Rivestimenti di Gorenstein

Fabio Tonini

Università di Pisa

Tesi di Laurea Specialistica in Matematica

26/09/2008

Obiettivo della Tesi

Fonte

G. Casnati e T. Ekedahl, *Covers of algebraic varieties I. A general structure theorem, covers of degree 3,4 and Enriques surfaces*

Obiettivo

Mostrare che esiste un'equivalenza fra la categoria dei rivestimenti di Gorenstein di grado $d \geqslant 3$ di uno schema noetheriano Y e isomorfismi come frecce ed una categoria di successioni esatte oppurtunamente definita.

Rivestimenti algebrici di schemi

Definizione

Dati due schemi X, Y ed un intero $d \geqslant 1$, un rivestimento di grado d è un morfismo affine di schemi

$$\rho : X \longrightarrow Y$$

tale che $\rho_* \mathcal{O}_X$ sia localmente libero di rango d.

1. ρ è piatto e finito.
2. per ogni $y \in Y$, $X_y \simeq \operatorname{Spec} A$, con A una $k(y)$ algebra di dimensione d su $k(y)$. In particolare ρ è surgettivo
3. esiste una successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y \xrightarrow{\rho^\#} \rho_* \mathcal{O}_X \longrightarrow \operatorname{coker} \rho^\# \longrightarrow 0$$

e $\operatorname{coker} \rho^\#$ è localmente libero di rango $d - 1$.

Fibre dei rivestimenti

Se k campo, A k-algebra di dimensione d allora

$$\operatorname{Spec} A \xrightarrow{\rho} \operatorname{Spec} k \quad \text{rivestimento di grado } d$$

Fibre dei rivestimenti

Se k campo, A k-algebra di dimensione d allora

$$\operatorname{Spec} A \xrightarrow{\rho} \operatorname{Spec} k \quad \text{rivestimento di grado } d$$

Idea

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} A \arrow[r, dashed, "i"] \arrow[dr, "\rho"'] & \mathbb{P}^n_k \arrow[d, "\pi"] \\
& \operatorname{Spec} k
\end{tikzcd}$$

- Determinare una particolare classe di immersioni i
- Generalizzare a rivestimenti di schemi noetheriani

Ipotesi di partenza: fibra di Gorenstein e $d \geqslant 3$

Anelli e rivestimenti di Gorenstein

Anello di Gorenstein

Un anello locale noetheriano (R, m) si dice di Gorenstein se $\mathrm{injdim}\, R < \infty$. Un anello noetheriano si dice di Gorenstein se ogni localizzazione nei massimali è di Gorenstein.

Schema di Gorenstein

Uno schema X si dice di Gorenstein se è localmente lo spettro di un anello di Gorenstein.

Rivestimento di Gorenstein

Un rivestimento $\rho : X \longrightarrow Y$ si dice di Gorenstein se le fibre di ρ sono schemi di Gorenstein

Immersioni aritmeticamente di Gorenstein e non degeneri

Anello delle coordinate omogenee

Se $S = B[X_0, \dots, X_n]$ ed $X \xrightarrow{i} \mathbb{P}^n_B$ è un sottoschema chiuso, esiste un ideale omogeneo I_X di S massimo fra quelli che definiscono X. L'anello delle coordinate omogenee di X è l'algebra graduata

$$S_X = S/I_X$$

In particolare

$$X \simeq \operatorname{Proj} S_X$$

Inoltre i si dice

- *non degenere* se I_X non contiene elementi di grado 1
- *aritmeticamente di Gorenstein* se S_X è di Gorenstein

k-algebre di Gorenstein di dimensione finita

Se A è una k-algebra di Gorenstein di dimensione $3 \leqslant d < \infty$ su k e k infinito:

- esistono $e^* \in A$ ed un k-spazio vettoriale F tali che

$$A = k \oplus F \oplus ke^* \qquad A = k + F + F^2$$

- la suriezione $\mathrm{S}\, F \longrightarrow A$ induce un'immersione chiusa

$$\operatorname{Spec} A \longrightarrow \mathbb{A}_k^{d-2} \subseteq \mathbb{P}_k^{d-2}$$

  non degenere ed aritmeticamente di Gorenstein

Nel caso delle k-algebre non di Gorenstein:

$A = k[X, Y]/(X^2, Y^2, XY)$ non ammette immersioni in $\mathbb{P}_k^1$.

