15 a)

$\forall n \in \mathbb{N} : \quad n < 2^n$

IA: $n = 1$

$1 < 2^1$

$1 < 2$

IV: für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$n < 2^n$

IS: $n \rightsquigarrow n+1$

$n+1 < 2^{n+1}$

$n+1 < 2^n \cdot 2^1$

nach <u>IV</u>: $1 < 2$

$n < 2^n$

$\Rightarrow n+1 < 2^n \cdot 2$

$\square$

$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

IA: $\quad n = 1$

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

IV: sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest, so gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i \cdot (i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

IS:

$n \rightsquigarrow n+1$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i \cdot (i+1)} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(n+1)((n+1)+1)} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$$

$$\overset{IV}{=} \quad \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)((n+1)+1)} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$$

$$= \frac{n+1}{n+1+1} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$$

$$= \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\square$$