Aufgabe 20 ** *(GK-Codierung - Rundungsfehler / Arithmetik, 28 Minuten)*

Geben Sie zu jeder Teilaufgabe jeweils den Rechenweg oder eine Begründung an.

a) (Rundungsfehler, 7 Minuten)

1. (**, 1 Minute)
   Wie groß muss man k mindestens wählen, damit der relative Rundungsfehler bei der Codierung einer Zahl mit einer GK-Codierung $c_{GK,k,n}$ maximal 0.001 ist?
2. (*, 1 Minute)
   Wie groß ist maximal der relative Rundungsfehler bei der $c_{GK,11,16}$-Codierung?
3. (**, 1 Minute)
   Wie groß muss man k mindestens wählen, damit bei der $c_{GK,k,n}$-Codierung einer positiven Zahl r mit einer normierten Gleitkommadarstellung $r = m \cdot 2^{-3}$ ein maximaler **absoluter** Rundungsfehler von 0.001 auftritt?
4. (**, 4 Minuten)
   Berechnen Sie den absoluten Rundungsfehler bei der Codierung $c_{GK,5,8}(10.4)$.

1) $\frac{|m \cdot 2^e - (c_{GK,k,n}(m \cdot 2^e))_{GK,k,n}|}{|m| \cdot 2^e} \leqslant \frac{1}{2^k}.$

$\frac{1}{2^k} \geq 0.001 \quad 2^k \leq \frac{1}{0.001} \quad k \leq \log_2\left(\frac{1}{0.001}\right)$

2) $\frac{|m \cdot 2^e - (c_{GK,k,n}(m \cdot 2^e))_{GK,k,n}|}{|m| \cdot 2^e} \leqslant \frac{1}{2^k}.$

$\max: \frac{1}{2^{11}} = \frac{1}{2048}$

$\approx 0{,}0005$

3) $|m \cdot 2^e - (c_{GK,k,n}(m \cdot 2^e))_{GK,k,n}| \leqslant \frac{2^e}{2^k}.$

$\frac{2^{-3}}{2^k} \geq 0{,}001$

$2^k \geq \frac{2^{-3}}{0{,}001} \Rightarrow \log_2\left(\frac{2^{-3}}{0{,}001}\right) =$

4) $rd_{abs}(c_{GK,5,8}(10.4)) \quad \left(|m \cdot 2^e - (c_{GK,k,n}(m \cdot 2^e))_{GK,k,n}| \leqslant \frac{2^e}{2^k}.\right)$

$10.4 : 2^1 = 5{,}2$

$10.4 : 2^2 = 2{,}6 \quad c_{FK,k-1,k-1}$

$10.4 : 2^3 = + 1{,}3 \cdot 2^3$

$q = 2^{(n-k)-1} - 1 = 2^{(8-5)-1} - 1 = 2^2 - 1 = 3$

$n - k = 8 - 5 = 3$

char: $c_{EX,q,n-k}(e) = c_{EX,3,3}(3) = c_{2,3}(3+3) = c_{2,3}(6) = 110$

Mantisse: $c_{FK,4,4}(0.3)$

$c_{2,4}(rd(0.3 \cdot 2^4))$

$c_{2,4}(rd(4.8)) = c_{2,4}(5) = 0101$

$\Rightarrow \underline{01100101}$

abs. Fehler:

$0\underbrace{110}_{\text{bleibt } 3}\underbrace{0101}$

+

$0101 \rightarrow 5 : 2^4$

$= 0{,}3125$

$1{,}3125 \cdot 2^3$

$= 10.5$

$10.5 - 10.4$

$= \underline{\underline{0.1}}$

b) (Arithmetik, 11 Minuten)

1. (**, 3 Minuten)
   Berechnen Sie das Ergebnis der Addition der Zahlen 12 und 0.25 bezüglich der $c_{GK,5,8}$-Codierung und geben Sie den dabei auftretenden absoluten Rundungsfehler an.
2. (***, 5 Minuten)
   Berechnen Sie das Ergebnis der Addition der Zahlen 1.9375 und 3.2 bezüglich der $c_{GK,5,8}$-Codierung und geben Sie den dabei auftretenden absoluten Rundungsfehler an.
3. (**, 3 Minuten)
   Geben Sie zwei exakt darstellbare positive reelle Zahlen r und s an, bei deren Addition bezüglich der $c_{GK,11,16}$-Codierung alle Stellen von s ausgelöscht werden, so dass

$$c_{GK,11,16}(r) \oplus_{GK,11,16} c_{GK,11,16}(s) = c_{GK,11,16}(r)$$

1) $12 = 1100 \quad 0{,}25 = 0.01$

$\rightarrow (1.100) \cdot 2^3 \quad (1.000) \cdot 2^{-2}$

Addition $(1.1)_2 \cdot 2^3 \oplus_{GK,5,8} (1.0)_2 \cdot 2^{-2}$

Expo.angleich $rd((1.1) \cdot 2^3 + (0.00001); 2^3)$

$= rd_4((1.1 + 0.00001) \cdot 2^3)$

$= rd((1.10001) \cdot 2^3)$

$= (1.1001) \cdot 2^3$

Fehler: alt: $12 + 0{,}25 = 12{,}25$

neu: $1 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-4}$

$1 + 0{,}5 + 0{,}0625 = 1{,}5625 \cdot 2^3 = 12{,}5$

abs. Fehler: $0{,}25$

2) $1{,}9375 + 3{,}2 \longrightarrow 5{,}1375$

2^{-1}

$(1.1111) \cdot 2^0 + 11.00110011\ldots$

$(1.1111) \cdot 2^0 + 1.100110011) \cdot 2^1$

$[(0.1111) + (1.100110011)] \cdot 2^1$

$$\begin{array}{r} 0.1111 \\ +\ 1.100110011 \\ \hline 10.100010011 \end{array}$$

$(10.100010011) \cdot 2^1$

$rd(1.0100010011) \cdot 2^2$

$= (1.0100) \cdot 2^2$

$\rightarrow (101.00) = \underline{5}$

abs. Fehler: $|5 - 5{,}1375|$

$= 0{,}1375$

3) $c_{GK,11,16}$ exakt darstellbar, wenn
- $-(q-1) \leq e \leq q$
- $|m| \cdot 2^{k-1}$

$q = 2^{(n-k)-1} - 1 = 2^{(16-11-1)} - 1$

$q = 7$

$-(q-1) = -(7-1)$

$= -6$

$-6 \leq e \leq 7$

$(1.0) \cdot 2^7 + (1.0) \cdot 2^{-6} = 128{,}015625$

$\Rightarrow (1.0) \cdot 2^7 + (0.0000000000001) \cdot 2^7$

$rd_{11}(1.0000000000001) \cdot 2^7$

$\Rightarrow (1.0000000000) \cdot 2^7$

$= 1 \cdot 2^7 = 128$

abs. Fehler: $0{,}015625$