MATHEMATIQUES

Axiomes d'extensionnalité : $A \subset B \quad B \subset A \quad dim(A)=dim(B) \quad A=B \quad A \cup B = A+B-A \cap B$

$E=\{n \in [-10,x] \cap \mathbb{Z} \mid x \in \mathbb{R} \; ; \; -3<x\leqslant 2\}=\{-2,-1,0,1,2\} \quad P(A)=Card(A)/Card(\Omega)$

Logique : $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \quad \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

Relation binaire : $x \mathfrak{R} y \quad x \mathfrak{R} x \quad x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow y \mathfrak{R} x \quad (x \mathfrak{R} y \wedge y \mathfrak{R} x) \Rightarrow x=y \quad (x \mathfrak{R} y \wedge y \mathfrak{R} z) \Rightarrow x \mathfrak{R} z$

Application : $f: E \rightarrow F | x \mapsto f(x)=y \quad E \rightarrow E \quad f \circ f^{-1}=e \quad c_{i,j}=\sum_{R=1}^{n} a_{i,R} \cdot b_{R,j} \quad dim(E,F)=dim(M_{np})=n \times p$

Structure interne : $(E, *) \quad a*b \in E \quad (a*b)*c=a*(b*c) \quad e*a=a \quad x(y+z)=xy+xz \quad a*b=b*a=e$

$\varphi:(G,+) \rightarrow (H,*) ; \varphi(G_1+G_2)=\varphi(G_1)*\varphi(G_2)=H_1*H_2$

Linéarité : $f(x,y)=f(a \cdot x+y)=a \cdot f(x)+f(y) \quad F \neq \emptyset \quad F \subset E \quad u_{[a,b]}+u_{[b,c]}=u_{[a,c]}$

Base vectorielle : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i=0 \Rightarrow \lambda_i=0 \quad x=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i \quad L_i \leftarrow \lambda \cdot L_i \; ; \; L_i \leftarrow L_i+\lambda \cdot L_j \; ; \; L_i \leftrightarrow L_j$

Théorème de géométrie : $(DE) \| (BC) \quad (d') \quad (AB) \nparallel (AC) \quad \tan(\phi)=\frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)}=\frac{[AB]}{[BC]}$

Produit scalaire : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \vec{u} \cdot \vec{v}=xx'+yy'=\langle u|v \rangle=\|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\widehat{(u,v)}) \quad \frac{\langle u|v \rangle}{\langle u|u \rangle} \vec{e}_i$

Equation paramétrique : $f(t)=\overrightarrow{AM(t)}=t \cdot \vec{u} \quad q(x,y)=ax^2+bxy+cy^2=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{4ac-b^2}{4a}\right)y^2$

Conique : $\Delta=b^2-4ac \quad d=|det(\overrightarrow{AP},u,v)|/\|u \wedge v\| \quad \|u \wedge v\|=\|u\| \cdot \|v\| \cdot \sin(u,v) \quad (a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Lieu géométrique : $arg(z)=(\vec{u},\overrightarrow{OM})=\theta \; ; \; z=\rho e^{i\theta} \quad arg(Z_1 \cdot Z_2)=arg(Z_1)+arg(Z_2)$

Noyau : $Ker\, f=f^{-1}\{e_F\}=\{x \in E | f(x)=e_F\}=\{X \in \mathbb{R}^n | A \cdot X=0\} \quad Ker\, f=e_E$

Image : $Img\, f=f(E)=\{y \in F | \exists x \in E, f(x)=y\}=vect((\overrightarrow{v_{colonne}})_n) \quad Img\, f=F$

Théorème du rang : $Rg(f)+dim\, Ker(f)=dim(E) \quad Rg(f)=dim(Img(f))$

Théorème isomorphisme : $f: G \rightarrow G', f(x \cdot H)=f(x \cdot Ker\, f)=f(x) \quad Card(G)=Card(Ker(f)) \times Card(Img(f))$

VVE propre : $M_{nn} \cdot \vec{v}_i=\lambda_i \vec{v}_i \quad \exists B, \; M_\lambda'=P^{-1}MP \quad P^{-1}=\frac{{}^t com(P)}{det(P)} \quad p_m(X):=det(X.I-M)=\prod_i (X-\lambda_i)$

