Rivestimenti di Gorenstein

Fabio Tonini

26/09/2008

Indice

Introduzione

L'obiettivo di questa tesi è stato riformulare, usando il linguaggio delle categorie, un risultato, ottenuto da G. Casnati e T. Ekedahl nell'articolo *Covers of algebraic varieties I. A general structure theorem, covers of degree 3,4 and Enriques surfaces*, riguardante la struttura dei rivestimenti di Gorenstein di schemi noetheriani integri, mostrando inoltre che lo stesso teorema di struttura continua a valere per schemi noetheriani qualsiasi.

In generale un rivestimento di grado d fra schemi è un morfismo affine $\rho : X \longrightarrow Y$ tale che $\rho_* \mathcal{O}_X$ sia localmente libero di rango d, mentre un rivestimento di Gorenstein è un rivestimento per cui ogni fibra sia uno schema di Gorenstein. Ricordiamo che un anello di Gorenstein è un anello A tale che, per ogni massimale m, A_m ha dimensione iniettiva finita, mentre uno schema è di Gorenstein se è localmente lo spettro di un anello di Gorenstein. Inoltre un'immersione chiusa $i : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_k$ si dice aritmeticamente di Gorenstein se l'anello delle coordinate omogenee associato è di Gorenstein. L'esempio più semplice di rivestimenti sono le k-algebre di dimensione d su un campo k e questo è anche il punto di partenza per la classificazione che viene esposta. Il risultato fondamentale è il seguente:

Sia $d \geqslant 3$, k un campo e $X \xrightarrow{i} \mathbb{P}^{d-2}_k$ un sottoschema chiuso. Allora X ha una risoluzione della forma

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{d-2}_k}(-d)^{\beta_{d-2}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{d-2}_k}(-d+2)^{\beta_{d-3}} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{d-2}_k}(-2)^{\beta_1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{d-2}_k}$$

con $\beta_{d-2} = 1$, $\beta_k = \frac{k(d-2-k)}{d-1}\binom{d}{k+1}$ per $k < d-2$, se e solo se $X \longrightarrow \operatorname{Spec} k$ è un rivestimento di Gorenstein di grado d ed i è non degenere ed aritmenticamente di Gorenstein.

Fissato uno schema noetheriano Y ed un intero $d \geqslant 3$, la generalizzazione di tale proprietà porta alla definizione della categoria, indicata con $\mathrm{PGor}_d(Y)$, così definita: gli oggetti sono n-uple $\chi = (\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha}, \zeta)$ dove $\mathcal{E}$ è un fascio localmente libero di rango $d-1$ su Y con fibrato proiettivo associato $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow Y$, $\underline{\mathcal{M}} = (\mathcal{M}_{d-2}, \dots, \mathcal{M}_1)$ sono fasci localmente liberi su Y con $\operatorname{rk} \mathcal{M}_k = \beta_k$, $\underline{\alpha} = (\alpha_{d-2}, \dots, \alpha_1)$ sono morfismi tali che la successione

$$\begin{gathered} 0 \longrightarrow \pi^*\mathcal{M}_{d-2}(-d) \xrightarrow{\alpha_{d-2}} \pi^*\mathcal{M}_{d-3}(-d+2) \xrightarrow{\alpha_{d-3}} \dots \\ \dots \xrightarrow{\alpha_2} \pi^*\mathcal{M}_1(-2) \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} \end{gathered} \tag{1}$$

sia esatta globalmente e su ogni fibra di π ed infine $\zeta : \mathcal{M}_{d-2} \longrightarrow \det \mathcal{E}$ sia un isomorfismo. Una freccia invece è data da un isomorfismo $\mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$ e un isomorfismo di risoluzioni compatibili con l'identificazione $\mathcal{M}_{d-2} \simeq \det \mathcal{E}$. Scopo dell'ultimo capitolo è mostrare che la categoria $\mathrm{PGor}_d(Y)$ è equivalente alla categoria dei rivestimenti di Gorenstein di Y di grado d e frecce isomorfismi. Da tale equivalenza segue in particolare che, dato un oggetto χ di $\mathrm{PGor}_d(Y)$, il fascio di ideali $\mathcal{I} = \mathrm{Im}\,\alpha_1$ ottenuto da (1) induce un immersione chiusa $i : X \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ su ogni fibra non degenere ed aritmenticamente di Gorenstein e $\rho = \pi \circ i : X \longrightarrow Y$ è un rivestimento di Gorenstein di grado d con un isomorfismo canonico $\mathcal{E} \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_Y(\mathrm{coker}\,\rho^{\#}, \mathcal{O}_Y)$. Viceversa dato un rivestimento di Gorenstein $\rho : X \longrightarrow Y$ di grado d e posto $\mathcal{E} = \underline{\mathrm{Hom}}_Y(\mathrm{coker}\,\rho^{\#}, \mathcal{O}_Y)$, esiste una suriezione naturale $\rho^*\mathcal{E} \longrightarrow \omega_\rho$ che induce un'immersione chiusa $i : X \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$, su ogni fibra non degenere ed aritmenticamente di Gorenstein, che fattorizza ρ ed è associata ad un oggetto di $\mathrm{PGor}_d(Y)$.

Nel caso $d = 3$ e $d = 4$ tale caratterizzazione può essere semplificata. Per $d = 3$ dare un oggetto di $\mathrm{PGor}_3(Y)$ equivale a dare $\mathcal{E}$ ed un morfismo $\det \mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{S}^3\,\mathcal{E}$ mai nullo sulle fibre. Nel caso $d = 4$ la successione (1) è isomorfa al complesso di Koszul di α_1 e dare un oggetto di $\mathrm{PGor}_4(Y)$ equivale a dare $\mathcal{E}$ (e quindi $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow Y$) ed un fascio $\mathcal{F}$ localmente libero di rango 2 su Y, insieme ad una identificazione $\det \mathcal{F} \simeq \det \mathcal{E}$ e ad un morfismo $\mathcal{F} \longrightarrow \mathrm{S}^2\,\mathcal{E}$ tale che la mappa indotta $\pi^*\mathcal{F}(-2) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$ definisca un sottoschema zerodimensionale su ogni fibra.

Per quanto riguarda i primi capitoli della tesi, essi danno un'introduzione ad alcuni argomenti necessari alla comprensione e alla dimostrazione del risultato finale.

Il primo capitolo tratta di rivestimenti di schemi in generale: dato uno schema Y viene mostrata un'equivalenza fra la categoria dei rivestimenti di Y di grado d e le $\mathcal{O}_Y$-algebre localmente libere di rango d, da cui in particolare viene dedotto, attraverso l'uso della traccia, un risultato classico riguardante la struttura dei rivestimenti di grado 2 di schemi Y tali che $1/2 \in \mathcal{O}_Y$.

Il secondo capitolo si occupa dello studio degli anelli noetheriani graduati in generale ed è sviluppato, in analogia con la teoria classica degli anelli, mediante l'introduzione dei cosidetti anelli graduati locali, ossia anelli graduati (R, m) in cui l'insieme degli ideali omogenei ammette un massimo m, detto massimale omogeneo.

Nel terzo capitolo vengono introdotti e studiati gli anelli di Gorenstein, con particolare attenzione al caso delle k-algebra di dimensione finita su un campo k ed al caso graduato. Vengono poi introdotti gli schemi di Gorenstein ed infine studiate particolari risoluzioni di sottoschemi chiusi di uno spazio proiettivo su un campo.

Nel quarto capitolo vengono definiti i fibrati proiettivi $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow Y$, dove Y è uno schema noetheriano e $\mathcal{E}$ è un fascio localmente libero di rango d, dandone una descrizione sia come schema che, usando il lemma di Yoneda, come funtore $\mathrm{Sch}_Y^{op} \longrightarrow (\mathrm{set})$. Nella parte finale vengono inoltre caratterizzate alcune classi di isomorfismi di tali schemi.

Il quinto capitolo da una breve introduzione alla teoria dei funtori derivati mediante i cosiddetti δ-funtori di una categoria abeliana. Vengono introdotti i principali funtori derivati quali la coomologia di fasci, i gruppi e fasci Ext e le immagini dirette superiori $\mathrm{R}^i\,f_*$. L'ultima sezione è invece dedicata all'esposizione della teoria della dualità relativa per fasci quasi-coerenti e alla sua applicazione alla teoria dei rivestimenti.

Il sesto capitolo, infine, contiene la classificazione dei rivestimenti di Gorenstein discussa all'inizio.

Notazioni e convenzioni

Dato uno schema X ed un $\mathcal{O}_X$-modulo $\mathcal{F}$ indicheremo il duale di $\mathcal{F}$ come

$$\mathcal{F}^\vee = \underline{\mathrm{Hom}}_X(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$$

$\mathrm{QCoh}(X)$, $\mathrm{Coh}(X)$ indicheranno rispettivamente le categorie dei fasci quasi coerenti e coerenti su X, $\mathrm{Mod}(X)$ quella degli $\mathcal{O}_X$-moduli ed infine Sch_X la categoria degli schemi su X.

Dato un morfismo di schemi $f : X \longrightarrow Y$, $f^\#$ indicherà la mappa $\mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$ indotta sui fasci. Inoltre, dato $y \in Y$, indichiamo $X_y = X \times_Y \operatorname{Spec} k(y)$ ed $f_y : X_y \longrightarrow \operatorname{Spec} k(y)$ in modo tale che il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
X_y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f_y"'] & X \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Spec} k(y) \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

sia cartesiano. Inoltre se $\mathcal{F}$ è un fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli su X, poniamo $\mathcal{F}_y = \alpha^*\mathcal{F}$.

Ogni anello considerato sarà supposto commutativo e con unità.

Capitolo 1

Rivestimenti di Schemi

In questo capitolo introdurremo il concetto di rivestimento di schemi e ne mostreremo le principali proprietà. In particolare mostreremo come caratterizzare questi morfismi attraverso la categoria delle $\mathcal{O}_Y$-algebre localmente libere di rango d e da questa dedurremo una caratterizzazione dei rivestimenti di grado 2.

1.1 Definizione e prime proprietà

Definizione 1.1. *Dati due schemi X, Y ed un intero $d \geqslant 0$, un rivestimento di grado d è un morfismo affine di schemi*

$$\rho : X \longrightarrow Y$$

tale che $\rho_* \mathcal{O}_X$ sia localmente libero di rango d.

Indichiamo con $\underline{\mathrm{Riv}}_d(Y)$ la categoria dei rivestimenti di grado d su Y, ovvero la sottocategoria piena di Sch_Y i cui oggetti sono rivestimenti di grado d. Indichiamo invece con $\mathrm{Riv}_d(Y)$ la sottocategoria di $\underline{\mathrm{Riv}}_d(Y)$ in cui come frecce si considerano solo isomorfismi.

Proposizione 1.2. *La proprietà di essere un rivestimento di grado d è stabile per cambiamento di base.*

Dimostrazione. Consideriamo un diagramma cartesiano

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\rho'"'] & X \arrow[d, "\rho"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

con $\rho : X \longrightarrow Y$ un rivestimento di grado d. Poichè la proprietà di essere affine è stabile per cambiamento di base, abbiamo che ρ' è affine. Inoltre poichè la proprietà di essere un rivestimento di grado d è locale in Y' possiamo supporre che tutti gli schemi considerati siano affini. In tal caso risulta evidente che $\rho'_* \mathcal{O}_{X'} \simeq \rho'_* \alpha^* \mathcal{O}_X \simeq g^* \rho_* \mathcal{O}_X$. □

Osservazione. Non che sia molto interessante, ma la definizione di rivestimento di grado d ha senso anche nel caso $d = 0$ ed in particolare abbiamo che $\mathrm{Riv}_0(Y) = \underline{\mathrm{Riv}}_0(Y) = \{\emptyset\}$. Infatti, se R è un anello allora $0 = R^0$, e quindi se ρ è un rivestimento di grado 0, abbiamo che $\rho_*\mathcal{O}_X = 0$ ed in particolare $\mathcal{O}_X(X) = 0$. Ma l'unico fascio di anelli che ha le sezioni globali nulle è il fascio nullo, quindi $\mathcal{O}_X = 0$ e $X = \emptyset$. Viceversa $\emptyset$ è un oggetto iniziale nella categoria degli schemi ed è affine. Nel seguito supporremo sempre che $d > 0$.

Proposizione 1.3. *Sia $\rho : X \longrightarrow Y$ un rivestimento di grado d. Allora*

1. *ρ è piatto e finito. In particolare, essendo i morfismi finiti propri, avremo che se Y è noetheriano separato, tale sarà anche X.*
2. *per ogni $y \in Y$, $X_y \simeq \operatorname{Spec} A$, con A una $k(y)$ algebra di dimensione d su $k(y)$. In particolare ρ è surgettivo*
3. *esiste una succesione esatta*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y \xrightarrow{\rho^\#} \rho_*\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0 \tag{1.1}$$

con $\mathcal{G}$ localmente libero di rango $d-1$.

Dimostrazione. 1) Entrambe le condizioni sono locali, quindi possiamo assumere che $Y \simeq \operatorname{Spec} B$ e che $\rho_*\mathcal{O}_X$ sia libero. Essendo ρ affine, avremo che $X \simeq \operatorname{Spec} A$. Ma $\rho_*\mathcal{O}_X \simeq \widetilde{A}$ considerando A come B-modulo, quindi A è un B-modulo libero di rango d.

2) Per 1.2 $X_y \longrightarrow \operatorname{Spec} k(y)$ è un rivestimento di grado d. Quindi $X_y \simeq \operatorname{Spec} A$ ed A è un $K(y)$ modulo di rango d.

3) Abbiamo una succesione esatta

$$\mathcal{O}_Y \xrightarrow{\rho^\#} \rho_*\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

per verificare che $\mathcal{G}$ è localmente libero e che la mappa a sinistra è iniettiva, possiamo passare agli anelli locali. Prendiamo quindi $q \in Y$, poniamo $R = \mathcal{O}_{Y,q}$ ed indichiamo con P il massimale. Dato che ρ è affine, $A = (\rho_*\mathcal{O}_X)_q$ è sia una R-algebra che un R-modulo libero di rango finito. Per ottenere quanto vogliamo è sufficiente far vedere che $1 \in A$ può essere completato ad una R-base di A. Infatti in tal caso l'indipendenza di 1 su R equivale all'iniettività della prima mappa, mentre l'esistenza di un supplementare per 1 garantisce che $\mathcal{G}_q$ sia libero di rango $d-1$. Consideriamo quindi una R-base di A $\mu_1, \dots, \mu_d$. Allora esistono coefficienti $r_1, \dots, r_d \in R$ tali che

$$1 = r_1\mu_1 + \cdots + r_d\mu_d$$

Se tutti gli r_i appartenessero a P si otterrebbe l'assurdo $1 \in PA$, quindi, a meno di riordinare, abbiamo che r_1 è invertibile. Ma allora la matrice di cambiamento di 'base' fra $1, \mu_2, \dots, \mu_d$ e $\mu_1, \dots, \mu_d$ è invertibile, da cui la tesi.

□

Proposizione 1.4. *I rivestimenti di grado 1 sono gli isomorfismi.*

Dimostrazione. Sia $\rho : X \longrightarrow Y$ un rivestimento di grado 1. Poichè ρ è affine, possiamo supporre che $X \simeq \operatorname{Spec} A$ e $Y \simeq \operatorname{Spec} B$, ma in tal caso la successione esatta 1.1 in 1.3 ci dice esattamente che ρ è indotto da un isomorfismo $B \simeq A$. □

Lemma 1.5. *Sia Y uno schema, $\rho : X \longrightarrow Y$ un rivestimento di grado d e $\mathscr{N}$ un $\mathcal{O}_X$-modulo localmente libero di rango finito. Allora $\rho_*\mathscr{N}$ è localmente libero.*

Dimostrazione. Possiamo ricondurci al caso $Y \simeq \operatorname{Spec} B$, con (B, q) anello locale. Allora $X \simeq \operatorname{Spec} A$, con A una B-algebra di rango d e $\mathscr{N} \simeq \widetilde{M}$, dove M è un A-modulo localmente libero. Dato che X è piatto su Y avremo che $\mathscr{N}$ è piatto su Y e quindi M è un B-modulo piatto. Ma B è locale e M, essendo un A-modulo finitamente generato, è un B-modulo finitamente generato. Possiamo concludere che M è libero, ossia che $\rho_*\mathscr{N}$ è libero. □

1.2 Rivestimenti e fasci di algebre

Vogliamo mostrare un risultato classico di equivalenza fra i morfismi affini su uno schema Y e le $\mathcal{O}_Y$-algebre. Iniziamo enunciando un teorema di incollamento di schemi.

Proposizione 1.6. *Sia I un insieme di indici parzialmente ordinato, $F : I \longrightarrow \mathrm{Sch}_Y$ un funtore tale che, $\forall\ i < j \in I$, il morfismo $F(i) \longrightarrow F(j)$ sia una immersione aperta. Supponiamo inoltre che valga la seguente proprietà: fissato k e pensando ogni $F(i)$, con $i < k$, come un aperto di $F(k)$, richiediamo che $\forall i, j, k$, con $i, j \leqslant k$, l'insieme $\{F(t)\}_{t \leqslant i,j}$ sia un ricoprimento aperto di $F(i) \cap F(j)$.*

Allora esiste un limite diretto X per F, ossia uno schema X su Y e, per ogni i, morfismi $F(i) \xrightarrow{\sigma_i} X$ compatibili. Inoltre ogni σ_i è una immersione aperta.

Definizione 1.7. *Sia Y uno schema. Definiamo $\mathrm{Aff}(Y)$ come la sottocategoria piena di Sch_Y i cui oggetti sono morfismi affini*

Definizione 1.8. *Sia Y uno schema. Definiamo la categoria delle $\mathcal{O}_Y$-algebre quasi-coerenti, che indicheremo come $\mathrm{Alg}(Y)$, come segue. Un oggetto di $\mathrm{Alg}(Y)$ è una $\mathcal{O}_Y$-algebra quasi-coerente, ossia una coppia $(\mathscr{A}, f)$ dove $\mathscr{A}$ è un fascio di anelli su Y ed $f : \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathscr{A}$ è un morfismo di fasci di anelli tale che $\mathscr{A}$ tramite f sia un $\mathcal{O}_Y$-modulo quasi-coerente. Una freccia $(\mathscr{A}, f) \xrightarrow{h} (\mathscr{B}, g)$ è un morfismo di fasci di anelli $\mathscr{A} \xrightarrow{h} \mathscr{B}$ tale che $g = h \circ f$.*

Proposizione 1.9. *Sia Y uno schema ed $\mathscr{A}$ una $\mathcal{O}_Y$-algebra quasi-coerente. Allora, a meno di isomorfismo, esiste un'unica coppia (X, f) in Sch_Y tale che:*

- *per ogni aperto affine V di Y esiste un isomorfismo $f^{-1}(V) \xrightarrow{\sigma_V} \operatorname{Spec} \mathscr{A}(V)$*
- *un'inclusione $V \hookrightarrow U$ di aperti affini di Y induce un diagramma commutativo*

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma(X, f^{-1}(U)) & \xrightarrow{\sigma_{U,f^{-1}(U)}} & \mathscr{A}(U) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\Gamma(X, f^{-1}(V)) & \xrightarrow{\sigma_{V,f^{-1}(V)}} & \mathscr{A}(V)
\end{array}$$

Lo schema X ottenuto in questo modo viene chiamato spettro di $\mathscr{A}$ ed indicato con $\operatorname{Spec}\mathscr{A}$*. Inoltre se* $\mathscr{A} \xrightarrow{h} \mathscr{B}$ *è un morfismo di $\mathcal{O}_Y$-algebre,* $(\operatorname{Spec}\mathscr{A}, f)$ *e* $(\operatorname{Spec}\mathscr{B}, g)$ *gli spettri rispettivamente di $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$, esiste un'unico morfismo di schemi su Y* $\operatorname{Spec}\mathscr{B} \xrightarrow{\operatorname{Spec} h} \operatorname{Spec}\mathscr{A}$ *tale che, per ogni aperto affine U di Y, il diagramma*

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(\operatorname{Spec}\mathscr{B}, g^{-1}(U)) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(\operatorname{Spec}\mathscr{A}, f^{-1}(U)) \arrow[d] \\
\mathscr{B}(U) \arrow[r] & \mathscr{A}(U)
\end{tikzcd}$$

sia commutativo. In particolare Spec definisce un funtore controvariante da $\operatorname{Alg}(Y)$ *a* Sch_Y*.*

Dimostrazione. Unicità Se (X, f), (X', f') soddisfano le richieste e σ_V,σ'_V sono (rispettivamente) gli isomorfismi associati, allora $(\sigma_V)^{-1} \circ \sigma'_V$, al variare di V aperto affine di Y, sono degli isomorfismi da $f'^{-1}(V)$ a $f^{-1}(V)$ compatibili con le restrizioni grazie al diagramma commutativo e che quindi si incollano a formare un isomorfismo globale su Y.

Esistenza Consideriamo Φ l'insieme degli aperti affini di Y. Data $U \in \Phi$ abbiamo che

$$\mathcal{O}_Y(U) \longrightarrow \mathscr{A}(U) \implies \operatorname{Spec}\mathscr{A}(U) \xrightarrow{f_U} U$$

Inoltre un'inclusione $V \hookrightarrow U$ in Φ da luogo ad un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec}\mathscr{A}(V) \arrow[r, "f_V"] \arrow[d] & V \arrow[d, "i"] \\
\operatorname{Spec}\mathscr{A}(U) \arrow[r, "f_U"] & U
\end{tikzcd}$$

Mostriamo che questo è un diagramma cartesiano. Infatti, dato che i^* corrisponde alla restrizione di fasci sull'aperto V, avremo che $\mathscr{A}(V) \simeq \mathscr{A}(U) \otimes_{\mathcal{O}_Y(U)} \mathcal{O}_Y(V)$. In particolare la freccia verticale sulla sinistra è un'immersione aperta e la sua immagine è $f_U^{-1}(V)$. Possiamo quindi applicare il lemma 1.6 al funtore $\operatorname{Spec} \circ \mathscr{A} : \Phi \longrightarrow \operatorname{Sch}$. Otteniamo dunque uno schema X con immersioni aperte (compatibili) $\tau_V : \operatorname{Spec}\mathscr{A}(V) \longrightarrow X$ e, incollando le f_V, un morfismo di schemi $X \xrightarrow{f} Y$. Per costruzione $\tau_V : \operatorname{Spec}\mathscr{A}(V) \xrightarrow{\simeq} f^{-1}(V)$ ed è facile verificare che le $\sigma_V = (\tau_V)^{-1}$ soddisfano le richieste.

Le ultime affermazioni seguono dal fatto che le mappe definite localmente sono compatibili e quindi si estendono ad un morfismo globale di schemi su Y. □

Teorema 1.10. *Sia Y uno schema. Il funtore Spec definisce una equivalenza di categorie fra* $\operatorname{Alg}(Y)^{op}$ *ed* $\operatorname{Aff}(Y)$*. Un inverso di Spec è dato dal funtore*

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Aff}(Y)^{op} \arrow[r, "\Lambda"] & \mathrm{Alg}(Y) \\
(X, f) \arrow[r] & f_*\mathcal{O}_X
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & X' \arrow[dl, "f'"'] \arrow[dd, "h"] & & \\
Y & & \arrow[r] & f_*h^{\#} \\
 & X \arrow[ul, "f"] & &
\end{tikzcd}
$$

Dimostrazione. $\mathrm{Spec} \circ \Lambda \simeq \mathrm{id}$. Sia $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo affine. Se U è un aperto affine di Y avremo che $f^{-1}(U) \simeq \mathrm{Spec}\, f_*\mathcal{O}_X(U)$ ed è quindi chiaro che $X \simeq \mathrm{Spec}\, f_*\mathcal{O}_X$.

$\Lambda \circ \mathrm{Spec} \simeq \mathrm{id}$. Se $\mathscr{A}$ è una $\mathcal{O}_Y$-algebra e $(\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}, f)$ è il suo spettro, abbiamo che

$$f_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}}(U) = \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}}(f^{-1}(U)) \simeq \mathscr{A}(U)$$

per ogni aperto affine U di Y. □

Corollario 1.11. *Sia Y uno schema. Allora $\underline{\mathrm{Riv}}_d(Y)$ è equivalente alla sottocategoria piena di $\mathrm{Alg}(Y)$ delle $\mathcal{O}_Y$-algebre che siano $\mathcal{O}_Y$-moduli localmente liberi di rango d.*

1.3 Classificazione dei rivestimenti di grado 2 mediante la traccia

Proposizione 1.12. *Sia Y uno schema ed $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_Y$-modulo localmente libero di rango finito. Allora il diagramma*

$$
\begin{tikzcd}
\phi \otimes m \arrow[rrr] \arrow[dd] & & & (n \longrightarrow \phi(n)m) \\
 & \underline{\mathrm{Hom}}_Y(\mathcal{F}, \mathcal{O}_Y) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{F} \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[d] & & \underline{\mathrm{End}}_Y(\mathcal{F}) \arrow[dll, "\mathrm{tr}_{\mathcal{F}/Y}"] \\
\phi(m) & \mathcal{O}_Y & &
\end{tikzcd}
$$

dove le mappe sono definite localmente su ogni aperto affine, è ben posto. Risulta quindi definito un morfismo di $\mathcal{O}_Y$-moduli $\mathrm{tr}_{\mathcal{F}/Y} : \underline{\mathrm{End}}_Y(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{O}_Y$. Tale morfismo, su ogni aperto affine di Y su cui $\mathcal{F}$ è libero, coincide con la traccia usuale.

Dimostrazione. Ogni affermazione può essere verificata localmente, quindi possiamo assumere che $Y \simeq \mathrm{Spec}\, B$ ed $\mathcal{F} \simeq \widetilde{M}$, con M libero di rango n. Consideriamo una B-base $m_1, \dots, m_n$ di M e $\nu_1, \dots, \nu_n$ la sua base duale. In tal modo $\mathrm{End}_B(M, M)$ sono le matrici $n \times n$ a coefficienti in B. Allora il morfismo orizzontale manda $\nu_i \otimes m_j$ in $E_{i,j}$, la matrice con tutti 0 tranne un 1 in posizione i, j, e quindi è un isomorfismo, poichè trasforma una base in partenza in una base in arrivo. Infine, il morfismo $\mathrm{tr}_{\mathcal{F}/Y}$, manda l'elemnto $E_{i,j}$ in $\nu_i(m_j) = \delta_{i,j}$ e quindi coincide con la traccia usuale sulle matrici. □

Definizione 1.13. *Sia Y uno schema ed $\mathscr{A}$ una $\mathcal{O}_Y$-algebra localmente libera di rango finito. Definiamo la traccia di $\mathscr{A}$ su Y, che indicheremo sempre come $\mathrm{tr}_{\mathscr{A}/Y}$, come il morfismo ottenuto dalla composizione*

$$\mathscr{A} \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}_Y(\mathscr{A}) \xrightarrow{\mathrm{tr}_{\mathscr{A}/Y}} \mathcal{O}_Y$$

dove la prima mappa è quella indotta dalla moltiplicazione su $\mathscr{A}$

Proposizione 1.14. *Sia Y uno schema ed $\mathscr{A}$ una $\mathcal{O}_Y$-algebra localmente libera di rango d. Allora*

1. *La composizione*

$$\mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathscr{A} \xrightarrow{\mathrm{tr}_{\mathscr{A}/Y}} \mathcal{O}_Y$$

   coincide con la moltiplicazione per d.

2. *Se $\frac{1}{d} \in \mathcal{O}_Y$ allora si ha una decomposizione*

$$\mathscr{A} \simeq \mathcal{O}_Y \oplus \ker \mathrm{tr}_{\mathscr{A}/Y}$$

Dimostrazione. 1) Segue dal fatto che, localmente, ogni elemento di $x \in \mathcal{O}_Y$ corrisponde in $\underline{\mathrm{End}}_Y(\mathscr{A})$ alla matrice xI_d, che ha traccia dx.

2) Dal punto 1) abbiamo che il morfismo di struttura $\mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathscr{A}$ è uno spezzamento di $\frac{1}{d}\,\mathrm{tr}_{\mathscr{A}/Y}$ e quindi la decompozione segue dall'analoga proprietà dei moduli. $\square$

Proposizione 1.15. *Sia Y uno schema tale che $\frac{1}{2} \in \mathcal{O}_Y$ ed $\mathscr{A}$ una $\mathcal{O}_Y$-algebra localmente libera di rango 2. Indichiamo con $m_{\mathscr{A}} : \mathscr{A} \otimes \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$ la moltiplicazione in $\mathscr{A}$. Allora*

$$m_{\mathscr{A}}(\ker \mathrm{tr}_{\mathscr{A}/Y} \otimes \ker \mathrm{tr}_{\mathscr{A}/Y}) \subseteq \mathcal{O}_Y$$

Dimostrazione. La questione è locale, quindi possiamo assumere che $Y \simeq \mathrm{Spec}\, B$ e che $\mathscr{A} \simeq \tilde{A}$, con A una B algebra libera di rango 2 su B. Attraverso $m_{\mathscr{A}}$ possiamo assumere che A sia un'algebra di matrici e che quindi la traccia sia quella usuale. Possiamo inoltre supporre che $\ker \mathrm{tr}_{\mathscr{A}/Y}$ sia libero, ossia sia generato da un elemento C. La tesi, in tal caso, segue dal fatto che il quadrato di una matrice a traccia nulla è un multiplo dell'identità. $\square$

Teorema 1.16. *Sia Y uno schema tale che $\frac{1}{2} \in \mathcal{O}_Y$. Consideriamo la categoria $\mathscr{C}$ così definita.*

- *Gli oggetti di $\mathscr{C}$ sono coppie $(\mathcal{L}, m)$ dove $\mathcal{L}$ è un fascio invertibile su Y e $m : \mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{O}_Y$ un morfismo di $\mathcal{O}_Y$-moduli.*
- *Una freccia σ in $\mathscr{C}$ fra $(\mathcal{L}, m)$ e $(\mathcal{L}', m')$ è un isomorfismo $\mathcal{L} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{L}'$ tale che $m = m' \circ \sigma \otimes \sigma$.*

Dato un rivestimento $X \xrightarrow{\rho} Y$ di grado 2 su Y poniamo $\mathcal{L}_\rho = \ker \mathrm{tr}_{\rho_*\mathcal{O}_X/Y}$ ed indichiamo con m_ρ la moltiplicazione $\rho_*\mathcal{O}_X \otimes \rho_*\mathcal{O}_X \longrightarrow \rho_*\mathcal{O}_X$. Allora il funtore

$$\mathrm{Riv}_2(Y)^{op} \longrightarrow \mathscr{C}$$

$$\rho \longrightarrow (\mathcal{L}_\rho, m_{\rho|\mathcal{L}_\rho^{\otimes 2}})$$

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "\rho'"'] \arrow[d, "h"] & & \\ Y & & \arrow[r] & \rho_* h^{\#}{}_{|\mathcal{L}_\rho} \\ & X \arrow[ul, "\rho"] & & \end{tikzcd}$$

è ben posto ed è una equivalenza di categorie.

Dimostrazione. Indichiamo con $\mathrm{Alg}_2(Y)$ la sottocategoria di $\mathrm{Alg}(Y)$ delle $\mathcal{O}_Y$-algebre localmente libere di rango 2 in cui le frecce siano solo gli isomorfismi. Data l'equivalenza ottenuta in 1.11 possiamo ricondurci alla categoria $\mathrm{Alg}_2(Y)$ e considerare il problema equivalente. Indichiamo con $m_{\mathscr{A}}$ la moltiplicazione $\mathscr{A} \otimes \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$ e $\mathcal{L}_{\mathscr{A}} = \ker \mathrm{tr}_{\mathscr{A}/Y}$. Iniziamo col mostrare che è ben posto. Grazie a 1.15 l'associazione relativa agli oggetti è ben posta. Per quanto riguarda le frecce, se $\mathscr{A} \xrightarrow{h} \mathscr{B}$ è un isomorfismo di algebre una verifica diretta mostra che h si restringe a formare un isomorfismo fra $\mathcal{L}_{\mathscr{A}}$ e $\mathcal{L}_{\mathscr{B}}$, ovviamente compatibile con $m_{\mathscr{A}}$ e $m_{\mathscr{B}}$, essendo h anche un morfismo di fasci di anelli. Passiamo quindi a considerare l'equivalenza: costruiamo una inversa.

Sia $(\mathcal{L}, m)$ un oggetto di $\mathscr{C}$ e poniamo $\mathscr{A}(\mathcal{L}) = \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{L}$. Vogliamo definire su di esso una struttura di $\mathcal{O}_Y$-algebra. Definiamo la moltiplicazione $\mathscr{A}(\mathcal{L}) \otimes \mathscr{A}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathscr{A}(\mathcal{L})$ sugli addendi di $\mathscr{A}(\mathcal{L})$, secondo le seguenti regole

$$\mathcal{O}_Y \otimes \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_Y \qquad \textit{moltiplicazione}$$

$$\mathcal{O}_Y \otimes \mathcal{L}, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{L} \qquad \textit{moltiplicazione}$$

$$\mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \xrightarrow{m} \mathcal{O}_Y$$

Una verifica diretta mostra che effettivamente la mappa appena definita dà una struttura di fascio di anelli su $\mathscr{A}(\mathcal{L})$ e che l'inclusione $\mathcal{O}_Y \subseteq \mathscr{A}(\mathcal{L})$ è un omomorfismo di fasci di anelli. Abbiamo quindi associato ad ogni oggetto $(\mathcal{L}, m)$ di $\mathscr{C}$ una $\mathcal{O}_Y$-algebra $\mathscr{A}(\mathcal{L})$, che per costruzione è localmente libera di rango 2. Adesso, dato una freccia σ in $\mathscr{C}$ fra $(\mathcal{L}, m)$ e $(\mathcal{L}', m')$, poniamo $\mathscr{A}(\sigma) = id \oplus \sigma : \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{L} = \mathscr{A}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathscr{A}(\mathcal{L}') = \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{L}'$. Questo sarà un isomorfismo di $\mathcal{O}_Y$-algebre. Abbiamo quindi costruito un funtore

$$\mathscr{C} \xrightarrow{\mathscr{A}(-)} \mathrm{Alg}_2(Y)$$

Verifichiamo che è un inversa del funtore definito nell'enunciato, che indichiamo con F.

$\mathscr{A}(-) \circ F \simeq \mathrm{id}$. Se consideriamo un algebra $\mathscr{A}$, allora abbiamo in modo naturale una decomposizione $\mathscr{A} \simeq \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{L}_{\mathscr{A}}$ e, per definizione di F, tale decomposizione coincide con $\mathscr{A}(\mathcal{L}_{\mathscr{A}})$

$F \circ \mathscr{A}(-) \simeq \mathrm{id}$. Dato un oggetto $(\mathcal{L}, m)$ di $\mathscr{C}$, è sufficiente verificare che $\mathcal{L}_{\mathscr{A}(\mathcal{L})} = \mathcal{L}$. Dato che la questione è locale, possiamo supporre Y affine ed L libero, generato da una sezione globale ζ. In tal caso $1, \zeta$ è una base di $\mathscr{A}(\mathcal{L})$ tale che $\zeta^2 \in \mathcal{O}_Y$. Secondo tale base la moltiplicazione per ζ corrisponde alla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \zeta^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi tr $\zeta = 0$. D'altra parte ovviamente tr $1 = 2$. In definitiva, per un generico elemento di $\mathscr{A}(\mathcal{L})$, che può essere scritto nella forma $a + b\zeta$, con $a, b \in \mathcal{O}_Y$, abbiamo che

$$0 = \mathrm{tr}(a + b\zeta) = 2a \iff a = 0$$

che è quanto voluto. □

Osservazione 1.17. Nell'enunciato precente si potrebbe sperare che l'ipotesi di essere isomorfismi sulle frecce sia su $\mathrm{Riv}_2(Y)$ che su $\mathscr{C}$ sia superflua e che si possano considerare morfismi 'qualunque'. In realtà questo non può essere fatto, almeno non nel modo esposto, ossia limitandosi a considerare morfismi $\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}'$, perchè in generale il nucleo della traccia non viene fissato, come mostra il seguente esempio.

Sia B un anello e poniamo $A = B[x]/(x^2 - 1)$. A è una B-algebra di rango 2 in cui una B-base è data $1, x$. Un conto diretto, del tutto analogo a quello fatto nella dimostrazione del teorema precedente, mostra che $\ker \mathrm{tr} = (x)$. Ma possiamo definire un endomorfismo di B-algebre ϕ che manda x in 1. In tal caso $\phi(\ker \mathrm{tr}) = B \nsubseteq \ker \mathrm{tr}$.

.

Capitolo 2

Anelli graduati

In questo capitolo studieremo gli anelli graduati in generale, mostrando come sia possibile ricondurre molte proprietà 'classiche' della teoria degli anelli al solo studio degli ideali omogenei. In analogia con la teoria degli anelli, introdurremo gli anelli graduati locali, mostrando la stretta connessione esistente fra questa classe di anelli e gli anelli locali. Concluderemo il capitolo con lo studio degli anelli delle coordinate omogenee dei sottochemi chiusi degli spazi proiettivi.

2.1 Definizioni e prime proprietà

Definizione 2.1. *Un anello graduato R è un anello insieme ad una decomposizione come $\mathbb{Z}$-modulo*

$$R = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R_i$$

per cui $R_i R_j \subseteq R_{i+j}$ per ogni $i, j \in \mathbb{Z}$.

Un R-modulo graduato è un R-modulo M insieme ad una decomposizione come $\mathbb{Z}$-modulo $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ tale che $R_i M_j \subseteq M_{i+j}$ per ogni $i, j \in \mathbb{Z}$. Un morfismo fra due R-moduli graduati M, N è un omomorfismo graduato $f : M \longrightarrow N$. Indicheremo con $\operatorname{Grad} R$ la categoria dei moduli graduati di R.

Diremo che un anello (modulo) è positivamente graduato se le componenti di grado negativo sono nulle. In particolare se R è un anello positivamente graduato indicheremo con R_+ l'ideale $\bigoplus_{i>0} R_i$.

Osserviamo che se R è un anello graduato, allora R_0 è un anello ed R è una R_0 algebra. La seguente proposizione caratterizza gli anelli graduati noetheriani.

Proposizione 2.2 ([4],proposizione 1.5.4 e teorema 1.5.5)**.** *Sia R un anello graduato. Se R è positivamente graduato e $x_1, \ldots, x_n$ sono elementi omogenei di R di grado positivo, allora sono equivalenti*

1. $R_+ = (x_1, \ldots, x_n)_R$
2. $R = R_0[x_1, \ldots, x_n]$

Se R è un anello graduato qualsiasi allora sono equivalenti

1. *R è un anello noetheriano*

2. *Ogni ideale omogeneo di R è finitamente generato*

3. *R_0 è noetheriano ed R è una R_0 algebra finitamente generata*

4. *R_0 è noetheriano e le R_0 algebre $\bigoplus_{i\geqslant 0} R_i$, $\bigoplus_{i\leqslant 0} R_i$ sono finitamente generate*

Definizione 2.3. *Sia R un anello positivamente graduato. Diremo che R è generato in grado 1 se R è generato da R_1 come R_0 algebra.*

Definizione 2.4. *Sia R un anello graduato ed I un ideale di R. Indichiamo con I^* l'ideale generato dagli elementi omogenei di I.*

Osservazione. Se p è un primo di R, allora p^* è ancora primo. Infatti, se a, b sono elementi omogenei di R avremo che

$$ab \in p^* \implies a \in p \text{ o } b \in p \implies a \in p^* \text{ o } b \in p^*$$

Dato che p^* è omogeneo, questo è sufficiente per provarne la primalità.

Lemma 2.5. *Sia R un anello graduato tale che ogni elemento omogeneo non nullo di R sia invertibile. Allora R_0 è un campo ed una sola delle seguenti possibilità si verifica*

- *$R_0 = R$ è un campo*
- *esiste $x \in R$ omogeneo e trascendente su R_0 tale che $R = R_0[x, x^{-1}]$.*

Dimostrazione. Ogni elemento non nullo di R_0 è omogeneo e, per ipotesi, invertibile, dunque $R_0 = k$ è un campo. Supponiamo che $k \neq R$. Allora esiste un elemento omogeneo non nullo x di R di grado positivo minimo. In particolare x è invertibile e possiamo definire un omomorfismo di k-algebre

$$k[X, X^{-1}] \xrightarrow{\sigma} R$$

che manda X in x. Se su $k[X, X^{-1}]$ diamo la graduazione indotta da $\deg X = \deg x$, σ diventa un morfismo graduato. Se mostriamo che σ è un isomorfismo abbiamo finito.

iniettività Se $p = \sum_j a_j X^j \in \ker \sigma$, con $a_j \in k$, allora $\sigma(p) = \sum_j a_j x^j = 0$. Ma questa è una somma di elementi omogenei di gradi distinti, dato che $\deg x \neq 0$, e quindi per ogni j otteniamo $a_j x^j = 0$. Quindi $a_j = 0$ per ogni j, dato che altrimenti troveremmo l'assurdo che $x^j = 0$, con x invertibile.

surgettività È sufficiente mostrare che ogni elemento omogeneo $y \in R$ sia nell'immagine di σ. Ovviamente possiamo supporre che $\deg y \neq 0$. Esistono interi q, r tali che $\deg y = q \deg x + r$, con $0 \leqslant r < \deg x$. Quindi $z = yx^{-q}$ è un elemento omogeneo di grado non negativo r e per la minimalità di $\deg y$ otteniamo che $r = 0$, ossia $z \in k$ e $\sigma(zX^q) = y$. □

2.2 Profondità e altezza

Introduciamo il concetto di profondità per anelli, esponendo alcuni dei risultati principali di questa teoria.

Definizione 2.6 (complesso di Koszul)**.** *Sia R un anello ed N un R-modulo. Dato $x \in N$ si definisce il complesso di Koszul di x come*

$$K(x) : 0 \longrightarrow R \longrightarrow N \longrightarrow \Lambda^2 N \longrightarrow \dots \longrightarrow \Lambda^i N \xrightarrow{d_i} \Lambda^{i+1} N \longrightarrow \dots$$

dove il differenziale è dato da $d_i(y) = x \wedge y$.

Dato $\phi : N \longrightarrow R$ si definisce il complesso di Koszul di f come

$$k(\phi) : \dots \longrightarrow \Lambda^i N \xrightarrow{\delta_i} \Lambda^{i-1} N \longrightarrow \dots \longrightarrow \Lambda^2 N \longrightarrow N \xrightarrow{f} R$$

dove il differenziale è definito come

$$\delta_{i+1}(x_1 \wedge \dots \wedge x_i) = \sum_{j=1}^{i} (-1)^{j-1} \phi(x_j) x_1 \wedge \dots \wedge \hat{x}_j \wedge \dots \wedge x_i$$

Data una successione $x_1, \dots, x_n \in R$ si indica con $K(x_1, \dots, x_n) = K(\underline{x})$ il complesso di Koszul associato a $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ e con $K(x_1^*, \dots, x_n^*) = K(\underline{x}^*)$ il complesso di Koszul del morfismo $\phi : R^n \longrightarrow R$ tale che $\phi(e_i) = x_i$.

Proposizione 2.7 ([5], proposizioni 17.14 e 17.15)**.** *Sia R un anello e $x \in R^n$. Allora $K(x), K(x^*)$ sono complessi di lunghezza finita ed esistono isomorfismi di complessi*

$$K(x) \simeq \mathrm{Hom}_R(K(x), R) \simeq K(x^*)$$

Se $x = (x_1, \dots, x_n)$ ed I è l'ideale generato da $x_1, \dots, x_n$ allora I annulla l'omologia $\mathrm{H}(K(X))$.

Definizione 2.8. *Sia R un anello ed M un R-modulo. Una successione $x_1, \dots, x_n$ è detta una una successione regolare per M (o una M-successione regolare) se*

- $(x_1, \dots, x_n)M \neq M$
- *per ogni i, x_{i+1} è un non divisore dello zero in $M/(x_1, \dots, x_i)M$*

Teorema 2.9 ([5], teorema 17.4)**.** *Sia R un anello noetheriano, M un R-modulo finitamente generato ed $I = (x_1, \dots, x_n)$ un ideale di R. Se*

$$\mathrm{H}^j(M \otimes_R K(x_1, \dots, x_n)) = 0 \text{ per } j < r \tag{2.1}$$

$$\mathrm{H}^j(M \otimes_R K(x_1, \dots, x_n)) \neq 0 \text{ per } j = r \tag{2.2}$$

allora ogni M-successione regolare massimale in I ha lunghezza r.

Definizione 2.10 (profondità)**.** *Sia R un anello noetheriano, M un R-modulo finitamente generato ed I un ideale di R. Se $IM \neq M$ ed r è la lunghezza comune di ogni M-successione regolare massimale in I definiamo* $\mathrm{depth}(I, M) = r$*, altrimenti poniamo* $\mathrm{depth}(I, M) = \infty$.

Se (R, m) è un anello locale poniamo $\mathrm{depth}\, M = \mathrm{depth}(m, M)$*. Infine, se J è un ideale di R, poniamo* $\mathrm{depth}\, J = \mathrm{depth}(J, R)$

Definizione 2.11 (altezza)**.** *Sia R un anello. Se p è un primo di R definiamo l'altezza di p, indicata* $\mathrm{ht}\, p$*, come il* sup *degli $n \in \mathbb{N}$ per cui esiste una successione di primi*

$$p_0 \subsetneq \dots \subsetneq p_n = p$$

Se I è un ideale di R si definisce l'altezza di I, indicata $\mathrm{ht}\, I$*, come il minimo delle altezze dei primi (minimali) che contengono I.*

Definizione 2.12 (Dimensione di Krull)**.** *Se R è un anello si definisce la dimensione di Krull di R, indicata con* $\dim R$*, come il* $\sup$ *delle altezze dei primi di R, mentre se M è un R-modulo si pone* $\dim M = \dim R / \operatorname{Ann} M$.

Esiste un'altra, molto importante, caratterizzazione della profondità.

Teorema 2.13 ([5]. proposizione 18.4)**.** *Sia R un anello noetheriano ed M e N R-moduli finitamente generati. Allora*

$$\operatorname{depth}(\operatorname{Ann} M, N) = \inf\{i \mid \operatorname{Ext}^i(M, N) \neq 0\}$$

In particolare se (R, m, k) è locale ed N è un R-modulo finitamente generato allora

$$\operatorname{depth} N = \inf\{i \mid \operatorname{Ext}^i(k, N) \neq 0\}$$

Proposizione 2.14. *Sia R un anello noetheriano, M un R-modulo finitamente generato ed I un ideale di R. Allora*

- *Se S è una parte moltiplicativa di R allora*

$$\operatorname{depth}(I, M) \leqslant \operatorname{depth}(S^{-1}I, S^{-1}M)$$

- *se $IM \neq M$ esiste un massimale $m \in \operatorname{Supp} M$ contenente I tale che*

$$\operatorname{depth}(I, M) = \operatorname{depth}(I_m, M_m)$$

  In particolare se m è un massimale di R allora $\operatorname{depth}(m, M) = \operatorname{depth} M_m$

- $\operatorname{depth} I \leqslant \operatorname{ht} I$

Introduciamo adesso una importante classe di anelli:

Definizione 2.15. *Un anello noetheriano R si dice di Cohen-Macaulay se, per ogni massimale m di R,* $\operatorname{depth} m = \operatorname{ht} m$

Proposizione 2.16 ([5], teorema 18.7 e proposizione 18.8)**.** *Sia R un anello noetheriano. Sono allora equivalenti*

1. *R è Cohen-Macaulay*
2. *per ogni ideale I di R,* $\operatorname{depth} I = \operatorname{ht} I$
3. *R_m è di Cohen-Macaulay per ogni massimale m di R*
4. *R_p è di Cohen-Macaulay per ogni primo p di R*

Definizione 2.17. *Sia R un anello graduato. Un massimale omogeneo di R è un ideale omogeneo che non sia propriamente contenuto in nessun altro ideale omogeneo. R si dice un anello graduato locale se possiede un'unico ideale massimale omogeneo m. In analogia con la notazione usata per gli anelli locali, indicheremo con (R, m) un anello graduato locale.*

Osservazione 2.18. Un massimale omogeneo è primo, dato che è della forma p^* per un qualche massimale di R, ma in generale non è un massimale in senso classico. Ad esempio, come vedremo, se R è un anello graduato, p un suo ideale non omogeneo ed S è la parte moltiplicativa composta dagli elementi omogenei che non stanno in p, allora $p^* S^{-1} R$ è un massimale omogeneo che non è massimale.

Nel caso degli anelli positivamente graduati invece un massimale omogeneo è un ideale omogeneo che sia massimale in senso classico. Infatti per tali anelli R_+ è un ideale omogeneo, ed ogni ideale omogeneo massimale è della forma $R_+ \oplus m$ con m massimale di R_0. In particolare R è locale se e solo se R_0 è locale ed in tal caso il massimale omogeno è $m \oplus R_+$, dove m è il massimale di R_0. Rientrano in questo caso ogni k-algebra positivamente graduata.

Notazione. Salvo avviso contraro nel seguito, ogni qual volta sia dato un primo m di un anello graduato R ed un modulo graduato M, indicheremo con M_m la localizzazione di M nel primo m e mai la componente di grado m di M.

Proposizione 2.19. *Sia (R, m) un anello graduato locale tale che m non è massimale. Allora*

$$R/m \simeq k[X, X^{-1}]$$

come anelli graduati, dove l'anello sulla destra ha la graduazione indotta da $\deg X = d > 0$ *per qualche d. In particolare R/m è un PID.*

Dimostrazione. Infatti R/m è un anello graduato in cui ogni elemento omogeneo non nullo è invertibile e quindi possiamo applicare 2.5. □

Osservazione 2.20. Se p è un primo che contiene strettamente m allora p è massimale ed esiste $a \notin m$ tale che $p = (a) + m$.

Se R è un anello graduato, p è un primo non omogeneo di R ed S è la parte moltiplicativa degli elementi omogenei che non stanno in p, allora $(S^{-1}R, p^* S^{-1} R)$ è un anello locale graduato e $(pS^{-1}R)^* = p^* S^{-1} R \subsetneq pS^{-1}R$. Possiamo quindi concludere che $\operatorname{ht} p/p^* = 1$ e che ogni primo che contiene strettamente un massimale omogeneo è massimale.

Proposizione 2.21. *Sia R un anello graduato noetheriano e p un primo di R. Allora*

- *se $d = \operatorname{ht} p$, allora esistono $p_0, \dots, p_{d-1}$ primi omogenei di R tali che $p_0 \subsetneq \cdots \subsetneq p_{d-1} \subsetneq p$*
- *se p non è omogeneo allora* $\operatorname{ht} p = \operatorname{ht} p^* + 1$

Dimostrazione. Osserviamo che il secondo punto segue dal primo. Se $\operatorname{ht} p = 0$ allora p è omogeneo, quindi possiamo supporre $\operatorname{ht} p > 0$. Chiaramente $\operatorname{ht} p^* + 1 \leqslant \operatorname{ht} p$. D'altra parte se abbiamo una catena di primi come nel primo punto, p_{d-1} è omogeneo e quindi $p_{d-1} \subseteq p^*$ e $\operatorname{ht} p^* \geqslant d - 1$.

Passiamo a dimostrare il primo punto. Osserviamo innanzitutto che in un anello graduato ogni primo minimale è omogeneo, dato che $p^* \subseteq p$. Sia $d = \operatorname{ht} p > 0$ e consideriamo una catena $p_0 \subsetneq \cdots \subsetneq p_d = p$. Vogliamo mostrare che i p_i possono essere cambiati in primi omogenei. Ragioniamo per induzione su d. Se $d = 1$, p_0 è un primo minimale e quindi omogeneo. Per induzione possiamo quindi supporre che $p_0, \dots, p_{d-2}$ siano omogenei. In particolare $p_{d-2} \subseteq p^*$ ed il contenimento è stretto, dato che altrimenti avremmo che p_{d-1} è un primo fra p^* e p, contro l'osservazione 2.20. Se p non è omogeneo, possiamo quindi scambiare p_{d-1} con p^*. Se p è omogeneo esiste un elemento omogeneo $a \in p \setminus p_{d-2}$ e possiamo considerare un primo minimale q fra quelli contenuti in p e che contengono $p_{d-2} + (a)$. Per il teorema di Krull $\operatorname{ht} q/p_{d-2} \leqslant 1$ quindi $p_{d-2} \subsetneq q \subsetneq p$. Inoltre q è omogeneo, dato che è un primo minimale dell'anello graduato $R/p_{d-2} + (a)$ e quindi possiamo scambiarlo con p_{d-1}. □

Corollario 2.22. *Sia (R, m) un anello graduato locale e noetheriano. Allora*

$$\dim R = \begin{cases} \operatorname{ht} m & \text{se } m \text{ è massimale} \\ \operatorname{ht} m + 1 & \text{se } m \text{ non è massimale} \end{cases}$$

Dimostrazione. Se p è un massimale di R, allora $\operatorname{ht} p \leqslant \operatorname{ht} p^* + 1 \leqslant \operatorname{ht} m + 1$. Quindi $\dim R \leqslant \operatorname{ht} m + 1$. Se m non è massimale, allora esiste un massimale $m \subseteq p$ e chiaramente $p^* = m$. Quindi $\operatorname{ht} p = \operatorname{ht} m + 1 \leqslant \dim R$. Se invece m è massimale e p è un qualsiasi massimale diverso da m, avremo che $p^* \subsetneq m$ e quindi $\operatorname{ht} p = \operatorname{ht} p^* + 1 \leqslant \operatorname{ht} m$, da cui $\dim R = \operatorname{ht} m$. □

Lemma 2.23. *Sia $R = k[X, X^{-1}]$ con k campo e supponiamo che R abbia la graduazione indotta da $\deg X = d > 0$. Allora ogni R-modulo graduato è libero come R-modulo.*

Dimostrazione. Sia M un R-modulo graduato. Osserviamo che, se poniamo $M^{(t)} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_{t+nd} \subseteq M$, $M^{(t)}$ è ancora un R-modulo graduato e inoltre

$$M = \bigoplus_{t=0}^{d-1} M^{(t)}$$

Possiamo quindi supporre che $M = M^{(t)}$ per qualche t. Ma se $R' = k[X, X^{-1}]$ con graduazione data $\deg X = 1$, allora l'R-modulo $M' = M$ con graduazione data da $M'_n = M_{t+nd}$ è un R' modulo graduato. Poichè ciò che vogliamo mostrare non dipende dalla graduazione su R o su M, possiamo supporre che $\deg X = 1$. Sia adesso $\beta = \{y_i\}_{i \in I}$ una k-base di M_0. Vogliamo far vedere che β è una R-base di M. Dato un elemento omogeneo $y \in M$, allora $X^{-\deg y} y \in M_0$ quindi β genera M su R. Inoltre, data una relazione di dipendenza

$$\sum_{i \in I} a_i y_i = 0$$

con $a_i = \sum_{j \in \mathbb{Z}} k_{i,j} X^j \in R$, allora

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} (\sum_{i \in I} k_{i,j} y_i) X^j = 0$$

Ma per ipotesi gli y_i hanno grado 0 ed X è invertibile, quindi per ogni j $\sum_{i \in I} k_{i,j} y_i = 0$ ed infine $k_{i,j} = 0$ per ogni i, j. □

Definizione 2.24. *Sia R un anello graduato, M un R-modulo graduato e $n \in \mathbb{Z}$. Il modulo graduato $M(n)$ è definito dalla relazione*

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad M(n)_k = M_{n+k}$$

Osservazione 2.25. Se R è un anello graduato, I un insieme di indici e $d : I \longrightarrow \mathbb{Z}$ è una funzione possiamo considerare l'R-modulo graduato

$$M = \bigoplus_{i \in I} R(-d_i)$$

e la funzione $g : I \longrightarrow M$, $g(i)$ è il generatore canonico di $R(-d_i)$, di modo che $\deg g(i) = d_i$. La coppia (M, g) soddisfa la seguente condizione universale: data una coppia (N, f) con N un R-modulo graduato ed $f : I \longrightarrow N$ una funzione tale che $f(i)$ è un elemento omogeneo di grado d_i, allora esiste un unico morfismo graduato $M \xrightarrow{h} N$ tale che $f \circ h = g$. Sostanzialmente è la proprietà di essere libero cui è aggiunta la condizione di conservare il grado.