Caratterizzazione delle immersioni

Teorema

Sia $d \geqslant 3$, k un campo e $X \xrightarrow{i} \mathbb{P}_k^{d-2}$ un sottoschema chiuso. Allora X ha una risoluzione della forma

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^{d-2}}(-d) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^{d-2}}(-d+2)^{\beta_{d-3}} \longrightarrow \dots$$
$$\dots \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^{d-2}}(-2)^{\beta_1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^{d-2}}$$

$\beta_k = \frac{k(d-2-k)}{d-1}\binom{d}{k+1}$ *per* $k < d-2$, *se e solo se* $X \longrightarrow \operatorname{Spec} k$ *è un rivestimento di Gorenstein di grado* d *ed* i *è non degenere ed aritmeticamente di Gorenstein.*

Generalizzazione degli spazi proiettivi

Proj di un fascio di algebre

Sia Y uno schema noetheriano ed $\mathscr{A}$ una $\mathcal{O}_Y$-algebra graduata quasi-coerente localmente generata in grado 1. Allora, a meno di isomorfismo, esiste un'unico schema su Y

$$\operatorname{Proj} \mathscr{A} \xrightarrow{\pi} Y$$

insieme ad un fascio invertibile $\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} \mathscr{A}}(1)$ su $\operatorname{Proj} \mathscr{A}$, tali che, al variare degli aperti affini U di Y, esistano isomorfismi

$$\sigma_U : \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\simeq} \operatorname{Proj} \mathscr{A}(U) \quad \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} \mathscr{A}}(1)_{|\pi^{-1}(U)} \simeq \sigma_U^* \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} \mathscr{A}(U)}(1)$$

compatibili con le restrizioni.

Fasci di algebre simmetriche

Proposizione

Sia Y uno schema noetheriano e $\mathcal{F} \in \mathrm{QCoh}(Y)$. Allora, a meno di isomorfismo, esistono e sono unici fasci quasi-coerenti $\mathrm{S}\,\mathcal{F}$, $\mathrm{S}^n\,\mathcal{F}$ $n \in \mathbb{Z}$ tali che, al variare degli aperti affini U di Y, esistano isomorfismi

$$(\mathrm{S}\,\mathcal{F})_{|U} \simeq (\mathrm{S}\,\mathcal{F}(U))\tilde{} \qquad (\mathrm{S}^n\,\mathcal{F})_{|U} \simeq (\mathrm{S}^n\,\mathcal{F}(U))\tilde{}$$

compatibili con le restrizioni. Inoltre $\mathrm{S}\,\mathcal{F}$ ha una struttura naturale di $\mathcal{O}_Y$-algebra graduata con decomposizione data da

$$\mathrm{S}\,\mathcal{F} \simeq \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathrm{S}^n\,\mathcal{F}$$

Il fibrato proiettivo $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ come schema

Definizione

Sia Y uno schema noetheriano ed $\mathcal{E}$ un fascio localmente libero di rango finito su Y. Il fibrato proiettivo associato a $\mathcal{E}$ è lo schema su Y

$$\mathrm{Proj}(\mathrm{S}\,\mathcal{E}) = \mathbb{P}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\pi} Y$$

- se $\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_Y^{n+1}$ allora $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \simeq \mathbb{P}_Y^n$
- $\mathrm{S}\,\mathcal{E} \simeq \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \pi_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(n)$
- si ha un morfismo surgettivo

$$\pi^*\mathcal{E} \simeq \pi^*\pi_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$$

Il fibrato proiettivo $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ come funtore

Sia Y uno schema noetheriano, $\mathcal{E}$ localmente libero di rango finito.

$$\mathrm{Sch}_Y^{op} \xrightarrow{\quad P_{\mathcal{E}} \quad} (\mathrm{set})$$

$$(X,\rho) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{classi di equivalenza di} \\ \text{morfismi surgettivi } \rho^*\mathcal{E} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{L} \text{ con} \\ \mathcal{L} \text{ invertibile su } X \end{array} \right\}$$

