MATHEMATIQUES

Axiomes d'extensionnalité : $A\subset B$ $B\subset A$ $dim(A)=dim(B)$ $A=B$ $A\cup B=A+B-A\cap B$ $A\cap B=A.B|A=B.A|B$

$E=\{n\in[-10,x]\cap\mathbb{Z} \mid x\in\mathbb{R} \ ; \ -3<x\leqslant 2\}=\{-2,-1,0,1,2\}$ $(A_1,A_2)|B=(A_1|B).(A_2|(B,A_1))$

Conditional (t+1)

Logique : $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(\neg p\vee q)$ $\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$

Relation binaire : $x\mathfrak{R}y$ $x\mathfrak{R}x$ $x\mathfrak{R}y\Leftrightarrow y\mathfrak{R}x$ $(x\mathfrak{R}y\wedge y\mathfrak{R}x)\Rightarrow x=y$ $(x\mathfrak{R}y\wedge y\mathfrak{R}z)\Rightarrow x\mathfrak{R}z$

Application : $f:E\to F|x\mapsto f(x)=y$ Endomorphisme $E\to E$ $f\circ f^{-1}=e$ $c_{i,j}=\sum_{R=1}^{n}a_{i,R}\cdot b_{R,j}$ $dim(E,F)=dim(M_{np})=n\times p$

Structure interne : $(E,*)$ Groupe $a*b\in E$ $(a*b)*c=a*(b*c)$ $e*a=a$ Anneau $x(y+z)=xy+xz$ $a*b=b*a=e$

$\varphi:(G,\star)\to(H,*)$; $\varphi(G_1\star G_2)=\varphi(G_1)*\varphi(G_2)=H_1*H_2$

Linéarité : $f(x,y)=f(a\cdot x+y)=a\cdot f(x)+f(y)$ $F\neq\emptyset$ $F\subset E$ $\sum u_{[a,b]}+u_{[b,c]}=u_{[a,c]}$

Base vectorielle : $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot e_i=0\Rightarrow\lambda_i=0$ $x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot e_i$ $L_i\leftarrow\lambda\cdot L_i$; $L_i\leftarrow L_i+\lambda\cdot L_j$; $L_i\leftrightarrow L_j$ $(A|I_n)\to(I_n|A^{-1})$

Théorème de géométrie : $(DE)\|(BC)$ (d') $(AB)\nparallel(AC)$ $\tan(\phi)=\frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)}=\frac{[AB]}{[BC]}$

Produit scalaire : $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'=\langle u|v\rangle=\|u\|\cdot\|v\|\cdot\cos(\widehat{(u,v)})$ $\frac{\langle u|v\rangle}{\langle u|u\rangle}\vec{e}_i$ Projection

$[u,v,w]=det_B(u,v,w)=(u\wedge v)\cdot w$

Equation paramétrique : $f(t)=\overrightarrow{AM}=k\cdot\vec{u}$ $q(x,y)=ax^2+bxy+cy^2=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{4ac-b^2}{4a}\right)y^2$

Conique : $\Delta=b^2-4ac$ $d=|det(\overrightarrow{AP},u,v)|/\|u\wedge v\|$ $\|u\wedge v\|=\|u\|\cdot\|v\|\cdot\sin(u,v)$ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Lieu géométrique : $arg(z)=(\vec{u},\overrightarrow{OM})=\theta$ $z=\Re(z)+i\Im(z)=\rho e^{i\theta}$ $arg(Z_1\cdot Z_2)=arg(Z_1)+arg(Z_2)$

$i^2=j^2=k^2=ijk=-1$ $q=a+bi+cj+dk=a+\vec{v}$ $q_1q_2=(a_1a_2-\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2)+(a_1\vec{v}_2+a_2\vec{v}_1+\vec{v}_1\wedge\vec{v}_2)$

Noyau : $Ker\,f=f^{-1}\{e_F\}=\{x\in E|f(x)=e_F\}=\{X\in\mathbb{R}^n|A\cdot X=0\}$ $Ker\,f=e_E$ Injectif

Solution as CL

Image : $Img\,f=f(E)=\{y\in F|\exists x\in E, f(x)=y\}=vect((\overrightarrow{v_{colonne}})_n)$ $Img\,f=F$ Surjectif

Théorème du rang : $Rg(f)+dim\,Ker(f)=dim(E)$ $Rg(f)=dim(Img(f))$

Théorème isomorphisme : $f:G\to G', f(x\cdot H)=f(x\cdot Ker\,f)=f(x)$ $Card(G)=Card(Ker(f))\times Card(Img(f))$

