

Algoritmi e Principi dell'Informatica

Fabio Vokrri

17 maggio 2022

Indice

I	Informatica Teorica	5
1	Linguaggi Formali	7
1.1	Alfabeti e Stringhe	7
1.2	Operatori di Kleene	7
1.3	Linguaggi	8
2	Automi Deterministici	9
2.1	Automi a Stati Finiti	10
2.1.1	Trasduttore a Stati Finiti	10
2.1.2	Operazioni sugli Automi a Stati Finiti	11
2.1.3	Pumping Lemma	11
2.2	Automi a Pila	12
2.2.1	Trasduttori a Pila	14
2.2.2	Operazioni sugli Automi a Pila	15
2.3	Macchine di Turing	15
2.3.1	Macchine di Turing come Accettatori	17
2.3.2	Macchine di Turing come Trasduttori	17
2.3.3	Altri Modelli di Macchine di Turing	18
3	Automi non Deterministici	19
3.1	Automi a Stati Finiti non deterministici	19
3.2	Automi a Pila non deterministici	20
3.3	Macchine di Turing non deterministiche	20
4	Grammatiche	21
4.1	Introduzione	21
4.2	Classificazione	22
4.3	Grammatiche e Automi	22
4.4	Espressioni Regolari	23
4.5	Riepilogo	24
5	Computabilità	25
5.1	Formalizzazione dei Problemi	25
5.2	Tesi di Church	25
5.3	Enumerazione delle TM	26
5.4	Macchine di Turing Universali	27
5.5	Problemi Algoritmicamente Irrisolvibili	28
5.6	Problemi di Decisione	29
5.7	Teoremi di Kleene e Rice	30
6	Logica Proposizionale	33
II	Algoritmi e Strutture Dati	35
7	Complessità del Calcolo	37
7.1	Analisi di complessità	37

7.2	Comportamento asintotico	39
7.3	Accelerazione Lineare	40
7.4	Macchina RAM	40
7.5	Correlazione temporale fra TM e RAM	42
8	Algoritmi	43
8.1	Pseudocodifica	43
8.2	Insertion Sort	44
8.3	Merge Sort	45
8.4	Risoluzione Ricorrenze	47
8.4.1	Metodo di Sostituzione	48
8.4.2	Metodo dell'Albero di Ricorsione	49
8.4.3	Metodo dell'Esperto	50
8.5	Heap Sort	51

Parte I

Informatica Teorica

Capitolo 1

Linguaggi Formali

1.1 Alfabeti e Stringhe

Diamo alcune definizioni elementari:

Definizione 1.1.1 (Alfabeto). *Un alfabeto (o vocabolario) V è un insieme finito di oggetti elementari detti simboli (o caratteri)*

Definizione 1.1.2 (Stringa). *Una stringa x appartenente ad un alfabeto V è una sequenza finita e ordinata di caratteri appartenenti a tale alfabeto.*

Data una stringa x , la notazione $|x|$ indica la lunghezza della stringa x , ovvero il numero di caratteri di cui è composta la stringa (la cardinalità del suo dominio V). Per convenzione la stringa vuota, ovvero non composta da nessun carattere, è indicata con la lettera ε : la stringa vuota ε ha, quindi, lunghezza zero.

Per poter confrontare due stringhe è necessario verificare che:

- $|x| = |y|$
- $x_i = y_i \forall i = 0, 1, 2, \dots, |x|$

La concatenazione (o prodotto) $x.y$ di due stringhe x e y è una stringa composta da tutti i caratteri di x seguiti da tutti i caratteri di y . Inoltre, la concatenazione $x.\varepsilon$ produce come risultato la stringa x .

Data una stringa s , una stringa x è sottostringa (o fattore) di s se esistono due stringhe y e z , tali che $s = yxz$. Inoltre:

- se $y = \varepsilon$, x è detta prefisso.
- se $z = \varepsilon$, x è detta suffisso.
- se $z = y = \varepsilon$, $x = s$

Data una stringa x , l'espressione x^i indica la concatenazione della stringa x con sè stessa per $i - 1$ volte, ovvero $x^0 = \varepsilon$ e $x^{i+1} = x \cdot x^i$.

1.2 Operatori di Kleene

Per poter proseguire con il trattato, è prima necessario introdurre alcuni concetti matematici fondamentali. Si danno quindi le seguenti definizioni:

Definizione 1.2.1 (Semigrupp). *Un semigrupp è una coppia $\langle S, \circ \rangle$, dove:*

- S è un insieme chiuso rispetto a \circ ; per cui, se si prendono due qualsiasi elementi A e B di tale insieme, l'operazione $A \circ B$ produce come risultato un elemento appartenente ad S ;
- \circ è un'operazione associativa su S .

Nel contesto dei linguaggi, l'operatore \circ rappresenta la concatenazione di stringhe.

Definizione 1.2.2 (Monoide). *Un monoide è un semigrupp in cui è definito un elemento unitario $u \in S$, tale che $\forall x, \exists u(x \circ u = x)$.*

Nel contesto dei linguaggi, l'elemento unitario u rappresenta la stringa vuota ε : infatti, la concatenazione di una generica stringa x con la stringa vuota ε produce come risultato nuovamente la stringa originaria x .

Definizione 1.2.3 (Gruppo). *Un gruppo è un monoide in cui è definito un elemento inverso x^{-1} unico per ogni elemento x dell'insieme S , tale che $\forall x(x \circ x^{-1} = u)$.*

Date le definizioni 1.2.1, 1.2.2 e 1.2.3, si possono definire gli operatori di Kleene:

Definizione 1.2.4 (Più di Kleene). *Sia $\langle S, \circ \rangle$ un semigrupp. Per ogni $X \subseteq S$, S^+ indica il sottoinsieme di S generato da X , ovvero l'insieme di tutti gli elementi $s \in S$ tale per cui $s = x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n$ per qualche $n \geq 1$, con $x_i \in X$ (stringhe non vuote).*

Nel contesto dei linguaggi, l'operatore $+$ di Kleene rappresenta l'insieme infinito di stringhe non vuote, che si possono generare a partire dall'insieme S di simboli, a cui si applica tale operatore.

Definizione 1.2.5 (Stella di Kleene). *Se $\langle S, \circ, u \rangle$ è un monoide, allora $X^* = X^+ \cup \{u\}$ è un monoide (più precisamente un sottomonoide) di S ed è detto monoide libero generato da X .*

Nel contesto dei linguaggi, la stella di Kleene rappresenta l'insieme infinito di stringhe, inclusa la stringa vuota ε , che si possono generare a partire dall'insieme S di simboli, a cui si applica tale operatore. Quindi, $X^* = X^+ \cup \{\varepsilon\}$.

Ad esempio, dato l'insieme di simboli $S = \{a, b, c\}$, $S^+ = \{a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, aaa, \dots\}$ e $S^* = \{\varepsilon, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, aaa, \dots\}$.

1.3 Linguaggi

Data la definizione della stella di Kleene, si può ora dare la definizione di linguaggio:

Definizione 1.3.1 (Linguaggio). *Un linguaggio L su un alfabeto V è un sottoinsieme di V^* .*

Dato un insieme di simboli, si possono generare infiniti linguaggi.

Poichè i linguaggi sono un inisieme di stringhe, valgono tutte le operazioni insiemistiche come:

- Unione ($L_1 \cup L_2$): l'insieme di tutte le stringhe che appartengono o ad L_1 o ad L_2 o ad entrambi i linguaggi;
- Intersezione ($L_1 \cap L_2$): l'insieme di tutte le stringhe che appartengono sia ad L_1 che ad L_2 ;
- Differenza ($L_1 \setminus L_2$): l'insieme di tutte le stringhe che appartengono ad L_1 ma non ad L_2 ;
- Complementare ($L^C = A^* \setminus L$): l'insieme di tutte le stringhe che non appartengono al linguaggio L ;
- Concatenazione ($L_1.L_2$): l'insieme di tutte le stringhe che si ottengono concatenando ad ogni stringa di L_1 ogni stringa di L_2 ; formalmente $L_1.L_2 = \{xy : x \in L_1, y \in L_2\}$;
- Potenza n -esima (L^n): l'insieme di tutte le stringhe che si ottengono concatenando L con sè stesso n volte, utilizzando le regole della concatenazione precedentemente definite;
- Chiusura di Kleene $\left(L^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n \text{ e } L^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} L^n \right)$

Le operazioni su di un determinato linguaggio crea nuove classi di linguaggi con caratteristiche proprie, talvolta interessanti. Un linguaggio diventa di interesse nel momento in cui le stringhe di cui è composto possono essere utilizzate per veicolare informazioni, problemi, soluzioni o per rappresentare programmi, documenti, elementi multimediali o, nel caso più rilevante, per rappresentare computazioni.

Capitolo 2

Automi Deterministici

In questo capitolo verrà introdotto il concetto di automa e se ne analizzeranno le varie classi esistenti, differenziandole in base alla loro espressività nella rappresentazione di linguaggi via via sempre più complessi. Si inizierà con lo studio degli automi deterministici per passare gradualmente a quelli non deterministici, analizzandone le differenze e le caratteristiche più importanti. Di seguito sono date le definizioni di automa, accettatore e trasduttore:

Definizione 2.0.1. *Gli automi sono sistemi dinamici discreti e tempo invarianti. Lo stato di un automa viene modificato a fronte di un simbolo di ingresso. Ogni automa presenta uno stato iniziale, da cui ha inizio la sua esecuzione, e uno o più stati finali in cui la sua esecuzione ha termine.*

Definizione 2.0.2. *Gli accettatori sono automi che indicano se una determinata sequenza di simboli appartiene ad un linguaggio.*

Definizione 2.0.3. *I trasduttori sono automi che mappano una determinata sequenza di simboli appartenenti ad un linguaggio in una sequenza di simboli appartenenti ad un linguaggio differente. Un trasduttore lavora quindi su due nastri infiniti: il primo nastro in ingresso di sola lettura, il secondo nastro in uscita di sola scrittura.*

Un automa è rappresentato graficamente come un insieme di circonferenze denominate (che rappresentano gli stati dell'automato), ognuna delle quali è connessa ad altri stati tramite frecce. Su tali frecce è segnata la condizione da soddisfare per intraprendere quel passaggio di stato e come viene modificato lo stato durante il passaggio. Lo stato iniziale si riconosce per via di una freccia entrante nel nodo, mentre gli stati finali sono rappresentati da circonferenze con bordo doppio.

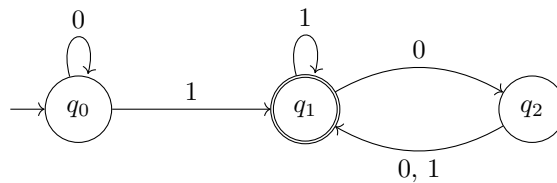


Figura 2.1: Esempio di rappresentazione di un automa a stati finiti

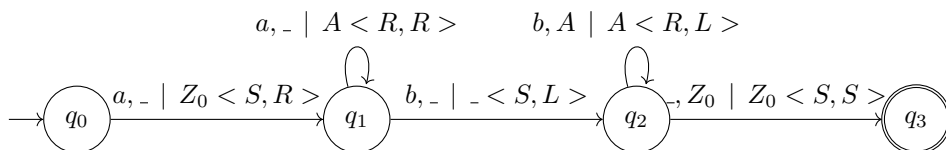


Figura 2.2: Esempio di rappresentazione di una macchina di Turing

2.1 Automi a Stati Finiti

Gli FSA (Finite State Automaton) sono automi che presentano un numero finito di stati . Formalmente:

Definizione 2.1.1. *Un FSA è una tupla di 5 elementi $\langle Q, A, \delta, q_0, F \rangle$, dove:*

- Q è un insieme finito di stati;
- $A := \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$ è l'alfabeto di ingresso;
- $\delta : Q \times A \rightarrow Q$: è la funzione di transizione (eventualmente parziale);
- $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale;
- $F \subseteq Q$ è un insieme di stati finali

Quando l'automa riceve in ingresso un simbolo del proprio alfabeto, cambia lo stato in cui si trova. Il passaggio da uno stato a quello successivo avviene attraverso la funzione di transizione δ ; tale funzione indica, a partire da un determinato stato, in quale stato si troverà l'automa dopo la ricezione di un simbolo in ingresso.

Attenzione! La funzione di transizione δ non sempre è totale: ciò significa che in alcuni automi non tutte le transizioni da uno stato a quello successivo sono definite. Gli automi che presentano una funzione di transizione completa sono detti completi.

Data la funzione di transizione δ è possibile definire una sequenza di mosse δ^* , che opera su una stringa anzichè su un unico simbolo in ingresso. Formalmente:

Definizione 2.1.2. *La chiusura riflessiva e transitiva della funzione di trasferimento, indicata con $\delta^* : Q \times A^* \rightarrow Q$, è definita in maniera induttiva come segue:*

- $\delta^*(q, \varepsilon) = q$;
- $\delta^*(q, yi) = \delta(\delta^*(q, y), i)$

$$\forall x : x \in L \Leftrightarrow \delta^*(q_0, x) \in F.$$

In altri termini, se l'automa ricevesse in ingresso la stringa vuota ε , allora rimarrebbe nello stato q in cui si trova, mentre nel caso in cui ricevesse una sequenza di caratteri yi lo stato che l'automa raggiungerebbe sarebbe quello che raggiungerebbe con ingresso i , a partire dallo stato che raggiungerebbe da q con la stringa y .

Tramite questa definizione, si può affermare che una generica stringa x appartiene al linguaggio L se e solo se l'automa si trova in uno stato finale a fronte della lettura della stringa in ingresso: in tal caso si dice che l'automa accetta o riconosce la stringa di ingresso. Per questo motivo, gli FSA sono detti essere accettatori, in quanto verificano se una determinata stringa appartiene o meno ad un dato linguaggio.

2.1.1 Trasduttore a Stati Finiti

Gli FST (Finite State Transducer) sono trasduttori che presentano un numero finito di stati . Formalmente:

Definizione 2.1.3. *Un FST è una tupla di 7 elementi $\langle Q, I, \delta, q_0, F, O, \eta \rangle$, dove:*

- Q è un insieme finito di stati;
- I è l'alfabeto di ingresso;
- $\delta : Q \times I \rightarrow Q$ è la funzione di transizione (eventualmente parziale);
- $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale;
- $F \subseteq Q$ è un insieme di stati finali
- O è l'alfabeto di uscita;
- $\eta : Q \times I \rightarrow O^*$ è la funzione di uscita (eventualmente parziale).

Quando l'automa riceve in ingresso un simbolo, modifica il proprio stato e mostra in uscita una sequenza di uno o più simboli. Il passaggio da uno stato a quello successivo avviene attraverso la funzione di transizione δ , mentre l'operazione di uscita avviene tramite la funzione di uscita η .

Attenzione! La funzione di uscita η non sempre è totale: ciò significa che in alcuni automi è possibile che non ci sia nessuna associazione fra un simbolo del linguaggio in ingresso e un simbolo del linguaggio di uscita.

Data la funzione di uscita η , è possibile definire una sequenza di uscita η^* , che opera su una stringa anziché su un unico simbolo in ingresso. Formalmente:

Definizione 2.1.4. La chiusura riflessiva e transitiva della funzione di uscita, indicata con $\eta^* : Q \times I^* \rightarrow O^*$, è definita in maniera induttiva come segue:

- $\eta^*(q, \varepsilon) = \varepsilon$;
- $\eta^*(q, yi) = \eta^*(q, y) \cdot \eta(\delta^*(q, y), i)$

$\forall x : \tau(x) = \eta^*(q_0, x) \Leftrightarrow \delta^*(q_0, x) \in F$ in cui τ rappresenta la funzione di traduzione.

In altri termini, se l'automa ricevesse in ingresso la stringa vuota ε , allora rimarrebbe nello stato q in cui si trova e non scriverebbe nessun simbolo sul nastro di uscita, mentre, nel caso in cui ricevesse in ingresso una sequenza di caratteri yi , allora l'automa produrrebbe in uscita quello che produrrebbe da q leggendo y seguito da ciò che produrrebbe dallo stato che raggiungerebbe da q leggendo y , avendo i come ingresso. Quindi la funzione η^* ha il compito di concatenare il simbolo (o la stringa) che si ottiene a fronte della prima transizione con i simboli (o le stringhe) che si ottengono nei successivi passaggi di stato.

Tramite questa definizione, si può affermare che la traduzione di una stringa in ingresso x è accettata solo se e solo se l'automa si trova in uno stato finale a fronte della lettura di x .

2.1.2 Operazioni sugli Automi a Stati Finiti

Gli Automi a Stati Finiti sono chiusi rispetto alle seguenti operazioni:

- Intersezione. Formalmente, dati:

- $A^1 = \langle Q^1, I, \delta^1, q_0^1, F^1 \rangle$
- $A^2 = \langle Q^2, I, \delta^2, q_0^2, F^2 \rangle$

allora $\langle A^1, A^2 \rangle = \langle Q^1 \times Q^2, I, \delta, \langle q_0^1, q_0^2 \rangle, F^1 \times F^2 \rangle$ e si può dimostrare che il linguaggio $L(\langle A^1, A^2 \rangle) = L(A^1) \cap L(A^2)$

- Unione. Formalmente, dati:

- $A^1 = \langle Q^1, I, \delta^1, q_0^1, F^1 \rangle$
- $A^2 = \langle Q^2, I, \delta^2, q_0^2, F^2 \rangle$

Allora $\langle A^1, A^2 \rangle = \langle Q^1 \times Q^2, I, \delta, \langle q_0^1, q_0^2 \rangle, F^1 \times Q^2 \cup Q^1 \times F^2 \rangle$ con $\delta(\langle q^1, q^2 \rangle, i) = \langle \delta^1(q^1, i), \delta^2(q^2, i) \rangle$

- Complementazione. L'idea alla base del ragionamento è che $F^C = Q - F$, quindi per poter complementare un automa a stati finiti è necessario rendere finali gli stati che non lo sono e viceversa. Bisogna però prestare attenzione al caso in cui la funzione di transizione dell'automa sia parziale: in tal caso, è necessario innanzitutto completare l'automa, definendo tutte le transizioni precedentemente non definite, e solo in seguito procedere con lo stesso algoritmo.

2.1.3 Pumping Lemma

Gli automi appena analizzati sono molto semplici e hanno delle evidenti limitazioni, che li rendono inefficaci nella risoluzione di alcuni problemi. Dallo studio di questi automi si possono ricavare alcuni teoremi dimostrabili, utili per mettere in luce tali limitazioni:

Teorema 2.1.1. Dato un automa a stati finiti $A = \langle Q, I, \delta, q_0, F \rangle$, dove Q ha cardinalità n , il linguaggio riconosciuto da A non è vuoto se e solo se A accetta una stringa x con $|x| \geq n$.

Teorema 2.1.2. *Dato un automa a stati finiti $A = \langle Q, I, \delta, q_0, F \rangle$, dove Q ha cardinalità n , il linguaggio riconosciuto da A è infinito se e solo se A accetta una stringa x con $n \leq |x| < 2n$.*

I teoremi 2.1.1 e 2.1.2 sono basati sul fatto che un determinato Automa a Stati Finiti può presentare cicli nella sua rappresentazione grafica. Nel caso in cui l'automa non presenta alcun ciclo nella sua rappresentazione grafica, il linguaggio è sicuramente finito, in quanto la stringa in ingresso può far passare l'automa una sola volta in ciascuno dei suoi stati: di conseguenza, la stringa può essere lunga al più come il numero di stati dell'automa meno uno.