Definizione 2.26. *Sia R un anello graduato. Un R-modulo libero graduato è un modulo della forma*

$$\bigoplus_{i \in I} R(-d_i)$$

Lemma 2.27. *Sia R un anello graduato noetheriano ed M un R-modulo graduato finitamente generato. Allora per ogni $i \geqslant 0$ ed N R-modulo graduato l'R-modulo $\mathrm{Ext}^i_R(M, N)$ ammette una graduazione tale da diventare un R-modulo graduato.*

Dimostrazione. Dato un R-modulo graduato N vogliamo definire una graduazione su $\mathrm{Hom}_R(M, N)$. Poniamo $\mathrm{Hom}(M, N)_d = \{ f \in \mathrm{Hom}(M, N) \mid f(M_i) \subseteq N_{i+d}\}$. Chiaramente $\bigoplus_d \mathrm{Hom}(M, N)_d$ è un sotto R-modulo di $\mathrm{Hom}(M, N)$. Vogliamo far vedere che se M è finito allora si ha una uguaglianza. Pensiamo $\mathrm{Hom}_R(M, N) \subseteq \mathrm{Hom}_{R_0}(M, N)$ e, dato $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$, definiamo f_d come l'R_0 omomorfismo tale che, se $y \in M_i$, $f_d(y)$ è la componente di grado $i + d$ di $f(y)$. Un rapido conto mostra che in effetti f_d è un R-omomorfismo di grado d. Inoltre, se y è omogeneo, per costruzione abbiamo

$$f(y) = \sum_d f_d(y)$$

Rimane solo da mostrare che $f_d = 0$ per $|d| \gg 0$. Se $y_1, \dots, y_k \in M$ sono elementi omogenei di M che lo generano, allora $f_d(y_i) = 0$ per $|d| \gg 0$ e poichè gli y_i sono finiti, otteniamo quanto voluto.

Osserviamo adesso che se $M \longrightarrow M'$ è un morfismo graduato fra moduli finiti ed N è un R-modulo graduato, allora $\mathrm{Hom}(M', N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, N)$ è graduato. A questo punto, poichè M è finitamente generato e R è noetheriano, usando l'osservazione 2.25, è possibile costruire una risoluzione $\mathcal{F} : \dots \longrightarrow F_n \longrightarrow \dots \longrightarrow F_0$ di M, in cui ogni F_i sia libero graduato di rango finito e in cui le mappe siano graduate. Se N è un R-modulo graduato allora $\mathrm{Ext}^i_R(M, N) \simeq \mathrm{h}^i(\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, N))$ e quindi abbiamo la graduazione voluta. $\square$

Osservazione 2.28. Più in generale ${}^*\mathrm{Hom}_R(-, N) = \bigoplus_d \mathrm{Hom}_R(-, N)_d$ definisce un endofuntore di $\mathrm{Grad}\, R$ esatto a sinistra e si possono definire i funtori ${}^*\mathrm{Ext}^i_R(-, N)$ come l'i-esimo funtore derivato destro di ${}^*\mathrm{Hom}_R(-, M)$. Quello che abbiamo fatto nel precedente lemma è mostrare che $\mathrm{Ext}^i_R(M, N) \simeq^* \mathrm{Ext}^i_R(M, N)$ se M è finito ed R è noetheriano.

Definizione 2.29. *Sia (R, m, k) un anello locale (non in senso graduato) noetheriano ed M un R-modulo finitamente generato non nullo, con $d = \operatorname{depth} M$. Il tipo di M è definito come*

$$\mathrm{r}(M) = \dim_k \operatorname{Ext}^d_R(k, M)$$

Proposizione 2.30. *Sia R un anello graduato noetheriano, M un R-modulo graduato finitamente generato e p un primo di R in $\operatorname{Supp} M$. Allora*

1. *se p non è omogeneo*

$$\operatorname{depth}(M_{p^*}) + 1 = \operatorname{depth}(M_p) \qquad \mathrm{r}(M_p) = \mathrm{r}(M_{p^*})$$

2. *se p è un massimale omogeneo* $\operatorname{depth}(p, M) = \operatorname{depth} M_p$

Dimostrazione. Supponiamo di aver mostrato che se (R, p^*) è un anello locale, con p non omogeneo, allora le formule in 1) sono vere e che $\operatorname{depth}(p^*, M) = \operatorname{depth} M_{p^*}$. In tal caso 1) segue invertendo ogni elemento omogeneo che non sta in p. Per 2), se p è massimale è un fatto noto. Altrimenti, poichè $p^* \in \operatorname{Supp} M$, sappiamo che esiste un massimale $p \subsetneq m$ di R tale che $\operatorname{depth}(p, M) = \operatorname{depth}(p, M_m)$. Se indichiamo con S la parte moltiplicativa degli elementi omogenei che non stanno in m, $p' = S^{-1}p$, $m' = S^{-1}m$, allora $\operatorname{depth}(p, M) = \operatorname{depth}(p', S^{-1}M)$, $m'^* = p'$ e $(S^{-1}R, p')$ è locale, da cui la tesi.

Possiamo quindi supporre che (R, p^*) sia locale e p^* non massimale. In particolare $R/p^* \simeq k[X, X^{-1}]$ come anelli graduati e quindi possiamo trovare un elemento $a \in R \setminus p^*$ tale che $p = p^* + Ra$. Dalla successione esatta

$$0 \longrightarrow R/p^* \xrightarrow{a} R/p^* \longrightarrow R/p \longrightarrow 0$$

passando alla successione degli $\operatorname{Ext}^*_R(-, M)$, otteniamo una successione esatta

$$\ldots \longrightarrow \operatorname{Ext}^i_R(R/p^*, M) \xrightarrow{a} \operatorname{Ext}^i_R(R/p^*, M) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{i+1}_R(R/p, M) \longrightarrow \ldots$$

Osserviamo adesso che $\operatorname{Ext}^i_R(R/p^*, M)$ è un R-modulo graduato e dato che è annullato da p^*, sarà un R/p^*-modulo graduato ed in particolare libero per 2.23. Di conseguenza la moltiplicazione per $a \notin p^*$ è iniettiva e poichè questo è vero per ogni indice, otteniamo un isomorfismo

$$\operatorname{Ext}^{i+1}_R(R/p, M) \simeq \operatorname{Ext}^i_R(R/p^*, M)/a\operatorname{Ext}^i_R(R/p^*, M)$$

Otteniamo quindi che $\operatorname{Ext}^{i+1}_R(R/p, M)$ è un R/p modulo libero dello stesso rango di $\operatorname{Ext}^i_R(R/p^*, M)$. Dato che nelle nostre ipotesi Ext localizza, otteniamo che

$$\begin{aligned}
\dim_{k(p)} \operatorname{Ext}^{i+1}_{R_p}(k(p), M_p) &= \operatorname{rk} \operatorname{Ext}^{i+1}_R(R/p, M) \\
&= \operatorname{rk} \operatorname{Ext}^i_R(R/p^*, M) \\
&= \dim_{k(p^*)} \operatorname{Ext}^i_{R_{p^*}}(k(p^*), M_{p^*})
\end{aligned}$$

da cui seguono le uguaglianze in 1 e 2. □

Corollario 2.31. *Sia R un anello graduato noetheriano. Se p è un primo di R allora*

$$R_{p^*} \text{ Cohen-Macaulay} \iff R_p \text{ Cohen-Macaulay}$$

In particolare sono equivalenti

1. *R è di Cohen-Macaulay*

2. *per ogni massimale omogeneo m,* $\operatorname{ht} m = \operatorname{depth} m$

3. *per ogni massimale omogeneo m, R_m è di Cohen-Macaulay*

Dimostrazione. Se R_p è Cohen-Macaulay, chiaramente R_{p^*} è Cohen-Macaulay e vale il viceversa se p è omogeno. Se p non è omogeneo allora $\operatorname{depth} R_p = \operatorname{depth} R_{p^*} + 1 = \dim R_{p^*} + 1 = \dim R_p$. Per le equivalenze:

1) $\Rightarrow$ 2) Ovvio

2) $\Rightarrow$ 3) Abbiamo che $\operatorname{depth} m \leqslant \operatorname{depth} R_m \leqslant \dim R_m = \operatorname{ht} m$.

3) $\Rightarrow$ 1) Dato un massimale p di R, p^* è contenuto in un massimale omogeneo e quindi R_{p^*} e R_p sono di Cohen-Macaulay. □

2.3 Anelli locali graduati

Come abbiamo visto nelle precedenti sezioni e così come avviene nella teoria 'classica' degli anelli, molti dei problemi incontrati possono essere affrontati e risolti riconducendosi allo studio degli anelli graduati locali. In questa sezione vogliamo mostrare alcune delle proprietà di questi anelli e, in particolare, mostrare come molte delle proprietà che contraddistinguono gli anelli locali possano essere estese a questa classe di anelli.

L'interesse per gli anelli graduati locali deriva inoltre dalla geometria algebrica ed in particolare dallo studio degli anelli delle coordinate dei chiusi degli spazi proiettivi. Infatti tali anelli sono k-algebre positivamente graduate e quindi locali come anelli graduati.

Il seguente corollario alla proposizione 2.5 caratterizza quando il massimale omogeneo di un anello graduato locale è massimale.

Corollario 2.32. *Sia (R, m) un anello locale graduato. Allora m è massimale se e solo ogni elemento invertibile e omogeneo di R ha grado 0.*

Dimostrazione. $S = R/m$ è un anello graduato ed ogni suo elemento omogeneo non nullo è invertibile. Quindi, per 2.5, S è un campo o è della forma $k[x, x^{-1}]$, con x indeterminata su k. L'enunciato segue facilmente da questa caratterizzazione. □

La seguente proposizione mostra come sia stretto il collegamento fra anelli graduati locali e non:

Proposizione 2.33. *Sia (R, m) un anello graduato locale. Allora il funtore*

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Grad} R & \longrightarrow & \operatorname{Mod} R_m \\ M & \longrightarrow & M_m \end{array}$$

è fedelmente esatto, ossia è esatto e, se M è un R-modulo graduato, allora $M = 0$ se e solo se $M_m = 0$.

Dimostrazione. Che sia esatto è un fatto noto. Mostriamo che è fedele. Sia quindi M un R-modulo graduato tale che $M_m = 0$ e consideriamo un elemento omogeneo $x \in M$. Da $x = 0$ in M_m otteniamo che esiste $s \notin m$ tale che $sx = 0$ in M. Ma se $s = \sum_j s_j$ è la decomposizione di s in elementi omogenei, allora per ogni indice j avremo che $s_j x = 0$. D'altra parte esiste un indice j tale che $s_j \notin m$ e che quindi sarà invertibile, dato che altrimenti $(s_j) \subseteq m$ per la massimalità di m. Abbiamo quindi $s_j x = 0$ da cui $x = 0$. □

Grazie alla precedente proposizione possiamo estendere alcune delle proprietà caratteristiche degli anelli locali al caso graduato a partire dal classico:

Corollario 2.34 (Nakayama)**.** *Sia (R, m) un anello graduato locale, M un R-modulo graduato finitamente generato ed I un ideale omogeneo. Allora*

$$IM = M \implies M = 0$$

Dimostrazione. Dalla relazione $IM = M$ otteniamo che $I_m M_m = M_m$ e, per il lemma classico di Nakayama, $M_m = 0$, da cui $M = 0$. □

Definizione 2.35. *Dato un anello R ed un R-modulo M, definiamo $\mu(M)$ come il numero minimo di elementi di M che lo generano come R-modulo, ∞ se M non è finitamente generato.*

Lemma 2.36. *Sia (R, m) un anello graduato locale, M un R-modulo graduato e $x_1, \ldots, x_n \in M$ elementi omogenei. Allora sono equivalenti*

1. *$x_1, \ldots, x_n$ sono un sistema minimale di generatori di M*
2. *$x_1, \ldots, x_n$ sono un sistema minimale di generatori di M_m*

In particolare $\mu(M) = \mu(M_m)$ e $\mu(M)$ è la cardinalità di un qualsiasi insieme minimale di generatori omogenei di M.

Se M è finitamente generato, allora 1) *e* 2) *sono equivalenti a*

3. *$x_1, \ldots, x_n$ sono un sistema minimale di generatori di M/mM*

In particolare $\mu(M) = \mu(M/mM)$ e, se m è un ideale massimale in R, ogni sistema minimale di generatori omogenei di M contiene esattamente $\dim_{R/m}(M/mM)_d$ *elementi di grado d.*

Dimostrazione. Iniziamo con l'equivalenza di 1) e 2).

1) ⇒ 2) Chiaramente gli elementi generano. Se N è il modulo generato da un sottoinsieme proprio di $x_1, \ldots, x_n$ e si avesse che $N_m = M_m$, allora otterremmo $N = M$, ossia un assurdo.

2) ⇒ 1) Sia $N = (x_1, \ldots, x_n)_R \subseteq M$. Per ipotesi $N_m = M_m$ e quindi $N = M$. Quindi $x_1, \ldots, x_n$ generano M. Inoltre se questo non fosse un sistema minimale di generatori per M allora non lo sarebbe per M_m.

Ovviamente abbiamo che $\mu(M_m) \leqslant \mu(M)$. Inoltre se $\mu(M) = \infty$ allora $\mu(M_m) = \infty$. Infatti se $x_1, \ldots, x_n$ generano M_m, allora si può supporre che $x_i \in M$ e, considerando le loro componenti omogenee, che siano omogenei. Quindi M_m è generato dall'immagine di un insieme finito di elementi omogenei di M, che, per quanto appena visto, saranno anche generatori di M. Supponendo quindi che $\mu(M) < \infty$ allora esiste un sistema minimale di generatori omogenei, che supponiamo essere di cardinalità n, e quindi $\mu(M) \leqslant n = \mu(M_m)$, dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $\mu(M_m) < \infty$ e dal lemma di Nakayama.

Se supponiamo che M sia finitamente generato allora avremo che $x_1, \ldots, x_n$ sono un sistema minimale di generatori di M/mM se e solo se sono un sistema minimale di generatori M_m/mM_m se e solo se, per Nakayama, sono un sistema minimale di generatori di M_m.

Per l'affermazione finale, osserviamo che $\pi : M \longrightarrow M/mM$ è un morfismo graduato, e quindi, se $x_1, \dots, x_k$ sono elementi omogenei di grado d che fanno parte di un sistema minimale di generatori omogenei di M, allora $\pi(x_1), \dots, \pi(x_k) \in (M/mM)_d$ e sono indipendenti, da cui $k \leqslant \dim_{R/m}(M/mM)_d$. D'altra parte, poichè $R/m = k$ è concentrato in grado 0, questi saranno anche dei generatori e di conseguenza abbiamo l'uguaglianza. $\square$

Mostriamo adesso un'altra analogia col caso locale 'classico':

Corollario 2.37. *Sia (R, m) un anello graduato locale ed M un R-modulo graduato finitamente generato che sia proiettivo come R-modulo. Allora M è libero, ogni sistema minimale di generatori omogenei di M è una R-base di M ed esiste un isomorfismo graduato*

$$M \simeq \bigoplus_j R(-j)^{\alpha_j}$$

con $\alpha_j \in \mathbb{N}$. Se m è massimale allora gli α_j sono univocamente determinati da $\alpha_j = \dim_{R/m}(M/mM)_j$.

Dimostrazione. Se M è proiettivo allora è localmente libero. In particolare M_m è un R_m modulo libero. Sia $x_1, \dots, x_n$ un sistema di generatori omogenei minimale per M. Abbiamo quindi un morfismo

$$T = \bigoplus_{i=1}^{n} R(-\deg x_i) \xrightarrow{\sigma} M$$

che mappa la base canonica di T nel sistema minimale. In particolare σ è surgettivo ed abbiamo una successione esatta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow T \xrightarrow{\sigma} M \longrightarrow 0$$

in $\operatorname{Grad} R$. Localizzando in m, osserviamo che il morfismo $T_m \longrightarrow M_m$ mappa la base in $x_1, \dots, x_n \in M_m$. Ma M_m è libero e gli $x_1, \dots, x_n$ sono un sistema minimale di generatori di M_m e quindi una R_m base. Di conseguenza, σ_m è un isomorfismo, $K_m = 0$ ed infine $K = 0$. Quindi σ è un isomorfismo ed M è libero. Osserviamo adesso che se α_j è il numero di elementi di grado j in $x_1, \dots, x_n$, allora T può essere riscritto come

$$T = \bigoplus_j R(-j)^{\alpha_j}$$

Se m è massimale allora $\alpha_j = \dim_{R/m}(M/mM)_j$. $\square$

Osservazione 2.38. Se m non è massimale, allora esiste un elemento omogeneo $x \in R$ di grado positivo ed invertibile. In particolare 1 ed x sono due sistemi di generatori omogenei minimali per R. Quindi il caso in cui m è massimale è l'unico in cui gli α_j risultano univocamente determinati.

2.4 Risoluzioni minime di moduli su anelli locali

Dato un anello R ed un R-modulo M non esiste in generale un modo univoco per associargli una risoluzione proiettiva o libera. Se si suppone invece che l'anello R sia locale possono essere definite delle risoluzioni, dette minime, che risultano essere uniche a meno di isomorfismo. Un'operazione analoga può essere fatta nel caso di anelli graduati locali.

Definizione 2.39. *Se R è un anello graduato ed M è un R-modulo graduato finitamente generato, una sua risoluzione libera graduata è una risoluzione composta di moduli liberi graduati (finitamente generati) ed in cui ogni mappa sia graduata.*

Osservazione 2.40. Osserviamo che se $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ sono risoluzioni libere graduate di rispettivamente M, N allora ogni morfismo graduato $M \longrightarrow N$ ammette un sollevamento graduato $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$. Infatti, ragionando per induzione bisogna solo dimostrare che se $F \xrightarrow{\alpha} M$, $G \xrightarrow{\beta} N$ sono due morfismi graduati surgettivi, con F, G liberi graduati ed $f : M \longrightarrow N$ è un morfismo graduato allora esiste un sollevamento graduato $g : F \longrightarrow G$. Data una base di F composta da elementi omogenei $x_1, \ldots, x_n$ e fissato un indice i, $(f \circ \alpha)(x_i)$ è un elemento omogeneo di N. Per ipotesi esiste $y_i \in G$ tale che $\beta(y_i) = (f \circ \alpha)(x_i)$, d'altra parte, spezzando y_i nelle componenti omogenee ed essendo β graduato, possiamo supporre che y_i sia omogeneo ed in particolare dello stesso grado di x_i. Allora l'associazione $x_i \longrightarrow y_i$ definisce il morfismo g cercato.

Definizione 2.41. *Sia (R, m) un anello locale (graduato) e*

$$\mathcal{F} : \ldots \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_0$$

una risoluzione libera (graduata). $\mathcal{F}$ si dice minima se il complesso $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \otimes_R R/m$ ha i differenziali nulli, o, equivalentemente, se per ogni n $\operatorname{Im}(F_{n+1} \longrightarrow F_n) \subseteq mF_n$.

Proposizione 2.42. *Sia (R, m) un anello graduato locale e $\mathcal{F}$ una risoluzione graduata libera. Allora*

$$\mathcal{F} \textit{ minima } \iff \mathcal{F}_m \textit{ minima}$$

Dimostrazione. Dato che $(\mathcal{F}/m\mathcal{F})_m \simeq \mathcal{F}_m/m\mathcal{F}_m$, è sufficiente mostrare che se $f : M \longrightarrow N$ è una mappa fra moduli graduati, allora

$$f = 0 \iff f_m = 0$$

$\Rightarrow$ è ovvia. Per $\Leftarrow$ consideriamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$$

Localizzando in m otteniamo che $K_m = M_m$, ossia $(M/K)_m = 0$, da cui $K = M$ e quindi $f = 0$ $\square$

Lemma 2.43. *Sia (R, m) un anello locale (graduato) ed $f : T \longrightarrow M$ un morfismo (graduato) surgettivo fra R-moduli (graduati) finitamente generati. Allora sono equivalenti:*

1. $\ker f \subseteq mT$

2. $T \otimes_R R/m \longrightarrow M \otimes_R R/m$ *è un isomorfismo*

3. f *manda ogni sistema minimale di generatori (omogenei) di* T *in un sistema minimale di generatori (omogenei) di* M

4. f *manda un sistema minimale di generatori (omogenei) di* T *in un sistema minimale di generatori (omogenei) di* M

Dimostrazione. 1) $\Rightarrow$ 2) Consideriamo la successione esatta

$$K = \ker f \longrightarrow T \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

Tensorizzando per R/m otteniamo

$$K \otimes_R R/m \xrightarrow{0} T \otimes_R R/m \longrightarrow M \otimes_R R/m \longrightarrow 0$$

e quindi l'isomorfismo voluto.

2) $\Rightarrow$ 3) Sia $\beta = \{x_0, \ldots, x_n\}$ un sistema minimale di generatori (omogenei) di T. Chiramenti $f(\beta)$ genera M. Inoltre, per 2.36, β è un sistema minimale di generatori per T/mT, quindi $f(\beta)$ sarà tale per M/mM e quindi per M.

3) $\Rightarrow$ 4) Ovvio

4) $\Rightarrow$ 1) Sia $\beta = \{x_1, \ldots, x_n\}$ il sistema di generatori dato nell'ipotesi. Se $x \in \ker f$ (omogeneo se R graduato), possiamo scrivere

$$x = \sum_j a_j x_j$$

con $a_j \in R$ (omogenei se R graduato). Per 2.36 $f(\beta)$ è una $(R/m)_m$ base di $(M/mM)_m$. Otteniamo quindi che $a_j \in m$. □

Corollario 2.44. *Sia* (R, m) *un anello locale (graduato),*

$$\mathcal{F} : \ldots \longrightarrow F_n \xrightarrow{\alpha_n} F_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_0$$

una risoluzione libera (graduata) e poniamo anche $\alpha_0 : F_0 \longrightarrow \operatorname{coker} \alpha_1$*. Allora sono equivalenti*

1. $\mathcal{F}$ *è minima*

2. $\forall n \geqslant 0 \quad F_n \otimes_R R/m \longrightarrow \operatorname{Im} \alpha_n \otimes_R R/m$ *è un isomorfismo.*

3. $\forall n \geqslant 0 \quad F_n$*, tramite* α_n*, mappa basi (omogenee) in sistemi di generatori (omogenei) minimali di* $\operatorname{Im} \alpha_n$

4. $\forall n \geqslant 0 \quad F_n$*, tramite* α_n*, mappa una base (omogenea) in un sistema di generatori (omogenei) minimali di* $\operatorname{Im} \alpha_n$

Dimostrazione. Segue dal fatto che una base (omogenea) di un F_n è un sistema minimale di generatori (omogenei) di F_n □

Corollario 2.45. *Sia* (R, m) *un anello (graduato) locale ed* M *un* R*-modulo (graduato) finitamente generato. Allora* M *ammette una risoluzione libera (graduata) minima.*

Dimostrazione. Se $x_1, \ldots, x_n$ è un sistema minimale di generatori (omogenei) per M allora ho un modulo (graduato) libero F_0 ed una mappa (graduata) surgettiva $F_0 \longrightarrow M$ che mappa la base canonica di F_0 nel sistema di generatori di M. Per quanto visto $\ker \alpha_0 \subseteq mF_0$. Considerando adesso il modulo $\ker \alpha_0$ al posto di M ottengo $F_1 \xrightarrow{\alpha_1} \ker \alpha_0 \subseteq F_0$ e così via. Per quanto visto è chiaro che la successione così costruita è minima. □

Definizione 2.46. *Sia R un anello ed M un R-modulo. Si definisce la dimensione proiettiva di M, indicata $\operatorname{pd}_R M$, come l'*inf *delle lunghezze delle risoluzioni proiettive di M.*

Proposizione 2.47. *Sia (R, m) un anello (graduato) locale ed M un R-modulo (graduato) finitamente generato. Allora*

$$\operatorname{pd}_R M = \inf\{\, i \mid \operatorname{Tor}_R^{i+1}(M, R/m) = 0\}$$

ed ogni risoluzione minima di M ha lunghezza $\operatorname{pd}_R M$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{F}$ una risoluzione proiettiva di M come R-modulo. Indichiamo con $l(\mathcal{F})$ la sua lunghezza e poniamo $\gamma = \inf\{\, i \mid \operatorname{Tor}_R^{i+1}(M, R/m) = 0\}$. Ma allora abbiamo che

$$\operatorname{Tor}_R^{i+1}(M, R/m) \simeq \mathrm{h}^{i+1}(\mathcal{F} \otimes_R R/m)$$

Quindi se $l(\mathcal{F}) = n < \infty$ allora, $\mathcal{F}_{n+1} = 0$ e quindi $\operatorname{Tor}_R^{n+1}(M, R/m) = 0$. Questo mostra che $\gamma \leqslant l(\mathcal{F})$ e, per l'arbitrarietà della scelta di $\mathcal{F}$, che $\gamma \leqslant \operatorname{pd}_R M$. Per concludere la dimostrazione è quindi sufficiente mostrare che, se $\mathcal{F}$ è una risoluzione minima, allora $l(\mathcal{F}) \leqslant \gamma$. Se $\gamma = \infty$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo quindi che $\gamma < \infty$. La minimalità di $\mathcal{F}$ ci permette di concludere che

$$0 = \operatorname{Tor}_R^{\gamma+1}(M, R/m) \simeq F_{\gamma+1} \otimes_R R/m$$

Ma $F_{\gamma+1}$ è libero e di conseguenza $l(\mathcal{F}) \leqslant \gamma$. □

Corollario 2.48. *Sia (R, m) un anello graduato locale ed M un R.modulo graduato finitamente generato. Allora*

$$\operatorname{pd}_R M = \operatorname{pd}_{R_m} M_m$$

Dimostrazione. Infatti, se $\mathcal{F}$ è una risoluzione minima di M, allora $\mathcal{F}_m$ è una risoluzione minima di $\mathcal{F}_m$ e, per 2.33, $l(\mathcal{F}) = l(\mathcal{F}_m)$. □

Proposizione 2.49. *Sia R un anello graduato noetheriano. Se p è un primo di R allora*

$$R_p \text{ regolare } \iff R_{p^*} \text{ regolare}$$

In particolare sono equivalenti

1. *R regolare*
2. *per ogni massimale omogeneo m, R_m regolare*

Inoltre, se (R, m) è un anello graduato locale, R è regolare se e solo se esistono $x_1, \ldots, x_d \in m$ omogenei, con $d = \operatorname{ht} m$, tali che $(x_1, \ldots, x_d) = m$.

Dimostrazione.

Osservazione. Se (R, m) è un anello locale graduato e R_m è regolare, per 2.36 avremo che $\mu(m) = \mu(m_m) = \operatorname{ht} m_m = \operatorname{ht} m = d$, e quindi che esistono $x_1, \ldots, x_d \in m$ omogenei tali che $(x_1, \ldots, x_d) = m$. Inoltre se p è un primo di R tale che $m \subsetneq p$, per l'osservazione 2.20 otteniamo anche che esiste $x \in p$ tale che $(x_1, \ldots, x_d, x) = p$ ed in particolare R_p è regolare dato che $\operatorname{ht} p = \operatorname{ht} p^* + 1$.

Iniziamo con la prima equivalenza. Se p è omogeneo è ovvio, altrimenti possiamo invertire gli elementi omogenei non in p e quindi supporre che (R, p^*) sia locale. In tal caso l'equivalenza segue dall'osservazione iniziale.

Per la seconda equivalenza, 1) $\Rightarrow$ 2) è ovvia, mentre per l'altra dato un massimale p di R, p^* è contenuto in un massimale omogeneo e quindi R_{p^*} e di conseguenza R_p sono regolari.

Infine l'ultima equivalenza dell'enunciato segue da quella appena dimostrata e dalla osservazione iniziale. $\square$

Teorema 2.50. *Sia (R, m) un anello (graduato) locale e regolare ed M un R-modulo (graduato) finitamente generato non nullo. Allora*

$$\operatorname{pd}_R M \leqslant \operatorname{pd}_R R/m = \operatorname{ht} m$$

Dimostrazione. Se $\operatorname{ht} m = \operatorname{depth} m = d$ e $m = (x_1, \ldots, x_d)$ consideriamo il complesso di Koszul $K = K(x_1, \ldots, x_d)$. Dato che $H^i(K) = 0$ per $i \neq d$, $H^d(K) = R/(x_1, \ldots, x_d) = R/m$, K è una risoluzione libera di R/m di lunghezza d. Inoltre è facile verificare che K è minima e quindi otteniamo che $\operatorname{pd}_R R/m = d$. Inoltre, se calcoliamo $\operatorname{Tor}^i_R(M, R/m)$ usando la risoluzione K otteniamo anche la prima disuguaglianza. $\square$

In particolare abbiamo ottenuto il ben noto

Teorema 2.51 (Hilbert)**.** *Sia k un campo ed M un modulo graduato finitamente generato sull'anello dei polinomi $k[X_1, \ldots, X_n]$. Allora M ha una risoluzione libera graduata di lunghezza minore od uguale ad n.*

Da questo teorema si può dimostrare che la stessa proprietà è soddisfatta da ogni modulo finitamente generato su $k[X_1, \ldots, X_n]$ ([5],corollario 19.8).

Teorema 2.52 (formula di Auslander-Buchsbaum)**.** *Sia (R, m) un anello (graduato) locale noetheriano ed M un R.modulo (graduato) finitamente generato non nullo e di dimensione proiettiva finita. Allora*

$$\operatorname{pd}_R M = \operatorname{depth}(m, R) - \operatorname{depth}(m, M)$$

Dimostrazione. Nel caso graduato, abbiamo che $\operatorname{pd}_R M = \operatorname{pd}_{R_m} M_m$ e, poichè $m \in \operatorname{Supp} M$, per 2.30 che $\operatorname{depth}(m, R) = \operatorname{depth} R_m$ e $\operatorname{depth}(m, M) = \operatorname{depth} M_m$. Possiamo quindi ricondurci al solo caso locale. Indichiamo con k il campo residuo di R. Ragioniamo per induzione su $\operatorname{pd}_R M$. Se $\operatorname{pd}_R M = 0$ allora M è libero e quindi $\operatorname{depth}(P, R) = \operatorname{depth}(P, M)$. Se $\operatorname{pd}_R M > 0$ consideriamo un passo della risoluzione minima

$$\mathcal{F} : 0 \longrightarrow N \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

ossia con $N \subseteq mF$. In particolare per 2.47 otteniamo che $\operatorname{pd}_R N = \operatorname{pd}_R M - 1$. Se poniamo $d = \operatorname{depth} N$, rimane quindi solo da mostrare che $\operatorname{depth} M = d - 1$.

A questo proposito siano $x_1, \ldots, x_n$ un sistema di generatori di m e poniamo $K = K(x_1, \ldots, x_n)$ il complesso di Koszul. Poichè K è formato da moduli liberi, $\mathcal{F} \otimes_R K$ è una successione esatta di complessi e passando alla successione lunga di omologia otteniamo

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{H}^{i-1}(F \otimes K) \longrightarrow \mathrm{H}^{i-1}(M \otimes K) \longrightarrow \mathrm{H}^{i}(N \otimes K) \longrightarrow \mathrm{H}^{i}(F \otimes K) \longrightarrow \ldots$$

Pe ipotesi induttiva $\operatorname{depth} F = \operatorname{depth} R \geqslant d$ e quindi per $i < d-1$ otteniamo $\mathrm{H}^i(M \otimes K) = 0$. Rimane da mostrare che $\mathrm{H}^{d-1}(M \otimes K) \neq 0$. Se $\operatorname{pd}_R N > 0$ per ipotesi induttiva otteniamo che $\operatorname{depth} F > d$ e quindi un isomorfismo

$$\mathrm{H}^{d-1}(M \otimes K) \simeq \mathrm{H}^{d}(N \otimes K) \neq 0 \tag{2.3}$$

Se invece $\operatorname{pd}_R N = 0$, ossia N libero, allora

$$\mathrm{H}^{d}(N \otimes K) \simeq N \otimes \mathrm{H}^{d}(K) \xrightarrow{\phi \otimes 1} F \otimes \mathrm{H}^{d}(K) \simeq \mathrm{H}^{d}(F \otimes K)$$

dove ϕ è l'inclusione $N \subseteq F$ in $\mathcal{F}$. Ma per ipotesi $N \subseteq mF$ e quindi ϕ è data da una matrice con ogni entrata in m. D'altra parte, per 2.7, $\mathrm{H}^d(K)$ è annullato da m e quindi $\phi \otimes 1 = 0$ e anche in questo caso otteniamo l'isomorfismo 2.3. □

Definizione 2.53. *Sia R un anello (graduato). Un complesso $\mathcal{H}$ si dice banale se è somma di complessi della forma*

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow S \xrightarrow{id} S \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

dove S è un R-modulo libero (graduato).

In particolare un complesso banale, essendo somma di complessi aciclici, sarà aciclico.

Proposizione 2.54. *Sia (R, m) un anello (graduato) locale noetheriano ed $\mathcal{H}$ una risoluzione (graduata) libera di 0. Allora $\mathcal{H}$ è un complesso banale*

Dimostrazione. Dato che $\mathcal{H}$ è una risoluzione dello 0, avremo che $H_1 \longrightarrow H_0$ è un morfismo surgettivo. D'altra parte H_0 è libero quindi si può trovare uno spezzamento (graduato) che induce una decomposizione della forma

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\mathcal{H}_0 & & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H_0 & \longrightarrow & H_0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
\oplus & : & & & \oplus & & \oplus & & \oplus & & \oplus & & \\
\mathcal{H}'_0 & & \cdots & \longrightarrow & H_2 & \longrightarrow & T & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

dove $T = \ker(H_1 \longrightarrow H_0)$. $\mathcal{H}_0$ è un complesso banale, inoltre da $H_1 \simeq T \oplus H_0$ deduciamo che T è proiettivo, finitamente generato e per 2.37 che T è un modulo (graduato) libero. In particolare $\mathcal{H}'_0$ è a sua volta una risoluzione (graduata) libera di 0. Ragionando per induzione otteniamo una successione di complessi banali $\mathcal{H}_0, \ldots, \mathcal{H}_n$ tali che $\mathcal{H} = \mathcal{H}'_n \oplus \mathcal{H}_n \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_0$ con $\mathcal{H}'_n$ risoluzione libera di 0 nulla nei gradi minori di n. Risulta quindi chiaro che $\mathcal{H} = \bigoplus_n \mathcal{H}_n$. □

Possiamo quindi mostrare la proprietà di unicità delle risoluzioni minime

Proposizione 2.55. *Siano (R, m) un anello (graduato) locale e noetheriano, M un R-modulo (graduato) finitamente generato e $\mathcal{F}$ una risoluzione minima di M. Se $\mathcal{H}$ è una risoluzione libera (graduata) di M allora è isomorfa come complesso alla somma diretta di $\mathcal{F}$ ed un complesso aciclico. In particolare due risoluzioni minime di M sono isomorfe.*

Dimostrazione. Considerando $\mathrm{id} : M \longrightarrow M$ otteniamo sollevamenti (graduati) $\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{H}$ e $\beta : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{F}$. Sia $\sigma = \beta \circ \alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$. σ è un sollevamento dell'identità e di conseguenza sarà omotopa ad $\mathrm{id} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$. Esiste quindi una omotopia (non necessariamente graduata) $\Sigma : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ tale che, indicando con d_i i differenziali di $\mathcal{F}$,

$$\sigma_i - \mathrm{id}_i = \Sigma_{i-1} \circ d_i + d_{i+1} \circ \Sigma_i$$

In particolare, poichè $\mathcal{F}$ è minima, $(\sigma_i - \mathrm{id}_i)(F_i) \subseteq mF_i$ e quindi $\sigma_i = \mathrm{id}_i$ come endomorfismo di F_i/mF_i. Questo ci permette di concludere che $\det \sigma_i \notin m$. Se siamo nel caso non graduato da questo segue che σ è un isomorfismo. Altrimenti osserviamo che la matrice di σ su una base omogenea di F_i, che esiste sempre per 2.37, è composta di elementi omogenei e quindi calcolando il determinante con la formula delle permutazioni è evidente che $\det \sigma_i$ è omogeneo. Ma un elemento omogeneo che non sta in m è invertibile e quindi anche in questo caso σ_i è un isomorfismo.

A questo punto, a meno di scambiare β con $\sigma^{-1} \circ \beta$, possiamo supporre che $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}$. In particolare α è iniettiva ed abbiamo una decomposizione come complessi $\mathcal{H} = \alpha(\mathcal{F}) \oplus \ker \beta$. Osserviamo che $\ker \beta$ è un complesso di moduli proiettivi e quindi, nelle nostre ipotesi, liberi. Consideriamo ora la successione esatta di complessi

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{H} \longrightarrow \ker \beta \longrightarrow 0$$

α è un sollevamento dell'identità e quindi indurrà un isomorfismo in omologia, di conseguenza passando alla successione lunga di omologia otteniamo che $\mathrm{H}(\ker \beta) = 0$ ossia, per 2.54, che $\ker \beta$ è un complesso banale.

Infine, se $\mathcal{F}'$ è un'altra risoluzione minima di M, allora $\mathcal{F}' \simeq \mathcal{F} \oplus \mathcal{H}$, con $\mathcal{H}$ una risoluzione libera di 0. In particolare, per ogni i, $F'_i \simeq F_i \oplus H_i$, con H_i libero, da cui $\mathrm{rk}\, F_i \leqslant \mathrm{rk}\, F'_i$. Scambiando i ruoli di $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ otteniamo $\mathrm{rk}\, F_i = \mathrm{rk}\, F'_i$ e quindi $\mathrm{rk}\, H_i = 0$ e $H_i = 0$. □

2.5 Anelli delle coordinate omogenee di sottoschemi chiusi di $\mathbb{P}^n_B$

In questa sezione vogliamo introdurre l'anello delle coordinate omogenee di un sottoschema chiuso di uno spazio proiettivo.

Notazione. Sia S un anello graduato e $\mu \in S$ un elemento omogeneo. Se M è un S-modulo graduato indichiamo con $M_{(\mu)}$ la componente omogenea di grado 0 di M_μ. In particolare $M_{(\mu)}$ è un $S_{(\mu)}$-modulo.

Se $\deg \mu = 1$ ed $m \in M$ è omogeneo allora la deomogeneizzazione di m rispetto a μ è definita come

$$m_{(\mu)} = \frac{m}{\mu^{\deg m}} \in M_{(\mu)}$$

Definizione 2.56. *Sia S un'anello positivamente graduato generato in grado* 1 *e poniamo $X = \mathrm{Proj}\, S$. Definiamo un funtore*

$$\Gamma_* : \mathrm{QCoh}(X) \longrightarrow \{ \text{ S-moduli graduati } \}$$

nel modo seguente: ad ogni $\mathcal{F}$ associamo il modulo

$$\Gamma_*(\mathcal{F}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$$

su cui poniamo la struttura di S-modulo graduato indotta dalle mappe

$$S_n \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$$

$$\Gamma(X, \mathcal{F}(n)) \otimes \Gamma(X, \mathcal{O}_X(p)) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}(n+p))$$

mentre ad $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ associamo l'omomorfismo indotto dalle mappe

$$\Gamma(X, \mathcal{F}(n)) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}(n))$$

Il funtore Γ_* permette di passare dai fasci coerenti su uno spazio proiettivo ai moduli graduati ed in qualche modo rappresenta un'inversa per l'operazione di fascificazione, come mostra la seguente

Proposizione 2.57. *Sia S un'anello positivamente graduato generato in grado 1. Allora*

1. *Γ_* è esatto a sinistra*
2. *Esiste un isomorfismo naturale*

$$\widetilde{-} \circ \Gamma_* \longrightarrow \mathrm{id}$$

3. *Esiste un morfismo di funtori*

$$\mathrm{id} \longrightarrow \Gamma_* \circ \widetilde{-} \tag{2.4}$$

Inoltre se S è un anello di polinomi, allora il morfismo appena definito induce isomorfismi su ogni S-modulo della forma

$$S(a_1) \oplus \cdots \oplus S(a_m) \quad \textit{con} \;\; a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}$$

Dimostrazione. Poniamo $X = \operatorname{Proj} S$

1) Segue dall'esattezza a sinistra di $- \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(m)$, per ogni $m \in Z$, e di $\Gamma(X, -)$

2) Si veda [Ha], proposizione 5.15

3) Sia M un S-modulo graduato. Allora per ogni elemento omogeneo $\mu \in S$ di grado positivo il morfismo di localizzazione in μ è graduato e quindi otteniamo morfismi

$$\phi_{\mu,k} : M_k \longrightarrow (M_\mu)_k$$

Dato che $(M(k))\widetilde{\ } \simeq (\widetilde{M})(k)$ abbiamo che $(\widetilde{M})(k)_\mu \simeq (M_\mu)_k$. Dato $m \in M_k$, al variare dei $\mu \in S$ omogenei di grado positivo, abbiamo che $(\phi_{\mu,k}(m))_\mu$ è una successione coerente con le restrizioni e quindi definisce un elemento di $\Gamma(X, (\widetilde{M})(k))$. Otteniamo in tal modo una mappa $\tau_k : M_k \longrightarrow \Gamma(X, (\widetilde{M})(k))$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$ e quindi una funzione $\tau : M \longrightarrow \Gamma_*(\widetilde{M})$. La verifica che τ sia un omomorfismo graduato e che induca un morfismo di funtori può essere fatta localmente. Se adesso S è un anello di polinomi, dato che sia $\widetilde{\ }$ che Γ_* sono additivi ci possiamo ricondurre al caso $S(q)$. Osserviamo che possiamo anche supporre $q = 0$ dato che il morfismo di funtori appena definito e Γ_* commutano con l'operazione di shift. Ma a questo punto il morfismo $S \longrightarrow \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ è esattamente quello usato per mostrare che $S \simeq \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ ([Ha], proposizione 5.13) e quindi abbiamo la tesi. □

Per gli schemi $\operatorname{Proj} R$, ideali omogenei distinti possono definire lo stesso sottoschema chiuso, ad esempio $\operatorname{Proj} 0 = \operatorname{Proj} S/S_+ = \emptyset$ per un anello positivamente graduato S. Nel caso in cui S è un anello di polinomi si possono però sfruttare le proprietà di Γ_* per avere una scelta, in qualche modo, privilegiata.

Definizione 2.58. *Sia A un anello, $S = A[X_0, \dots, X_n]$ e sia $i : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_A = \operatorname{Proj} S$ un'immersione chiusa. Se $\mathcal{I}$ è il fascio di ideali associato ad i allora $\Gamma_*(\mathcal{I}) \subseteq \Gamma_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A}) \simeq S$ tramite 2.4 definisce un ideale di S. Definiamo l'anello delle coordinate omogenee di X (o di i) come l'algebra graduata*

$$S_X = S/\Gamma_*(\mathcal{I})$$

Diremo anche che $\Gamma_*(\mathcal{I})$ è l'ideale associato a X (o i).

Diamo anche la seguente:

Definizione 2.59. *Sia A un anello, $S = A[X_0, \dots, X_n]$ ed $I \subseteq S$ un ideale omogeneo di S. La saturazione di I è definita come*

$$\overline{I} = \{s \in S \mid \exists N \in \mathbb{N}\ \forall i\ X_i^N s \in I\}$$

Un ideale omogeneo si dice saturo se $I = \overline{I}$

La seguente proposizione mostra la connessione fra gli ideali associati ad una immersione chiusa e gli ideali saturi.

Proposizione 2.60. *Sia A un anello e $S = A[X_0, \dots, X_n]$. Allora*

1. *la saturazione di un ideale omogeneo è ancora un ideale omogeneo.*
2. *Due ideali omogenei di S definiscono lo stesso sottoschema chiuso se e solo se hanno la stessa saturazione.*
3. *Se X è un sottoschema chiuso di $\mathbb{P}^n_A$ ed $\mathcal{I}$ è il fascio di ideali associato, allora $\Gamma_*(\mathcal{I})$ è saturo ed è il più grande ideale omogeneo di S che definisce X.*

Dimostrazione. 1). È evidente.

2). Iniziamo col far vedere che se I è un ideale omogeneo di S, I e $\overline{I}$ definiscono lo stesso schema. Poichè $I \subseteq \overline{I}$ abbiamo una immersione chiusa $\operatorname{Proj} S/\overline{I} \longrightarrow \operatorname{Proj} S/I$. Per mostrare che questa è un isomorfismo è sufficiente mostrare che ogni primo omogeneo P che contiene I contiene anche $\overline{I}$ e che per ogni i si ha $I_{(X_i)} = \overline{I}_{(X_i)}$. Per la prima affermazione, se $s \in \overline{I}$ e $s \notin P$ allora

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall i\ X_i^N s \in I \subseteq P \implies \forall i\ X_i \in P \implies S_+ \subseteq P$$

Per la seconda, chiaramente $I_{(X_i)} \subseteq \overline{I}_{(X_i)}$. Viceversa se $y/X_i^k \in \overline{I}_{(X_i)}$, dato che per qualche N $X_i^N y \in I$, abbiamo che $y/X_i^k = (X_i^N y)/X_i^{N+k} \in I_{(X_i)}$. Questo ci dice che se due ideali hanno la stessa saturazione allora definiscono lo stesso sottoschema chiuso.

Supponiamo adesso di avere due ideali I, J che definiscono lo stesso sottoschema chiuso. Per la discussione appena fatta possiamo suppore che I e J siano saturi. Avremo inoltre che $I \cap J$ ed I definiscono lo stesso sottoschema chiuso e che $I \cap J$ è saturo. Dunque possiamo supporre anche $I \subseteq J$. Questa inclusione induce un'immersione chiusa $\phi : \operatorname{Proj} S/J \longrightarrow \operatorname{Proj} S/I$. D'altra parte abbiamo un diagramma commutativo

una tale fattorizzazione
è unica

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Proj} S/J \arrow[dd, bend right, "\phi"'] \arrow[dd, "\wr"] \arrow[dr] & \\
& \mathbb{P}^n_A \\
\operatorname{Proj} S/I \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

e quindi ϕ è un isomorfismo. In particolare per ogni i avremo $I_{(X_i)} = J_{(X_i)}$. Se $t \in J$ è omogeneo, allora $t/X_i^{\deg t} \in J_{(X_i)} = I_{(X_i)}$, quindi esiste $y \in I$ tale che $y/X_i^{\deg y} = t/X_i^{\deg t}$ e, conseguentemente, $X_i^{\deg y} t = X_i^{\deg t} y \in I$. Poichè questo vale per ogni i possiamo concludere che $t \in I$ e quindi $I = J$.

3). In generale, dato un ideale omogeneo J ed indicata con j l'immersione che induce, per costruzione, abbiamo che

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{S} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & \widetilde{S/J} \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A} \arrow[r] & j_*\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S/J}
\end{tikzcd}$$

Quindi $\widetilde{J}$ è il fascio di ideali associato a j. Per 2.57, questo mostra che $\Gamma_*(\mathcal{I})$ definische il sottoschema chiuso X. Viceversa, supponiamo che I sia un ideale che definisce X. Per 2.57 abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r] \arrow[d] & S \arrow[d, "\wr"] \\
\Gamma_*(\widetilde{I}) \arrow[r] & \Gamma_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A})
\end{tikzcd}$$

Dato che $\widetilde{I} \simeq \mathcal{I}$ avremo che $I \subseteq \Gamma_*(\mathcal{I})$. In particolare scegliendo $I = \overline{\Gamma_*(\mathcal{I})}$ otteniamo che $\Gamma_*(\mathcal{I})$ è un ideale saturo. $\square$

Corollario 2.61. *Sia A un anello, $S = A[X_0, \dots, X_n]$ e per ogni sottoschema chiuso X di $\mathbb{P}^n_A$ indichiamo con $\mathcal{I}_X$ il fascio di ideali associato. Allora esiste una corrispondenza biunivoca*

$$\begin{array}{ccc}
\left\{ \begin{array}{c} \textit{sottoschemi chiusi} \\ X \textit{ di } \mathbb{P}^n_A \end{array} \right\} & \longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \textit{ideali omogenei} \\ \textit{saturi } I \textit{ di } S \end{array} \right\} \\
X & \longrightarrow & \Gamma_*(\mathcal{I}_X) \\
\operatorname{Proj} S/I & \longleftarrow & I
\end{array}$$

Corollario 2.62. *Sia A un anello, $S = A[X_0, \dots, X_n]$ ed $i : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_A$ un'immersione chiusa. Allora l'immersione chiusa $\operatorname{Proj} S_X \longrightarrow \mathbb{P}^n_A$ è isomorfa ad i.*

Lemma 2.63. *Sia A un anello, $S = A[X_0, \dots, X_n]$ ed I un ideale omogeneo di S. Allora gli elementi omogenei contenuti in $\overline{I}$ sono*

$$\{s \in S \mid s \text{ omogeneo e } \forall i\ s_{(X_i)} \in I_{(X_i)}\}$$

Dimostrazione. Chiamiamo T l'insieme definito nell'enunciato. Chiaramente ogni elemento omogeneo che sta in $\overline{I}$ sta in T. Viceversa, se $s \in T$, per ogni indice i esiste $y \in \overline{I}$ tale che $y/X_i^k = s/X_i^{\deg s}$ e quindi $X_i^{\deg s} y = X_i^k s \in \overline{I}$. Da questo concludiamo che $s \in \overline{\overline{I}} = \overline{I}$. $\square$

La seguente proposizione mostra come si comporta l'anello delle coordinate omogenee rispetto al cambiamento di base.

Proposizione 2.64. *Sia $B \xrightarrow{\phi} A$ un morfismo piatto di anelli noetheriani, $i : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_B$ un'immersione chiusa e $i' : X' \longrightarrow \mathbb{P}^n_A$ il cambiamento di base rispetto a ϕ. Indichiamo inoltre con $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}'$ i fasci di ideali associati rispettivamente a X, X'. Allora*

$$S_{X'} \simeq S_X \otimes_B A \qquad \Gamma_*(\mathbb{P}^n_A, \mathcal{I}') \simeq \Gamma_*(\mathbb{P}^n_B, \mathcal{I}) \otimes_B A$$

Dimostrazione. Sia $g : \mathbb{P}^n_A \longrightarrow \mathbb{P}^n_B$ il morfismo indotto da ϕ. Poichè g è un morfismo piatto otteniamo che $g^*\mathcal{I} = \mathcal{I}'$. Se $\mathcal{F}$ è un fascio quasi-coerente su $\mathbb{P}^n_B$, per il cambiamento di base per morfismi piatti (5.39) otteniamo un isomorfismo

$$\Gamma(\mathbb{P}^n_A, g^*\mathcal{F}) \simeq \Gamma(\mathbb{P}^n_B, \mathcal{F}) \otimes_B A$$

e quindi che

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_*(\mathbb{P}^n_A, g^*\mathcal{I}) & \longrightarrow & \Gamma_*(\mathbb{P}^n_A, g^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_B}) \\ \wr\mid & & \wr\mid \\ \Gamma_*(\mathbb{P}^n_B, \mathcal{I}) \otimes_B A & \longrightarrow & \Gamma_*(\mathbb{P}^n_B, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_B}) \otimes_B A \end{array}$$

$\square$

Definizione 2.65. *Sia A un anello. Un'immersione chiusa $i : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_A$ si dice degenere se esiste un iperpiano $j : H \longrightarrow \mathbb{P}^n_A$ per cui esista uno spezzamento*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & \mathbb{P}^n_A \\ & H \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

con α immersione chiusa.

Proposizione 2.66. *Sia A un anello ed $i : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_A$ una immersione chiusa. i è non degenere se e solo se l'ideale associato ad i non contiene forme lineari.*

Dimostrazione. Sia S l'anello dei polinomi su A in $n+1$ variabili, H un iperpiano definito da $\mu \in S^1$ e $J \subseteq S$ l'ideale associato ad i. Vogliamo mostrare che $\mu \in J$ se e solo se i si spezza attraverso H. Se $\mu \in J$ allora avremo una successione di morfismi

$$S \longrightarrow S/(\mu) \longrightarrow S/J$$

che induce lo spezzamento voluto. Viceversa, se si ha uno spezzamento, avremo una immersione chiusa $X \longrightarrow H$ che sarà indotta da un morfismo surgettivo

$$S/(\mu) \longrightarrow T$$

con $X \simeq \operatorname{Proj} T$. Ma allora l'immersione chiusa i è indotta da un morfismo surgettivo $S \longrightarrow T$ il cui nucleo I contiene μ. Dato che I definisce il sottoschema chiuso di $\mathbb{P}^n_k$ avremo che $\mu \in I \subseteq J$ $\square$

Come corollario della proposizione 2.64 abbiamo che

Corollario 2.67. *Sia $B \xrightarrow{\phi} A$ un morfismo piatto di anelli noetheriani, $i : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_B$ un'immersione chiusa e $i' : X' \longrightarrow \mathbb{P}^n_A$ il cambiamento di base rispetto a ϕ. Allora*

$$i \text{ non degenere} \iff i' \text{ non degenere}$$

Capitolo 3

Anelli di Gorenstein

Gli anelli di Gorenstein ricoprono un ruolo fondamentale nella caratterizzazione di una particolare classe di rivestimenti, chiamati appunto rivestimenti di Gorenstein, che daremo nell'ultimo capitolo. In questo capitolo vogliamo introdurre questa classe di anelli ed in particolare mostrare alcuni risultati che saranno essenziali per il capitolo finale.