VVE propre : $M_{nn}\cdot\vec{v}_i=\lambda_i\vec{v}_i$ $\exists B,\ M_\lambda'=P^{-1}MP$ $P^{-1}=\frac{{}^tcom(P)}{det(P)}$ $p_m(X):=det(X.I-M)=\prod_i(X-\lambda_i)$

$det(C_1,...,aC_i'+C_i'',...,C_n)=a\,det(...C_i'...)+det(...C_i''...)$ $det(A_3)=a_{(i,1)}.det(A_{2,i+1})$; $det(A_2)=ad-bc$

Décomposition PLU : $A=P.L.U$ $det(A)=det(P).det(L).det(U)$ $P=\delta_{i,\sigma(j)}=\begin{matrix}1 & i=\sigma(j)\\0 & i\neq\sigma(j)\end{matrix}$

Evaluation polynome : $P[X]=a_nX^n+...+a_0$ $(1,X,...,X^n)$ $P\to u(P)=\sum(C_i)\cdot u(X^i)$

Théorème fondamental Algèbre : $(X-1)^n$; $1=e^{i\frac{2\pi k}{n}}$ $\frac{A(x)}{B(x)}=Q(x)+\frac{R(x)}{B(x)}$ $\downarrow$ $P\circ P=X.P'^2$ $deg(P)^2=2(deg(P)-1)+1$

Division euclidienne : $P(X)=D(X)\cdot Q(X)+R(X)$ $PGCD(P,D)=PGCD(D,R)$ $PPCM=\frac{|P.D|}{PGCD(P,D)}$

Nombre premier : $a\times m+b\times n=PGCD(a,b)=1$; $a|bc\wedge PGCD(a,b)=1\Rightarrow a|c\Leftrightarrow ak=c$ $a^p\equiv a \bmod p\equiv a[p]\Leftrightarrow\frac{a^p-a}{p}=k\in\mathbb{Z}$ $n=p_1^{\alpha_1}.(...).p_m^{\alpha_m}$

Théorème de Lagrange : $H<G$, $|H|\,divise\,|G|$ $\forall g\in G$, $g^{card(G)}=e$ $\exists g$, $\langle g\rangle=\{g^k\}$

Composition de transposition : $\sigma=\begin{pmatrix}a&b&c\\b&c&a\end{pmatrix}=(a\ b\ c)=(a\ b)\circ(b\ c)$ $\sigma\circ\sigma(a)=c$; $\epsilon(\sigma)=(-1)^{N_t}$

Contraposé : $A\Rightarrow B\equiv\neg B\Rightarrow\neg A$ $\forall:(n^2[2]=0\Rightarrow n[2]=0)\Leftrightarrow\begin{matrix}(\neg(n[2])=1\Rightarrow\neg(n^2[2])=1)\\((2k+1)[2]=1\Rightarrow(2k+1)^2[2]=1)\end{matrix}$

Absurde : $(A\Rightarrow B)\wedge(\neg B\Rightarrow\neg A)$ $\sqrt{2}=p/q$; $p[2]=0,q[2]=0\Rightarrow\sqrt{2}[2]=0$

Récurrence : $\downarrow$ $P(0)$; $\forall n, P(n)\Rightarrow P(n+1)$ $(a+b)^0=1$; $\binom{0}{0}a^0b^{0-0}=1$ $\downarrow$ $\forall n,(a+b)^n=\sum\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$ $\binom{n}{k}=\frac{1}{k!}\frac{n!}{(n-k)!}$; $(n+1)!=n!(n+1)$

Inégalité : $|\langle x|y\rangle|\leqslant\|x\|\|y\|$ $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$ $P(|X|<a)\leqslant\frac{E(|X|^p)}{a^p}$ $P(A)=Cd(A)/Cd(\Omega)$

Limite : $u(n)\sim_{+\infty}v(n)$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{u(n)}{v(n)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{v(n)}{u(n)}=1$ $\lim_{x\to0}f(x,x)=\lim_{x\to0}f(x,ax)$

Exponentiel : $(e^{\pm i\theta})^n=(\cos(\theta)\pm i\sin(\theta))^n=\cos(n\theta)\pm i\sin(n\theta)$ $e^{a+b}=e^a+e^b$ $\ln(a^n)=n\ln(a)$ $\log_p(x)=\frac{\ln(t)}{\ln(p)}$

Théorème valeur intermédiaire : $\forall f:[a,b]\to\mathbb{R}$ $\forall u\in[f(a),f(b)]$ $\exists c\in[a,b]$, $f(c)=u$

Théorème continuité : $f:I\to\mathbb{R}$, $([|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\epsilon])$ $C_l:[a^-,a^+]$

Boule : $B(a,r)=\{x\in E \mid \|x-a\|<r\}$ $A=\{(x,r)\in\mathbb{R}^2, a\leqslant f(x,y)\leqslant b\}$