Si enuncia quindi il seguente teorema noto con il nome di Pumping Lemma:

Teorema 2.1.3 (Pumping Lemma). *Sia A un automa a stati finiti. Se $x \in L$ e $|x| \leq |Q|$, allora esistono uno stato $q \in Q$ e una stringa $w \in I^+$ tali che:*

- $x = ywz$;
- $\delta^*(q, w) = q$

Perciò vale che $\forall n \geq 0 \quad yw^n z \in L$

Il Pumping Lemma fornisce una condizione necessaria, ma non sufficiente sulla struttura dei linguaggi che vengono riconosciuti da un FSA. In altri termini, il teorema 2.1.3 afferma che se una stringa x è lunga almeno quanto il numero degli stati interni di un determinato automa che accetta tale stringa, allora x passa necessariamente per una sequenza di mosse contenenti un ciclo. Inoltre, tutte le stringhe che si ottengono da x ripetendo la sua sottostringa che attraversa il ciclo, sono sequenze riconosciute e accettate dall'automa. Allo stesso modo, sono accettate anche tutte le stringhe che si ottengono da x cancellando qualsiasi sua sottostringa che attraversi tale ciclo.

Ora supponiamo di progettare un automa A che riconosce tutte e sole le stringhe del linguaggio $L = \{a^n b^n : n < 0\}$. Inizialmente si assume che A sia in grado di riconoscere un tale linguaggio. Si considera innanzitutto il caso in cui $x = a^m b^m : m > |Q|$. Sappiamo, grazie al Pumping Lemma, che ci sarà un ciclo interno all'automa e può esistere nei tre casi sottolineati:

- ...aaaaaabbbbbb... : se così fosse si potrebbe rimuovere dalla stringa la sottostringa che passa all'interno del ciclo e l'automa riconoscerebbe comunque come accettabile tale stringa, ma ciò non è vero in quanto il numero di a presenti dopo la rimozione di tale sottostringa sarebbe minore del numero delle b e dunque la stringa non sarebbe riconosciuta dall'automa;
- ...aaaaaabbbbbb... : si applica lo stesso ragionamento del punto precedente;
- ..aaaaaabbbbbb... : se così fosse si potrebbe ripercorrere quel determinato ciclo anche due volte, ma così facendo si otterrebbe la stringa ...aaaaaaabbaabbbbbb... che, secondo il lemma dovrebbe essere riconoscibile dall'automa, ma così non è.

Si nota quindi che non esiste nessun automa a stati finiti che riesca a interpretare un tale linguaggio, in quanto ha una struttura che richiede di contare e ricordare il numero di simboli letti. Per poter contare un numero n arbitrariamente grande si renderebbe necessaria una memoria infinita, che abbia, quindi, un numero infinito di stati.

2.2 Automi a Pila

I PDA (Push Down Automaton) sono automi che presentano un numero finito di stati e una memoria organizzata su una struttura a pila. Tale memoria ha lo stesso comportamento dell'omonima struttura dati: i nuovi simboli vengono inseriti in cima allo stack ed estratti dalla cima dello stack, secondo la politica LIFO (Last In First Out). Per indicare che non ci sono più simboli in memoria, si utilizza il simbolo speciale Z_0 , detto di fondo pila.

Questi particolari tipi di automi hanno la possibilità di utilizzare il simbolo in cima alla pila per decidere quale transizione effettuare e la possibilità di manipolare la pila, rimuovendone il simbolo alla cima, oppure aggiungendo un nuovo simbolo.

Formalmente:

Definizione 2.2.1. *Un PDA è una tupla di 7 elementi $\langle Q, I, \delta, \Gamma, q_0, Z_0, F \rangle$, dove:*

- Q è un insieme finito di stati;
- I è l'alfabeto di ingresso;
- Γ è l'alfabeto della pila, tale per cui $\Gamma \cap I = \emptyset$;
- $\delta : Q \times (I \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma^*$ è la funzione di transizione (eventualmente parziale);
- q_0 è lo stato iniziale
- Z_0 è il simbolo di fondo pila, ovvero l'unico simbolo che appare inizialmente nella pila;
- $F \subseteq Q$ è un insieme di stati finali.

Dalla definizione, si può osservare che l'automa è in grado di decidere il passo successivo anche senza la lettura di alcun simbolo dal nastro di ingresso, ma solo a fronte della lettura di un simbolo sulla cima dello stack. Tali mosse prendono il nome di ε -mosse o mosse spontanee. Ovviamente, per uno stesso stato, non è possibile definire sia una transizione spontanea che una non spontanea, in quanto l'automa in questione sarebbe non deterministico e non sarebbe possibile definirne il comportamento a priori.

Una mossa spontanea non altera la posizione della testina di lettura sul nastro di ingresso, proprio per il fatto che, in tal caso, l'automa ignora deliberatamente il nastro in questione.

Per gli automi a pila, si può introdurre il concetto di configurazione, ossia una generalizzazione della nozione di stato, definita come segue:

Definizione 2.2.2. *Una configurazione c è una tupla di 3 elementi $\langle q, x, \gamma \rangle$, dove:*

- $q \in Q$ è lo stato corrente del dispositivo di controllo;
- $x \in I^*$ è la porzione non ancora letta della stringa d'ingresso;
- $\gamma \in \Gamma^*$ è la stringa composta da tutti i simboli contenuti all'interno della pila.

Una configurazione può essere quindi vista come una fotografia dello stato dell'automa in un determinato istante di tempo.

Le transizioni tra configurazioni, indicate con il simbolo \vdash , dipendono naturalmente dalla funzione di transizione δ e si distinguono in due categorie:

1. Se $\delta(q, i, A) = \langle q', \alpha \rangle$ è una mossa definita, si ha che $c = \langle q, x, \gamma \rangle \vdash c' = \langle q', x', \gamma' \rangle$, dove:
 - $\gamma = A\beta$, la pila contiene il simbolo A , utilizzato per eseguire la mossa, seguito dalla stringa β composta da tutti i restanti simboli della pila;
 - $x = iy$, la stringa in ingresso è composta da un simbolo i , utilizzato per eseguire la mossa, seguito dalla stringa y composta da tutti i restanti simboli non ancora letti;
 - $\gamma' = \alpha\beta$, dopo la transizione, la pila contiene la stringa α appena inserita, seguita dalla stringa β composta da tutti i restanti simboli della pila;
 - $x' = y$, dopo la transizione, la stringa in ingresso è composta da tutti i simboli non ancora letti; in altre parole, la testina di lettura si sposta a destra di una posizione.
2. Se $\delta(q, \varepsilon, A) = \langle q', \alpha \rangle$ è una mossa definita, si ha che $c = \langle q, x, \gamma \rangle \vdash c' = \langle q', x', \gamma' \rangle$, dove:
 - $\gamma = A\beta$, la pila contiene il simbolo A , utilizzato per eseguire la mossa, seguito dalla stringa β composta da tutti i restanti simboli della pila;
 - $\gamma' = \alpha\beta$, dopo la transizione, la pila contiene la stringa α appena inserita, seguita dalla stringa β composta da tutti i restanti simboli della pila;
 - $x' = x$, dopo la transizione, la stringa in ingresso è la medesima; in altre parole, la testina di lettura non si sposta.

Se $\delta(q, \varepsilon, A) \neq \perp$, ovvero se la funzione di transizione è definita, allora $\forall i \in I, \delta(q, i, A) = \perp$: se questa proprietà non fosse soddisfatta, entrambe le transizioni sarebbero consentite e, come detto precedentemente, l'automa non avrebbe un comportamento deterministico.

Data la funzione di transizione tra configurazioni \vdash , si può definire la chiusura transitiva e riflessiva \vdash^* che opera su un insieme di configurazioni anzichè su un'unica configurazione. Un automa a pila accetta una determinata stringa x se c'è un cammino coerente che va dallo stato iniziale ad uno stato finale al termine della lettura della stringa d'ingresso. Formalmente:

$$\forall x \in I^*, x \in L \iff c_0 = \langle q_0, x, Z_0 \rangle \vdash^* c_F = \langle q \in F, \varepsilon, \gamma \rangle$$

Sappiamo quindi che il linguaggio $a^n b^n$ non può essere riconosciuto da alcun FSA per il Pumping Lemma. Inoltre, ogni linguaggio riconosciuto da un FSA è riconoscibile anche da un PDA. Si può affermare, quindi, che gli automi a pila sono più espressivi e di maggiore potenza rispetto agli automi a stati finiti, i quali possono essere visti come un sottoinsieme dei PDA.

A differenza degli FSA, i PDA potrebbero anche non terminare la propria esecuzione dopo un numero finito di mosse, in quanto possono presentare cicli di ε -mosse. Tali cicli non aggiungono potere espressivo ai PDA: questo significa che gli automi a pila ciclici riconoscono lo stesso insieme di linguaggi degli automi aciclici. Per questo motivo, si preferisce eliminare tale categoria di automi, utilizzando transizioni tra configurazioni del tipo $\langle q, x, \alpha \rangle \vdash_d^* \langle q', x, \beta \rangle$, in cui il simbolo \vdash_d^* indica che per $\langle q, x, \alpha \rangle \vdash^* \langle q', x, \beta \rangle$ con $\beta = Z\beta'$, $\delta(q', \varepsilon, Z) = \perp$, ovvero transizioni che hanno necessariamente bisogno di un simbolo in ingresso per proseguire la propria esecuzione. Formalmente:

Definizione 2.2.3. *Un PDA si definisce aciclico se e solo se:*

$$\forall x \in I^* \exists q, \gamma : \langle q_0, x, Z_0 \rangle \vdash_d^* \langle q, \varepsilon, \gamma \rangle.$$

Un tale automa legge sempre per intero la stringa in ingresso prima di terminare la propria esecuzione ed accettare tale stringa, non potendo finire in un ciclo di ε -mosse. Un automa a pila ciclico può sempre essere trasformato in un automa a pila aciclico equivalente.

2.2.1 Trasduttori a Pila

I PDT (Push Down Trasducer) sono trasduttori che presentano un numero finito di stati e una memoria organizzata su una struttura a pila. Formalmente:

Definizione 2.2.4. *Un PDT è una tupla di 9 elementi $\langle Q, I, \delta, \Gamma, q_0, Z_0, F, O, \eta \rangle$, dove:*

- Q è un insieme finito di stati;
- I è l'alfabeto di ingresso;
- Γ è l'alfabeto della pila, tale per cui $\Gamma \cap I = \emptyset$;
- $\delta : Q \times (I \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma^*$ è la funzione di transizione (eventualmente parziale);
- q_0 è lo stato iniziale
- Z_0 è il simbolo di fondo pila, ovvero l'unico simbolo che appare inizialmente nella pila;
- $F \subseteq Q$ è un insieme di stati finali;
- O è l'alfabeto di uscita;
- $\eta : Q \times (I \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow O^*$ è la funzione di uscita (eventualmente parziale).

Definizione 2.2.5. *Una configurazione c di un PDT è una tupla di 4 elementi $\langle q, x, \gamma, z \rangle$, dove:*

- $q \in Q$ è lo stato corrente del dispositivo di controllo;
- $x \in I^*$ è la porzione non ancora letta della stringa d'ingresso;
- $\gamma \in \Gamma^*$ è la stringa composta da tutti i simboli contenuti all'interno della pila;
- $z \in O^*$ è la stringa presente sul nastro di uscita.

Le relazioni di transizione $c = \langle q, x, \gamma, z \rangle \vdash c' = \langle q', x', \gamma', z' \rangle$ possono essere di due categorie:

1. se $\delta(q, i, A) = \langle q', \alpha \rangle$ è una mossa definita, si ha che $\eta(q, i, A) = w$, dove:
 - $\gamma = A\beta$, la pila contiene il simbolo A , utilizzato per eseguire la mossa, seguito dalla stringa β composta da tutti i restanti simboli della pila;
 - $x = iy$, la stringa in ingresso è composta da un simbolo i , utilizzato per eseguire la mossa, seguito dalla stringa y composta da tutti i restanti simboli non ancora letti;
 - $\gamma' = \alpha\beta$, dopo la transizione, la pila contiene la stringa α appena inserita, seguita dalla stringa β composta da tutti i restanti simboli della pila;
 - $x' = y$, dopo la transizione, la stringa in ingresso è composta da tutti i simboli non ancora letti; in altre parole, la testina di lettura si sposta a destra di una posizione;
 - $z' = zw$, dopo la transizione, alla stringa sul nastro di uscita viene concatenato il simbolo w prodotto dalla funzione di traduzione.
2. Se $\delta(q, \varepsilon, A) = \langle q', \alpha \rangle$ è una mossa definita, si ha che $\eta(q, \varepsilon, A) = w$, dove:
 - $\gamma = A\beta$, la pila contiene il simbolo A , utilizzato per eseguire la mossa, seguito dalla stringa β composta da tutti i restanti simboli della pila;
 - $\gamma' = \alpha\beta$, dopo la transizione, la pila contiene la stringa α appena inserita, seguita dalla stringa β composta da tutti i restanti simboli della pila;
 - $x' = x$, dopo la transizione, la stringa in ingresso è la medesima; in altre parole, la testina di lettura non si sposta;
 - $z' = zw$, dopo la transizione, alla stringa sul nastro di uscita viene concatenato il simbolo w prodotto dalla funzione di traduzione.

La condizione di accettazione della traduzione è quindi la seguente:

$$\forall x \in I^* : x \in L \wedge z = \eta(x) \iff c_0 = \langle q_0, x, Z_0, \varepsilon \rangle \vdash^* c_F = \langle q \in F, \varepsilon, \gamma, z \rangle.$$

2.2.2 Operazioni sugli Automi a Pila

Gli Automi a Pila sono chiusi solamente rispetto all'operazione di complementazione. Ogni PDA può essere complementato seguendo le operazioni qui elencate:

1. Eliminazione dei cicli;
2. Aggiunta di stati di errore;
3. Eliminazione delle mosse spontanee che collegano stati non finali a stati finali;
4. Scambio di stati finali e non finali.

I PDA non sono aperti rispetto ad alcun'altra operazione, quindi un automa a pila non riesce a riconoscere i linguaggi generati dall'intersezione o l'unione di più linguaggi. Inoltre, gli automi a pila presentano ulteriori limitazioni dovute al fatto che lo stack di memoria sia di tipo distruttivo: per poter leggere le informazioni contenute in memoria è prima necessario eliminare tutte le altre informazioni che si trova al di sopra di essa. Quindi, linguaggi del tipo $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ non possono essere riconosciuti da normali PDA perchè una volta terminata la lettura delle b e, quindi, una volta eliminati tutti i simboli sulla pila per controllare che il numero di b sia uguale al numero di a , non rimane più alcuna informazione per poter verificare che il numero di c sia uguale al numero delle altre lettere.

2.3 Macchine di Turing

Le TM (Turing Machine) sono automi che presentano un numero finito di stati e che operano su un insieme di nastri infiniti a destra: un nastro di ingresso, un nastro di uscita e uno o più nastri di memoria. Ogni nastro è composto da celle inizializzate dal simbolo di blank (tramite cui si indica che la cella è vuota) che può essere sovrascritto con un qualsiasi simbolo dell'alfabeto in ingresso. Il dispositivo di controllo può muovere le testine di lettura dei nastri in maniera indipendente l'una dall'altra, spostandole a destra (R) o a sinistra (L) di una cella, oppure lasciandole ferme (S) nella posizione in cui si trovano. L'unica

eccezione è costituita dal nastro di uscita che può essere spostato solamente a destra. In alternativa, l'automa può anche non effettuare alcuna operazione, fermandosi definitivamente.

Formalmente:

Definizione 2.3.1 (Turing machine). *Una TM a k nastri è una tupla di 9 elementi $\langle Q, I, \Gamma, O, \delta, \eta, q_0, Z_0, F \rangle$, dove:*

- Q è un insieme finito di stati;
- I è l'alfabeto di ingresso;
- Γ è l'alfabeto di memoria;
- O è l'alfabeto di uscita;
- $F \subseteq Q$ è l'insieme di stati finali;
- $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale;
- $Z_0 \in \Gamma$ è il simbolo iniziale dell'alfabeto di memoria;
- $\delta : (Q - F) \times I \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{R, L, S\}^{k+1}$ è la funzione di transizione (eventualmente parziale);
- $\eta : (Q - F) \times I \times \Gamma^k \rightarrow O \times \{R, S\}$ è la funzione di uscita (eventualmente parziale), definita dove è definita la funzione di transizione δ ;

Si noti che la funzione di transizione δ è definita in modo tale che non ci siano transizioni uscenti da uno stato finale.

Definizione 2.3.2. *Una configurazione c di una TM a k nastri è una tupla di $k+3$ elementi $\langle q, x \uparrow iy, \alpha_1 \uparrow A_1 \beta_1, \dots, \alpha_k \uparrow A_k \beta_k, u \uparrow o \rangle$, dove:*

- $q \in Q$ è lo stato attuale in cui si trova l'automa;
- $x \uparrow iy$ è la posizione in cui si trova la testina di lettura del nastro di ingresso, con $x, y \in I^*$ e $i \in I$;
- $\alpha_1 \uparrow A_1 \beta_1$ è la posizione in cui si trova la testina di lettura del primo nastro di memoria, con $\alpha_1, \beta_1 \in \Gamma^*$ e $A_1 \in \Gamma$.
- $\alpha_k \uparrow A_k \beta_k$ è la posizione in cui si trova la testina di lettura del k -esimo nastro di memoria, con $\alpha_k, \beta_k \in \Gamma^*$ e $A_k \in \Gamma$.
- $u \uparrow o$ è la posizione in cui si trova la testina di lettura del nastro di uscita, con $u \in O^*$ e $o \in O$;
- $\uparrow \notin I \cup \Gamma \cup O$, rappresenta la posizione della testina di lettura di un determinato nastro; la testina di lettura punta la cella in cui è contenuto il carattere immediatamente alla destra del simbolo \uparrow .

La configurazione iniziale c_0 di una TM a k nastri è una tupla di $k+3$ elementi

$\langle q_0, \uparrow iy, \uparrow Z_0, \dots, \uparrow Z_0, \uparrow - \rangle$. Quindi, $x = \varepsilon, A_1, \dots, A_k = Z_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k = \varepsilon, \beta_1, \dots, \beta_k = \varepsilon, u = \varepsilon$ e $o = -$.

Ora, data la definizione di configurazione, è necessario anche formalizzare il significato di transizione \vdash tra due date configurazioni c e c' (detta anche mossa o passo computazionale):

Definizione 2.3.3. *Siano:*

$c = \langle q, x \uparrow iy, \alpha_1 \uparrow A_1 \beta_1, \dots, \alpha_k \uparrow A_k \beta_k, u \uparrow o \rangle$, con $x = \underline{x}i, y = jy, \alpha_1 = \underline{\alpha_1}A_1, \dots, \alpha_k = \underline{\alpha_k}A_k$ e $\beta_1 = \underline{\beta_1}B_1, \dots, \beta_k = \underline{\beta_k}B_k$, $c' = \langle q', x' \uparrow i'y', \alpha'_1 \uparrow A'_1 \beta'_1, \dots, \alpha'_k \uparrow A'_k \beta'_k, u' \uparrow o' \rangle$, $\delta(q, i, \underline{A_1}, \dots, \underline{A_k}) = \langle p, \underline{C_1}, \dots, \underline{C_k}, N, N_1, \dots, N_k \rangle$, con $p \in Q, N, N_1, \dots, N_k \in \{R, L, S\}$ e $C_1, \dots, C_k \in \Gamma$, e $\eta(q, i, \underline{A_1}, \dots, \underline{A_k}) = \langle v, M \rangle$, con $v \in O$ e $M \in \{R, S\}$.

