u} \cdot \vec{v}=xx'+yy'=\langle u|v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\widehat{(u,v)}) \qquad \dfrac{\langle u|v \rangle}{\langle u|u \rangle} \vec{e}_i \quad$ Projection

Equation paramétrique : $\quad f(t)=\overrightarrow{AM(t)}=t \cdot \vec{u} \qquad q(x,y)=ax^2+bxy+cy^2=a \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\left(\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)y^2$

Conique : $\quad \Delta=b^2-4ac \qquad d=|det(\overrightarrow{AP},u,v)|/\|u \wedge v\| \qquad \|u \wedge v\|=\|u\| \cdot \|v\| \cdot \sin(u,v) \qquad (a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Lieu géométrique : $\quad arg(z)=(\vec{u},\overrightarrow{OM})=\theta \; ; \; z=\rho e^{i\theta} \qquad arg(Z_1 \cdot Z_2)=arg(Z_1)+arg(Z_2)$

Noyau : $\quad Ker f=f^{-1}\{e_F\}=\{x \in E | f(x)=e_F\}=\{X \in \mathbb{R}^n | A \cdot X=0\} \qquad Ker f=e_E \qquad$ Injectif

Image : $\quad Img f=f(E)=\{y \in F | \exists x \in E, f(x)=y\}=vect((\overrightarrow{v_{colonne}})_n) \qquad Img f=F \qquad$ Surjectif
Solution as CL

Théorème du rang : $\quad Rg(f)+dim\, Ker(f)=dim(E) \qquad Rg(f)=dim(Img(f))$

Théorème isomorphisme : $\quad f:G \to G', f(x \cdot H)=f(x \cdot Ker f)=f(x) \quad Card(G)=Card(Ker(f)) \times Card(Img(f))$

VVE propre : $\quad M_{nn} \cdot \vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i \quad \exists B, \; M_\lambda'=P^{-1}MP \quad P^{-1}=\dfrac{{}^t com(P)}{det(P)} \quad p_m(X):=det(X.I-M)=\prod(X-\lambda_i)$
$$det(C_1,...,a\, C_i'+C_i'',...,C_n)=a\, det(...\, C_i'\, ...)+det(...\, C_i''\, ...) \quad det(A_3)=a_{(i,1)}.det(A_{2,i+1}) \; ; \; det(A_2)=ad-bc$$

Décomposition PLU : $\quad A=P.L.U \qquad det(A)=det(P).det(L).det(U) \qquad P=\delta_{i,\sigma(j)}=\begin{cases}1 & i=\sigma(j) \\ 0 & i \neq \sigma(j)\end{cases}$

Evaluation polynome : $\quad P[X]=a_n X^n+...+a_0 \quad (1,X,...,X^n) \quad P \to u(P)=\sum(C_i) \cdot u(X^i)$

Théorème fondamental Algèbre : $\quad (X-1)^n \; ; \; 1=e^{i\frac{2\pi k}{n}} \qquad \dfrac{A(x)}{B(x)}=Q(x)+\dfrac{R(x)}{B(x)} \quad \downarrow \qquad P \circ P=X.P'^2$
$$deg(P)^2=2(deg(P)-1)+1$$

Division euclidienne : $\quad P(X)=D(X) \cdot Q(X)+R(X) \quad PGCD(P,D)=PGCD(D,R) \quad PPCM=\dfrac{|P.D|}{PGCD(P,D)}$

Nombre premier : $\quad a \times m + b \times n = PGCD(a,b)=1 \qquad a^p \equiv a \bmod p \equiv a[p] \Leftrightarrow \dfrac{a^p-a}{p}=k \in \mathbb{Z} \qquad n=p_1^{\alpha_1}.(...).p_m^{\alpha_m}$

Théorème de Lagrange : $\quad H<G \; , \; |H| \text{ divise } |G| \qquad \forall g \in G \; , \; g^{card(G)}=e \qquad \exists g \; , \; \langle g \rangle=\{g^k\}$

