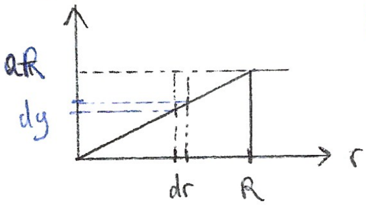
CALCUL

- **Principe du calcul infinitésimal :**

↳ Notion de fonction et de son analyse. L'égalité " = " n'a pas le m̂ sens qu'en algèbre.
L'analyse comprend la relation de variation et d'aire d'une fonction.



Pour . $f(x) = ax$

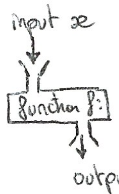
↳ . Aire Triangle = Aire Rectangle $/2$ = $\frac{1}{2} \cdot a \cdot R^2 \Rightarrow A(x) \simeq \frac{1}{2} \cdot a x^2$ ≃ intégrale " $\int$ "

↳ . variation : $dy = a \cdot dr \longrightarrow \frac{dy}{dr} = a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

→ Paradoxe : Dérivée = taux de variation instantanée $(dr \to 0)$

- **Formalisme fonction :**

↳ fonction ⟺ Application ; fonction ⇒ sortie = relation (entrée) :

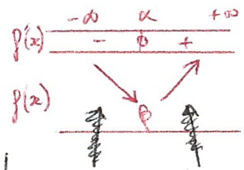


- **Dérivée formel :**

$$f' : D_{f'} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \underbrace{f'(x)}_{\text{Lagrange}} = \underbrace{\frac{df}{dx}(x)}_{\text{Leibniz}} = \underbrace{\dot{f}(x)}_{\text{Newton}} \quad \text{avec} \quad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

notations : Lagrange Leibniz Newton

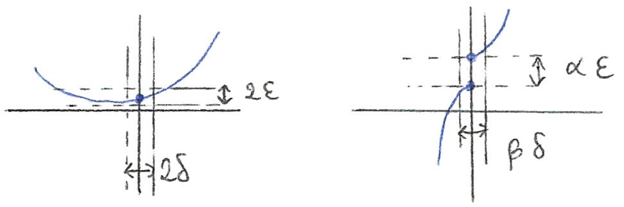
Note : on remarque que pour $f'(x) = 0$, $f(x)$ extremum → tableau de variation



↳ $f' \nearrow$ = f convexe
$f' \searrow$ = f concave

- **Définition de la limite (ε, δ) :** f dérivable en un point "a" vers "ℓ" si :

↳ . $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \; |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$



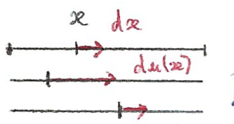
Si ε ou δ ne tendent pas vers 0 alors non dérivable via $\lim_{h \to 0}$

→ discontinuité, mais pas que (asymptote)

- **Règles de L'Hôpital :** (fonctions quotient) Si f et g sont deux fonctions définies sur $[a, b[$, dérivable en a, et telle que $f(a) = g(a) = 0$ et $g'(a) \neq 0$, alors :

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

- **Composition :** $(v \circ u)'(x) = (v' \circ u)\, u'(x)$



} chgt de variable

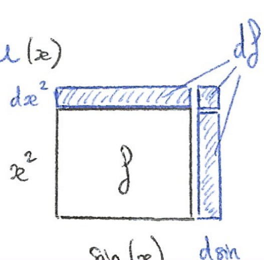
$dv(u(x)) = \cancel{u'(x) \cdot dx}$

- **Somme :** $(v + u)'(x) = v'(x) + u'(x)$ → Linéarité ⟹ idem intégrale $\int$

→ intégration par partie

- **Produit :** $(v(x) \cdot u(x))' = u'(x) v(x) + v'(x) u(x)$

↳ Exemple : $f(x) = \sin(x) \cdot x^2$ $\xrightarrow{\text{représentation géométrique}}$



$$df = \sin(x) \overbrace{d(x^2)}^{2x \cdot dx} + x^2 \overbrace{d(\sin(x))}^{\cos(x) dx} + \Theta$$

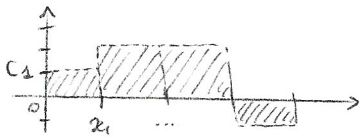
$dx^2 \ll dx$

- **Intégrale de Riemann** : → sur $[a,b]$

- fonction en escalier : valeurs réel sont constante sur des intervalles ⟺ constante par morceaux