Allora $c \vdash c'$ se e solo se:

1. Vale che $p = q'$;
2. Vale anche una delle seguenti condizioni:
 - (a) $x=x', i=i', y=y'$ ed $N=S$;
 - (b) $x'=xi, i'=j, y'=y$ ed $N=R$;

(c) $x'=\underline{x}$, $i'=i$, $y'=iy$ ed $N=L$;

3. Vale anche una delle seguenti condizioni, per $1 \leq r \leq k$:

(a) $\alpha'_r = \alpha_r$, $A'_r = C_r$, $\beta'_r = \beta_r$, ed $N_r = S$;

(b) $\alpha'_r = \alpha_r C_r$, $A'_r = B_r$, $\beta'_r = \underline{\beta_r}$, ed $N_r = R$; se $\beta_r = \varepsilon$, allora $A'_r = _$ e $\beta'_r = \varepsilon$;

(c) $\alpha'_r = \underline{\alpha_r}$, $A'_r = \underline{A_r}$, $\beta'_r = C_r \beta_r$ ed $N_r = L$;

4. Vale anche una delle seguenti condizioni:

(a) $u'=u$, $o'=v$ ed $M=S$;

(b) $u'=uv$, $o=_$ ed $M=R$

Se nei casi 2c e 3c, $x = \varepsilon$ oppure $\alpha = \varepsilon$, allora non esiste una configurazione c' tale che $c \vdash c'$ e la macchina di Turing termina la propria esecuzione. Lo stesso comportamento si ottiene nel caso in cui le funzioni δ ed η non sono definite in $\langle 1, i, A_1, \dots, A_k \rangle$. In tali casi, c viene anche definita configurazione di arresto.

In altre parole, se $\delta(q, i, A_1, \dots, A_k) = \langle p, C_1, \dots, C_k, N, N_1, \dots, N_k \rangle$, la condizione 1 vincola lo stato di x' ad essere quello di arrivo della transizione. Le condizioni di tipo 2 definiscono l'evoluzione del nastro di ingresso al passaggio da c a c' : se la testina rimane ferma (condizione 2a), le tre parti in cui la testina divide il nastro saranno identiche in c e c' ; se la testina si muove a destra (condizione 2b), la parte a sinistra della testina conterrà anche il simbolo corrente di c , il simbolo corrente di c' sarà il primo simbolo della parte destra in c e la rimanente parte destra di c sarà la parte destra di c' ; infine, se la testina si muove a sinistra (condizione 2c), la parte a sinistra della testina in c' conterrà tutti i simboli della parte sinistra in c , tranne l'ultimo che diventerà il simbolo corrente di c' e la parte destra di c' sarà composto dal simbolo corrente in c seguito dalla sua parte destra. Analogamente le condizioni di tipo 3 specificano l'evoluzione dei nestri di memoria e le condizioni 4 quella del nastro di uscita.

Si introduce di seguito il teorema tramite cui si afferma la supremazia delle macchine di Turing nella computazione e nella traduzione.

Teorema 2.3.1. *La classe di linguaggi riconosciuti dalle Macchine di Turing include strettamente la classe dei linguaggi riconosciuti dagli Automi a Pila. Inoltre, le macchine di Turing sono trasduttori più potenti rispetto ai trasduttori a pila, per cui tutte le traduzioni effettuate da un PDT possono essere effettuate anche da una TM trasduttrice, ma non viceversa.*

Le macchine di Turing sono il formalismo più potente di cui siamo a disposizione.

2.3.1 Macchine di Turing come Accettatori

Quando le macchine di Turing vengono impiegate per il riconoscimento di un determinato linguaggio o per definire nuovi linguaggi, il nastro di uscita viene completamente ignorato. Dunque, una TM utilizzata come accettatore è una tupla di 7 elementi, ottenuta eliminando dalla definizione 2.3.1 gli elementi O (l'alfabeto di uscita) ed η (la funzione di uscita). Di conseguenza, anche la definizione 2.3.2 di configurazione viene modificata omettendo la rappresentazione del nastro di uscita.

Definizione 2.3.4. *Sia M una TM a k nastri. Una stringa $x \in I^*$ è accettata da M se e solo se:*

$$c_0 = \langle q_0, \uparrow x, \uparrow Z_0, \dots, \uparrow Z_0 \rangle \vdash^* c_F < q \in F, x' \uparrow iy, \alpha_1 \uparrow A_1 \beta_1, \dots, \alpha_k \uparrow A_k \beta_k \rangle.$$

In altre parole, il linguaggio riconosciuto da una TM M è composto da tutte e sole le stringhe che permettono di andare dallo stato iniziale ad uno stato finale. Inoltre, non è richiesto che al termine della computazione la testina si trovi al termine della stringa in ingresso: la TM M può raggiungere uno stato finale anche senza aver completamente letto la stringa in ingresso.

Se $x \notin L$, M può anche non raggiungere mai una configurazione di arresto e continuare la sua esecuzione per un tempo indefinito.

2.3.2 Macchine di Turing come Trasduttori

Quando le macchine di Turing vengono impiegate per la traduzione di linguaggi, ovvero per mappare stringhe di I^* in stringhe di O^* , il nastro di uscita non viene più ignorato come nel caso degli accettori. Dunque, una TM utilizzata come trasduttore è una tupla di 9 elementi, esattamente come presentata nella definizione 2.3.1.

Definizione 2.3.5. Sia M una MT a k nastri. M definisce una traduzione $\tau(x) = y$, con $\tau_M : I^* \rightarrow O^*$, se e solo se:

$$c_0 = \langle q_0, \uparrow x, \uparrow Z_0, \dots, \uparrow Z_0, \uparrow - \rangle \vdash^* c_F = \langle q \in F, x' \uparrow y, \alpha_1 \uparrow A_1 \beta_1, \dots, \alpha_k \uparrow A_k \beta_k, y \uparrow - \rangle$$

In altre parole, una stringa x viene tradotta in una stringa y da una TM M se esiste un cammino che parte da una configurazione iniziale con x sul nastro di ingresso e termina in una configurazione finale con y sul nastro di uscita.

2.3.3 Altri Modelli di Macchine di Turing

Il modello originario di automa, pensato da Alan Turing (padre fondatore dell'odierna informatica), era una macchina, simile a quelle analizzate nelle sezioni precedenti, con l'unica differenza che presentava un solo nastro infinito (sia a destra che a sinistra), utilizzato come ingresso, uscita e memoria. Formalmente:

Definizione 2.3.6. Una TM a nastro singolo è una tupla di 5 elementi $\langle Q, A, \delta, q_0, F \rangle$, dove:

- Q è un insieme finito di stati;
- A è un alfabeto finito caratteristico del nastro;
- $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale;
- $F \subseteq Q$ è l'insieme di stati finali;
- $\delta : (Q - F) \times A \rightarrow Q \times A \times \{R, L, S\}$ è la funzione di transizione (eventualmente parziale).

Si noti che, le macchine di Turing ad 1 nastro sono un modello di automa differente rispetto ad una macchina di Turing a singolo nastro: nel primo caso, la TM presenta ben tre nastri (uno di ingresso, uno di uscita e uno di memoria), mentre nel secondo caso, la TM presenta un unico nastro.

Teorema 2.3.2. Le TM multinastro e le TM a nastro singolo sono formalismi equivalenti, ossia accettano la stessa classe di linguaggi e realizzano la stessa classe di traduzioni.

Ognuno dei modelli di macchine di Turing precedentemente analizzati possono essere dotati di nastri multidimensionali: il modello che se ne ricava è la TM con nastro multidimensionale. Un nastro k -dimensionale è realizzato in modo che ogni cella sia identificata univocamente da una tupla di k interi positivi. Anche questo modello di macchina di Turing è equivalente agli altri analizzati, in quanto si può stabilire una corrispondenza biiettiva fra $\mathbb{N} - \{0\}$ e $(\mathbb{N} - \{0\})^k$, che indicano rispettivamente l'insieme delle posizioni della testina per i nastri lineari e l'insieme delle posizioni della testina per i nastri multidimensionali. Un esempio importante è l'enumerazione delle celle del nastro bidimensionale, che si ottiene tramite la formula:

$$d(x, y) = x + \frac{(x + y)(x + y - 1)}{2}$$

ottenuta con il metodo della diagonalizzazione.

Capitolo 3

Automi non Deterministici

Tutti modelli analizzati fino ad ora sono deterministici, nel senso che una volta fissato lo stato iniziale e l'ingresso, il comportamento di tale automa è univocamente determinato. In altri termini, per ogni stato e per ogni ingresso è sempre possibile determinare a priori lo stato in cui l'automata termina la propria esecuzione.

Ci sono però casi in cui questo non è possibile, in quanto non si ha una conoscenza sufficientemente accurata del comportamento dell'automata per poter prevedere l'esatta evoluzione del modello. In tal caso si dice che l'automata è non deterministico.

3.1 Automi a Stati Finiti non deterministici

Gli NFSA (Nondeterministic Finite State Automaton) sono automi a stati finiti che presentano un numero finito di stati. Tali automi sono definiti come i corrispettivi automi deterministici, con l'unica differenza che presentano una funzione di transizione definita nel seguente modo:

$$\delta : Q \times I \rightarrow \wp(Q)^1$$

Di conseguenza, la chiusura riflessiva e transitiva di tale funzione, si definisce induttivamente nel seguente modo:

$$\delta^*(q, \varepsilon) = \{q\}, \quad \forall q \qquad \delta^*(q, xi) = \bigcup_{q' \in \delta^*(q, x)} \delta(q', i)$$

Nel caso di accettori, $x \in I^*$ è accettata da un NFSA $\langle Q, I, \delta, q_0, F \rangle$ se e solo se $\delta^*(q_0, x) \cap F \neq \emptyset$.

In altre parole, un NFSA può presentare diverse sequenze di transizioni per ogni dato stato e per ogni data sequenza di ingresso, quindi la chiusura riflessiva e transitiva della funzione δ non rappresenta più un singolo cammino coerente con la stringa di ingresso, ma un insieme di cammini possibili. Questo porta anche alla necessità di dover modificare la condizione di accettazione di una determinata stringa in ingresso: intuitivamente, infatti, tale nastro è accettato dall'automata se e solo se almeno una delle possibili sequenze di transizioni conduce a uno stato finale.

Gli automi non deterministici a stati finiti hanno la stessa potenza di calcolo dei corrispettivi automi deterministici, ma sono spesso più convenienti da utilizzare. Da qui il seguente teorema:

Teorema 3.1.1. *Per ogni NFSA A , può essere costruito un FSA A_D deterministico che accetti lo stesso linguaggio.*

Infatti, dato un NFSA, si può costruire un FSA equivalente che ha come stati gli insiemi formati da stati dell'NFSA. La funzione di transizione è costruita in modo che se un insieme di stati è raggiungibile a partire da uno stato dell'NFSA, allora tale relazione deve essere presente anche nell'FSA sfruttando la costruzione degli stati come insiemi di stati dell'NFSA.

¹ $\wp(Q)$ rappresenta l'insieme delle parti di Q , i cui elementi sono insiemi di stati.

3.2 Automi a Pila non deterministici

Un NPDA (Nondeterministic Push Down Automaton) è un automa che presenta un numero finito di stati e una memoria organizzata su una struttura a pila. Tali automi sono definiti come i corrispettivi automi deterministici, con l'unica differenza che presentano una funzione di transizione definita nel seguente modo:

$$\delta : Q \times (I \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow \wp_F(Q \times \Gamma^*)$$

La relazione di transizione fra configurazioni su $Q \times I^* \times \Gamma^*$ è definita da $\langle q, x, \gamma \rangle \vdash \langle q', x', \gamma' \rangle$ se e solo se vale una delle seguenti condizioni:

1. $x = ay, x' = y, \gamma = A\beta, \gamma' = \alpha\beta, \langle q', \alpha \rangle \in \delta(q, a, A)$;
2. $x = x', \gamma = A\beta, \gamma' = \alpha\beta, \langle q', \alpha \rangle \in \delta(q, \varepsilon, A)$.

Inoltre, la stringa $x \in I^*$ è accettata dall'automato se e solo se:

$$\langle q_0, x, Z_0 \rangle \vdash^* \langle q \in F, \varepsilon, \gamma \in \Gamma^* \rangle.$$

Si noti che i PDA sono automi intrinsecamente non deterministici: infatti, nella prima definizione di automa a pila si era dovuto aggiungere il vincolo che, se per una determinata condizione era definita una ε -mossa, allora non era definita nessun'altra transizione che partisse da quello stato. Nella definizione appena data, invece, questo vincolo viene rimosso.

3.3 Macchine di Turing non deterministiche

Una NTM (Nondeterministic Turing Machine) è un automa che presenta un numero finito di stati e che opera su un insieme di nastri infiniti a destra. Tali automi sono definiti come i corrispettivi automi deterministici, con l'unica differenza che presentano una funzione di transizione e di accettazione definita nel seguente modo:

$$\langle \delta, \eta \rangle : (Q - F) \times I \times \Gamma^k \rightarrow \wp(Q \times \Gamma^k \times \{R, L, S\}^{k+1} \times \{R, S\})$$

mentre per una NTM a nastro singolo, la funzione di transizione è definita nel seguente modo:

$$\delta : (Q - F) \times A \rightarrow \wp(Q \times A \times \{R, L, S\})$$

Teorema 3.3.1. *Le macchine di Turing non deterministiche non sono più potenti delle corrispettive macchine di Turing deterministiche se utilizzate come riconoscitori di linguaggi.*

Data una qualsiasi NTM M , è sempre possibile costruire una TM deterministica M' che riconosce lo stesso linguaggio di M . Se si considera una computazione di M su una stringa in ingresso, questa è ben definita da un albero di configurazioni, in cui è inserita ogni configurazione raggiungibile dallo stato iniziale. Una stringa viene accettata solo se esiste almeno un cammino all'interno della struttura ad albero che si conclude in una configurazione finale. M' potrà simulare il comportamento della TM M , ricostruendo in maniera sequenziale tutte le possibili computazioni di M . Si noti però che quando una stringa non viene accettata, la macchina di Turing M potrebbe entrare in un ciclo infinito, senza mai terminare la propria esecuzione: per questo motivo, l'albero delle computazioni potrebbe presentare rami infiniti. La TM M' , che simula M , deve quindi evitare di visitare l'albero delle computazioni 'in profondità' (ovvero tramite un algoritmo di depth first search), ossia seguendo un percorso fino al suo termine, prima di passare ad un ramo successivo, in quanto alcuni rami sono, appunto, infiniti. Conviene quindi visitare l'albero delle computazioni 'in ampiezza' (ovvero tramite un algoritmo di breadth first search), ossia seguendo tutti i nodi dei rami sullo stesso livello. In questo modo, se esiste un cammino dell'albero di M che porti all'accettazione della stringa, M' riuscirà a trovarlo in un tempo finito, terminando la propria esecuzione. Altrimenti, se tutti i cammini di M terminano in stati non finali, M' terminerà la propria esecuzione senza aver trovato nessun nodo di accettazione e rifiuterà la stringa in ingresso.

Capitolo 4

Grammatiche

Come visto in precedenza, spesso gli automi vengono utilizzati come modelli per il riconoscimento di linguaggi. Gli automi sono quindi uno strumento formale per la descrizione e la definizione di un determinato linguaggio, costituito dall'insieme delle stringhe accettate dall'automa stesso.

Un altro formalismo utilizzato per la definizione di linguaggio sono le cosiddette grammatiche formali, che definiscono un linguaggio fornendo il procedimento mediante cui si ottengono le stringhe appartenenti al linguaggio stesso.

4.1 Introduzione

Una grammatica formale è un insieme di regole per costruire stringhe appartenenti ad un determinato linguaggio, attraverso il meccanismo di riscrittura, che consiste in un insieme di tecniche che determinano come sostituire le parti di una formula con parti più semplificate. In generale, un meccanismo di riscrittura consiste in un insieme di regole linguistiche, di cui una descrive l'oggetto principale come una sequenza di componenti. Ogni componente si può raffinare da elementi via via sempre più dettagliati, fino ad ottenere una sequenza di componenti elementari.

Una grammatica non è altro che un meccanismo linguistico, composto dall'oggetto principale, detto anche simbolo iniziale, da un insieme di componenti, a loro volta da sostituire durante il processo di derivazione, detti anche simboli non terminali, un insieme di elementi di base, detti anche simboli elementari, e da un insieme di regole di raffinamento o sostituzioni, chiamate produzioni.

Definizione 4.1.1. Una grammatica G è una tupla di 4 elementi $G = \langle V_T, V_N, P, S \rangle$, dove:

- V_T è un insieme di simboli terminali (solitamente indicati con lettere minuscole), detto anche alfabeto terminale;
- V_N è un insieme di simboli non terminali (solitamente indicati con lettere maiuscole), tali che $V_T \cap V_N = \emptyset$, detto anche alfabeto non terminale; V indica $V_T \cup V_N$;
- P è un insieme finito di $V_N^+ \times V^*$, detto anche insieme delle produzioni di G . Un elemento $p = \langle \alpha, \beta \rangle \in P$ si indica con $\alpha \rightarrow \beta$, in cui α è la parte sinistra di p , mentre β è la parte destra di p ;
- S è un elemento particolare di V_N , detto assioma o simbolo iniziale.

Quindi, un elemento che deve essere ancora raffinato è un simbolo non terminale, un elemento di base è un simbolo terminale, le componenti di un oggetto possono essere sia simboli terminali che non terminali, mentre una produzione corrisponde ad una regola di raffinamento.

Definizione 4.1.2. Data una grammatica G , si definisce su V^* la relazione binaria di derivazione immediata, indicata con il simbolo \Rightarrow da α a β . Tale relazione sussiste se e solo se $\alpha = \alpha_1 \gamma \alpha_2, \beta = \alpha_1 \delta \alpha_2$, con $\alpha_1, \alpha_2, \delta \in V^*, \gamma \in V_N^+, \gamma \rightarrow \delta \in P$.

Data la definizione di derivazione immediata, si può anche definire la chiusura riflessiva e transitiva, indicata con il simbolo \Rightarrow^* , che opera su una serie di stringhe (di simboli elementari o non elementari), anziché che su una sola stringa.

Date le precedenti definizioni, si può ora definire il linguaggio generato da una grammatica, tramite la seguente definizione:

Definizione 4.1.3. Data una grammatica G , il linguaggio $L(G)$ generato da G è definito come:

$$L(G) = \{x \mid S \Rightarrow^* x, x \in V_T^*\}$$

Quindi il linguaggio generato da una grammatica è costituito da tutte e sole le stringhe di simboli terminali, derivati a partire dall'assioma S , applicando un numero qualsiasi di sostituzioni.