3.1 Moduli iniettivi ed anelli di Gorenstein

Iniziamo riassumendo le principale proprietà dei moduli iniettivi.

Definizione 3.1. *Dato un anello R, un R-modulo I si dice iniettivo se il funtore* $\mathrm{Hom}_R(-, I)$ *è esatto.*

La prossima proposizione da condizioni equivalenti affinchè un R-modulo sia iniettivo.

Proposizione 3.2 ([4],proposizione 3.12)**.** *Sia R un anello ed I un R-modulo. Allora sono equivalenti:*

1. *I è iniettivo*
2. *Data un'inclusione di R-moduli $M \subseteq N$ ogni mappa iniettiva $M \longrightarrow I$ si estende ad una mappa $N \longrightarrow I$*
3. $\mathrm{Ext}^1_R(R/J, I) = 0$ *per ogni ideale J di R.*
4. $\mathrm{Ext}^i_R(M, I) = 0$ *per ogni R-modulo M ed $i > 0$.*

Definizione 3.3. *Sia R un anello ed S una R-algebra. Se M è un R-modulo allora dotiamo l'R-modulo* $\mathrm{Hom}_R(S, M)$ *di una struttura di S-modulo nel modo seguente: se $\phi : S \longrightarrow M$ è un R-omomorfismo e $s \in S$, poniamo $(s\phi)(t) = \phi(st)$. In particolare l'associazione*

$$\mathrm{Hom}_R(S, -) : \mathrm{Mod}(R) \longrightarrow \mathrm{Mod}(S)$$

definisce un funtore dalla categoria degli R-moduli alla categoria degli S-moduli.

Lemma 3.4 ([4], lemma 3.16)**.** *Sia $\phi : R \longrightarrow S$ un omomorfismo di anelli ed I un R-modulo iniettivo. Allora l'S-modulo* $\mathrm{Hom}_R(S, I)$ *è iniettivo.*

Lemma 3.5. *Sia R un anello noetheriano ed N un R-modulo. Allora, se $S \subseteq R$ è una parte moltiplicativa ed N è iniettivo allora $S^{-1}N$ è un $S^{-1}R$ modulo iniettivo. Inoltre le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *N è iniettivo*
2. *N_p è un R_p modulo iniettivo per ogni ideale primo p di R*
3. *N_m è un R_m modulo iniettivo per ogni ideale massimale m di R*

Dimostrazione. Sia J un ideale di R. Considerando l'omomorfismo surgettivo

$$\mathrm{Hom}_R(R, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(J, N)$$

localizzando rispetto ad S ed osservando che, essendo R noetheriano, J ammette una presentazione finita, otteniamo un morfismo surgettivo di $S^{-1}R$-moduli

$$\mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}R, S^{-1}N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}J, S^{-1}N)$$

Quindi, dato che ogni ideale di $S^{-1}R$ è della forma $S^{-1}J$ per qualche ideale J di R, otteniamo che $S^{-1}N$ è iniettivo.

Passiamo adesso alle condizioni equivalenti. L'implicazione 1) $\Rightarrow$ 2) è un caso particolare di quanto abbiamo visto, mentre 2) $\Rightarrow$ 3) è ovvia. Consideriamo quindi 3) $\Rightarrow$ 1). Prendiamo un ideale J di R ed il morfismo

$$\mathrm{Hom}_R(R, N) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Hom}_R(J, N)$$

Ciò che dobbiamo far vedere è che α è surgettivo. Ma per ipotesi, tenendo sempre presente che J è finitamente presentato, avremo che α è surgettivo in ogni localizzazione rispetto ad un ideale massimale e quindi che α è surgettivo. □

Definizione 3.6. *Sia R un anello, $M \subseteq N$ un inclusione di R-moduli. Tale inclusione si dice essenziale se per ogni sottomodulo T di N si ha che $T \cap M \neq 0$.*

Teorema 3.7 ([5], proposizione-definizione A3.10)**.** *Sia R un anello ed M un R-modulo. Allora*

- *Data un inclusione di R moduli $M \subseteq F$ esiste un sottomodulo massimale E di F tale che $M \subseteq E$ è essenziale*
- *Se F è un R-modulo iniettivo allora tale è E*
- *Esiste, a meno di isomorfismo, un'unica estensione essenziale $M \subseteq E$ tale che E sia un R-modulo iniettivo. E viene detto l'inviluppo iniettivo di M ed indicato con $E(M)$*

Un fatto non ovvio a priori è che l'inviluppo iniettivo localizza:

Proposizione 3.8 ([4], lemma 3.2.5)**.** *Sia R un anello noetheriano, S una parte moltiplicativa di R ed M un R-modulo. Allora*

$$S^{-1}E_R(M) \simeq E_{S^{-1}R}(S^{-1}M)$$

Definizione 3.9. *Sia R un anello ed M un R-modulo. Una risoluzione*

$$\mathcal{F} : 0 \xrightarrow{\alpha_{-2}} M \xrightarrow{\alpha_{-1}} Q_0 \xrightarrow{\alpha_0} Q_1 \xrightarrow{\alpha_1} \dots$$

si dice iniettiva se i Q_i sono R-moduli iniettivi. Posto $Q_{-1} = M$, $\mathcal{F}$ si dice minima se $Q_{i+1} \simeq E(\operatorname{coker} \alpha_{i-1})$ e α_i è data dalla composizione

$$Q_i \longrightarrow \operatorname{coker} \alpha_{i-1} \longrightarrow E(\operatorname{coker} \alpha_{i-1}) \simeq Q_{i+1}$$

per ogni $i \geqslant 0$.

Si definisce la dimensione iniettiva $\operatorname{injdim}_R M$ *di M come l'*inf *delle lunghezze di risoluzioni iniettive di M.*

Proposizione 3.10. *Sia R un anello ed M un R-modulo. Allora esiste ed è unica a meno di isomorfismo la risoluzione iniettiva minima per M.*

Teorema 3.11 ([4],teorema 3.1.17)**.** *Sia (R, m) un anello locale noetheriano ed M un R-modulo finitamente generato e di dimensione iniettiva finita. Allora*

$$\dim M \leqslant \operatorname{injdim} M = \operatorname{depth} R$$

Definizione 3.12 (Anelli di Gorenstein)**.** *Un anello locale noetheriano (R, m) si dice di Gorenstein se* $\operatorname{injdim} R < \infty$. *Un anello noetheriano R si dice di Gorenstein se ogni localizzazione nei massimali è di Gorenstein.*

Proposizione 3.13 ([4], proposizione 3.1.19)**.** *Sia R un anello noetheriano. Allora*

1. *Se R è di Gorenstein allora R è di Cohen-Macaulay.*

2. *Se R è di Gorenstein ed S è una parte moltiplicativa di R allora $S^{-1}R$ è un anello di Gorenstein. In particolare per ogni primo p di R, R_p è un anello di Gorenstein.*

3. *Se $x_1, \dots, x_n$ è una R-sequenza regolare ed R è di Gorenstein allora $R/(x_1, \dots, x_n)$ è un anello di Gorenstein. Se R è locale vale anche il viceversa.*

Teorema 3.14 ([4], teorema 3.2.10)**.** *Sia (R, m, k) un anello locale noetheriano. Allora sono equivalenti:*

- *R è un anello di Gorenstein*
- *R è un anello di Cohen-Macaulay di tipo* 1 *(2.29)*

3.2 Anelli locali artiniani e funtori dualizzanti

In questa sezione introdurremo i concetti di funtore dualizzante e modulo canonico, tipici della teoria locale degli anelli di Gorenstein, nel caso particolare di anelli locali artiniani.

Definizione 3.15. *Sia A un anello locale artiniano. Un funtore dualizzante D è un endofuntore A-lineare controvariante della categoria dei moduli finitamente generati di A tale che $D^2 \simeq \mathrm{id}$ e D sia esatto.*

Osservazione 3.16. La condizione D è esatto segue dalle altre ([5], Esercizio 21.2)

Lemma 3.17. *Sia A un anello locale artiniano, M un A-modulo finitamente generato e D funtore dualizzante. Allora*

1. $l(M) = l(DM)$
2. $\operatorname{Ann} M = \operatorname{Ann} DM$

Dimostrazione. 1) Per induzione su $l(M) = l$, se $l = 0$, ossia $M = 0$ chiaramente $DM = 0$, se $l > 0$ abbiamo una succesione esatta

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

con $0 \subsetneq N \subsetneq M$. Applicando D, sfruttando l'ipotesi induttiva e l'additività di l otteniamo l'uguaglianza desiderata.

2) Se $x \in \operatorname{Ann} M$ allora la moltiplicazione $M \xrightarrow{x} M$ è nulla. Applicando D e sfruttando la A-linearità otteniamo che $xDM = 0$, ossia $x \in \operatorname{Ann} DM$. Ragionando in modo simile per DM si ottiene l'uguaglianza. □

Definizione 3.18. *Sia (A, p) un anello locale noetheriano. Definiamo i seguenti endofuntori della categoria degli A-moduli finitamente generati.*

- $\operatorname{Top} - = - \otimes_A A/p$
- $\operatorname{Soc} - = \operatorname{Hom}_A(A/p, -)$

Osservazione 3.19. La suriezione $A \longrightarrow A/p$ induce una mappa iniettiva $\operatorname{Soc} M = \operatorname{Hom}_A(A/p, M) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(A, M) \simeq M$ che ha come immagine il sottomodulo di M degli elementi che sono annullati da p. Molte volte penseremo $\operatorname{Soc} M$ come tale sottomodulo. In particolare, se A è artiniano e M un A-modulo allora l'inclusione $\operatorname{Soc} M \subseteq M$ è essenziale. Infatti se $0 \neq N \subseteq M$ allora $\operatorname{Soc} N \subseteq N \cap \operatorname{Soc} M$ e $\operatorname{Soc} N \neq 0$, dato che $\operatorname{Ass} N = \{p\}$.

Proposizione 3.20. *Sia (A, p) un anello locale artiniano e D funtore dualizzante. Allora esistono isomorfismi*

$$\operatorname{Top} \circ D \simeq D \circ \operatorname{Soc} \qquad D \circ \operatorname{Top} \simeq \operatorname{Soc} \circ D$$

Dimostrazione. Chiaramente è sufficiente mostrare solo uno degli isomorfismi del'enunciato. Consideriamo il secondo. Dato un A-modulo finitamente generato M abbiamo isomorfismi naturali

$$\begin{aligned} \operatorname{Soc} DM = \operatorname{Hom}_A(A/p, DM) &\simeq_D \operatorname{Hom}_A(M, D(A/p)) \\ &\simeq \operatorname{Hom}_A(M/pM, D(A/p)) \simeq_D \operatorname{Hom}_A(A/p, D(\operatorname{Top} M)) \\ &\simeq \operatorname{Hom}_A(A, D(\operatorname{Top} M)) \simeq D(\operatorname{Top} M) \end{aligned}$$

dove si è usato che $p = \operatorname{Ann} D(A/p) \subseteq \operatorname{Ann} D(M/pM)$. □

Definizione 3.21. *Sia (A, p) un anello locale artiniano. Definiamo il modulo canonico ω_A come l'inviluppo iniettivo di A/p.*

Teorema 3.22. *Sia (A, p) un anello locale artiniano. Allora $\operatorname{Hom}_A(-, \omega_A)$ è un funtore dualizzante e, se D è un altro funtore dualizzante, allora $DA \simeq \omega_A$ ed esiste un isomorfismo*

$$D \simeq \operatorname{Hom}_A(-, \omega_A)$$

Dimostrazione. Iniziamo con la seconda parte. Dato un R-modulo M abbiamo isomorfismi naturali

$$DM \simeq \operatorname{Hom}_A(A, DM) \simeq_D \operatorname{Hom}_A(M, DA)$$

La relazione scritta sopra ci dice che $\operatorname{Hom}_A(-, DA)$ è esatto e quindi DA è iniettivo. Per l'osservazione 3.19 DA è l'inviluppo iniettivo di $\operatorname{Soc} DA$. D'altra parte $l(\operatorname{Soc} DA) = l(D \operatorname{Top} A) = l(\operatorname{Top} A) = 1$, ossia $\operatorname{Soc} DA \simeq A/p$.

Mostriamo adesso che $D = \operatorname{Hom}_A(-, \omega_A)$ è un funtore dualizzante. Chiaramente è A-lineare ed esatto. Rimane da mostrare che $D^2 \simeq id$. Consideriamo il morfismo naturale

$$\begin{aligned} M &\xrightarrow{\quad\alpha_M\quad} \operatorname{Hom}_A(\operatorname{Hom}_A(M, \omega_A), \omega_A) \\ m &\xrightarrow{\qquad\qquad\quad} (\phi \longrightarrow \phi(m)) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Mostriamo che α_M è un isomorfismo per induzione su $l(M)$. Se $l(M) = 0$, ossia $M = 0$ è ovvio. Se $l(M) = 1$, ossia $M \simeq A/p$, dato che ω_A è l'inviluppo iniettivo di A/p, avremo che $\operatorname{Hom}_A(A/p, \omega_A) \simeq A/p$, generato da un qualsiasi elemento non nullo. Quindi $D^2 A/p \simeq A/p$ e chiaramente $\alpha_{A/p}(1) \neq 0$, da cui otteniamo che $\alpha_{A/p}$ è un isomorfismo. Se $l(M) > 1$, esiste un sottomodulo $0 \subsetneq N \subsetneq M$ ed abbiamo quindi un diagramma

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_N"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_M"] & M/N \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{M/N}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & D^2 N \arrow[r] & D^2 M \arrow[r] & D^2 M/N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Per ipotesi induttiva α_N e $\alpha_{M/N}$ sono isomorfismi e per il lemma dei 5 otteniamo che anche α_M è un isomorfismo. □

Corollario 3.23. *Sia (A, p) un anello locale artiniano. Allora $l(\omega_A) = l(A)$, $\operatorname{Ann} \omega_A = 0$ e $\operatorname{Hom}_A(\omega_A, \omega_A) \simeq A$.*

Proposizione 3.24. *Sia (A, p) un anello locale artiniano. Sono equivalenti*

1. *A è un anello di Gorenstein*
2. *A è iniettivo*
3. *$A \simeq \omega_A$*
4. *$\operatorname{Soc} A$ è semplice*

Dimostrazione. 1) $\Leftrightarrow$ 2) Segue da 3.11.

2) $\Rightarrow$ 3) Poichè esiste una mappa iniettiva $A/p \longrightarrow A$ ed A è iniettivo allora esiste una mappa iniettiva $\omega_A \longrightarrow A$, che sarà un isomorfismo dato che $l(\omega_A) = l(A)$.

3) $\Rightarrow$ 4) $D \operatorname{Soc} A \simeq \operatorname{Top} \omega_A \simeq \operatorname{Top} A \simeq A/p$ e poichè D conserva le lunghezze otteniamo $\operatorname{Soc} A \simeq A/p$.

4) $\Rightarrow$ 2) Come nella precedente implicazione otteniamo che $\operatorname{Top} \omega_A \simeq \omega_A / p\omega_A$ è semplice, ossia ω_A è generato da un elemento. Dato che $\operatorname{Ann} \omega_A = 0$, abbiamo che $\omega_A \simeq A$ ed in particolare A è iniettivo. □

La teoria dei funtori dualizzanti e dei moduli canonici si estende al caso di anelli locali di dimensione maggiore. Per completezza esponiamo brevemente tale generalizzazione facendo riferimento al capitolo 21 di [5] ed al capitolo 3 di [4].

Definizione 3.25. *Sia (A, p) un anello locale noetheriano di dimensione d. Un A-modulo finitamente generato M si dice un modulo massimale di Cohen-Macaulay se* $\operatorname{depth} M = d$

Definizione 3.26. *Sia (A, p) un anello locale noetheriano. Un A-mudulo finitamente generato M si dice un modulo canonico per A se M è un modulo massimale di Cohen-Macaulay di dimensione iniettiva finita (e quindi uguale a* $\operatorname{depth} A$*) tale che* $\operatorname{Hom}_A(M, M) \simeq A$.

Osservazione 3.27. Se A è un anello locale artiniano (e quindi in particolare di Cohen-Macaulay) allora ω_A è il modulo canonico di A anche rispetto alla definizione appena data. Per analogia, per un anello locale di Cohen-Macaulay A, un modulo canonico viene indicato sempre con ω_A. L'ambiguità della notazione viene meno poichè:

Teorema 3.28 ([5], 21.14)**.** *Sia A un anello locale di Cohen-Macaulay. Allora due moduli canonici per A sono isomorfi.*

Per quanto riguarda l'esistenza di un modulo canonico abbiamo che

Teorema 3.29 ([4], teorema 3.3.6 e 3.3.7)**.** *Sia A un anello locale di Cohen-Macaulay. Allora sono equivalenti*

- *A è un anello di Gorenstein*
- *A è un modulo canonico per A*

Più in generale A ammette un modulo canonico se e solo se è immagine omomorfa di un anello locale di Gorenstein.

Se $\phi : (A, p) \longrightarrow (S, m)$ è un omomorfismo locale fra anelli locali di Cohen-Macaulay tale che S è un A-modulo finitamente generato ed A ammette un modulo canonico ω_A allora

$$\operatorname{Ext}^t_R(S, \omega_R)$$

dove $t = \dim R - \dim S$*, è il modulo canonico di S.*

Concludiamo mostrando la generalizzazione del teorema 3.22 al caso di anelli locali di dimensione qualsiasi:

Teorema 3.30 ([5], teorema 21.21)**.** *Sia A un anello locale di Cohen-Macaulay che ammetta un modulo canonico ω_A ed indichiamo con D il funtore* $\operatorname{Hom}_A(-, \omega_A)$ *ristretto alla categoria dei moduli massimali di Cohen-Macaulay. Allora D è un funtore dualizzante nel senso che:*

- *D porta moduli massimali di Cohen-Macaulay in moduli massimali di Cohen-Macaulay*
- *D mantiene l'esattezza di successioni fra moduli massimali di Cohen-Macaulay*
- *La mappa 3.1 è un isomorfismo per ogni M modulo massimale di Cohen-Macaulay.*

3.3 k-algebre di Gorenstein di dimensione finita

Dato un campo k, le k-algebre di dimensione finita su k sono un caso particolare di anelli artiniani (ogni primo p è massimale poichè la moltiplicazione per un elemento di A/p è un isomorfismo per dimensione). Per questi anelli, nel caso locale, $\omega_A \simeq \operatorname{Hom}_k(A, k)$ grazie a 3.29. In questa sezione vogliamo riottenere tale risultato e generalizzarlo al caso non locale al fine di ottenere una caratterizzazione delle k-algebre di Gorenstein di dimensione finita analoga al caso locale artiniano.

Proposizione 3.31. *Sia k un campo ed A una k-algebra di dimensione finita su k. Dato $\eta \in \operatorname{Hom}_k(A, k)$ sono equivalenti:*

1. $\operatorname{Ann}_A \eta = 0$
2. $\ker \eta$ *non contiene ideali di A tranne quello nullo*
3. η *genera* $\operatorname{Hom}_k(A, k)$ *come A-modulo.*

In particolare $\operatorname{Hom}_k(A, k) \simeq_A A$ *se e solo se esiste* $\eta \in \operatorname{Hom}_k(A, k)$ *che soddisfi una delle precedenti condizioni equivalenti*

Dimostrazione. 1) $\Rightarrow$ 2) Se $I \subsetneq \ker \eta$ ed $x \in I$ avremo che

$$\forall a \in A \ \eta(xa) = (x\eta)(a) = 0 \implies x \in \operatorname{Ann} \eta \implies x = 0$$

2) $\Rightarrow$ 3) Per ragioni di dimensione è sufficiente mostrare che η genera un sottomodulo di $\operatorname{Hom}_k(A, k)$ isomorfo ad A, ossia che $\operatorname{Ann} \eta = 0$:

$$a\eta = 0 \implies \forall b \in A \ \eta(ab) = 0 \implies (a) \subseteq \ker \eta \implies a = 0$$

3) $\Rightarrow$ 1) Dato che

$$\operatorname{Hom}_k(A, k) \simeq_A A/\operatorname{Ann} \eta$$

avremo che $\dim_k A = \dim_k \operatorname{Hom}_k(A, k) = \dim_k A/\operatorname{Ann} \eta$, da cui $\operatorname{Ann} \eta = 0$ □

Definizione 3.32. *Un morfismo η che soddisfi una delle condizioni equivalenti della proposizione precedente viene detto una mappa di traccia per A su k.*

Proposizione 3.33. *Sia k un campo ed A una k-algebra di dimensione finita su k. Allora $\operatorname{Hom}_k(A, k)$ è l'inviluppo iniettivo di $\bigoplus_{p \in \operatorname{Spec} A} A/p$.*

Dimostrazione. Poniamo $X = \operatorname{Spec} A$. Date le ipotesi, X è composto da un numero finito di punti chiusi, ossia A ha un numero finito di primi che sono tutti massimali e minimali. Osserviamo inoltre che essendo k un k-modulo iniettivo il funtore $\operatorname{Hom}_k(-, k)$ è esatto e inoltre, per 3.4, $\operatorname{Hom}_k(A, k)$ è un A-modulo iniettivo. Usando il teorema cinese del resto otteniamo un morfismo surgettivo

$$A \longrightarrow \bigoplus_{p \in \operatorname{Spec} A} A/p$$

Applicando $\operatorname{Hom}_k(-, k)$ otteniamo un morfismo iniettivo

$$\bigoplus_{p \in \operatorname{Spec} A} \operatorname{Hom}_k(A/p, k) \longrightarrow \operatorname{Hom}_k(A, k)$$

Tale morfismo è anche A-lineare. Osserviamo adesso che nel caso particolare di A/p vale che

$$\operatorname{Hom}_k(A/p, k) \simeq_{A/p} A/p$$

Infatti questi hanno la stessa dimensione su k e, essendo A/p un campo, abbiamo che $\operatorname{Hom}_k(A/p, k)$ è un A/p modulo libero, quindi, di rango 1. Abbiamo quindi trovato un sottomodulo di $N \subseteq \operatorname{Hom}_k(A/p, k)$ isomorfo a $\bigoplus_{p \in \operatorname{Spec} A} A/p$. Vogliamo far vedere che questa estensione è essenziale. Consideriamo quindi $0 \neq \sigma \in \operatorname{Hom}_k(A, k)$ e prendiamo un primo p di A tale che $\operatorname{Ann} \sigma \subseteq p$. Dalla successione di morfismi surgettivi

$$A \longrightarrow A/\operatorname{Ann} \sigma \longrightarrow A/p$$

dualizzando otteniamo una successione di morfismi iniettivi

$$\operatorname{Hom}_k(A/p, k) \longrightarrow \operatorname{Hom}_k(A/\operatorname{Ann} \sigma, k) \xrightarrow{\alpha} \operatorname{Hom}_k(A, k)$$

che anche in questo caso risulta essere A-lineare. Se mostriamo che $\operatorname{Im} \alpha$ è il modulo generato da σ abbiamo concluso. Ma $\operatorname{Ann} \sigma \subseteq \ker \sigma$, dunque esiste $\overline{\sigma} \in \operatorname{Hom}_k(A/\operatorname{Ann} \sigma, k)$ tale che $\alpha(\overline{\sigma}) = \sigma$. Per costruzione $\operatorname{Ann}_{A/\operatorname{Ann} \sigma}(\overline{\sigma}) = 0$ e quindi, per 3.31, $\overline{\sigma}$ genera $\operatorname{Hom}_k(A/\operatorname{Ann} \sigma, k)$ ed abbiamo finito. □

Corollario 3.34. *Sia k un campo ed A una k-algebra locale di dimensione finita su k. Allora $\omega_A \simeq \operatorname{Hom}_k(A, k)$*

Definizione 3.35. *Sia k un campo ed A una k-algebra locale di dimensione finita su k. In analogia col caso locale poniamo $\omega_A = \operatorname{Hom}_k(A, k)$.*

Osservazione 3.36. L'uso del simbolo ω_A è coerente, nel senso che vale la relazione $(\omega_A)_p \simeq \omega_{A_p}$. Nel seguito non faremo uso di questo isomorfismo, però per completezza, usando 3.8, mostriamo che esiste un tale isomorfismo e che in più può essere scelto in modo naturale. Dalla proposizione citata otteniamo subito che $(\omega_A)_p$ è l'inviluppo iniettivo di A_p/pA_p e quindi $(\omega_A)_p \simeq \omega_{A_p}$. In particolare hanno la stessa dimensione su k. D'altra parte la mappa di localizzazione $A \longrightarrow A_p$ è surgettiva e quindi otteniamo un morfismo iniettivo

$$\omega_{A_p} = \operatorname{Hom}_k(A_p, k) \longrightarrow \operatorname{Hom}_k(A, k) = \omega_A$$

Adesso, localizzando in p, si ottiene l'isomorfismo cercato.

Proposizione 3.37. *Sia k un campo ed A una k-algebra di dimensione finita su k. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *A è un anello di Gorenstein*
2. *A è iniettivo come A-modulo*
3. *$A \simeq \omega_A$*

Dimostrazione. 1) $\Rightarrow$ 2) A è iniettivo in ogni sua localizzazione e quindi, grazie a 3.5 è lui stesso iniettivo

2) $\Rightarrow$ 3) È sufficiente mostrare che esiste un ideale di A isomorfo a $T = \bigoplus_{p \in \operatorname{Spec} A} A/p$. Infatti, dato che, grazie a 3.33, $\operatorname{Hom}_k(A,k)$ è l'inviluppo iniettivo di N, l'iniettività di A permette di avere una inclusione $\operatorname{Hom}_k(A,k) \subseteq_A A$ che, per dimensione, sarà una uguaglianza. Dato un primo p di A, questo, essendo minimale, sarà un primo associato di A e, quindi, esiste un elemento μ^p annullato da p. Dunque per ogni p abbiamo una inclusione $A/p \longrightarrow A$ che manda 1 in μ^p e, sommando queste, un omomorfismo

$$\bigoplus_{p \in \operatorname{Spec} A} A/p \xrightarrow{\alpha} A$$

Vogliamo vedere che è iniettivo. A tal fine, per ogni primo di A, consideriamo un elemento $x^p \in (\bigcap_{q \neq p} q) - p$. Un tale elemento esiste poichè ogni primo di A è minimale. Se $(a^p)_{p \in \operatorname{Spec} A}$ è un elemento del nucleo di α, allora $\forall q \in \operatorname{Spec} A$

$$0 = x^q\Big(\sum_{p \in \operatorname{Spec} A} a^p \mu^p\Big) = x^q a^q \mu^q \implies x^q a^q \in q \implies a^q = 0 \text{ in } A/q$$

3) $\Rightarrow$ 1) $\operatorname{Hom}_k(A,k)$ è un A-modulo iniettivo e quindi tale sarà anche A. Ma allora, per ogni $p \in \operatorname{Spec} A$, per 3.5, A_p è un A_p-modulo iniettivo e quindi un anello di Gorenstein. $\square$

Corollario 3.38. *Sia k un campo ed A una k-algebra di dimensione finita su k. Allora A ammette una mappa di traccia se e solo se è di Gorenstein.*

Proposizione 3.39. *Sia k un campo ed A una k-algebra di dimensione finita su k. Allora sono equivalenti:*

1. *A è di Gorenstein*
2. *esiste una forma bilineare simmetrica non singolare $<,>$ su A, tale che $\forall a,b,c \in A$ $< ab, c >=< a, bc >$*

Una forma bilineare come in 2) può essere ottenuta da una mappa di traccia η dalla relazione $< a, b >= \eta(ab)$.

Dimostrazione. 1) $\Rightarrow$ 2) Sia η una mappa di traccia di A su k. Definiamo

$$< a, b >= \eta(ab)$$

$<,>$ è ovviamente simmetrica e non degenere, poichè $\ker \eta$ non contiene ideali. Inoltre

$$< ab, c >= \eta(abc) =< a, bc >$$

2) $\Rightarrow$ 1) Consideriamo l'omomorfismo definito da

$$A \xrightarrow{\eta} k$$
$$a \longrightarrow < 1, a >$$

Mostriamo che $\operatorname{Ann}\eta = 0$. Infatti, se $x \in \operatorname{Ann}\eta$, sfruttando la non singolarità di $<,>$, avremo che

$$\forall a \in A \; 0 = (x\eta)(a) = \eta(xa) =< 1, xa >=< x, a > \implies x = 0$$

$\square$

Definizione 3.40. *Se k è un campo, A è una k-algebra di Gorenstein di dimensione finita su k ed η è una mappa di traccia per A su k, allora la forma bilineare definita da*

$$< a, b >= \eta(ab)$$

si dice associata ad η.

Il seguente risultato sarà fondamentale per mostrare che i rivestimenti di Gorenstein di grado finito su un campo ammettono particolari immersioni negli spazi proiettivi.

Proposizione 3.41. *Sia k un campo ed A una k-algebra di Gorenstein di dimensione finita su k maggiore o uguale a 3. Sia η una mappa di traccia per A su k per cui $\eta(1) = 0$ ed $<,>$ la forma bilineare associata ad η.*

Allora esiste un elemento $e^* \in A$ per cui $\eta(e^*) = 1$ e per ogni elemento con tale proprietà si ha che:

1. $< 1, e^* >= 1$
2. *esiste una decomposizione di A della forma*
$$A = k \oplus F \oplus ke^*$$
3. *F è ortogonale a 1 e e^* e non singolare per $<,>$*
4. *$k \oplus F$ è il nucleo di η*
5. $$A = k + F + F^2$$

Dimostrazione. η è un morfismo non nullo e quindi surgettivo, quindi sicuramente esite $e^* \in A$ tale che $\eta(e^*) = 1$.

Sia e^* un tale elemento e poniamo $\lambda = e^*\eta$ e $F = \ker\eta \cap \ker\lambda$. Mostriamo che la coppia e^*, F soddisfa le richieste.

1) Segue dalla definizione di forma bilineare associata ad η.

2),4) Sia η che λ sono morfismi suriettivi che spezzano, quindi abbiamo decomposizioni $A = \ker\eta \oplus ke^* = \ker\lambda \oplus k$. Ma per ipotesi $k \subseteq \ker\eta$ ed un calcolo diretto mostra che $\ker\eta = k \oplus F$

3) Consideriamo $x \in F$. Allora

$$< 1, x >= \eta(x) = 0 \;\text{ e }\; < e^*, x >= \eta(e^*x) = \lambda(x) = 0$$

Inoltre se x fosse singolare allora sarebbe ortogonale a F e, per quanto visto, a 1 ed a e^* e quindi a tutto lo spazio. Dato che $<,>$ è non singolare, si ottiene $x = 0$.

5) Osserviamo che F^2 è un sottospazio di A. Poichè A è di dimensione finita su k è sufficiente escludere che $F^2 \subseteq k \oplus F = \ker \eta$. Supponiamo quindi per assurdo che $F^2 \subseteq \ker \eta$, ma allora $AF = F + F^2 + ke^*F \subseteq \ker \eta$ in quanto l'ortogonalità fra F ed e^* è equivalente al fatto che $ke^*F \subseteq \ker \eta$. Quindi l'ideale generato da F è contenuto in $\ker \eta$ e dunque $F = 0$ e $\dim_k A = 2$, contro le ipotesi. □

Per concludere (e perchè ne avremo bisogno in seguito) diamo una classificazione delle k-algebre di dimensione minore od uguale a 3

Proposizione 3.42. *Sia k un campo.*

- *A meno di isomorfismo le k-algebre di dimensione 2 sono*
  - *i campi di dimensione 2*
  - $k[X]/(X^2)$ *(caso locale, ma non un campo)*
  - $k \times k$ *(caso non locale)*

  In particolare ogni k-algebra di dimensione 2 è di Gorenstein.
- *A meno di isomorfismo le k-algebre A di dimensione 3 sono*
  - *i campi di dimensione 3*
  - $B \times k$ *con B k-algebra di dimensione 2 (caso non locale)*
  - $k[X]/(X^3)$ *(caso locale e* $\operatorname{Soc} A$ *semplice)*
  - $k[X,Y]/(X^2, XY, Y^2)$ *(caso locale e* $\operatorname{Soc} A$ *non semplice)*

  In particolare le k-algebra A di Gorenstein di dimensione 3 sono i quozienti di $K[X]$ con un polinomio cubico, tranne che per un'unica eccezione, ossia il caso in cui $k = \mathbb{F}_2$ ed A è l'algebra $\mathbb{F}_2^3$, che non può essere generata da un solo elemento come algebra su $\mathbb{F}_2$

Dimostrazione. Sia A una k-algebra. Se $\dim_k A = 2$ allora $A \simeq K[X]/(q(X))$ con $\deg q = 2$, quindi la caratterizzazione segue dalla decomposizione in primi di q.

Sia ora $\dim_k A = 3$. Se A non è locale, allora $\operatorname{Spec} A$ è composto da più punti aperti disgiunti e quindi si ha una decomposizione $A \simeq B \times k$. Osserviamo in particolare che, se $B \simeq k[X]/(g(X))$, ed $a \in k$ non è una radice di g, allora $A \simeq k[X]/(g(X)(X-a))$. Se k ha più di due elementi oppure g è irriducibile, un a di questa forma può essere sempre trovato. Dunque l'eccezione è rappresentata dal caso $k = \mathbb{F}_2$ ed $A \simeq \mathbb{F}_2^3$. Se tale algebra fosse quoziente di $\mathbb{F}_2[X]$ rispetto ad un polinomio q, allora q dovrebbe fattorizzarsi in 3 primi distinti di grado 1, ma questo è impossibile dato che $\mathbb{F}_2[X]$ contiene solo 2 polinomi lineari: X ed $X - 1$. Consideriamo adesso il caso locale, e supponiamo che A non sia un campo. Sia m il massimale di A.

$\dim_k m = 1$. Mostriamo che non può accadere. Sia ξ un elemento di A che genera il campo residuo A/m e $\mu \in k[X]$ il suo polinomio minimo su k. Se $\mu(\xi) = 0$ in A, allora $k[\xi] \subseteq A$ è un campo di dimensione 2. Per la formula sui gradi otterremmo che 2 divide 3, ossia un assurdo. Dunque $\mu(\xi) \neq 0$ e $\mu(\xi) \in m$, ossia $\mu(\xi)$ genera m su k e quindi $m \subseteq k[\xi]$. Dato che ogni elemento di A è, modulo m, equivalente ad un polinomio in ξ otteniamo che $A = k[\xi]$. Ma nelle nostre ipotesi A è locale e non un campo, quindi necessariamente $A \simeq k[X]/(X^3)$. Ma allora $A/m = k$, contro le nostre ipotesi.

$\dim_k m = 2$. Abbiamo che $0 \subsetneq \operatorname{Soc} A \subseteq m$, dato che A non è un campo. Se $\dim_k \operatorname{Soc} A = 1$, consideriamo $x \in m \setminus \operatorname{Soc} A$. Vogliamo mostrare che x genera A come algebra su k. A tal proposito mostriamo che $1, x, x^2$ sono indipendenti. Consideriamo quindi una relazione $a + bx + cx^2 = 0$ con $a, b, c \in k$. Innanzitutto avremo che $a \in m$ e quindi $a = 0$, ma allora $cx + b$ è un divisore dello zero e dunque è un elemento di m, da cui $b = 0$. Sia adesso y un generatore di $\operatorname{Soc} A$ come k-spazio. Se $c \neq 0$ allora $x^2 = xy = 0$ ed $x \in \operatorname{Soc} A$, contro le ipotesi. Dunque $c = 0$ ed abbiamo finito. Dato che A è locale, non un campo ed è un quoziente di $k[X]$, avremo necessariamete che $A \simeq k[X]/(X^3)$. In particolare tale algebra soddisfa la condizione $\operatorname{Soc} A = X^2 k$ semplice. Infine, se $\dim_k \operatorname{Soc} A = 2$, ovvero $\operatorname{Soc} A = m$, ed x, y sono una base di m su k, avremo le relazioni $x^2 = xy = y^2 = 0$ ed ovviamente che $A = k[x, y]$. Per dimensione otteniamo $A \simeq k[X, Y](X^2, XY, Y^2)$, per cui in effetti vale che $\operatorname{Soc} A = m$.

La caratterizzazioni delle algebre di Gorenstein date nell'enunciato seguono dalla classificazione precedente, dal fatto che il prodotto di anelli di Gorenstein è ancora di Gorenstein, che i campi sono di Gorenstein e che le algebre della forma $A = k[X]/(X^d) = k[x]$, sono di Gorenstein, dato che $\operatorname{Soc} A = x^{d-1} k$. □

3.4 Anelli graduati di Gorenstein

Mostriamo che anche per la condizione 'essere di Gorenstein' esiste un risultato analogo a quelli mostrati per le proprietà di 'essere di Cohen-Macaulay' e 'essere regolare'.

Proposizione 3.43. *Sia R un'anello graduato noetheriano. Se p è un primo di R allora*

$$R_p \text{ Gorenstein } \iff R_{p^*} \text{ Gorenstein}$$

In particolare sono equivalenti

1. *R è di Gorenstein*
2. *per ogni massimale omogeneo m, R_m è di Gorenstein*

Dimostrazione. Per 2.30 sappiamo che $\mathrm{r}(R_p) = \mathrm{r}(R_{p^*})$, mentre per 2.31 che R_p è Cohen-Macaulay se e solo se R_{p^*} è Cohen-Macaulay. Da 3.14 deduciamo la prima equivalenza. Per la seconda 1) $\Rightarrow$ 2) è ovvio, mentre per 2) $\Rightarrow$ 1), dato un massimale p di R, p^* è contenuto in un massimale omogeneo e quindi R_{p^*} e R_p sono di Gorenstein. □

Corollario 3.44. *Sia (R, m) un anello graduato locale e noetheriano. Allora*

$$R \text{ Gorenstein } \iff R_m \text{ Gorenstein}$$

In particolare per gli anelli graduati locali otteniamo una proprietà analoga a quella che caratterizza gli anelli locali.

Corollario 3.45. *Sia* (R, m) *un anello graduato locale e* $x \in R$ *un non divisore dello* 0 *omogeneo. Allora*

$$R \text{ Gorenstein} \iff R/xR \text{ Gorenstein}$$

Dimostrazione. È sufficiente localizzare nel massimale, tenendo presente che R/xR è ancora locale graduato. □

La teoria dei moduli canonici si estende anche al caso graduato e vogliamo esporre di seguito alcuni risultati di cui faremo uso nell'ultimo capitolo per determinare le risoluzioni minime di particolari anelli graduati di Gorenstein.

Definizione 3.46. *Sia* R *un anello noetheriano ed* M *un* R*-modulo finitamente-generato.* M *si dice un modulo canonico per* R *se, per ogni primo* p, $M_p \simeq \omega_{R_p}$

Osservazione 3.47. Per anelli non locali si perde l'unicità del modulo canonico. Infatti il modulo canonico, se esiste, è determinato a meno di tensorizzare per un modulo localmente libero di rango 1. Infatti se C, C' sono due moduli canonici poniamo $I = \mathrm{Hom}_R(C, C')$. Dalla definizione otteniamo che $I_p \simeq \mathrm{Hom}_{R_p}(\omega_{R_p}, \omega_{R_p}) \simeq R_p$ e quindi, l'omomorfismo naturale

$$\mathrm{Hom}_R(C, C') \otimes_R C \longrightarrow C'$$

è un isomorfismo. Viceversa, dato un modulo canonico C e I localmente libero di rango 1, $(C \otimes_R I)_p \simeq C_p \simeq \omega_{R_p}$.

Nel caso degli anelli graduati locali diamo la seguente definizione

Definizione 3.48. *Sia* (R, m) *un anello graduato locale di Cohen-Macaulay di dimensione* d*. Un* R*-modulo graduato finitamente generato* M *si dice un modulo canonico graduato se esistono isomorfismi graduati*

$$\mathrm{Ext}^i_R(R/m, M) \simeq \begin{cases} 0 & i \neq d \\ R/m & i = d \end{cases}$$

La connessione fra le precedenti definizioni è chiarita dalla seguente

Proposizione 3.49 ([4], proposizione 3.6.9)**.** *Sia* (R, m) *un anello locale graduato di Cohen-Macaulay e* C *un modulo canonico graduato. Allora*

- C *è un modulo canonico per* R
- *se* m *è massimale, allora* C *è univocamente determinato a meno di isomorfismi graduati.*

Corollario 3.50. *Sia* (R, m) *un anello locale graduato di Cohen-Macaulay con modulo canonico graduato* ω_R*. Allora sono equivalenti:*

- R *Gorenstein*
- $\omega_R \simeq R(a)$ *per qualche* $a \in \mathbb{Z}$

Dimostrazione. Per 3.49 ω_R è un modulo canonico. Quindi R è di Gorenstein se e solo se ω_R è localmente libero di rango 1 se e solo se, per 2.37 $\omega_R \simeq R(a)$ per qualche a. □

Esempio 3.51. Consideriamo (R, m) un anello graduato locale e regolare, con m massimale. Per 2.49 esistono elementi omogenei tali che $m = (x_1, \ldots, x_d)$, dove $d = \dim R$. In 2.50 abbiamo mostrato che il complesso di Koszul $K = K(x_1, \ldots, x_d)$ è una risoluzione minima graduata di $R/m(\sum_i \deg x_i)$ il cui ultimo termina è dato da $\det \bigoplus_i R(\deg x_i) \simeq R(\sum_i \deg x_i)$. Poichè il complesso K è auto-duale, otteniamo che $\mathrm{Ext}^i_R(R/m, R) = 0$ per $i \neq n$ e $\mathrm{Ext}(R/m, R) \simeq R/m(\sum_i \deg x_i)$. È facile vedere che i funtori Ext commutano con lo shift e quindi otteniamo che $R(-\sum_i \deg x_i)$ è il modulo canonico graduato di R. In particolare se $R = k[X_1, \ldots, X_n]$ con la graduazione naturale avremo che $\omega_R \simeq R(-n)$

Osservazione 3.52. Osserviamo che se (R, m) è Gorenstein con modulo canonico ω_R allora l'elemento $a \in \mathbb{Z}$ tale che $\omega_R \simeq R(a)$ è univocamente determinato se e solo se m è massimale.

Passiamo adesso ad un risultato di esistenza per il modulo canonico graduato.

Proposizione 3.53 ([4], proposizione 3.6.12)**.** *Sia (R, m) un anello locale graduato di Cohen-Macaulay con modulo canonico ω_R. Sia inoltre $\phi : (R, m) \longrightarrow (S, n)$ un morfismo graduato fra anelli locali graduati di Cohen-Macaulay tale che $\phi(m) \subseteq n$ e S è un R-modulo finitamente generato. Allora (S, n) ammette un modulo canonico graduato e*

$$\omega_S \simeq \mathrm{Ext}^t_R(S, \omega_R) \qquad t = \dim R - \dim S$$

In particolare, dato che gli anelli di polinomi su un campo k, per quanto visto, ammettono un modulo canonico, segue che ogni k-algebra positivamente graduata di Cohen-Macaulay ammette un modulo canonico. Ha quindi senso la seguente

Definizione 3.54. *Sia R una k-algebra positivamente graduata di Cohen-Macaulay. Definiamo*

$$a(R) = -\min\{i \mid (\omega_R)_i \neq 0\}$$

$a(R)$ è detto l'a-invariante di R.

Osservazione 3.55. Se R è Gorenstein allora $R(a(R)) \simeq \omega_R$.

Proposizione 3.56 ([4], corollario 3.6.14)**.** *Sia (R, m) un anello locale graduato di Cohen-Macaulay con modulo canonico ω_R. Se $x_1, \ldots, x_r$ è una R-sequenza regolare composta da elementi omogenei, posto $I = (x_1, \ldots, x_r)$, vale che*

$$\omega_{R/IR} \simeq (\omega_R / I\omega_R)(\sum_i \deg x_i)$$

In particolare se R è una k-algebra positivamente graduata si ha

$$a(R/IR) = a(R) + \sum_i \deg x_i$$

In vista dell'applicazione dei risultati sugli anelli graduati di Gorenstein agli anelli delle coordinate omogenee abbiamo bisogno di mettere in collegamento la proprietà di essere di Gorenstein degli anelli R_p e $R_{(p)}$. Ricordiamo che, dato un anello graduato R ed un primo p, l'anello locale $R_{(p)}$ è definito come la componente di grado 0 della localizzazione di R rispetto alla parte moltiplicativa degli elementi omogenei che non stanno in p.

Un risultato fondamentale nella teoria degli anelli di Gorenstein è il seguente ([4], corollario 3.3.15)

Lemma 3.57. *Sia $\phi : (R, m) \longrightarrow (S, n)$ un morfismo locale e piatto di anelli noetheriani. Allora*

$$S \text{ Gorenstein } \iff R \text{ e } S/mS \text{ Gorenstein}$$

Vogliamo applicare questo lemma allo studio degli anelli graduati di Gorenstein. Iniziamo col dimostrare il seguente:

Lemma 3.58. *Sia R un anello graduato. Se $t \in R$ è un elemento omogeneo ed invertibile di grado 1 allora t è un indetermita su R_0 e $R = R_0[t, t^{-1}]$*

Dimostrazione. Poichè t è invertibile, possiamo definire l'omomorfismo di R_0 algebre graduate

$$\begin{aligned} R_0[X, X^{-1}] &\xrightarrow{\phi} R_0[t, t^{-1}] \\ X &\longrightarrow t \end{aligned}$$

Vogliamo dimostrare che ϕ è un isomorfismo.

Iniettività Consideriamo $y = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n X^n \in \ker \phi$. Avremo che

$$0 = \phi(y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n t^n \implies a_n t^n = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

d'altra parte t è invertibile, dunque $a_n = (a_n t^n) t^{-n} = 0$

Surgettività Sia $y \in R$ omogeneo di grado d. Allora $a = yt^{-d} \in R_0$ e quindi $\phi(at^d) = y$ □

Corollario 3.59. *Sia R un anello graduato ed S una parte moltiplicativa composta da elementi omogenei e che contenga un elemento di grado 1. Allora $S^{-1}R \simeq (S^{-1}R)_0[X, X^{-1}]$ e, in particolare, $(S^{-1}R)_0 \longrightarrow S^{-1}R$ è un morfismo piatto.*

Proposizione 3.60. *Sia R un anello graduato e noetheriano e p un primo di R per cui esistano $x, y \notin P$ omogenei con $\deg x - \deg y = 1$. Indichiamo con m il massimale di $R_{(p^*)}$. Allora l'omomorfismo*

$$R_{(p^*)} \longrightarrow R_p \tag{3.2}$$

è piatto e R_p/mR_p è un anello di Gorenstein. In particolare sono equivalenti

1. *R_p è di Gorenstein*
2. *R_{p^*} è di Gorenstein*
3. *$R_{(p^*)}$ è di Gorenstein*

Dimostrazione. Dato che $p^{**} = p^*$ e $p^* \subseteq p$, tenendo presente il lemma 3.57, è chiaro che le ultime equivalenze seguono dalla prima parte dell'enunciato.

Indichiamo con S_p la parte moltiplicativa degli elementi omogenei che non stanno in p^* (e quindi in p). Il morfismo 3.2 è dato dalla composizione

$$R_{(p^*)} \longrightarrow S_p^{-1}R \longrightarrow R_p$$

dove la seconda mappa è la localizzazione rispetto al primo $pS_p^{-1}R$. Per definizione $R_{(p^*)}$ è la parte di grado 0 di $S_p^{-1}R$ e, per ipotesi, $x/y \in S_p^{-1}R$ è un elemento omogeneo di grado 1 ed invertibile. Grazie al corollario 3.59 otteniamo che $S_p^{-1}R \simeq R_{(p^*)}[X, X^{-1}]$ e che il morfismo $R_{(p^*)} \longrightarrow S_p^{-1}R$, e quindi 3.2, è piatto. Inoltre avremo che

$$R_p/mR_p \simeq (S_p^{-1}R/mS_p^{-1}R)_p \simeq (R_{(p^*)}/m[X, X^{-1}])_p$$

Quindi R_p/m_pR_p è la localizzazione di un anello di Gorenstein e dunque è esso stesso di Gorenstein. □

3.5 Schemi di Gorenstein

L'equivalenza stabilita in 3.60 può essere riespressa usando il linguaggio degli schemi. A questo proposito diamo la seguente

Definizione 3.61 (Schema di Gorenstein)**.** *Sia X uno schema. Un punto $p \in X$ si dice di Gorenstein se l'anello locale $\mathcal{O}_{X,p}$ è di Gorenstein. X viene detto di Gorenstein se ogni suo punto è di Gorenstein*

Osservazione 3.62. Dato che la proprietà essere di Gorenstein è locale, abbiamo le equivalenze

- X è di Gorenstein
- esiste un ricoprimento $\{U_i\}_{i \in I}$ di X composto da aperti affini tali che $\mathcal{O}_X(U_i)$ è un anello di Gorenstein per ogni $i \in I$
- per ogni aperto affine U di X l'anello $\mathcal{O}_X(U)$ è di Gorenstein

Osserviamo inoltre che se X è uno schema di Jacobson, ad esempio uno schema di tipo finito su un campo, X è di Gorenstein se e solo se ogni suo punto chiuso è di Gorenstein. Infatti, per tali schemi, i punti che sono chiusi in un aperto lo sono anche per X.

Una riformulazione di 3.57 è la seguente

Proposizione 3.63. *Sia $\pi : X \longrightarrow Y$ un morfismo di schemi noetheriani. Se $p \in X$ e π è piatto in p allora*

$$p \text{ di Gorenstein in } X \iff \pi(p) \text{ di Gorenstein in } Y \text{ e } p \text{ di Gorenstein in } X_{\pi(p)}$$

In particolare, se π è surgettivo e piatto, allora X è di Gorenstein se e solo se Y ed ogni fibra X_q sono di Gorenstein.

Dimostrazione. Sia $p \in X$ e $q = \pi(p)$. $\mathcal{O}_{Y,q} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,p}$ è un morfismo locale e piatto fra anelli noetheriani. Inoltre

$$\mathcal{O}_{X_q,p} \simeq \mathcal{O}_{X,p} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,q}} k(q) \simeq \mathcal{O}_{X,p}/q\mathcal{O}_{X,p}$$

Dunque, per il lemma 3.57, avremo che

$$\mathcal{O}_{X,p} \text{ Gorenstein } \iff \mathcal{O}_{Y,\pi(p)} \text{ e } \mathcal{O}_{X_{\pi(p)},p} \text{ Gorenstein}$$

□

Corollario 3.64. *Sia $\pi : X \longrightarrow Y$ un morfismo di schemi noetheriani piatto e surgettivo tale che ogni fibra è di Gorenstein. Allora*

$$X \textit{ di Gorenstein } \iff Y \textit{ di Gorenstein}$$

Vogliamo applicare il precedente corollario alla seguente situazione: sia R un anello positivamente graduato noetheriano generato in grado 1 ed indichiamo con π il morfismo di schemi

$$\pi : \operatorname{Spec} R \setminus V(R_+) \longrightarrow \operatorname{Proj} R \tag{3.3}$$

indotto dalle mappe $R_{(t)} \hookrightarrow R_t$, con $t \in R$ omogeneo di grado positivo. π, sugli anelli locali, è dato da 3.2 e quindi grazie a 3.60 è un morfismo piatto e surgettivo tale che ogni fibra è di Gorenstein. Grazie al corollario 3.64 abbiamo che

Proposizione 3.65. *Sia R un anello positivamente graduato e noetheriano generato in grado 1. Allora*

$$\operatorname{Proj} R \textit{ Gorenstein } \iff \operatorname{Spec} R \setminus V(R_+) \textit{ Gorenstein}$$

In paricolare se R è di Gorenstein allora $\operatorname{Proj} R$ *è uno schema di Gorenstein*

3.6 Risoluzioni pure

In questa sezione vogliamo introdurre una particolare classe di risoluzioni minime, dette pure. Molto di quanto verrà fatto nell'ultimo capitolo si baserà sulle proprietà di risoluzioni di questa forma. Prima di dare una definizione, esponiamo brevemente alcuni dei risultati fondamentali relativi al polinomio di Hilbert di un modulo graduato. Salvo avviso contrario, nel seguito R sarà un anello graduato finitamente generato come R_0 algebra tale che R_0 sia un anello locale artiniano. Osserviamo che sotto tali condizioni R è un anello noetheriano e se M è un R-modulo graduato finitamente generato, ogni sua componente omogenea M_n è un R_0 modulo finitamente generato e quindi di lunghezza finita.

Definizione 3.66 (Serie di Hilbert)**.** *Sia R un anello graduato finitamente generato come R_0 algebra e supponiamo che R_0 sia un anello locale artiniano. Dato un R-modulo graduato finitamente generato M definiamo la funzione, detta* funzione di Hilbert*, come*

$$H(M,-) : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad H(M,n) = l(M_n)$$

dove $l(-)$ indica la lunghezza. La serie di Hilbert *è definita come*

$$H_M(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} H(M,n)t^n$$

Esempio 3.67. Se $R = k[X_1, \dots, X_n]$ allora la serie di Hilbert di R è data da

$$H_R(t) = \frac{1}{(1-t)^n}$$

Infatti

$$\frac{1}{(1-t)^n} = (\sum_m t^m)^n = \sum_{h=0}^{\infty}(\sum_{j_1+\cdots+j_n=h} 1)t^h$$

e quindi i coefficienti sono le dimensioni di $k[X_1, \dots, X_n]_h$

Teorema 3.68 (Hilbert)**.** *Sia M un R-modulo finitamente generato di dimensione d. Allora esiste un'unico polinomio $P_M(X) \in \mathbb{Z}[X]$, detto polinomio di Hilbert associato ad M, tale che $P_M(n) = H(M, n)$ per $n \gg 0$. Inoltre tale polinomio ha grado $d-1$.*

Proposizione 3.69. *Sia M un R-modulo finitamente generato di dimensione d per cui esista una risoluzione libera della forma*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} R(-j)^{\beta_{p,j}} \longrightarrow \dots \longrightarrow \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} R(-j)^{\beta_{0,j}} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Allora

$$H_M(t) = S_M(t)H_R(t) \text{ con } S_M(t) = \sum_{i,j}(-1)^i\beta_{i,j}t^j$$

Se $R = k[X_1, \dots, X_n]$ allora

$$H_M(t) = \frac{S_M(t)}{(1-t)^n}$$

e $n - d = \inf\{k|S_M^{(k)}(1) \neq 0\}$

Definizione 3.70. *Sia $R = k[X_1, \dots, X_n]$ ed I un ideale omogeneo. Diremo che I (o anche R/I) ha una risoluzione pura di tipo $(d_1, \dots, d_p)$ se esiste una risoluzione della forma*

$$0 \longrightarrow R(-d_p)^{\beta_p} \longrightarrow \dots \longrightarrow R(-d_1)^{\beta_1} \longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

Chiameremo inoltre pura una risoluzione di questa forma.