$det(C_1,\dots,aC_i'+C_i'',\dots,C_n)=a\,det(\dots C_i'\dots)+det(\dots C_i''\dots) \quad det(A_3)=a_{(i,1)}.det(A_{2,i+1}) \; ; \; det(A_2)=ad-bc$

Décomposition PLU : $A=P.L.U \quad det(A)=det(P).det(L).det(U) \quad P=\delta_{i,\sigma(j)}=\begin{matrix} 1 & i=\sigma(j) \\ 0 & i \neq \sigma(j) \end{matrix}$

Evaluation polynome : $P[X]=a_n X^n+\dots+a_0 \quad (1,X,\dots,X^n) \quad P \rightarrow u(P)=\sum(C_i) \cdot u(X^i)$

Théorème fondamental Algèbre : $(X-1)^n \; ; \; 1=e^{i\frac{2\pi k}{n}} \quad \frac{A(x)}{B(x)}=Q(x)+\frac{R(x)}{B(x)} \quad \downarrow \quad P \circ P=X.P'^2 \quad deg(P)^2=2(deg(P)-1)+1$

Division euclidienne : $P(X)=D(X) \cdot Q(X)+R(X) \quad PGCD(P,D)=PGCD(D,R) \quad PPCM=\frac{|P.D|}{PGCD(P,D)}$

Nombre premier : $a \times m+b \times n=PGCD(a,b)=1 \quad a^p \equiv a \bmod p \equiv a[p] \quad n=p_1^{\alpha_1}.(\dots).p_m^{\alpha_m}$

Théorème de Lagrange : $H<G \; , \; |H| divise |G| \quad \forall g \in G \; , \; g^{card(G)}=e \quad \exists g \; , \; \langle g \rangle=\{g^k\}$

Composition de transposition : $\sigma=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}=(a \; b \; c)=(a \; b) \circ (b \; c) \quad \sigma \circ \sigma(a)=c \; ; \; \epsilon(\sigma)=(-1)^{N_i}$

Contraposé : $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A \quad \forall:(n^2[2]=0 \Rightarrow n[2]=0) \Leftrightarrow \begin{matrix} (\neg(n[2])=1 \Rightarrow \neg(n^2[2])=1) \\ ((2k+1)[2]=1 \Rightarrow (2k+1)^2[2]=1) \end{matrix}$

Absurde : $(A \Rightarrow B) \wedge (\neg B \Rightarrow \neg A) \quad \sqrt{2}=p/q \; ; \; p[2]=0, q[2]=0 \Rightarrow \sqrt{2}[2]=0$

Récurrence : $\downarrow \begin{matrix} P(0) \\ \forall n, P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{matrix} \quad \downarrow \begin{matrix} (a+b)^0=1 \; ; \; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} a^0 b^{0-0}=1 \\ \forall n, (a+b)^n=\sum \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^k b^{n-k} \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}=\frac{1}{k!}\frac{n!}{(n-k)!} \; ; \; (n+1)!=n!(n+1)$

Inégalité : $|\langle x|y \rangle| \leqslant \|x\| \|y\| \quad \|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\| \quad P(|X|<a) \leqslant \frac{E(|X|^p)}{a^p}$

Limite : $u(n) \sim_{+\infty} v(n) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u(n)}{v(n)}=\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v(n)}{u(n)}=1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x,x)=\lim_{x \rightarrow 0} f(x,ax)$

Exponentiel : $(e^{i\theta})^n=(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta) \quad e^{a+b}=e^a+e^b \quad \ln(a^n)=n\ln(a) \quad \log_p(x)=\frac{\ln(t)}{\ln(p)}$

Théorème valeur intermédiaire : $\forall f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall u \in [f(a),f(b)] \quad \exists c \in [a,b] \; , \; f(c)=u$

Théorème continuité : $f: I \rightarrow \mathbb{R} \; , \; ([|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\epsilon]) \quad C_l:[a^-, a^+]$

Boule : $B(a,r)=\{x \in E \mid \|x-a\|<r\} \quad A=\{(x,r) \in \mathbb{R}^2, a \leqslant f(x,y) \leqslant b\}$