4.2 Classificazione

Una volta definite cosa siano le grammatiche, è possibile classificarle in base alle loro proprietà e in base alla forma ammessa per le produzioni. Tale classificazione viene anche detta Gerarchia di Chomsky, tramite cui si dividono le grammatiche in quattro categorie:

- Grammatiche di tipo 0 (non ristrette): sono grammatiche definite come nella 4.1.1, ovvero grammatiche che non possiedono nessuna restrizione nel tipo di produzione;
- Grammatiche di tipo 1 (sensibili al contesto): sono grammatiche a cui si introduce il vincolo per cui le produzioni possono essere solo nella forma $\alpha A \beta \rightarrow \alpha \gamma \beta$, dove $\alpha, \beta, \gamma \in V$ e $A \in V_N$, con $\gamma \neq \varepsilon$; inoltre, la derivazione $S \rightarrow \varepsilon$ è consentita solo se S non appare a destra in nessuna regola di derivazione;
- Grammatiche di tipo 2 (non contestuali): sono grammatiche a cui si introduce il vincolo per cui ad ogni produzione $\alpha \rightarrow \beta \in P$ si verifica che $|\alpha| = 1$ (quindi $\alpha \in V_N$) e $\beta \in V^*$;
- Grammatiche di tipo 3 (regolari): sono grammatiche a cui si introduce il vincolo per cui ad ogni produzione $\alpha \rightarrow \beta \in P$ si verifica che $|\alpha| = 1$ (quindi $\alpha \in V_N$) e che β sia in una sola delle seguenti forme: aB , Ba , a oppure ε , con $a \in V_T$ e $B \in V_N$; inoltre, la derivazione $S \rightarrow \varepsilon$ è consentita solo se S non appare a destra in nessuna regola di derivazione;

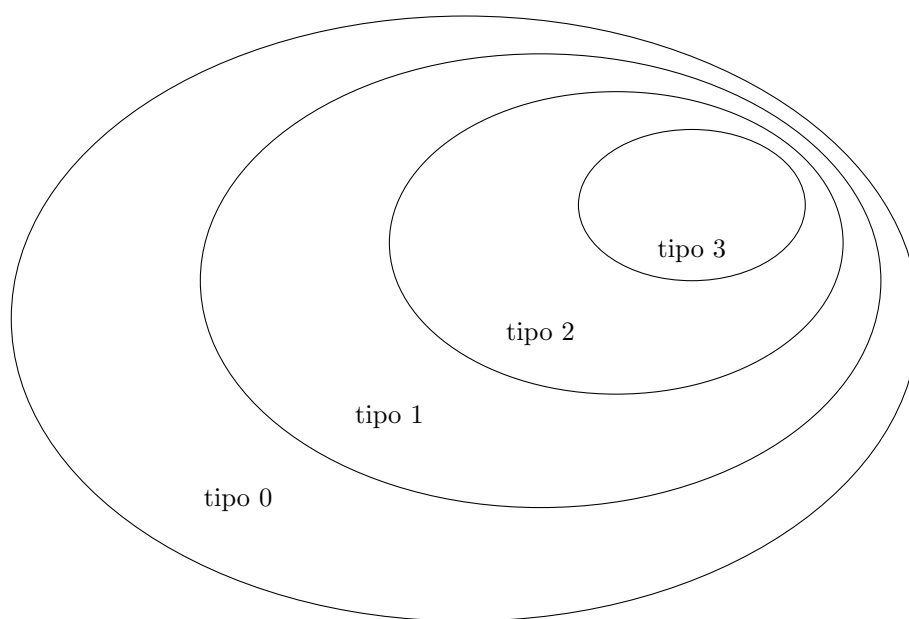


Figura 4.1: Gerarchia di Chomsky

4.3 Grammatiche e Automi

Studiando le grammatiche e i linguaggi da esse generate, si può osservare una certa corrispondenza con gli automi analizzati nei capitoli precedenti. Si introducono qui alcuni teoremi che mettono in luce la correlazione esistente fra automi e grammatiche.

Teorema 4.3.1. *Dato un FSA A , è possibile costruire una grammatica regolare (di tipo 3) G ad esso equivalente, ossia in grado di riconoscere lo stesso linguaggio riconosciuto da A , e viceversa. Dunque, le grammatiche regolari e gli automi a stati finiti sono modelli differenti per descrivere la stessa classe di linguaggi.*

Dato un FSA $A = \langle I, \delta, q_0, F \rangle$, si può costruire una grammatica $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ regolare, tale che:

- $V_N = Q$;
- $V_T = I$;
- $S = q_0$;
- $\forall B \rightarrow bC \iff C \in \delta(B, b)$;
- $\forall B \rightarrow \varepsilon, B \in F$

Data una grammatica $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ regolare, si può costruire un FSA $A = \langle I, \delta, q_0, F \rangle$, tale che:

- $Q = V_N \cup \{q_F\}$;
- $I = V_T$;
- $q_0 = S$;
- $F = \{q_F\}$
- $\forall A \rightarrow bC, C \in \delta(A, b)$;
- $\forall A \rightarrow \varepsilon, A \in F$

In generale, l'automa a stati finiti A , ottenuto a partire dalla grammatica regolare G , è non deterministico.

Teorema 4.3.2. *Dato un NPDA A è possibile costruire una grammatica G non contestuale (di tipo 2) ad esso equivalente, ossia in grado di riconoscere lo stesso linguaggio riconosciuto da A , e viceversa. Dunque, le grammatiche non contestuali e gli automi a pila non deterministici sono modelli differenti per descrivere la stessa classe di linguaggi.*

Teorema 4.3.3. *Data una TM M utilizzata come accettore di linguaggi è possibile costruire una grammatica generale G (di tipo 0) ad essa equivalente, ossia in grado di riconoscere lo stesso linguaggio riconosciuto da M , e viceversa. Dunque, le grammatiche non ristrette e le macchine di Turing sono modelli differenti per descrivere la stessa classe di linguaggi.*

4.4 Espressioni Regolari

Un'espressione regolare è un'espressione utilizzabile per denotare un linguaggio attraverso la struttura delle stringhe che lo compongono.

Definizione 4.4.1. *Dato un alfabeto di simboli terminali denotato con V_T , si definiscono su di esso le espressioni regolari e i corrispondenti linguaggi denotati:*

- \emptyset è un'espressione regolare che denota il linguaggio vuoto;
- $\forall a \in V_T, a$ è un'espressione regolare che denota il linguaggio formato solo dal simbolo a ;
- Se R_1 ed R_2 sono espressioni regolari, anche la loro unione, indicata con $R_1 + R_2$ o $R_1 \mid R_2$, è un'espressione regolare;
- Se R_1 ed R_2 sono espressioni regolari, anche la loro concatenazione, indicata con $R_1 \cdot R_2$, è un'espressione regolare;
- Se R è un'espressione regolare, anche la stella di Kleene di R , indicata con R^* , è un'espressione regolare.

Nessun'altra stringa è un'espressione regolare.

Gli operatori $|$, \cdot , $*$ definiti per le espressioni regolari, hanno un implicito ordine di applicazione, se non indicato diversamente dall'uso delle parentesi. In particolare, $*$ ha la precedenza rispetto a \cdot , che ha a sua volta la precedenza su $|$.

Inoltre, vale anche il seguente teorema:

Teorema 4.4.1. *La classe dei linguaggi denotati dalle espressioni regolari coincide con la classe dei linguaggi regolari.*

4.5 Riepilogo

Tabella 4.1: Relazione fra grammatiche, linguaggi e automi

Gerarchia	Grammatiche	Linguaggi	Automa minimo
tipo 0	Generali	Ricorsivamente enumerabili	TM
tipo 1	Dipendenti dal contesto	Dipendenti dal contesto	LBA*
tipo 2	Non contestuali	Non contestuali	NPDA
tipo 3	Regolari	Regolari	FSA

* Gli LBA (Linear Bounded Automata) sono un particolare tipo di macchina di Turing non deterministica in cui la lunghezza del nastro è funzione lineare della dimensione della stringa in ingresso. Tali automi non sono stati trattati in questo documento.

Capitolo 5

Computabilità

In questa sezione si cercherà di rispondere alla domanda: quali problemi possono essere affrontati e risolti mediante gli automi analizzati? Si ricordi che automi e grammatiche, pur essendo modelli matematici, si possono considerare dispositivi meccanici per la risoluzione di problemi e che esistono formalismi che hanno un potere espressivo maggiore di altri, ossia sono in grado di riconoscere una classe di linguaggi che altri formalismi non riescono a riconoscere. Inoltre, si ricordi che, nessun formalismo è più potente delle macchine di Turing, sia dal punto di vista del riconoscimento che della traduzione di linguaggi e, per tanto, sono detti formalismi massimi.

5.1 Formalizzazione dei Problemi

Molti problemi possono essere opportunamente descritti come il riconoscimento di un determinato linguaggio o come la sua traduzione in un altro linguaggio. Ogni problema matematico è descrivibile mediante una di queste forme, alla sola condizione che il dominio di tale problema sia un insieme numerabile, in maniera tale che i suoi elementi si possono porre in corrispondenza biunivoca con gli elementi di \mathbb{N} o, se si preferisce, di V^* , in cui V rappresenta un alfabeto. Dunque, il problema di origine si può riformulare come il problema di calcolo di una funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Quanto detto è in perfetto accordo con tutti i formalismi matematici esaminati fino ad ora: questi, infatti, sono discreti e hanno un dominio matematico numerabile.

Il riconoscimento di linguaggi e la loro traduzione sono due formulazioni differenti di un problema, che sono facilmente riducibili l'uno all'altro. Infatti, dato il problema di stabilire se una determinata stringa x appartenga al linguaggio L , tale problema può anche essere impostato come la traduzione $\tau_L(x)$, per cui $\tau_L(x) = 1$ se $x \in L$, $\tau_L(x) = 0$ altrimenti. Viceversa, data la traduzione $\tau : V_1^* \rightarrow V_2^*$, si può definire il linguaggio seguente:

$L_\tau = \{z \mid z = x\$y, x \in V_1^*, y = \tau(x) \in V_2^*, \$ \notin (V_1 \cup V_2)\}$ Ovvero il linguaggio formato da una stringa e la sua traduzione, separati dal simbolo $\$$. Un dispositivo che riconosce il linguaggio L_τ può essere utilizzato come trasduttore che calcola τ : per ogni x , infatti, è possibile enumerare tutte le $y \in V_2^*$ e verificare se $x\$y \in L_\tau$ oppure no. Prima o poi, se la funzione $\tau(x) \neq \perp$, verrà trovata una stringa per cui la macchina risponderà positivamente.

5.2 Tesi di Church

Le macchine di Turing, come visto in precedenza, sono il formalismo più potente che si ha a disposizione per il calcolo computazionale: ogni programma eseguibile da un calcolatore moderno può essere eseguito anche da una macchina di Turing. Dunque, le macchine di Turing hanno la stessa espressività dei linguaggi di programmazione ad alto livello, detti anche Turing completi.

Più formalmente, data una TM M , è possibile costruire un programma, scritto in un determinato linguaggio di programmazione (come C, Java ecc...), che simuli il comportamento di M , purché il calcolatore disponga di una quantità di memoria sufficiente durante l'esecuzione. Inoltre, dato un programma scritto in un determinato linguaggio di programmazione, è possibile costruire una TM M che calcoli la stessa funzione calcolata dal programma.

Tesi 5.2.1 (Tesi di Church - Prima Parte). *Non esiste alcun formalismo, per modellare una determinata computazione meccanica, che sia più potente delle TM e dei formalismi ad essi equivalenti.*

La tesi di Church non è un teorema perchè per sua natura non è dimostrabile, in quanto andrebbe verificato ogni qual volta si introducesse un nuovo formalismo computazionale.

In base a questo risultato si può affermare che, se si riesce a dimostrare che un determinato problema è risolubile da una TM, allora è sicuramente possibile risolverlo mediante un modello matematico di calcolo, che abbia la stessa potenza delle macchine di Turing. Viceversa, se si dimostra che un problema non può essere risolto da una TM, allora è verificato che tale problema è irrisolvibile da qualunque modello matematico.

Si introduce ora il concetto di algoritmo, centrale nell'informatica. Per algoritmo si intende la procedura di risoluzione di un problema mediante un dispositivo automatico di calcolo. Gli algoritmi si possono anche intendere come un metodo astratto di descrizione dei programmi eseguibili, ovvero una sequenza di comandi che, una volta eseguiti, portano alla risoluzione del problema.

Ogni algoritmo ha le seguenti proprietà:

1. Un algoritmo deve contenere una sequenza finita di istruzioni;
2. Ogni istruzione deve essere immediatamente eseguibile da qualche procedimento meccanico di calcolo, ossia deve esistere un processore che sia in grado di comprendere univocamente le istruzioni e di eseguirle producendo risultati precisi ed inequivocabili;
3. Il processore è dotato di celle di memoria in cui possono essere immagazzinati i risultati intermedi;
4. La computazione è discreta, ossia l'informazione è codificata in forma digitale e la computazione procede attraverso passi discreti;
5. Gli algoritmi vengono eseguiti deterministicamente;
6. Non esiste un limite finito sui dati di ingresso e di uscita: ogni calcolatore può ricevere in ingresso o emettere in uscita stringhe di lunghezza arbitraria;
7. Non esiste un limite alla quantità di memoria richiesta per effettuare i calcoli;
8. Non esiste un limite al numero di passi discreti richiesti per effettuare un calcolo ed è dunque possibile avere computazioni infinite.

La tesi di Church non si ferma solo nell'affermazione che nessun formalismo sia più espressivo delle TM, ma afferma anche che nessun algoritmo è in grado di risolvere un problema che non è risolubile da una TM. Formalmente:

Tesi 5.2.2 (Tesi di Church - Seconda Parte). *Ogni algoritmo per la soluzione automatica di un problema può essere codificato in termini di una TM (o di un formalismo a potenza equivalente).*

Teorema 5.2.1. *Ogni funzione (o problema), per cui esiste una TM che la calcoli (o risolva), si dice computabile o calcolabile (o risolubile). Un problema risolubile la cui risposta sia booleana ed esistente per ogni valore del dominio di definizione (ossia è formalizzato da una funzione calcolabile e totale) si dice decidibile.*

Grazie alla seconda parte della tesi di Church si può affermare che è possibile studiare i limiti del calcolo automatico indipendentemente dalla formalizzazione del problema e del particolare modello computazionale.

5.3 Enumerazione delle TM

Le macchine di Turing possono essere viste come dei calcolatori astratti, specializzati nella risoluzione di un solo problema e non programmati. Ci si pone quindi la domanda: 'le TM sono in grado di simulare i calcolatori programmabili e di risolvere i problemi da \mathbb{N} a \mathbb{N} '?

Per poter rispondere a tale domanda, si noti innanzitutto che dato un qualsiasi insieme S , questo può essere enumerato algebricamente se è possibile stabilire una biiezione fra l'insieme S e l'insieme dei numeri naturali \mathbb{N} , calcolabile attraverso un algoritmo o da una TM. Alla stessa maniera è possibile enumerare algebricamente l'insieme delle TM tramite una biiezione $E : \{TM\} \leftrightarrow \mathbb{N}$. Tale biiezione è implementabile da un algoritmo che riceve in ingresso un numero n e ritorna la n -esima macchina di Turing. Un'enumerazione calcolabile da una TM viene chiamata Gödelizzazione, mentre il numero naturale biiektivamente associato da tale enumerazione ad una TM è detto numero di Gödel della TM.

Inoltre, è noto che una TM M può risolvere una funzione $f_M : D \rightarrow R$, con D ed R opportunamente codificati nell'alfabeto di M , dunque si indicherà con f_y la funzione calcolata dalla y -esima macchina di Turing, indicata con $M_y = E(y)$.

5.4 Macchine di Turing Universali

Le UTM (Universal Turing Machines) sono TM in grado di modellare dispositivi generali di risoluzione dei problemi, in cui il problema da risolvere non viene codificato nella struttura del dispositivo (come avviene per le TM), ma gli viene fornito come input, assieme ai dati con cui operare (esattamente come gli odierni calcolatori). Le UTM sono quindi MT che calcolano la funzione $g(y, x) = f_y(x)$, in cui y rappresenta la funzione f_y , calcolata dalla TM M_y , ed x rappresenta l'ingresso su cui M_y opera; calcolano, dunque, il valore della funzione f_y applicata ad x .

Come si può osservare, la UTM così definita non sembra appartenere all'insieme delle macchine di Turing, in quanto la funzione $g(y, x)$ è opera da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ad \mathbb{N} , anziché da \mathbb{N} ad \mathbb{N} come tutte le altre TM. È però possibile, come già dimostrato in precedenza, definire una biiezione calcolabile algebricamente, tramite la funzione:

$$d(x, y) = x + \frac{(x + y)(x + y - 1)}{2}$$

che mette in corrispondenza l'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, composto dalle coppie di numeri naturali, all'insieme \mathbb{N} , composto da numeri naturali.

Graficamente, è come visitare le coppie di punti nel piano in un ordine prefissato, dove la posizione di un punto nella visita rappresenta il numero naturale associato alla coppia che identifica le coordinate del punto.

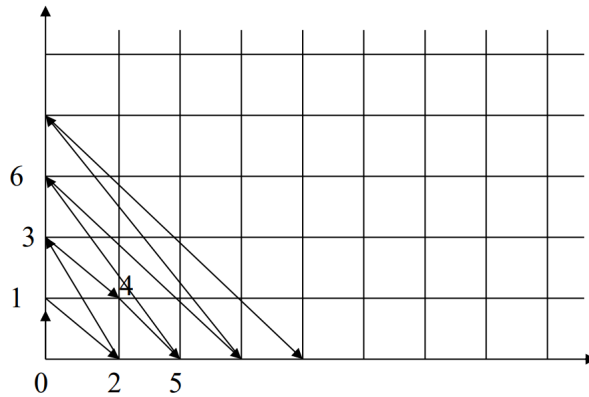


Figura 5.1: Grafico di biiezione

Si osservi che la funzione $g(y, x)$ è computabile da una macchina di Turing, ossia $\exists i \in \mathbb{N} : f_i = g$, ed è possibile calcolarla tramite i seguenti passaggi:

1. Si sceglie un alfabeto finito A per codificare i numeri naturali ed ogni altra informazione richiesta per la computazione;
2. Si traduce la rappresentazione di n in un'opportuna rappresentazione della coppia $\langle x, y \rangle$ corrispondente ad n . La rappresentazione decimale di n può essere tradotta nelle due rappresentazioni decimali di x ed y , separate dal simbolo \$;
3. Si traduce y in un'opportuna codifica della TM y -esima M_y nella enumerazione di Gödel;
4. Si simula la computazione di M_y su x .

Teorema 5.4.1. *Per ogni x ed ogni y , esiste e si può costruire una macchina di Turing universale in grado di calcolare $g(y, x) = f_y(x)$*

Tramite questo teorema si può affermare che è possibile creare una macchina di Turing che simuli il comportamento degli odierni calcolatori "general purpose".

5.5 Problemi Algoritmicamente Irrisolubili

Come si è visto in precedenza, tutte le funzioni computabili $f_y : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ si possono enumerare: questo significa che la cardinalità dell'insieme delle funzioni computabili è pari ad \aleph_0 , ovvero alla cardinalità dei numeri naturali \mathbb{N} . L'insieme delle funzioni $\{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}$ contiene la classe delle funzioni $\{f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}\}$, in quanto $\{0, 1\} \subseteq \mathbb{N}$. Quindi, poichè $|\{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}| \geq |\{f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}\}| = \wp(\mathbb{N}) = 2^{\aleph_0}$, si può dedurre che la cardinalità della classe delle funzioni da \mathbb{N} ad \mathbb{N} è strettamente maggiore della cardinalità della classe delle funzioni computabili: dunque, gran parte delle funzioni di \mathbb{N} non può essere calcolata.

Ora, quando si vuole definire una funzione si usa un linguaggio che la esprima, ovvero un sottoinsieme del monoide libero su di un determinato alfabeto finito: dunque, il linguaggio è un insieme numerabile. Si ricava quindi che la classe delle funzioni denotabili è a sua volta numerabile.

Quando si scrive un programma, ci sono diverse proprietà che si vorrebbero garantire. Una di queste è la terminazione del programma, ovvero la garanzia che, dato un qualsiasi ingresso conforme al programma stesso, esso termini la propria computazione e non vada, dunque, in un ciclo infinito. Nella realtà, però, non è possibile garantire a priori la terminazione del programma per un generico valore in ingresso, nè decidere attraverso un algoritmo se ciò possa avvenire in corrispondenza di uno specifico valore in ingresso. Più in generale, il problema della terminazione del calcolo automatico è in generale non decidibile, nonostante tale problema sia definibile. Si è quindi constatato che esistono problemi definibili, ma che non possono essere risolti algoritmicamente: dunque, l'insieme dei problemi definibili contiene strettamente l'insieme dei problemi risolvibili, nonostante entrambi siano numerabili e con la stessa cardinalità.

