LENGUAJES FORMALES Y DE PROGRAMACION A+

UNIDAD 4

Lenguajes Independientes de contexto

Autómatas de Pila

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Ingeniería en Ciencias y Sistemas
Ing. Otto A. Rodríguez A.
Profesor Titular

Contenido

1. Introducción

Las gramáticas independientes de contexto o libres del contexto son gramáticas de tipo 2 en la jerarquía de Chomsky.

son de especial importancia en la ciencia de la computación debido a que todas, excepto algunas, de las características de los lenguajes de programación de alto nivel pueden ser escritas haciendo uso de ellas.

Una gramática G es libre de contexto si las producciones son de la forma:

$A \rightarrow s$ donde A esta en N (símbolos no terminales) y s está en N U T
(s puede ser un símbolo terminal o un símbolo no terminal)

Los lenguajes independientes del contexto son reconocidos por autómatas descendentes.

2. Recursividad a la izquierda y recursividad a la derecha

Se dice que una gramática es recursiva si al menos tiene una producción en la cual el Símbolo no terminal de lado izquierdo aparece también del lado derecho.

Una gramática se dice que es recursiva por la izquierda si tiene al menos una producción de esta forma:

$A \rightarrow A\alpha$ Donde α esta en T U N $A \rightarrow A\alpha$

Es decir, El símbolo no terminal del lado derecho (A) aparece mas a la izquierda ($A\alpha$) del lado derecho de la producción.

De forma similar, una gramática puede presentar recursividad por la derecha:

$A \rightarrow \alpha A$

En este caso, el símbolo no terminal A esta mas a la derecha en la producción del lado derecho (αA). $A \rightarrow \alpha A$

3. Problemas que los autómatas Finitos no resuelven

Existen lenguajes que no pueden ser reconocidos por un autómata finito y por consiguiente no son regulares. Estos lenguajes son de la forma

$L = \{x^n\ y^n\ \ n=1, 2, 3, ...\}\ = \{ xy, xxyy, xxxyyy, …\}$

Por cada x en el lenguaje debe haber una y,

Donde x^n implica que x se repite n veces
y^n implica que y se repite n veces.

Esto ocurre porque los autómatas finitos o tienen forma de recordar cuantas x se detectaron en la primera parte de la cadena, por lo que son incapaces de verificar si existe el mismo número de y.
Estos lenguajes no son regulares. Son lenguajes independientes del contexto.

4. Autómatas de Pila

Un autómata de pila es un autómata descendente de un sistema que recibe una cadena constituida por símbolos de un alfabeto y determina si esa cadena pertenece al lenguaje que el autómata reconoce. El lenguaje que reconoce un autómata de pila pertenece al grupo de los lenguajes independientes del contexto en la clasificación de la Jerarquía de Chomsky.

Se compone de dos cintas (cintas imaginarias que representan los símbolos a evaluar). La primera es una cinta de entrada que contiene la “palabra” que se quiere reconocer. Se agrega al final de la cinta el símbolo # que representa un símbolo de aceptación. La segunda cinta funciona como una pila (primero en entrar, ultimo en salir) y contiene al principio el símbolo de inicio Io y el símbolo de terminación #. Un autómata de pila se puede definir matemáticamente de la siguiente forma:

4.1 Definición formal

Un autómata de pila es una séxtupla de la forma (S, Σ, Γ, δ, Io, F) donde:

- S es un conjunto finito de estados
- Σ es el alfabeto del autómata de pila. Σ=T U N
- Γ es el conjunto finito de símbolos de pila
- δ es el conjunto de transiciones o cambios de estado
- Io es el estado inicial
- F es el conjunto de estados de aceptación

Los símbolos que pueden almacenarse en esta pila (conocidos como símbolos de pila de la maquina) constituyen un conjunto finito que puede incluir algunos o todos los símbolos del alfabeto de la máquina y quizá algunos símbolos adicionales que la máquina utiliza como marcas internas. Por ejemplo, una máquina podrá almacenar símbolos especiales en su pila para separar secciones que tengan interpretaciones distintas. Para ser más precisos, una inserta un símbolo especial en la pila antes de efectuar algún otro calculo entonces la presencia de ese símbolo en la cima de la pila puede usarse como indicador de "pila vacía" para cálculos posteriores. En los ejemplos se usa el símbolo # para este fin.
Las transiciones que ejecutan los autómatas de pila deben ser variantes de la siguiente secuencia básica: leer un símbolo de la entrada, extraer un símbolo de la pila, insertar un símbolo en la pila y pasar a un nuevo estado.