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "\rho'"'] \arrow[d, "h"] \\ Y & X \arrow[l, "\rho"] \end{tikzcd} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c} P_{\mathcal{E}}(X) \xrightarrow{P_{\mathcal{E}}(h)} P_{\mathcal{E}}(X') \\[1em] \begin{tikzcd} \rho^*\mathcal{E} \arrow[d, "\sigma"] & & h^*\rho^*\mathcal{E} \simeq \rho'^*\mathcal{E} \arrow[d, "h^*\sigma"'] \arrow[d, shift left=6] \\ \mathcal{L} \arrow[rr, phantom, "\longrightarrow"] & & h^*\mathcal{L} \end{tikzcd} \end{array}$$

- $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}_Y}(-,\mathbb{P}(\mathcal{E})) \simeq P_{\mathcal{E}}$
- $(\mathbb{P}(\mathcal{E}), \pi^*\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1))$ è un oggetto universale per $P_{\mathcal{E}}$.

Isomorfismi di fibrati

se $\mathcal{L}$ fascio invertibile su Y e $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}$

$$\begin{array}{c} \pi^*\mathcal{E}' \\ \wr\| \\ \pi^*\mathcal{E} \otimes \pi^*\mathcal{L} \\ \big\downarrow \\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) \otimes \pi^*\mathcal{L} \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c} \lambda : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}(\mathcal{E}') \\ \\ \lambda^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}')}(1) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) \otimes \pi^*\mathcal{L} \end{array}$$

se $\sigma : \mathcal{E}' \xrightarrow{\simeq} \mathcal{E}$

$$\begin{array}{c} \pi^*\mathcal{E}' \\ \big\downarrow \pi^*\sigma \\ \pi^*\mathcal{E} \\ \big\downarrow \\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c} \mathbb{P}(\sigma) : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}(\mathcal{E}') \\ \\ \mathbb{P}(\sigma)^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}')}(1) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) \end{array}$$

Notazioni e convenzioni

- Da ora in avanti Y sarà uno schema noetheriano e d un intero con $d \geqslant 3$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^{d-2}}(-d)^{\beta_{d-2}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^{d-2}}(-d+2)^{\beta_{d-3}} \longrightarrow \dots$$
$$\dots \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^{d-2}}(-2)^{\beta_1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^{d-2}}$$

$$q_k = \begin{cases} 0 & k \leqslant 0 \text{ e } k > d-2 \\ -k-1 & 1 \leqslant k \leqslant d-3 \\ -d & k = d-2 \end{cases}$$

$$\beta_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \text{ e } k = d-2 \\ \frac{k(d-2-k)}{d-1}\binom{d}{k+1} & 1 \leqslant k \leqslant d-3 \\ 0 & k > d-2 \end{cases}$$

La categoria dei rivestimenti di Gorenstein : $\mathbf{GRiv}_d(Y)$

Oggetti

Rivestimenti di Gorenstein

$$\rho : X \longrightarrow Y$$

di grado d

Frecce

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dr, "\rho"'] & & \overline{X} \arrow[dl, "\overline{\rho}"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Risoluzione di Gorenstein

Una risoluzione di Gorenstein su Y è una terna $(\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha})$ dove

- $\mathcal{E}$ è un fascio localmente libero su Y di rango $d-1$ cui è associato $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow Y$
- $\underline{\mathcal{M}} = (\mathcal{M}_{d-2}, \dots, \mathcal{M}_1)$ sono fasci localmente liberi su Y con $\operatorname{rk} \mathcal{M}_i = \beta_i$
- $\underline{\alpha} = (\alpha_{d-2}, \dots, \alpha_1)$ sono morfismi tali che la seguente successione

$$\mathcal{N}_* : 0 \longrightarrow \pi^* \mathcal{M}_{d-2}(q_{d-2}) \xrightarrow{\alpha_{d-2}} \dots \xrightarrow{\alpha_2} \pi^* \mathcal{M}_1(q_1) \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$$

sia esatta.