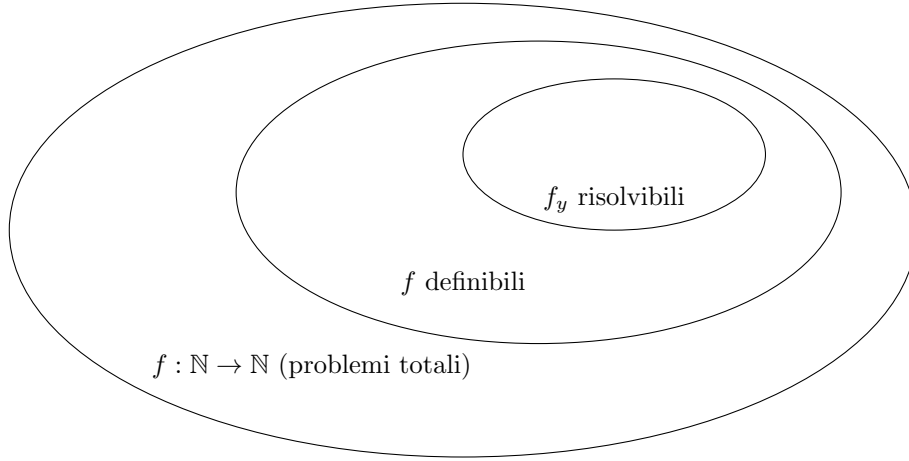


Figura 5.2: Gerarchia dei problemi

Teorema 5.5.1 (Halting Problem). *Nessuna TM può calcolare la funzione $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ definita nel seguente modo:*

$$g(x, y) = \text{if } f_y(x) = \perp \text{ then } 1 \text{ else } 0$$

La dimostrazione di tale teorema si ottiene tramite la tecnica della diagonale, detta anche metodo di Cantor: l'obiettivo è quello di mostrare che un'enumerazione di oggetti di cardinalità almeno 2, non è completa, ossia che un oggetto che si vorrebbe trovare all'interno di tale enumerazione in realtà non è presente. L'enumerazione di una successione può essere rappresentata come una tabella con un numero infinito di righe. L'elemento che non compare in tale tabella viene individuato per assurdo considerando inizialmente la diagonale d (dunque d_i è l'elemento che si trova all' i -esima riga e all' i -esima colonna) e poi componendo una diagonale d' tale che, per ogni i , d'_i sia diverso da d_i .

Teorema 5.5.2. *Nessuna TM è in grado di calcolare la funzione totale k definita nel seguente modo:*

$$k(x) = \text{if } f_x(x) \neq \perp \text{ then } 1 \text{ else } 0$$

Questo problema rappresenta un caso speciale della funzione $g(y, x)$ in quanto $k(x) = g(x, x)$, dunque la calcolabilità della funzione k è direttamente correlata alla calcolabilità della funzione g . Si noti che, in generale, se un problema è irrisolvibile, può accadere che un suo caso particolare sia risolvibile, mentre una sua generalizzazione è necessariamente irrisolvibile. Al contrario, se un problema è risolvibile,

può accadere che una sua generalizzazione diventi irrisolvibile, mentre un suo caso particolare rimane sicuramente risolvibile.

Un altro teorema certamente importante è il seguente:

Teorema 5.5.3. *Nessuna TM è in grado di calcolare la funzione k definita nel seguente modo:*

$$k(y) = \text{if } f_y(x) \neq \perp \text{ then } 1 \text{ else } 0$$

Da un punto di vista pratico questo problema è interessante perchè qualifica tutti i possibili dati in ingresso. Afferma, infatti, l'irrisolvibilità del problema di decidere se un certo programma termini la propria esecuzione per qualsiasi dato in ingresso o se, al contrario, per qualche dato il programma andrebbe in loop. Nel caso precedente, invece, si era interessati al problema di sapere se un certo programma con certi dati avrebbe terminato o meno la propria esecuzione.

In definitiva, si è constatato che esistono problemi non risolvibili algoritmicamente. Ciò non esclude comunque la possibilità di trovare una soluzione per tali problemi, in quanto non tutti i problemi sono risolvibili tramite un procedimento algoritmico.

5.6 Problemi di Decisione

Un problema di decisione è una domanda che ha come uniche risposte sì o no (0, 1). Questo può anche essere espresso come un problema di appartenenza di un determinato elemento ad un certo insieme. Più in generale si noti che una qualsiasi proprietà di un determinato elemento di un insieme può essere formalizzata come un suo sottoinsieme (ad esempio, la proprietà di terminazione del calcolo per ogni valore dei dati in ingresso individua un sottoinsieme dell'insieme di tutti i programmi).

In questa sezione si prendono in particolare considerazione i sottoinsiemi di \mathbb{N} , indicati convenzionalmente con $S \subseteq \mathbb{N}$. Quindi, formalmente, dato un determinato elemento $x \in \mathbb{N}$ e un insieme S , si cerca di capire se x appartenga ad S .

Definizione 5.6.1. *La funzione caratteristica $c_S : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ di un insieme S è definita come segue:*

$$c_S(x) = \text{if } x \in S \text{ then } 1 \text{ else } 0$$

La risolvibilità del problema di appartenenza ad un insieme (detta anche ricorsività dell'insieme) dipende dalla computabilità della funzione caratteristica c_S , come definito di seguito:

Definizione 5.6.2. *Un insieme S è ricorsivo (o decidibile) se e solo se la sua funzione caratteristica è computabile.*

Si noti, inoltre, che per ogni insieme S , la sua funzione caratteristica c_S è totale: infatti, dato un qualsiasi elemento $x \in \mathbb{N}$, questo necessariamente appartiene o non appartiene all'insieme.

Definizione 5.6.3. *Un insieme S è ricorsivamente enumerabile (o semidecidibile) se e solo se è l'insieme vuoto oppure è l'immagine di una funzione totale e computabile g_s , ovvero:*

$$S = I_{g_s} = \{x \mid \exists y, y \in \mathbb{N} \wedge x = g_s(y)\}$$

Gli insiemi decidibili devono il loro nome al fatto che il problema di appartenenza può essere risolto tramite un algoritmo meccanico e che, quindi, una TM che implementi la loro funzione caratteristica fornisce necessariamente una risposta al quesito se $x \in S, \forall x \in \mathbb{N}$. Inoltre, per ogni insieme ricorsivamente numerabile S è possibile costruire una sequenza $x_0 = g_s(0), x_1 = g_s(1), x_2 = g_s(2), \dots$ tale per cui, se $x \in S$, allora esiste i tale che $x = g_s(i)$. In questo caso, esaminando la sequenza di elementi $\{x_i\}$ si riuscirà a trovare l'elemento x , concludendo che questo appartiene all'insieme S . Perciò, se per un qualsiasi i risultasse che $x \notin \{g_s(i) \mid 0 \leq i \leq \bar{i}\}$ non si potrebbe concludere nè che $x \in S$, nè che $x \notin S$: per questo motivo, l'insieme S viene anche detto semidecidibile.

Teorema 5.6.1. *Se S è ricorsivo, è anche ricorsivamente enumerabile.*

S è ricorsivo se e solo se sia S che $\bar{S} = \mathbb{N} - S$ sono ricorsivamente enumerabili.

Quindi, riepilogando, si dice che un insieme S è:

- Ricorsivo (o Decidibile), se e solo se la sua funzione caratteristica c_S è computabile;
- Ricorsivamente enumerabile (o Semidecidibile), se e solo se:
 - S è l'insieme vuoto;

- S è l'immagine di una funzione g_S totale e computabile (detta generatrice);
quindi, $S = I_{g_S} = \{g_S(0), g_S(1), g_S(2), \dots\}$

Si consideri ora il seguente teorema:

Teorema 5.6.2. *Per ogni insieme S , se $i \in S$ implica che f_i sia totale e se per ogni funzione f totale e computabile, esiste $i \in S \mid f = f_i$, allora S non è ricorsivamente enumerabile.*

Informalmente, questo teorema stabilisce che tutte le funzioni totali computabili non sono ricorsivamente enumerabili (mentre le funzioni parziali computabili lo sono). Dunque, tale teorema afferma implicitamente che non esiste nessun formalismo ricorsivamente enumerabile in grado di definire tutte e sole le funzioni totali e computabili: infatti, gli FSA sono in grado di definire le funzioni totali, ma non tutte, le TM definiscono tutte le funzioni computabili, ma anche quelle non totali, e un linguaggio di programmazione (come il C) è in grado di definire tutti gli algoritmi, ma anche quelli che non terminano mai.

Si cerca quindi di comprendere se sia possibile eliminare le funzioni non totali: per far ciò, si prenda in considerazione una generica funzione parziale, ad esempio, arricchendo \mathbb{N} con il valore $\{\perp\}$ o con qualsiasi altro simbolo che indichi che la funzione non è definita per certi valori. Tale trasformazione da funzione parziale a totale, però, non può essere applicata perchè nel passaggio è possibile perdere la computabilità della funzione. Questo risultato è enunciato nel seguente teorema:

Teorema 5.6.3. *Non esiste una funzione totale e computabile h che sia un'estensione della seguente funzione: $g(x) = \text{if } f_x(x) \neq \perp \text{ then } f_x(x) + 1 \text{ else } \perp$*

Tale teorema, afferma quindi che non è possibile estendere una funzione parziale ad una totale, in quanto si potrebbe perdere la sua computabilità.

Vale anche il seguente risultato:

Teorema 5.6.4. *Un insieme S è ricorsivamente enumerabile se e solo se $S = D_h$, in cui h è una funzione parziale e computabile ($S = \{x \mid h(x) \neq \perp\}$), oppure se e solo se $S = I_g$, in cui g è una funzione parziale e computabile ($S = \{x \mid x = g(y), y \in \mathbb{N}\}$).*

Quindi, dato l'insieme $K = \{x \mid f(x) \neq \perp\}$ questo è semidecidibile perchè $K = D_h$, con $h(x) = f_x(x)$, ma è anche indecidibile in quanto la funzione caratteristica dell'insieme K , definita come $c_K(x) = \text{if } f_x(x) \neq \perp \text{ then } 1 \text{ else } 0$, non è computabile. Si è appena dimostrato che esistono insiemi che sono semidecidibili, ma allo stesso tempo indecidibili.

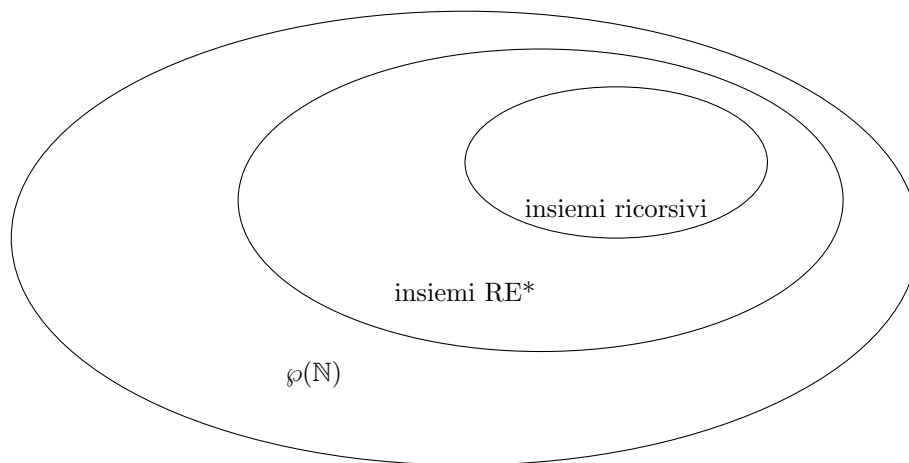


Figura 5.3: Gerarchia degli insiemi

*Con RE si indicano gli insiemi Ricorsivamente Enumerabili.

Si noti che tutte le inclusioni sono strette.

5.7 Teoremi di Kleene e Rice

Teorema 5.7.1 (Teorema di Kleene del punto fisso). *Sia t una qualunque funzione totale e computabile. Allora è sempre possibile trovare un intero p , tale per cui:*

$$f_p = f_{t(p)}$$

La funzione f_p è detta punto fisso di t , perchè t trasforma f_p in f_p stessa.

Teorema 5.7.2 (Teorema di Rice). *Sia F un insieme generico di funzioni computabili. L'insieme $S = \{x \mid f_x \in F\}$ degli indici delle TM che calcolano le funzioni di F , è ricorsivo se e solo se $F = \emptyset$ oppure F è l'insieme di tutte le funzioni computabili.*

Il teorema di Rice ha un forte impatto pratico negativo, in quanto afferma che, in tutti i casi non banali, S non è decidibile. Non è quindi possibile stabilire alitmicamente se un dato algoritmo sia in grado di risolvere un determinato problema, nè se due programmi siano equivalenti (ossia se calcolino la stessa funzione). Il grande impatto pratico del teorema di Rice deriva dal fatto che il concetto di sottoinsieme F di funzioni computabili è un'espressione formale del concetto generale di proprietà di problemi risolvibili: una proprietà degli elementi di un insieme è un sottoinsieme dell'insieme dato e una funzione computabile è una formalizzazione del concetto di problema risolvibile; quindi, il teorema di Rice afferma che non è possibile stabilire se un determinato algoritmo risolve un problema pur risolvibile che goda di una qualsiasi proprietà non banale.

Capitolo 6

Logica Proposizionale

Parte II

Algoritmi e Strutture Dati

Capitolo 7

Complessità del Calcolo

Nei capitoli precedenti si è dimostrato come esistano alcuni problemi che, pur essendo ben definiti, non sono risolvibili algoritmicamente, per cui non esiste una TM in grado di risolvere quel determinato problema. Un'altra difficoltà da tenere in considerazione quando si manipolano i problemi, risiede nel tempo di esecuzione, ovvero il tempo impiegato dal programma per fornire una soluzione: se non è possibile ottenere una soluzione in un tempo ragionevole, ovviamente, il problema diventa intrattabile, nonostante sia teoricamente risolvibile.

Il concetto di intrattabilità è strettamente correlato al concetto di complessità del calcolo: più il problema è complesso e meno questo diventa trattabile. Informalmente, la complessità indica una misura del prezzo da pagare per risolvere il problema. Le risorse che si utilizzano per la risoluzione di un problema sono principalmente due: lo spazio, ovvero la memoria necessaria all'algoritmo, e il tempo richiesto per produrre la soluzione. Si parlerà quindi di complessità spaziale e di complessità temporale.

Inoltre, la soluzione proposta per un dato problema occupa le risorse in due modi: esiste infatti una componente costante, che non dipende quindi dai dati di ingresso, e una componente che invece è funzione della dimensione dei dati di ingresso (di più complessa analisi, ma anche più attinente alla realtà).

Si osservi inoltre che le due risorse, quella temporale e quella spaziale, seppur sembrano indipendenti l'una dall'altra, sono in realtà correlate: alla riduzione di utilizzo di una risorsa aumenta l'altra e viceversa.

7.1 Analisi di complessità

La complessità del calcolo dipende dalla dimensione e, spesso, anche dai particolari valori assunti dai dati in ingresso. Per questo motivo, si rende necessario effettuare un'analisi del caso pessimo, del caso medio e del caso ottimo, in funzione della dimensione dei dati in ingresso. Più formalmente, tali casi rappresentano rispettivamente la scelta di ingressi per cui viene eseguito il massimo numero di istruzioni nel programma, il comportamento del programma in relazione alla possibile distribuzione dei dati e la scelta di input per cui viene eseguito il minor numero di istruzioni.

In generale, il caso ottimo non è di particolare interesse e il caso medio richiede la conoscenza della distribuzione dei dati in ingresso (non sempre nota). Il caso pessimo, invece, è particolarmente interessante in quanto fornisce i peggiori risultati ottenibili dall'algoritmo in termini di consumo di spazio o tempo; si garantisce quindi che tutte le soluzioni proposte dall'algoritmo abbiano un dispendio di risorse minore rispetto al caso pessimo, indipendentemente dalla tipologia degli ingressi. Dunque, se il caso pessimo è ritenuto accettabile, allora anche tutti gli altri casi lo sono.

Inoltre, a differenza di quanto analizzato per la risolvibilità dei problemi, la complessità non è collegata solo al problema che si vuole affrontare, ma dipende anche dell'algoritmo che si utilizza per risolverlo.

Nel capitolo sugli automi, è stato più volte affermato che le Macchine di Turing sono il formalismo più potente che si ha a disposizione per la risoluzione di problemi, dunque, risulta ragionevole definire la complessità temporale e spaziale impiegando un tale modello.

Definizione 7.1.1. Sia M una TM deterministica a k nastri e sia $x \in I^*$. Sia $c_0 \vdash c_1 \vdash \dots \vdash c_r$ una computazione, ovvero una sequenza di transizioni di M tale che $c_0 = \langle q_0, \uparrow x, \uparrow Z_0, \dots, \uparrow Z_0 \rangle$ e $c_i = \langle q_i, x_i \uparrow y_i, \alpha_{i1} \uparrow \beta_{i1}, \dots, \alpha_{ik} \uparrow \beta_{ik} \rangle$, in cui c_r è una configurazione di arresto, se esiste. Allora, la

funzione che rappresenta la complessità temporale T_M di M è definita nel seguente modo:

$$T_M = \text{if la computazione termina then } r \text{ else } \infty.$$

Informalmente, quindi, la complessità temporale viene definita come una funzione che fornisce il numero esatto di passi richiesti da una TM per raggiungere la propria configurazione di arresto, se esiste, a partire dalla configurazione iniziale, per una qualsiasi stringa in ingresso. analogamente, si può definire la complessità spaziale come una funzione che fornisce il numero massimo di celle del nastro utilizzate.

Definizione 7.1.2. Siano M , x , c_0, \dots, c_r definiti come nella definizione 7.1.1. La funzione che rappresenta la complessità spaziale S_M di M è definita nel seguente modo:

$$S_M = \sum_{j=1}^k \max_{i \in \{0,1,\dots,r\}} (|\alpha_{ij}|)$$

Inoltre, vale che:

$$\forall x, \frac{S_M}{k} \leq T_M(x)$$

Si noti, inoltre, che la definizione di $S_M(x)$ prende in considerazione solamente i nastri di memoria e ignora sia il nastro di ingresso che il nastro di uscita per il calcolo della complessità.

Secondo le definizioni 7.1.1 e 7.1.2, sia T_M che S_M sono funzioni definite su I^* , ma nella pratica la complessità di una soluzione dipende sia dal contenuto dell'ingresso che dalla sua dimensione: a partire da questa osservazione, si erano introdotti i concetti di complessità nel caso pessimo, medio e ottimo, che si possono ridefinire nel seguente modo, alla luce delle definizioni appena date:

Definizione 7.1.3. Il caso pessimo, ottimo e medio sono così definiti:

- Caso pessimo: $T_M(n) = \max_{|x|=n} T_M(x)$;
- Caso ottimo: $T_M(n) = \min_{|x|=n} T_M(x)$;
- Caso medio: $T_M(n) = \frac{\sum_{|x|=n} T_M(x)}{|I|^n}$

Una volta analizzata la complessità temporale tramite il formalismo delle macchine di Turing, si sposta l'attenzione sugli altri formalismi analizzati nel capitolo riguardante gli automi, in particolare sugli automi a stati finiti, sugli automi a pila e sulle macchine di Turing a singolo nastro.

Dato un automa a stati finiti A , si definisce la complessità temporale T_A come l'intero i tale che $\delta^i(q_0, x) = q$ per qualche q , se esiste, ovvero il numero di transizioni effettuate per processare la stringa in ingresso x a partire dallo stato iniziale. Se $\delta^*(q_0, x)$ è indefinita, si pone $T_A = |x|$, ovvero pari alla lunghezza della stringa in ingresso. T_A , evidentemente, indica il numero di mosse compiute da A durante il riconoscimento della stringa x . Dunque, per ogni automa a stati finiti la complessità temporale T_A cresce in maniera lineare con il crescere della lunghezza della stringa. Al contrario, la sua complessità spaziale S_A non varia mai, in quanto gli FSA sono composti da un numero finito di stati definiti a priori, indipendentemente dalla lunghezza della stringa letta.