Théorème point fixe : $g: E \rightarrow E \quad g(x)=x \quad d(f(x),f(y))<k.d_E \quad k \in [0,1[$

Dérivée : $f'(x)=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{df}{dx} \quad (f \circ f^{-1})'=1 \quad v(u)'=u'.v'(u) \quad |u|=\sqrt{x^2} \quad (u.v)'=u'v+v'u$

Théorème accroissement fini : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \quad |f'(c)| \leqslant M$

Hopital : $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(y)}=\frac{f'(a)}{g'(a)} \quad (u^\alpha)'=\alpha u^{\alpha-1}u' \quad (\ln(u))'=u'/u$

Théorème encadrement : $f \leqslant g \leqslant h \quad \lim_a f=\lim_a h=L \quad \lim_a g=L \quad \liminf(u_n)=\limsup(u_n)$

Critère de convergence : $\lim(f_n(x)) \rightarrow_s f(x) \quad \limsup|f_n(x)-f(x)| \rightarrow_{+\infty} 0 \quad |\sum u_n|<\epsilon \quad u(x)-\sum(-1)^n v_n \leqslant |a_{n+1}|$

Règle d'Alembert : $|f_n(x)| \leqslant a_n \quad \sum a_n x^n \quad \lim|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=l=\frac{1}{R} \quad S_j-S_{i-1}=\sum_i^j q^k=\frac{q^i-q^{j+1}}{1-q}$

Régularité : $C^\infty \quad C^2: \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}$

Serie de Taylor : $a_k=\frac{f^{(n)}(a)}{k!} \quad P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k \quad (1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} x^n$

Suite L^p : $\|x(n)\|_p=(|x_1(n)|^p+(\dots)+|x_n(n)|^p)^{1/p} \quad A=B$

Jacobien : $J_F(M)=\begin{pmatrix} \partial f_1 & \partial x_n \\ \partial x_1 & \partial f_m \end{pmatrix} \quad \phi(x,y) \rightarrow \phi(r,\theta) \; ; \; J_\phi=\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$

Résidu : $f(z)=\frac{q(z)}{p_0(Z).(\dots).p_n(z)} \quad Res(f(z),p_i(z))=\lim_{z \rightarrow p_i} q(z)/\prod_{j \neq i} p_j(z)$

Critère d'intégration : $\lim_{t \rightarrow [a^+,+\infty]} (t-a)^\alpha f(t)=0 \quad \int_a^b f(t)dt=\frac{b-a}{n}\sum_n^{N \rightarrow +\infty} f(a+k(b-a)/n) \quad \sum(n+m)=\sum(n(1+\frac{m}{n}))$

Théorème fondamental d'analyse : $A'(x)=f(x) \quad \int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

Théorème changement de variable : $\int_V g(y_i)dy_i=\int_U g(F(x_i)).|detJ_F(x_i)|dx_i \quad dy=f'(x)dx \; , \; \alpha=f'(a)$

Théorème convergence dominée : $(f_n) \in (E,A,\mu) \rightarrow f \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n(\mu)d\mu=\int \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\mu)d\mu$

Transformée : $\tilde{f}(\omega) \propto \int_\alpha^\beta f(x).e^{-pt} \quad \mathrm{T}(f(t-\tau)u(t-\tau))=\tilde{f}(\omega).e^{-\tau\omega}$

$t.u(t-1)-u(t-1)+u(t-1)=(t-1)u(t-1)+u(t-1)$

Equation différentielle : $a(x)y'+b(x)y=c(x) \quad \int\frac{y'}{y}=-\int\frac{b(x)}{a(x)} \quad y_p=\lambda(x).f(x) \quad y_p=P[X].e^{Q[X]}; Q[X] \in \mathbb{C}$

Théorème Cauchy-Lipstchitz : $x^{(p)}=f(t,x,\dots,x^{(n)}) \quad y''+y=0 \rightarrow X(t)=(y,y') \quad X(t)=\sum \alpha_i e^{\lambda_i t} u_i$

Théorème de transfert : $G=E[g(X)]=\int g(x)f_X(x)dx=\sum g(x_i).f(x_i) \quad F_X=P(X \leqslant x)$

Théorème central limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n<z)=\Phi_{N(0,1)}(z) \quad \sigma \rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad A=B$