Vogliamo sfruttare le ottime proprietà della localizzazione nel massimale omogeneo per un anello locale graduato per dedurre, da una risoluzione pura, informazioni sull'anello quoziente e, in particolare, trovare una condizione necessaria e sufficiente affinchè esso sia di Gorenstein. Per fare questo abbiamo bisogno del seguente

Lemma 3.71 ([5], corollario 21.16)**.** *Sia R un anello locale regolare ed I un ideale di R di codimensione c. Poniamo $A = R/I$ e supponiamo che A sia di Cohen-Macaulay. Se*

$$\mathcal{F} : 0 \longrightarrow F_n \longrightarrow \dots \longrightarrow F_1 \longrightarrow R$$

è la risoluzione minima di A, allora $n = c$ e il duale di $\mathcal{F}$ è la risoluzione minima di ω_A. Sono inoltre equivalenti:

1. *A è di Gorenstein*

2. *$\mathcal{F}$ è isomorfa come complesso al proprio duale*

3. *$F_c \simeq R$*

Proposizione 3.72. *Sia $R = k[X_1, \dots, X_n]$ ed I un ideale omogeneo. Se I ha una risoluzione pura di tipo $(d_1, \dots, d_p)$ allora*

1. *la risoluzione pura associata è minima se e solo se $0 < d_1 < \cdots < d_p$*

2. *se la risoluzione pura associata è minima allora*

$$R/I \text{ Cohen-Macaulay} \iff \forall k \ \beta_k = (-1)^{k+1} \prod_{j \neq k} \frac{d_j}{d_j - d_k}$$

   Se questo si verifica allora $\dim R/I = n - p$

3. *nelle ipotesi di* 2) *si ha che*

$$R/I \text{ Gorenstein} \iff \beta_p = 1$$

Dimostrazione. Poniamo $\beta_0 = 1$ e $d_0 = 0$ ed indichiamo con P il massimale omogeneo di R.

1) Supponiamo che la risoluzione sia minima. Dato un indice h abbiamo che i generatori di $R(-d_{h+1})^{\beta_{h+1}}$ vanno in elementi non nulli di $(PR(-d_h)^{\beta_h})_{d_{h+1}} = P^{\beta_h}_{d_{h+1}-d_h}$, che è diverso da 0 se e solo se $d_{h+1} > d_h$. Viceversa, tensorizzando per $k = R/P$, otteniamo un complesso di k-moduli graduati concentrati in gradi distinti ed è quindi chiaro che tale complesso ha i differenziali nulli.

2) Sia $A = R/I$. Con riferimento alla proposizione 3.69, dalla risoluzione pura associata otteniamo che $S_A(t) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \beta_i t^{d_i}$. Inoltre, poichè $\operatorname{pd} A = p < \infty$, dalla formula di Auslander-Buchsbaum, tenendo presente che $\operatorname{depth} P = n$, otteniamo che $\operatorname{depth}(P/I, A) = \operatorname{depth}(P, A) = n - p$. D'altra parte, detta $d = \dim A$, per 3.69 abbiamo che $n - d = \inf\{k | S_A^{(k)}(1) \neq 0\}$. Possiamo concludere che A è Cohen-Macaulay se e solo se $S_A(1) = \cdots = S_A^{(p-1)}(1) = 0$. Infatti, dato che stiamo considerando anelli positivamente grauati locali, per 2.31 avremo che

$$A \text{ Cohen-Macaulay} \iff d \leqslant n - p = \operatorname{depth}(P/I, A) \iff p - 1 < n - d$$

Le equazioni $S_A(1) = \cdots = S_A^{(p-1)}(1) = 0$, avendo posto $\beta_0 = 1$ e $d_0 = 0$, sono espresse da

$$\sum_{i=1}^{p} (-1)^i \beta_i = -1$$

$$\sum_{i=1}^{p} d_i(d_i - 1) \cdots (d_i - j + 1)(-1)^i \beta_i = 0 \qquad \text{per } j = 1, \dots, p - 1$$

che, se poniamo $\gamma_i = (-1)^i \beta_i$, può essere pensato come un sistema lineare nelle incognite $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ con matrice dei coefficienti $A = (a_{i,j})$, $a_{i,j} = d_i(d_i - 1) \cdots (d_i - j + 1)$ per $i = 1, \dots, p$, $j = 0, \dots, p-1$. Dunque la tesi è equivalente a dimostrare che tale sistema ha un'unica soluzione ed è quella data nell'enunciato. Posti $q_t(X) = X(X-1) \cdots (X-t) \in \mathbb{Z}[X]$, una semplice induzione mostra che

$X^{t+1} - q_t \in (q_0, \ldots, q_{t-1})_{\mathbb{Z}}$. Possiamo quindi trasformare la matrice A, operando sulle righe, ed ottenere una matrice di Vandermonde

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ d_1 & \ldots & d_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_1^{p-1} & \ldots & d_p^{p-1} \end{pmatrix}$$

Tali operazioni non cambiano lo spazio delle soluzioni dato che non è necessario modificare la prima riga, l'unica che nel sistema ha coeffeciente noto non nullo. Dato che i d_i sono tutti distinti possiamo applicare il metodo di Kramer per trovare la soluzione rispetto al vettore dei coefficienti noti $(-1, 0, \ldots, 0)$. Otteniamo

$$\begin{aligned} \gamma_k &= (-1)^k \frac{\prod_{j \neq k} d_j \prod_{i<j,\ i,j \neq k} (d_j - d_i)}{\prod_{i<j} (d_j - d_i)} \\ &= (-1)^k \prod_{i<k} \frac{d_i}{d_k - d_i} \prod_{k<i} \frac{d_i}{d_i - d_k} \\ &= -\prod_{i \neq k} \frac{d_i}{d_i - d_k} \end{aligned}$$

3) Grazie a 3.44 sappiamo che A è di Gorenstein se e solo se A_P è di Gorenstein. A_P è il quoziente dell'anello regolare R_P e inoltre è di Cohen-Macaulay, dato che per ipotesi lo è A. Per 3.71 A_p è di Gorenstein se e solo se l'ultimo termine della sua risoluzione minima ha rango 1. Poichè la risoluzione minima di A localizza ad una risoluzione minima di A_P abbiamo quindi quanto voluto. □

Vogliamo generalizzare quanto appena visto agli schemi. Diamo quindi la seguente

Definizione 3.73. *Sia k un campo e $i : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_k$ un'immersione chiusa con fascio di ideali associato $\mathcal{I}$. Una risoluzione minima di $\mathcal{I}$ (o anche di X o i) è una risoluzione isomorfa alla fascificazione di una risoluzione minima di $\Gamma_*(\mathcal{I})$. Chiameremo minima anche la risoluzione ottenuta da un risoluzione minima aggiungendo $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k} \longrightarrow i_*\mathcal{O}_X$.*

Proposizione 3.74. *Sia k un campo e $\mathcal{I}$ un fascio di ideali di $\mathbb{P}^n_k$. Allora*

- *se $\mathcal{H}_*$ è una risoluzione minima di $\mathcal{I}$, allora $\Gamma_*(\mathcal{H}_*)$ è una risoluzione minima di $\Gamma_*(\mathcal{I})$. In particolare applicando Γ_* a $\mathcal{H}_* \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}$ si ottiene una risoluzione minima dell'anello delle coordinate omogenee di X.*
- *$\mathcal{I}$ ammette una risoluzione minima e tale risoluzione è unica a meno di isomorfismo.*
- *Una risoluzione minima di $\mathcal{I}$ ha lunghezza minore o uguale a $n+1$ ed è composta di fasci localmente liberi che sono somma di fasci invertibili su $\mathbb{P}^n_k$.*

Dimostrazione. 1) Sia $\mathcal{T}_*$ una risoluzione minima di $\Gamma_*(\mathcal{I})$. $\mathcal{T}_*$ è una risoluzione formata da moduli graduati liberi e quindi per 2.56 $\Gamma_*(\widetilde{\mathcal{T}_*}) \simeq \mathcal{T}_*$. D'altra parte per definizione $\mathcal{H}_* \simeq \widetilde{\mathcal{T}_*}$ da cui la tesi.

2) $\Gamma_*(\mathcal{I})$ è finitamente generato e quindi le affermazioni seguono da 2.45, 2.55 e dal primo punto.

3) La stima sulla lunghezza si ottiene da 2.47 e 2.50. L'ultima affermazione è ovvia. $\square$

Mostriamo più in generale come si comporta Γ_* su una risoluzione di un fascio coerente su uno spazio proiettivo. Per far questo faremo uso della coomologia, si veda il capitolo 5 per una breve introduzione.

Lemma 3.75. *Sia A un anello noetheriano e*

$$\mathcal{F} : 0 \longrightarrow \mathcal{F}_t \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{F}_0$$

una successione esatta di fasci coerenti su $\mathbb{P}^n_A$ che siano scomponibili in una somma finita di fasci invertibili della forma $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A}(q)$ per qualche q. Poniamo inoltre

$$\mathcal{I}_{j+1} = \ker(\mathcal{F}_j \longrightarrow \mathcal{F}_{j-1})$$

Allora, per ogni $j \leqslant t+1$,

$$\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n_A, \mathcal{I}_j(m)) = 0 \ \forall i, m \ \text{con } 0 < i < j$$

Dimostrazione. L'ipotesi di scomponibilità ci assicura (5.19) che per ogni $m \in \mathbb{Z}$, $j \geqslant 0$ ed $0 < i < n$ si abbia

$$\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n_A, \mathcal{F}_j(m)) = 0$$

Procediamo per induzione discendente su j. Partendo da $j = t+1$ il caso base è banale, dato che $\mathcal{I}_{t+1} = 0$ Supponiamo quindi che la tesi valga per $j+1$ e consideriamo un indice i tale che $0 < i < j$. Abbiamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_{j+1} \longrightarrow \mathcal{F}_j \longrightarrow \mathcal{I}_j \longrightarrow 0$$

Tensorizzando per $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A}(m)$ e passando alla coomologia otteniamo

$$\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n_A, \mathcal{F}_j(m)) \longrightarrow \mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n_A, \mathcal{I}_j(m)) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+1}(\mathbb{P}^n_A, \mathcal{I}_{j+1}(m))$$

Dato che $0 < i < j \leqslant t \leqslant n$, gli estremi della successione sono nulli, il primo per l'osservazione iniziale, il secondo per l'ipotesi induttiva. $\square$

Corollario 3.76. *Nelle ipotesi della proposizione precedente abbiamo che $\Gamma_*(\mathcal{F})$ è una successione esatta di moduli graduati liberi e in particolare, per ogni $j > 0$, abbiamo suriezioni*

$$\Gamma_*(\mathcal{F}_j) \longrightarrow \Gamma_*(\mathcal{I}_j)$$

Dimostrazione. Consideriamo le successioni esatte

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_{j+1} \longrightarrow \mathcal{F}_j \longrightarrow \mathcal{I}_j \longrightarrow 0$$

per $0 < j \leqslant t$. Dato che Γ_* è esatto a sinistra è sufficiente mostrare che Γ_* mantiene l'esattezza di queste successioni. Ma tale esattezza è controllata dall'annullarsi dei termini $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^n_A, \mathcal{I}_{j+1}(m))$. Dato che $0 < 1 < j+1$ il lemma precedente ci assicura che tali termini sono 0. $\square$

Non è detto in generale che se $\mathcal{F}$ è una risoluzione di un fascio $\mathcal{G}$ allora $\Gamma_*(\mathcal{F})$ sia una risoluzione di $\Gamma_*(\mathcal{G})$. Infatti il lemma non ci dice nulla sull'annularsi dei vari $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^n_A, \mathcal{I}_1(m))$. D'altra parte tale lemma si applica bene alle risoluzioni minime di sottoschemi chiusi di $\mathbb{P}^n_k$ dato che in tali casi si cercano risoluzioni di $\Gamma_*(\mathcal{I}_1)$. A tale proposito estendiamo la nozione di risoluzione pura definita in 3.70 al caso dei sottoschemi chiusi di $\mathbb{P}^n_k$.

Definizione 3.77. *Sia $i : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_k$ un sottoschema chiuso e $\mathcal{I}$ il fascio di ideali associato. Diremo che X (o anche $\mathcal{I}$ o i) ha una risoluzione pura di tipo $(d_1, \dots, d_p)$ se esiste una risoluzione della forma*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-d_p)^{\beta_p} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-d_1)^{\beta_1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k} \longrightarrow i_*\mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

Chiameremo inoltre pura una risoluzione di questa forma.

A questo punto possiamo enunciare l'analogo della proposizione 3.72 nel caso dei sottoschemi chiusi di $\mathbb{P}^n_k$.

Proposizione 3.78. *Sia X un sottoschema chiuso di $\mathbb{P}^n_k$ e supponiamo che X abbia una risoluzione pura di tipo $(d_1, \dots, d_p)$, con $p \leqslant n$. Indichiamo con S_X l'anello delle coordinate omogenee associato ad X. Abbiamo che*

1. *Γ_* trasforma la successione pura associata ad X in una risoluzione pura di tipo $(d_1, \dots, d_p)$ di S_X e con gli stessi ranghi β_i*

2. *la risoluzione pura associata è minima se e solo se $0 < d_1 < \dots < d_p$*

3. *se la risoluzione pura associata è minima allora*

$$S_X \text{ Cohen-Macaulay } \iff \forall k \ \beta_k = (-1)^{k+1} \prod_{j \neq k} \frac{d_j}{d_j - d_k}$$

   Se questo si verifica allora $\dim S_X = n + 1 - p$

4. *nelle ipotesi di 3) si ha che*

$$S_X \text{ Gorenstein } \iff \beta_p = 1$$

   In particolare, in tal caso, X è uno schema di Gorenstein.

Dimostrazione. Siano $X_0, \dots, X_n$ le coordinate sul proiettivo, $S = k[X_0, \dots, X_n]$ e $\mathcal{F}$ la risoluzione pura associata ad X. Grazie a 3.76, $\Gamma_*(\mathcal{F})$ è una successione esatta e sarà anche pura di tipo $(d_1, \dots, d_p)$ e con gli stessi ranghi β_i, dato che $\Gamma_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-q)^\beta) \simeq S(-q)^\beta$. Con riferimento a 3.76 abbiamo che $\mathcal{I}_1$ è il fascio di ideali associato ad X e quindi $\Gamma_*(\mathcal{F})$ è una risoluzione pura di $\Gamma_*(\mathcal{I}_1)$ e di S_X. Vale inoltre che $\widetilde{\Gamma_*(\mathcal{F})} \simeq \mathcal{F}$ e quindi $\mathcal{F}$ è una risoluzione minima per X se e solo se $\Gamma_*(\mathcal{F})$ è una risoluzione minima di S_X. Ricordando che, per 3.65, X è di Gorenstein se S_X lo è, il resto dell'enunciato è semplicemente l'applicazione di 3.72 alla risoluzione pura di S_X. $\square$

Capitolo 4

Fibrati proiettivi

4.1 Proj di un fascio di algebre graduate

Definizione 4.1. *Sia Y uno schema noetheriano. Una $\mathcal{O}_Y$-algebra graduata $\mathscr{A}$ è una $\mathcal{O}_Y$ algebra tale che, per ogni aperto affine U di Y, $\mathscr{A}(U)$ sia una $\mathcal{O}_Y(U)$ algebra graduata su $\mathbb{N}$ e che gli omomorfismi di restrizione siano graduati.*

Osservazione 4.2. Data una $\mathcal{O}_Y$ algebra graduata $\mathscr{A}$, allora, per ogni $d \in \mathbb{N}$, si può definire un prefascio su Y come $\mathscr{A}_d(U) = (\mathscr{A}(U))_d$. Questo risulta essere un fascio e, più in generale, un $\mathcal{O}_Y$-modulo. Inoltre si ha la decomposizione $\mathscr{A} = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} \mathscr{A}_d$.

Lemma 4.3. *Sia Y uno schema noetheriano ed $\mathscr{A}$ una $\mathcal{O}_Y$-algebra graduata quasi-coerente. Allora, se $V \subseteq U$ sono aperti affini di Y, esiste un diagramma cartesiano*

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Proj}\mathscr{A}(V) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Proj}\mathscr{A}(U) \arrow[d] \\
V \arrow[r, "i"] & U
\end{tikzcd}$$

dove la mappa orizzontale in alto è indotta dall'omomorfismo di restrizione $\mathscr{A}(U) \longrightarrow \mathscr{A}(V)$. In particolare tale mappa è una immersione aperta.

Dimostrazione. In generale un morfismo graduato $A \xrightarrow{\phi} A'$ fra due anelli graduati non induce una mappa dai rispettivi Proj. Però una condizione sufficiente affinchè questo avvenga è che si abbia $(\phi(A_+))_{A'} = A'_+$. Mostriamo che questo avviene per i morfismi di restrizione. Il funtore i^*, essendo i una immersione aperta, coincide con la restizione su V, quindi

$$\mathscr{A}(V) \simeq i^*(\mathscr{A}_{|U})(V) \simeq \mathscr{A}(U) \otimes_{\mathcal{O}_Y(U)} \mathcal{O}_Y(V)$$

dove si è usato che $\mathscr{A}$ è quasi-coerente e U, V sono affini. La graduazione sul prodotto tensore è ottenuta considerando $\mathcal{O}_Y(V)$ come concentrato in grado 0, dunque è chiaro che l'immagine di $\mathscr{A}(U)_+$ in $\mathscr{A}(V)$ genera $\mathscr{A}(V)_+$ come modulo su $\mathcal{O}_Y(V)$ e quindi a maggior ragione come ideale di $\mathscr{A}(V)$. L'esistenza e la cartesianità del diagramma segue infine dal fatto che, se $B \longrightarrow A$ è un omomorfismo di anelli ed S è una B-algebra graduata su $\mathbb{N}$ allora il diagramma

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Proj} S \otimes_B A & \longrightarrow & \operatorname{Proj} S \\
\downarrow & & \downarrow \\
\operatorname{Spec} A & \longrightarrow & \operatorname{Spec} B
\end{array}$$

è cartesiano. □

Proposizione 4.4. *Sia Y uno schema noetheriano ed $\mathscr{A}$ una $\mathcal{O}_Y$ algebra graduata quasi-coerente. Allora, a meno di isomorfismo, esiste un'unico schema $X \xrightarrow{\pi} Y$ su Y, tale che*

- *per ogni aperto affine U di Y esiste un isomorfismo σ_U su U*

$$\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\sigma_U} \operatorname{Proj} \mathscr{A}(U)$$

- *ogni inclusione di aperti affini $V \hookrightarrow U$ induce un diagramma commutativo*

$$\begin{array}{ccc}
\pi^{-1}(V) & \xrightarrow{\sigma_V} & \operatorname{Proj} \mathscr{A}(V) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\sigma_U} & \operatorname{Proj} \mathscr{A}(U)
\end{array}$$

Lo schema X così costruito viene indicato con $\operatorname{Proj} \mathscr{A}$.

Dimostrazione. Unicità Si procede esattamente come per l'unicità di Spec (1.9)

Esistenza Grazie al lemma precedente, possiamo considerare il funtore

$$U \longrightarrow \operatorname{Proj} \mathscr{A}(U)$$

ed applicare la proposizione 1.6 per ottenere uno schema X che localmente è isomorfo a $\operatorname{Proj} \mathscr{A}(U)$. Ma se adesso consideriamo i morfismi $\operatorname{Proj} \mathscr{A}(U) \longrightarrow U$ è immediato verificare che essi, su X, sono compatibili e quindi definiscono un morfismo π da X ad Y e che tale morfismo soddisfa le ipotesi. □

Teorema 4.5 (Incollamento di fasci)**.** *Sia X uno spazio topologico, Φ un ricoprimento aperto di X con la proprietà che, $\forall\ U, V \in \Phi$, $U \cap V$ sia ricoperto da aperti in Φ. Sia inoltre $\{\mathcal{F}_U\}_{U \in \Phi}$ una famiglia di fasci di gruppi abeliani, con $\mathcal{F}_U \in \operatorname{Sh}(U)$. Supponiamo che*

- *per ogni $V \subseteq U \in \Phi$ esiste un isomorfismo $\sigma_U^V : \mathcal{F}_V \xrightarrow{\simeq} (\mathcal{F}_U)_{|V}$*
- *tali isomorfismi sono compatibili, nel senso che, dati $W \subseteq V \subseteq U \in \Phi$, si ha $\sigma_U^W = (\sigma_U^V)_{|V} \circ \sigma_V^W$*

Allora, a meno di isomorfismo, esiste un unico fascio $\mathcal{F} \in \operatorname{Sh}(X)$ tale che, al variare di $U \in \Phi$, si hanno isomorfismi $\mathcal{F}_{|U} \simeq \mathcal{F}_U$ compatibili con le mappe σ_U^V.

Dimostrazione. Unicità Due fasci che soddisfino le ipotesi sono isomorfi ristretti ad ogni aperto in Φ, con isomorfismi compatibili con le restrizioni. Tali isomorfismi si estendono quindi ad un isomorfismo globale.

Esistenza Iniziamo col costruire un fascio $\mathcal{G} \in \mathrm{Sh}(X)$ tale che, per ogni $U \in \Phi$, $\mathcal{F}_U \subseteq \mathcal{G}_{|U}$ e dove i vari morfismi di incollamento siano delle inclusioni. Dato $p \in X$, fissiamo $U \in \Phi$ tale che $p \in U$ e poniamo

$$G^p = (\mathcal{F}_U)_p$$

Al variare dei $V \in \Phi$ tali che $p \in V$, è possibile, fattorizzando attraverso U ed usando le proprietà di Φ, costruire morfismi $\mathcal{F}_V(W) \longrightarrow G^p$, $W \subseteq V$, compatibili con le σ e tali che inducano isomorfismi $(\mathcal{F}_V)_p \xrightarrow{\simeq} G^p$. A questo punto, definito il fascio $\mathcal{G}(W) = \prod_{p \in W} G^p$ su X, avremo, per ogni $U \in \Phi$, morfismi iniettivi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_U(V) &\longrightarrow \mathcal{G}(V) \\ \tau &\longrightarrow (\tau_p)_{p \in V} \end{aligned}$$

su ogni aperto V di X tale che $V \subseteq U$. Otteniamo quindi mappe iniettive $\mathcal{F}_U \longrightarrow \mathcal{G}_{|U}$ e possiamo identificare i vari $\mathcal{F}_U$ con le loro immagini in $\mathcal{G}$ e considerare i morfismi σ_U^V come inclusioni, ossia $(\mathcal{F}_U)_{|V} = \mathcal{F}_V$. Più in generale abbiamo che $(\mathcal{F}_U)_{|U \cap V} = (\mathcal{F}_V)_{|U \cap V}$ e quindi possiamo definire il prefascio $\mathcal{H}$ come

$$\mathcal{H}(V) = \begin{cases} \mathcal{F}_U(V) & \text{esiste } U \in \Phi \text{ tale che } V \subseteq U \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per costruzione $\mathcal{F}_U = \mathcal{H}_{|U}$ e quindi il fascio associato ad $\mathcal{H}$ soddisfa le nostre richieste. $\square$

Proposizione 4.6 ([Ha], II, prop 5.18)**.** *Sia $S = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S_n$ un'algebra graduata generata da S_1 come S_0 algebra e poniamo $X = \operatorname{Proj} S$. Allora*

- *per ogni intero n il fascio $\mathcal{O}_X(n)$ è invertibile*
- *$\mathcal{O}_X(n) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(m) \simeq \mathcal{O}_X(n+m)$ per ogni n, m interi*
- *se $T = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} T_n$ è un'altra algebra graduata generata da T_1 come T_0 algebra, $Y = \operatorname{Proj} T$ e $\phi : T \longrightarrow S$ è un morfismo graduato che induce un morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ allora $f^*\mathcal{O}_Y(n) \simeq \mathcal{O}_X(n)$ per ogni intero n.*

Definizione 4.7. *Sia Y uno schema noetheriano ed $\mathscr{A} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{A}_n$ una $\mathcal{O}_Y$-algebra graduata quasi-coerente. Diremo che $\mathscr{A}$ è generata come algebra in grado 1 se, per ogni aperto affine U di Y, $\mathscr{A}(U)$ è generata da $\mathscr{A}_1(U)$ come $\mathscr{A}_0(U)$ algebra. Diremo inoltre che è finitamente generata se $\mathscr{A}_1(U)$ è un $\mathscr{A}_0(U)$-modulo finitamente generato. In particolare, se Y è affine, entrambe le condizioni possono essere verificate solo su $\mathscr{A}(Y)$.*

Proposizione 4.8. *Sia Y uno schema noetheriano, $\mathscr{A} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{A}_n$ una $\mathcal{O}_Y$-algebra graduata generata da $\mathscr{A}_1$ come $\mathscr{A}_0$-algebra e poniamo $X = \operatorname{Proj} \mathscr{A} \xrightarrow{\pi} Y$. Allora, per ogni intero n, esiste ed è unico a meno di isomorfismo un fascio quasi-coerente $\mathcal{O}_X(n)$ tale che al variare degli aperti della forma $\pi^{-1}(U)$, con U aperto affine di Y, esistano isomorfismi compatibili con le restrizioni*

$\mathcal{O}_X(n)_{|\pi^{-1}(U)} \simeq \mathcal{O}_{\operatorname{Proj}\mathscr{A}(U)}(n)$. *In particolare* $\mathcal{O}_X(n)$ *è invertibile e vale la relazione*

$$\mathcal{O}_X(n) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(m) \simeq \mathcal{O}_X(n+m)$$

per ogni interi n, m.

Dimostrazione. Consideriamo $\Phi = \{\pi^{-1}(U) \mid U \text{ aperto affine di } Y\}$ e consideriamo la famiglia $\beta = \{\mathcal{O}_U(n)\}_{U\in\Phi}$. Vogliamo applicare il teorema 4.5. Osserviamo innanzitutto che Φ soddisfa le ipotesi di tale teorema. Consideriamo adesso un inclusione $V \subseteq U$ di aperti affini di Y e la corrispondente immersione aperta $\pi^{-1}(V) \xrightarrow{i} \pi^{-1}(U)$ di aperti in Φ. Poichè tale immersione è indotta dall'omomorfismo graduato $\mathscr{A}(U) \longrightarrow \mathscr{A}(V)$ (4.3) e queste algebre, per ipotesi, sono generate come algebre su, rispettivamente, $\mathscr{A}_0(U)$ e $\mathscr{A}_0(V)$ dagli alementi di grado 1, avremo che (4.6)

$$\mathcal{O}_{\pi^{-1}(V)}(n) \simeq i^*(\mathcal{O}_{\pi^{-1}(U)}(n)) \simeq (\mathcal{O}_{\pi^{-1}(U)}(n))_{|\pi^{-1}(V)}$$

Siamo quindi nelle ipotesi del teorema di incollamento 4.5, che ci garantisce l'esistenza di $\mathcal{O}_X(n)$. Le ultime affermazioni seguono considerando le relative proprietà sugli aperti di Φ, dove risultano essere vere in virtù di 4.6. $\square$

4.2 Il fibrato proiettivo $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ come schema e come funtore

Proposizione 4.9. *Sia* X *uno schema noetheriano,* $\mathcal{F} \in \operatorname{QCoh}(X)$ *ed* $n \in \mathbb{N}$. *Esiste, a meno di isomorfismo, un'unico fascio quasi-coerente* $\operatorname{S}\mathcal{F}$ ($\operatorname{S}^n\mathcal{F}$) *tale che, al variare degli aperti affini* U *di* X*, esistano isomorfismi*

$$(\operatorname{S}\mathcal{F})_{|U} \simeq (\operatorname{S}\mathcal{F}(U))\widetilde{\ } \qquad (\ (\operatorname{S}^n\mathcal{F})_{|U} \simeq (\operatorname{S}^n\mathcal{F}(U))\widetilde{\ }\ )$$

compatibili con le restrizioni. Inoltre $\operatorname{S}\mathcal{F}$ *ha una struttura naturale di* $\mathcal{O}_X$ *algebra graduata con decomposizione data da*

$$\operatorname{S}\mathcal{F} \simeq \bigoplus_{n\geqslant 0} \operatorname{S}^n\mathcal{F}$$

Dimostrazione. Poniamo $\operatorname{S}^\infty = \operatorname{S}$ e consideriamo $n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$. Osserviamo che se $V \subseteq U$ sono aperti affini di X ed M è un $\mathcal{O}_X(U)$-modulo vale che

$$\Gamma(V, (\operatorname{S}^n M)\widetilde{\ }) \simeq \operatorname{S}^n M \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_X(V) \simeq \operatorname{S}^n(M \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_X(V)) \simeq \operatorname{S}^n \Gamma(V, \widetilde{M})$$

Ma allora la famiglia di fasci

$$\{(\operatorname{S}^n\mathcal{F}(U))\widetilde{\ }\}_{U \text{ affine}}$$

soddisfa le ipotesi di 4.5, che ci garantisce l'esistenza di $\operatorname{S}^n\mathcal{F}$.

Grazie all'ipotesi di noetherianità, avremo che i due fasci $\operatorname{S}\mathcal{F}$ e $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\operatorname{S}^n\mathcal{F}$ sono isomorfi in modo naturale su ogni aperto affine di X e dunque saranno globalmente isomorfi. Allo stesso modo si può ottenere una moltiplicazione $\operatorname{S}\mathcal{F}\otimes\operatorname{S}\mathcal{F} \longrightarrow \operatorname{S}\mathcal{F}$ incollando la moltiplicazione che si ha su ogni aperto affine e quindi dotare $\operatorname{S}\mathcal{F}$ di una struttura di $\mathcal{O}_X$-algebra graduata. $\square$

Definizione 4.10. *Sia Y uno schema noetheriano ed $\mathcal{E}$ un fascio localmente libero di rango d su Y. Il fibrato proiettivo associato a $\mathcal{E}$ è lo schema su Y*

$$\operatorname{Proj}(\operatorname{S}\mathcal{E}) = \mathbb{P}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\pi} Y$$

Osservazione 4.11. Se $\operatorname{Spec} B \simeq U \subseteq Y$ è un aperto affine tale che $\mathcal{E}_{|U} \simeq \mathcal{O}_U^d$ allora $\operatorname{S}\mathcal{E}_{|U} \simeq B[X_0, \dots, X_{d-1}]^{\sim}$ e quindi $\pi_{|\pi^{-1}(U)}$ è isomorfa su U a $\mathbb{P}_U^{d-1} \longrightarrow U$.

Grazie a tale osservazione possiamo estendere i risultati classici sugli spazi proiettivi:

Proposizione 4.12. *Sia Y uno schema noetheriano, $\mathcal{E}$ un fascio coerente localmente libero di rango d e $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\pi} Y$ il fibrato proiettivo associato. Allora si ha un isomorfismo naturale di $\mathcal{O}_Y$-algebre graduate*

$$\operatorname{S}\mathcal{E} \simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(n)$$

In particolare:

$$\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(n) \simeq \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \mathcal{O}_Y & n = 0 \\ \mathcal{E} & n = 1 \\ \operatorname{S}^n \mathcal{E} & n \geqslant 0 \end{cases}$$

Inoltre esiste un morfismo surgettivo

$$\pi^* \mathcal{E} \simeq \pi^* \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$$

Un'altra importante caratterizzazione dei fibrati proiettivi appena introdotti è la seguente.

Proposizione 4.13. *Sia Y uno schema noetheriano ed $\mathcal{E}$ un fascio localmente libero di rango d. Definiamo il seguente funtore*

$$\operatorname{Sch}_Y^{op} \xrightarrow{\qquad P_{\mathcal{E}} \qquad} (\text{set})$$

$$(X, \rho) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \textit{classi di equivalenza di} \\ \textit{morfismi surgettivi } \rho^* \mathcal{E} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{L} \textit{ con} \\ \mathcal{L} \textit{ invertibile su } X \end{array} \right\}$$

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "\rho'"'] \arrow[dd, "h"] \\ Y & \\ & X \arrow[ul, "\rho"] \end{tikzcd} \longrightarrow \begin{tikzcd} P_{\mathcal{E}}(X) \arrow[r, "P_{\mathcal{E}}(h)"] & P_{\mathcal{E}}(X') \\ \rho^* \mathcal{E} \arrow[d, "\sigma"] & h^* \rho^* \mathcal{E} \simeq \rho'^* \mathcal{E} \arrow[d, "h^* \sigma"'] \arrow[d, shift left=4ex] \\ \mathcal{L} & h^* \mathcal{L} \end{tikzcd}$$

dove due oggetti $\rho^* \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{L}$, $\rho^* \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{L}'$ sono equivalenti se esiste un isomorfismo

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{L} \arrow[d, phantom, "\wr"] \\ \rho^* \mathcal{E} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \mathcal{L}' \end{tikzcd}$$

Allora la coppia $(\mathbb{P}(\mathcal{E}), \pi^*\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1))$ *è un oggetto universale per* $P_{\mathcal{E}}$*. In particolare ogni morfismo* $X \xrightarrow{f} \mathbb{P}(\mathcal{E})$ *è univocamente determinato da* $f^*\pi^*\mathcal{E} \longrightarrow f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$

Dimostrazione. Vogliamo sfruttare la classica corrispondenza fra morfismi $X \longrightarrow \mathbb{P}^{d-1}_B$ e coppie formate da un fascio invertibile $\mathcal{L}$ di X e da un sistema di d sezioni globali che generano $\mathcal{L}$. Dato uno schema $X \xrightarrow{\rho} Y$ consideriamo la funzione

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{h}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(X) & \xrightarrow{\mu_X} & P_{\mathcal{E}}(X) \\ g & \longmapsto & \begin{array}{c} g^*\pi^*\mathcal{E} \simeq \rho^*\mathcal{E} \\ \downarrow \quad \swarrow \\ g^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) \end{array} \end{array}$$

Questa definisce un morfismo di funtori fra $\mathrm{h}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$ e $P_{\mathcal{E}}$ e vogliamo far vedere che in effetti è un isomorfismo. Sia quindi $X \xrightarrow{\rho} Y$ uno schema su Y e consideriamo un oggetto $\rho^*\mathcal{E} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{L}$, dove $\mathcal{L}$ è un fascio invertibile su X. Se $Y \simeq \operatorname{Spec} B$ ed $\mathcal{E}$ è libero, scegliamo una base $x_0, \dots, x_{d-1}$ di $\mathcal{E}$. Allora $\sigma(x_0), \dots, \sigma(x_{d-1})$ sono sezioni globali che generano $\mathcal{L}$ e quindi otteniamo un morfismo $X \longrightarrow \operatorname{Proj} R$, dove $R = B[X_0, \dots, X_{d-1}]$. D'altra parte abbiamo un isomorfismo $\mathrm{S}\,\mathcal{E} \longrightarrow R$, $x_i \longrightarrow X_i$ e quindi in definitiva otteniamo

$$X \longrightarrow \operatorname{Proj} R \longrightarrow \operatorname{Proj} \mathrm{S}\,\mathcal{E} = \mathbb{P}(\mathcal{E})$$

È facile verificare che tale composizione non dipende dalla scelta iniziale della base di $\mathcal{E}$. Tornando al caso generale, al variare degli aperti affini U di Y che banalizzano $\mathcal{E}$, abbiamo morfismi surgettivi

$$\rho^*\mathcal{E}_{|\rho^{-1}(U)} \longrightarrow \mathcal{L}_{|\rho^{-1}(U)}$$

che inducono quindi mappe $\tau_U : \rho^{-1}(U) \longrightarrow \pi^{-1}(U) \simeq \mathbb{P}^{d-1}_U$. Se $V \subseteq U$ è un inclusione di aperti affini che banalizzano $\mathcal{E}$ avremo che $\tau_{U|\pi^{-1}(V)}$ e τ_V sono entrambe indotte da $\rho^*\mathcal{E}_{|\rho^{-1}(V)} \longrightarrow \mathcal{L}_{|\rho^{-1}(V)}$ e quindi coincidono per la corrispondenza in $\mathbb{P}^{d-1}_V$. Otteniamo quindi un morfismo $\tau : X \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$. È facile adesso, sfruttando la caratterizzazione dei morfismi negli spazi proiettivi, vedere che l'associazione appena costruita è una inversa di μ_X.

Infine, dalla definizione di $\mu_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$ otteniamo quindi che $(\mathbb{P}(\mathcal{E}), \mu_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(\mathrm{id})) = (\mathbb{P}(\mathcal{E}), \pi^*\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1))$ è un oggetto universale di $P_{\mathcal{E}}$. □

Osservazione 4.14. Osserviamo che dati due morfismi surgettivi $\rho^*\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{L}$, $\rho^*\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{L}'$ se questi sono equivalenti, l'isomorfismo $\mathcal{L} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{L}'$ è unico.

Proposizione 4.15. *Sia* Y *uno schema noetheriano,* $\mathcal{E}$ *un fascio localmente libero di rango* d *e* $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\pi} Y$ *il fibrato proiettivo associato. Supponiamo inoltre di avere un cambiamento di base* $g : Y' \longrightarrow Y$*, con* Y' *noetheriamo e poniamo* $\pi' : \mathbb{P}(g^*\mathcal{E}) \longrightarrow Y'$*. Allora il seguente diagramma*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}(g^*\mathcal{E}) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\pi'"'] & \mathbb{P}(\mathcal{E}) \arrow[d, "\pi"] \\
Y' \arrow[r, "g"] & Y
\end{tikzcd}$$

dove α è indotta da $(g \circ \pi')^*\mathcal{E} \simeq \pi'^*(g^*\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(g^*\mathcal{E})}(1)$, è cartesiano. Se $X \xrightarrow{\rho} Y$ è uno schema, $X' \xrightarrow{\rho'} Y'$ è ottenuto cambiando base rispetto a g ed $f : X \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ è associata a $\rho^*\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{L}$ abbiamo un diagrama cartesiano

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\
\mathbb{P}(g^*\mathcal{E}) \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{P}(\mathcal{E})
\end{tikzcd}$$

dove f' è associata a $\rho'^*(g^*\mathcal{E}) \simeq \beta^*\rho^*\mathcal{E} \longrightarrow \beta^*\mathcal{L}$.

Dimostrazione. Poniamo $\mathcal{E}' = g^*\mathcal{E}$. Per dimostrare che il primo diagramma è cartesiano utilizziamo il lemma di Yoneda, ossia mostriamo che esiste un isomorfismo $\mathrm{h}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}')} \longrightarrow \mathrm{h}_{Y'} \times_{\mathrm{h}_Y} \mathrm{h}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$ (su Sch_Y). Identifichiamo in particolare $\mathrm{h}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} \simeq P_{\mathcal{E}}$ e consideriamo uno schema $X \xrightarrow{\rho} Y$. Osserviamo che $\mathrm{h}_Y(X) = \{\rho\}$. Dato un morfismo $f : X \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}') \in \mathrm{h}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}')}(X)$ allora otteniamo subito $\rho' = \pi' \circ f \in \mathrm{h}_{Y'}(X)$. Inoltre, considerando X come schema su Y' tramite ρ', avremo che f è associato ad una suriezione $\rho'^*\mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{L}$, con $\mathcal{L}$ fascio invertibile di X. Ma poichè $g \circ \rho' = \rho$ la stessa suriezione è un oggetto di $P_{\mathcal{E}}(X)$. È facile verificare che questo in effetti definisce un morfismo di funtori $\mathrm{h}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}')} \longrightarrow \mathrm{h}_{Y'} \times_{\mathrm{h}_Y} P_{\mathcal{E}}$. Per mostrare che è un isomorfismo basta far vedere che è tale su ogni schema $X \xrightarrow{\rho} Y$. Ma la mappa appena definita sulle fibre rispetto alle proiezioni su $\mathrm{h}_{Y'}(X)$, fissando un ρ' in questo insieme (quindi tale che $g \circ \rho' = \rho$), è data da

$$\begin{array}{ccc}
P_{\mathcal{E}'}(X, \rho') & \longrightarrow & P_{\mathcal{E}}(X, \rho) \\
\begin{array}{c}\rho'^*\mathcal{E}' \\ \downarrow \\ \mathcal{L}\end{array} & \longrightarrow & \begin{array}{c}\rho^*\mathcal{E} \simeq \rho'^*(g^*\mathcal{E}) \\ \searrow \quad \swarrow \\ \mathcal{L}\end{array}
\end{array}$$

ed è quindi biunivoca. La mappa α sarà associata a $\mathrm{id} \in \mathrm{h}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}')} \longrightarrow (\pi', \pi'^*(g^*\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(g^*\mathcal{E})}(1))$, come voluto.

Passando adesso alla seconda parte dell'enunciato, osserviamo che α è anche associata a $\alpha^*\pi^*\mathcal{E} \longrightarrow \alpha^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$, quindi f', che esiste per le note proprietà del prodotto fibrato, sarà associato a

$$\begin{array}{ccc}
f'^*(\pi'^*g^*\mathcal{E}) & \longrightarrow & f'^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}')}(1)) \\
\wr\| & & \wr\| \\
(f'^*\alpha^*)(\pi^*\mathcal{E}) & \longrightarrow & (f'^*\alpha^*)\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) \\
\wr\| & & \wr\| \\
\beta^*(f^*\pi^*\mathcal{E}) & \longrightarrow & \beta^*(f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1))
\end{array}$$

come voluto. $\square$

Osservazione 4.16. Se Y è uno schema noetheriano allora $\mathbb{P}(\mathcal{O}_Y^{n+1}) \simeq \mathbb{P}_Y^n$. Infatti questo è vero se $Y = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ e in generale, considerato $g : Y \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, $g^*\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}^{n+1} \simeq \mathcal{O}_Y^{n+1}$ e quindi

$$\mathbb{P}_Y^n \simeq Y \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \simeq \mathbb{P}(\mathcal{O}_Y^{n+1})$$

Proposizione 4.17. *Sia Y uno schema noetheriano, $d \geqslant 2$ ed $\mathcal{E}$ un fascio localmente libero di rango d con fibrato proiettivo associato π. Allora*

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Pic} Y \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & \operatorname{Pic}\mathbb{P}(\mathcal{E}) \\ (\mathcal{L}, n) & \longrightarrow & \pi^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(n) \end{array}$$

è iniettiva.

Dimostrazione. Supponiamo che $\pi^*\mathcal{L}(n) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$, ossia che $\pi^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(-n)$. Applicando π_*, per la formula di proiezione, otteniamo che $\mathcal{L} \simeq \mathrm{S}^{-n}\mathcal{E}$. $n > 0$ non può verificarsi altrimenti $\mathcal{L} = 0$ e stessa conclusione per $n < 0$, dato che $\operatorname{rk}\mathrm{S}^{-n}\mathcal{E} > 1$. Otteniamo quindi che $n = 0$ e $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_Y$. $\square$

Lemma 4.18. *Sia X uno schema e $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ due fasci localmente liberi di rango finito (e costante) su X. Allora esiste un isomorfismo naturale*

$$\det\mathcal{N} \otimes \mathcal{M} \simeq (\det\mathcal{N})^{\otimes \operatorname{rk}\mathcal{M}} \otimes (\det\mathcal{M})^{\otimes \operatorname{rk}\mathcal{N}}$$

Dimostrazione. Poniamo $m = \operatorname{rk}\mathcal{M}$, $n = \operatorname{rk}\mathcal{N}$. Consideriamo un aperto affine U di X su cui sia $\mathcal{M}$ che $\mathcal{N}$ sono liberi. Dato un isomorfismo $g : \mathcal{M}_{|U} \simeq \mathcal{O}_U^m$ possiamo definire un isomorfismo

$$\lambda_g : \det\mathcal{N}_{|U} \otimes \mathcal{M}_{|U} \xrightarrow{\det id\otimes g} \det(\mathcal{N}_{|U} \otimes \mathcal{O}_U^m) \simeq (\det\mathcal{N}_{|U})^{\otimes m} \otimes \det(\mathcal{O}_U^m)^{\otimes n}$$

dove l'isomorfismo di destra non dipende da g, e un altro

$$\eta_g : (\det\mathcal{N}_{|U})^{\otimes m} \otimes \det(\mathcal{O}_U^m)^{\otimes n} \xrightarrow{id\otimes\det(g^{-1})^{\otimes n}} (\det\mathcal{N}_{|U})^{\otimes m} \otimes (\det\mathcal{M}_{|U})^{\otimes n}$$

Se adesso $g' : \mathcal{M}_{|U} \simeq \mathcal{O}_U^m$ allora esiste un automorfismo f di $\mathcal{O}_U^m$ tale che $g' = f \circ g$. Se si fissano basi di $\mathcal{M}_{|U}$, $\mathcal{N}_{|U}$ otteniamo che il primo isomorfismo in λ_g è dato da una matrice quadrata con n blocchi uguali alla matrice di g. In particolare avremo che $\lambda_{g'} = (\det f)^n\lambda_g$. D'altra parte è chiaro che invece $\eta_{g'} = (\det f)^{-n}\eta_g$. Otteniamo quindi che la composizione $\eta_g \circ \lambda_g$ non dipende da g e quindi questi isomorfismi locali si incollano a formare un isomorfismo globale come nell'enunciato. $\square$

Corollario 4.19. *Sia Y uno schema noetheriano ed $\mathcal{E}$ un fascio localmente libero di rango d con fibrato proiettivo associato $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow Y$. Se $\mathcal{N}$ è un fascio localmente libero di rango n allora*

$$\det(\mathcal{N}(q)) \simeq (\det\mathcal{N})(nq)$$

Proposizione 4.20 (Successione esatta di Eulero)**.** *Sia Y uno schema noetheriano ed $\mathcal{E}$ un fascio localmente libero di rango d con fibrato proiettivo associato $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow Y$. Allora esiste una successione esatta*

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}(\mathcal{E})/Y} \longrightarrow (\pi^*\mathcal{E})(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} \longrightarrow 0$$

In particolare $\omega_\pi = \det \Omega_{\mathbb{P}(\mathcal{E})/Y} \simeq (\det \pi^*\mathcal{E})(-d)$

Dimostrazione. Vogliamo ricondurci alla successione esatta di Eulero sugli spazi proiettivi. Abbiamo un morfismo surgettivo $\pi^*\mathcal{E}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$. Al variare degli aperti affini U di Y che banalizzano $\mathcal{E}$, tale morfismo coincide con la suriezione $\mathcal{O}^d_{\mathbb{P}^{d-1}_U}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{d-1}_U}$ della successione esatta di Eulero per $\mathbb{P}^{d-1}_U$ che ha come nucleo $\Omega_{\mathbb{P}^{d-1}_U/U}$. Se poniamo $\mathcal{K} = \ker((\pi^*\mathcal{E})(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})})$, abbiamo mostrato che su ogni aperto affine U di Y che banalizza $\mathcal{E}$ $\mathcal{K}_{|\pi^{-1}(U)}$ è il fascio dei differenziali relativi di $\pi^{-1}(U)$ su U e di conseguenza $\mathcal{K}$ è il fascio dei differenziali relativi di $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ su Y, da cui la successione esatta. Infine, dato che $\Omega_{\mathbb{P}(\mathcal{E})/Y}$ è localmente libero, possiamo applicare la formula del determinante per successioni esatte ottenendo

$$\det \Omega_{\mathbb{P}(\mathcal{E})/Y} \simeq \det(\pi^*\mathcal{E}(-1)) \simeq \det(\pi^*\mathcal{E})(-d)$$

□

4.3 Isomorfismi fra fibrati proiettivi

Proposizione 4.21. *Siano Y uno schema noetheriano ed $\mathcal{E}$ un fascio localmente libero di rango d con fibrato proiettivo associato $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow Y$. Se $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{L}$, dove $\mathcal{L}$ è un fascio invertibile su Y, ed indichiamo $\pi' : \mathbb{P}(\mathcal{E}') \longrightarrow Y$, allora il morfismo surgettivo*

$$\pi^*\mathcal{E}' \simeq \pi^*\mathcal{E} \otimes \pi^*\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) \otimes \pi^*\mathcal{L}$$

induce isomorfismi $\lambda : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}')$ e

$$\lambda^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}')}(1) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}} \pi^*\mathcal{L}$$

Dimostrazione. Dato uno schema $X \xrightarrow{\rho} Y$ definiamo

$$\begin{tikzcd}
P_{\mathcal{E}}(X) \arrow[rr, "\eta_{\mathcal{L},X}"] & & P_{\mathcal{E}\otimes\mathcal{L}}(X) & \\
\rho^*\mathcal{E} \arrow[d] & \longrightarrow & \rho^*\mathcal{E} \otimes \rho^*\mathcal{L} \arrow[d] & \simeq \rho^*(\mathcal{E}\otimes\mathcal{L}) \arrow[dl] \\
\mathcal{G} & & \mathcal{G} \otimes \rho^*\mathcal{L} &
\end{tikzcd}$$

È chiaro che le composizioni $\eta_{\mathcal{L}}\eta_{\mathcal{L}^{-1}}$ e $\eta_{\mathcal{L}^{-1}}\eta_{\mathcal{L}}$ sono isomorfismi e dunque tale sarà anche $\eta_{\mathcal{L}}$. Abbiamo che $(\mathbb{P}(\mathcal{E}), \eta_{\mathcal{L},\mathbb{P}(\mathcal{E})}(\mathrm{id})) = (\mathbb{P}(\mathcal{E}), \pi^*\mathcal{E} \otimes \pi^*\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) \otimes \pi^*\mathcal{L})$ è un oggetto universale per $P_{\mathcal{E}'}$ e di conseguenza esiste un'unico isomorfismo $\lambda : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}')$ tale che

$$\begin{tikzcd}
\lambda^*\pi'^*\mathcal{E}' \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & \lambda^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}')}(1) \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
\pi^*\mathcal{E}' \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) \otimes \pi^*\mathcal{L}
\end{tikzcd}$$

$\square$

Dato uno schema Y, introduciamo le seguenti notazioni

- Indichiamo con SchI_Y la categoria così definita: gli oggetti sono coppie $(X, \mathcal{L})$ con X un oggetto di Sch_Y e $\mathcal{L}$ un fascio invertibile su X, mentre una freccia fra $(X, \mathcal{L})$ e $(X', \mathcal{L}')$ è una coppia (λ, τ), dove λ è un isomorfismo fra X ed X' in Sch_Y e $\tau : \lambda^*\mathcal{L}' \longrightarrow \mathcal{L}$ è un isomorfismo. Se $(\lambda, \tau) : (X, \mathcal{L}) \longrightarrow (X', \mathcal{L}')$, $(\lambda', \tau') : (X', \mathcal{L}') \longrightarrow (X'', \mathcal{L}'')$ sono due frecce la loro composizione è data da $(\lambda' \circ \lambda, \tau \circ \lambda^*\tau')$.
- Indichiamo con $\mathrm{LF}_d(Y)$ la sottocategoria di $\mathrm{Mod}(Y)$ i cui oggetti sono fasci localmente liberi di rango d e le frecce sono isomorfismi.

Proposizione 4.22. *Sia Y uno schema noetheriano e d un numero naturale. Allora la seguente associazione definisce un funtore pienamente fedele:*

$$\mathrm{LF}_d(Y)^{op} \xrightarrow{\quad\mathbb{P}\quad} \mathrm{SchI}_Y$$

$$\mathcal{E} \longrightarrow (\mathbb{P}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\pi} Y, \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1))$$

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{E}' \longrightarrow (\lambda, \tau)$$

dove, detti π, π' i fibrati associati rispettivamente a $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, $\lambda : \mathbb{P}(\mathcal{E}') \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ è il morfismo associato alla suriezione

$$\pi'^*\mathcal{E} \xrightarrow{\pi'^*\sigma} \pi'^*\mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}')}(1) \tag{4.1}$$

mentre τ è l'unico isomorfismo tale che

$$\begin{tikzcd}
\pi'^*\mathcal{E} \arrow[r, "\pi^*\sigma"] \arrow[d] & \pi'^*\mathcal{E}' \arrow[d] \\
\lambda^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) \arrow[r, "\tau"] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}')}(1)
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Definiamo

$$P_{\mathcal{E}'}(X) \xrightarrow{\quad\eta_{\sigma,X}\quad} P_{\mathcal{E}}(X)$$

$$\begin{array}{ccc}
 & & \rho^*\mathcal{E} \\
\rho^*\mathcal{E}' & & \big\downarrow \rho^*\sigma \\
\big\downarrow & \longrightarrow & \rho^*\mathcal{E}' \\
\mathcal{L} & & \big\downarrow \\
 & & \mathcal{L}
\end{array}$$

$\eta_\sigma : P_{\mathcal{E}'} \longrightarrow P_{\mathcal{E}}$ definisce un morfismo di funtori ed è chiaro che $\eta_{\mathrm{id}} = \mathrm{id}$ e, se $\tau : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}''$ è un'altro isomorfismo, allora $\eta_{\tau\circ\sigma} = \eta_\sigma \circ \eta_\tau$. In particolare η_σ è un isomorfismo. Utilizzando il lemma di Yoneda, otteniamo gli isomorfismi λ definiti nell'enunciato e più in particolare un funtore da $\mathrm{LF}_d(Y)$ a Sch_Y. Dato $\sigma : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$ l'isomorfismo τ definito nell'enunciato esiste per definizione di $P_{\mathcal{E}}$ ed inoltre è unico per l'osservazione 4.14. Che valgano le regole di composizione anche su questi ultimi isomorfismi è ovvio. Rimane da dimostrare che il funtore $\mathbb{P}$ è pienamente fedele, ossia che si ha un isomorfismo a livello delle frecce.