Dato un automa a pila A , si può analizzare sia la complessità temporale in funzione della stringa in ingresso ($T_A(x)$), sia in funzione della lunghezza della stringa ($T_A(n)$). Come per gli automi a stati finiti, quando si calcola la complessità temporale in funzione della stringa in ingresso, si contano il numero di passi che portano da una configurazione iniziale ad una configurazione finale. Quando invece si vuole utilizzare come parametro la lunghezza della stringa, la complessità temporale è calcolata come il massimo di tutte le complessità temporali in funzione delle stringhe in ingresso della lunghezza considerata. La complessità spaziale S_A , invece, viene associata al numero di celle di memoria della pila che vengono occupate dall'automato per portare a termine la computazione.

La complessità temporale e spaziale per le macchine di Turing a nastro singolo sono definite esattamente come per le TM a k -nastri. Data una macchina di Turing M a singolo nastro, la complessità spaziale $S_M(x)$, che corrisponde al massimo numero di celle del nastro di memoria occupate da M durante la computazione a fronte della stringa in ingresso x , non può mai essere minore di $|x|$, in quanto l'unico nastro presente in M è sia di ingresso, che di memoria, che di uscita. Ciò significa che l'unico

nastro presente, di cui si deve analizzare l'occupazione, è precaricato con la stringa di ingresso x . Per quanto riguarda la complessità spaziale, le TM a singolo nastro sono meno efficienti delle TM multinastro e, in alcuni casi, di altri formalismi analizzati.

In generale, le macchine di Turing multinastro sono il formalismo più potente ed efficiente per la computazione di problemi.

7.2 Comportamento asintotico

Nella maggior parte dei casi si analizza la complessità spaziale o temporale di un determinato algoritmo per valori molto grandi dell'ingresso x , ovvero per x che tende ad infinito. In questi casi si analizza il comportamento asintotico dell'algoritmo, che fornisce un'approssimazione abbastanza precisa sul dispendio di risorse. La notazione dell'ordine di grandezza di una funzione, nota sotto il nome di notazione theta-grande (Θ), sottolinea i fattori dominanti che influenzano la crescita della sua complessità in funzione della dimensione dell'ingresso. Oltre alla notazione theta-grande, esistono anche le notazioni o-grande (O) e omega-grande (Ω), le cui definizioni sono riportate di seguito:

Definizione 7.2.1 (Notazione O). Siano $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ed $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ due funzioni. La funzione g è in $O(f)$ se e solo se esistono due numeri positivi c ed n_0 tali che per ogni $n \geq n_0$, $g(n) \leq cf(n)$. Ciò significa che $O(f) = \{g(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid \exists c, n_0 > 0 \wedge \forall n \geq n_0, g(n) \leq cf(n)\}$

Inoltre, vale che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow f(n) \in O(g(n))$$

Definizione 7.2.2 (notazione Ω). Siano $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ed $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ due funzioni. La funzione g è in $\Omega(f)$ se e solo se esistono due numeri positivi c ed n_0 tali che per ogni $n \geq n_0$, $cf(n) \leq g(n)$. Ciò significa che $\Omega(f) = \{g(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid \exists c, n_0 > 0 \wedge \forall n \geq n_0, cf(n) \leq g(n)\}$.

Inoltre, vale che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \Rightarrow f(n) \in \Omega(g(n))$$

La notazione o-grande rappresenta quindi un limite superiore per la funzione data, mentre la notazione theta-grande rappresenta un limite inferiore. Nello specifico è di interesse pratico prendere in considerazione il minimo limite superiore e il massimo limite inferiore.

Definizione 7.2.3 (notazione Θ). Siano $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ed $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ due funzioni. La funzione g è in $\Theta(f)$ se e solo se esistono tre numeri positivi c_1, c_2 ed n_0 tali che per ogni $n \geq n_0$, $c_1 f(n) \leq g(n) \leq c_2 f(n)$. Ciò significa che $\Theta(f) = \{g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid \exists c_1, c_2, n_0 > 0 \wedge n \geq n_0, c_1 f(n) \leq g(n) \leq c_2 f(n)\}$

Inoltre, vale che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c > 0 \Rightarrow f(n) \in \Theta(g(n))$$

Dalla definizione 7.2.3, si può dedurre che la funzione $f \in \Theta(g)$ se e solo se $f \in O(g)$ e $f \in \Omega(g)$.

Inoltre, Le notazioni indicate precedentemente godono delle seguenti proprietà:

- Transittività:

- se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \Theta(h(n))$, allora $f(n) \in \Theta(h(n))$;
- se $f(n) \in O(g(n))$ e $g(n) \in O(h(n))$, allora $f(n) \in O(h(n))$;
- se $f(n) \in \Omega(g(n))$ e $g(n) \in \Omega(h(n))$, allora $f(n) \in \Omega(h(n))$;

- Riflessività:

- $f(n) \in \Theta(f(n))$;
- $f(n) \in O(f(n))$;
- $f(n) \in \Omega(f(n))$;

- Simmetria: $f(n) \in \Theta(g(n)) \iff g(n) \in \Theta(f(n))$;

- Simmetria trasposta: $f(n) \in O(g(n)) \iff g(n) \in \Omega(f(n))$.

Inoltre, la relazione Θ è una relazione di equivalenza.

7.3 Accelerazione Lineare

Si è precedentemente affermato che la complessità della soluzione di un determinato problema può essere migliorata mediante opportune modifiche all'algoritmo risolutivo. A tal proposito si enunciano i seguenti teoremi che pongono alcuni limiti al miglioramento degli algoritmi:

Teorema 7.3.1. *Dato L un linguaggio accettato da una TM M multinastro (deterministica o meno) di complessità spaziale $S_M(n)$, allora, per ogni costante $c \in \mathbb{R}^+$, L è accettato anche da un'opportuna TM M' tale che $S_{M'}(n) < c \cdot S_M(n)$.*

Teorema 7.3.2. *Dato L un linguaggio accettato da una TM M multinastro (deterministica o meno) di complessità spaziale $S_M(n)$, allora L è accettato anche da un'opportuna TM M' multinastro con $k = 1$ con la medesima complessità spaziale, concatenando i contenuti dei k nastri di M .*

Teorema 7.3.3. *Dato L un linguaggio accettato da una TM M multinastro (deterministica o meno) di complessità spaziale $S_M(n)$, allora, per ogni costante $c \in \mathbb{R}^+$, L è accettato anche da un'opportuna TM M' multinastro con $k = 1$ tale che $S_{M'}(n) < c \cdot S_M(n)$.*

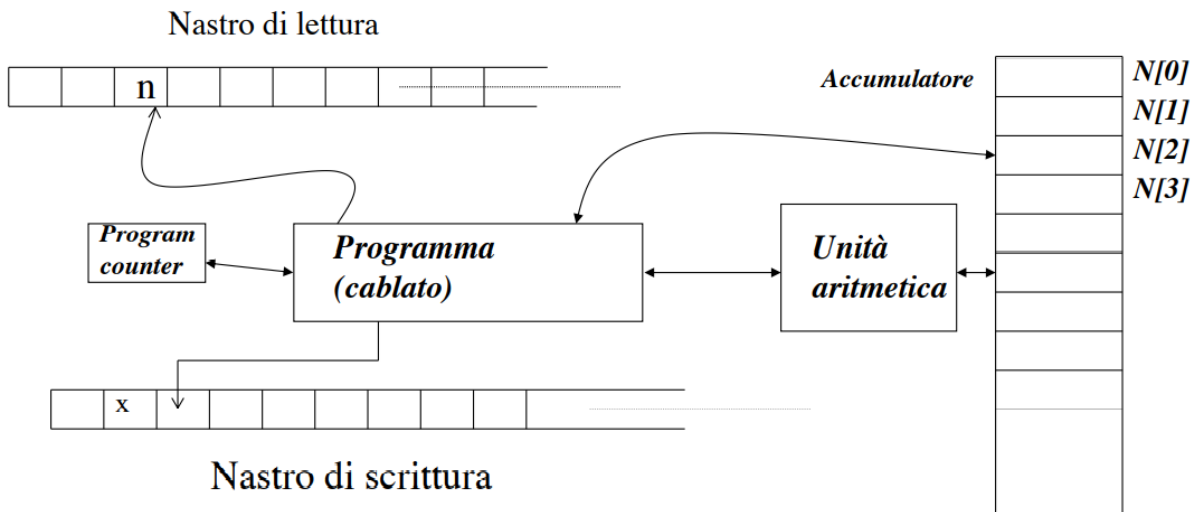
In generale, per la complessità temporale non si hanno risultati simili, ma è possibile formulare alcuni teoremi:

Teorema 7.3.4. *Dato L un linguaggio accettato da una TM M multinastro (deterministica o meno) di complessità temporale $T_M(n)$, allora, per ogni costante $c \in \mathbb{R}^+$, L è accettato anche da un'opportuna TM M' con $k+1$ nastri tale che $T_{M'}(n) = \max\{n+1, c \cdot T_M(n)\}$.*

I teoremi qui introdotti valgono anche per le moderne macchine di Von Neumann, in quanto possiamo avere speedup lineari arbitrariamente grandi (ovviamente, entro i limiti fisici della termodinamica), aumentando il parallelismo, ma miglioramenti più che lineari si possono ottenere solamente modificando l'algoritmo impiegato.

7.4 Macchina RAM

La macchina RAM (o Random Access Memory) è un modello classico ispirata all'architettura di Von Neumann. Tale macchina è costituita da un nastro in ingresso, un nastro in uscita, un programma rappresentato da un numero finito di istruzioni, un contatore che indica l'istruzione corrente da eseguire e una memoria ad accesso diretto.



Sia i nastri che la memoria sono composti da un numero illimitato di celle, ma al contrario dei nastri di ingresso e uscita che si possono accedere in maniera sequenziale, la memoria è indirizzata e si può accedere a una sua cella attraverso un numero intero $i > 0$ che indica l'indirizzo di tale cella di memoria. La cella 0 della memoria è un registro speciale, detto accumulatore, che si utilizza per contenere il valore

Tabella 7.1: istruzioni macchina RAM

ISTRUZIONE		SEMANTICA
LOAD=	x	$M[0] \leftarrow x$
LOAD	x	$M[0] \leftarrow M[x]$
LOAD*	x	$M[0] \leftarrow M[M[x]]$
STORE	x	$M[x] \leftarrow M[0]$
STORE*	x	$M[M[x]] \leftarrow M[0]$
ADD=	x	$M[0] \leftarrow M[0] + x$
ADD	x	$M[0] \leftarrow M[0] + M[x]$
ADD*	x	$M[0] \leftarrow M[0] + M[M[x]]$
SUB=	x	$M[0] \leftarrow M[0] - x$
SUB	x	$M[0] \leftarrow M[0] - M[x]$
SUB*	x	$M[0] \leftarrow M[0] - M[M[x]]$
MULT=	x	$M[0] \leftarrow M[0] * x$
MULT	x	$M[0] \leftarrow M[0] * M[x]$
MULT*	x	$M[0] \leftarrow M[0] * M[M[x]]$
DIV=	x	$M[0] \leftarrow M[0] \setminus x$
DIV	x	$M[0] \leftarrow M[0] \setminus M[x]$
DIV*	x	$M[0] \leftarrow M[0] \setminus M[M[x]]$
READ	x	$M[x] \leftarrow \text{input}$
READ*	x	$M[M[x]] \leftarrow \text{input}$
WRITE=	x	stampa x
WRITE	x	stampa $M[x]$
WRITE*	x	stampa $M[M[x]]$
JUMP	<i>label</i>	$PC \leftarrow \text{label}$
JGZ	<i>label</i>	$PC \leftarrow \text{label}$ if $M[0] > 0$
JLZ	<i>label</i>	$PC \leftarrow \text{label}$ if $M[0] < 0$
JZ	<i>label</i>	$PC \leftarrow \text{label}$ if $M[0] = 0$
HALT		terminazione

di uno dei due operandi delle operazioni aritmetiche binarie che la macchina può effettuare. Un generico programma eseguibile dalla macchina RAM è composto da istruzioni riportate nella tabella di seguito:

Una volta introdotte tutte le istruzioni eseguibili dalla macchina RAM, è possibile ora studiarne la complessità temporale, come fatto per le TM a k -nastri. A differenza delle TM, nelle macchine RAM l'esecuzione delle diverse operazioni dipende dagli operandi necessari per eseguire tale operazione. Diventa quindi necessario analizzare tutte le istruzioni e definire il tempo richiesto per ciascuna di esse e la quantità di memoria allocata. Queste quantità possono essere calcolate secondo due criteri, ovvero tramite il criterio del costo costante e tramite il criterio del costo logaritmico. Il primo si basa sull'assunzione che l'esecuzione di ciascuna istruzione richieda un'unità di tempo e che ciascuna allocazione in memoria richieda un'unità di spazio (stessa assunzione fatta per le TM).

Si è appena affermato però che nella macchina RAM le istruzioni hanno diversa natura e manipolano dati di diversa dimensione: risulta, dunque, evidente che tale criterio è poco affine alla realtà. Per tener conto della differente velocità di esecuzione e della differente quantità di memoria allocata da ciascuna istruzione, si introduce il secondo criterio (del costo logaritmico), basato sulla supposizione che il tempo richiesto per eseguire un'istruzione sia proporzionale alla lunghezza degli operandi dell'istruzione considerata. Poichè gli operandi sono rappresentati in memoria in codice binario, un generico operando di valore v è rappresentato da $\lfloor \log_2(|v| + 1) \rfloor$.

Dunque, è possibile definire la funzione $l(i) = \text{if } i \neq 0 \text{ then } \lfloor \log_2(|v| + 1) \rfloor \text{ else } 1$ tramite cui calcolare la complessità temporale logaritmica di ciascuna istruzione precedentemente analizzata nella tabella 7.4. Alla stessa maniera, è possibile calcolare i costi relativi allo spazio, introducendo la variabile m definita come l'indirizzo più alto della cella di memoria a cui si fa accesso durante l'esecuzione del programma, e la variabile M_i che rappresenta il valore assoluto più grande immagazzianto in $M[i]$ durante l'esecuzione. La complessità spaziale logaritmica si definisce quindi con la seguente formula:

$$\sum_{i=0}^m l(M_i)$$

Di seguito sono riportati i costi logaritmici delle istruzioni RAM:

Tabella 7.2: costi logaritmici delle istruzioni macchina RAM

ISTRUZIONE		COSTO LOGARITMICO
LOAD=	x	$l(x)$
LOAD	x	$l(x) + l(M[x])$
LOAD*	x	$l(x) + l(M[x]) + l(M[M[x]])$
STORE	x	$l(M[0]) + l(x)$
STORE*	x	$l(M[0]) + l(x) + l(M[x])$
ADD=	x	$l(M[0]) + l(x)$
ADD	x	$l(M[0]) + l(x) + l(M[x])$
ADD*	x	$l(M[0]) + l(x) + l(M[x]) + l(M[M[x]])$
SUB, MULT, DIV definite come ADD.		
READ	x	$l(input) + l(x)$
READ*	x	$l(input) + l(x) + l(M[x])$
WRITE=	x	$l(x)$
WRITE	x	$l(x) + l(M[x])$
WRITE*	x	$l(x) + l(M[x]) + l(M[M[x]])$
JUMP	$label$	1
JGZ	$label$	$l(M[0])$
JLZ	$label$	$l(M[0])$
JZ	$label$	$l(M[0])$
HALT		1

Dunque, il criterio del costo costante si può applicare solo in situazioni in cui si prevede che ogni valore che comparirà durante l'esecuzione del programma occupi esattamente una cella di memoria, altrimenti si deve necessariamente applicare il criterio del costo logaritmico, che porta ad un calcolo più preciso della complessità.

7.5 Correlazione temporale fra TM e RAM

Una volta analizzato il comportamento della macchina RAM, è possibile studiarne la correlazione con le TM. Nello specifico, è possibile simulare una TM deterministica a k nastri attraverso una macchina RAM, nel seguente modo: innanzitutto, si considera la memoria della RAM come suddivisa in blocchi, tutti di dimensione k , ad eccezione del blocco 0, che ha dimensione $k + 1$, in quanto memorizza lo stato della TM e le posizioni delle k testine. I successivi blocchi vengono impiegati per contenere i valori contenuti nelle successive posizioni di ciascuno dei k nastri di memoria della TM. Dunque, il valore rappresentato nella i -esima cella del j -esimo nastro della TM è contenuto nella locazione $c + k \cdot j + i$ in cui c è una costante opportuna della memoria della macchina RAM. Inoltre, per accedere al valore presente sotto la testina di lettura di un determinato nastro è prima necessario eseguire un accesso diretto al blocco 0, per poter trovare la posizione del nastro stesso. Poi, per eseguire la funzione di transizione $\delta(q, i, s_1, \dots, s_k)$ e la funzione di uscita $\eta(q, i, s_1, \dots, s_k)$, si richiedono un numero prefissato di accessi in memoria per ottenere q, i, s_1, \dots, s_n , necessari per l'esecuzione di tali funzioni.

Tutto ciò conduce al seguente teorema:

Teorema 7.5.1. *Una TM multinastro con complessità temporale T_M può essere simulata da una macchina RAM con complessità temporale $T_R = \Theta(T_M)$, secondo il criterio di costo uniforme, oppure $T_R = \Theta(T_M \cdot \log(T_M))$, secondo il criterio di costo logaritmico.*

Ovviamente è possibile anche simulare una macchina RAM tramite una macchina di Turing, ma tale costruzione è molto più complessa e richiede un'analisi approfondita. Si enuncia quindi solo il seguente teorema:

Teorema 7.5.2. *Sia L il linguaggio riconosciuto da una macchina RAM di complessità temporale T_R secondo il criterio del costo logaritmico. Se il programma RAM non utilizza le istruzioni *MULT* e *DIV*, allora L può essere riconosciuto da un'opportuna TM multinastro, in un tempo $T_M = \Theta(T_R^2)$.*

Si può quindi osservare come il legame tra T_M e T_R sia di tipo polinomiale, implicazione molto importante perchè suggerisce quale sia la classe di problemi trattabili nella pratica.

Capitolo 8

Algoritmi

In questo capitolo si analizzano a fondo i principali algoritmi di ordinamento e i relativi tempi di esecuzione. Nello specifico, si utilizzerà come modello di riferimento la macchina RAM con un criterio di costo costante, come analizzato nei capitoli precedenti. Prima di proseguire nella trattazione è necessario dare una definizione generale di algoritmo:

Definizione 8.0.1. *Un algoritmo è una procedura di calcolo ben definita che prende un certo valore, o un insieme di valori, in input e genera un valore, o un insieme di valori, in output. Dunque, un algoritmo è una serie di passi computazionali che trasformano l'input in output.*

Un algoritmo può anche essere visto come uno strumento per la risoluzione di un problema computazionale ben definito: sotto questo sguardo, un algoritmo si definisce corretto se, per ogni istanza di input, termina con l'output corretto. Se un algoritmo è corretto, allora risolve quel determinato problema computazionale. Esistono molti modi per poter specificare un determinato algoritmo: si può utilizzare la lingua italiana o inglese, ma anche un linguaggio di programmazione come C, C++, JAVA e Pascal, o ancora tramite uno pseudocodice.