Oggetti associati ad una risoluzione di Gorenstein

$$(\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha}) = (\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha}, \pi, \mathcal{I}, i, X, \rho, \mathcal{N}_*)$$

- il fascio di ideali $\mathcal{I} = \operatorname{Im} \alpha_1$ ed un diagramma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\rho"'] & \mathbb{P}(\mathcal{E}) \arrow[d, "\pi"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

- la risoluzione $\mathcal{N}_*$, con $\mathcal{N}_k = \pi^* \mathcal{M}_k$

Morfismi di risoluzioni

$$(\sigma, \underline{\tau}) : \chi = (\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha}, X, \mathcal{N}_*) \longrightarrow (\mathcal{E}', \underline{\mathcal{M}'}, \underline{\alpha'}, X', \mathcal{N}'_*) = \chi'$$

- un isomorfismo $\sigma : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$, $\lambda = \mathbb{P}(\sigma) : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}')$
- isomorfismi $\underline{\tau} = (\tau_{d-2}, \dots, \tau_1)$, $\tau_i : \mathcal{M}'_i \longrightarrow \mathcal{M}_i$ che inducano un isomorfismo di successioni esatte

$$\lambda_* \mathcal{N}_* \simeq \mathcal{N}'_*$$

Vale che:

- se $\sigma : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$ e $\mathbb{P}(\sigma) X = X'$ allora $\exists!$ $\underline{\tau} = (\tau_{d-2}, \dots, \tau_1)$ tali che $(\sigma, \underline{\tau}) : \chi \longrightarrow \chi'$

Categoria $\mathbf{PGor}_d(Y)$

Oggetti

$$(\chi, \zeta) \qquad \chi = (\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha}, \mathcal{N}_*)$$

- $\zeta : \mathcal{M}_{d-2} \xrightarrow{\simeq} \det \mathcal{E}$
- $\mathcal{N}_*$ esatta su ogni fibra su Y

Frecce

$$(\chi, \zeta) \xrightarrow{(\sigma, \underline{\tau})} (\chi', \zeta') \qquad (\sigma, \underline{\tau}) : \chi \longrightarrow \chi'$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}'_{d-2} \arrow[r, "\zeta'"] \arrow[d, "\tau_{d-2}"'] & \det \mathcal{E}' \arrow[d, "\det \sigma"] \\ \mathcal{M}_{d-2} \arrow[r, "\zeta"'] & \det \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

L' equivalenza

Sia Y uno schema noetheriano e $d \geqslant 3$. Il funtore

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{PGor}_d(Y) & \xrightarrow{\quad\Phi\quad} & \mathrm{GRiv}_d(Y) \\
((\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha}, \rho), \zeta) & \longrightarrow & \rho \\
((\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha}, X), \zeta) & & \\
\downarrow (\sigma, \underline{\tau}) & \longrightarrow & \mathbb{P}(\sigma)_{|X} : X \longrightarrow X' \\
((\mathcal{E}', \underline{\mathcal{M}'}, \underline{\alpha'}, X'), \zeta') & &
\end{array}$$

è una equivalenza di categorie.

Dalle risoluzioni ai rivestimenti

Data $(\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha}, \pi, i, X, \rho, \mathcal{N}_*)$

1. esiste una successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y \xrightarrow{\rho^\#} \rho_* \mathcal{O}_X \longrightarrow R^{d-2}\pi_* \mathcal{N}_{d-2}(-d) \longrightarrow 0$$

2. $R^{d-2}\pi_* \mathcal{N}_{d-2}(-d)$ localmente libero di rango $d-1$
3. sono equivalenti
   1. La successione $\mathcal{N}_*$ ristretta ad ogni fibra su Y rimane esatta.
   2. $\dim X_y = 0$ per ogni $y \in Y$
   3. ρ è un rivestimento
   4. X è piatto su Y

   In tal caso i è su ogni fibra non degenere ed aritmeticamente di Gorenstein e ρ è un rivestimento di Gorenstein di grado d.

Fascio dualizzante per rivestimenti

Sia $\rho : X \longrightarrow Y$ un rivestimento. Esiste un fascio quasi-coerente ω_ρ, detto *fascio dualizzante*, ed un isomorfismo naturale

$$\rho_* \underline{\mathrm{Hom}}_X(F, \omega_\rho \otimes N) \xrightarrow{\simeq} \underline{\mathrm{Hom}}_Y(\rho_* F, N)$$

In particolare

$$\rho_* \omega_\rho \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_Y(\rho_* \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y)$$

Inoltre

$$\omega_\rho \text{ invertibile} \iff \rho \text{ Gorenstein}$$

Morfismo associato ad un rivestimento

Dato $\rho : X \longrightarrow Y$ e posto $\mathcal{E} = (\operatorname{coker} \rho^{\#})^{\vee}$