  ↳ $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$, fct caracteristique (indicatrice) : $\mathbb{1}_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

↳ integrale : $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} C_k (x_{k+1} - x_k)$



⟺ Somme des rectangles (Chasles) ⟺ $\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$

- fonction R-integrable : f R-integrable sur $[a,b]$ si, ~~pour~~ $\exists\, u_\varepsilon, v_\varepsilon$ 2 fct en escalier, tel que :

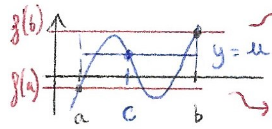
  ① $u_\varepsilon < f < v_\varepsilon$ et ② $\left| \int_a^b v_\varepsilon - \int_a^b u_\varepsilon \right| < \varepsilon$ $\overset{\text{encadrement}}{\Rightarrow}$ $\int_a^b f = \sup\left\{ \int u,\ u < f \right\} = \inf\left\{ \int v,\ v > f \right\}$

  ↳ $\mathbb{Q}$ non R integrable

- Somme de Rieman : f continu, $S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$

- Theorème Valeur intermediaire : $\forall f : \underbrace{[a,b]}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ et $\forall u \in [f(a), f(b)]$

  alors $\exists c \in [a,b]$, tel que : $f(c) = u$



→ sup → majoré : M

↳ inf → minoré : m

- Theoreme fondamentale de l'analyse : Si f R-integre alors $\exists A : \underbrace{[a,b]}_{I} \to \mathbb{R}$ tq $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$
  - A est derivable sur I et sa derivé est egale à f : $A'(x) = f(x)$
  - Si G est une primitive de f, alors la fonction $G - A$ = constante : $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ (primitive)

  ⟶ relation Aire/pente = $\int f(x)\,dx / (b-a)$ → variation integrale = moyenne

- Inegalité de Cauchy-Schwartz : $\left| \int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx \right| \leqslant \left(\int f^2 \right)^{1/2} \times \left(\int g^2 \right)^{1/2}$ ⟺ $|\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$ espace prehilbertien

- Inegalité de Minkowski : $\left| \int_a^b (f+g)^2 \right|^{1/2} \leqslant \left(\int g^2 \right)^{1/2} + \left(\int g^2 \right)^{1/2}$ → inegalité triangulaire

- **Integrale generalisé (impropre)** : → extension de l'intervalle usuelle : $[a,b[$ → convergence ?

  - fonction localement intégrable : $f : J \to \mathbb{R}$ loc integrable si f R-intégrable sur $[a,b] \subseteq F$

  $f : [a,b[\ \mapsto$ si $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{X \to b} \int_a^X f(x)\,dx$ fini alors converge → tester valeur divergence → mais compliqué

  - Critère de Cauchy : $\int_a^b f(x)\,dx$ converge si et seulement si :

  $\forall \varepsilon > 0,\ \exists c \in [a,b[,\ \forall x,y \in [c,b[$, on a : $\left| \int_x^y f(t)\,dt \right| \leqslant \varepsilon$

  - Critère de comparaison : $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}^+$, loc integrable et $f \leqslant g$ alors :

  si $\int_a^b g$ converge alors $\int_a^b f$ converge

Intégrale impropre (suite) :

- **Critère d'équivalence** : f et g équivalente au point b et de signe constant $\xrightarrow{\hat{m} \text{ nature}}$ $f = O(g)$ et $g = O(f)$
  ↳ si $\int_a^b g$ converge alors $\int_a^b f$ converge.

- **Règle d'Abel** : (produit) Si f est ↘ et $f \geq 0$, $\lim_{+\infty} f(x) = 0$ et g bornée, tel que :
$\forall x \in [a,b[$, $\left| \int_a^x g(t)\,dt \right| \leq M$, on a : $\int_a^b f \times g(x)\,dx$ converge → conséquence cauchy.

Régularité et Limites :

- **comparaison asymptotique** : (concept local) si g est prépondérante devant f en a, on note :
  ↳ $f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))$ lorsque $\frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow 0$. On dit que f est négligeable devant g.
  ↳ echelle : $O(1) < O(\log(n)) < O(n) < O(n^c) < O(c^n) < O(n!)$
  (notation Landau)

- **Classe de régularité** : (Lissage notion dérivé) Soit f une fonction défini sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, f est :
  - de Classe C^1 : si f est dérivable sur I, et f' est continu sur I
  - de Classe C^k : si toute les dérivée de f jusqu'à l'ordre k existe sur I et si $f^{(k)}$ continu sur I.
  - de Classe C^∞ : si f est C^k $\forall k$ → f est infiniment dérivable sur I

Série numériques.