Iniettivitá Dato che le frecce in entrambe le categorie sono isomorfismi possiamo supporre che $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$ e mostrare che in tal caso la mappa sui gruppi di automorfismi è iniettiva. Sia quindi $\vartheta : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ tale che $\mathbb{P}(\vartheta) = (\mathrm{id}, \mathrm{id})$. Abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} \pi^*\mathcal{E} \arrow[r, "\pi^*\vartheta"] \arrow[d] & \pi^*\mathcal{E} \arrow[d] \\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) \end{tikzcd}$$

Applicando π_* otteniamo che ϑ è coniugato all'identità e quindi sarà tale.

Surgettività Condideriamo (λ, τ). λ è associato alla diagonale del seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} \pi'^*\mathcal{E} \arrow[r, dashed, "\pi^*\sigma"] \arrow[d] \arrow[dr] & \pi'^*\mathcal{E}' \arrow[d, dashed] \\ \lambda^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) \arrow[r, "\tau"] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}')}(1) \end{tikzcd}$$

e quello che dobbiamo far vedere è che esistono le mappe tratteggiate. Osserviamo che l'isomorfismo di aggiunzione fra π'_* e π'^*

$$\mathrm{Hom}_Y(\mathcal{E}, \mathcal{E}') \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(\pi'^*\mathcal{E}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}')})$$

è definito esattamente come in 4.1, quindi λ è associato ad un $\sigma : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$, che a priori non è un isomorfismo. Allo stesso modo λ^{-1} sarà associata ad un morfismo $\sigma' : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$. Valgono ancora però le regole di composizione descritte sopra così che ad esempio $\sigma \circ \sigma'$ induce $\lambda^{-1} \circ \lambda = \mathrm{id}$ sui fibrati e sui fasci invertibili. Ma a questo punto possiamo usare lo stesso argomento usato sopra per mostrare l'iniettività, per dimostrare che $\sigma \circ \sigma' = \mathrm{id}$, tenendo conto che, se non per ricondursi al caso $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$, non è mai stato usato il fatto che ϑ sia un isomorfismo. $\square$

Definizione 4.23. *Dato un isomorfismo $\sigma : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ indicheremo con $\mathbb{P}(\sigma)$ l'isomorfismo $\mathbb{P}(\mathcal{E}') \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ indotto da σ sui fibrati, sottintendendo che esso agisce anche sui fasci invertibili.*

Osservazione 4.24. Un isomorfismo $\sigma : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ induce anche un isomorfismo $\mathrm{S}\,\mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{S}\,\mathcal{E}'$. Al variare degli aperti affini U su cui sia $\mathcal{E}$ che $\mathcal{E}'$ sono liberi, avremo isomorfismi $\mathbb{P}(\mathcal{E}'_{|U}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}_{|U})$ che si incollano a formare un isomorfismo $\lambda : \mathbb{P}(\mathcal{E}') \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$. Fissato uno di questi aperti U e scelte basi $x_0, \dots, x_{d-1}$, $x'_0, \dots, x'_{d-1}$ di rispettivamente $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, $\sigma_{|U}$ è dato da una matrice $A = (a_{i,j})$. In particolare $\lambda_{|\pi'^{-1}(U)}$ è associato alle sezioni globali $\sigma(x_i) = \sum_j a_{i,j}x'_j \in$

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}'_{|U})}(1)$, per $i = 0, \ldots, d-1$, ossia alla restrizione di 4.1 all'aperto $\pi'^{-1}(U)$. Quindi $\mathbb{P}(\sigma)$ coincide con λ.

Osservazione 4.25. In generale ad un morfismo qualsiasi $\sigma : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ non si può associare, almeno non nel modo fatto sopra, una mappa fra i rispettivi fibrati. Infatti può accadere che 4.1 non sia surgettivo o, equivalentemente, $\mathrm{S}\,\mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{S}\,\mathcal{E}'$ non soddisfi localmente la condizione necessaria affinchè un morfismo fra anelli graduati induca un morfismo fra i rispettivi Proj. L'esempio più semplice di una situazione del genere è $\sigma = 0$.

Corollario 4.26. *Sia k un campo. Allora*

$$\mathrm{Aut}_k\,\mathbb{P}^n_k \simeq \mathrm{PGl}_n(k)$$

Dimostrazione. Posto $X = \mathbb{P}^n_k$, se $\lambda \in \mathrm{Aut}_k\,X$, allora λ^* è un automorfismo di $\mathrm{Pic}\,X = < \mathcal{O}_X(1) > \simeq \mathbb{Z}$ e quindi $\lambda^*\mathcal{O}_X(1)$ è $\mathcal{O}_X(1)$ o $\mathcal{O}_X(-1)$, ma il secondo può essere escluso poichè $\mathcal{O}_X(-1)$ non ha sezioni globali. □

Capitolo 5

Coomologia e fasci dualizzanti

5.1 δ funtori e funtori derivati

Vogliamo introdurre in questa sezione la nozione di funtore derivato. Procederemo seguendo l'introduzione data in [Ha], capitolo 3.

La teoria dei funtori derivati puó essere sviluppata in modo del tutto generale per particolari categorie, dette categorie abeliane, che permettono di parlare di successioni esatte. Noi applicheremo i risultati di questa sezione solo ad alcune categorie, ma per aver una trattazione univoca è comodo enunciare i teoremi nella loro forma più generale. Ovviamente non c'è pretesa di completezza, ma ogni risultato esposto in questa sezione è facilmente riesprimibile per le categorie che useremo. Per un qualsiasi approfondimento si può fare riferimento a [6].

Definizione 5.1 (Categoria abeliana, [6], pag 78)**.** *Una categoria abeliana $\mathscr{C}$ è una categoria con le seguenti proprietà:*

- *$\mathscr{C}$ possiede un oggetto* 0 *([6], pag 43)*
- *dati due oggetti A, B di $\mathscr{C}$ l'insieme* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ *ha una struttura di gruppo abeliano tale che la composizione sia bilineare.*
- *esistono le somme dirette finite*
- *ogni morfismo ha un kernel ed un cokernel ([6], pag 50)*
- *ogni morfismo iniettivo è il kernel del proprio cokernel, ogni morfismo surgettivo è il cokernel del proprio kernel ([6], pag 48)*
- *ogni morfismo si decompone nella composizione di un morfismo surgettivo ed un morfismo iniettivo*

Esempio 5.2 ([Ha], Capitolo 3, sezione 1). Le seguenti categorie sono abeliane:

- $\mathfrak{Ab}$, gruppi abeliani
- $\mathrm{Mod}(A)$, moduli su un anello A

- $\mathfrak{Ab}(X)$, fasci di gruppi abeliani su uno spazio topologico
- $\mathrm{Mod}(X, \mathcal{O}_X)$, fasci di $\mathcal{O}_X$-moduli su uno spazio anulato $(X, \mathcal{O}_X)$
- $\mathrm{QCoh}(X)$, fasci quasi-coerenti su uno schema X
- $\mathrm{Coh}(X)$, fasci coerenti su uno schema noetheriano X

Definizione 5.3. *Un funtore $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ fra due categorie abeliane è detto additivo se per ogni coppia di oggetti A, B di $\mathscr{A}$ la funzione*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(FA, FB)$$

è un omomorfismo di gruppi

Definizione 5.4. *Siano $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ due categorie abeliane. Un δ-funtore da $\mathscr{A}$ a $\mathscr{B}$ è una successione $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ di funtori da $\mathscr{A}$ a $\mathscr{B}$ insieme a morfismi $\delta^i : T^i(A'') \longrightarrow T^{i+1}(A')$ per ogni successione esatta in $\mathscr{A}$ della forma $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ ed indice $i \geqslant 0$ tali che:*

- *per ogni successione esatta corta come sopra si ha una successione esatta lunga*

$$0 \longrightarrow T^0(A') \longrightarrow T^0(A) \longrightarrow T^0(A'') \xrightarrow{\delta^0} T^1(A') \longrightarrow \dots$$
$$\dots \longrightarrow T^i(A') \longrightarrow T^i(A) \longrightarrow T^i(A'') \xrightarrow{\delta^i} T^{i+1}(A') \longrightarrow \dots$$

- *per ogni coppia di successioni esatte corte con un morfismo fra di esse il seguente diagramma*

$$\begin{tikzcd} T^i(A'') \arrow[r, "\delta^i"] \arrow[d] & T^{i+1}(A') \arrow[d] \\ T^i(B'') \arrow[r, "\delta^i"'] & T^{i+1}(B') \end{tikzcd}$$

  è commutativo.

Un δ-funtore $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ si dice universale se per ogni altro δ-funtore $(T'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ e morfismo $f_0 : T_0 \longrightarrow T'_0$ esiste un'unica successione di morfismi $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $f_i : T_i \longrightarrow T'_i$, tale che, per ogni successione esatta corta, gli f_i commutino con i morfismi δ^i.

Osservazione 5.5. Dalla definizione segue subito che se $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ è un funtore allora, a meno di un'unico isomorfismo che solleva $\mathrm{id} : F \longrightarrow F$, esiste un unico δ-funtore $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tale che $T_0 = F$. Sempre dalla definizione segue che se $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ è un δ-funtore allora T_0 è esatto a sinistra.

Osservazione 5.6. Una definizione analoga può essere data richiedendo l'esattezza a destra invece che a sinistra, ossia cambiando il verso della successione esatta lunga.

Definizione 5.7. *Un funtore additivo $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ fra due categorie abeliane si dice effaceable se per ogni oggetto A di $\mathscr{A}$ esiste un oggetto B di $\mathscr{A}$ ed un morfismo iniettivo $A \xrightarrow{u} B$ tale che $F(u) = 0$. Si dice coeffaceable se per ogni oggetto A di $\mathscr{A}$ esiste un oggetto B di $\mathscr{A}$ ed un morfismo surgettivo $B \xrightarrow{u} A$ tale che $F(u) = 0$*

Il teorema fondamentale per la teoria dei δ-funtori è il seguente

Teorema 5.8 ([Ha], III teorema 1.3A)**.** *Sia $T = (T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un δ-funtore fra le categorie abeliane $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$. Se per ogni $i > 0$ il funtore T_i è effaceable allora T è universale.*

Definizione 5.9. *Sia $\mathscr{A}$ una categoria abeliana. Un oggetto I si dice iniettivo se il funtore*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, I) : \mathscr{A} \longrightarrow \mathfrak{Ab}$$

è esatto. Si dice proiettivo se $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(I, -)$ è esatto.

Si dice che la categoria $\mathscr{A}$ ha abbastanza iniettivi se, dato un oggetto A di $\mathscr{A}$, esiste un oggetto iniettivo I ed una mappa iniettiva $A \longrightarrow I$. In tal caso ogni oggetto ammette una risoluzione iniettiva.

Si dice che la categoria $\mathscr{A}$ ha abbastanza proiettivi se, dato un oggetto A di $\mathscr{A}$, esiste un oggetto proiettivo P ed una mappa surgettiva $P \longrightarrow A$. In tal caso ogni oggetto ammette una risoluzione proiettiva.

Definizione 5.10 (Funtori derivati destri)**.** *Siano $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ due categorie abeliane tali che $\mathscr{A}$ ha abbastanza iniettivi. Dato un funtore $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ esatto a sinistra ed $i \geqslant 0$ definiamo il funtore $\mathrm{R}^i F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ nel modo seguente:*

- *Dato un oggetto A di $\mathscr{A}$ scegliamo una sua risoluzione iniettiva $\mathcal{I}$. Poniamo $\mathrm{R}^i FA = \mathrm{h}^i(F\mathcal{I})$.*

- *Dato un morfismo $A \xrightarrow{u} B$ in $\mathscr{A}$, scegliamo due risoluzioni iniettive $\mathcal{I}_A$, $\mathcal{I}_B$ rispettivamente di A, B. Allora esiste un sollevamento $\underline{u} = (u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ di u fra le due risoluzioni e poniamo $\mathrm{R}^i Fu$ come la freccia $\mathrm{h}^i(F\underline{u})$.*

Osservazione 5.11. In modo analogo, partendo da un funtore esatto a destra e considerando risoluzioni proiettive, si possono definire i funtori derivati sinistri, che sono indicati con $\mathrm{L}^i F$.

Il teorema che motiva l'introduzione e lo studio dei δ-funtori è il seguente

Teorema 5.12 ([Ha], III teorema 1.1A e corollario 1.4)**.** *Siano $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ due categorie abeliane tali che $\mathscr{A}$ ha abbastanza iniettivi ed $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtore additivo esatto a sinistra. Allora*

- *per ogni $i \geqslant 0$ il funtore $\mathrm{R}^i F$ è un funtore additivo ed è, a meno di isomorfismo, indipendente dalla scelta delle risoluzioni iniettive*

- *esiste un isomorfismo $F \simeq \mathrm{R}^0 F$*

- *la successione $\mathrm{R}\, F = (\mathrm{R}^i F)_{i \in \mathbb{N}}$ ammette frecce δ_i tali da rendere $\mathrm{R}\, F$ un δ-funtore universale.*

5.2 Esempi di funtori derivati

Per parlare di funtori derivati, come abbiamo visto, abbiamo bisogno di mostrare che le categorie che useremo hanno abbastanza iniettivi.

Proposizione 5.13. *Sia A un anello. Allora la categoria* $\mathrm{Mod}(A)$ *degli A-moduli ha abbastanza iniettivi e proiettivi.*

Dimostrazione. Che abbia abbastanza proiettivi è ovvio, dato che i moduli liberi sono proiettivi ed ogni modulo é immagine di un modulo libero. Per quanto riuarda gli iniettivi si usa 3.7. □

Proposizione 5.14. *Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio anulato. Allora* $\mathrm{Mod}(X, \mathcal{O}_X)$*, la categoria degli $\mathcal{O}_X$-moduli ha abbastanza iniettivi. In particolare* $\mathfrak{Ab}(X)$*, la categoria dei fasci di gruppi abaliani su uno spazio topologico X, ha abbastanza iniettivi.*

Dimostrazione. La seconda affermazione segue dalla prima poichè dato uno spazio topologico X e $\mathcal{O}_X$ il fascio costante su $\mathbb{Z}$, allora $\mathrm{Mod}(X, \mathcal{O}_X) = \mathfrak{Ab}(X)$.

Consideriamo quindi un $\mathcal{O}_X$-modulo $\mathcal{F}$. Dato un punto $x \in X$ consideriamo il morfismo di inclusione $j_x : x \longrightarrow X$. Dato che $\mathcal{F}_x$ è un $\mathcal{O}_{X,x}$-modulo, esiste un oggetto iniettivo I_x di $\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{X,x})$ ed un morfismo iniettivo $\mathcal{F}_x \xrightarrow{i_x} \mathcal{I}_x$. Possiamo considerare $\{x\}$ come uno spazio anulato con fascio costante $\mathcal{O}_{X,x}$ e pensare I_x come un modulo su $\{x\}$. Definiamo quindi

$$\mathcal{I} = \bigoplus_{x \in X} j_{x*} I_x$$

Dato un $\mathcal{O}_X$-modulo $\mathcal{G}$ abbiamo isomorfismi naturali

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{I}) \simeq \prod_{x \in X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, j_{x*} I_x) \simeq \prod_{x \in X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{G}_x, I_x)$$

In particolare la successione $(i_x)_{x \in X}$ induce un morfismo $i : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}$. È facile verificare che i è iniettivo. Inoltre, dato che $\mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{G}_x, I_x)$ è esatto per ogni $x \in X$ poichè composizione di funtori esatti e che il prodotto di funtori esatti è esatto, troviamo che $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(-, \mathcal{I})$ è esatto e quindi $\mathcal{I}$ è iniettivo. □

5.2.1 Coomologia di fasci

Definizione 5.15. *Sia X uno spazio topologico. Allora il funtore*

$$\Gamma(X, -) : \mathfrak{Ab}(X) \longrightarrow \mathfrak{Ab}$$

delle sezioni globali è esatto a sinistra e definiamo, per ogni $i \geqslant 0$, il funtore $\mathrm{H}^i(X, -) : \mathfrak{Ab}(X) \longrightarrow \mathfrak{Ab}$ *come l'i-esimo funtore derivato destro di* $\Gamma(X, -)$.

Osservazione 5.16. Dato uno spazio anulato $(X, \mathcal{O}_X)$ si possono definire i funtori derivati destri di $\Gamma(X, -)$ nella categoria $\mathrm{Mod}(X, \mathcal{O}_X)$ e, a priori, non è detto che questi coincidano con la restrizione dei funtori $\mathrm{H}^i(X, -)$ a tale categoria. Per fortuna questo non accade: si dimostra infatti che gli $\mathcal{O}_X$-moduli iniettivi sono fiacchi([Ha], III, lemma 2.4), che i fasci fiacchi sono aciclici (ossia sono annullati da $\mathrm{H}^i(X, -)$ per ogni $i > 0$) ([Ha], III, proposizione 2.5) e che i funtori derivati possono essere calcolati (questo vale in generale) anche su risoluzioni acicliche ([Ha], III, proposizione 1.2A).

In particolare, dato che $\Gamma(X, -) : \mathrm{Mod}(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathfrak{Ab}(\Gamma(X, \mathcal{O}_X))$ otteniamo che $\mathrm{H}^i(X, -) : \mathrm{Mod}(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathfrak{Ab}(\Gamma(X, \mathcal{O}_X))$ in modo naturale.

Mostriamo alcuni dei risultati principali relativi alla coomologia appena introdotta.

Teorema 5.17 (Grothendieck, [Ha], III, teorema 2.7)**.** *Sia X uno spazio topologico noetheriano di dimensione n. Allora per ogni $i > n$, $\mathrm{H}^i(X, -) = 0$ in $\mathfrak{Ab}(X)$.*

Teorema 5.18 (Serre, [Ha], III, teorema 3.7)**.** *Sia X uno schema noetheriano. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti*

- *X è affine*
- *$\mathrm{H}^i(X, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $\mathcal{F} \in \mathrm{QCoh}(X)$ ed $i > 0$*
- *$\mathrm{H}^1(X, \mathcal{I}) = 0$ per ogni fascio coerente di ideali di X*

Un fatto molto importante per la teoria coomologica degli schemi è il fatto che per schemi noetheriani e separati i gruppi di coomologia $\mathrm{H}^i(X, \mathcal{F})$, dove $\mathcal{F}$ è un fascio quasi coerente, possono essere calcolati usando la coomologia di Check su ricoprimenti di aperti affini ([Ha], III, sezione 4). Sfruttando questo risultato è possibile calcolare esplicitamente la coomologia dei fasci invertibili $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_B}(q)$ sugli spazi proeittivi. In particolare vale che

Teorema 5.19 (Serre, [Ha], III, teorema 5.1)**.** *Sia B un anello noetheriano e poniamo $X = \mathbb{P}^r_B$, con $r \geqslant 1$. Allora*

- *se S è l'anello dei polinomi di X esiste un isomorfismo graduato*

$$S \longrightarrow \Gamma_*(\mathcal{O}_X) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(n))$$

- *$\mathrm{H}^i(X, \mathcal{O}_X(q)) = 0$ per $i \neq 0, r$ e $q \in \mathbb{Z}$, $i = r$ e $q > -r-1$, $i = 0$ e $q < 0$*
- *$\mathrm{H}^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1)) \simeq B$ ed esiste una coppia perfetta di B-moduli liberi*

$$\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(n)) \times \mathrm{H}^r(X, \mathcal{O}_X(-n-r-1)) \longrightarrow B$$

In particolare da tale teorema si deduce che

Teorema 5.20 (Serre, [Ha], III, teorema 5.2)**.** *Sia X uno schema proiettivo su un anello noetheriano B e $\mathcal{F}$ un fascio coerente su X. Allora*

- *per ogni $i \geqslant 0$, $\mathrm{H}^i(X, \mathcal{F})$ è un B-modulo finitamente generato*
- *se $i : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_B$ è l'immersione attraverso cui si fattorizza X e poniamo $\mathcal{O}_X(1) = i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_B}(1)$, per $m \gg 0$,*

$$\mathrm{H}^i(X, \mathcal{F}(m)) = 0 \text{ per } i > 0$$

Un concetto molto utile relativo alla coomologia è quello della regolarità di Castelnuovo-Mumford.

Definizione 5.21. *Sia k un campo, $\mathcal{F}$ un fascio coerente su $\mathbb{P}^n_k$ ed $m \in \mathbb{Z}$. $\mathcal{F}$ si dice m-regolare se*

$$\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}(m-i)) = 0 \quad \forall i \geqslant 1$$

Proposizione 5.22 ([3], lemma 5.1)**.** *Sia k un campo, $m \in \mathbb{Z}$ e $\mathcal{F}$ un fascio coerente m-regolare su $\mathbb{P}^n_k$. Allora*

- *il morfismo canonico*

  $$\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(1)) \otimes \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}(r)) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}(r+1))$$

  è surgettivo per $r \geqslant m$

- $\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}(r)) = 0$ *per $i \geqslant 1$ e $r \geqslant m - i$, ossia $\mathcal{F}$ è m' regolare per ogni $m' \geqslant m$*

- *$\mathcal{F}(r)$ è generato dalle proprie sezioni globali per $r \geqslant m$*

5.2.2 Gruppi e fasci Ext

Definizione 5.23. *Sia $\mathscr{A}$ una categoria abeliana che ha abbastanza iniettivi. Dato un oggetto A di $\mathscr{A}$ il funtore*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, -) : \mathscr{A} \longrightarrow \mathfrak{Ab}$$

è esatto a sinistra e definiamo il funtore $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(A, -) : \mathscr{A} \longrightarrow \mathfrak{Ab}$ come il suo i-esimo funtore derivato destro.

Osservazione 5.24. In particolare risultano definiti funtori $\mathrm{Ext}(A, -)$ in $\mathrm{Mod}(X, \mathcal{O}_X)$, per uno spazio anulato $(X, \mathcal{O}_X)$, e in $\mathrm{Mod}(B)$, per un anello B

Definizione 5.25. *Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio anulato e $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-modulo. Allora il funtore*

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, -) : \mathrm{Mod}(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathrm{Mod}(X, \mathcal{O}_X)$$

è esatto a sinistra e definiamo $\underline{\mathrm{Ext}}^i_X(\mathcal{F}, -)$ il suo i-esimo funtore derivato destro.

Proposizione 5.26 ([Ha], III, proposizioni 6.2, 6.4, 6.5, 6.7)**.** *Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio anulato. Allora*

- *per ogni aperto $U \subseteq X$ ed $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{Mod}(X, \mathcal{O}_X)$ esiste un isomorfismo naturale*

  $$\underline{\mathrm{Ext}}^i_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})_{|U} \simeq \underline{\mathrm{Ext}}^i_U(\mathcal{F}_{|U}, \mathcal{G}_{|U})$$

- *se $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$ è una successione esatta in $\mathrm{Mod}(X, \mathcal{O}_X)$ e $\mathcal{G}$ è un $\mathcal{O}_X$-modulo esiste una successione esatta lunga*

  $$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}'', \mathcal{G}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}', \mathcal{G}) \longrightarrow \\ \mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{F}'', \mathcal{G}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{F}', \mathcal{G}) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

  e simile per $\underline{\mathrm{Ext}}$.

- *data una successione esatta in* $\mathrm{Mod}(X, \mathcal{O}_X)$

$$\mathcal{T}_* : \ldots \longrightarrow \mathcal{T}_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{T}_0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

dove i $\mathcal{T}_i$ *sono* $\mathcal{O}_X$*-moduli localmente liberi di rango finito e* $\mathcal{G}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-modulo allora*

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \simeq \mathrm{h}^i(\underline{\mathrm{Hom}}_X(\mathcal{T}_*, \mathcal{G}))$$

- *dati* $\mathcal{T}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-modulo localmente libero di rango finito,* $\mathcal{T}^\vee = \underline{\mathrm{Hom}}_X(\mathcal{T}, \mathcal{O}_X)$*,* $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{Mod}(X, \mathcal{O}_X)$ *allora esistono isomorfismi naturali*

$$\mathrm{Ext}^i_X(\mathcal{F} \otimes \mathcal{T}, \mathcal{G}) \simeq \mathrm{Ext}^i_X(\mathcal{F}, \mathcal{T}^\vee \otimes \mathcal{G})$$

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_X(\mathcal{F} \otimes \mathcal{T}, \mathcal{G}) \simeq \underline{\mathrm{Ext}}^i_X(\mathcal{F}, \mathcal{T}^\vee \otimes \mathcal{G}) \simeq \underline{\mathrm{Ext}}^i_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \otimes \mathcal{T}^\vee$$

Proposizione 5.27 ([Ha], proposizione 6.8, esercizio 6.7)**.** *Sia* X *uno schema noetheriano,* $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X)$ *e* $x \in X$*. Allora, dato un* $\mathcal{O}_X$*-modulo* $\mathcal{G}$*, esiste un isomorfismo naturale*

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \simeq \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)$$

Inoltre se $X \simeq \mathrm{Spec}\, A$ *e* M*,* N *sono due* A*-moduli con* M *finitamente generato, esistono isomorfismi naturali*

$$\mathrm{Ext}^i_X(\widetilde{M}, \widetilde{N}) \simeq \mathrm{Ext}^i_A(M, N) \quad \underline{\mathrm{Ext}}^i_X(\widetilde{M}, \widetilde{N}) \simeq \mathrm{Ext}^i_A(M, N)^\sim$$

5.2.3 Immagini dirette di fasci

Definizione 5.28. *Sia* $f : X \longrightarrow Y$ *una funzione continua fra spazi topologici. Allora il funtore*

$$f_* : \mathfrak{Ab}(X) \longrightarrow \mathfrak{Ab}(Y)$$

è esatto a sinistra e quindi ammette funtori derivati destri

$$\mathrm{R}^i f_* : \mathfrak{Ab}(X) \longrightarrow \mathfrak{Ab}(Y)$$

Proposizione 5.29 ([Ha], III, proposizione 8.1)**.** *Sia* $f : X \longrightarrow Y$ *una funzione continua fra spazi topologici ed* $\mathcal{F}$ *un fascio di gruppi abeliani su* X*. Allora* $\mathrm{R}^i f_* \mathcal{F}$ *è il fascio associato al prefascio*

$$V \longrightarrow \mathrm{H}^i(f^{-1}(V), \mathcal{F}_{f^{-1}(V)})$$

In particolare $\mathrm{R}^i f_*$ *commuta con le restrizioni agli aperti.*

Proposizione 5.30 ([Ha], III, proposizione 8.5)**.** *Sia* $f : X \longrightarrow Y$ *un morfismo di schemi, con* X *noetheriano ed* Y *affine. Dato* $\mathcal{F} \in \mathrm{QCoh}(X)$*, per ogni* i*, esiste un isomorfismo naturale*

$$\mathrm{R}^i f_* \mathcal{F} \simeq \mathrm{H}^i(X, \mathcal{F})^\sim$$

Corollario 5.31. *Se* $f : X \longrightarrow Y$ *è un morfismo di schemi con* X *noetheriano allora, per ogni* i*,* $\mathrm{R}^i f_*(\mathrm{QCoh}(X)) \subseteq \mathrm{QCoh}(Y)$*. Se inoltre* f *è proiettivo ed* Y *è noetheriano, allora* $\mathrm{R}^i f_*(\mathrm{Coh}(X)) \subseteq \mathrm{Coh}(Y)$

Proposizione 5.32 (Formula di proiezione,[Ha], III, esercizio 8.3)**.** *Sia* $f : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ *un morfismo di spazi anulati e siano* $\mathcal{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-modulo e* $\mathcal{T}$ *un* $\mathcal{O}_Y$*-modulo localmente libero di rango finito. Allora esiste un isomorfismo naturale*

$$\mathrm{R}^i f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{T}) \simeq \mathrm{R}^i f_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{T}$$

Definizione 5.33. *Sia* $f : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ *un morfismo di spazi anulati. Allora, dato un* $\mathcal{O}_X$*-modulo* $\mathcal{F}$*, il funtore*

$$f_*\underline{\mathrm{Hom}}_X(\mathcal{F}, -) : \mathrm{Mod}(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathrm{Mod}(Y, \mathcal{O}_Y)$$

è esatto a sinistra e definiamo $\underline{\mathrm{Ext}}^i_f(\mathcal{F}, -)$ *come il suo i-esimo funtore derivato.*

Definizione 5.34. *Sia* A *un anello. Un* A*-modulo* M *si dice piatto se il funtore*

$$M \otimes_A - : \mathrm{Mod}(A) \longrightarrow \mathrm{Mod}(A)$$

è esatto.

Proposizione 5.35.

- *Un* A*-modulo* M *è piatto se e solo se, per ogni ideale finitamente generato* I *di* A*, la mappa* $I \otimes_A M \longrightarrow M$ *è iniettiva*
- *Cambiamento di base: se* M *è un* A*-modulo piatto, e* $\phi : A \longrightarrow B$ *è un morfismo di anelli, allora* $M \otimes_A B$ *è un* B*-modulo piatto*
- *Transitività: Se* B *è una* A*-algebra piatta e* N *è un* B*-modulo piatto allora* N *è un* A*-modulo piatto*
- *Localizzazione: un* A*-modulo* M *è piatto se e solo se, per ogni primo p di* A*,* M_p *è un* A_p *modulo piatto*
- *data una successione esatta di* A*-moduli*

  $$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

  si ha che, se M' *e* M'' *sono piatti allora* M *è piatto, se* M *e* M'' *sono piatti allora* M' *è piatto*
- *Un* A*-modulo finitamente generato su un anello locale è piatto se e solo se è libero.*

Definizione 5.36. *Sia* $f : X \longrightarrow Y$ *un morfismo di schemi ed* $\mathcal{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-modulo. Dato* $x \in X$ *diremo che* $\mathcal{F}$ *è piatto su* Y *nel punto* x *se* $\mathcal{F}_x$ *è un* $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$ *modulo piatto tramite il morfismo* $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$*. Diremo che* $\mathcal{F}$ *è piatto su* Y *se è piatto in ogni punto di* X*. Infine diremo che* X *è piatto su* Y *o* f *è piatto se* $\mathcal{O}_X$ *è piatto su* Y*.*

Proposizione 5.37 ([Ha], III, proposizione 9.2)**.**

- *Un immersione aperta è piatta*
- *Cambiamento di base: se*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

è un diagramma cartesiano e $\mathcal{F}$ è un $\mathcal{O}_X$-modulo piatto su Y allora $h^*\mathcal{F}$ è piatto su Y'. In particolare la proprietá di piattezza per morfismi è stabile per cambiamento di base.

- *Siano $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ morfismi di schemi. Se $\mathcal{F}$ è un $\mathcal{O}_X$-modulo piatto su Y e Y è piatto su Z allora $\mathcal{F}$ è piatto su Z*
- *Sia $\phi : B \longrightarrow A$ un morfismo di anelli ed $f : X = \operatorname{Spec} A \longrightarrow \operatorname{Spec} B = Y$ il morfismo associato. Allora un A-modulo M è piatto se e solo se $\widetilde{M}$ è piatto su Y*

Osservazione 5.38. Dato un anello B il morfismo strutturale $\pi : \mathbb{P}^n_B \longrightarrow \operatorname{Spec} B$ è piatto. Infatti sugli aperti coordinati è indotto dall'inclusione $B \longrightarrow B[X_0, \dots, X_n]$ che è piatta.

Proposizione 5.39 (Cambiamento di base per morfismi piatti, [Ha], III, proposizione 9.3)**.** *Sia $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo separato e di tipo finito fra schemi noetheriani e supponiamo di avere un diagramma cartesiano*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "u"'] & Y \end{tikzcd}$$

Dato un fascio quasi-coerente $\mathcal{F}$ su X allora, per ogni i, esiste un morfismo naturale

$$u^* \mathrm{R}^i f_*\mathcal{F} \longrightarrow \mathrm{R}^i g_*(v^*\mathcal{F})$$

Se u è piatto allora tale morfismo è un isomorfismo.

Definizione 5.40. *Sia Y uno schema ed $y \in Y$. Se $u : \operatorname{Spec} k(y) \longrightarrow Y$ e $\mathcal{F}$ è un $\mathcal{O}_Y$-modulo definiamo la notazione*

$$\mathcal{F} \otimes k(y) = \Gamma(\operatorname{Spec} k(y), u^*\mathcal{F})$$

Osservazione 5.41. Con riferimento alla proposizione 5.39, dato $y \in Y$, consideriamo come cambiamento di base u il morfismo $\operatorname{Spec} k(y) \longrightarrow Y$. In particolare $X' = X_y$. Dato un fascio quasi coerente abbiamo quindi un morfismo naturale

$$\phi_i(y) : \mathrm{R}^i f_*\mathcal{F} \otimes k(y) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X_y, \mathcal{F}_y)$$

Il morfismo u non è in generale piatto e quindi $\phi_i(y)$ in generale non sarà un isomorfismo. D'altra parte vale il seguente, fondamentale, risultato

Teorema 5.42 (Cambiamento di base per la coomologia, [Ha], III, teorema 12.11)**.** *Sia $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo proiettivo fra schemi noetheriani e sia $\mathcal{F}$ un fascio coerente su X e piatto su Y. Dato $y \in Y$ vale che*

- *se $\phi_i(y)$ è surgettivo allora è un isomorfismo e lo stesso vale in un intorno aperto di y*
- *se $\phi_i(y)$ è suriettivo allora sono equivalenti*
  - *$\phi_{i-1}(y)$ è suriettivo*
  - *$\mathrm{R}^i f_*\mathcal{F}$ è localmente libero in un intorno di y*

Vogliamo dare come applicazione di questo teorema un risultato di cui faremo uso nell'ultimo capitolo.

Lemma 5.43. *Sia B un anello noetheriano, $Y = \operatorname{Spec} B$, $\pi : \mathbb{P} = \mathbb{P}^n_B \longrightarrow Y$ e $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$-modulo coerente e piatto su Y. Allora, per $m \gg 0$,*

$$\forall y \in Y \quad \mathrm{H}^0(\mathbb{P}, \mathcal{F}(m)) \otimes k(y) \simeq \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_y, \mathcal{F}_y(m))$$

$$\pi_*\mathcal{F}(m) \text{ localmente libero}$$

Dimostrazione. Per 5.20 abbiamo che, fissato $y \in Y$, $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}_y, \mathcal{F}_y(m)) = 0$ per $m > m_y \gg 0$ e, per compattezza, possiamo scegliere la famiglia $\{m_y\}_{y\in Y}$ limitata. Quindi la prima delle condizioni date nell'enunciato implica la seconda. A meno di shiftare $\mathcal{F}$, possiamo supporre che esista un morfismo surgettivo $\mathcal{O}^k_{\mathbb{P}} \longrightarrow \mathcal{F}$ con nucleo $\mathcal{T}$. Fissato $y \in Y$ abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}^k_{\mathbb{P}}(m)) \otimes k(y) & \longrightarrow & \mathrm{H}^0(\mathbb{P}, \mathcal{F}(m)) \otimes k(y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_y, \mathcal{O}^k_{\mathbb{P}_y}(m)) & \longrightarrow & \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_y, \mathcal{F}_y(m)) \end{array}$$

Osserviamo che i morfismi orizzontali sono definitivamente surgettivi, dato che $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}, \mathcal{T}(m)) = 0$, $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}_y, \mathcal{T}_y(m)) = 0$ definitivamente per 5.20, e tale è anche il primo e quindi il secondo morfismo verticale. Ragionando per compattezza otteniamo la tesi. □

Proposizione 5.44. *Sia $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo localmente proiettivo fra schemi noetheriani e*

$$\mathcal{F}_* : 0 \longrightarrow \mathcal{F}_d \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{F}_0$$

un complesso di fasci coerenti su X e piatti su Y. Allora se $\mathcal{F}_*$ è esatto su ogni fibra di f lo è globalmente.

Dimostrazione. Poichè l'enunciato è locale in Y, possiamo suppore $Y \simeq \operatorname{Spec} B$, con B anello noetheriano ed f proiettivo. Esiste quindi un'immersione chiusa $i : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_B$ su Y. Poichè i è affine, $(i_*\mathcal{F}_*)_y \simeq i_{y*}\mathcal{F}_{*y}$, e poichè i_*,i_{y*} sono esatti e mantengono la piattezza possiamo supporre $X = \mathbb{P}^n_B$. Possiamo anche supporre, facendo un cambiamento di base, che (B, q) sia locale. Mostriamo che possiamo ricondurci a dimostrare che $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{F}_*(m))$ è esatta per $m \gg 0$. Supponiamo che questo accada. $\Gamma_*(\mathcal{F}_*)$ è un complesso esatto in gradi maggiori di N, per un qualche $N \gg 0$. Considerando solo il complesso di moduli graduati ottenuto eliminando la parte in grado minore o uguale a N e fascificando, otteniamo una successione esatta di fasci che coinciderà con $\mathcal{F}_*$ per le proprietà della fascificazione per spazi proiettivi.

Viceversa, poichè il complesso $\mathcal{F}_*$ ha lunghezza finita, usando 5.20 abbiamo che $\mathrm{H}^0(X_q, \mathcal{F}_{q*}(m))$ è definitivamente esatta. Mettendo insieme queste cose ed il lemma 5.43, possiamo ricondurci a mostrare che se

$$\mathcal{H}_* : 0 \longrightarrow M_d \longrightarrow \ldots \longrightarrow M_0$$

è un complesso di B-moduli liberi di rango finito tali che $\mathcal{H}_* \otimes B/q$ è esatta allora $\mathcal{H}_*$ è esatta. Ragioniamo per induzione sulla lunghezza d di $\mathcal{H}_*$. Se $d = 0$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo quindi che la tesi valga per lunghezze minori o uguali a d. Consideriamo i primi termini

$$0 \longrightarrow M_{d+1} \xrightarrow{\alpha} M_d \longrightarrow \ldots$$

Se mostriamo che esiste $\beta : M_d \longrightarrow M_{d+1}$ tale che $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}$ abbiamo finito. Infatti in tal caso α è iniettiva e si ha una decomposizione $M_d = \alpha(M_{d+1}) \oplus N$, dove N, essendo proiettivo, è libero. La successione

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M_{d-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow M_0$$

soddifa le ipotesi ed ha lunghezza d e quindi è esatta. Grazie all'iniettivià della prima mappa otteniamo l'esattezza della nostra successione iniziale anche in M_d e quindi abbiamo finito.

Mostriamo quindi che β esiste. Poniamo $\operatorname{rk} M_{d+1} = l \leqslant m = \operatorname{rk} M_d$. Il morfismo α è dato da una matrice $m \times l$ A. Tensorizzando per B/q otteniamo un minore $l \times l$ con determinante non nullo in B/q e quindi invertibile in B. A meno di cambiare base possiamo supporre che tale minore, che indichiamo con C, sia dato dalle prime l righe di A. Avremo che $(C^{-1} \mid 0)A = I$, ossia esiste un morfismo $\beta : M_d \longrightarrow M_{d+1}$ per cui α è un suo spezzamento. □

5.3 Dualità relativa per fasci quasi-coerenti

Vogliamo esporre in questa sezione alcuni risultati relativi alla teoria dei fasci dualizzanti, che rappresentano un'estensione della teoria della dualità per gli spazi proiettivi. Seguiremo l'esposizione data in [Kl]

Nel resto della sezione considereremo fissato un morfismo di schemi $f : X \longrightarrow Y$ che sia proprio e finitamente presentabile. Fissiamo inoltre un intero r tale che $\dim X_y \leqslant r$ per ogni $y \in Y$

Definizione 5.45. *Una coppia r-dualizzante $(f^!, t_f)$ consiste in un funtore*

$$f^! : \mathrm{QCoh}(Y) \longrightarrow \mathrm{QCoh}(X)$$

ed una mappa di funtori

$$t_f : (\mathrm{R}^r f_*)f^! \longrightarrow \mathrm{id}$$

che induca un isomorfismo

$$f_*\underline{\mathrm{Hom}}_X(F, f^!N) \xrightarrow{\simeq} \underline{\mathrm{Hom}}_Y(\mathrm{R}^r f_*F, N) \tag{5.1}$$

funtoriale in F ed N, per ogni fascio quasi-coerente F di X e N di Y.

Esempio 5.46. Consideriamo il caso in cui Y ed X siano affini e noetheriani. Se $r > 0$, poichè $\mathrm{R}^r f_*$ è isomorfo alla fascificazione di $\mathrm{H}^r(X, -)$ che è nullo, ponendo $f^! = 0$ e $t_f = 0$ abbiamo che banalmente $(f^!, t_f)$ è una coppia r dualizzante. Stessa conclusione nel caso in cui supponiamo solo che f sia affine (sempre nel caso noetheriano), dato che dalla definizione è chiaro che $f^!$ commuta con la restrizione agli aperti.

Quindi per morfismi affini il caso interessante è quello con $r = 0$, ossia $\dim X_y = 0$. Supponendo nuovamente X, Y affini, diciamo $Y \simeq \operatorname{Spec} B$, $X \simeq \operatorname{Spec} A$, dalla definizione 5.1, ponendo $F = \mathcal{O}_X$ e passando alle sezioni globali, otteniamo un isomorfismo naturale

$$\Gamma(X, f^! N) \simeq \operatorname{Hom}_B(A, \Gamma(Y, N))$$

Quindi $f^!$, se esiste, è dato dalla fascificazione del funtore $N \longrightarrow \operatorname{Hom}_B(A, \Gamma(Y, N))$. Si può verificare direttamente che in tal caso il morfismo di funtori t_f è dato da

$$\begin{array}{rcl} f_* f^! \mathcal{N} = \underline{\operatorname{Hom}}_Y(f_* \mathcal{O}_X, \mathcal{N}) & \longrightarrow & \mathcal{N} \\ \phi & \longrightarrow & \phi(1) \end{array}$$

Esempio 5.47. Consideriamo adesso $Y \simeq \operatorname{Spec} B$ noetheriano e $\mathbb{P}^r_B \xrightarrow{f} Y$. Ponendo $F = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_B}(-p)$ in 5.1, otteniamo isomorfismi naturali

$$\begin{array}{rcl} f_* \underline{\operatorname{Hom}}_X(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_B}(-p), f^! N)(Y) & \simeq & \Gamma(\mathbb{P}^r_B, f^! N(p)) \\ & \simeq & \operatorname{Hom}_Y(\mathrm{R}^r f_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_B}(-p), N) \\ & \simeq & \operatorname{Hom}_Y(\mathrm{R}^r f_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_B}(-p), \mathcal{O}_Y) \otimes_B N(Y) \\ & \simeq & \operatorname{Hom}_B(\mathrm{H}^r(\mathbb{P}^r_B, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_B}(-p)), B) \otimes_B N(Y) \end{array}$$

dove si è usato che $\mathrm{R}^r f_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_B}(-p)$ è libero per ogni $p \in \mathbb{Z}$. La dualità dello spazio proiettivo ci assicura che

$$\operatorname{Hom}_B(\mathrm{H}^r(\mathbb{P}^r_B, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_B}(-p)), B) \simeq \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^r_B, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_B}(p - r - 1))$$

In definitiva, usando la funtorialità di tali isomorfismi, otteniamo un isomorfismo di algebre graduate

$$\Gamma_*(f^! N) \simeq \Gamma_*(\omega_{\mathbb{P}^r_B}) \otimes_B N(Y)$$

dove $\omega_{\mathbb{P}^r_B} \simeq \det \Omega_{\mathbb{P}^r_B / B} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_B}(-r-1)$ e quindi che, se $f^!$ esiste, è dato da

$$f^! N \simeq \omega_{\mathbb{P}^r_B} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_B}} f^* N$$

Un risultato notevole è che ([Kl] proposizione 2, teorema 4):

Teorema 5.48. *Una coppia r dualizzante $(f^!, t_f)$ esiste ed è unica a meno di un unico isomorfismo.*

Introduciamo un oggetto molto importante e che, come vedremo, permetterà di caratterizzare i rivestimenti di Gorenstein di grado finito

Definizione 5.49. *Un fascio r-dualizzante è un $\mathcal{O}_X$-modulo ω_f tale che, per ogni aperto U di Y ed ogni fascio quasi-coerente $\mathcal{N}$ su U, esista un isomorfismo canonico*

$$f^!_{|f^{-1}(U)} \mathcal{N} \simeq (\omega_f)_{|f^{-1}(U)} \otimes f^*_{|f^{-1}(U)} \mathcal{N}$$

che sia funtoriale in $\mathcal{N}$ e commuti con la restrizione sugli aperti.

Osservazione. Chiaramente se ω_f esiste allora esiste un isomorfismo $f^! \mathcal{O}_Y \simeq \omega_f$ e quindi è unico a meno di isomorfismo.

La prossima proposizione caratterizza il comportamento del fascio dualizzante rispetto al cambiamento di base ([Kl] teorema 5)

Proposizione 5.50. *Supponiamo esista un fascio r-dualizzante ω_f. Allora ω_f è piatto su Y e se*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd}$$

è un diagramma cartesiano allora $\omega_{f'}$ esiste e vale che

$$\omega_{f'} \simeq \alpha^* \omega_f$$

A questo punto possiamo introdurre un altro fondamentale concetto, ossia quello della dualità di ordine superiore. A tale scopo supponiamo che il morfismo f fissato all'inizio sia anche piatto e localmente proiettivo e che le fibre X_y siano equidimensionali di dimensione r. Diamo la seguente

Definizione 5.51. *Diremo che X/Y (o f) possiede la n-dualità se sono soddisfatte le seguenti condizioni*

1. *Esiste un fascio r-dualizzante ω_f ed è localmente finitamente presentabile*
2. *Dati $\mathcal{F} \in \mathrm{QCoh}(X)$, $\mathcal{N} \in \mathrm{QCoh}(Y)$ cosideriamo la mappa bifuntoriale su Y indotta dalla coppia di Yoneda*

$$D^m = D^m(\mathcal{F}, \mathcal{N}) : \underline{\mathrm{Ext}}_f^m(\mathcal{F}, \omega_f \otimes f^* \mathcal{N}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_Y(\mathrm{R}^{r-m} f_* \mathcal{F}, \mathcal{N})$$

   Allora

   - *D^m è un isomorfismo per $m \leqslant n$ se $\mathcal{N}$ è iniettivo nella categoria* $\mathrm{QCoh}(Y)$
   - *Fissiamo $\mathcal{F}$ piatto e localmente finitamente presentabile e $m \leqslant n$. Allora $D^m(\mathcal{F}, \mathcal{N})$ è un isomorfismo per ogni $\mathcal{N}$ se $\mathrm{R}^{r-m} f_* \mathcal{F}$ commuta con il cambiamento di base. Viceversa $R^m f_* \mathcal{F}$ commuta con il cambiamento di base se $D^m(\mathcal{F}_{|f^{-1}(U)}, \mathcal{N})$ è iniettivo per ogni aperto affine U di Y ed ogni fascio $\mathcal{N} \in \mathrm{QCoh}(U)$*

3. *La condizione* 2) *continua a valere se al posto di Y consideriamo un suo aperto ed al posto di f la restrizione*

Diremo che X/Y (o f) possiede piena dualità se X/Y possiede la r-dualità.

Definizione 5.52. *Uno schema X si dice di Cohen-Macaulay se per ogni $p \in X$ l'anello $\mathcal{O}_{X,p}$ è di Cohen-Macaulay, o, equivalentemente, se ogni aperto affine di X è lo spettro di un anello di Cohen-Macaulay.*

I seguenti due teoremi caratterizzano i morfismi f che possiedono la dualitá di ordine superiore.

Teorema 5.53 ([Kl], teorema 20)**.** *Le seguenti condizioni sono equivalenti*

- $X_y/k(y)$ *possiede la* n*-dualità*
- X/Y *possiede la* n*-dualità*

Teorema 5.54 ([Kl], teorema 21)**.** X/Y *possiede piena dualità se e solo se* X_y *è uno schema di Cohen-Macaulay per ogni* $y \in Y$*.*

Corollario 5.55. *Sia* Y *uno schema noetheriano ed* $\mathcal{E}$ *un fascio localmente libero di rango* $r+1$ *con fibrato proiettivo associato* $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow Y$*. Allora* $\mathbb{P}(\mathcal{E})/Y$ *possiede piena dualità e*

$$\omega_\pi \simeq \det \Omega_{\mathbb{P}(\mathcal{E})/Y} \simeq (\det \pi^* \mathcal{E})(-r-1)$$

Dimostrazione. Chiaramente π soddisfa le condizioni iniziali che abbiamo posto su f e le fibre di π sono regolari e quindi di Cohen-Macaulay. Infine, grazie a 5.47, esiste un ricoprimento $\{U_i\}_{i\in I}$ di aperti affini di Y tale che, per ogni $i \in I$, $\det \Omega_{\mathbb{P}(\mathcal{E})/Y}$ è un fascio dualizzante su $\pi^{-1}(U_i)$ e quindi $\det \Omega_{\mathbb{P}(\mathcal{E})/Y}$ è un fascio dualizzante per π. □

Corollario 5.56. *Sia* Y *uno schema noetheriano e* $\rho : X \longrightarrow Y$ *un rivestimento di grado* d*. Allora* X/Y *possiede piena dualità. Inoltre vale che*

$$\omega_\rho \text{ invertibile } \iff \rho \text{ rivestimento di Gorenstein}$$

Dimostrazione. Osserviamo che ρ è un morfismo piatto, localmente proiettivo e localmente finitamente presentabile. Inoltre dato che, per ogni $y \in Y$, $\dim X_y = 0$ chiaramente X_y è equidimensionale e di Cohen-Macaulay. Il teorema 5.54 ci assicura quindi che X/Y possiede piena (0) dualità. Passiamo adesso all'equivalenza

$\Rightarrow$ Per le proprietà di cambiamento di base di ω_ρ abbiamo che $(\omega_\rho)_y \simeq \omega_{\rho_y}$. Possiamo quindi suppore che $Y \simeq \operatorname{Spec} k$ e quindi che $X \simeq \operatorname{Spec} A$, con A una k-algebra di grado d. Cambiando il grado d possiamo restringerci ad un aperto affine che banalizzi ω_ρ e quindi suppore, tenendo presente 5.46, che $\operatorname{Hom}_k(A,k) \simeq A$. Da 3.37 otteniamo che A è un anello di Gorenstein

$\Leftarrow$ Possiamo ricondurci al caso in cui $Y \simeq \operatorname{Spec} B$, con (B,q) locale. Vogliamo mostrare che $\omega_\rho \simeq \mathcal{O}_X$. $X \simeq \operatorname{Spec} A$, con A una B-algebra libera di rango d e, se indichiamo con $M = \operatorname{Hom}_B(A,B)$, $\omega_\rho \simeq \widetilde{M}$. Per ipotesi A/qA è Gorenstein e quindi, per 3.37, $M/qM \simeq_{A/qA} A/qA$. Dato che M è un B modulo finitamente generato, per Nakayama, otteniamo che M è generato come A-modulo da un elemento, ossia esiste una suriezione $A \longrightarrow M$. Abbiamo quindi una successione esatta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\phi} \omega_\rho \longrightarrow 0$$

Dato che ω_ρ è flat su Y, tale successione rimane esatta sulle fibre. Ma ϕ_y è una suriezione fra fasci liberi dello stesso rango e quindi è un isomorfismo. In particolare per ogni $y \in Y$ abbiamo $K_y = 0$ e quindi $K = 0$ e ϕ è un isomorfismo. □

Valgono i seguenti risultati

Proposizione 5.57 ([Kl],Lemma 14)**.** *Supponiamo che la n-dualità avvenga su X/Y e siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{N}$ fasci quasi-coerenti rispettivamente su X e Y. Se F è piatto e localmente finitamente presentabile oppure $\mathcal{N}$ è iniettivo nella categoria dei fasci quasi-coerenti di X allora*

$$\underline{\mathrm{Ext}}^q_X(\mathcal{F}, f^!\mathcal{N}) = 0 \textit{ per } q \leqslant \min(n, r-d-1)$$

dove $d = \max_{y \in Y} \dim \operatorname{Supp} \mathcal{F}_y$

Teorema 5.58 ([Kl],Teorema 15)**.** *Sia $h : Z \longrightarrow X$ un morfismo finito e finitamente presentabile tale che la composizione $g = f \circ h : Z \longrightarrow Y$ sia piatta e ogni sua fibra abbia dimensione s. Supponiamo inoltre che la $(r-s)$-dualità avvenga su X/Y. Allora esiste un isomorfismo canonico di funtori in $\mathcal{N}$*

$$(\underline{\mathrm{Ext}}^{r-s}_X(h_*\mathcal{O}_Z, f^!\mathcal{N})\tilde{\ } \xrightarrow{\simeq} g^!\mathcal{N}$$

Corollario 5.59. *Sia Y uno schema noetheriano, $\rho : X \longrightarrow Y$ un rivestimento di grado d e $\mathcal{E}$ un fascio localmente libero di rango $n+1$ con fibrato proiettivo associato $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow Y$. Supponiamo inoltre che esista un'immersione chiusa $i : X \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ finitamente presentabile tale che $\rho = \pi \circ i$. Allora*

$$\underline{\mathrm{Ext}}^j_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(i_*\mathcal{O}_X, \omega_\pi) \simeq \left\{ \begin{array}{ll} 0 & j < n \\ i_*\omega_\rho & j = n \end{array} \right.$$

Dimostrazione. Vogliamo applicare il lemma 5.57 a π, con $\mathcal{F} = i_*\mathcal{O}_X$ e $\mathcal{N} = \mathcal{O}_Y$ ($\pi^!\mathcal{O}_Y \simeq \omega_\pi$). In tal caso $r = n$, $\mathcal{F}$ è piatto e finitamente presentabile e $\dim \operatorname{Supp} \mathcal{F}_y = \dim X_y = 0$ per ogni $y \in Y$. Abbiamo quindi l'annullarsi di $\underline{\mathrm{Ext}}^j_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(i_*\mathcal{O}_X, \omega_\pi)$ per $j < n$. Applichiamo adesso il teorema 5.58 alla composizione $\rho = \pi \circ i$. Dato che i è un morfismo proprio e se $p \in \mathbb{P}(\mathcal{E})$, $X_p \subseteq X_{\pi(p)}$ da cui $|X_p| < \infty$, per il teorema di Chevalley i è un morfismo finito. ρ è piatto e possiede la 0 dualità e $\mathbb{P}(\mathcal{E})/Y$ possiede la n-dualità, quindi possiamo applicare il teorema 5.58 con $\mathcal{N} = \mathcal{O}_Y$ e dedurre l'ultima uguaglianza dell'enunciato. □

Osservazione 5.60. Sia ρ un rivestimento di grado d e poniamo $\mathcal{E} = (\operatorname{coker} \rho^\#)^\vee$. Per 1.3 abbiamo una successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y \xrightarrow{\rho^\#} \rho_*\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

con $\mathcal{G}$ localmente libero di rango $d-1$. In particolare $\mathcal{E}$ è localmente libero e $\mathcal{G}^\vee = \mathcal{E}$. Passando al duale, poichè ogni fascio considerato è localmente libero, otteniamo una successione esatta ed in particolare un morfismo

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\phi} \underline{\mathrm{Hom}}_Y(\rho_*\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y) \simeq \rho_*\omega_\rho$$

Applicando ρ^* otteniamo un morfismo

$$\rho^*\mathcal{E} \xrightarrow{\rho^*\phi} \rho^*\rho_*\omega_\rho \longrightarrow \omega_\rho \tag{5.2}$$

Definizione 5.61. *Sia ρ un rivestimento di grado d. Diremo che 5.2 è il morfismo associato al rivestimento ρ.*

Nel capitolo finale mostreremo che se ρ è un rivestimento di Gorenstein allora il morfismo associato a ρ è surgettivo e ne dedurremo l'esistenza di una immersione chiusa $i : X \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$. Mostriamo adesso che il morfismo associato ad un rivestimento commuta con il cambiamento di base.