1. $$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y \xrightarrow{\rho^{\#}} \rho_* \mathcal{O}_X \longrightarrow \operatorname{coker} \rho^{\#} \longrightarrow 0$$
2. Dualizzo
$$\mathcal{E} \xrightarrow{\phi} \underline{\operatorname{Hom}}_Y(\rho_* \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y) \simeq \rho_* \omega_\rho$$
3. Applico ρ^*
$$\rho^* \mathcal{E} \xrightarrow{\rho^* \phi} \rho^* \rho_* \omega_\rho \longrightarrow \omega_\rho$$

Morfismo associato ad un rivestimento

Dato $\rho : X \longrightarrow Y$ e posto $\mathcal{E} = (\operatorname{coker} \rho^{\#})^{\vee}$

1. $$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y \xrightarrow{\rho^{\#}} \rho_* \mathcal{O}_X \longrightarrow \operatorname{coker} \rho^{\#} \longrightarrow 0$$
2. Dualizzo
$$\mathcal{E} \xrightarrow{\phi} \underline{\operatorname{Hom}}_Y(\rho_* \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y) \simeq \rho_* \omega_\rho$$
3. Applico ρ^*
$$\rho^* \mathcal{E} \xrightarrow{\rho^* \phi} \rho^* \rho_* \omega_\rho \longrightarrow \omega_\rho$$

$$\text{È surgettivo!} \quad \Longrightarrow \quad \exists i : X \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$$

i è un'immersione chiusa non degenere ed aritmeticamente di Gorenstein su ogni fibra

Costruzione di una risoluzione di Gorenstein per ρ

- $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}$, $\mathcal{M}_0 = \mathcal{O}_Y$
- $\mathcal{M}_k = \pi_* \mathcal{I}_k(-q_k)$
- $\alpha_k : \pi^* \mathcal{M}_k(q_k) \longrightarrow \pi^* \mathcal{M}_{k-1}(q_{k-1})$ indotto da

$$(\pi^* \pi_* \mathcal{I}_k(-q_k))(q_k) \longrightarrow (\mathcal{I}_k(-q_k))(q_k) \simeq \mathcal{I}_k$$

- $\mathcal{I}_{k+1} = \ker \alpha_k$

$$\hat{\chi}_\rho = (\mathcal{E}, (\mathcal{M}_{d-2}, \ldots, \mathcal{M}_1), (\alpha_{d-2}, \ldots, \alpha_1))$$

è una risoluzione di Gorenstein

Dalla risoluzione di Gorenstein all'oggetto di $\mathbf{PGor}_d(Y)$

- poniamo $\mathcal{L} = \det \mathcal{E} \otimes (\mathcal{M}_{d-2})^\vee$
- Esiste un isomorfismo naturale

$$\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}$$

da cui

$$\lambda : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}(\mathcal{E}) \quad \text{e} \quad \lambda_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) \otimes \pi^* \mathcal{L}^{-1}$$

- Applico λ_* alla successione $\mathcal{N}_*$ di $\hat{\chi}_\rho$ ed ottengo un oggetto $\chi_\rho = ((\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}'}, \underline{\alpha'}), \zeta)$ di $\mathrm{PGor}_d(Y)$ con
  - $\mathcal{M}'_k = \mathcal{M}_k \otimes \mathcal{L}^{\otimes -q_k}$

$$\begin{aligned} \zeta : \mathcal{M}_{d-2} \otimes \mathcal{L}^{\otimes d} &= \mathcal{M}_{d-2} \otimes \mathcal{M}_{d-2}{}^\vee \otimes (\det \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^{\otimes d-1}) \\ &\simeq \mathcal{M}_{d-2} \otimes \mathcal{M}_{d-2}{}^\vee \otimes \det \mathcal{E} \simeq \det \mathcal{E} \end{aligned}$$

Dagli isomorfismi di rivestimenti alle frecce in $\mathbf{PGor}_d(Y)$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "\rho"'] & & \overline{X} \arrow[dl, "\overline{\rho}"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{O}_Y \arrow[r, "\overline{\rho}^\#"] \arrow[d] & \overline{\rho}_* \mathcal{O}_{\overline{X}} \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\rho}_* \lambda^\#"] & \operatorname{coker} \overline{\rho}^\# \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{O}_Y \arrow[r, "\rho^\#"'] & \rho_* \mathcal{O}_X \arrow[r] & \operatorname{coker} \rho^\# \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{E} = (\operatorname{coker} \rho^\#)^\vee \xrightarrow{\eta} (\operatorname{coker} \overline{\rho}^\#)^\vee = \overline{\mathcal{E}} \implies \lambda_\rho = \eta^{-1}$$