- **suite numérique** : $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$; $(a_0, \dots, a_n)$ p-e défini par récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$ (arithmétique.)

↳ **définition** : Somme infini de terme de u_n, tq : $\sum u_n = (S_n)_{n \geq 1}$ où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$
  ↳ $S_n = u_0 + \dots + u_n$ → diverge si $\pm\infty$, converge si fini

- **Série géométrique** : $\sum x^n$; $S_n = 1 + x + \dots + x^n = \frac{1 - x^n}{1 - x}$
  → converge si $-1 < x < 1$
  → diverge si $x = 1$

  ↳ Astuce : $u_{n+1} = S_{n+1} - S_n$

- **Reste d'une série convergente** : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$; $S_n = S_n + R_n$, $R_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

- **Critère de Cauchy** : $\sum u_n$ convergente ssi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall m > n > N$
  ↳ $|S_m - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} u_k \right| < \varepsilon$ → on dit alors que $(S_n)_{n \geq 1}$ suite de Cauchy

- **Critère de comparaison** : $(u_n), (v_n)$, $v_n = O(u_n) \iff \exists n_0 > 0$, $\exists c > 0$, $\underbrace{|v_n| < c\,|u_n|}_{\text{majoration}}$
  ↳ si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ converge.

- Série numérique (suite) :

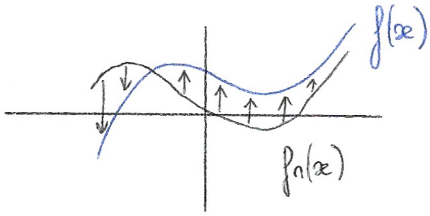
- Critère d'équivalence : (convergence $u_n \geq 0$), $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists \varepsilon_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$
  $\rightarrow$ tel que : $u_n = (1+\varepsilon_n) v_n \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$; Eq usuelle : $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$
  propriété : si $f \underset{0}{\sim} g$, $\varphi \underset{0}{\sim} \psi$ alors $f \times \varphi \underset{0}{\sim} g \times \psi$ $\rightarrow$ faux pour la division.

- Critère d'Alembert : $(u_n), (v_n) \rightarrow 0 \leq \overbrace{l :=}^{\text{défini}} \liminf \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \leq \overbrace{L :=}^{\text{défini}} \limsup \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \leq +\infty$
  si $L < 1$ alors convergence, $l > 1$ divergence, ; Lemme : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$

- Critère Rieman : (u_n) à terme positif si : • $\exists \alpha > 1$ $\lim_{+\infty} n^\alpha u_n = 0 \rightarrow (u_n)$ converge
  • $\exists \alpha \leq 1$ $\lim_{+\infty} n^\alpha u_n = l > 0 \rightarrow (u_n)$ diverge.

- Critère d'Abel : (produit $(u_n), (v_n)$) si $(a_n) \geq 0 \searrow \rightarrow 0$ alors $\exists M > 0$ $\forall n \in \mathbb{N} : |b_0 + \cdots + b_n| \leq M$

- Suite de fonction :
  ↳ définition : $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \overset{\text{ensemble des fonctions de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}}{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$
  $n \longmapsto f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $(f_n(x))_{n\geq 1}$ $\quad x \longmapsto f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{convergence ?}} f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$



- Convergence simple : $f_n \xrightarrow{S} f$ (simplement vers) ssi $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, tel que $\forall x \in \mathbb{R}$ fixé, on a :
  $$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N, \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$
  $\longrightarrow$ on observe que la convergence simple d'une fonction continue, est discontinue.