Composition de transposition : $\quad \sigma=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}=(a\; b\; c)=(a\; b) \circ (b\; c) \qquad \sigma \circ \sigma(a)=c \; ; \; \epsilon(\sigma)=(-1)^{N_t}$

Contraposé : $\quad A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$
$$\forall : (n^2[2]=0 \Rightarrow n[2]=0) \Leftrightarrow \begin{array}{l}(\neg(n[2])=1 \Rightarrow \neg(n^2[2])=1) \\ ((2k+1)[2]=1 \Rightarrow (2k+1)^2[2]=1)\end{array}$$

Absurde : $\quad (A \Rightarrow B) \wedge (\neg B \Rightarrow \neg A) \qquad \sqrt{2}=p/q \; ; \; p[2]=0, q[2]=0 \Rightarrow \sqrt{2}[2]=0$

Récurrence : $\quad \downarrow \begin{array}{c} P(0) \\ \forall n, P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{array} \downarrow \qquad (a+b)^0=1 \; ; \; \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} a^0 b^{0-0}=1 \qquad \begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}=\dfrac{1}{k!}\dfrac{n!}{(n-k)!} \; ; \; (n+1)!=n!(n+1)$
$$\forall n, (a+b)^n=\sum \begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix} a^k b^{n-k}$$

Inégalité : $\quad |\langle x|y \rangle| \leqslant \|x\| \|y\| \qquad \|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\| \qquad P(|X|<a) \leqslant \dfrac{E(|X|^p)}{a^p} \quad P(A)=Cd(A)/Cd(\Omega)$

Limite : $\quad u(n) \sim_{+\infty} v(n) \qquad \lim_{n \to +\infty} \dfrac{u(n)}{v(n)}=\lim_{n \to +\infty} \dfrac{v(n)}{u(n)}=1 \qquad \lim_{x \to 0} f(x,x)=\lim_{x \to 0} f(x,ax)$

Exponentiel : $\quad (e^{i\theta})^n=(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta) \quad e^{a+b}=e^a+e^b \quad \ln(a^n)=n\ln(a) \quad \log_p(x)=\dfrac{\ln(t)}{\ln(p)}$

Théorème valeur intermédiaire : $\quad \forall f:[a,b] \to \mathbb{R} \qquad \forall u \in [f(a),f(b)] \qquad \exists c \in [a,b] \; , \; f(c)=u$

Théorème continuité : $\quad f:I \to \mathbb{R} \; , \; ([|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\epsilon]) \qquad C_l:[a^-,a^+]$

Boule : $\quad B(a,r)=\{x \in E \mid \|x-a\|<r\} \qquad A=\{(x,r) \in \mathbb{R}^2, a \leqslant f(x,y) \leqslant b\}$

Théorème point fixe : $\quad g:E \to E \qquad g(x)=x \qquad d(f(x),f(y))<k \cdot d_E \qquad k \in [0,1]$

Dérivée : $\quad f'(x)=\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{df}{dx} \quad (f \circ f^{-1})'=1 \quad v(u)'=u' \cdot v'(u) \quad |u|'=\sqrt{x^2} \quad (u.v)'=u'v+v'u$

Théorème accroissement fini : $\quad \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad |f'(c)| \leqslant M \qquad$ Positive := croissante
Unique := concave / convexe

Hopital : $\quad \lim_{x \to a^-} \dfrac{f(x)}{g(y)}=\dfrac{f'(a)}{g'(a)} \qquad (u^\alpha)'=\alpha u^{\alpha-1} u' \qquad (\ln(u))'=u'/u$

Théorème encadrement : $\quad f \leqslant g \leqslant h \quad \lim_a f=\lim_a h=L \quad \lim_a g=L \quad \lim \inf(u_n)=\lim \sup(u_n)$