Lemma 5.62. *Sia Y uno schema noetheriano e $\rho : X \longrightarrow Y$ un rivestimento di grado d. Supponiamo di avere un diagramma cartesiano*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\rho'"'] & X \arrow[d, "\rho"] \\ Y' \arrow[r, "\alpha"] & Y \end{tikzcd}$$

Allora ρ' è un rivestimento di grado d e posti $\mathcal{E} = \underline{\mathrm{Hom}}_Y(\operatorname{coker}\rho^\#, \mathcal{O}_Y)$, $\mathcal{E}' = \underline{\mathrm{Hom}}_{Y'}(\operatorname{coker}\rho'^\#, \mathcal{O}_{Y'})$ esistono isomorfismi

$$\begin{array}{ccc} \rho'^*\mathcal{E}' & \longrightarrow & \omega_{\rho'} \\ \wr\| & & \wr\| \\ \beta^*\rho^*\mathcal{E} & \longrightarrow & \beta^*\omega_\rho \end{array}$$

dove le mappe orizzontali sono quelle associate ai rivestimenti ρ e ρ'.

Dimostrazione. Per 1.2 sappiamo che ρ' è un rivestimento di grado d. Osserviamo innanzitutto che, poichè ρ è affine, si ha un isomorfismo di funtori $\rho'_*\beta^* \simeq \alpha^*\rho_*$. La successione esatta $\mathcal{T}$ relativa a $\rho^\#$, essendo composta di fasci localmente liberi, rimane esatta se vi si applica α^*, e quindi $\alpha^*\mathcal{T}$ è isomorfa alla successione esatta relativa a $\rho'^\#$. Dualizzando e tenendo presente l'osservazione iniziale ed il fatto che in questo caso, dato che i fasci considerati sono localmente liberi, α^* commuta con il duale otteniamo isomorfismi

$$\begin{array}{ccc} \alpha^*\mathcal{E} & \longrightarrow & \alpha^*\rho_*\omega_\rho \\ \wr\| & & \wr\| \\ \mathcal{E}' & \longrightarrow & \rho'_*\beta^*\omega_\rho \end{array}$$

dove l'isomorfismo di destra si può verificare essere indotto dall'isomorfismo $\rho'_*\beta^* \simeq \alpha^*\rho_*$. Tenendo presente sempre tale isomorfismo ed applicando ρ'^* si ottiene la tesi. $\square$

Capitolo 6

Rivestimenti di Gorenstein

Definizione 6.1 (Rivestimento di Gorenstein)**.** *Dati due schemi X, Y, un rivestimento di Gorenstein di grado d fra X ed Y è un rivestimento $\rho : X \longrightarrow Y$ di grado d tale che $\forall y \in Y$ la fibra X_y è uno schema di Gorenstein.*

Indichiamo con $\mathrm{GRiv}_d(Y)$ *la sottocategoria piena di* $\mathrm{Riv}_d(Y)$ *dei rivestimenti di Gorenstein su Y.*

In questo capitolo vogliamo cercare di caratterizzare i rivestimenti di Gorenstein di grado maggiore o uguale a 3. Abbiamo visto in 3.42 che ogni rivestimento di grado 2 è di Gorenstein ed anche che per il grado 3 questo non è più vero, portando come controesempio il rivestimento

$$\operatorname{Spec} k[X, Y]/(X^2, XY, Y^2) \longrightarrow \operatorname{Spec} k$$

Come sarà chiaro nel seguito (e come si può intuire dalla proposizione 3.41) la caratterizzazione che daremo non può essere estesa ai gradi minori.

Lo scopo di questo capitolo è dimostrare un risultato ottenuto in [1] sui rivestimenti di Gorenstein, cercando di esprimerlo come equivalenza fra la categoria dei rivestimenti di Gorenstein $\mathrm{GRiv}_d(Y)$ ed una categoria che definiremo più avanti. Mostreremo inoltre che la stessa caratterizzazione, che in [1] viene fatta per schemi noetheriani integri, può essere fatta assumendo la sola ipotesi di noetherianità.

Come nel caso di rivestimenti qualsiasi, iniziamo mostrando che

Lemma 6.2. *La proprietà di essere un rivestimento di Gorenstein di grado d è stabile per cambiamento di base.*

Dimostrazione. Grazie a 1.2 è sufficiente mostrare che se $\rho : X \longrightarrow Y$ è un rivestimento di Gorenstein di grado d e $\rho' : X' \longrightarrow Y'$ è ottenuto da un cambiamento di base $g : Y' \longrightarrow Y$, allora le fibre di ρ' sono ancora di Gorenstein. In particolare possiamo supporre che Y' sia lo spettro di un campo F. Se il punto generico di $\operatorname{Spec} F$ viene mandato da g in $q \in Y$, allora g si fattorizzerà attraverso $\operatorname{Spec} k(q)$ e quindi possiamo assumente anche che $Y \simeq \operatorname{Spec} k$ e che F/k sia un'estensione di campi. In particolare $X \simeq \operatorname{Spec} A$, per una qualche k-algebra di dimensione finita. Per 3.64 è sufficiente mostrare che le fibre di $X' \longrightarrow X$, che è piatto, sono di Gorenstein, e quindi assumere che X sia lo spettro di un campo F' (la dimensione rimane finita poicè $k(p)$ è un quoziente di A). Ci siamo quindi ricondotti a dimostrare che $A = F \otimes_k F'$, con F'/k finita, è di Gorenstein. A è una F-algebra di dimensione finita, quindi possiamo usare la caratterizzazione data in 3.37. Poichè $\dim_F A < \infty$ avremo un isomorfismo (di A-moduli)

$$\operatorname{Hom}_F(A, F) \simeq \operatorname{Hom}_k(F', k) \otimes_k F \simeq \operatorname{Hom}_k(F', k) \otimes_{F'} A \simeq A$$

□

6.1 Immersioni non degeneri ed aritmenticamente di Gorenstein per k-algebre di dimensione finita

Se $\rho : X \longrightarrow \operatorname{Spec} k$ è un rivestimento di grado d e $X \simeq \operatorname{Spec} A$, quindi con A una k-algebra di dimensione d su k, allora ogni suriezione $R = k[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow A$ induce un'immersione chiusa $X \longrightarrow \mathbb{A}^n_k$ che rimane tale se la si compone con l'inclusione $\mathbb{A}^n_k \subseteq \mathbb{P}^n_k$, dato che X è un numero finito di punti chiusi. In particolare ogni rivestimento di grado d su un campo è proiettivo. Se aggiungiamo l'ipotesi che X sia di Gorenstein, ossia che ρ sia un rivestimento di Gorenstein, possiamo trovare particolari immersioni di questa forma, che, come vedremo, avranno la proprietà di essere non degeneri, con anello delle coordinate omogenee di Gorenstein e in cui il numero di generatori n è $d-2$. In particolare, oltre a mostrare l'esistenza di tali immersioni, riusciremo a calcolarne esplicitamente anche la risoluzione minima e questo, come vedremo, rappresenterà il passo base per la classificazione delle successive sezioni.

Iniziamo introducendo la definizione di immersione aritmenticamente di Gorenstein:

Definizione 6.3. *Sia k un campo ed $i : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_k$ un'immersione chiusa. i si dice aritmenticamente di Gorenstein se l'anello delle coordinate associato ad i è un anello di Gorenstein.*

Il teorema di esistenza di tali immersioni che abbiamo anticipato è il seguente

Teorema 6.4. *Sia k un campo infinito, d un intero maggiore od uguale a 3 ed A una k-algebra di Gorenstein di dimesione d su k. Allora esiste un'immersione non degenere e aritmenticamente di Gorenstein su k*

$$\operatorname{Spec} A \longrightarrow \mathbb{P}^{d-2}_k$$

Osservazione 6.5. Come vedremo in seguito l'ipotesi k infinito non è necessaria. D'altra parte l'immersione che troveremo (non esplicitamente) per i campi finiti in generale non si spezzerà attraverso un aperto coordinato di $\mathbb{P}^{d-2}_k$. Ad esempio $\mathbb{F}_2^3$ non ammette una immersione chiusa in $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_2}$ perchè $\mathbb{F}_2^3$ non può essere generato come algebra su $\mathbb{F}_2$ da un solo elemento (3.42).

Osservazione 6.6. Per 3.65 una k-algebra A per cui esista un'immersione come nell'enunciato è di Gorenstein e quindi non si può sperare di generalizzare l'enunciato ad una k-algebra qualsiasi. D'altra parte è interessante osservare che in generale se $X \simeq \operatorname{Spec} A$, dove A è una k-algebra di dimensione $d \geqslant 3$, non esistono immersioni chiuse $X \xrightarrow{i} \mathbb{P}^{d-2}_k$. Consideriamo $R = k[X_1, \dots, X_{d-1}]$, $m = (X_1, \dots, X_{d-1})$ ed $A = R/m^2$. A è una k-algebra locale di dimensione d

su k non di Gorenstein dato che $\operatorname{Soc} A = m/m^2$ e $\dim_k m/m^2 = d-1 \geqslant 2$. Se per assurdo esistesse un'immersione chiusa $i : X \longrightarrow \mathbb{P}_k^{d-2}$, dato che X è costituito da un punto, i si fattorizzarebbe attraverso un aperto coordinato di $\mathbb{P}_k^{d-2}$ e quindi esisterebbe una suriezione $k[Y_1, \dots, Y_{d-2}] \xrightarrow{\phi} A$. Quozientando per i polinomi $Y_t - a_t$ nel caso che $\phi(Y_t) = a_t \in k$ e rinominando le variabili otteniamo una suriezione $R' = k[Y_1, \dots, Y_l] \xrightarrow{\psi} A$ con $l < d-1$ e $\psi(Y_t)$ non invertibile per ogni t. Se $m' = (Y_1, \dots, Y_l)$ avremo che $m'^2 \subseteq \ker \psi$ e di conseguenza l'esistenza di un'applicazione lineare surgettiva $R'/m'^2 \longrightarrow A$ con $\dim_k R'/m'^2 = l+1 < d = \dim_k A$, da cui otteniamo un assurdo.

Per dimostrare 6.4, abbiamo bisogno dei seguenti due lemmi.

Lemma 6.7. *Sia X uno schema finito su un campo k e supponiamo esista una immersione chiusa $X \subseteq \mathbb{A}_k^n = \operatorname{Spec} k[X_1, \dots, X_n] \subseteq \mathbb{P}_k^n = \operatorname{Proj} k[X_0, \dots, X_n]$ definita nello spazio affine da un ideale I. Siano inoltre J, S_X rispettivamente l'ideale e l'anello delle coordinate omogenee associati ad X. Allora*

- *J è generato dalle omogeneizzazioni rispetto ad X_0 degli elementi di I*
- *X_0 è un non divisore dello 0 in S_X e S_X/X_0S_X è un anello locale (in senso classico) di dimensione 0*
- *se $f_1, \dots, f_m \in I$ e $g_1, \dots, g_m$ sono le componenti omogenee di grado massimo di, rispettivamente, $f_1, \dots, f_m$ abbiamo una suriezione*

$$k[X_1, \dots, X_n]/(g_1, \dots, g_m) \longrightarrow S_X/X_0S_X \tag{6.1}$$

- *Se $I = (f)$ allora J è generato dalla omogeneizzazione rispetto a X_0 di f e l'omomorfismo 6.1 rispetto ad f è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Sia $T = S_X$. L'immersione chiusa è data da $X \simeq \operatorname{Proj} T \longrightarrow \mathbb{P}_k^n$. L'ipotesi che $V(X_0) \cap X = \emptyset$ ci dice che $X_{X_0} = X$. In particolare, per ogni indice i, $X_{X_0X_i} = X_{X_i}$ e quindi la mappa

$$T_{(X_i)} \longrightarrow T_{(X_iX_0)} = T_{(X_i), \frac{X_0}{X_i}} \tag{6.2}$$

è un isomorfismo e $X_0/X_i \in T_{(X_i)}$ è invertibile. Sia ora J l'ideale associato ad X. Abbiamo che $J_{(X_0)} = I$ (dove si considera I come ideale di $S_{(X_0)} = k[\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}]$), dato che entrambi definiscono X come sottoschema chiuso di $\mathbb{A}_k^n$. Vogliamo far vedere che J coincide con l'ideale

$$J' = \{s \in S \mid s \text{ omogeneo e } \ s_{(X_0)} \in I\}$$

Usando 2.63 avremo che $J \subseteq J'$. Viceversa se $s \in J'$ allora

$$s/X_i^{\deg s}(X_0/X_i)^{-\deg s} = s/X_0^{\deg s} = 0$$

considerando il morfismo $T_{(X_0)} \longrightarrow T_{(X_iX_0)} = T_{(X_i)}$. Dato che $T_{(X_i)} \simeq S_{(X_i)}/J_{(X_i)}$ otteniamo che $J = J'$. In particolare, le omogeneizzazioni degli elementi di I sono elementi di J, mentre se $h \in J$ abbiamo che, per qualche k, $h = X_0^k f$ dove f è l'omogeneizzazione di $h_{(X_0)}$.

Se X_0 fosse un divisore dello zero in T, ossia $tX_0 \in J$ per qualche $t \notin J$, per quanto appena visto, otterremmo l'assurdo

$$t_{(X_0)} = (tX_0)_{(X_0)} \in I \implies t \in J$$

Inoltre, se $P \subseteq T$ è un primo che contiene X_0, allora P^* è un primo omogeneo di T che contiene X_0. Ma allora P^* e di conseguenza P coincidono con il massimale omogeneo di T. Quindi T/X_0T è locale di dimensione 0.

Se $f_1, \dots, f_m \in I$ ed indichiamo con $\hat{-}$ l'operazione di omogeneizzazione rispetto ad X_0, per quanto appena visto $(\hat{f^1}, \dots, \hat{f^m}) \subseteq J$ e dunque esiste una suriezione

$$k[X_0, \dots, X_n]/(\hat{f^1}, \dots, \hat{f^m}) \longrightarrow T \tag{6.3}$$

da cui si deduce 6.1. Nel caso in cui I è principale generato da f avremo che $J = (\hat{f})$, infatti se $h \in J$ e quindi $h_{(X_0)} \in I$, otteniamo una relazione della forma $X_0^k h = \lambda \hat{f}$ e, tenendo presente che $\hat{f}$ è primo con X_0 (ed escludendo il caso banale $f = 0$), che $h \in (\hat{f})$. Risulta quindi chiaro che 6.3 e 6.1 sono isomorfismi. □

Lemma 6.8. *Sia k un campo e V un k-spazio di dimensione finita insieme ad una forma bilineare simmetrica $<,>$. Allora*

- *se* $\operatorname{char} k \neq 2$ *oppure $<,>$ non è alternante, esiste una base ortogonale per V*
- *se $<,>$ è alternante (e quindi $V = 0$ o* $\operatorname{char} k = 2$*) allora esiste una base $e_1, \dots, e_n$ tale che, se $i \leqslant j$,*

$$< e_i, e_j >= \begin{cases} 0 & \textit{se } j \neq i+1 \textit{ o } j \textit{ dispari} \\ 1 & \textit{se } j = i+1 \textit{ è pari} \end{cases}$$

Dimostrazione. L'osservazione essenziale è che se W è un sottospazio di V che sia non singolare rispetto a $<,>$, allora $V = W \oplus W^\perp$ e $<,>$ è non singolare su $W^\perp$. Infatti, per la non singolarità su W, abbiamo che $W \cap W^\perp = 0$. Inoltre, se $v \in V$ e $w_1, \dots, w_k$ è una base di W allora la condizione $v - \sum_i a_i w_i \in W^\perp$ può essere espressa come un sistema lineare

$$\sum_i a_i < w_i, w_j >=< v, w_j >$$

con incognite $a_1, \dots, a_k$ e matrice la matrice di $<,>_{|W}$. Poichè quest'ultima è non singolare per ipotesi, abbiamo sempre una soluzione. Tornando all'enunciato, dividiamo la dimostrazione in vari casi ed in ognuno di questi ragioniamo per induzione su $\dim_k V$. Il caso base è sempre quello zero dimensionale, quindi supponiamo $V \neq 0$.

$\operatorname{char} k \neq 2$. In tal caso la forma $<,>$ non può essere alternante, dato che altrimenti $< v, w >= \frac{1}{2}(< v+w, v+w > - < v, v > - < w, w >) = 0$. Esiste quindi un vettore $v \in V$ tale che $< v, v > \neq 0$. Ovviamente $<,>$ è non singolare su $W =< v >_k$, quindi $V = W \oplus W^\perp$ e l'induzione su $W^\perp$ permette di completare v ad una base ortogonale di V.

$<,>$ *alternante.* Poichè $<,>$ è non singolare esistono $u, v \in V$ tali che $< u, v > \neq 0$ e normalizzando $< u, v >= 1$. Sia $W =< u, v >_k$. La matrice di $<,>_{|W}$ è data da

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

In particolare W è non singolare rispetto a $<,>$ e l'ipotesi induttiva su $W^\perp$ da il risultato voluto.

$\operatorname{char} k = 2$ *e* $<,>$ *non alternante.* Mostriamo che esiste $v \in V$ tale che $< v, v > \neq 0$ e $<,>$ non è alternante su $\{v\}^\perp$. Sappiamo che esiste $v \in V$ tale che $< v, v > \neq 0$. Consideriamo $W =< v >_k$. Se $<,>$ su $W^\perp$ non è alternante o $W^\perp = 0$, abbiamo finito. Supponiamo quindi che $W^\perp \neq 0$ e che $<,>$ sia alternante su $W^\perp$. Dal caso precedente abbiamo $u, z \in W^\perp$ tali che $< u, z >= 1$. Mostriamo che l'elemento $v' = v + u + z$ soddisfa le richieste. Abbiamo che $< v', v' >=< v, v > \neq 0$ e si può verificare direttamente che $z = v+ < v, v > u$ è ortogonale a v' e $< z, z >=< v, v > \neq 0$. $\square$

Dimostrazione del teorema 6.4. $d = 3$. Grazie a 3.42 sappiamo che $A \simeq K[X]/(q(X))$ con q un polinomio di grado 3. Otteniamo quindi una immersione chiusa $\operatorname{Spec} A \longrightarrow \mathbb{A}^1_k \subseteq \mathbb{P}^1_k$. Sia S_X l'anello delle coordinate omogenee di X ed I l'ideale associato all'immersione. Grazie a 6.7 sappiamo che I è generato da q^{om} e che

$$S_X/X_0S_X \simeq k[X]/(X^3)$$

La prima informazione ci assicura che i è non degenere, la seconda che S_X/X_0S_X e di conseguenza S_X sono di Gorenstein.

$d > 3$. Poniamo $X = \operatorname{Spec} A$. Vogliamo applicare 3.41. Sappiamo che su A esiste una mappa di traccia η, mostriamo che essa può essere scelta di modo che $\eta(1) = 0$. Supponiamo per assurdo che $\ker \eta \subseteq \bigcup_{p \in X} p$. Poichè k è infinito, esisterebbe $p \in X$ tale che $\ker \eta \subseteq p$ e per dimensione $p = \ker \eta$. Ma $\ker \eta$ può contenere solo l'ideale nullo, dunque $p = \ker \eta = 0$ ed $A \simeq k$, assurdo dato che $\dim_k A = d > 3$. Dunque esiste $a \in \ker \eta$ invertibile, ma allora $a\eta$ è una mappa di traccia tale che $a\eta(1) = \eta(a) = 0$. Possiamo quindi supporre che $\eta(1) = 0$. Allora, grazie alla proposizione 3.41, abbiamo una decomposizione della forma

$$A = k \oplus F \oplus ke^* \text{ e } A = k + F + F^2$$

insieme ad una forma bilineare simmetrica $<,>$ non degenere su A e su F ed associata ad η. Otteniamo quindi un'immersione chiusa $i : X \longrightarrow \mathbb{A}^{d-2}_k \subseteq \mathbb{P}^{d-2}_k$ associata al morfismo surgettivo $\operatorname{S} F \longrightarrow A$. Indichiamo con $X_1, \ldots, X_{d-2}$ le coordinate di $\operatorname{S} F$, con X_0 la coordinata aggiuntiva del proiettivo ed infine con J, S_X rispettivamente l'ideale e l'anello delle coordinate omogenee associati ad i. Se J contenesse una forma lineare omogenea μ, la sua deomogeneizzazione rispetto ad X_0, vista in A, sarebbe nulla e quindi tali sarebbero i suoi coefficienti. Dunque i è non degenere. Per mostrare che S_X è di Gorenstein, dividiamo la dimostrazione in due casi, ossia $\operatorname{char} k \neq 2$ oppure $<,>$ non alternante e $\operatorname{char} k = 2$ e $<,>$ alternante.

$\operatorname{char} k \neq 2$ *oppure* $<,>$ *non alternante.* In tale situazione, grazie a 6.8, otteniamo una base ortogonale $e_1, \ldots, e_{d-2}$ di F. In particolare

$$\eta(e_ie_j) =< e_i, e_j >= 0 \iff i \neq j$$

Poichè $\ker\eta = k \oplus F$, $1, e_1, \dots, e_{d-2}, e_{d-1} = e_1^2$ è una k-base di A. Scriviamo adesso le relazioni

$$e_i e_j = f_{i,j}(e_1, \dots, e_{d-1})$$

dove le $f_{i,j}$ sono forme lineari (non omogenee). Osserviamo in particolare che se $i \neq j < d-1$ allora, applicando η, abbiamo che $f_{i,j}$ non dipende da e_{d-1}. Poniamo $X_{d-1} = X_1^2$. Allora $q_{i,j} = X_i X_j - f_{i,j}(X_1, \dots, X_{d-1})$ sono elementi di I. Per mostrare che S_X è di Gorenstein, calcoliamo esplicitamente S_X/X_0S_X. Le componenti omogenee di grado massimo in $q_{i,j}$ sono X_iX_j, per $i \neq j$, $X_i^2 - a_iX_1^2$ $a_i \neq 0$,$X_iX_1^2$ per $i > 1$, ed infine X_1^3, X_1^4. Tenendo conto di 6.7 abbiamo una suriezione

$$\frac{k[X_1, \dots, X_{d-2}]}{(X_iX_j \ i \neq j, X_i^2 - a_iX_1^2 \ i > 1, X_1^3)} \longrightarrow S_X/X_0S_X \tag{6.4}$$

vogliamo far vedere che è un isomorfismo. Indichiamo con R l'anello sulla sinistra. Vogliamo mostrare che $1, X_1, \dots, X_{d-2}, X_1^2$ generano R su k. L'idea è semplice: dove trovo X_iX_j con $i \neq j < d-1$ ho 0, se invece trovo X_i^2 con $1 < i < d-1$ lo scambio con $a_iX_1^2$. In tal modo ogni polinomio può essere scritto come somma di una parte lineare in $1, X_1, \dots, X_{d-2}$ e altri monomi della forma X_1^t. Ma questi ultimi per $t > 2$ sono nulli e quindi abbiamo finito. Per mostrare che 6.4 è un isomorfismo è quindi sufficiente verificare che $1, X_1, \dots, X_{d-2}, X_1^2$ sono indipendenti in S_X/X_0S_X. Supponiamo quindi di avere una relazione

$$b_0 + b_1X_1 + \dots + b_{d-2}X_{d-2} + b_{d-1}X_1^2 = X_0\mu$$

in S_X. Chiaramente $b_0 = 0$ e, guardando alle parti lineari e tenendo presente che J non contiene forme lineari omogenee, otteniamo anche $b_1 = \dots = b_{d-2} = 0$. Avendo eliminato i primi addendi, possiamo supporre μ omogeneo di grado 1. Ma adesso, deomogeneizzando rispetto ad X_0 (e quindi passando in A), otteniamo che $b_{d-1}e_1^2 \in k \oplus F$ e quindi $b_{d-1} = 0$. Possiamo mostrare adesso che $R \simeq S_X/X_0S_X$ è di Gorenstein. Per 6.7 R è un anello locale di dimensione 0 con massimale $m = (X_1, \dots, X_{d-2})$. Per mostrare che è di Gorenstein calcoliamo $\operatorname{Soc} R$. Sia $g = b_0 + b_1X_1 + \dots + b_{d-2}X_{d-2} + b_{d-1}X_1^2 \in \operatorname{Soc} R$. $b_0 = 0$ poichè $g \in m$, inoltre $0 = X_jg = b_jX_j^2 = a_jb_jX_1^2$ da cui $b_j = 0$ poichè $X_1^2 \neq 0$. In definitiva $\operatorname{Soc} R = kX_1^2$ e quindi S_X/X_0S_X e di conseguenza S_X sono di Gorenstein.

$\operatorname{char} k = 2$ *e* $<,>$ *alternante.* Per 6.8 possiamo scegliere una base $e_1, \dots, e_{d-2}$ di F tale che, se $i \leqslant j$,

$$\eta(e_ie_j) =< e_i, e_j >= \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq i+1 \text{ o } j \text{ dispari} \\ 1 & \text{se } j = i+1 \text{ è pari} \end{cases}$$

Il ragionamento è molto simile al caso precedente. Come base di A si sceglie $1, e_1, \dots, e_{d-2}, e_{d-1} = e_1e_2$, si scrivono le relazioni $e_ie_j = f_{i,j}(e_1, \dots, e_{d-1})$ e si pone $X_{d-1} = X_1X_2$ e $q_{i,j} = X_iX_j - f_{i,j}(X_1, \dots, X_{d-1})$. Le componenti omogenee di grado massimo saranno $X_iX_j - a_{i,j}X_1X_2$ per $i \leqslant j$ con $a_{i,j} =< e_i, e_j >$, $X_iX_1X_2$ e $(X_1X_2)^2$ ed il $\operatorname{Soc} R$ risulta essere kX_1X_2. □

Passiamo adesso alla caratterizzazione di tali immersioni rispetto alle loro risoluzione minime. Iniziamo introducendo le seguenti successioni di numeri.

Definizione 6.9. *Fissato un intero $d \geqslant 3$ definiamo*

$$q_k = \begin{cases} 0 & k \leqslant 0 \text{ e } k > d-2 \\ -k-1 & 1 \leqslant k \leqslant d-3 \\ -d & k = d-2 \end{cases}$$

$$\beta_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \text{ e } k = d-2 \\ \frac{k(d-2-k)}{d-1}\binom{d}{k+1} & 1 \leqslant k \leqslant d-3 \\ 0 & k > d-2 \end{cases}$$

Osservazione 6.10. Un semplice conto mostra che valgono le relazioni

$$\beta_t = (-1)^{t+1} \prod_{j \neq t} \frac{-q_j}{q_t - q_j} \quad \text{per} \quad 1 \leqslant t \leqslant d-2$$

$$q_{d-2-k} = -q_k - d \quad \text{per} \quad 0 \leqslant t \leqslant d-2$$

che ricordano le relazione ottenute in 3.72. Questo non è un caso:

Proposizione 6.11. *Sia d un intero maggiore od uguale a 3 ed $i : X \longrightarrow \mathbb{P}_k^{d-2}$ un'immersione chiusa per cui esista una risoluzione*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^{d-2}}^{\beta_{d-2}}(q_{d-2}) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^{d-2}}^{\beta_1}(q_1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^{d-2}} \longrightarrow i_* \mathcal{O}_X \longrightarrow 0 \qquad (6.5)$$

Allora tale risoluzione è una risoluzione minima di X, i è un'immersione non degenere ed aritmeticamente di Gorenstein ed X è uno schema affine di Gorenstein di dimensione 0.

Dimostrazione. Vogliamo applicare 3.78. La risoluzione 6.5 è una risoluzione pura di tipo $(-q_1, \ldots, -q_{d-2})$ e poichè questa è una successione crescente, è una risoluzione minima per X. Tenendo conto dell'osservazione 6.10 e del fatto che $\beta_{d-2} = 1$, se indichiamo con S_X l'anello delle coordinate di X, abbiamo che S_X è un anello di Gorenstein di dimensione 1. In particolare i è aritmeticamente di Gorenstein ed X è uno schema di Gorenstein. Sempre per 3.78, se $S = k[X_0, \ldots, X_{d-2}]$ ed $\mathcal{I}$ è il fascio di ideali associato ad X, avremo una suriezione

$$S(q_1)^{\beta_1} \longrightarrow \Gamma_*(\mathcal{I})$$

In particolare $\Gamma_*(\mathcal{I})$ non contiene forme lineari omogenee e quindi i è non degenere. Infine, se p è un primo omogeneo di S_X diverso dal massimale omogeneo, poichè $\dim S_X = 1$ avremo che p è un punto chiuso di $\operatorname{Proj} S_X \simeq X$ e quindi $\dim X = 0$. Dato che X è noetheriano ed è unione di un numero finito di punti chiusi (e quindi aperti) abbiamo anche che X è affine. $\square$

Come vedremo più avanti in un caso più generale, applicando la coomologia alla successione 6.5, si può dimostrare che X è lo spettro di una k-algebra di dimensione d o, detto altrimenti, $X \longrightarrow \operatorname{Spec} k$ è un rivestimento di Gorenstein di grado d. Un risultato fondamentale, potremmo dire il punto di partenza per la caratterizzazione dei rivestimenti di Gorenstein che vogliamo esporre, è che vale il viceversa della precedente proposizione, ovvero

Teorema 6.12. *Sia $d \geqslant 3$ ed $i : X \longrightarrow \mathbb{P}_k^{d-2}$ un'immersione chiusa non degenere ed aritmeticamente di Gorenstein. Supponiamo inoltre che $X \longrightarrow \operatorname{Spec} k$ sia un rivestimento di Gorenstein di grado d. Allora X ha una risoluzione minima della forma 6.5.*

Dimostrazione. Vogliamo innanzitutto ricondurci al caso k infinito. A questo proposito possiamo consideriamo il cambiamento di base $i' : X' \longrightarrow \mathbb{P}^{d-2}_{\overline{k}}$ di i rispetto a $k \longrightarrow \overline{k}$. Mostriamo che sono soddisfatte ancora le ipotesi. X' è ancora una schema di Gorenstein, poichè abbiamo mostrato che si ha il cambiamento di base per tali rivestimenti. Per 2.67 i' è non degenere e per 2.64, posto S_X l'anello delle coordinate di X, $S_{X'} \simeq S_X \otimes_k \overline{k}$ è l'anello delle coordinate di i'. Dato che X è affine zero-dimensionale, otteniamo subito che $\dim S_X = 1$. Inoltre S_X è Gorenstein e quindi in particolare di Cohen-Macaulay. Poichè il massimale omogeneo non è associato (non è minimale) esiste un non divisore di 0 omogeneo $x \in S_X$. In particolare S_X/xS_X è una k-algebra locale di dimensione finita e di Gorenstein. Sempre per il cambiamento di base per rivestimenti di Gorenstein, otteniamo che $S_X/xS_X \otimes_k \overline{k} \simeq S_{X'}/xS_{X'}$ è un anello di Gorenstein. Inoltre x è un non divisore di zero anche per $S_{X'}$ e quindi $S_{X'}$ è di Gorenstein, ossia i' è un'immersione aritmeticamente di Gorenstein. Infine, per piattezza, una risoluzione minima di I tensorizzata per $\overline{k}$ da una risoluzione minima di I' e quindi devono essere della stessa forma.

Supponiamo quindi che k sia infinito e poniamo $R = k[X_0, \dots, X_{d-2}]$ l'anello dei polinomi di $\mathbb{P}^{d-2}_k$ e $X \simeq \operatorname{Spec} B$, dove B è una k-algebra di Gorenstein di dimensione d su k. Poichè $|X| < \infty$, possiamo trovare un elemento omogeneo di grado 1 non contenuto in nessuno dei primi omogenei non massimali. A meno di un automorfismo (graduato) di R possiamo supporre che tale elemento sia X_0. Come fatto sopra, dato che S_X è di Cohen-Macaulay, X_0 non è contenuto in nessun primo associato e quindi è un non divisore dello 0. In particolare $(S_X)_{(X_0)} \simeq B$, ossia i si fattorizza attraverso un'immersione chiusa $X \longrightarrow \mathbb{A}^{d-2}_k$. Per ipotesi S_X è di Gorenstein e quindi $\omega_{S_X} \simeq S_X(a)$, dove $a = a(S_X)$ (3.54).

Supponiamo di sapere che $0 \leqslant a \leqslant 1$. Dato che S_X è un modulo graduato finitamente generato su R, abbiamo per il teorema di Hilbert che $\operatorname{pd} S_X < \infty$ e più in particolare per la formula di Auslander-Buchsbaum, tenendo presente che S_X è di Cohen-Macaulay, che $\operatorname{pd} S_X = d - 2$. Quindi la risoluzione minima $\mathcal{T}$ di S_X è della forma

$$\mathcal{T} : 0 \longrightarrow T_{d-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow T_0 \longrightarrow S_X$$

dove $T_0 = R$. Applicando $\operatorname{Hom}_R(-, \omega_R)$ a $\mathcal{T}$, per 3.53 otteniamo una risoluzione di ω_{S_X}, che sarà anche minima poichè è minima localizzando nel massimale omogeno ($\mathcal{T}_m$ è isomorfa al proprio duale per 3.71). Dall'unicità della risoluzione minima avremo che

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{T}, \omega_R)(-a) \simeq \operatorname{Hom}(\mathcal{T}, R)(1 - d - a) \simeq \mathcal{T}$$

ossia, per ogni k, ${T_k}^\vee \simeq T_{d-2-k}(d + a - 1)$. In particolare per $k = d - 2$ otteniamo che $T_{d-2} \simeq R(1 - d - a)$. Poichè il massimale omogeneo di S_X è massimale, i gradi dei generatori di T_k sono univocamente determinati e poniamo λ_k, μ_k rispettivamente il minimo e il massimo di questi cambiati di segno (ossia esattamente i numeri che compaiono nella decomposizione). In particolare $\mu_k \leqslant \lambda_k$ e $\mu_{d-2} = \lambda_{d-2} = 1 - d - a$. Tenendo presente 3.72 è sufficiente mostrare che $\lambda_k = \mu_k = -k - 1 = q_k$ per $0 < k < d - 2$ e che $a = 1$, infatti in tal caso i ranghi sono univocamente determinati dai q_k. Dalla minimalità di $\mathcal{T}$ otteniamo che la successione λ_k è strettamente decrescente, mentre dall'isomorfismo ${T_k}^\vee \simeq T_{d-2-k}(d + a - 1)$, che $\lambda_k = -\mu_{d-2-k} - d + 1 - a$, in particolare anche la successione μ_k è strettamente decrescente. Infine poichè I non contiene forme lineari avremo anche $\lambda_1 \leqslant -2$ e quindi che $\lambda_{d-3} \geqslant \mu_{d-3} \geqslant 3-d-a$.

Supponiamo per assurdo che $a = 0$. Se $d = 3$ allora la nostra successione diventa $0 \longrightarrow R(-2) \longrightarrow R \longrightarrow S_X \longrightarrow 0$, ossia $S_X \simeq k[X_0, X_1]/(g(X_0, X_1))$, con $\deg g = 2$. Deomogeneizzando rispetto ad X_0 troviamo che $B = S_{X,(X_0)}$ è quoziente di $K[X_1]$ per un polinomio di grado minore di 3 e quindi $\dim_k B < 3$, contro le ipotesi. Se $d > 3$ allora le successioni λ_k e μ_k, per $0 < k < d-2$, sono strettamente decrescenti e contenute in $\{3-d = -1-(d-4), \dots, -1-(1) = -2\}$, che da un assurdo per la cardinalità.

Abbiamo quindi che $a = 1$. Se $d = 3$ abbiamo la succesione cercata, se $d > 3$, ragionando come prima, le successioni λ_k e μ_k sono contenute in $\{2-d = -1-(d-3), \dots, -1-(1) = -2\}$ e quindi necessariamente $\lambda_k = \mu_k = -k-1$ per $0 < k < d-2$, come voluto.

Rimane quindi solo da mostrare che $0 \leqslant a = a(S_X) \leqslant 1$. Osserviamo che vale la relazione $b = a(S_X/X_0S_X) = a(S_X) + 1$ (3.56), quindi ci riconduciamo a mostrare che $1 \leqslant b \leqslant 2$. Poniamo $A = S_X/X_0S_X$. A è una k-algebra locale di dimensione finita su k e di Gorenstein. Indichiamo con m il massimale (omogeneo) di A. In particolare, A è iniettivo e quindi $\mathrm{Ext}^i(A/m, A) = 0$ per $i > 0$. D'altra parte $\mathrm{Soc}\,A$ è semplice, quindi $\mathrm{Hom}_A(A/m, A) \simeq A/m$, generato da un morfismo non nullo $A/m \longrightarrow \mathrm{Soc}\,A$. Osserviamo anche che $\mathrm{Soc}\,A$ è un ideale omogeneo di A e quindi generato su k da un elemento omogeneo y. Mostriamo che $\deg y = b$. Ricordando la graduazione data a $\mathrm{Hom}_A(A/m, A)$ (i morfismo graduati con gradi variabili) e tenendo presente che A/m è concentrato in grado 0, avremo che $\mathrm{Hom}_A(A/m, A(\deg y)) \simeq A/m$ come moduli graduati e quindi per definizione $A(\deg y)$ è il modulo canonico di A, da cui $b = \deg y$. Osserviamo che A non è un campo ed in particolare $X_1 \neq 0$ in A, dato che altrimenti $m = X_0S_X$ e $X_1 = X_0\eta$, con $\eta \in k$, contro la non degenericità di i. Questo ci assicura che $b \geqslant 1$.

Indichiamo con $x_i = X_i/X_0 \in B = (S_X)_{(X_0)}$. Ricordiamo che, da 6.7, se $p(x_1, \dots, x_{d-2}) = 0$ in B e q è l'omogeneizzazione rispetto X_0 di p, allora $q(X_0, X_1, \dots, X_{d-2}) = 0$ in S_X.

Osserviamo che $1, x_1, \dots, x_{d-2}$ sono indipendenti su k, dato che ogni relazione di dipendenza lineare, omogeneizzando, da una forma lineare omogenea nulla in S_X, che quindi ha i coefficienti nulli poichè i è non degenere. Se per ogni j, $x_1x_j \in (1, x_1, \dots, x_{d-2})_k$, omogeneizzando ed andando in A avremmo che $X_1X_j = 0$ per ogni j. Dato che anche $X_1 \neq 0$ in A avremmo che $\mathrm{Soc}\,A = X_1k$, ossia $b = 1$.

Se questo non accade, esiste un indice r tale che $1, x_1, \dots, x_{d-2}, x_1x_r$ è una k-base di B. Preso un qualsiasi monomio p in $X_1, \dots, X_{d-2}$ di grado maggiore di 2, scrivendolo rispetto a questa base, omogeneizzando ed andando in A, otteniamo $p = 0$. Quindi A è nullo in grado maggiore di 2 e di conseguenza necessariamente $b \leqslant 2$. □

6.2 Risoluzioni di Gorenstein: la categoria $\mathbf{PGor}_d(Y)$

Data la peculiarità delle risoluzione della forma 6.5 e l'importanza che esse avranno nel seguito diamo la seguente definizione:

Definizione 6.13 (Risoluzione di Gorenstein)**.** *Sia $d \geqslant 3$ un intero ed Y uno* *schema noetheriano. Una risoluzione di Gorenstein su Y è una terna $(\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha})$ dove*

- *$\mathcal{E}$ è un fascio localmente libero su Y di rango $d-1$*
- *$\underline{\mathcal{M}} = (\mathcal{M}_{d-2}, \dots, \mathcal{M}_1)$ sono fasci localmente liberi su Y con $\operatorname{rk} \mathcal{M}_i = \beta_i$*
- *$\underline{\alpha} = (\alpha_{d-2}, \dots, \alpha_1)$ sono morfismi tali che, posto $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow Y$ il fibrato proiettivo associato a $\mathcal{E}$, la seguente successione*
$$\mathcal{N}_* : 0 \longrightarrow \pi^*\mathcal{M}_{d-2}(q_{d-2}) \xrightarrow{\alpha_{d-2}} \dots \xrightarrow{\alpha_2} \pi^*\mathcal{M}_1(q_1) \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} \tag{6.6}$$
sia esatta.

Osservazione 6.14. Data una risoluzione di Gorenstein $(\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha})$ su Y risultano definiti:

- il fibrato proiettivo $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow Y$
- il fascio di ideali $\mathcal{I} = \operatorname{Im} \alpha_1$ e quindi una immersione chiusa $i : X \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$.
- un morfismo $\rho = i \circ \pi : X \longrightarrow Y$
- la risoluzione $\mathcal{N}_*$ definita sopra, con $\mathcal{N}_k = \pi^*\mathcal{M}_k$
- un morfismo $\gamma : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathrm{S}^{-q_1} \mathcal{E}$ indotto da α_1 tramite i seguenti isomorfismi
$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(\pi^*\mathcal{M}_1(q_1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}) &\simeq \operatorname{Hom}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(\pi^*\mathcal{M}_1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(-q_1)) \\ &\simeq \operatorname{Hom}_Y(\mathcal{M}_1, \mathrm{S}^{-q_1} \mathcal{E}) \end{aligned}$$

Con un piccolo abuso di notazione scriveremo una risoluzione di Gorenstein su Y come $(\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha}, \pi, \mathcal{I}, i, X, \rho, \mathcal{N}_*, \gamma)$ per indicare la risoluzione di Gorenstein $(\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha})$ ed i corrispondenti oggetti associati. Per semplificare la notazione ometteremo alcuni degli oggetti della n-upla quando non sarà necessario riferirsi ad essi.

Notazione. Riprendiamo la notazione introdotta nella proposizione 4.22. Dato un isomorfismo $\sigma : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ fra due fasci localmente liberi indichiamo con $\mathbb{P}(\sigma) : \mathbb{P}(\mathcal{E}') \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ l'isomorfismo associato.

Definizione 6.15. *Sia $d \geqslant 3$ un intero ed Y uno schema noetheriano e consideriamo due risoluzioni di Gorenstein $\chi = (\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha})$, $\chi' = (\mathcal{E}', \underline{\mathcal{M}'}, \underline{\alpha'})$ su Y. Un morfismo fra di esse è una coppia $(\sigma, \underline{\tau})$, dove $\sigma : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$ è un isomorfismo, mentre $\underline{\tau} = (\tau_{d-2}, \dots, \tau_1)$ sono isomorfismi $\tau_i : \mathcal{M}'_i \longrightarrow \mathcal{M}_i$ tali che, posto $\lambda = \mathbb{P}(\sigma)$, il seguente diagramma, per $k \geqslant 1$, sia commutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\pi'^*\mathcal{M}'_k(q_k) \arrow[r, "\alpha'_k"] \arrow[d, "\pi'^*\tau_k \otimes 1"'] & \pi'^*\mathcal{M}'_{k-1}(q_{k-1}) \arrow[d, "\pi'^*\tau_{k-1} \otimes 1"] \\
\pi'^*\mathcal{M}_k(q_k) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & \pi'^*\mathcal{M}_{k-1}(q_{k-1}) \arrow[d, phantom, "\wr\|"] \\
\lambda_*\pi^*\mathcal{M}_k(q_k) \arrow[r, "\lambda_*\alpha_k"'] & \lambda_*\pi^*\mathcal{M}_{k-1}(q_{k-1})
\end{tikzcd}$$

dove per convenzione $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}'_0 = \mathcal{O}_Y$, $\tau_0 = \mathrm{id}$ *in modo tale che il morfismo verticale a destra, nel caso* $k = 1$, *non è altro che l'isomorfismo* $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}')} \xrightarrow{\lambda^{\#}} \lambda_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$.

Osservazione 6.16. Se guardiamo il precedente diagramma nel caso $k = 1$, abbiamo che un isomorfismo $\tau_1 : \mathcal{M}'_1 \longrightarrow \mathcal{M}_1$ lo soddisfa se e solo se rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}'_1 \arrow[r, "\gamma'"] \arrow[d, "\tau_1"'] & \mathrm{S}^{-q_1}\,\mathcal{E}' \arrow[d, "\mathrm{S}^{-q_1}\,\sigma"] \\ \mathcal{M}_1 \arrow[r, "\gamma"'] & \mathrm{S}^{-q_1}\,\mathcal{E} \end{tikzcd}$$

dove γ, γ' sono rispettavimente associate a χ, χ' come nell'osservazione 6.14. Come vedremo nella prossima sezione, dato un τ_1 che soddisfi tale condizione, esiste un'unico modo di 'completarlo' ad un morfismo di risoluzioni di Gorenstein.

Definizione 6.17 ($\mathrm{PGor}_d(Y)$)**.** *Sia* Y *uno schema noetheriano e* $d \in \mathbb{N}$, $d \geqslant 3$. *Definiamo la categoria* $\mathrm{PGor}_d(Y)$ *nel modo seguente: gli oggetti di* $\mathrm{PGor}_d(Y)$ *sono coppie* (χ, ζ) *dove* $\chi = (\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha}, \mathcal{N}_*)$ *è una risoluzione di Gorenstein su* Y *tale che la risoluzione* $\mathcal{N}_*$, *ristretta ad ogni fibra su* y, *rimanga esatta, mentre* ζ *è un isomorfismo*

$$\mathcal{M}_{d-2} \xrightarrow{\zeta} \det \mathcal{E}$$

Una freccia fra (χ, ζ) *e* (χ', ζ') *è un morfismo* $(\sigma, \underline{\tau}) : \chi \longrightarrow \chi'$ *tale che il seguente diagramma sia commutativo*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}'_{d-2} \arrow[r, "\zeta'"] \arrow[d, "\tau_{d-2}"'] & \det \mathcal{E}' \arrow[d, "\det \sigma"] \\ \mathcal{M}_{d-2} \arrow[r, "\zeta"'] & \det \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

A questo punto abbiamo introdotto tutti gli elementi necessari per enunciare il teorema che classifica i rivestimenti di Gorenstein di grado d:

Teorema 6.18. *Sia* Y *uno schema noetheriano e* $d \in \mathbb{N}$, $d \geqslant 3$. *Allora l'associazione*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{PGor}_d(Y) & \xrightarrow{\quad\Phi\quad} & \mathrm{GRiv}_d(Y) \\ ((\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha}, \rho), \zeta) & \longrightarrow & \rho \\ ((\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha}, X), \zeta) & & \\ \big\downarrow (\sigma, \underline{\tau}) & \longrightarrow & \lambda_{|X} : X \longrightarrow X' \\ ((\mathcal{E}', \underline{\mathcal{M}'}, \underline{\alpha'}, X'), \zeta') & & \end{array}$$

dove $\lambda = \mathbb{P}(\sigma)$, *è una equivalenza di categorie.*

La dimostrazione di questo teorema richiede alcuni risultati preliminari, che, fra le altre cose, chiariscono meglio le motivazioni che hanno portato alla definizione della categoria $\mathrm{PGor}_d(Y)$. Nella prossima sezione dimostreremo che il funtore definito sopra è ben posto ed in quella successiva cotruiremo esplicitamente un suo inverso.

6.3 Dalle risoluzioni ai rivestimenti

In questa sezione mostreremo alcune delle principali proprietà delle risoluzioni di Gorenstein, concludendo con la dimostrazione che il funtore Φ definito in 6.18 è ben posto.

Proposizione 6.19. *Sia $d \geqslant 3$ un intero ed Y uno schema noetheriano e supponiamo di avere una risoluzione di Gorenstein $(\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha}, \mathcal{N}_*)$. Allora valgono le seguenti proprietà:*

1. $\pi_* \mathcal{N}_k \simeq \mathcal{M}_k$
2. *per ogni $y \in Y$ esiste un aperto affine U di Y contenente y tale che, per ogni k, $(\mathcal{N}_k)_{|\pi^{-1}(U)}$ è libero di rango β_k. In particolare ogni $\mathcal{N}_k$ è libero sulle fibre di Y*
3. *per ogni k esistono isomorfismi naturali $\pi_*(\mathcal{N}_k{}^\vee) \simeq (\pi_* \mathcal{N}_k)^\vee$ e $\mathcal{N}_k{}^\vee \simeq \pi^*(\pi_* \mathcal{N}_k{}^\vee)$, dove con $-^\vee$ indichiamo il duale.*
4. *per $i \neq 0, d-2$ o $i = 0$ e $q < 0$ o $i = d-2$ e $q > -d+1$ vale che*
$$\mathrm{R}^i\,\pi_* \mathcal{N}_k(q) = 0$$

Dimostrazione. 1) Segue dalla formula di proiezione

2) Basta scegliere un aperto affine di Y che contenga y tale che, per ogni k, $\mathcal{M}_k$ sia libero.

3) Essendo ogni fascio considerato localmente libero abbiamo un isomorfismo naturale
$$\pi^* \underline{\mathrm{Hom}}_Y(\pi_* \mathcal{N}_k, \mathcal{O}_Y) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_X(\pi^* \pi_* \mathcal{N}_k, \mathcal{O}_X)$$
ossia $\mathcal{N}_k{}^\vee \simeq \pi^*((\pi_* \mathcal{N}_k)^\vee)$.Ricordando che $\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} \simeq \mathcal{O}_Y$, per la formula di proiezione avremo che
$$\pi_*(\mathcal{N}_k{}^\vee) \simeq \pi_* \pi^*((\pi_* \mathcal{N}_k)^\vee) \simeq (\pi_* \mathcal{N}_k)^\vee$$

4) Per il punto 2) possiamo supporre $Y \simeq \operatorname{Spec} B$, con B anello noetheriano, $\mathcal{E}$ libero, ossia $\mathbb{P}(\mathcal{E}) = \mathbb{P}^{d-2}_B$ e che ogni $\mathcal{N}_k$ sia libero. Dopo tale riduzione $\mathrm{R}^i\,\pi_*$ è isomorfo alla fascificazione di $\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^{d-2}_B, -)$ e quindi la tesi segue dall'annullarsi per gli stessi indici della coomologia di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{d-2}_B}$ (5.19). □

Lemma 6.20. *Sia $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo di schemi ed $\mathcal{H} \in \mathrm{QCoh}(X)$ piatto su Y. Se*
$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$
è una successione esatta di $\mathcal{O}_X$-moduli allora
$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_y \longrightarrow \mathcal{G}_y \longrightarrow \mathcal{H}_y \longrightarrow 0$$

è una successione esatta di $\mathcal{O}_{X_y}$-moduli. In particolare se $\mathcal{N}_*$ è una risoluzione localmente libera di $\mathcal{H}$ e f è piatto su Y, allora $\mathcal{N}_{*,y}$ è una risoluzione localmente libera di $\mathcal{H}_y$.

Dimostrazione. In generale dato un $\mathcal{O}_X$ modulo $\mathcal{T}$ e $p \in X_y \subseteq X$ abbiamo che $\mathcal{T}_{y,p} \simeq \mathcal{T}_p \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y)$. In particolare otteniamo

$$\longrightarrow Tor^1_{\mathcal{O}_{Y,y}}(\mathcal{H}_p, k(y)) \longrightarrow \mathcal{F}_p \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y) \longrightarrow \mathcal{G}_p \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y) \longrightarrow \mathcal{H}_p \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y) \longrightarrow 0$$

D'altra parte per ipotesi $\mathcal{H}_p$ è piatto su $\mathcal{O}_{Y,y}$ e quindi $Tor^1_{\mathcal{O}_{Y,y}}(\mathcal{H}_p, k(y)) = 0$.

Consideriamo adesso una risoluzione localmente libera $\mathcal{N}_*$. Essendo $\mathcal{O}_X$ piatto su Y, avremo che ogni $\mathcal{N}_k$ è piatto, essendo localmente libero. Spezziamo la risoluzione in successioni corte $0 \longrightarrow \mathcal{I}_{k+1} \longrightarrow \mathcal{N}_k \longrightarrow \mathcal{I}_k \longrightarrow 0$, con $\mathcal{I}_0 = \mathcal{H}$. Per quanto visto sopra è sufficiente mostrare che $\forall k$, $\mathcal{I}_k$ è piatto su Y. Ma questo è vero, perchè se in una successione esatta il termine medio e l'ultimo sono piatti tale sarà anche il primo. $\square$

Corollario 6.21. *Sia $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo di schemi e $Z \xrightarrow{i} X$ un sottoschema chiuso associato al fascio di ideali $\mathcal{I}$. Se $i_*\mathcal{O}_Z$ è piatto su Y, allora $\forall y \in Y$, $\mathcal{I}_y$ definisce il sotteschema chiuso $Z_y \xrightarrow{i_y} X_y$.*

Dimostrazione. Poichè i è una immersione chiusa e quindi affine, otteniamo che $(i_*\mathcal{O}_Z)_y \simeq i_{y*}\mathcal{O}_{Z,y}$. Grazie al lemma 6.20 abbiamo infine l'esattezza della successione

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_y \longrightarrow \mathcal{O}_{X_y} \longrightarrow i_{y*}\mathcal{O}_{Z,y} \longrightarrow 0$$

$\square$

Proposizione 6.22. *Sia Y uno schema noetheriano, $d \geqslant 3$. Consideriamo inoltre una risoluzione di Gorenstein $(\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha}, \pi, i, X, \rho, \mathcal{N}_*)$ su Y. Allora*

1. *esiste una successione esatta*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y \xrightarrow{\rho^\#} \rho_*\mathcal{O}_X \longrightarrow R^{d-2}\pi_*\mathcal{N}_{d-2}(-d) \longrightarrow 0$$

2. *$R^{d-2}\pi_*\mathcal{N}_{d-2}(-d)$ è localmente libero di rango $d-1$. In particolare $\rho_*\mathcal{O}_X$ è localmente libero di rango d*

3. *sono equivalenti*

   (a) La successione $\mathcal{N}_*$ ristretta ad ogni fibra su Y rimane esatta.