Théorème point fixe : $g:E\to E$ $g(x)=x$ $d(f(x),f(y))<k.d_E$ $k\in[0,1]$

Dérivée : $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{df}{dx}$ $(f\circ f^{-1})'=1$ $v(u)'=u'.v'(u)$ $|u|=\sqrt{x^2}$ $(u.v)'=u'v+v'u$

Théorème accroissement fini : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ $|f'(c)|\leqslant M$ $f((1-t)a+tb)\leqslant(1-t)f(a)+tf(b)$

Positive := croissante

Unique := concave / convexe

Hopital : $\lim_{x\to a^*}\frac{f(x)}{g(y)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$ $(u^\alpha)'=\alpha u^{\alpha-1}u'$ $(\ln(u))'=u'/u$

Théorème encadrement : $f\leqslant g\leqslant h$ $\lim_a f=\lim_a h=L$ $\lim_a g=L$ $\liminf(u_n)=\limsup(u_n)$

Critère de convergence : $\lim(f_n(x))\to_s f(x)$ $\limsup|f_n(x)-f(x)|\to_{+\infty}0$ $|\sum u_n|<\epsilon$ $u(x)-\sum(-1)^nv_n\leqslant|a_{n+1}|$

$P_{n+1}=P_n.T\to P(X=E_i).T=P(X=E_i)$

Règle d'Alembert : $|f_n(x)|\leqslant a_n$ $\sum a_nx^n$ $\lim|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=l=\frac{1}{R}$ $S_j-S_{i-1}=\sum_i^j q^k=\frac{q^i-q^{j+1}}{1-q}$

Régularité : $C^1:\lim_{t\to p}f(t)=f'(p)$ $C^2:\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}$

Serie de Taylor : $a_k=\frac{f^{(n)}(a)}{k!}$ $P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-a)^k$ $(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$

Suite L^p : $\|x(n)\|_p=(|x_1(n)|^p+(...)+|x_n(n)|^p)^{1/p}$

Jacobien : $J_F(M)=\begin{vmatrix}\partial f_1&\partial x_n\\\partial x_1&\partial f_m\end{vmatrix}$ $\phi(x,y)\to\phi(r,\theta)$; $J_\phi=\begin{vmatrix}\cos\theta&-r\sin\theta\\\sin\theta&r\cos\theta\end{vmatrix}$ $K=\partial_x^2\partial_y^2-(\partial_x\partial_y)^2$

Résidu : $f(z)=\frac{q(z)}{p_0(Z).(...).p_n(z)}$ $Res(f(z),p_i(z))=\lim_{z\to p_i}q(z)/\prod_{j\neq i}p_j(z)$

Critère d'intégration : $\lim_{t\to[a^+,+\infty]}(t-a)^\alpha f(t)=0$ $\int_a^b f(t)dt=\frac{b-a}{n}\sum_n^{N\to+\infty}f(a+k(b-a)/n)$ $\sum(n+m)=\sum(n(1+\frac{m}{n}))$

Théorème fondamental d'analyse : $A'(x)=f(x)$ $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

Théorème changement de variable : $\int_V g(y_i)dy_i=\int_U g(F(x_i)).|detJ_F(x_i)|dx_i$ $dy=f'(x)dx$, $\alpha=f'(a)$

Théorème convergence dominée : $(f_n)\in(E,A,\mu)\to f$ $\lim_{n\to+\infty}\int f_n(\mu)d\mu=\int\lim_{n\to+\infty}f_n(\mu)d\mu$

Transformée : $\tilde{f}(\omega)\propto\int_\alpha^\beta f(x).e^{-pt}$ $\mathrm{T}(f(t-\tau)u(t-\tau))=\tilde{f}(\omega).e^{-\tau\omega}$

$t.u(t-1)-u(t-1)+u(t-1)=(t-1)u(t-1)+u(t-1)$

Equation différentielle : $a(x)y'+b(x)y=c(x)$ $\int\frac{y'}{y}=-\int\frac{b(x)}{a(x)}$ $y_p=\lambda(x).f(x)$ $y_p=P[X].e^{Q[X]}$; $Q[X]\in\mathbb{C}$

Théorème Cauchy-Lipstchitz : $x^{(p)}=f(t,x,...,x^{(n)})$ $y''+y=0\to X(t)=(y,y')$ $X(t)=\sum\alpha_ie^{\lambda_it}u_i$

Théorème de transfert : $G=E[g(X)]=\int g(x)f_X(x)dx=\sum g(x_i).f(x_i)$ $F_X=P(X\leqslant x)$

Théorème central limite : $\lim_{n\to+\infty}P(Z_n<z)=\Phi_{N(0,1)}(z)$ $\sigma\to\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$