8.1 Pseudocodifica

La pseudocodifica può avvenire in molti modi, ma nel seguito si utilizzeranno le convenzioni qui riportate:

- L'indentazione serve ad indicare la struttura a blocchi dello pseudocodice, in modo da comprendere quali istruzioni appartengono, per esempio, ad un ciclo **for**, a un ciclo **while** o ad un **if-else** statement. Non sono utilizzate le parentesi graffe o parole chiave come **begin** ed **end** in quanto appesantiscono la sintassi;
- I costrutti iterativi **while**, **for**, **repeat-until** e il costrutto condizionale **if-else** hanno interpretazioni simili a quelle dei comuni linguaggi di programmazione. Il contatore del ciclo mantiene il suo valore dopo la fine del ciclo, quindi il valore che ha provocato la terminazione del ciclo stesso. Inoltre, si utilizza la parola chiave **to** quando il ciclo **for** incrementa il valore del suo contatore ad ogni iterazione, mentre si utilizza la parola chiave **down to** nel caso la variabile venga decrementata;
- Le assegnazioni di un valore ad una certa variabile avviene con il simbolo **:=**, differente dall'operatore **=**, che invece indica l'eguaglianza di due valori all'interno di un costrutto **if**;
- Per identificare un elemento appartenente ad un array, si utilizza la notazione con le parentesi quadre, al cui interno si indica l'indice dell'elemento a cui si vuole accedere: **array[i]**; Per indicare un intervallo di valori all'interno dell'array si utilizza la seguente sintassi: **array[i..j]**, con cui si indica la sottomatrice composta dagli elementi compresi fra *i* e *j*;
- I dati utilizzati sono tipicamente organizzati in oggetti, formati da attributi, a cui si accede tramite la notazione punto: **oggetto.prop**. Le variabili che rappresentano un determinato oggetto sono trattate come puntatori a tale oggetto. Un puntatore che non fa riferimento ad alcun oggetto è inizializzato con il valore **NIL**;
- I parametri vengono passati ad una procedura per valore: la procedura chiamata riceve una sua copia dei parametri e, quindi, se a una di queste variabili è assegnato un nuovo valore, la modifica

non è visibile dalla procedura chiamante. Nel caso venga passato come argomento un oggetto, viene copiato il puntatore a tale oggetto e quindi le modifiche sono visibili anche dalla procedura chiamante;

- L'istruzione **return** restituisce immediatamente il controllo al punto in cui la procedura chiamante ha effettuato la chiamata. Le istruzioni **return** possono anche ritornare un valore al chiamante;
- Gli operatori booleani **and** e **or** sono cortocircuitati. Ciò significa che nella valutazione dell'espressione **x and y**, si valuta prima se il valore di **x** sia falso, in quanto, se lo fosse, l'intera espressione sarebbe falsa e non avrebbe quindi alcun senso valutare il valore della variabile **y**. Al contrario, nella valutazione dell'espressione **x or y**, si verifica innanzitutto se il valore di **x** sia vero, in quanto, se lo fosse, l'intera espressione sarebbe vera e non avrebbe quindi alcun senso valutare il valore della variabile **y**.

Tramite queste regole è possibile definire un generico algoritmo.

8.2 Insertion Sort

Una classe di algoritmi molto studiati è quella riguardante l'ordinamento di un vettore, che consiste nella disposizione dei suoi elementi in ordine crescente.

Il primo algoritmo analizzato è l'**insertion sort**, che prende in input una sequenza di n numeri $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ e restituisce in output una permutazione $[a'_1, a'_2, \dots, a'_n]$ tale che $a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_n$. Questo algoritmo ordina sul posto¹ gli elementi assumendo che la sequenza da ordinare sia inizialmente partizionata in una sottosequenza già ordinata, all'inizio composta da un unico elemento (il primo dell'array), e una sottosequenza ancora da ordinare. Ad ogni iterazione viene rimosso un elemento dalla sottosequenza non ordinata e inserita nella posizione corretta all'interno della sottosequenza già ordinata.

In pseudocodice:

```

1 insertionSort(A):
2   for j := 2 to A.length:
3     key := A[j]
4     i := j - 1
5     while i > 0 and A[i] > key:
6       A[i + 1] := A[i]
7       i := i - 1
8     A[i + 1] = key

```

All'inizio di ogni iterazione del ciclo **for**, il cui indice è j , la sottosequenza di elementi $A[1..j-1]$ è la parte ordinata dell'array, mentre la sottosequenza $A[j+1..n]$ è costituita da elementi ancora da ordinare.

Si analizza ora il tempo di esecuzione della procedura **insertion sort**: per ogni $j = 2, 3, \dots, n$ in cui $n = A.length$, si indica con t_j il numero di volte che il test del ciclo **while** nella riga 5 viene eseguito per quel determinato valore di j .

Codice	Costo	Numero di volte
for j := 2 to A.length	c_1	n
key := A[j]	c_2	$n - 1$
i := j - 1	c_3	$n - 1$
while i > 0 and A[i] > key	c_4	$\sum_{j=2}^n t_j$
A[i + 1] := A[i]	c_5	$\sum_{j=2}^n (t_j - 1)$
i := i - 1	c_6	$\sum_{j=2}^n (t_j - 1)$
A[i + 1] := key	c_7	$n - 1$

Ad ogni riga di codice viene associato un costo c_i che va moltiplicato per il numero di volte che tale riga viene eseguita. Il tempo totale di esecuzione si calcola, dunque, sommando i vari contributi di tempo di ogni riga, ottenendo così l'espressione di $T(n)$:

¹L'algoritmo risistema gli elementi della sequenza all'interno dell'array avendo, in ogni istante, al più un numero finito di elementi memorizzati all'esterno dell'array: ciò permette di risparmiare memoria nel calcolatore.

$$T(n) = c_1n + c_2(n-1) + c_3(n-1) + c_4 \sum_{j=2}^n t_j + c_5 \sum_{j=2}^n (t_j - 1) + c_6 \sum_{j=2}^n (t_j - 1) + c_7(n-1)$$

Ovviamente, il caso migliore si verifica quando l'array in input è già ordinato. In questo caso, $t_j = 1 \quad \forall j = 2, 3, \dots, n$ e l'espressione di $T(n)$ assume la forma:

$$T(n) = (c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_7)n - (c_2 + c_3 + c_4 + c_7)$$

che è funzione lineare di n . Dunque, $T(n) = \Theta(n)$.

Al contrario, il caso pessimo si verifica quando l'array in input è ordinato, ma in ordine decrescente. In questo caso $t_j = j \quad \forall j = 2, 3, \dots, n$ e l'espressione di $T(n)$ assume la forma:

$$T(n) = \frac{1}{2}(c_4 + c_5 + c_6)n^2 + (c_1 + c_2 + c_3)n + \frac{1}{2}(c_4 - c_5 - c_6 + c_8)n - (c_2 + c_3 + c_4 + c_7)$$

che è funzione quadratica di n . Dunque, $T(n) = \Theta(n^2)$.

8.3 Merge Sort

L'algoritmo appena analizzato utilizza un approccio di tipo incrementale: dopo aver ordinato il sottoarray $A[1..j-1]$ inserisce l'elemento $A[j]$ nella posizione corretta, ottenendo il sottoarray ordinato $A[1..j]$. Nel seguito, invece, si analizza un secondo approccio, più efficiente del primo, soprattutto per array di molti elementi: Divide et Impera. Questo criterio si basa sulla suddivisione ricorsiva del problema in sottoproblemi più piccoli, simili a quello originario, ma di dimensione ridotta, per poi risolvere i sottoproblemi di dimensione minima e fondere i risultati ottenuti, per costruire una soluzione generale del problema originario.

Il paradigma Divide et Impera, si basa in realtà su tre passaggi:

1. Divide: il problema viene suddiviso in un certo numero di sottoproblemi, che sono istanze più piccole del problema originario, fino ad ottenere sottoproblemi minimi, non più divisibili;
2. Impera: i sottoproblemi di dimensione minima vengono risolti in maniera ricorsiva; se i problemi hanno dimensione sufficientemente piccola vengono risolti direttamente;
3. Combina: le soluzioni dei sottoproblemi vengono combinate per generare la soluzione del problema generale.

Un tipico algoritmo che segue questo metodo di risoluzione è il **merge sort**, che suddivide l'array originario a metà e ordina ricorsivamente i due sottoarray ottenuti, chiamando sè stesso fino ad ottenere sequenze di dimensione uno, di per sè già ordinate. A questo punto, le sottosequenze vengono fuse in modo da ottenere un array ordinato.

Quest'ultimo passaggio viene effettuato tramite una procedura ausiliaria **merge**(A, p, q, r), dove A è un array, e p, q, r sono tre indici dell'array tali che $p \leq q < r$. La procedura assume che le sottosequenze $A[p..q]$ e $A[q+1..r]$ siano ordinate e, quindi, le fonde per formare un unico sottoarray ordinato che sostituisce il sottoarray corrente $A[p..r]$. La procedura **merge**(A, p, q, r) impiega un tempo $\Theta(n)$ con $n = r - p + 1$ il numero di elementi da fondere. Ad ogni iterazione, la procedura **merge** confronta gli elementi più piccoli dei due sottoarray, inserendoli nel sottoarray "successivo" fino a quando uno dei due sottoarray è vuoto: a quel punto, i restanti elementi del sottoarray rimanente vengono copiati per completare l'array "successivo". Da un punto di vista computazionale, ogni iterazione della procedura impiega un tempo costante, in quanto deve semplicemente confrontare i due elementi dei due sottoarray. Poichè tale procedura viene effettuata per un massimo di n volte, la funzione impiega un tempo $\Theta(n)$.

In pseudocodice:

```

1 | merge(A, p, q, r):
2 |   n1 := q - p + 1
3 |   n2 := r - q
4 |   L := [1 .. n1 + 1]
5 |   R := [1 .. n2 + 1]
```

```

6  | for i := 1 to n1:
7  |     L[i] := A[p + i - 1]
8  | for j := 1 to n2:
9  |     R[j] := A[q + j]
10 | L[n1 + 1] := ∞
11 | L[n2 + 1] := ∞
12 | i := 1
13 | j := 1
14 | for k := p to r:
15 |     if L[i] <= R[j]:
16 |         A[k] := L[i]
17 |         i := i + 1
18 |     else:
19 |         A[k] := R[j]:
20 |         j := j + 1

```

In altri termini, le righe 2 e 3 inizializzano i valori di n_1 ed n_2 , che rappresentano la lunghezza dei due sottoarray $A[p..q]$ e $A[q+1..r]$. Nelle due righe successive vengono creati i due sottoarray ausiliari L (per Left) ed R (per Right), che contano $n + 1$ elementi (per motivi che verranno chiariti a breve). Le righe dalla 6 alla 9, inizializzano gli array appena creati con i valori contenuti rispettivamente nella prima e nella seconda metà dell'array A . Le righe 10 e 11 inizializzano l'ultimo ($n + 1$ -esimo) elemento dei due sottoarray L ed R , con un valore sentinella. Impostando tale valore ad ∞ , si è certi che non possa essere il valore più piccolo fra i due confrontati: in questo modo, una volta arrivati alla fine di uno dei due sottoarray, gli elementi dell'altro vengono ricopiati nell'array "successivo" in quanto necessariamente più piccoli di ∞ . Le ultime righe (dalla 12 alla 20) implementano la logica del confronto e dell'inserimento dell'elemento correntemente più piccolo nell'array A .

Una volta analizzata la procedura **merge**, si può introdurre l'algoritmo di ordinamento **mergeSort**. In pseudocodice:

```

1 | mergeSort(A, p, r):
2 |     q = ⌊ (p + r) / 2 ⌋
3 |     mergeSort(A, p, q)
4 |     mergeSort(A, q+1, r)
5 |     merge(A, p, q, r)

```

L'algoritmo calcola, in riga 2, un indice q , che serve a suddividere l'array A in due sottoarray che contengono rispettivamente $\lceil n/2 \rceil$ elementi ed $\lfloor n/2 \rfloor$ elementi, su cui richiama ricorsivamente sè stessa. Una volta suddiviso l'array A in sottoarray di dimensione minima, viene chiamata la procedura **merge**, precedentemente analizzata.

Come si può facilmente osservare, la procedura **mergeSort** è definita in maniera ricorsiva, quindi l'analisi delle prestazioni temporali diventa leggermente più complessa: infatti, si deve necessariamente far uso di un'equazione di ricorrenza, che esprime il tempo di esecuzione totale di un problema di dimensione n , in funzione del tempo di esecuzione per input più piccoli. Se la dimensione del problema diventa sufficientemente piccola, per esempio $n \leq c$ per qualche costante c , la soluzione del problema è diretta e richiede un tempo di esecuzione costante, indicata con $\Theta(1)$. Si suppone, inoltre, che il problema originario venga suddiviso in a sottoproblemi, tutti di dimensione $1/b$ volte la dimensione del problema originario. Dunque, è necessario un tempo $T(n/b)$ per risolvere un sottoproblema di dimensione n/b e un tempo $aT(n/b)$ per risolverli tutti. Infine, se si impiega un tempo $D(n)$ per suddividere il problema in a sottoproblemi e un tempo $C(n)$ per fonderne le soluzioni, si ottiene la ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{if } n \leq c \\ aT(n/b) + D(n) + C(n) & \text{else} \end{cases}$$

Per trovare ora il tempo di esecuzione $T(n)$ nel caso peggiore si può ragionare come segue. Nel caso in cui i sottoarray abbiano cardinalità uno, la soluzione è diretta, quindi viene impiegato un tempo costante per risolvere il problema, mentre se i sottoarray hanno $n > 1$ elementi, si suddivide il tempo di esecuzione impostando $D(n) = \Theta(1)$, in quanto si impiega un tempo costante per calcolare il centro di un array, $C(n) = \Theta(n)$, in quanto si è già precedentemente dimostrato che la procedura **merge** impieghi un tempo

lineare per la fusione delle soluzioni, e infine si pone $a = b = 2$, in quanto si suddivide ricorsivamente il problema in due sottoproblemi di uguale dimensione ². Con questo ragionamento, la ricorrenza assume l'espressione:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{if } n = 1 \\ 2T(n/2) + \Theta(n) + \Theta(1) & \text{if } n > 1 \end{cases}$$

Si può facilmente dimostrare (analiticamente oppure tramite il teorema dell'espresso, di cui si discuterà successivamente) che tale equazione ha soluzione $T(n) = \Theta(n \log_2 n)$, che rappresenta il tempo di esecuzione dell'algoritmo `mergeSort` nel caso pessimo. Si può osservare come tale algoritmo sia decisamente migliore rispetto all'`insertionSort`, il cui tempo di esecuzione nel caso pessimo è $\Theta(n^2)$.

Un modo per comprendere meglio come mai la complessità temporale del `mergeSort` sia proprio $\Theta(n \log_2 n)$, si riscrive la ricorrenza nel seguente modo:

$$T(n) = \begin{cases} c & \text{if } n = 1 \\ 2T(n/2) + cn + c & \text{if } n > 1 \end{cases}$$

in cui la costante c rappresenta sia il tempo richiesto per risolvere i problemi di dimensione 1, sia il tempo per elemento dell'array dei passi divide e combina. Si può costruire un albero di ricorsione, in cui ogni ramo rappresenti una metà dell'array precedente e ogni foglia sia un array di dimensione unitaria. Il primo livello (in alto) ha un costo totale di cn , il secondo livello ha un costo totale di $cn/2 + cn/2 = cn$ e così via fino all'ultimo livello, con costo totale di $n + n + \dots + n$ (c volte), quindi di cn . In generale, il livello i ha 2^i nodi, ciascuno dei quali ha un costo di $c(n/2^i)$, quindi, il numero totale di livelli dell'albero di ricorsione è $\log_2 n + 1$, con n la dimensione dell'input. Dunque, per calcolare il costo totale, basta sommare i costi di tutti i livelli, ottenendo $cn(\log_2 n + 1) = cn(\log_2 n) + cn$, ovvero $\Theta(n \log_2 n)$.

8.4 Risoluzione Ricorrenze

Come già detto in precedenza, quando i problemi sono abbastanza grandi da essere risolti ricorsivamente, si ha il cosiddetto caso ricorsivo, tramite cui si divide il problema in problemi più piccoli di uguale natura. Una volta che i sottoproblemi diventano sufficientemente piccoli da non richiedere più il passo ricorsivo, si è raggiunto il cosiddetto caso base, da cui inizia la soluzione del problema.

Questo modello di risoluzione del problema viene anche detto Divide et Impera e richiede l'utilizzo di equazioni di ricorrenza, tramite cui si caratterizzano i tempi di esecuzione degli algoritmi in termini dei loro valori con input più piccoli. Per risolvere tali equazioni, ovvero per trovare i limiti asintotici Θ oppure O , esistono tre metodi:

1. Metodo di Sostituzione: si fa un'ipotesi di soluzione e si utilizza l'induzione matematica per dimostrare che l'ipotesi sia corretta;
2. Metodo dell'Albero di ricorsione: si converte la ricorrenza in una struttura ad albero, i cui nodi rappresentano i costi ai vari livelli della ricorsione;
3. Metodo dell'Esperto (Master theorem): fornisce i limiti per ricorrenze nella forma $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ con $a \geq 1, b > 1$ e $f(n)$ data. Una ricorrenza in questa forma caratterizza un algoritmo divide et impera che crea a sottoproblemi di dimensione $1/b$, i cui passi divide e combina richiedono un tempo $f(n)$.

A volte, le ricorrenze non saranno delle uguaglianze, ma delle disuguaglianze nella forma $T(n) \leq \dots$, che stabilisce un limite superiore su $T(n)$ (quindi si utilizza la notazione O anziché Θ), oppure nella forma $T(n) \geq \dots$, che stabilisce invece un limite inferiore su $T(n)$ (quindi si utilizza la notazione Ω anziché Θ). Inoltre, ci sono casi in cui si trascurano dei dettagli tecnici di poca importanza, come le condizioni al contorno: infatti, poichè il tempo di esecuzione di un algoritmo con un input di dimensione costante è costante, le ricorrenze che ne derivano hanno $T(n) = \Theta(1)$, per valori sufficientemente piccoli di n . Questa decisione risiede nel fatto che, sebbene le condizioni al contorno cambiano la soluzione esatta della ricorrenza, tuttavia la soluzione non cambia per più di un fattore costante e quindi asintoticamente rimane immutata.

²In realtà, sarebbe più accurato scrivere $T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil)$ in quanto non sempre la dimensione dell'array A è potenza di 2 e, dunque, divisibile ricorsivamente in due metà. In questo caso è più agevole, anche nei calcoli, ipotizzare che i sottoarray da suddividere abbiano un numero pari di elementi. Tale approssimazione, comunque, non influisce sulla complessità finale del calcolo.

8.4.1 Metodo di Sostituzione

Uno dei metodi per la risoluzione delle occorrenze e, quindi, per il calcolo del tempo di esecuzione degli algoritmi, è il metodo della sostituzione, che richiede due passaggi:

1. Ipotizzare la forma della soluzione;
2. Utilizzare l'induzione matematica per dimostrare che la soluzione ipotizzata sia corretta.

Questo metodo può essere applicato solamente se si ha un'idea della forma generale della soluzione e si vuole calcolare il limite superiore o inferiore della ricorrenza che si analizza.

ESEMPIO: Si determini il limite superiore della ricorrenza $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$.

Si suppone che la soluzione sia $O(n \log_2 n)$. Il metodo di sostituzione consiste nel dimostrare che $T(n) \leq cn \log_2 n$ per un generico $c > 0$. Si verifica, innanzitutto, che questo limite sia valido anche per $\lfloor n/2 \rfloor$, ovvero che $T(\lfloor n/2 \rfloor) \leq c \lfloor n/2 \rfloor \log_2(\lfloor n/2 \rfloor)$. Facendo le opportune sostituzioni si ha:

$$\begin{aligned}
 T(n) &\leq 2(c \lfloor n/2 \rfloor \log_2(\lfloor n/2 \rfloor)) + n \\
 &\leq cn \log_2(n/2) + n \\
 &= cn \log_2 n - cn \log_2 2 + n \\
 &= cn \log_2 n - cn + n \\
 &\leq cn \log_2 n
 \end{aligned}$$

L'ultimo passaggio è vero solo per $c \geq 1$. A questo punto, l'induzione matematica richiede di dimostrare che la soluzione vale per le condizioni al contorno. Si suppone, per esempio, che l'unica condizione al contorno sia $T(1) = 1$: si deve dimostrare che è possibile scegliere una costante c sufficientemente grande in modo che il limite $T(n) \leq cn \log_2 n$ sia valido anche per le condizioni al contorno. Quindi per $n = 1$ (condizione al contorno), il limite $T(n) \leq cn \log_2 n$ diventa $T(1) \leq c \log_2 1 = 0$, che però è in contrasto con $T(1) = 1$: il caso base della dimostrazione induttiva non è valido!