   (b) $\dim X_y = 0$ per ogni $y \in Y$

   (c) ρ è un rivestimento

   (d) X è piatto su Y

   In tal caso i è su ogni fibra non degenere ed aritmenticamente di Gorenstein e ρ è un rivestimento di Gorenstein di grado d.

Dimostrazione. 1) Posto $\mathcal{N}_0 = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$ e $\mathcal{I}_{k+1} = \ker(\mathcal{N}_k(q_k) \longrightarrow \mathcal{N}_{k-1}(q_{k-1}))$, possiamo spezzare la succesione esatta $\mathcal{N}_* \longrightarrow i_*\mathcal{O}_X \longrightarrow 0$ in

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_{k+1} \longrightarrow \mathcal{N}_k(q_k) \longrightarrow \mathcal{I}_k \longrightarrow 0$$

per $0 \leqslant k < d-2$. Osserviamo che i q_k sono tutti negativi tranne che per $k = 0$ e sono tutti maggiori di $-d+1$ tranne che per $k = d-2$. Adesso, applicando il funtore π_* a queste successioni corte, otteniamo

$$R^j \pi_* \mathcal{N}_k(q_k) \longrightarrow \mathrm{R}^j\, \pi_* \mathcal{I}_k \longrightarrow \mathrm{R}^{j+1}\, \pi_* \mathcal{I}_{k+1} \longrightarrow \mathrm{R}^{j+1}\, \pi_* \mathcal{N}_k(q_k)$$

$$0 \longrightarrow \pi_* \mathcal{I}_1 \longrightarrow \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \longrightarrow \rho_* \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathrm{R}^1\, \pi_* \mathcal{I}_1 \longrightarrow \mathrm{R}^1\, \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}}$$

Osserviamo innanzitutto che $\mathcal{N}_{d-2}(q_{d-2}) \simeq \mathcal{I}_{d-2}$ e che $\mathcal{O}_Y \simeq \pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \longrightarrow \pi_*(i_* \mathcal{O}_X) = \rho_* \mathcal{O}_X$ coincide con $\rho^{\#}$. Se $d = 3$, gli estremi dell'ultima successione sono nulli ed abbiamo la successione cercata. Invece, se $d > 3$, dalla prima successione, tenendo conto che gli estremi sono sempre nulli per $0 < k < d-2$, otteniamo successioni

$$0 \longrightarrow \mathrm{R}^j\, \pi_* \mathcal{I}_1 \longrightarrow \mathrm{R}^{j+d-3}\, \pi_* \mathcal{I}_{d-2} \longrightarrow \mathrm{R}^{j+d-3}\, \pi_* \mathcal{N}_{d-3}(q_{d-3}) = 0$$

da cui $\pi_* \mathcal{I}_1 = 0$ e $\mathrm{R}^1\, \pi_* \mathcal{I}_1 \simeq \mathrm{R}^{d-2}\, \pi_* \mathcal{N}_{d-2}(q_{d-2})$.

2) Poichè $\mathcal{N}_{d-2,y}(q_{d-2}) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_y}(-(d-2)-2)$ avremo che

$$\forall y \in Y \;\; \dim_{k(y)} \mathrm{H}^{d-2}(\mathbb{P}_y, \mathcal{N}_{d-2,y}(q_{d-2})) = d-1$$

Vogliamo applicare il cambiamento di base per la coomologia. Abbiamo visto che $\mathrm{R}^{d-1}\, \pi_* \mathcal{N}_{d-2}(q_{d-2}) = 0$ e da questo possiamo dedurre che esistono suriezioni (e quindi isomorfismi)

$$\mathrm{R}^{d-2}\, \pi_* \mathcal{N}_{d-2}(q_{d-2}) \otimes k(y) \longrightarrow \mathrm{H}^{d-2}(\mathbb{P}_y, \mathcal{N}_{d-2,y}(q_{d-2}))$$

Sempre per il cambiamento di base, dal fatto che $\mathrm{R}^{d-3}\, \pi_* \mathcal{N}_{d-2}(q_{d-2}) = 0$ otteniamo che $\mathrm{R}^{d-2}\, \pi_* \mathcal{N}_{d-2}(q_{d-2})$ è localmente libero e quindi abbiamo finito.

3) $(a) \Rightarrow (b)$ Su ogni fibra otteniamo una risoluzione di X_y della forma 6.5 e, quindi, applicando il lemma 6.11 otteniamo che $\dim X_y = 0$

$(b) \Rightarrow (c)$ Da X_y noetheriano otteniamo che $|X_y| < \infty$. D'altra parte ρ è composizione di morfismi propri e quindi sarà proprio. Per il teorema di Chevalley ρ è un morfismo finito e per 2) un rivestimento

$(c) \Rightarrow (d)$ Per 1.3.

$(d) \Rightarrow (a)$ Per 6.20

Se siamo nel caso delle precedenti condizioni equivalenti allora la risoluzione $\mathcal{N}_*$ ristretta alla fibra è una risoluzione di i_y ed in particolare applicando, come fatto sopra, il lemma 6.11, otteniamo che i_y è un'immersione non degenere ed aritmeticamente di Gorenstein e che X_y è uno schema di Gorenstein. □

Abbiamo quindi che

Proposizione 6.23. *Il funtore Φ del teorema 6.18 è ben posto.*

Osservazione 6.24. Le condizioni equivalenti date in 6.22 possono non essere soddisfatte da una generica risoluzione di Gorenstein. Consideriamo uno schema noetheriano affine $Y = \operatorname{Spec} B$ e supponiamo di avere una risoluzione di Gorenstein $\chi = (\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha}, \pi, \mathcal{I}, \mathcal{N}_*)$ ed f un non divisore dello zero di B. La moltiplicazione per f su $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ è iniettiva e possiamo definire una nuova risoluzione di Gorenstein $\chi' = (\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha'}, \pi, \mathcal{I}', i', X', \rho', \mathcal{N}'_*)$, ponendo $\alpha'_1 = f\alpha_1$ e $\alpha'_k = \alpha_k$ per $k > 1$. Mostriamo che in tal caso viene meno la condizione $\dim X_y = 0$. Le nostre ipotesi su f ci permettono di trovare un $y \in Y$ tale che $f = 0$ in $k(y)$.

Dato che, per costruzione, $\mathcal{I}' = f\mathcal{I}$, se per assurdo avessimo che χ' soddisfa una delle condizioni equivalenti di 6.22, avremmo che $\mathcal{I}'_y = (f\mathcal{I})_y = 0$ e quindi $X'_y = \mathbb{P}_y \simeq \mathbb{P}^{d-2}_{k(y)}$ che ha dimensione $d-2>0$.

Dato un anello B ed un elemento f come sopra, per trovare un esempio esplicito si può far uso dell'equivalenza che mostreremo nella prossima sezione, che ci dice che ogni rivestimento di Gorenstein è indotto da una risoluzione di Gorenstein secondo l'associazione data in 6.18. A questo punto possiamo ad esempio considerare il rivestimento indotto da $B \longrightarrow B[X]/(X^d)$, che ha fibra di Gorenstein isomorfa a $\operatorname{Spec} k(y)[X]/(X^d)$, per $y \in Y$.

Nella parte finale di questa sezione vogliamo studiare le proprietà dei morfismi fra risoluzione di Gorenstein. La seguente proposizione mostra che esiste un modo canonico per costruire una risoluzione di Gorenstein a partire da un fascio di ideali.

Proposizione 6.25. *Siano Y uno schema noetheriano, $d \geqslant 3$, $\mathcal{E}$ un fascio localmente libero di rango $d-1$ con fibrato proiettivo associato $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow Y$ ed $\mathcal{I}$ un fascio di ideali di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$. Definiamo per ricorrenza i seguenti oggetti. Poniamo $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}$, $\mathcal{M}_0 = \mathcal{O}_Y$, $\mathcal{M}_k = \pi_*\mathcal{I}_k(-q_k)$, $\alpha_k : \pi^*\mathcal{M}_k(q_k) \longrightarrow \pi^*\mathcal{M}_{k-1}(q_{k-1})$ il morfismo indotto da*

$$(\pi^*\pi_*\mathcal{I}_k(-q_k))(q_k) \longrightarrow (\mathcal{I}_k(-q_k))(q_k) \simeq \mathcal{I}_k$$

e $\mathcal{I}_{k+1} = \ker \alpha_k$. Sia infine $\mathrm{R}_{\mathcal{I}} = (\mathcal{E}, (\mathcal{M}_{d-2}, \dots, \mathcal{M}_1), (\alpha_{d-2}, \dots, \alpha_1))$.

Se esiste una risoluzione di Gorenstein $\chi' = (\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}'}, \underline{\alpha'})$ il cui ideale associato è $\mathcal{I}$, allora $\mathrm{R}_{\mathcal{I}}$ è una risoluzione di Gorenstein ed esiste un isomorfismo

$$(\mathrm{id}, \underline{\tau}) : \mathrm{R}_{\mathcal{I}} \longrightarrow \chi'$$

In particolare due risoluzioni di Gorenstein su $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ con lo stesso ideale associato sono isomorfe.

Dimostrazione. Data una risoluzione di Gorenstein χ' come da enunciato, poniamo $\mathcal{M}'_k, \alpha'_k = 0$ per $k > d-2$. Poniamo inoltre $\mathcal{N}_k = \pi^*\mathcal{M}_k$, $\mathcal{N}'_k = \pi^*\mathcal{M}'_k$. In particolare $\mathcal{N}_*$ è un complesso. Vogliamo costruire isomorfismi $\tau_k : \mathcal{M}'_k \longrightarrow \mathcal{M}_k$ che inducano un isomorfismo di complessi $\mathcal{N}'_* \longrightarrow \mathcal{N}_*$ procedendo per induzione su k. Chiaramente questo è sufficiente per dimostrare l'enunciato.

Il passo base è $k = 0$ e poniamo $\tau_0 = \mathrm{id}$. Supponiamo quindi che la tesi sia vera per valori minori di k e che $k > 0$. Possiamo in particolare supporre che, per $t < k$, $\mathcal{M}_t = \mathcal{M}'_t$ e $\alpha'_t = \alpha_t$. Dopo questa riduzione abbiamo che $\mathcal{I}_k = \operatorname{Im} \alpha'_k$. Mostriamo che se applicchiamo π_* al morfismo $\mathcal{N}'_k \longrightarrow \mathcal{I}_k(-q_k)$ otteniamo un isomorfismo. Se $k \geqslant d-2$ è ovvio quindi supponiamo di essere nel caso $k < d-2$ (in particolare $d > 3$). Per $t \geqslant k$ poniamo $m_t = q_t - q_k$, $\mathcal{I}'_t = \operatorname{Im} \alpha'_t$ e $\mathcal{J}_t = \mathcal{I}'_t(-q_k)$. Abbiamo delle succesioni esatte

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_{t+1} \longrightarrow \mathcal{N}'_t(m_t) \longrightarrow \mathcal{J}_t \longrightarrow 0$$

Osserviamo che, per $t > k$, abbiamo $-d+2 \leqslant m_t < 0$ e quindi in particolare che, per ogni i, $\mathrm{R}^i\, \pi_*\mathcal{N}'_t(m_t) = 0$. Passando alla successione in coomologia otteniamo

$$0 \longrightarrow \pi_*\mathcal{J}_{k+1} \longrightarrow \pi_*\mathcal{N}'_k \longrightarrow \pi_*\mathcal{J}_k \longrightarrow \mathrm{R}^1\, \pi_*\mathcal{J}_{k+1}$$

e, per $t > k$,

$$0 = R^j\pi_*\mathcal{N}'_t(m_t) \longrightarrow \mathrm{R}^j\, \pi_*\mathcal{J}_t \longrightarrow \mathrm{R}^{j+1}\, \pi_*\mathcal{J}_{t+1} \longrightarrow \mathrm{R}^{j+1}\, \pi_*\mathcal{N}'_t(m_t) = 0$$

Dall'ultima successione otteniamo $\mathrm{R}^j\,\pi_*\mathcal{J}_{k+1} \simeq \mathrm{R}^{d-2+(j-k-1)}\,\pi_*\mathcal{J}_{d-2} = 0$, poichè $\mathcal{J}_{d-2} = \mathcal{I}'_{d-2}(-q_k) = \mathcal{N}'_{d-2}(m_{d-2})$. Dato che $\mathcal{J}_k = \mathcal{I}_k(-q_k)$, dalla prima successione otteniamo un isomorfismo $\pi_*\mathcal{N}'_k \simeq \pi_*\mathcal{I}(-q_k)$.

A questo punto, applicando il funtore $\pi^*\pi_*$ al morfismo $\mathcal{N}'_k \longrightarrow \mathcal{I}_k(-q_k)$ e tendorizzando per $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(q_k)$ otteniamo un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
\pi^*\mathcal{M}'_k(q_k) \arrow[dd, "\wr"'] \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "\alpha'_k"] & & & & \\
 & \mathcal{I}_k \subseteq & \pi^*\mathcal{M}'_{k-1}(q_{k-1}) \arrow[r, phantom, "="] & \pi^*\mathcal{M}_{k-1}(q_{k-1}) \\
\pi^*\mathcal{M}_k(q_k) \arrow[ur] \arrow[urrr, bend right, "\alpha_k"'] & & &
\end{tikzcd}$$

dove l'isomorfismo verticale è indotto da un isomorfismo $\tau_k : \mathcal{M}'_k \simeq \mathcal{M}_k$. $\square$

Osservazione 6.26. Sia $\chi = (\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha}, \pi, \mathcal{I}, i, X, \rho, \mathcal{N}_*, \gamma)$ una risoluzione di Gorenstein e $\sigma : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$ un isomorfismo. Posto $\lambda = \mathbb{P}(\sigma)$, allora $\lambda_*\mathcal{N}$, essendo della forma 6.13, induce una risoluzione di Gorenstein

$$\chi' = (\mathcal{E}', \underline{\mathcal{M}}, \alpha', \pi', \mathcal{I}', i', X', \rho', \mathcal{N}'_*, \gamma')$$

insieme ad un isomorfismo $(\sigma, \mathrm{id}) : \chi \longrightarrow \chi'$. Inoltre abbiamo che $\pi = \pi' \circ \lambda$, $\lambda_*\mathcal{I} = \mathcal{I}'$, $i' = \lambda \circ i$, $\lambda(X) = X'$, $\rho' = \rho$, $\lambda_*\mathcal{N}_* \simeq \mathcal{N}'_*$ e $\gamma = \gamma' \circ \mathrm{S}^{-q_1}\,\sigma$.

Proposizione 6.27. *Sia Y uno schema noetheriano e $d \geqslant 3$. Siano inoltre $\chi = (\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha}, \pi, \mathcal{I}, X, \gamma)$, $\chi' = (\mathcal{E}', \underline{\mathcal{M}'}, \underline{\alpha'}, \pi', \mathcal{I}', X', \gamma')$ due risoluzioni di Gorenstein su Y. Supponiamo di avere un isomorfismo $\sigma : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$ ed indichiamo con $\lambda = \mathbb{P}(\sigma) : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}')$ l'isomorfismo indotto da σ sui fibrati. Allora sono equivalenti*

1. $\lambda_*\mathcal{I} = \mathcal{I}'$
2. $\lambda(X) = X'$
3. *esiste un isomorfismo $\tau_1 : \mathcal{M}'_1 \longrightarrow \mathcal{M}_1$ che renda commutativo il diagramma*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}'_1 \arrow[r, "\gamma'"] \arrow[d, "\tau_1"'] & \mathrm{S}^{-q_1}\,\mathcal{E}' \arrow[d, "\mathrm{S}^{-q_1}\,\sigma"] \\
\mathcal{M}_1 \arrow[r, "\gamma"'] & \mathrm{S}^{-q_1}\,\mathcal{E}
\end{tikzcd}$$

In tale situazione τ_1 è unico ed esiste ed è unico un completamento $\underline{\tau} = (\tau_{d-2}, \ldots, \tau_1)$ tale che $(\sigma, \underline{\tau})$ sia un morfismo da χ a χ'. Inoltre, se $\mu \in \mathcal{O}_Y^*$ e $\hat{\sigma} = \mu\sigma$ allora $(\hat{\sigma}, \hat{\underline{\tau}})$, dove $\hat{\tau_k} = \mu^{-q_k}\tau_k$, è ancora un morfismo fra χ e χ'.

Dimostrazione. Indichiamo con $\mathcal{N}_*$, $\mathcal{N}'_*$ le risoluzioni rispettivamente associate a χ, χ'. Iniziamo con le equivalenze. Che 1) $\Leftrightarrow$ 2) è un fatto noto e vero in generale.

Per l'osservazione 6.16 l'esistenza di τ_1 nel punto 3 è equivalente all'esistenza di un isomorfismo τ_1 per cui il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\pi'^*\mathcal{M}'_1(q_1) \arrow[r, "\alpha'_1"] \arrow[d, "\pi'^*\tau_1\otimes 1"'] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}')} \arrow[d, "\lambda^\#"] \\
\pi'^*\mathcal{M}_1(q_1) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & \lambda_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} \\
\lambda_*(\pi^*\mathcal{M}_1(q_1)) \arrow[ur, "\lambda_*\alpha_1"'] &
\end{tikzcd} \tag{6.7}$$

sia commutativo. Questo mostra l'implicazione 3) $\Rightarrow$ 1). Per 1) $\Rightarrow$ 3), dall'osservazione 6.26 otteniamo una risoluzione di Gorenstein $\hat{\chi}$ isomorfa a χ e con fascio di ideali associato $\lambda_*\mathcal{I} = \mathcal{I}'$, mentre per 6.25 otteniamo anche un isomorfismo $\hat{\chi} \simeq \chi'$, componendo otteniamo l'isomorfismo τ_1 cercato.

Passiamo adesso alle frecce. Iniziamo col far vedere l'ultimo fatto, ossia preso $\mu \in \mathcal{O}_Y^*$, consideriamo $\hat{\sigma} = \mu\sigma$, supponiamo che $\underline{\tau}$ siano dati e poniamo $\hat{\tau_k} = \mu^{-q_k}\tau_k$. σ induce un isomorfismo $\eta : \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}')}(1) \longrightarrow \lambda_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$ e quindi $\mu\eta$ sarà l'isomorfismo sui fasci invertibili indotto da $\hat{\sigma}$. Se r_k, $\hat{r_k}$ sono gli isomorfismi $(\pi'^*\mathcal{M}_k)(q_k) \simeq \lambda_*(\pi^*\mathcal{M}_k(q_k))$ rispettivamente indotti da σ, $\hat{\sigma}'$, avremo quindi che $\hat{r_k} = \mu^{q_k} r_k$ e per costruzione $r_k \circ \pi'^*\tau_k \otimes 1 = \hat{r_k} \circ \pi'^*\hat{\tau_k} \otimes 1$, come voluto.

Nell'implicazione 1) $\Rightarrow$ 3) abbiamo mostrato l'esistenza degli isomorfismi τ_i, quindi rimane solo da verificarne l'unicità. Grazie al fatto che tali isomorfismi esistono possiamo supporre che $\chi = (\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \alpha) = (\mathcal{E}', \underline{\mathcal{M}'}, \alpha')$, $\mathcal{N}_* = \mathcal{N}'_*$ e $\sigma = \mathrm{id}$. Inoltre, dato che

$$\mathrm{Aut}_X(\pi^*\mathcal{M}_k, \pi^*\mathcal{M}_k) \simeq \mathrm{Aut}_Y(\mathcal{M}_k, \mathcal{M}_k)$$

è sufficiente mostrare che l'identità di $\mathcal{N}_*$ è l'unico sollevamento dell'identità di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$, o detto altrimenti, che se $(\mathrm{id}, \underline{\tau})$ è un automorfismo di χ allora $\tau_k = \mathrm{id}$.

Osserviamo innanzitutto che il problema è locale in Y. Quindi possiamo suppore che Y sia affine ed in particolare lo spettro di un anello noetheriano B, che $\mathcal{E}$ sia libero, ossia $\mathbb{P}(\mathcal{E}) = \mathbb{P}_B^{d-2}$, e che ogni $\mathcal{N}_k$ sia libero. Possiamo quindi applicare il corollario 3.76 alla successione esatta $\mathcal{N}_*$. Questo ci assicura che $\hat{\mathcal{H}} = \Gamma_*(\mathcal{N}_*)$ è una successione esatta della forma

$$\hat{\mathcal{H}} : 0 \longrightarrow R(q_{d-2})^{\beta_{d-2}} \longrightarrow \ldots \longrightarrow R(q_1)^{\beta_1} \longrightarrow R \tag{6.8}$$

dove $R = B[X_0, \ldots, X_{d-2}]$. Poniamo $M = \Gamma_*(\mathcal{I})$ e $\mathcal{H}$ la successione esatta ottenuta da $\hat{\mathcal{H}}$ eliminando l'ultima freccia. In particolare $\mathcal{H}$ è una risoluzione graduata libera di M. Se mostriamo che esiste un'unico sollevamento graduato di $\mathrm{id} : M \longrightarrow M$ ad $\mathcal{H}$ abbiamo finito. Infatti, dato che $\widetilde{-} \circ \Gamma_* \simeq \mathrm{id}$, i sollevamenti graduati dell'identità di M a $\mathcal{H}$ corrispondono biunivocamente tramite Γ_* e $\widetilde{-}$ ai sollevamenti dell'identità di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_B^{d-2}}$ ad $\mathcal{N}_*$. Possiamo quindi passare dai fasci ai moduli graduati.

Osserviamo che in tale situazione ogni endomorfismo graduato di M ha sempre un sollevamento graduato a $\mathcal{H}$. Vogliamo mostrare che tale sollevamento è unico e chiaramente è sufficiente mostrare che l'unico sollevamento del morfismo nullo è il morfismo nullo. Iniziamo col supporre che B sia locale, con campo quoziente k, e quindi che R sia un anello graduato locale. In tal caso ha senso parlare di risoluzioni minime. Indichiamo con m il massimale omogeneo di R. La risoluzione $\mathcal{H}$ è minima, dato che $\mathcal{H} \otimes_R R/m$ è un complesso di k-moduli graduati concentrati in gradi diversi. Ragionando per induzione e tensorizzando per $R(q)$, per un opportuno q, ci possiamo ricondurre a dimostrare che se $R^\beta \xrightarrow{\alpha} T$ è un morfismo surgettivo di moduli graduati, tale da mappare la base di R^β in un sistema minimale di generatori di T, e $g : R^\beta \longrightarrow R^\beta$ è un morfismo graduato tale che $\alpha \circ g = 0$, allora $g = 0$. In tale situazione avremo che $\ker \alpha \subseteq mS^\beta$ e quindi che $g((R^\beta)_0) \subseteq (mS^\beta)_0 = 0$. Dato che R^β è generato come R-modulo in grado 0 e che g è un morfismo di R-moduli, otteniamo che $g = 0$. Torniamo adesso al caso generale e sia $g : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un sollevamento dello $0 \in \mathrm{End}_R(M)$. Per ogni primo q di B, $R_q = B_q[X_1, \dots, X_{d-2}]$, $\mathcal{H}_q$ è ancora una risoluzione della forma 6.8 e quindi g_q è un sollevamento di $0 \in \mathrm{End}_{R_q}(M_q)$, da cui $g_q = 0$. In particolare per ogni primo p di R avremo che $g_p = 0$, o, detto altrimenti, $(\mathrm{Im}\, g)_p = 0$, da cui segue che $g = 0$. □

Corollario 6.28. *Due risoluzioni di Gorenstein χ, χ' su $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ con lo stesso ideale associato ammettono un unico isomorfismo della forma*

$$(\mathrm{id}, \underline{\tau}) : \chi \longrightarrow \chi'$$

Dimostrazione. Un tale isomorfismo esiste per 6.25 ed è unico per la proposizione appena dimostrata. □

Osservazione 6.29. Date due risoluzioni di Gorenstein $\chi = (\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha}, X)$ e $\chi' = (\mathcal{E}', \underline{\mathcal{M}'}, \underline{\alpha'}, X')$ definiamo l'insieme $\mathrm{Hom}(\chi, \chi')$ come

$$\{(\lambda, \eta) \mid \lambda \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}(\mathcal{E}), \mathbb{P}(\mathcal{E}')),\ \eta \in \mathrm{Aut}(\lambda^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}')}(1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)) \text{ e } \lambda(X) = X'\}$$

e l'insieme $\mathrm{Hom}_G(\chi, \chi')$ dei morfismi fra χ e χ'. Tenendo presente l'isomorfismo stabilito in 4.22 e le condizioni equivalenti date in 6.27 otteniamo un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_G(\chi, \chi') \longrightarrow \mathrm{Hom}(\chi, \chi')$$

compatibili con le composizioni..

6.4 Dai rivestimenti alle risoluzioni

Ora che abbiamo dimostrato che il funtore Φ in 6.18 è ben posto, affrontiamo il problema della costruzione del suo inverso.

Lemma 6.30. *Sia k un campo, $X = \mathbb{P}^n_k$ ed $\mathcal{F} \in \mathrm{QCoh}(X)$ per cui esista una risoluzione della forma*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X^{\alpha_{m+1}}(-t-m-2) \longrightarrow \mathcal{O}_X^{\alpha_m}(-t-m) \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{O}_X^{\alpha_0}(-t) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

Allora $\mathcal{F}$ è $t+1$-regolare.

Dimostrazione. Possiamo supporre $t = 0$. Ragioniamo per induzione su m.

$m = 0$. La successione diventa

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X^{\alpha_1}(-2) \longrightarrow \mathcal{O}_X^{\alpha_0} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

Poichè il primo termine è 2-regolare, mentre quello centrale è 1-regolare, possiamo concludere che $\mathcal{F}$ è 1-regolare.

passo induttivo. Pongo $T = \ker(\mathcal{O}_X^{\alpha_0} \longrightarrow F)$. Per ipotesi induttiva T è 2-regolare e dalla successione esatta

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow \mathcal{O}_X^{\alpha_0} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

come prima ottengo che $\mathcal{F}$ è 1-regolare. □

Proposizione 6.31. *Sia Y uno schema noetheriano e $d \geqslant 3$. Sia $\rho : X \longrightarrow Y$ un rivestimento di grado d ed $\mathcal{E}$ un fascio su Y localmente libero di rango $d-1$ con fibrato proiettivo associato $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\pi} Y$. Supponiamo esista un'immersione chiusa $i : X \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ tale che $\rho = \pi \circ i$ e che su ogni fibra sia non degenere ed aritmeticamente di Gorenstein. Se $\mathcal{I}$ è il fascio di ideali associato ad X allora l'oggetto $\mathrm{R}_{\mathcal{I}}$ definito in 6.25 è una risoluzione di Gorenstein.*

Dimostrazione. Poniamo $\mathcal{I}_0 = \mathcal{N}_{-1} = i_*\mathcal{O}_X$, $\mathcal{N}_0 = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$ e $\alpha_0 : \mathcal{N}_0 \longrightarrow \mathcal{N}_{-1}$ il morfismo indotto da i e dimostriamo il seguente enunciato per induzione su $k \geqslant 0$:

Enunciato. *La successione*

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_{k+1} \longrightarrow \mathcal{N}_k(q_k) \xrightarrow{\alpha_k} \dots \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{N}_0(q_0) \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{N}_{-1}(q_{-1}) \longrightarrow 0 \qquad (6.9)$$

è esatta. Inoltre

1. *se $0 \leqslant t \leqslant k$ allora $\pi_*\mathcal{I}_t(l)$ è localmente libero per $l \geqslant -q_t$ e, se $t > 0$, $\mathcal{M}_t = \pi_*\mathcal{I}_t(-q_t)$ ha rango β_t.*
2. *$\mathcal{I}_k$ è piatto su Y.*
3. *Dato $y \in Y$ la successione 6.9 ristretta alla fibra su y è isomorfa alla risoluzione minima di X_y troncata all'indice k*

Osserviamo che la dimostrazione di tale enunciato conclude la dimostrazione della proposizione, dato che la risoluzione minima di X_y per 6.12 è della forma 6.5 e quindi $\mathcal{I}_{d-1} = 0$, poichè lo è su ogni fibra.

Passiamo quindi alla dimostrazione dell'enunciato induttivo. Iniziamo con delle osservazioni. $\mathcal{I}_1$ è il fascio di ideali associato ad X e, dato che π e $i_*\mathcal{O}_X$ sono piatti su Y, per ogni $y \in Y$, grazie a 6.20, $j_y^*\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_{1,y}$ è il fascio di ideali associato ad X_y ed ogni risoluzione di $i_*\mathcal{O}_X$, ristretta alla fibra su y, è una risoluzione di $i_{y*}\mathcal{O}_{X_y}$. Indichiamo $\mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathcal{E})$.

$k = 0$. Per l'osservazione iniziale $0 \longrightarrow \mathcal{I}_1 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \longrightarrow i_*\mathcal{O}_X \longrightarrow 0$ ristretta alla fibra su $y \in Y$ coincide con $0 \longrightarrow \mathcal{I}_{1,y} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_y} \longrightarrow i_{y*}\mathcal{O}_{X_y} \longrightarrow 0$, che chiaramente è l'inizio della risoluzione minima di X_y. $\mathcal{I}_0 = i_*\mathcal{O}_X$ e per la formula di proiezione abbiamo, per ogni $l \in \mathbb{Z}$,

$$\pi_*(\mathcal{I}_0(l)) \simeq \pi_*(i_*i^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(l))) \simeq \rho_*(i^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(l)))$$

Da 1.5 otteniamo che $\pi_*(\mathcal{I}_0(l))$ è localmente libero. Infine $\mathcal{I}_0 = i_*\mathcal{O}_X$ è piatto su Y poichè ρ è un rivestimento.

passo induttivo. Supponiamo che la tesi sia vera per k e mostriamo che vale per $k+1$. Abbiamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_{k+1} \longrightarrow \mathcal{N}_k(q_k) \longrightarrow \mathcal{I}_k \longrightarrow 0$$

Se $k \geqslant d-2$ allora per ogni $y \in Y$ $\mathcal{I}_{k+1,y} = 0$ da cui $\mathcal{I}_{k+1} = 0$. In particolare $\mathcal{N}_{k+1} = 0$ e quindi ogni parte dell'enunciato induttivo segue banalmente. Supponiamo quindi che $k < d-2$. Osserviamo innanzitutto che $\mathcal{N}_k$ è localmente libero poiché è il pull-back di un fascio localmente libero ed in particolare sarà piatto su Y. Dato che per ipotesi induttiva $\mathcal{I}_k$ è piatto su Y possiamo dedurre che anche $\mathcal{I}_{k+1}$ è piatto su Y. Abbiamo quindi 2).

Poichè $k < d-2$ e per ipotesi induttiva 6.9 si restringe alla risoluzione minima di X_y avremo una successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_y}^{\beta_{d-2}}(q_{d-2}) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_y}^{\beta_{k+1}}(q_{k+1}) \longrightarrow \mathcal{I}_{k+1,y} \longrightarrow 0 \tag{6.10}$$

Quindi $\mathcal{I}_{k+1,y}$ è $(-q_{k+1}+1)$-regolare. Consideriamo un intero $l \geqslant -q_{k+1}$. La regolarità ci assicura che $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}_y, \mathcal{I}_{k+1,y}(l)) = 0$. Usando il lemma di cambiamento di base avremo quindi che $\mathrm{R}^1\, \pi_*\mathcal{I}_{k+1}(l) = 0$, da cui l'esattezza della successione

$$0 \longrightarrow \pi_*\mathcal{I}_{k+1}(l) \longrightarrow \pi_*\mathcal{N}_k(q_k + l) \longrightarrow \pi_*\mathcal{I}_k(l) \longrightarrow 0$$

Dato che $l \geqslant -q_{k+1} \geqslant -q_k$ abbiamo che, per ipotesi induttiva, $\pi_*\mathcal{I}_k(l)$ è localmente libero. Se $k = 0$ allora $\mathcal{N}_k = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ quindi $\pi_*\mathcal{N}_0(q_k + l)$ è localmente libero, invece se $k > 0$ per definizione $\mathcal{N}_k = \pi^*\pi_*(\mathcal{I}_k(-q_k))$ e quindi anche in questo caso $\pi_*\mathcal{N}_k(q_k + l) \simeq \pi_*\mathcal{I}_k(-q_k) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \pi_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(q_k + l)$ è localmente libero. Otteniamo quindi che $\pi_*\mathcal{I}_{k+1}(l)$ è localmente libero, ossia la prima parte di 1).

Considerando $y \in Y$, applicando 3.76 alla successione 6.10 otteniamo una suriezione

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_y}^{\beta_{k+1}}(q_{k+1})) & \longrightarrow & \Gamma_*(\mathcal{I}_{k+1,y}) \\ \wr\!\mid & & \\ S^{\beta_{k+1}}(q_{k+1}) & & \end{array}$$

dove S è l'anello dei polinomi di $\mathbb{P}_y$. Poichè tale morfismo è parte di una risoluzione minima di S_{X_y} per ipotesi, avremo che β_{k+1} è il numero minimo di generatori omogenei di $\Gamma_*(\mathcal{I}_{k+1,y})$. Ma quest'ultimo S-modulo è generato in grado $-q_{k+1}$ e quindi otteniamo che

$$\beta_{k+1} = \dim_{k(y)} \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_y, \mathcal{I}_{k+1,y}(-q_{k+1}))$$

Dato che abbiamo mostrato che $\mathrm{R}^1\, \pi_*\mathcal{I}_{k+1}(-q_{k+1}) = 0$ possiamo applicare il lemma di cambiamento di base per l'indice $i = 0$. Avendo già mostrato che $\pi_*\mathcal{I}_{k+1}(-q_{k+1})$ è localmente libero possiamo quindi concludere che

$$\beta_{k+1} = \operatorname{rk} \pi_*\mathcal{I}_{k+1}(-q_{k+1})$$

Con questo abbiamo finito di dimostrare 1).

Rimane da mostrare che aggiungendo $\mathcal{N}_{k+1}(q_{k+1})$ alla successione 6.9 la successione rimane esatta e si restringe sulla fibra alla risoluzione minima di X_y. Ponendo $T = \mathcal{I}_{k+1}(-q_{k+1})$, per definizione tale continuamento è il morfismo

$$\mathcal{N}_{k+1}(q_{k+1}) \simeq (\pi^*\pi_*T)(q_{k+1}) \xrightarrow{\alpha_{k+1}} T(q_{k+1})$$

Dato che un morfismo è surgettivo se e solo se lo è ristretto ad ogni fibra, possiamo ricondurci a dimostrare solo che $\alpha_{k+1,y}$ è isomorfo al morfismo della risoluzione minima di X_y per ogni $y \in Y$. A tale proposito, se $\pi_y : \mathbb{P}_y \longrightarrow y$, osserviamo che

$$\begin{array}{ccc} (\pi^*\pi_* T)_y & \longrightarrow & T_y \\ \wr\| & & \wr\| \\ \pi_y^*\pi_{y*}T_y & \longrightarrow & T_y \end{array}$$

e quindi $\alpha_{k+1,y}$ è isomorfa a $\mathcal{N}_{k+1,y}(q_{k+1}) \simeq (\pi_y^*\pi_{y*}T_y)(q_{k+1}) \longrightarrow T_y(q_{k+1})$. Ma in 6.25 abbiamo visto come il morfismo precedente sia il modo canonico per ottenere una risoluzione di Gorenstein, o, in questo caso, una risoluzione minima di X_y. $\square$

Definizione 6.32. *Dato uno schema Y ed un morfismo $\lambda : (X,\rho) \longrightarrow (X',\rho')$ di schemi su Y allora il morfismo $\rho'_*\mathcal{O}_{X'} \xrightarrow{\rho'_*\lambda^\#} \rho_*\mathcal{O}_X$ induce una mappa* $\operatorname{coker}\rho'^\# \longrightarrow \operatorname{coker}\rho^\#$ *e quindi una mappa μ fra i rispettivi duali. Diremo che μ è la mappa sui conuclei indotta da λ. Se X, X' sono immersi in fibrati proiettivi $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, $\mathbb{P}(\mathcal{E}')$ e $\lambda = \mathbb{P}(\sigma)_{|X}$, con $\sigma : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$, diremo anche che μ è la mappa sui conuclei indotta da σ.*

Proposizione 6.33. *Sia Y uno schema noetheriano, $d \geqslant 3$ e $\chi = (\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha}, X, \rho)$ una risoluzione di Gorenstein. Allora esiste un isomorfismo*

$$(\operatorname{coker}\rho^\#)^\vee \xrightarrow{\eta_\chi} \mathcal{E} \otimes \det\mathcal{E} \otimes (\mathcal{M}_{d-2})^\vee \tag{6.11}$$

naturale nel senso che se $\chi' = (\mathcal{E}', \underline{\mathcal{M}'}, \underline{\alpha'}, X', \rho')$ è un altra risoluzione di Gorenstein, $(\sigma, \underline{\tau}) : \chi \longrightarrow \chi'$ è un isomorfismo e μ è l'isomorfismo indotto sui conuclei di ρ, ρ' da σ allora

$$\begin{array}{ccc} (\operatorname{coker}\rho'^\#)^\vee & \xrightarrow{\eta_{\chi'}} & \mathcal{E}' \otimes \det\mathcal{E}' \otimes (\mathcal{M}'_{d-2})^\vee \\ {\scriptstyle \mu^{-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma\otimes\det\sigma\otimes\tau_{d-2}^{-1\,\vee}} \\ (\operatorname{coker}\rho^\#)^\vee & \xrightarrow[\eta_\chi]{} & \mathcal{E} \otimes \det\mathcal{E} \otimes (\mathcal{M}_{d-2})^\vee \end{array}$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{N}_*$ la successione esatta associata a χ e poniamo $\mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathcal{E})$. Per 6.22 e per la $(d-2)$-dualità su $\mathbb{P}/Y$ abbiamo un isomorfismo

$$(\operatorname{coker}\rho^\#)^\vee \simeq (\mathrm{R}^{d-2}\,\pi_*\mathcal{N}_{d-2}(q_{d-2}))^\vee \simeq \pi_*\underline{\mathrm{Hom}}_X(\mathcal{N}_{d-2}(q_{d-2}), \omega_\pi)$$

Tenendo presente che $\omega_\pi \simeq \pi^*\det\mathcal{E}(1-d)$, $q_{d-2} = -d$ e le relazioni mostrate in 6.19 ed applicando la formula di proiezione otteniamo

$$\begin{aligned} \pi_*\underline{\mathrm{Hom}}_X(\mathcal{N}_{d-2}(q_{d-2}), \omega_\pi) &\simeq \pi_*(\mathcal{N}_{d-2}{}^\vee \otimes \pi^*\det\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)) \\ &\simeq \pi_*(\pi^*(\pi_*\mathcal{N}_{d-2}{}^\vee) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)) \otimes \det\mathcal{E} \\ &\simeq (\pi_*\mathcal{N}_{d-2})^\vee \otimes \det\mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \end{aligned}$$

Per quanto riguarda l'ultima affermazione, osserviamo che, se $\mathcal{N}'_*$ è la risoluzione associata a χ', allora esiste un isomorfismo di risoluzioni $\lambda_*\mathcal{N} \simeq \mathcal{N}'$ indotto da $\underline{\tau}$. Considerando la prima successione di isomorfismi, il primo scambia μ^{-1} con la mappa indotta da τ_{d-2} sulle risoluzioni cui è applicato $\mathrm{R}^{d-2}\,\pi'_*$, mentre il secondo, essendo bifuntoriale, introduce l'isomorfismo σ (basta tenere presente che se applichiamo π'_* all'isomorfismo $\lambda_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}')}(1)$ otteniamo σ). È facile vedere adesso che con la seconda successione di isomorfismi si ottiene il risultato voluto. $\square$

Proposizione 6.34. *Sia Y uno schema noetheriano, $d \geqslant 3$ e consideriamo un oggetto $\chi = ((\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha}, \pi, \mathcal{I}, i, X, \rho, \mathcal{N}_*), \zeta)$ di $\mathrm{PGor}_d(Y)$. Allora esistono isomorfismi di successioni esatte*

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(\mathcal{N}_*, \omega_\pi) \simeq \mathcal{N}_*(1)$$

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(\mathcal{N}_*, \mathcal{N}_{d-2}(q_{d-2})) \simeq \mathcal{N}_*$$

Inoltre $\mathcal{N}_*(1)$ è una risoluzione di $i_*\omega_\rho$ e, se $\mathcal{E} = (\operatorname{coker} \rho^\#)^\vee$, allora il morfismo $\rho^*\mathcal{E} \longrightarrow \omega_\rho$ associato al rivestimento ρ è surgettivo ed induce l'immersione i.

Dimostrazione. Grazie a 5.59 abbiamo che

$$\underline{\mathrm{Ext}}^j_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(i_*\mathcal{O}_X, \omega_\pi) \simeq \begin{cases} 0 & j \neq d-2 \\ i_*\omega_\rho & j = d-2 \end{cases}$$

Dato che $\mathcal{N}_*$ è una risoluzione localmente libera di $i_*\mathcal{O}_X$ abbiamo che l'omologia del complesso $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(\mathcal{N}_*, \omega_\pi)$ coincide con $\underline{\mathrm{Ext}}^*_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(i_*\mathcal{O}_X, \omega_\pi)$. Dalla relazione scritta sopra otteniamo quindi che $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(\mathcal{N}_*, \omega_\pi)$ è una risoluzione libera di $i_*\omega_\rho$. In particolare è una successione esatta. Poniamo $\mathcal{N}_0 = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$. Abbiamo che

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(\mathcal{N}_k(q_k), \omega_\pi(-1)) \simeq (\mathcal{N}_k{}^\vee \otimes \pi^* \det \mathcal{E})(-q_k - d) = \mathcal{T}_{d-2-k}(-d - q_k)$$

Osserviamo adesso che, per l'osservazione 6.10, valgono le relazioni $-d - q_k = q_{d-2-k}$ e $\beta_k = \beta_{d-2-k}$. Inoltre, per ogni k, usando la formula di proiezione, si ottiene che $\mathcal{M}'_k = \pi_*\mathcal{T}_k$ è localmente libero di rango β_k. Inoltre, usando l'identificazione ζ, $\mathcal{T}_0 = \mathcal{N}_{d-2}{}^\vee \otimes \pi^* \det \mathcal{E} \simeq_\zeta \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$. Quindi $(\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}'}, \underline{\alpha'}, \mathcal{T}_*)$ è una risoluzione di Gorenstein ed indichiamo con $\mathcal{I}'$ il fascio di ideali associato. Grazie a 6.25, per mostrare che $\mathcal{T}_*$ e $\mathcal{N}_*$ sono isomorfe, è sufficiente mostrare che $\mathcal{I}' = \mathcal{I}$. A tale proposito, osservando che $i^*i_* \simeq \mathrm{id}$ poichè i è una immersione chiusa, applichiamo i_*i^* al morfismo surgettivo $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} \longrightarrow i_*\omega_\rho(-1)$:

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} \arrow[r] \arrow[dl, "i^\#"'] \arrow[d] & i_*\omega_\rho(-1) \arrow[d, "\sigma_2"', "\wr"] \\
i_*\mathcal{O}_X \arrow[r, dashed, "\simeq"'] & i_*i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} \arrow[r, "\sigma_1", "\simeq"'] & i_*i^*(i_*\omega_\rho(-1))
\end{tikzcd}$$

Il morfismo σ_1 è un isomorfismo poichè è indotto da $i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} \longrightarrow i^*(i_*\omega_\rho(-1)) \simeq \omega_\rho \otimes i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(-1)$ che, essendo un morfismo surgettivo fra fasci invertibili, è un isomorfismo. Invece il morfismo σ_2 è un isomorfismo poichè $i_*i^*(i_*\omega_\rho(-1)) \simeq i_*(\omega_\rho \otimes i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(-1)) \simeq i_*\omega_\rho(-1)$. Avremo quindi che il morfismo verticale $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} \longrightarrow i_*i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} \simeq i_*\mathcal{O}_X$ è surgettivo e quindi si fattorizza in modo unico attraverso $i^\#$. Questo ci permette di concludere che $\mathcal{I} = \mathcal{I}'$. L'ultimo isomorfismo fra le successioni esatte segue dal fatto che $\mathcal{N}_{d-2}(q_{d-2}) \simeq \omega_\pi(-1)$.

Supponiamo adesso che $\mathcal{E} = (\operatorname{coker} \rho^\#)^\vee$. Abbiamo mostrato che esiste una suriezione $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) \longrightarrow i_*\omega_\rho$ e se applichiamo π_* otteniamo un morfismo $\mathcal{E} \longrightarrow \rho_*\omega_\rho$. Per la dualità di Grothendieck tale morfismo coincide con il duale del morfismo $\rho_*\mathcal{O}_X \longrightarrow \operatorname{coker} \rho^\#$. Applicando il funtore $i^*\pi^*\pi_*$ alla suriezione $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) \longrightarrow i_*\omega_\rho$ si ottiene un diagramma

$$\begin{tikzcd}
\rho^*\mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & \rho^*\rho_*\omega_\rho \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & \omega_\rho \arrow[ddl, "\simeq"] \\
i^*\pi^*\pi_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) \arrow[r] \arrow[d] & i^*\pi^*\pi_*i_*\omega_\rho \arrow[d] & \\
i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) \arrow[r, "\simeq"'] & i^*i_*\omega_\rho &
\end{tikzcd}$$

In particolare la mappa verticale a sinistra è il morfismo surgettivo associato ad i, mentre la mappa orizzontale in alto è il morfismo associato al rivestimento ρ. □

Lemma 6.35. *Siano $k \subseteq F$ un'inclusione di campi, X, Y due schemi noetheriani su k ed $i : X \longrightarrow Y$ un morfismo proprio. Allora*

$$i' : X \times_k F \longrightarrow Y \times_k F \text{ immersione chiusa} \implies i \text{ immersione chiusa}$$

Dimostrazione. Poniamo $X' = X \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} F$ e $Y' = Y \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} F$ e consideriamo il diagramma cartesiano

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "i'"'] & X \arrow[d, "i"] \\
Y' \arrow[r, "\beta"] & Y
\end{tikzcd}$$

Osseviamo innazitutto che α e β sono morfismi piatti e surgettivi perchè ottenuti come cambiamento di base di $\operatorname{Spec} F \longrightarrow \operatorname{Spec} k$. Poichè i è proprio, è sufficiente mostrare la surgettività a livello dei fasci e l'iniettività di i. Dividiamo la dimostrazione in due parti.

Surgettività a livello di fasci Consideriamo la successione esatta

$$\mathcal{O}_Y \longrightarrow i_*\mathcal{O}_X \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

Poichè β è piatto avremo che $\beta^* i_*\mathcal{O}_X \simeq i'_*\mathcal{O}_{X'}$ e quindi che la successione

$$\mathcal{O}_{Y'} \longrightarrow i'_*\mathcal{O}_{X'} \longrightarrow \beta^*T \longrightarrow 0$$

è esatta. In particolare $\beta^*T = 0$ e, quindi, $T = 0$. Infatti, se U è un aperto affine di Y, otteniamo che $\beta^*T(\beta^{-1}(U)) \simeq T(U) \otimes_k F$ e quindi che $T(U) = 0$.

i è iniettiva Siano $p, \hat{p} \in X$ tale che $i(p) = i(\hat{p}) = q$. β è surgettiva, quindi otteniamo $q' \in Y'$ tale che $\beta(q') = q$. Per le proprietà del prodotto fibrato esistono p' e $\hat{p}'$ tali che $i'(p') = i'(\hat{p}') = q'$ e $\alpha(p') = p$, $\alpha(\hat{p}') = \hat{p}$. Ma i è iniettiva, quindi $p' = \hat{p}'$ e di conseguenza $p = \hat{p}$. □

Proposizione 6.36. *Sia Y uno schema noetheriano, $d \geqslant 3$, $\rho : X \longrightarrow Y$ un rivestimento di Gorenstein di grado d e $\mathcal{E} = (\operatorname{coker} \rho^{\#})^{\vee}$. Allora il morfismo*

$$\rho^*\mathcal{E} \longrightarrow \omega_\rho \tag{6.12}$$

associato a ρ è surgettivo ed induce un'immersione chiusa $i : X \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ su ogni fibra aritmeticamente di Gorenstein e non degenere.

Dimostrazione. Mostriamo come ricondurci al caso $Y \simeq \operatorname{Spec} k$, con k un campo infinito. Supponiamo quindi che la proposizione sia vera in questa situazione particolare ed iniziamo col caso $Y = \operatorname{Spec} k$, con k campo qualsiasi. Consideriamo il diagramma cartesiano

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\rho'"'] & X \arrow[d, "\rho"] \\ \operatorname{Spec} \overline{k} \arrow[r] & \operatorname{Spec} k \end{tikzcd}$$

Per 6.2 sappiamo che ρ' è un rivestimento di Gorenstein di grado d. Se scriviamo $\rho^*\mathcal{E} \longrightarrow \omega_\rho \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow 0$ ed applichiamo β^*, per 5.62, otteniamo il morfismo associato a ρ', quindi $\beta_*\mathcal{T} = 0$ e $\mathcal{T} = 0$, poichè localmente β_* consiste nell'applicare $- \otimes_k \overline{k}$. Dunque 6.12 è surgettivo ed otteniamo un morfismo $i : X \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}) = \mathbb{P}_k^{d-2}$. Per 4.15 il cambiamento di base i' di i rispetto a $\operatorname{Spec} \overline{k} \longrightarrow \operatorname{Spec} k$ è associato al morfismo 6.12 di ρ' e di conseguenza i' è una immersione chiusa non degenere ed aritmeticamente di Gorenstein. Da 6.35 otteniamo che i è un'immersione chiusa e da 2.67 che è non degenere. Infine, per 2.64 e 3.63, $S_{X'} \simeq S_X \otimes_k \overline{k}$ e quindi i è aritmeticamente di Gorenstein.

Supponiamo adesso che Y sia uno schema noetheriano. Il morfismo 6.12 è surgettivo se lo è su ogni fibra. Per 5.62 la restrizione di 6.12 alla fibra su $y \in Y$ è isomorfa al morfismo associato al rivestimento $\rho_y : X_y \longrightarrow \operatorname{Spec} k(y)$. Quindi 6.12 è surgettivo ed induce un morfismo $i : X \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$. Come abbiamo fatto nel caso precedente troviamo che i_y è una immersione chiusa non degenere ed aritmeticamente di Gorenstein. Rimane solo da mostrare che i è una immersione chiusa. Dato che i è affine abbiamo che $i^\#$ ristretto alle fibre è isomorfo a $i_y^\#$ e quindi $i^\#$ è surgettivo. D'altra parte, dato che ρ è proprio e π è separato, otteniamo che i è proprio. Inoltre, essendo iniettivo su ogni fibra, è anche globalmente iniettivo. Mettendo tutto inisieme otteniamo che i è una immersione chiusa topologica e $i^\#$ è surgettivo, ossia i è una immersione chiusa.

Ci siamo quindi ricondotti al caso $Y = \operatorname{Spec} k$, con k campo infinito. Nel teorema 6.4 abbiamo costruito esplicitamente un'immersione chiusa non degenere ed aritmeticamente di Gorenstein $i : X \longrightarrow \mathbb{P}_k^{d-2}$ e quindi, grazie alla proposizione 6.31, possiamo costruire una risoluzione di Gorenstein $(\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha}, \pi, i, \rho)$, dove $\mathcal{E} = (\operatorname{coker} \rho^\#)^\vee \simeq \mathcal{O}_Y^{d-1}$ e $\mathcal{M}_k = \mathcal{O}_Y^{\beta_k}$. Chiaramente $\mathcal{M}_{d-2} \simeq \mathcal{O}_Y \simeq \det \mathcal{E}$ e quindi, dalla proposizione 6.34, otteniamo che il morfismo 6.12 è surgettivo ed induce i. $\square$

Osservazione 6.37. Sia $\chi = (\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha}, \pi, \mathcal{I}, i, X, \rho, \mathcal{N}_*)$ una risoluzione di Gorenstein, $\mathcal{L}$ un fascio invertibile su Y ed $\mathcal{E}'$ un fascio localmente libero di rango $d-1$ su Y. Supponiamo inotre di avere un isomorfismo $\eta : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}$. Per 4.21 otteniamo un isomorfismo $\lambda : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}')$ ed un isomorfismo

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}')}(1) \simeq \lambda_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) \otimes \pi'^*\mathcal{L} \tag{6.13}$$

Chiaramente $\lambda_*\mathcal{N}_*$ è una risoluzione della forma 6.13 e sarà associata alla risoluzione di Gorenstein

$$\chi_{\mathcal{L}} = (\mathcal{E}', \underline{\mathcal{M}'}, \alpha', \pi', \mathcal{I}', i', X', \rho', \mathcal{N}'_*)$$

dove $\mathcal{M}'_k = \mathcal{M}_k \otimes \mathcal{L}^{\otimes -q_k}$. Inoltre abbiamo che $\pi = \pi' \circ \lambda$, $\lambda_* \mathcal{I} = \mathcal{I}'$, $i' = \lambda_* \circ i$, $\lambda(X) = X'$, $\rho' = \rho$, $\lambda_* \mathcal{N}_* \simeq \mathcal{N}'_*$.