Il funtore inverso

$$\mathrm{GRiv}_d(Y) \xrightarrow{\quad\Lambda\quad} \mathrm{PGor}_d(Y)$$

$$\rho \longrightarrow \chi_\rho$$

$$\lambda \longrightarrow \lambda_\rho$$

$$\mathrm{PGor}_d(Y) \xrightarrow{\quad\Phi\quad} \mathrm{GRiv}_d(Y)$$

$$((\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha}, \rho), \zeta) \longrightarrow \rho$$

$$\begin{array}{c} ((\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha}, X), \zeta) \\ \Big\downarrow (\sigma, \underline{\tau}) \\ ((\mathcal{E}', \underline{\mathcal{M}'}, \underline{\alpha'}, X'), \zeta') \end{array} \longrightarrow \mathbb{P}(\sigma)_{|X} : X \longrightarrow X'$$

Teorema

Sia Y uno schema noetheriano, $d \geqslant 3$, $\mathcal{E}$ un fascio localmente libero di rango $d-1$ con fibrato proiettivo associato $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow Y$ e $X \xrightarrow{i} \mathbb{P}(\mathcal{E})$ un sottoschema chiuso. Allora $\rho = \pi \circ i$ è un rivestimento di Gorenstein di grado d e i è su ogni fibra non degenere ed aritmeticamente di Gorenstein se e solo $i_*\mathcal{O}_X$ ha una risoluzione della forma

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_{d-2}(-d) \xrightarrow{\alpha_{d-2}} \mathcal{N}_{d-3}(-d+2) \xrightarrow{\alpha_{d-3}} \dots$$
$$\dots \xrightarrow{\alpha_2} \mathcal{N}_1(-2) \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$$

con

1. $\pi_*\mathcal{N}_k$ localmente libero di rango β_k
2. $\pi^*\pi_*\mathcal{N}_k \simeq \mathcal{N}_k$
3. X piatto su Y

Osservazione

$$\begin{tikzcd}
\pi^*\mathcal{M}_1(q_1) \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, leftrightarrow, "-\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(-q_1)"] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} \\
\pi^*\mathcal{M}_1 \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "\pi_*"] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(-q_1) \\
\mathcal{M}_1 \arrow[r, "\gamma"'] & \mathrm{S}^{-q_1}\,\mathcal{E}
\end{tikzcd}$$

Il grado $d = 3$: $\mathrm{PGor}_3(Y)$

- $\mathcal{E}$ localmente libero $\operatorname{rk}\mathcal{E} = 2$
- una successione su ogni fibra e globalmente esatta

$$0 \longrightarrow \pi^* \det \mathcal{E}(-3) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$$

Definiamo la categoria $\mathrm{PGor}'_3(Y)$:

- *Oggetti.* $(\mathcal{E}, \gamma)$
  - $\mathcal{E}$ localmente libero $\operatorname{rk}\mathcal{E} = 2$
  - $\gamma : \det \mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{S}^3\,\mathcal{E}$ mai nullo sulle fibre
- *Frecce.* $(\mathcal{E}, \gamma) \xrightarrow{\sigma} (\mathcal{E}', \gamma')$, $\sigma : \mathcal{E}' \xrightarrow{\simeq} \mathcal{E}$

$$\begin{tikzcd}
\det \mathcal{E}' \arrow[r, "\gamma'"] \arrow[d, "\det \sigma"'] & \mathrm{S}^3\,\mathcal{E}' \arrow[d, "\mathrm{S}^3\,\sigma"] \\
\det \mathcal{E} \arrow[r, "\gamma"'] & \mathrm{S}^3\,\mathcal{E}
\end{tikzcd}$$

Equivalenza per il grado 3

Sia Y uno schema noetheriano. Allora il funtore

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{PGor}_3(Y) & \xrightarrow{\Delta_3} & \mathrm{PGor}'_3(Y) \\ ((\mathcal{E},\underline{\mathcal{M}},\underline{\alpha},\gamma),\zeta) & \longrightarrow & (\mathcal{E},\gamma\circ\zeta^{-1}) \\ (\sigma,\tau) & \longrightarrow & \sigma \end{array}$$

è una equivalenza di categorie.