- Convergence uniforme : $f_n \xrightarrow{u} f$ ssi $\sup |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \Leftrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ pour $\overbrace{\forall x \in D}^{\text{borné}}$
  $\longrightarrow$ plus fort que cv simple car x bornée (non fixé)
  ↳ critère de cauchy uniforme : $\sup |f_n(x) - f(x)| < \alpha_n \rightarrow 0$, $\exists (\alpha_n)_{n\geq N}$; $\lim \alpha_n = 0$

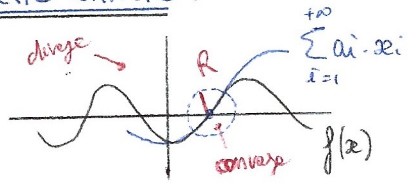
- Théorème de continuité : si $(f_n)_{n\geq 0}$ continu sur I et $f_n \xrightarrow{u} f$ alors f est continu sur I

- Théorème de dérivation : $(f_n)_{n\geq 0} \rightarrow f$ dérivable (sur I) si ① $f_n \xrightarrow{S} f$, ② $\forall n \in \mathbb{N}$ où f_n dérivable
  et $f_n' \xrightarrow{u} f'$ alors $\frac{d}{dt}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{d}{dt}(f_n(t))$

- Théorème d'intégration : $(f_n)_{n\geq 0}$ R-intégrable sur $[a,b]$, f, R-intégrable sur $[a,b]$ si $f_n \xrightarrow{u} f$
  alors $\lim \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b \lim f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$

- Convergence normale d'une série : $\sum f_n(x)$ cv normal sur A si : $\forall x \in A$, $\forall n \geq n_0$, on a :
  ↳ $\sum f_n(x) = (S_n(x))_{n\geq 0}$ $\quad |f_n(x)| \leq \overbrace{a_n}^{\text{indépendant de } x\,!}$ avec $\sum a_n$ série numérique convergente.

- Serie entiere :



→ Approximation d'une fonction quelconque par une fonction polynomiale

→ forme : $\sum \boxed{a_n} x^n$ but Trouver le Rayon R pour lequel converge
↳ independant de x

- Rayon de convergence $R \in \overline{\mathbb{R}}^+$, $R = \sup \{ r \geq 0 \mid (|a_n| \cdot r^n)_{n \geq 0}$ est bornée$\}$ pour $|x| < R$

- Critere d'Alembert si $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell \in [0, +\infty]$ alors $R = 1/\ell$

- Formule d'Hadamard ↗ $\overline{\lim} |a_n|^{1/n} = L \in \mathbb{R}^+$ donc $R = 1/L$ → plus grande valeurs d'adherence
  limite superieur

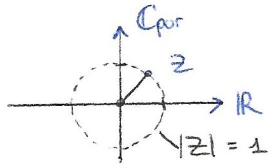
- Developpement d'un S.E. en O : $v \in \mathcal{V}(0)$, f est D.S.E au voisinage de O, si $\exists \alpha > 0$, tq $]\alpha, \alpha[\subset v$
  Alors $\exists$ S.E. tq $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n$, $\forall x \in]-\alpha, \alpha[$ et $R \geq \alpha$

- Formule de Taylor : si D.S.E au voisinage alors a_n unique ⟺ $\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}$

→ analytique si $\sum a_n (x - x_0)^n$

Demonstration serie de Taylor

- Analyse complexe :



- Plan complexe : $z = a + ib = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}$
  $\bar{z} = a - ib \rightarrow |z|^2 = z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$

- Fonction holomorphe : $f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ avec $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ (parametrisation)

- Singularité : valeurs dessus l'ordre de la serie analytique "$(x - x_0)$" diverge : $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ — pole

- Integrale curviligne complexe $\int_{\Gamma \to \gamma} f(z) \, \underset{\to d\gamma}{dz} = \int_a^b \overbrace{(f \circ \gamma)\, d\gamma}^{f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \cdot dt}$ ⟷ Aire du cercle trigonométrique.
  ⟺ parametrisation d'une ligne par un segment differentielle

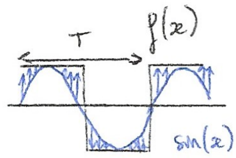
  Th prolongement analytique

- Formule de Cauchy $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} f(z) \, dz$ → valeur d'un point d'une fonction determinée par cercle qui entoure ce point.

- Serie de Laurent : $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ → convergence compact.

- Residu et Theoreme : ordre 1 : $\mathrm{Res}(f, \underset{\downarrow \text{singularité}}{z_0}) = a_{-1} = \lim_{z \to z_0} [(z - z_0) \cdot f(z)]$ → rayon de convergence serie de Laurent ordre 1
  ⟶ $\oint f(z) \, dz = 2\pi i \sum_j \mathrm{Res}(f, z_j)$ → facilite calcul integrale.