Este proceso se representa con la notación (p, x, s; q, y), donde:

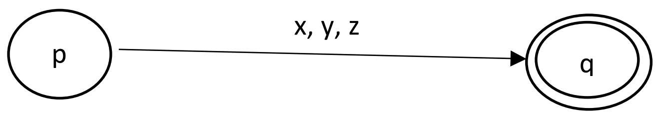
p es el estado actual
x es el símbolo de entrada
s es el símbolo que se extrae de la pila
q es el nuevo estado
Y es el símbolo que se inserta en la pila

Esta notación está diseñada para indicar que, el estado actual, el símbolo de entrada y el símbolo en la cima de la pila ayudan a determinar conjuntamente el nuevo estado y el símbolo que deberá insertarse en la pila.
Se obtienen variantes de este proceso básico de transición permitiendo que las transiciones lean, extraigan o inserten la cadena vacía. Por ejemplo,

δ(So, a, So, S1, b) Esto significa que del estado So con una a de entrada y con So en la cima de la pila pasa al estado S1 y mete una b a la pila.

Otro ejemplo de una transición posible sería $\delta(p, \varepsilon, \varepsilon, q, \varepsilon)$. Es decir, al encontrarse en el estado p, la maquina podría no avanzar en la posición de lectura o entrada (lo que se considera como la lectura de la cadena vacía ε), no extraer un símbolo de la pila (extraer la cadena vacía ε), no insertar un símbolo en la pila (insertar la cadena vacía) y pasar al estado q. Otro ejemplo es la transición que solo pasa del estado p al estado q extrayendo el símbolo s de la pila, lo cual se representa con $\delta(p, \varepsilon, s, q, \varepsilon)$. Otros ejemplos incluyen como $\delta(p, x, \varepsilon, q, z)$, $\delta(p, \varepsilon, \varepsilon, s, q, z)$. etcétera.

Para representar la colección de transiciones disponibles para un autómata de pila es conveniente utilizar un diagrama de transiciones que semeje el de un autómata finito, donde los estados se representan con círculos y las transiciones por medio de arcos o aristas que unen a los círculos. Sin embargo, en el caso de los autómatas de pila, la rotulación de los arcos es más elaborada ya que hay que representar más información. Un arco de p a q que representa la transición (p, x, y; q, z) tendría una etiqueta x, y; z. por ejemplo,



Es equivalente a $\delta(p, x, \varepsilon, q, z)$ Es decir, del estado p con el símbolo de entrada x, con y en la cima de la pila, se mueve al estado q y mete z a la pila,

Nótese que p y q no son necesario colocarlas en la arista dado que la flecha de la arista indica el estado inicial y el estado final,

4.2 Ejemplos

1. Uso de la pila en el autómata

verificar si la entrada aabb es reconocida por el lenguaje $L = \{a^n\ b^n\ n>=0\}$ Este lenguaje reconoce las palabras a y b de manera que por cada a siempre hay una b. $L = \{\varepsilon$, ab, aabb, aaabbb, aaaabbbb, …. }

La acción es apilar las a y extraerlas a medida que aparecen las b correspondientes. A continuación, se presenta como funciona la pila en cada función de transición.

Cinta de entrada					pila				descripción
a	a	b	b	#		#			a – # No se saca nada de la pila y se ingresa a
^									
a	a	b	b	#			a	#	a-a Se ingresa la a la pila
	^								
a	a	b	b	#		a	a	#	b-a se saca la a de la pila
		^							
a	a	b	b	#		a	#		b-a se saca la a de la pila
			^						
a	a	b	b	#		#			#-# se acepta con éxito
			^						

2. Realizar el autómata finito para el lenguaje $L=\{0^n1^n \; n>=1\}$

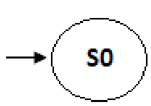
Dada la siguiente gramática hacer un autómata de pila que reconozca siguiente el lenguaje. L={01, 0011, 000111, 00001111, 0000011111, 000000111111…}
La gramática para este lenguaje es:

S → 0S1
  | 01

Esta gramática funciona de la misma forma que el ejemplo anterior. Por cada 0 que se tiene en la entrada se agrega a la pila, por cada 1 se saca de la pila el 0.

a) Se inicia la pila con el símbolo de aceptación en la pila y en el diagrama de transiciones se inicia con el estado inicial So.