In particolare con questo metodo si può mostrare che una qualsiasi risoluzione di Gorenstein non è detto abbia una struttura di oggetto di $\mathrm{PGor}_d(Y)$, ossia non é detto che esista un isomorfismo $\mathcal{M}_{d-2} \simeq \det \mathcal{E}$. Supponiamo per esempio che la nostra χ ammetta un isomorfismo $\zeta : \mathcal{M}_{d-2} \longrightarrow \det \mathcal{E}$, ossia che (χ, ζ) sia un oggetto di $\mathrm{PGor}_d(Y)$. Allora, dato un fascio invertibile $\mathcal{L}$ di Y, $\chi_{\mathcal{L}}$ ammette una struttura di oggetto di $\mathrm{PGor}_d(Y)$ se e solo se

$$\det \mathcal{E} \simeq \mathcal{M}_{d-2} \otimes \mathcal{L}^{\otimes d} \simeq_\zeta \det \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^{\otimes d} \iff \mathcal{L}^{\otimes d} \simeq \mathcal{O}_Y$$

Un esempio in cui accade questa situazione è il seguente. Sia m primo con d e consideriamo un polinomio omogeneo $f \in k[X, Y]$ irriducibile e di grado m, ad esempio $f = X^m + 2Y^m \in \mathbb{Q}[X, Y]$. Sia $Y = (\mathbb{P}^1_k)_f \subseteq \mathbb{P}^1_k$ l'aperto dei primi che non contengono f. Y è uno schema noetheriano affine, con $Y \simeq \operatorname{Spec} B$ dove $B = k[X, Y]_{(f)}$, e inoltre $\operatorname{Pic} Y \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Quindi esiste un fascio invertibile $\mathcal{L}$ su Y tale che $\mathcal{L}^{\otimes d} \not\simeq \mathcal{O}_Y$. L'omomorfismo di anelli $B \longrightarrow B[Z]/(Z^d)$ induce un rivestimento di Gorenstein $\rho : X = \operatorname{Spec} B[Z]/(Z^d) \longrightarrow Y$ di grado d e, utilizzando 6.18, otteniamo un oggetto χ di $\mathrm{PGor}_d(Y)$. Per quanto detto $\chi_{\mathcal{L}}$ non possiede una struttura di oggetto di $\mathrm{PGor}_d(Y)$.

D'altra parte la moltiplicazione per un fascio invertibile permette anche di dare un modo canonico per associare ad una risoluzione di Gorenstein un oggetto di $\mathrm{PGor}_d(Y)$.

Definizione 6.38. *Sia Y uno schema noetheriano e $d \geqslant 3$. Definiamo $\mathrm{GRis}_d(Y)$ come la categoria delle risoluzioni di Gorenstein $\chi = (\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha}, X, \rho)$ con X piatto su Y (in modo tale che ρ sia un rivestimento di Gorenstein di grado d) e frecce i morfismi di risoluzioni di Gorenstein. Poniamo inoltre*

$$I : \mathrm{PGor}_d(Y) \longrightarrow \mathrm{GRis}_d(Y)$$

il funtore dimentico della identificazione con il determinante.

Introduciamo anche un po' di notazione

Notazione. Dato un oggetto $\chi = (\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha}, X, \rho)$ di $\mathrm{GRis}_d(Y)$, poniamo $\mathcal{L}_\chi = {\mathcal{M}_{d-2}}^\vee \otimes \det \mathcal{E}$, $\mathcal{E}' = (\operatorname{coker} \rho^\#)^\vee$,

$$\mathcal{E}' \xrightarrow{\eta_\chi} \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}_\chi$$

l'isomorfismo definito in 6.33 e $\hat{\chi} = \chi_{\mathcal{L}_\chi}$ la risoluzione di Gorenstein ottenuta attraverso tale isomorfismo. Infine poniamo come ζ_χ la composizione degli isomorfismi

$$\mathcal{M}_{d-2} \otimes \mathcal{L}_\chi^{\otimes d} = \mathcal{M}_{d-2} \otimes {\mathcal{M}_{d-2}}^\vee \otimes (\det \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}_\chi^{\otimes d-1}) \simeq \mathcal{M}_{d-2} \otimes {\mathcal{M}_{d-2}}^\vee \otimes \det \mathcal{E}' \simeq \det \mathcal{E}'$$

dove il secondo isomorfismo è indotto da $(\det \eta_\chi)^{-1}$.

Dato un morfismo di risoluzioni $(\sigma, \underline{\tau}) : \chi = (\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha}, \rho) \longrightarrow (\overline{\mathcal{E}}, \overline{\underline{\mathcal{M}}}, \overline{\underline{\alpha}}, \overline{\rho}) = \overline{\chi}$ indichiamo $\hat{\sigma} : \overline{\mathcal{E}}' \longrightarrow \mathcal{E}'$ l'inverso dell'isomorfismo indotto sui conuclei di $\overline{\rho}$, ρ da $\mathbb{P}(\sigma)$, $\vartheta = {\tau_{d-2}^{-1}}^\vee \otimes \det \sigma : \mathcal{L}_{\overline{\chi}} \longrightarrow \mathcal{L}_\chi$ e con $\hat{\underline{\tau}}$ gli isomorfismi

$$\hat{\tau}_k = \tau_k \otimes \vartheta^{-q_k} : \overline{\mathcal{M}}_k \otimes \mathcal{L}_{\overline{\chi}}^{\otimes -q_k} \longrightarrow \mathcal{M}_k \otimes \mathcal{L}_\chi^{\otimes -q_k}$$

Proposizione 6.39. *Sia Y uno schema noetheriano e $d \geqslant 3$. Allora l'associazione*

$$\begin{aligned} \mathrm{GRis}_d(Y) &\xrightarrow{\ \Sigma\ } \mathrm{PGor}_d(Y) \\ \chi &\longrightarrow (\hat{\chi}, \zeta_\chi) \\ (\sigma, \underline{\tau}) &\longrightarrow (\hat{\sigma}, \underline{\hat{\tau}}) \end{aligned}$$

definisce un funtore e, se $\chi = (\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha}, X, \rho)$ è un oggetto di $\mathrm{GRis}_d(Y)$, vale che

1. *$\Phi(\Sigma(\chi)) = \rho$, dove Φ è il funtore definito in 6.18, ossia χ e $\Sigma(\chi)$ hanno lo stesso rivestimento associato*

2. *se (χ, ζ) è un oggetto di $\mathrm{PGor}_d(Y)$ e $\delta : \mathcal{L}_\chi \xrightarrow{\simeq} \mathcal{O}_Y$ è indotta da ζ allora $(\mathrm{id} \otimes \delta \circ \eta_\chi, \underline{\tau}) : (\chi, \zeta) \longrightarrow \Sigma \circ I(\chi, \zeta)$, dove*

$$\tau_k = \mathrm{id} \otimes \delta^{\otimes -q_k} : \mathcal{M}_k \otimes \mathcal{L}^{\otimes -q_k} \longrightarrow \mathcal{M}_k$$

   è un isomorfismo naturale, ossia definisce un isomorfismo di funtori $\mathrm{id} \simeq \Sigma \circ I$

3. *l'immersione i' associata a $\Sigma(\chi)$ è indotta dal morfismo surgettivo $\rho^* \mathcal{E}' \longrightarrow \omega_\rho$ associato al rivestimento ρ*

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che Σ, per l'osservazione 6.37, è ben posto sugli oggetti. Consideriamo quindi una freccia $(\sigma, \underline{\tau}) : \chi = (\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha}, \rho) \longrightarrow (\overline{\mathcal{E}}, \overline{\underline{\mathcal{M}}}, \overline{\underline{\alpha}}, \overline{\rho}) = \overline{\chi}$. Per 6.33, abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{E}}' & \xrightarrow{\eta_{\overline{\chi}}} & \overline{\mathcal{E}} \otimes \mathcal{L}_{\overline{\chi}} \\ \Big\downarrow \hat{\sigma} & & \Big\downarrow \sigma \otimes \vartheta \\ \mathcal{E}' & \xrightarrow[\eta_\chi]{} & \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}_\chi \end{array} \tag{6.14}$$

ed un corrispondente diagramma sui fibrati proiettivi. Quindi la moltiplicazione per $\mathcal{L}_\chi$, $\mathcal{L}_{\overline{\chi}}$ indotta rispettivamente da η_χ, $\eta_{\overline{\chi}}$ sugli $\mathcal{O}(1)$ dei rispettivi fibrati è coerente e quindi $(\hat{\sigma}, \underline{\hat{\tau}})$ definisce un isomorfismo di risoluzioni di Gorenstein fra $\Sigma(\chi)$ e $\Sigma(\overline{\chi})$. Per mostrare che è una freccia di $\mathrm{PGor}_d(Y)$ è sufficiente applicare det al diagramma 6.14.

1). Segue dall'osservazione 6.37.

2) Per mostrare che è un isomorfismo di risoluzioni di Gorenstein si può ragionare come fatto sopra. Inoltre, se supponiamo di aver mostrato che è una freccia di $\mathrm{PGor}_d(Y)$, è evidente, dal diagramma 6.14, che l'isomorfismo è naturale. Mostriamo quindi che viene conservata l'identificazione col determinante, ossia che i due isomorfismi $\zeta \circ \tau_k, \det \hat{\sigma} \circ \zeta_\chi : \mathcal{M}_{d-2} \otimes \mathcal{L}^{\otimes d} \longrightarrow \det \mathcal{E}$ coincidono. Moltiplicando per $\mathcal{M}_{d-2}^{\otimes d}$ ed osservando che $\det(\mathrm{id} \otimes \delta) = \mathrm{id} \otimes \delta^{\otimes d-1}$, troviamo che i due isomorfismi sono dati da

$$\mathcal{M}_{d-2} \otimes \det \mathcal{E}^{\otimes d} \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \zeta^{-1 \otimes d}} \mathcal{M}_{d-2} \otimes \mathcal{M}_{d-2}^{\otimes d} \xrightarrow{\zeta \otimes \mathrm{id}} \det \mathcal{E} \otimes \mathcal{M}_{d-2}^{\otimes d}$$

$$\mathcal{M}_{d-2}\otimes\det\mathcal{E}\otimes\det\mathcal{E}^{\otimes d-1}\xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\zeta^{-1\otimes(d-1)}}\mathcal{M}_{d-2}\otimes\det\mathcal{E}\otimes\mathcal{M}_{d-2}^{\otimes d-1}$$

Poichè $\zeta\otimes\zeta^{-1}\simeq\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}$ invertendo i fasci otteniamo quanto voluto.

3) Infatti $\Sigma(\chi)$ soddisfa le ipotesi 6.34. □

Corollario 6.40. *Due oggetti di* $\mathrm{PGor}_d(Y)$ *sono isomorfi se e solo se lo sono come risoluzioni di Gorenstein. Questo accade in particolare se hanno lo stesso fascio di ideali associato.*

Dimostrazione. Se (χ,ζ), $(\overline{\chi},\overline{\zeta})$ sono due tali oggetti e $\chi\simeq\overline{\chi}$, allora $(\chi,\zeta)\simeq\Sigma(\chi)\simeq\Sigma(\overline{\chi})\simeq(\overline{\chi},\overline{\zeta})$. □

Abbiamo introdotto tutti gli elementi necessari per costruire un funtore $\mathrm{GRiv}_d(Y)\longrightarrow\mathrm{PGor}_d(Y)$, che poi mostreremo essere un inverso del funtore Φ definito nel teorema 6.18.

Teorema 6.41. *Sia Y uno schema noetheriano e $d\geqslant 3$. Definiamo un funtore*

$$\Lambda':\mathrm{GRiv}_d(Y)\longrightarrow\mathrm{GRis}_d(Y)$$

nel modo seguente. Dato un rivestimento di Gorenstein $\rho:X\longrightarrow Y$ di grado d e posto $\mathcal{E}=(\mathrm{coker}\,\rho^{\#})^{\vee}$, il morfismo surgettivo $\rho^*\mathcal{E}\longrightarrow\omega_\rho$ induce un'immersione chiusa $i:X\longrightarrow\mathbb{P}(\mathcal{E})$ su ogni fibra non degenere ed aritmenticamente di Gorenstein e per 6.31 otteniamo una risoluzione di Gorenstein $\Lambda'(\rho)=\chi_\rho$.

Dati un altro rivestimento di Gorenstein $\overline{\rho}:\overline{X}\longrightarrow Y$ di grado d e $\sigma:X\longrightarrow\overline{X}$ una freccia di $\mathrm{GRiv}_d(Y)$, allora l'inverso dell'isomorfismo sui conuclei di ρ, $\overline{\rho}$ indotto da σ determina un isomorfismo $\Lambda'(\sigma):\chi_\rho\longrightarrow\chi_{\overline{\rho}}$.

Posto

$$\Lambda=\Sigma\circ\Lambda':\mathrm{GRiv}_d(Y)\longrightarrow\mathrm{PGor}_d(Y)$$

esistono isomorfismi

$$I\circ\Lambda\simeq\Lambda'\qquad\Phi\circ\Lambda\simeq\mathrm{id}$$

dove Φ è il funtore defìnto in 6.18.

Dimostrazione. Mostriamo che Λ' è ben posto. Per gli oggetti è chiaro, quindi passiamo a considerare le frecce. Vogliamo mostrare che esiste una successione di isomorfismi $\underline{\tau}$ tali che $(\Lambda'(\sigma)=)(\mu^{-1},\underline{\tau}):\chi_\rho\longrightarrow\chi_{\overline{\rho}}$ sia un morfismo, dove μ è l'isomorfismo indotto sui conuclei. Posto $\lambda=\mathbb{P}(\mu)$, per 6.27 e l'osservazione 6.29 è sufficiente mostrare che $\lambda(\overline{X})=X$, ossia, con il solito uso dei simboli, che esiste un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}(\mathcal{E}) & & \mathbb{P}(\overline{\mathcal{E}}) \arrow[ll, dashed, "\lambda"'] \\
X \arrow[u, "i"] \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[d, "\rho"'] & & \overline{X} \arrow[u, "\overline{i}"'] \arrow[d, "\overline{\rho}"] \\
Y \arrow[rr, "\mathrm{id}"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

Osserviamo che il diagramma in basso è cartesiano. Sfruttando le buone proprietà di cambiamento di base del fascio dualizzante otteniamo diagrammi commutativi

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d, "\mu"'] & \rho_*\omega_\rho \arrow[d] \\
\overline{\mathcal{E}} \arrow[r] & \overline{\rho}_*\omega_{\overline{\rho}}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\overline{\rho}^*\mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\rho}^*\mu"] & \overline{\rho}^*\overline{\rho}_*(\sigma_*\omega_\rho) \arrow[r] \arrow[d] & \sigma_*\omega_\rho \arrow[d, "\wr"] \\
\overline{\rho}^*\overline{\mathcal{E}} \arrow[r] & \overline{\rho}^*\overline{\rho}_*(\omega_{\overline{\rho}}) \arrow[r] & \omega_{\overline{\rho}}
\end{tikzcd}
$$

Riferendoci al diagramma a destra, osserviamo che il morfismo orizzontale in basso è il morfismo associato al rivestimento $\overline{\rho}$, mentre quello in alto è il tirato avanti rispetto a σ del morfismo associato a ρ. A questo punto, per mostrare che il diagramma iniziale è commutativo mostriamo che i e $\lambda \circ \overline{i} \circ \sigma$ sono indotte da uno stesso morfismo surgettivo. Applicando consecutivamente il pull-back per la composizione $\lambda \circ \overline{i} \circ \sigma$ otteniamo

$$
\begin{tikzcd}
\overline{\pi}^*\mathcal{E} \arrow[r, "\overline{\pi}^*\mu"] & \overline{\pi}^*\overline{\mathcal{E}} \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\overline{\mathcal{E}})}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\overline{i}^*\overline{\pi}^*\mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & \overline{i}^*\overline{\pi}^*\overline{\mathcal{E}} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & \overline{i}^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\overline{\mathcal{E}})} \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
\overline{\rho}^*\mathcal{E} \arrow[r] \arrow[rrd, bend right] & \overline{\rho}^*\overline{\mathcal{E}} \arrow[r] & \omega_{\overline{\rho}} \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
& & \sigma_*\omega_\rho
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\sigma^*\overline{\rho}^*\mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & \sigma^*\overline{\rho}^*\overline{\mathcal{E}} \arrow[r] & \sigma^*\omega_{\overline{\rho}} \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
\rho^*\mathcal{E} \arrow[rr] & & \omega_\rho
\end{tikzcd}
$$

Passiamo alla seconda parte dell'enunciato. Iniziamo col primo isomorfismo. Osserviamo che χ_ρ e $I \circ \Sigma(\chi_\rho)$ sono entrambi risoluzioni su $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ che condividono lo stesso rivestimento $\rho : X \longrightarrow Y$. Inoltre, tenendo presente 6.39 e la definizione di χ_ρ, le immersioni associate a queste due risoluzioni di Gorenstein sono entrambe indotte dalla suriezione $\rho^*\mathcal{E} \longrightarrow \omega_\rho$ e quindi hanno in particolare lo stesso ideale associato. Per 6.28 esiste un'unico isomorfismo $(\mathrm{id}, \underline{\tau}) : \chi_\rho \longrightarrow I \circ \Sigma(\chi_\rho)$. Per mostrarne la naturalità, dobbiamo verificare che il seguente diagramma è commutativo

$$
\begin{tikzcd}
\chi_\rho \arrow[r] \arrow[d, "\Lambda'(\sigma)"'] & I \circ \Sigma(\chi_\rho) \arrow[d, "I \circ \Lambda(\sigma)"] \\
\chi_{\overline{\rho}} \arrow[r] & I \circ \Sigma(\chi_{\overline{\rho}})
\end{tikzcd}
\tag{6.15}
$$

Osserviamo che $\Lambda'(\sigma)$, $I \circ \Lambda(\sigma)$ e quindi anche le due possibili composizioni $\chi_\rho \longrightarrow I \circ \Sigma(\chi_{\overline{\rho}})$ hanno per prima componente μ^{-1}. Ma per 6.27 un morfismo fra risoluzioni di Gorenstein è univocamente determinato dalla prima componente e quindi il diagramma commuta.

Per l'ultimo isomorfismo, osserviamo che, per quanto visto, $\Lambda'(\sigma)$ induce un isomorfismo $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{P}(\overline{\mathcal{E}})$ la cui restrizione a X è nuovamente σ. Inoltre le prime componenti degli isomorfismi in 6.15 danno un diagramma commutativo sui rispettivi fibrati. Mettendo insieme queste cose è chiaro che $i : \rho \longrightarrow \Phi \circ \Lambda(\rho)$, dove i è l'immersione associata a $\Lambda(\rho)$, definisce un isomorfismo naturale. $\square$

Osservazione 6.42. L'isomorfismo $I \circ \Lambda \simeq \Lambda'$ ci dice che χ_ρ ha in modo naturale una struttura di oggetto di $\mathrm{PGor}_d(Y)$, ossia che il termine $\mathcal{M}_{d-2}$ in χ_ρ è già isomorfo a $\det \mathcal{E}$. Usare Σ ha però permesso di trovare un'identificazione canonica.

6.5 L'equivalenza fra $\mathbf{GRiv}_d(Y)$ e $\mathbf{PGor}_d(Y)$ e i casi $d = 3, 4$

Teorema 6.43. *Il funtore*

$$\Lambda = \Sigma \circ \Lambda' : \mathrm{GRiv}_d(Y) \longrightarrow \mathrm{PGor}_d(Y)$$

è un inverso per il funtore Φ definito nel teorema 6.18.

Dimostrazione. Rimane da dimostrare che $\Lambda \circ \Phi \simeq \mathrm{id}$. Per 6.39, è sufficiente mostrare che esiste un isomorfismo $\Lambda' \circ \Phi \simeq I \circ \Sigma \circ I$. Ragioniamo come nella dimostrazione dell'isomorfismo $I \circ \Lambda \simeq \Lambda'$. Sia (χ, ζ) un oggetto di $\mathrm{PGor}_d(Y)$, con $\chi = (\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha}, X, \rho)$, e poniamo $\mathcal{E}' = \mathrm{coker}\, {\rho^{\#}}^{\vee}$. Gli oggetti $\Lambda' \circ \Phi(\chi, \zeta)$, $I \circ \Sigma \circ I(\chi, \zeta)$ sono entrambi risoluzioni di Gorenstein su $\mathbb{P}(\mathcal{E}')$ e le rispettive immersioni associate sono indotte dal morfismo surgettivo $\rho^* \mathcal{E}' \longrightarrow \omega_\rho$. Quindi tali immersioni e gli ideali associati coincidono. Risulta univocamente determinato un isomorfismo $\Lambda' \circ \Phi(\chi, \zeta) \longrightarrow I \circ \Sigma \circ I(\chi, \zeta)$ la cui prima componente è l'identità. Se adesso $\psi = (\sigma, \underline{\tau}) : (\chi, \zeta) \longrightarrow (\overline{\chi}, \overline{\zeta})$ è un morfismo, avremo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda' \circ \Phi(\chi, \zeta) & \longrightarrow & I \circ \Sigma \circ I(\chi, \zeta) \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
\Lambda' \circ \Phi(\overline{\chi}, \overline{\zeta}) & \longrightarrow & I \circ \Sigma \circ I(\overline{\chi}, \overline{\zeta})
\end{array}$$

Infatti, per definizione di Λ' e Σ, la prima componente delle mappe verticali coincide con l'inverso del morfismo che σ induce sui conuclei e di conseguenza le due possibili composizioni $\Lambda' \circ \Phi(\chi, \zeta) \longrightarrow I \circ \Sigma \circ I(\overline{\chi}, \overline{\zeta})$ hanno la prima componente uguale e dunque coincidono per 6.27. $\square$

Adesso che il teorema 6.18 è dimostrato, vogliamo fare alcune osservazioni sull'equivalenza stabilita. Come si è visto nel corso delle dimostrazioni svolte nelle precedenti sezioni, il motivo per cui, dato un oggetto $\chi = (\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \alpha, \pi, X, \rho)$ di $\mathrm{GRis}_d(Y)$, è stata fissata un'identificazione $\zeta : \mathcal{M}_{d-2} \longrightarrow \det \mathcal{E}$ è stato la necessità di ritrovare nella categoria $\mathrm{PGor}_d(Y)$ tutti e soli gli isomorfismi dei rivestimenti. Guardando per un attimo ai soli oggetti, è chiaro che già la categoria $\mathrm{GRis}_d(Y)$ permette di classificarli in modo del tutto analogo alla categoria $\mathrm{PGor}_d(Y)$. Il problema di $\mathrm{GRis}_d(Y)$ è che contiene troppe frecce. Un esempio chiarificatore è il seguente. Nella proposizione 6.27 abbiamo fra le altre cose mostrato che esiste un omomorfismo iniettivo di gruppi

$$\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y^*) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{GRis}_d(Y)}(\chi)$$

che manda un elemento μ in $(\mu\, \mathrm{id}, (\mu^{-q_k}\, \mathrm{id}))$. D'altra parte, per ogni μ, $\mathbb{P}(\mu\, \mathrm{id}) = \mathrm{id}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$, e quindi l'immagine di $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y^*)$ induce sui rivestimenti l'automorfismo id. La stessa cosa non accade in $\mathrm{PGor}_d(Y)$, poichè $(\mu\, \mathrm{id}, (\mu^{-q_k}\, \mathrm{id}))$ è una freccia se e solo se $\mu = 1$. Infatti $\det(\mu\,\mathrm{id}) = \mu^{d-1}\,\mathrm{id}$ e quindi dalla condizione sui determinanti otteniamo $\mu^d = \mu^{d-1}$, da cui $\mu = 1$. D'altra parte possiamo mostrare che questo è l'unico 'inconveniente' che può accadere.

Proposizione 6.44. *Sia Y uno schema noetheriano, $d \geqslant 3$, (χ, ζ) un oggetto di $\mathrm{PGor}_d(Y)$, con $\chi = (\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \alpha, \pi, X, \rho)$. Poniamo $\mathcal{L} = {\mathcal{M}_{d-2}}^\vee \otimes \det \mathcal{E}$, $\delta : \mathcal{L} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{O}_Y$ indotto da ζ e η l'isomorfismo canonico $\mathcal{E}' \xrightarrow{\eta_\chi} \mathcal{E} \otimes \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{E}$, dove $\mathcal{E}'$ è il duale di $\operatorname{coker} \rho^\#$. Allora esiste una successione esatta di gruppi*

$$0 \longrightarrow \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y^*) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{GRis}_d(Y)}(\chi) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Aut}_{\mathrm{PGor}_d(Y)}(\chi, \zeta) \longrightarrow 0$$

dove β associa ad un automorfismo $(\sigma, \underline{\tau})$ l'automorfismo la cui prima componente è data dall'inverso della mappa che σ induce sul conucleo di ρ coniugato tramite l'isomorfismo η.

Dimostrazione. Poniamo $R = (\chi, \zeta)$. Abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Aut}_{\mathrm{PGor}_d(Y)}(R) \arrow[rr] & & \mathrm{Aut}_{\mathrm{GRis}_d(Y)}(I(R)) \arrow[dl] \\
& \mathrm{Aut}_{\mathrm{PGor}_d(Y)}(\Sigma \circ I(R)) \arrow[ul, "\simeq"] &
\end{tikzcd}$$

da cui otteniamo un morfismo surgettivo

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{GRis}_d(Y)}(\chi) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Aut}_{\mathrm{PGor}_d(Y)}(\chi, \zeta)$$

che, dal modo in cui sono definiti I, Σ e l'isomorfismo $\mathrm{id} \simeq \Sigma \circ I$, soddisfa le rischieste dell'enunciato. Abbiamo in tal modo una successione come nell'enunciato e rimane da verificarne l'esattezza nel termine centrale. Consideriamo quindi un automorfismo $(\sigma, \underline{\tau})$ nel nucleo di β. Abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}' \arrow[r, "\eta_\chi"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \mathcal{E} \otimes \mathcal{L} \arrow[r] \arrow[d, "\sigma\otimes\vartheta"] & \mathcal{E} \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\mathcal{E}' \arrow[r, "\eta_\chi"'] & \mathcal{E} \otimes \mathcal{L} \arrow[r] & \mathcal{E}
\end{tikzcd}$$

dove ϑ è un automorfismo di $\mathcal{L}$ e quindi $\vartheta = \mu\,\mathrm{id}$ per qualche $\mu \in \mathcal{O}_Y^*$. Otteniamo dunque $\sigma \otimes \mathrm{id} = (1/\mu\,\mathrm{id}) \otimes \mathrm{id}$, da cui $\sigma = 1/\mu\,\mathrm{id}$. $\square$

In particolare il funtore $\Lambda' : \mathrm{GRiv}_d(Y) \longrightarrow \mathrm{GRis}_d(Y)$ definisce una equivalenza di categorie per esempio per $Y = \mathbb{P}^n_{\mathbb{F}_2}, \mathbb{A}^n_{\mathbb{F}_2}$.

Per completezza mostriamo anche l'analogo, per risvestimenti di Gorenstein di grado $d \geqslant 3$, di 6.11 e 6.12.

Proposizione 6.45. *Sia Y uno schema noetheriano, $d \geqslant 3$, $\mathcal{E}$ un fascio localmente libero di rango $d-1$ con fibrato proiettivo associato $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow Y$ e $X \xrightarrow{i} \mathbb{P}(\mathcal{E})$ un sottoschema chiuso. Allora $\pi \circ i$ è un rivestimento di Gorenstein di grado d e i è su ogni fibra non degenere ed aritmenticamente di Gorenstein se e solo $i_*\mathcal{O}_X$ ha una risoluzione della forma*

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_{d-2}(-d) \xrightarrow{\alpha_{d-2}} \mathcal{N}_{d-3}(-d+2) \xrightarrow{\alpha_{d-3}} \dots \xrightarrow{\alpha_2} \mathcal{N}_1(-2) \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$$

con

1. $\pi_* \mathcal{N}_k$ *localmente libero di rango* β_k

2. $\pi^* \pi_* \mathcal{N}_k \simeq \mathcal{N}_k$

3. X *piatto su* Y

Osservazione 6.46. La condizione 3) può essere cambiata con una qualsiasi delle condizioni equivalenti date nella proposizione 6.22, punto 3).

Dimostrazione. Dare una risoluzione come nell'enunciato che soddisfi 1) e 2) equivale a dare una risoluzione di Gorenstein χ su $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, mentre la condizione 3) equivale a richiedere che χ sia un oggetto di $\mathrm{GRis}_d(Y)$. Dunque la proposizione segue da 6.22 e 6.31. $\square$

Per gradi d bassi, è possibile, come vedremo, semplificare la categoria $\mathrm{PGor}_d(Y)$. Noi tratteremo i casi $d = 3, 4$, ma esiste anche una caratterizzazione analoga per il caso $d = 5$. Si veda [2]

6.5.1 Il grado 3

Nel caso $d = 3$ i dati di un oggetto di $\mathrm{PGor}_3(Y)$ sono un fascio localmente libero $\mathcal{E}$ di rango 2 ed una successione globalmente e su ogni fibra esatta

$$0 \longrightarrow \pi^* \det \mathcal{E}(-3) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$$

Vogliamo mostrare che queste caratteristiche possono essere ricondotte a particolari proprietà del morfismo γ definito nell'osservazione 6.14. Più precisamente diamo la seguente definizione

Definizione 6.47. *Sia* Y *uno schema noetheriano. Definiamo la categoria* $\mathrm{PGor}'_3(Y)$ *come segue. Gli oggetti sono coppie* $(\mathcal{E}, \gamma)$ *dove* $\mathcal{E}$ *è un fascio localmente libero di rango* 2 *e* γ *è un morfismo* $\gamma : \det \mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{S}^3 \mathcal{E}$ *tale che, per ogni* $y \in Y$, $\gamma \otimes k(y)$ *sia non nullo. Una freccia* $(\mathcal{E}, \gamma) \xrightarrow{\sigma} (\mathcal{E}', \gamma')$ *è un isomorfismo* $\sigma : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$ *tale che il diagramma*

$$\begin{tikzcd}
\det \mathcal{E}' \arrow[r, "\gamma'"] \arrow[d, "\det \sigma"'] & \mathrm{S}^3 \mathcal{E}' \arrow[d, "\mathrm{S}^3 \sigma"] \\
\det \mathcal{E} \arrow[r, "\gamma"'] & \mathrm{S}^3 \mathcal{E}
\end{tikzcd}$$

sia commutativo.

Lemma 6.48. *Sia* B *un anello noetheriano ed* $Y = \operatorname{Spec} B$. *Siano* n, k *due numeri naturali e supponiamo di avere un morfismo*

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_B} \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_B}(k)$$

definito da un polinomio omogeneo $g \in B[X_0, \dots, X_n]$ *di grado* k. *Allora sono equivalenti*

1. *per ogni* $y \in Y$ ϕ_y *è iniettivo*

2. *per ogni* $y \in Y$ $\phi_y \neq 0$

3. *l'ideale generato dai coefficienti di g in B coincide con B*

In tale situazione ϕ è iniettivo.

Dimostrazione. Se B è un campo abbiamo che, se ϕ non è iniettivo, $\pi_*\phi = 0$ e quindi $\phi = 0$ (infatti $g = 0$), viceversa se $\phi = 0$ allora chiaramente ϕ non è iniettivo. Tornando al caso generale, la precedente discussione mostra l'equivalenza fra 1) e 2). Osserviamo che ϕ_y è definito dalla sezione globale g_y di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{k(y)}}(k)$ ottenuta considerando g modulo il primo y. Indichiamo con I l'ideale generato dai coefficienti di g in B. Allora i primi $y \in Y$ tali che $g_y = 0$ sono esattamente i primi in $V(I)$ e quindi abbiamo l'ultima equivalenza.

L'ultima affermazione segue dalla proposizione 5.44. $\square$

Teorema 6.49. *Sia Y uno schema noetheriano. Allora il funtore*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{PGor}_3(Y) & \xrightarrow{\quad\Delta_3\quad} & \mathrm{PGor}'_3(Y) \\ ((\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha}, \gamma), \zeta) & \longrightarrow & (\mathcal{E}, \gamma \circ \zeta^{-1}) \\ (\sigma, \tau) & \longrightarrow & \sigma \end{array}$$

è una equivalenza di categorie.

Dimostrazione. È sufficiente mostrare che, dati un fascio localmente libero $\mathcal{E}$ di rango 2 su Y con fibrato proiettivo associato $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow Y$ e un morfismo $\gamma : \det \mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{S}^3\, \mathcal{E}$, il complesso

$$0 \longrightarrow \pi^* \det \mathcal{E}(-3) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$$

dove α è ottenuto da γ per aggiunzione di π_* e π^* e moltiplicazione per $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(-3)$, è su ogni fibra e globalmente esatto se e solo se $(\mathcal{E}, \gamma)$ è un oggetto di $\mathrm{PGor}'_3(Y)$. Infatti, se γ proviene da un oggetto di $\mathrm{PGor}_3(Y)$ per definizione la prima condizione è soddisfatta e quindi il funtore Δ_3 è ben posto. Viceversa se $(\mathcal{E}, \gamma)$ è un oggetto di $\mathrm{PGor}'_3(Y)$, $\chi = (\mathcal{E}, \det \mathcal{E}, \alpha)$ è una risoluzione di Gorenstein e (χ, id) un oggetto di $\mathrm{PGor}_3(Y)$ tale che $\Delta_3(\chi, \mathrm{id}) = (\mathcal{E}, \gamma)$, ossia Δ_3 è surgettivo. Infine chiaramente, per definizione delle frecce in $\mathrm{PGor}_3(Y)$, Δ_3 è pienamente fedele.

Per convenzione poniamo $\mathcal{E}_y = \mathcal{E} \otimes k(y)$, $\gamma_y = \gamma \otimes k(y)$. Indichiamo inoltre con $\phi : \pi^* \det \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(3)$ il morfismo ottenuto da α moltiplicando per $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(3)$. Usando il lemma 6.48, dobbiamo mostrare che

$$\forall y \in Y \;\; \gamma_y \neq 0 \iff \forall y \in Y \;\; \phi_y \text{ iniettivo}$$

Dato $y \in Y$, abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_Y(\det \mathcal{E}, \mathrm{S}^3\, \mathcal{E}) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(\pi^* \det \mathcal{E}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(3)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{k(y)}(\det \mathcal{E}_y, \mathrm{S}^3\, \mathcal{E}_y) & \xrightarrow[\simeq]{} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{P}_y}(\pi_y^* \det \mathcal{E}_y, \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}_y)}(3)) \end{array}$$

dove le mappe verticali sono le restrizioni sulla fibra e quelle orizzontali gli isomorfismi indotti per aggiunzione. In particolare otteniamo che γ_y corrisponde per aggiunzione a ϕ_y e quindi $\gamma_y \neq 0$ se e solo se $\phi_y \neq 0$ se e solo se, per quanto visto in 6.48, ϕ_y iniettivo. $\square$

Osservazione 6.50. Il teorema appena dimostrato è un caso particolare di un'equivalenza più generale: in [7] e in [8], sotto opportune ipotesi sullo schema Y, viene mostrata l'esistenza di una corrispondenza biunivoca fra le coppie $(\mathcal{E},\gamma)$, dove $\mathcal{E}$ è un fascio localmente libero di rango 2 e γ è un morfismo $\gamma : \det\mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{S}^3\,\mathcal{E}$ e i rivestimenti $\rho : X \longrightarrow Y$ di grado 3. Tale corrispondenza estende quella da noi stabilita e, più in dettaglio, risulta che se $\rho : X \longrightarrow Y$ è il rivestimento associato a $(\mathcal{E},\gamma)$ allora, nei punti $y \in Y$ tali che $\gamma \otimes k(y) = 0$, la fibra X_y è lo spettro di $k(y)[X,Y]/(X^2,Y^2,XY)$ che, come abbiamo fatto notare ad inizio capitolo, è a meno di isomorfismo l'unica $k(y)$-algebra non di Gorenstein di grado 3. Questa caratterizzazione dei rivestimenti di grado 3 è stata dimostrata utilizzando tecniche differenti da quelle usate nelle precedenti sezioni (che in effetti perdono di senso non appena manca l'ipotesi di Gorenstein sulle fibre) e in parte simili a quelle utilizzate nel primo capitolo per caratterizzare i rivestimenti di grado 2 (1.16).

Mostriamo adesso come dedurre dall'equivalenza 6.49 la struttura locale dei rivestimenti di Gorenstein di grado 3 di uno schema noetheriano.

Corollario 6.51. *Sia B un anello noetheriano ed $Y = \operatorname{Spec} B$. Allora, a meno di isomorfismo, i rivestimenti di Gorenstein $\rho : X \longrightarrow Y$ di grado 3 tali che $\operatorname{coker}\rho^{\#}$ è libero sono della forma $\operatorname{Proj} B[X,Y]/(g)$, dove g è un polinomio omogeneo di grado 3 i cui coefficienti generano B. In particolare ogni rivestimento di Gorenstein di grado 3 su uno schema noetheriano Y è localmente di tale forma.*

Dimostrazione. Poniamo $R = B[X,Y]$. Se ρ è un rivestimento come nell'enunciato allora la risoluzione associata è della forma

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_B}(-3) \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_B}$$

Applicando Γ_* si ottiene che il fascio di ideali associato è la fascificazione di un ideale (g) di R, con g omogeneo di grado 3. Allo stesso modo si trova che g è il polinomio che definisce ϕ tensorizzato per $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_B}(3)$. Da 6.48 otteniamo la condizione sui coefficienti di g. Viceversa, dato g, ponendo $\mathcal{E} = \mathcal{O}_Y^2$ e tenendo presente che $\mathrm{S}\,\mathcal{E} \simeq \widetilde{R}$, possiamo definire il morfismo

$$\begin{array}{ccc} \det\mathcal{E} & \xrightarrow{\gamma} & \mathrm{S}^3\,\mathcal{O}_Y^2 \\ 1 & \longrightarrow & g \end{array}$$

Per costruzione $(\mathcal{O}_Y^2,\gamma)$ è un oggetto di $\mathrm{PGor}'_3(Y)$ che quindi per le equivalenze stabilite induce un rivestimento ρ. In particolare, per l'equivalenza fra $\mathrm{PGor}_3(Y)$ e $\mathrm{GRiv}_3(Y)$ possiamo intanto concludere che $(\operatorname{coker}\rho^{\#})^{\vee} \simeq \mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_Y^2$, ossia $\operatorname{coker}\rho^{\#}$ è libero. Per individuare l'ideale associato a χ, possiamo ragionare come prima utilizzando Γ_* e troviamo che esso è la fascificazione di $(g) \subseteq R$, come voluto. $\square$

In particolare risultano caratterizzati i rivestimenti di Gorenstein di grado 3 su anelli locali. Infatti se $Y = \operatorname{Spec} B$, con B locale, ogni ricoprimento aperto di Y contiene Y e quindi ogni fascio localmente libero è libero.

In generale se ρ è un rivestimento di uno spettro $Y = \operatorname{Spec} B$, con $\operatorname{coker} \rho^{\#}$ libero e considerato il polinomio g come nell'enunciato 6.51, allora è facile caratterizzare gli automorfismi di ρ. Più in dettaglio abbiamo che

$$\operatorname{Aut}(\rho) \simeq \{f \in \mathrm{GL}_2(B) \mid g \circ f = (\det f)g\}$$

Infatti il morfismo associato a ρ è dato da $\mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathrm{S}^3\,\mathcal{O}_Y^2, 1 \longrightarrow g$ ed i suoi automorfismi sono isomorfismi $f : \mathcal{O}_Y^2 \longrightarrow \mathcal{O}_Y^2$ tali che $(\mathrm{S}^3 f)(g) = g \circ f = (\det f)g$.

6.5.2 Il grado 4

Nel caso $d = 4$ i dati di un oggetto di $\mathrm{PGor}_4(Y)$ sono due fasci localmente liberi $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ su Y di rango rispettivamente 3, 2 ed una successione su ogni fibra e globalmente esatta

$$0 \longrightarrow \pi^* \det \mathcal{E}(-4) \longrightarrow \pi^* \mathcal{F}(-2) \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$$

Anche in questo caso, sebbene non in modo evidente come nel caso $d = 3$, si possono ricondurre tali proprietà a quelle del morfismo γ (attraverso α_1) definito nell'osservazione 6.14. Diamo quindi la seguente definizione

Definizione 6.52. *Dato uno schema noetheriano Y definiamo la categoria $\mathrm{PGor}'_4(Y)$ come segue.*

Gli oggetti sono ennuple $(\mathcal{E}, \mathcal{F}, \gamma, \zeta)$ dove $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ sono fasci localmente liberi su Y di rango rispettivamente 3, 2, γ è un morfismo

$$\gamma : \mathcal{F} \longrightarrow \mathrm{S}^2\,\mathcal{E}$$

ed infine ζ è un isomorfismo

$$\zeta : \det \mathcal{F} \longrightarrow \det \mathcal{E}$$

Richiediamo inoltre che il morfismo

$$\alpha : \pi^* \mathcal{F}(-2) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$$

indotto da γ per aggiunzione di π_*, π^* e moltiplicazione di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(-2)$ definisca un sottoschema chiuso $X \xrightarrow{i} \mathbb{P}(\mathcal{E})$ tale che

$$\dim X_y = 0 \quad \forall y \in Y$$

Una freccia $(\sigma, \tau) : (\mathcal{E}, \mathcal{F}, \gamma, \zeta) \longrightarrow (\mathcal{E}', \mathcal{F}', \gamma', \zeta')$ è una coppia di isomorfismi $\sigma : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$, $\tau : \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F}$ tali che i seguenti diagrammi siano commutativi

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}' \arrow[r, "\gamma'"] \arrow[d, "\tau"'] & \mathrm{S}^2\,\mathcal{E}' \arrow[d, "\mathrm{S}^2\,\sigma"] \\ \mathcal{F} \arrow[r, "\gamma"'] & \mathrm{S}^2\,\mathcal{E} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \det \mathcal{F}' \arrow[r, "\zeta'"] \arrow[d, "\det \tau"'] & \det \mathcal{E}' \arrow[d, "\det \sigma"] \\ \det \mathcal{F} \arrow[r, "\zeta"'] & \det \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

Per caratterizzare i rivestimenti di Gorenstein di grado 4 attraverso la categoria appena definita, introduciamo il complesso di Koszul per gli schemi.

Complesso di Koszul. Sia X uno schema, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-modulo localmente libero di rango r e $\delta : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{O}_X$ un morfismo. Se $\operatorname{Spec} B \simeq U \subseteq X$ è un aperto affine di X su cui $\mathcal{F}$ è libero, allora δ corrisponde ad un morfismo da un B-modulo libero di rango r a B e quindi la fascificazione del complesso di Koszul di tale morfismo da un complesso

$$0 \longrightarrow \Lambda^r \mathcal{F}_{|U} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \Lambda^2 \mathcal{F}_{|U} \longrightarrow \mathcal{F}_{|U} \xrightarrow{\delta_{|U}} \mathcal{O}_U$$

Dato che il complesso di Koszul commuta con le localizzazioni abbiamo che al variare degli aperti affini $U \subseteq X$ che banalizzano $\mathcal{F}$ il complesso scritto sopra commuta con le restrizione e quindi definisce un complesso

$$0 \longrightarrow \Lambda^r \mathcal{F} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \Lambda^2 \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\delta} \mathcal{O}_X \tag{6.16}$$

su X.

Definizione 6.53. *Sia X uno schema, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-modulo localmente libero di rango r e $\delta : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{O}_X$ un morfismo. Il complesso 6.16 viene detto il complesso di Koszul di δ.*

Proposizione 6.54. *Sia X uno schema di Cohen-Macaulay, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-modulo localmente libero di rango r e $\delta : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{O}_X$ un morfismo. Sia inoltre Y il sottoschema chiuso definito da $\operatorname{Im} \delta$. Allora Y ha codimensione pura r se e solo se il complesso di Kozsul di δ è esatto. Inoltre in tal caso Y è uno schema di Cohen-Macaulay.*

Dimostrazione. Supponiamo che Y abbia codimensione pura r e sia $p \in X$. Se $p \notin Y$ allora la localizzazione del complesso di Koszul di δ in p è il complesso di Koszul di un morfismo suriettivo $\mathcal{O}_{X,p}^r \longrightarrow \mathcal{O}_{X,p}$ e quindi in particolare è esatto. Supponiamo quindi $p \in Y$. Possiamo restringerci ad un aperto affine $U \subseteq X$ che contenga p e banalizzi $\mathcal{F}$. Infatti in tal caso la codimensione di Y rimane invariata. Supponiamo quindi $X \simeq \operatorname{Spec} A$, con A un anello di Cohen-Macaulay e $\mathcal{F} \simeq \widetilde{A^r}$.$\delta$ corrisponde ad un morfismo $A^r \xrightarrow{\phi} A$ ed indichiamo con I l'immagine di ϕ. Dato che I definisce Y, abbiamo che $\operatorname{depth}(I, R) = \operatorname{ht} I = r$ e quindi che il complesso di Koszul di ϕ è esatto. Inoltre, poichè I è generato da r elementi di R abbiamo che A/I è un anello di Cohen Macaulay e quindi tale è $Y \simeq \operatorname{Spec} A/I$.

Supponiamo adesso che il complesso di Koszul sia esatto e sia p il punto generico di una componente irriducibile di Y. Possiamo restringerci ad un aperto affine di X contenente p ed in cui $\mathcal{F}$ è libero. Supponiamo quindi $X \simeq \operatorname{Spec} A$ ed indichiamo come prima con I l'ideale di Y. Poichè il complesso di Koszul è esatto avremo che $\operatorname{depth}(I, R) = r$. Dato che I è un ideale generato da r elementi di A e quindi, in particolare, di altezza r e p è un primo minimale fra quelli contenenti I, possiamo concludere che $\operatorname{ht} p = r$, ossia che la componente irriducibile di Y con punto generico p ha codimensione r. □

Osservazione 6.55. Sia $X = \mathbb{P}^n_B$, $\mathcal{F}$ un fascio localmente libero di rango r che sia somma di fasci invertibili della forma $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_B}(q)$, per qualche q e $\delta : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{O}_X$ un morfismo. Allora $\Gamma_*(\delta) = \phi : F \longrightarrow R$, dove R è l'anello dei polinomi di $\mathbb{P}^n_B$ ed

F è un modulo libero graduato. In particolare possiamo considerare il complesso di Koszul K di ϕ che è un complesso con mappe graduate. Preso un elemento $x \in R$ omogeneo di grado 1 si può verificare che $K_{(x)}$ è il complesso di Koszul di $\phi_{(x)}$. Dato che $\delta_{(x)}$ é la fascificazione di $\phi_{(x)}$ otteniamo che il complesso di Koszul di δ è la fascificazione di K.

Notazione. Sia Y uno schema noetheriano e $\chi = (\mathcal{E}, \mathcal{F}, \gamma, \zeta)$ un oggetto di $\mathrm{PGor}_4'(Y)$. Indicheremo con α, i, X gli oggetti introdotti nella definizione 6.52. Tenendo conto che esiste un isomorfismo canonico $\det \pi^* \mathcal{F}(-2) \simeq \pi^* \det \mathcal{F}(-4)$, il complesso di Koszul di α ha la forma

$$\mathcal{K}_* : 0 \longrightarrow \pi^* \det \mathcal{F}(-4) \xrightarrow{\beta} \pi^* \mathcal{F}(-2) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$$

Considereremo β associato all'oggetto χ. Come fatto per le risoluzioni di Gorenstein, useremo la notazione estesa $\chi = (\mathcal{E}, \mathcal{F}, \gamma, \zeta, \alpha, \beta, i, X, \mathcal{K}_*)$.

Teorema 6.56. *Sia Y uno schema noetheriano. Allora l'associazione*

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{PGor}_4'(Y) & \xrightarrow{\quad\Delta_4\quad} & \mathrm{PGor}_4(Y) \\
(\mathcal{E}, \mathcal{F}, \gamma, \zeta, \alpha, \beta) & \longrightarrow & ((\mathcal{E}, (\det \mathcal{F}, \mathcal{F}), (\beta, \alpha)), \zeta) \\
(\sigma, \tau) & \longrightarrow & (\sigma, (\det \tau, \tau))
\end{array}$$

definisce un'equivalenza di categorie.

Dimostrazione. Iniziamo col mostrare che Δ_4 è ben posto. Sugli oggetti questo è equivalente a mostrare che, dato un oggetto $\chi = (\mathcal{E}, \mathcal{F}, \gamma, \zeta, \alpha, X, \mathcal{K}_*)$ di $\mathrm{PGor}_4'(Y)$, il complesso di Koszul $\mathcal{K}_*$ è su ogni fibra e globalmente esatto. Per 5.44 dobbiamo verificare solo l'esattezza sulle fibre. Poichè il complesso di Koszul commuta con il cambiamento di base, fissato $y \in Y$, abbiamo che $\mathcal{K}_{*y}$ è il complesso di Koszul di α_y. Ma α_y definisce X_y e per ipotesi $\dim X_y = 0$, dunque X_y ha codimensione pura 2 in $\mathbb{P}(\mathcal{E}_y) \simeq \mathbb{P}^2_{k(y)}$ e quindi, per 6.54, $\mathcal{K}_{*y}$ è esatto. Infine Δ_4 è ben posto sulle frecce poichè la costruzione del complesso di Koszul è funtoriale.

Poichè Δ_4 è pienamente fedele per costruzione rimane da verificare che è essenzialmente surgettivo. Consideriamo quindi un oggetto (χ, ζ) di $\mathrm{PGor}_4(Y)$, con $\chi = (\mathcal{E}, \underline{\mathcal{M}}, \underline{\alpha}, X, \gamma)$. Ragionando come sopra, poichè $\dim X_y = 0$, il complesso di Koszul $\mathcal{K}_*$ di α_1 è esatto sulle fibre e quindi globalmente. Quindi $\mathcal{K}_*$ definisce un oggetto $\chi' = (\mathcal{E}, (\det \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_1), \underline{\alpha'})$ di $\mathrm{GRis}_4(Y)$, con $\alpha_1' = \alpha_1$. In particolare χ' e χ hanno lo stesso ideale associato e quindi esiste un isomorfismo $\chi' \xrightarrow{\xi} \chi$ come risoluzioni di Gorenstein. D'altra parte è ovvio verificare che, in tale situazione, esiste un'unico isomorfismo $\zeta' : \det \mathcal{M}_1 \longrightarrow \det \mathcal{E}$ tale che $(\chi', \zeta') \xrightarrow{\xi} (\chi, \zeta)$ sia un isomorfismo in $\mathrm{PGor}_4(Y)$. Dato che chiaramente $\hat{\chi} = (\mathcal{E}, \mathcal{M}_1, \gamma, \zeta')$ definisce un elemento di $\mathrm{PGor}_4'(Y)$ e $\Delta_4(\hat{\chi}) = \chi$ abbiamo finito. □

Anche in questo caso risulta determinata la struttura locale dei rivestimenti di grado 4.

Proposizione 6.57. *Sia Y uno schema noetheriano. Se $\rho : X \longrightarrow Y$ è un rivestimento di Gorenstein di grado 4 e $y \in Y$, esiste un aperto affine $U \simeq \mathrm{Spec}\, B$*

di Y e contenente y, tale che $\rho_{|\rho^{-1}(U)}$ è isomorfo a $\operatorname{Proj} B[X,Y,Z]/(f,g) \longrightarrow U$*, dove f,g sono polinomi omogenei di grado 2 tali che, per ogni primo q di B, f,g sono una successione regolare o, equivalentemente, sono primi fra loro in $k(q)[X,Y,Z]$. Viceversa dati f,g con tali proprietà, il morfismo*

$$\operatorname{Proj} B[X,Y,Z]/(f,g) \longrightarrow \operatorname{Spec} B$$

è un rivestimento di Gorenstein di grado 4.

Dimostrazione. ρ è indotto da un oggetto $(\mathcal{E},\mathcal{F},\gamma,\zeta,\alpha)$ di $\mathrm{PGor}'_4(Y)$ e possiamo supporre che $Y \simeq \operatorname{Spec} B$, $\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_Y^3$, $\mathcal{F} \simeq \mathcal{O}_Y^2$. Allora γ risulta definita da due polinomi omogenei di grado 2 $f,g \in B[X,Y,Z]$. In modo analogo a quanto fatto nel caso $d = 3$ usando Γ_* otteniamo che l'immersione di X in $\mathbb{P}^2_B$ è definita dall'ideale omogeno (f,g) e che, per ogni primo q di B, l'ideale generato dalle immagini di f,g in $k(q)[X,Y,Z]$ definisce X_y. Poichè il complesso di Koszul di α_q è esatto, otteniamo che f,g è una successione regolare. Dato che $k(q)[X,Y,Z]$ è a fattorizzazione unica questo è equivalente a richiedere che f,g non abbiano fattori comuni.

Viceversa, posto $Y = \operatorname{Spec} B$, scegliamo $\mathcal{E} = \mathcal{O}_Y^3$, $\mathcal{F} = \mathcal{O}_Y^2$, ζ un identificazione qualsiasi fra $\det \mathcal{F} \simeq \mathcal{O}_Y \simeq \det \mathcal{E}$ e γ data da

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y^2 & \xrightarrow{\gamma} & \mathrm{S}^2\, \mathcal{O}_Y^3 \\ e_1, e_2 & \longrightarrow & f,g \end{array}$$

Dalla discussione fatta sopra segue che $\chi = (\mathcal{E},\mathcal{F},\gamma,\zeta)$ è un oggetto di $\mathrm{PGor}'_4(Y)$ che induce il rivestimento $\operatorname{Proj} B[X,Y,Z]/(f,g) \longrightarrow \operatorname{Spec} B$, come voluto. $\square$

Bibliografia

[1] G. Casnati and T. Ekedahl, *Covers of algebraic varieties II. Covers of degree 5 and construction of surfaces*, J. Algebraic Geometry, 5 (1996) 439-460.

[2] G. Casnati, *Covers of algebraic varieties I. A general structure theorem, covers of degree 3,4 and Enriques surfaces*, J. Algebraic Geometry, 5 (1996) 461-477.

[Be] K. Behnke *On projective resolution of Frobenius algebras and Gorenstein rings*, Math. Ann. 257 (1981) 219-238.

[Ha] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer 1977.

[3] Nitin Nitsure, *Construction of Hilbert and Quot schemes*, B. Fantechi, L. Goottsche, L. Illusie, S. Kleiman, N. Nitsure, A. Vistoli, Fundamental Algebraic Geometry: Grothendieck's FGA explained, Mathematical Surveys and Monographs 123 (2006), A.M.S., Providence RI, 352 p.

[4] W. Bruns, J. Herzog, *Cohen-Macaulay Ring*, Cambridge, England: Cambridge University Press, 1998.

[Kp] I. Kaplansky, *Linear algebra and geometry. A second course* Allyn and Bacon, Boston, MA, 1969.

[Sch] F. O. Schreyer, *Syzygies of canonical curves and special linear series*, Math. Ann. 275 (1986) 105-137.

[Kl] S. Kleiman, *Relative duality for quasi-coherent sheaves*, Compositio Math. 41 (1980) 39-60

[5] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Springer

[6] P.J. Hilton U. Stammbach, *A course in Homological Algebra*, Springer

[7] R. Pardini *Triple covers in positive characteristic*, Ark. Mat. 27 (1989), no. 2, 319–341

[8] R. Miranda *Triple Covers in Algebraic Geometry*, American Journal of Mathematics, Vol. 107, No. 5 (Oct., 1985), pp. 1123-1158