- Serie de Fourier :



- Condition de Dirichlet : Si continu par morceau, periodique $\xrightarrow{\text{converge}}$ approximation sinusoidale

- Coefficient complexe : $\begin{cases} P(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(P)\, e^{i 2\pi \frac{n}{T} x} \\ \quad \hookrightarrow c_n(P) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} P(t)\, e^{-i 2\pi \frac{n}{T} t} \, dt \end{cases}$ n = rang de l'harmonique.

- Egalité de Parseval : $E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 df$ → generalisation Pythagore

⟺ inegalité de Bessel dans Espace prehilbertien

Opérateur de Transformation : CALCUL

- **Principe** : Opérateur linéaire où l'image d'une fonction p-e dans un domaine différent et où les calculs sont facilités par des formes usuelles → il existe un calcul inverse

- **Transformée de Fourier** : $F[f(t)]_\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot e^{-i\omega t}$ ⇔ moyenne glissante avec harmonique. (F^{-1} symétrique)

- **Théorème de Plancherel** : $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(k)|\,dk$ ⇒ fonction de carré sommable.

- **Transformée en Z** : $S(z) = Z\{s(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n) z^{-n}$ avec $z \in \{z\in\mathbb{C} \mid S(z) \text{ converge}\}$ → forme usuelle

- **Calculs différentielle** : ↔ Algèbre avec des fonctions → Trouver forme intégrable pour solution → principe du calcul de variation

- **Forme différentielle** : $df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$ → degré 1 ⇔ vecteur gradient

- **Intégrale multiples** : $\int_A \alpha = \int_{t_1}\dots\int_{t_k}\alpha_\gamma(t_1,\dots,t_k)\cdot\left(\frac{\partial\gamma}{\partial t_1},\dots,\frac{\partial\gamma}{\partial t_k}\right)dt_k\dots dt_1$ → indépendant
  ↳ k-forme

- **Équation différentielle** : $a_n y^{(n)}(x) + \dots + a_0 y(x) = g(x)$ → homogène si $g(x) = 0$

- **Séparation de variable** : $\frac{dy}{dx} = g(x)\cdot h(y) \to \int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(x)\,dx$ → cas d'intégration direct pour solution
  ln si $h(y) = y$

- **Différentiel exacte** : $A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy = dV(x,y)$ → facteur intégrant $\frac{\partial u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$

- **Résolution ordre "n"** : Solution complémentaire + Intégrale particulière = Solution
  ↳ Σ solution homogène = y_c ↳ solution indépendante de y_c = y_p

- **Wronksien** : mesure indépendance des solutions : $W(y_1,\dots,y_n) = \det\begin{pmatrix} y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \ddots & \\ y_1^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)}\end{pmatrix} \neq 0$

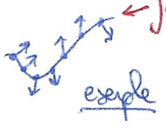
- **Coefficient constant** : → "n" solutions de la forme : $y(x) = A e^{\lambda x}$ → $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou apparaît k fois

- **Coefficient non constant** : Essaie chgt de variable (Cauchy) $x \to e^t$

- **Systèmes (homogène)** : $\frac{d\overset{\text{vecteur}}{\widetilde{y_i}}}{dx} = \sum_{j=1}^{n} \overset{\text{matrice}}{\widetilde{M_{ij}}}\cdot \overset{\text{vecteur}}{y_j(x)} \xrightarrow[\text{propre}]{\text{espace}} y_c = C\cdot v_p\cdot e^{\lambda\cdot x}$
  valeur propre ; vecteur propre

- **Dérivée partiel et Jacobien** : $A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ → chgt de variable $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}$
  correspondant° : $U = X\cdot Y\cdot Z$ indépendante
  ↳ la matrice jacobienne $J_i^j = \frac{\partial y_j}{\partial x_i}$ → linéarisation e.v.

- **Champs de vecteur** : fonction qui associe un vecteur : $F : \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} F_1(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ F_n(x_1,\dots,x_n)\end{bmatrix}$
  ↳ intégration champs de vecteurs "vitesse" ⇔ ligne de champs "position" (trajectoire)



exemple ← $\int$

- **Théorème de Stokes** : Soit M, variété différentielle orientée de dimension n : → fondement analyse vectorielle.
  ↳ intégration sur le bords suffit
  $\int_M d\omega = \int_{\partial M} i^*\omega$
  → injection canonique ; ← forme différentielle à support compact