#		
^		



b) Se toma el símbolo de entrada estando en el estado So.

- Si el símbolo de entrada es 1

Si el símbolo de entrada es 1 y en la pila está en el estado de aceptación, entonces hay un error dado que no puede iniciar con 1. Según la gramática siempre debe iniciar con 0 y luego debe seguir con 1.

- Si el símbolo de entrada es 0

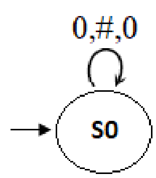
Si es 0 el símbolo de entrada y en la cima de la pila esta el estado de aceptación entonces se debe guardar en la pila y quedarse en el mismo estado (So).

Entonces se tiene:

Estado inicial	Entrada	Cima pila	meter en pila	Estado final	Descripción
So	0	#	0	So	Con 0 se queda en el mismo estado (So) y lo mete a la pila

pila

#				
^				



pila

#	0	
	^	

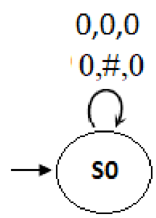
c) Se tiene como entrada un 0 y se tiene en la cima de la pila un 0 entonces se queda en el mismo estado y se ingresa un 0 a la pila.

Estado inicial	Entrada	Cima pila	meter en pila	Estado final	Descripción
So	0	So	0	So	Con 0 se queda en el mismo estado (So) y lo mete a la pila
So	0	0	0	So	Entrada con cero y cima de la pila con cero, se agrega a la pila la entrada

pila

#	0	

^



pila

#	0	0	

^

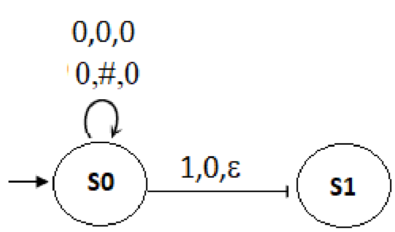
d) Se tiene de entrada 1 y en la pila esta un 0. Por cada 1 que llegue debe haber ya un 0 en la pila por consiguiente se debe cambiar de estado y sacar de la pila el 0.

Estado inicial	Entrada	Cima pila	meter en pila	Estado final	Descripción
So	0	So	0	So	Con 0 se queda en el mismo estado (So) y lo mete a la pila
So	0	0	0	So	Entrada con cero y cima de la pila con cero, se agrega a la pila la entrada
So	1	0	ε	S1	Se debe sacar el 0 de la pila y cambiar al estado S1. ε Implica que se saca el 0 de la pila y no se mete ningún otro símbolo.

pila

#	0	0		

^



pila

#	0			

^

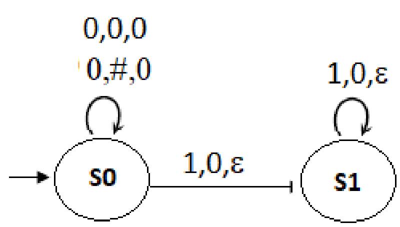
e) Estando en el estado S1 no pueden venir mas ceros dado que para llegar ahí tubo que haber un 1 y después de un 1 solo pueden venir mas 1 o es error.

Si viene de entrada un 1 y en la pila hay un 0 entonces se debe sacar el cero de la pila. Nótese que en la pila no puede haber 1 dado que los 1 no se meten a la pila.

Estado inicial	Entrada	Cima pila	meter en pila	Estado final	Descripción
So	0	So	0	So	Con 0 se queda en el mismo estado (So) y lo mete a la pila
So	0	0	0	So	Entrada con cero y cima de la pila con cero, se agrega a la pila la entrada
So	1	0	ε	S1	Se debe sacar el 0 de la pila y cambiar al estado S1. ε Implica que se saca el 0 de la pila y no se mete ningún otro símbolo.
S1	1	0	ε	S1	Se saca el 0 de la pila y se queda en el mismo estado S1

pila

#	0	
	^	



pila

#		
^		

f) Si se tiene como entrada unos o ceros y en la pila esta el estado de aceptación debe producirse un error.