Critère de convergence : $\lim(f_n(x)) \to_s f(x) \quad \lim \sup |f_n(x)-f(x)| \to_{+\infty} 0 \quad |\sum u_n|<\epsilon \quad u(x)-\sum(-1)^n v_n \leqslant |a_{n+1}|$
$$P_{n+1}=P_n . T \to P(X=E_i).T=P(X=E_i)$$

Règle d'Alembert : $\quad |f_n(x)| \leqslant a_n \qquad \sum a_n x^n \qquad \lim|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}|=l=\dfrac{1}{R} \qquad S_j-S_{i-1}=\sum_i^j q^k=\dfrac{q^i-q^{j+1}}{1-q}$

Régularité : $\quad C^1 : \lim_{t \to p} f(t)=f'(p) \qquad C^2 : \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}=\dfrac{\partial^2}{\partial y \partial x}$

Serie de Taylor : $\quad a_k=\dfrac{f^{(n)}(a)}{k!} \qquad P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k \qquad (1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix}\alpha\\n\end{pmatrix} x^n$

Suite Lᵖ : $\quad \|x(n)\|_p=(|x_1(n)|^p+(...)+|x_n(n)|^p)^{1/p}$

Jacobien : $\quad J_F(M)=\begin{pmatrix} \partial f_1 & \partial x_n \\ \partial x_1 & \partial f_m \end{pmatrix} \qquad \phi(x,y) \to \phi(r,\theta) \; ; \; J_\phi=\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$

Résidu : $\quad f(z)=\dfrac{q(z)}{p_0(Z).(...).p_n(z)} \quad Res(f(z),p_i(z))=\lim_{z \to p_i} q(z)/\prod_{j \neq i} p_j(z)$

Critère d'intégration : $\quad \lim_{t \to [a^-,+\infty]} (t-a)^\alpha f(t)=0 \quad \int_a^b f(t)dt=\dfrac{b-a}{n}\sum_n^{N \to +\infty} f(a+k(b-a)/n) \quad \sum(n+m)=\sum(n(1+\dfrac{m}{n}))$

Théorème fondamental d'analyse : $\quad A'(x)=f(x) \qquad \int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

Théorème changement de variable : $\quad \int_V g(y_i)dy_i=\int_U g(F(x_i)).|det J_F(x_i)|dx_i \quad dy=f'(x)dx \; , \; \alpha=f'(a)$

Théorème convergence dominée : $\quad (f_n) \in (E,A,\mu) \to f \qquad \lim_{n \to +\infty} \int f_n(\mu)d\mu=\int \lim_{n \to +\infty} f_n(\mu)d\mu$

Transformée : $\quad \tilde{f}(\omega) \propto \int_\alpha^\beta f(x).e^{-pt} \quad T(f(t-\tau)u(t-\tau))=\tilde{f}(\omega).e^{-\tau\omega}$
$$t.u(t-1)-u(t-1)+u(t-1)=(t-1)u(t-1)+u(t-1)$$

Equation différentielle : $\quad a(x)y'+b(x)y=c(x) \quad \int \dfrac{y'}{y}=-\int \dfrac{b(x)}{a(x)} \quad y_p=\lambda(x).f(x) \quad y_p=P[X].e^{Q[X]}; Q[X] \in \mathbb{C}$

Théorème Cauchy-Lipstchitz : $\quad x^{(p)}=f(t,x,...,x^{(n)}) \qquad y''+y=0 \to X(t)=(y,y') \qquad X(t)=\sum \alpha_i e^{\lambda_i t} u_i$

Théorème de transfert : $\quad G=E[g(X)]=\int g(x)f_X(x)dx=\sum g(x_i).f(x_i) \qquad F_X=P(X \leqslant x)$

Théorème central limite : $\quad \lim_{n \to +\infty} P(Z_n<z)=\Phi_{N(0,1)}(z) \qquad \sigma \to \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$