Questo ostacolo nella dimostrazione può essere facilmente superato sfruttando la notazione asintotica, che richiede di provare che $T(n) \leq cn \log_2 n$ sia valida solamente dopo un certo n_0 in poi, scelto arbitrariamente: l'idea è quella di escludere la condizione al contorno dalla dimostrazione induttiva. Si osservi che, per $n \geq 3$, la ricorrenza non dipende direttamente da $T(1)$, quindi si può sostituire con $T(2)$ e $T(3)$, impiegati come casi base della dimostrazione induttiva. Inoltre, ponendo $n_0 = 2$, se $T(1) = 1$ allora $T(2) = 4$ e $T(3) = 5$. Basta quindi determinare una costante c tale per cui $T(2) = 4 \leq 2c \log_2(2)$ e $T(3) = 5 \leq 3c \log_2(3)$: le precedenti condizioni sono soddisfatte solo per $c \geq 2$.

Non esiste un metodo unico e generale per indovinare la soluzione corretta di una ricorrenza, ma è possibile formulare delle buone ipotesi tramite il metodo dell'albero di ricorsione. Inoltre, se una ricorrenza è simile già risolta in precedenza, allora è possibile che anche la soluzione sia analoga. Un altro metodo per formulare un'ipotesi di soluzione consiste nel dimostrare dei limiti superiori e inferiori molto generali e larghi, per poi ridurre gradualmente il grado di incertezza, aumentando il limite inferiore e diminuendo il limite superiore.

Ci sono poi casi in cui la soluzione ipotizzata sembra essere corretta, ma i calcoli matematici non soddisfano il passo induttivo: solitamente, il problema risiede nel fatto che l'ipotesi induttiva non è abbastanza forte per dimostrare il limite esatto. In un caso del genere, spesso è necessario semplicemente correggere l'ipotesi sottraendo un termine di ordine inferiore per fare in modo che i calcoli soddisfino i requisiti.

ESEMPIO: Si calcoli la ricorrenza $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ supponendo che la soluzione sia $T(n) = O(n)$. Si deve quindi dimostrare che $T(n) \leq cn$ per qualche c arbitraria. Sostituendo l'ipotesi all'interno della ricorrenza si ottiene:

$$\begin{aligned}
 T(n) &\leq c \lfloor n/2 \rfloor + c \lceil n/2 \rceil + 1 \\
 &= cn + 1
 \end{aligned}$$

che non implica che $T(n) \leq cn$ per qualunque valore di c . Sembrerebbe quindi che l'ipotesi fatta sia sbagliata, ma al contrario si può dimostrare che è corretta, formulando un'ipotesi induttiva più forte. Per affrontare tale problema, si sottrae un termine di ordine inferiore dalla precedente ipotesi, ad esempio,

un termine costante $d \geq 0$, ottenendo come nuova ipotesi $T(n) \leq cn - d$, che sostituita alla ricorrenza:

$$\begin{aligned} T(n) &\leq (c\lfloor n/2 \rfloor - d) + (c\lceil n/2 \rceil - d) + 1 \\ &= cn - 2d + 1 \\ &\leq cn - d \end{aligned}$$

che diventa valida per ogni $d \geq 1$. Come prima, la costante c deve essere scelta arbitrariamente grande affinché siano soddisfatte le condizioni al contorno.

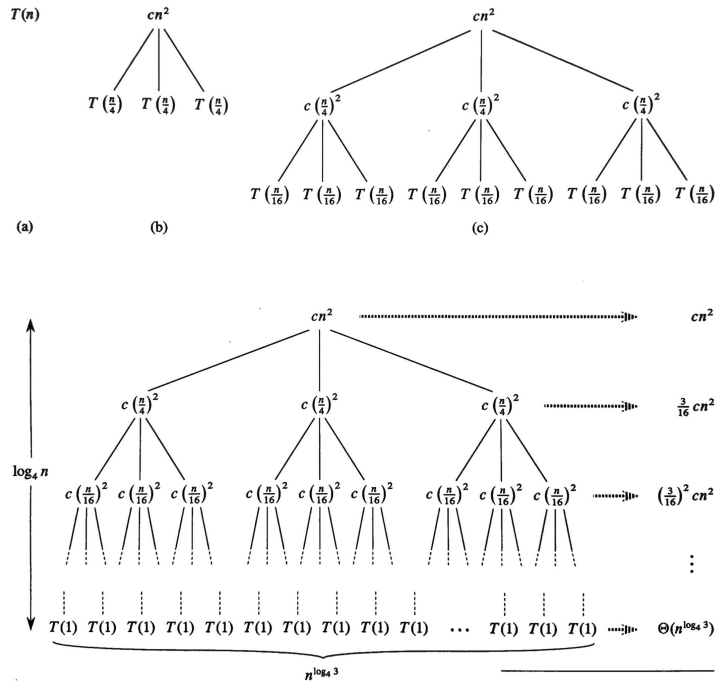
Infine, ci sono casi in cui tramite una piccola manipolazione algebrica è possibile rendere una ricorrenza ignota simile ad una più familiare.

ESEMPIO: Si calcoli la ricorrenza $T(n) = 2T(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + \log_2(n)$. Tale ricorrenza sembra molto complessa da risolvere, ma è possibile semplificarla ponendo $m = \log_2 n$, ottenendo così $T(2^m) = 2T(2^{m/2}) + m$. Chiamando $S(m)$ la ricorrenza appena ottenuta, è possibile scrivere $S(m) = 2S(m/2) + m$, simile alla precedente ricorrenza analizzata $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$; in effetti, la soluzione della ricorrenza $S(m)$ è la stessa ottenuta in precedenza. Dunque, la soluzione è $S(m) = m \log_2 m$ e, ripristinando i termini con la sostituzione $m = \log_2 n$, si ottiene che $T(n) = O(\log_2 n \cdot \log_2(\log_2 n))$.

8.4.2 Metodo dell'Albero di Ricorsione

Dato che spesso è complesso formulare un'ipotesi di soluzione per una data ricorrenza, è possibile utilizzare il metodo dell'albero di ricorsione, in cui ogni nodo rappresenta il costo di un singolo sottoproblema. Sommando i costi dei nodi di ogni livello, si ottengono i costi relativi a quel livello e, sommando tali costi, si ottiene il costo generale della ricorrenza, che rappresenta l'ipotesi da verificare con il metodo della sostituzione. Utilizzando questo metodo, si tollera un certo livello di approssimazione, in quanto è interessante analizzare solamente il comportamento asintotico della ricorrenza: si possono quindi eliminare gli operatori 'ceil' e 'floor' e fare delle ipotesi blande per semplificare i calcoli.

ESEMPIO: Si calcoli la ricorrenza $T(n) = 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + \Theta(n^2)$. Come detto, si può approssimare la ricorrenza eliminando l'operatore floor, ottenendo $T(n) = 3T(n/4) + cn^2$, per una data costante $c > 0$. Per comodità, si suppone anche che n sia una potenza di 4, in modo tale che ogni livello dell'albero abbia dimensione intera. Si ottiene così il seguente albero delle ricorrenze:



più alto della ricorsione, mentre i tre sottoalberi rappresentano i costi richiesti dai tre sottoproblemi di dimensione $n/4$. La parte (c) mostra l'espansione dei nodi di costo $T(n/4)$ dalla parte (b), in cui ogni nodo figlio ha costo $c(n/4)^2$. Tale processo viene ripetuto più e più volte fino ad ottenere i casi base, rappresentati nella parte (d) con $T(1)$.

La dimensione dei sottoproblemi per i nodi alla profondità i è di $n/4^i$, quindi la dimensione del sottoproblema diventa 1 (dimensione delle foglie) quando $(n/4)^i = 1$, ovvero quando $i = \log_4(n)$: dunque, l'albero della ricorrenza ha esattamente $\log_4 n + 1$ livelli. Ora, per determinare il costo di ogni livello, basti pensare che ogni nodo dell'albero genera tre sottonodi e che, dunque, il numero di nodi alla profondità i è 3^i . Moltiplicando il risultato appena ottenuto con il costo di un singolo nodo, si ottiene che ogni livello ha un costo di $3^i c(n/4^i)^2 = (3/16)^i cn^2$. L'ultimo livello dell'albero conta $n^{\log_4 3}$ nodi, ognuno di costo $T(1)$, per un costo totale di $n^{\log_4 3} T(1)$, ovvero $\Theta(n^{\log_4 3})$.

A questo punto, si sommano i contributi di ogni livello, ottenendo:

$$\begin{aligned}
 T(n) &= cn^2 + \frac{3}{16}cn^2 + \left(\frac{3}{16}\right)^2 cn^2 + \dots + \left(\frac{3}{16}\right)^{\log_4 n - 1} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
 &= \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
 &\stackrel{*}{<} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
 &= \frac{1}{1 - (3/16)} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
 &= \frac{16}{13} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
 &= O(n^2).
 \end{aligned}$$

Il passaggio segnato con * rappresenta una piccola approssimazione: la $\sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2$ ammette come limite superiore $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2$, che rappresenta una serie geometrica decrescente infinita. In questo modo è possibile proseguire con agilità i calcoli, ottenendo come ipotesi $T(n) = O(n^2)$, che dovrà essere verificata con il metodo della sostituzione.

8.4.3 Metodo dell'Esperto

Il metodo dell'esperto è impiegato per la risoluzione di ricorrenze del tipo $T(n) = aT(n/b) + f(n)$, con $a \geq 1, b > 1$ costanti ed $f(n)$ una funzione asintoticamente positiva. Una ricorrenza di questo tipo rappresenta il tempo di esecuzione di un algoritmo che divide il problema di dimensione n in a sottoproblemi di dimensione n/b , mentre la funzione $f(n)$ rappresenta il costo di divisione del problema e di combinazione delle soluzioni. Il metodo dell'esperto dipende dal seguente teorema:

Teorema 8.4.1 (Master Theorem). *Date le costanti $a \geq 1, b > 1$ e la funzione $f(n)$, se la ricorrenza $T(n)$ si presenta nella forma $T(n) = aT(n/b) + f(n)$, allora può essere limitata asintoticamente nei seguenti modi:*

1. Se $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ per qualche $\varepsilon > 0$, allora $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$;
2. Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, allora $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log_2(n))$;
3. Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ per qualche $\varepsilon > 0$ e se $af(n/b) \leq cf(n)$ per qualche $c < 1$ e per ogni n sufficientemente grande, allora $T(n) = \Theta(f(n))$.

Si osservi che in ciascuno dei tre casi, si confronta la funzione $f(n)$ con la funzione $n^{\log_b a}$: intuitivamente, la soluzione della ricorrenza è determinata dalla funzione polinomialmente ³ più grande. Se la funzione $n^{\log_b a}$ è più grande polinomialmente, come nel caso uno, allora sarà soluzione della ricorrenza, altrimenti la soluzione sarà $f(n)$, come enunciato nel caso tre, in cui si deve anche verificare la condizione di regolarità della funzione. Nel caso due, in cui le due funzioni sono asintoticamente uguali, si moltiplicano entrambi i membri per un fattore logaritmico e la soluzione sarà $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log_2(n)) = \Theta(f(n) \log_2(n))$.

³Una funzione è polinomialmente più grande rispetto ad un'altra funzione se la prima è asintoticamente più grande della seconda di un fattore n^ε per qualche $\varepsilon > 0$.

I tre casi, sfortunatamente, non coprono tutte le funzioni $f(n)$ possibili, in quanto ci sarà un intervallo fra i casi 1 e 2, in cui la funzione $f(n)$ è minore di $n^{\log_b a}$, ma non polinomialmente, mentre ci sarà anche un intervallo fra i casi 2 e 3, in cui la funzione $f(n)$ è maggiore di $n^{\log_b a}$, ma non polinomialmente. In questi casi, il teorema dell'esperto non può essere applicato.

Per utilizzare il teorema enunciato, bisogna semplicemente determinare in quali dei tre casi rientra la funzione $f(n)$ e confrontarla con la funzione $n^{\log_b a}$.

ESEMPIO: Si determini la soluzione della ricorrenza $T(n) = 9T(n/3) + n$. In questo caso, si ha che $a = 9, b = 3$ ed $f(n) = n$ e quindi $n^{\log_b a} = n^{\log_3(9)} = \Theta(n^2)$. Dato che $f(n) = O(n^{\log_3(9)-\varepsilon})$, con $\varepsilon = 1$ (in quanto $f(n) = n$), si può applicare il caso 1 del teorema dell'esperto e concludere immediatamente che la soluzione della ricorrenza è $T(n) = \Theta(n^2)$, in quanto n^2 è polinomialmente più grande di n .

ESEMPIO: Si determini la soluzione della ricorrenza $T(n) = 2T(n/2) + n \log_2 n$. In questo caso, si ha che $a = 2, b = 2$ ed $f(n) = n \log_2 n$ e quindi $n^{\log_b a} = n^{\log_2(2)} = n$. Si potrebbe erroneamente pensare di essere nel terzo caso del teorema dell'esperto, ma le due funzioni non sono polinomialmente comparabili quindi non si può applicare il teorema. La ricorrenza, dunque, deve necessariamente essere risolta con l'utilizzo dei metodi precedentemente analizzati.

8.5 Heap Sort

Analizzando l'algoritmo Merge Sort si è constatato che è efficiente dal punto di vista temporale, ma non dal punto di vista spaziale, in quanto occupa una grande quantità di memoria. A questo proposito, si analizza ora l'algoritmo **Heap Sort**, che effettua un ordinamento sul posto degli elementi utilizzando una struttura dati detta Heap ('mucchio'), per la gestione delle informazioni.

Un Heap (binario) è una struttura dati ad albero binario quasi completo⁴, in cui ogni nodo rappresenta un elemento dell'array da ordinare. Nello specifico, $A[1]$ è la radice dell'albero, e per ogni elemento $A[i]$, $A[2i]$ e $A[2i+1]$ rappresentano i figli del nodo, mentre $A[\lfloor n/2 \rfloor]$ rappresenta il nodo padre. Si possono quindi definire le seguenti procedure:

```

1 | parent(i):
2 |   return ⌊i/2⌋

```

```

1 | left(i):
2 |   return 2i

```

```

1 | right(i):
2 |   return 2i + 1

```

Oltre all'attributo `A.length`, che ne ritorna la lunghezza, l'array `A` possiede in questo caso anche l'attributo `A.heapSize`, che indica il numero degli elementi dell'heap che sono registrati nell'array `A`. In altre parole, anche se l'array contiene n elementi, con $n = A.length$, soltanto gli elementi in `A[1..A.heapSize]`, con $0 \leq A.heapSize \leq A.length$, sono elementi validi dell'heap.

Esistono, inoltre, due tipologie di heap binari: max-heap e min-heap. Il primo, più importante, è costruito in modo tale che ogni nodo rispetti la condizione per cui $A[\text{parent}(i)] \geq A[i]$; dunque, il valore di un nodo è al massimo il valore del nodo padre e, di conseguenza, l'elemento più grande di un max-heap è memorizzato alla sua radice. Il secondo, meno utilizzato, è costruito in modo tale che ogni nodo rispetti la condizione per cui $A[\text{parent}(i)] \leq A[i]$.

Per implementare l'algoritmo heapsort si fa utilizzo del max-heap; per poterne mantenere le proprietà si utilizza la procedura di supporto `maxHeapify`, un algoritmo che prende in input un array `A` e un suo indice `i`, e restituisce l'array ordinato in modo tale da rappresentare il max-heap. Quando tale procedura viene invocata, essa assume che gli alberi binari di radici `left(i)` e `right(i)` siano dei max-heap, ma assume anche che `A[i]` possa essere più piccolo dei suoi figli, violando la proprietà fondamentale. La procedura, quindi, ha il compito di far 'scendere' il valore `A[i]` in modo tale che il sottoalbero con radice di indice `i` diventi un max-heap.

⁴Un albero binario quasi completo è una struttura dati ad albero in cui ogni livello è completo, eccetto per al più l'ultimo livello, che potrebbe essere completo solo fino ad un certo punto da sinistra

In pseudocodice:

```

1 | maxHeapify(A, i):
2 |   l := left(i)
3 |   r := right(i)
4 |   if l <= A.heapSize and A[l] > A[i]:
5 |     max := l
6 |   else: max := i
7 |   if r <= A.heapSize and A[r] > A[max]:
8 |     max := r
9 |   if max != i:
10 |     swap A[i] with A[max]
11 |     maxHeapify(A, max)

```

A ogni passo viene determinato il più grande degli elementi $A[i]$, $A[\text{left}(i)]$ e $A[\text{right}(i)]$ e il suo indice viene memorizzato nella variabile **max**. Se $A[i]$ è l'elemento più grande, allora il sottoalbero è già un max-heap e la procedura termina la propria esecuzione, altrimenti uno dei due figli contiene l'elemento più grande e $A[i]$ viene scambiato con $A[\text{max}]$ (*swap with*); in questo modo, il nodo di indice i e i suoi figli soddisfano la proprietà di max-heap. Il nodo con indice massimo, però, presenta il valore originale di $A[i]$ e, quindi, il sottoalbero di radice **max** potrebbe violare la proprietà fondamentale: quindi, la procedura viene chiamata ricorsivamente sul sottoalbero, fino a raggiungere le foglie.

Questa procedura viene eseguita in un tempo $O(h)$, con h l'altezza dell'albero. Essendo l'albero quasi completo, $h = O(\log n)$, quindi $T(n) = O(\log n)$.

Ora, tramite la procedura **maxHeapify** è possibile convertire un array $A[1..n]$ (con $n=A.\text{length}$) in un max-heap. Prima di procedere, è importante osservare come tutti gli elementi $A[\lfloor n/2 \rfloor + 1 \dots n]$ siano foglie dell'albero e, quindi, ciascuno di essi è un heap di un solo elemento, che si può utilizzare come punto di partenza per la costruzione dell'heap. Si introduce, dunque, la procedura **buildMaxHeap**, che attraversa i nodi restanti dell'albero ed esegue la procedura **maxHeapify** in ciascuno di essi.

In pseudocodice:

```

1 | buildMaxheap(A):
2 |   A.heapSize := A.length
3 |   for i := A.length / 2 down to 1:
4 |     maxHeapify(A, i)

```

Si può dimostrare che tale procedura impiega un tempo di esecuzione $T(n) = O(n)$.

A questo punto, è possibile scrivere l'algoritmo **heapSort**. In pseudocodice:

```

1 | heapSort(A):
2 |   buildMaxheap(A)
3 |   for i := A.length down to 2:
4 |     swap A[1] with A[i]
5 |     A.heapSize := A.heapSize - 1
6 |     maxHeapify(A, 1)

```

Questo algoritmo si basa sul fatto che, una volta riordinato l'array in maniera che rappresenti un max-heap, l'elemento più grande dell'array si trova in $A[1]$: questo elemento può quindi essere inserito nella posizione finale corretta scambiandolo con $A[n]$. Se ora si toglie il nodo n dall'heap, diminuendo **A.heapSize**, si nota che i figli della radice restano max-heap, ma la nuova radice potrebbe violare la proprietà del max-heap. Questo problema può essere rimosso chiamando la procedura **maxHeapify**($A, 1$), che lascia un max-heap in $A[1..n-1]$. Questa operazione viene ripetuta fino ad un heap di dimensione 2, già ordinato per definizione.

Come detto in precedenza, la procedura **buildMaxHeap** impiega un tempo di esecuzione lineare ($O(n)$), mentre le $n - 1$ chiamate alla procedura **maxHeapify** impiegano ciascuna un tempo $O(\log n)$. Pertanto il tempo di esecuzione dell'**heapSort** impiega un tempo di esecuzione $T(n) = O(n \log n)$.