Struttura locale rivestimenti di Gorenstein di grado 3

$$\operatorname{Proj} B[X,Y]/(g) \longrightarrow \operatorname{Spec} B$$

- g omogeneo di grado 3
- i coefficienti di g generano B

Il grado $d = 4$: $\mathbf{PGor}_4(Y)$

- $\mathcal{E}$ localmente libero $\operatorname{rk}\mathcal{E} = 3$
- $\mathcal{F}$ localmente libero $\operatorname{rk}\mathcal{F} = 2$
- una successione su ogni fibra e globalmente esatta

$$0 \longrightarrow \pi^* \det \mathcal{E}(-4) \xrightarrow{\alpha_2} \pi^* \mathcal{F}(-2) \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$$

Il grado $d = 4$: $\mathbf{PGor}_4(Y)$

- $\mathcal{E}$ localmente libero $\operatorname{rk} \mathcal{E} = 3$
- $\mathcal{F}$ localmente libero $\operatorname{rk} \mathcal{F} = 2$
- una successione su ogni fibra e globalmente esatta

$$0 \longrightarrow \pi^* \det \mathcal{E}(-4) \xrightarrow{\alpha_2} \pi^* \mathcal{F}(-2) \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$$

Idea: Complesso di Koszul

$$0 \longrightarrow \pi^* \det \mathcal{F}(-4) \longrightarrow \pi^* \mathcal{F}(-2) \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$$

La categoria $\mathrm{PGor}'_4(Y)$

- *Oggetti.* $(\mathcal{E}, \mathcal{F}, \gamma, \zeta)$
  - $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ localmente liberi $\operatorname{rk}\mathcal{E} = 3$, $\operatorname{rk}\mathcal{F} = 2$
  - $\zeta : \det \mathcal{F} \xrightarrow{\simeq} \det \mathcal{E}$
  - $$\gamma : \mathcal{F} \longrightarrow \mathrm{S}^2\,\mathcal{E} \text{ equivalentemente } \alpha : \pi^*\mathcal{F}(-2) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$$
  - se $X \xrightarrow{i} \mathbb{P}(\mathcal{E})$ indotto da α,
    $$\dim X_y = 0 \quad \forall y \in Y$$
- *Frecce.* $(\sigma, \tau) : (\mathcal{E}, \mathcal{F}, \gamma, \zeta) \longrightarrow (\mathcal{E}', \mathcal{F}', \gamma', \zeta')$
  - isomorfismi $\sigma : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$, $\tau : \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F}$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}' \arrow[r, "\gamma'"] \arrow[d, "\tau"'] & \mathrm{S}^2\,\mathcal{E}' \arrow[d, "\mathrm{S}^2\,\sigma"] \\
\mathcal{F} \arrow[r, "\gamma"'] & \mathrm{S}^2\,\mathcal{E}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\det \mathcal{F}' \arrow[r, "\zeta'"] \arrow[d, "\det \tau"'] & \det \mathcal{E}' \arrow[d, "\det \sigma"] \\
\det \mathcal{F} \arrow[r, "\zeta"'] & \det \mathcal{E}
\end{tikzcd}$$

L'equivalenza per il grado 4

Sia Y uno schema noetheriano. Allora l'associazione

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{PGor}'_4(Y) & \xrightarrow{\Delta_4} & \mathrm{PGor}_4(Y) \\ (\mathcal{E},\mathcal{F},\gamma,\zeta,\alpha,\beta) & \longrightarrow & ((\mathcal{E},(\det\mathcal{F},\mathcal{F}),(\beta,\alpha)),\zeta) \\ (\sigma,\tau) & \longrightarrow & (\sigma,(\det\tau,\tau)) \end{array}$$

definisce un'equivalenza di categorie.

Struttura locale rivestimenti di Gorenstein di grado 4

$$\mathrm{Proj}\, B[X,Y,Z]/(f,g) \longrightarrow \mathrm{Spec}\, B$$

- f, g omogenei di grado 2
- $\forall q$ primo di B, f,g successione regolare in $k(q)[X,Y,Z]$