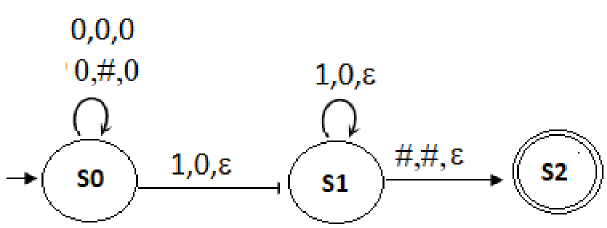
Si se tiene de entrada el estado de aceptación # y en la pila está el símbolo de aceptación se mueve aun nuevo estado de aceptación, se saca de la pila el estado de aceptación y se acepta la palabra.

Estado inicial	Entrada	Cima pila	meter en pila	Estado final	Descripción
So	0	So	0	So	Con 0 se queda en el mismo estado (So) y lo mete a la pila
So	0	0	0	So	Entrada con cero y cima de la pila con cero, se agrega a la pila la entrada
So	1	0	ε	S1	Se debe sacar el 0 de la pila y cambiar al estado S1. ε Implica que se saca el 0 de la pila y no se mete ningún otro símbolo.
S1	1	0	ε	S1	Se saca el 0 de la pila y se queda en el mismo estado S1
S1	#	#	ε	S2	Pasa al estado de aceptación y se acepta la palabra con éxito.

pila

#		

^



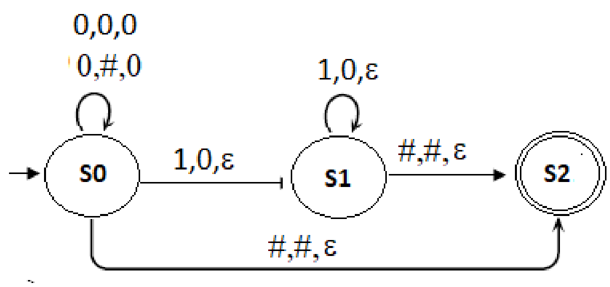
pila

g) ¿Qué pasa si el lenguaje a solicitar acepta ε? Es decir, el lenguaje a definir es:

L={ε, 01, 0011, 000111, 00001111, 0000011111, 000000111111…}
La gramática para este lenguaje es:

S → 0S1
| ε

En este caso, no hay símbolos de entrada por lo que el único símbolo es el símbolo de aceptación # y en la pila también solamente esta este símbolo. Entonces existe una transición del estado So al estado de aceptación.



3. Realizar un autómata de pila para el lenguaje L = {0n12n n>=1}

L = $\{0^n1^{2n}$ n>=1}

Este lenguaje define que por cada 0 que aparece como entrada debe haber dos unos. L={011, 001111, 000111111, 000011111111…}

Al igual que en el ejemplo anterior, por cada 0 que se tenga de entrada se debe meter a la pila.

a) Si es 0 el símbolo de entrada y en la cima de la pila está el estado de aceptación entonces se debe guardar en la pila y quedarse en el mismo estado (So).

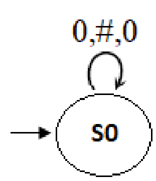
Entonces se tiene:

Estado inicial	Entrada	Cima pila	meter en pila	Estado final	Descripción
So	0	#	0	So	Con 0 se queda en el mismo estado (So) y lo mete a la pila

pila

#				

^



pila

#	0	

^

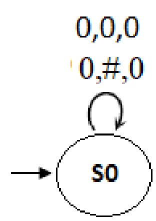
b) Se tiene como entrada un 0 y se tiene en la cima de la pila un 0 entonces se queda en el mismo estado y se ingresa un 0 a la pila.

Estado inicial	Entrada	Cima pila	meter en pila	Estado final	Descripción
So	0	So	0	So	Con 0 se queda en el mismo estado (So) y lo mete a la pila
So	0	0	0	So	Entrada con cero y cima de la pila con cero, se agrega a la pila la entrada

pila

#	0	

^



pila

#	0	0	

^

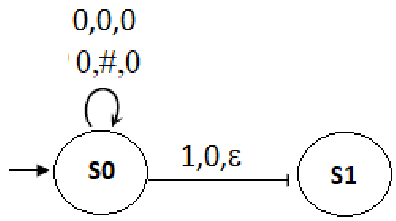
c) Se tiene de entrada 1 y en la pila esta un 0. Se debe cambiar de estado y sacar de la pila el 0.

Estado inicial	Entrada	Cima pila	meter en pila	Estado final	Descripción
So	0	So	0	So	Con 0 se queda en el mismo estado (So) y lo mete a la pila
So	0	0	0	So	Entrada con cero y cima de la pila con cero, se agrega a la pila la entrada
So	1	0	ε	S1	Se debe sacar el 0 de la pila y cambiar al estado S1. ε Implica que se saca el 0 de la pila y no se mete ningún otro símbolo.

pila

#	0	0		

^



pila

#	0			

^

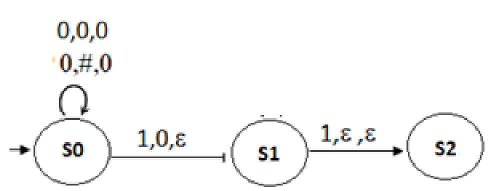
d) Ahora en este punto debe venir de entrada otro 1 dado que es el doble de 1 por cada 0. Para esto creamos una transición con 1 a un nuevo estado no importando lo que este en la pila y tampoco se ingresa nada en la pila

Estado inicial	Entrada	Cima pila	meter en pila	Estado final	Descripción
So	0	So	0	So	Con 0 se queda en el mismo estado (So) y lo mete a la pila
So	0	0	0	So	Entrada con cero y cima de la pila con cero, se agrega a la pila la entrada
So	1	0	ε	S1	Se debe sacar el 0 de la pila y cambiar al estado S1. ε Implica que se saca el 0 de la pila y no se mete ningún otro símbolo.
S1	1	ε	ε	S2	Con un 1 se traslada a S2, no se toca la pila

pila

#	0			

^



pila

#	0			

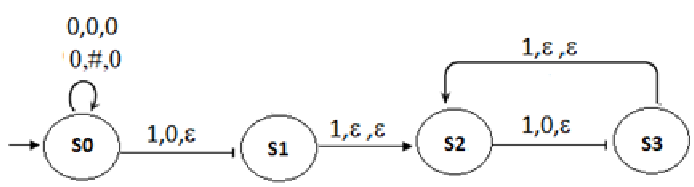
^

e) En este punto se tienen dos 1 por 0, pero ahora por cada 0 que se tenga en la pila hay que sacar un cero y luego regresar para el siguiente 1. De manera que queda así:

Estado inicial	Entrada	Cima pila	meter en pila	Estado final	Descripción
So	0	So	0	So	Con 0 se queda en el mismo estado (So) y lo mete a la pila
So	0	0	0	So	Entrada con cero y cima de la pila con cero, se agrega a la pila la entrada
So	1	0	ε	S1	Se debe sacar el 0 de la pila y cambiar al estado S1. ε Implica que se saca el 0 de la pila y no se mete ningún otro símbolo.
S1	1	ε	ε	S2	Con un 1 se traslada a S2, no se toca la pila
S2	1	0	ε	S3	Con un 1 se saca de la pila 0 y no se mete nada.
S3	1	ε	ε	S4	Con un 1 regresa sin tocar la pila,

pila

#	0			
	^			



pila

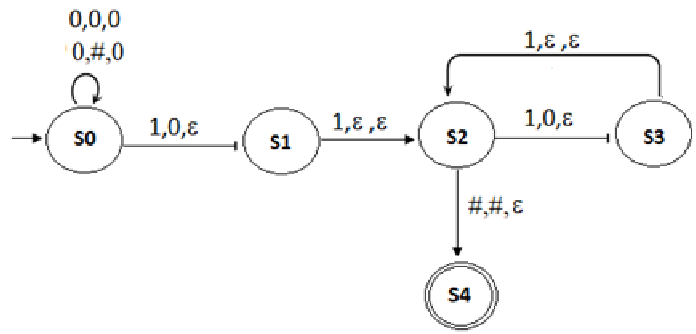
#				
^				

f) Por último, si se tiene el estado de aceptación de entrada y en la pila se debe pasar al estado de aceptación.

pila

#				

^



pila
