Lista Teórica 7

1. Determine se W é um subespaço de V, nos seguintes casos:

   (a) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ a \end{bmatrix},\ a \in \mathbb{R} \right\}$.

   (b) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ -a \\ 2a \end{bmatrix};\ a \in \mathbb{R} \right\}$.

   (c) $V = \mathbb{M}_{22}$ o espaço das matrizes quadradas 2×2, $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix};\ a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$.

   (d) $V = \mathbb{M}_{nn}$ o espaço das matrizes quadradas $n \times n$, $W = \{A \in \mathbb{M}_{nn};\ \det(A) = 1\}$.

   (e) $V = \mathbb{P}_2$ o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a 2, $W = \{bx + cx^2;\ b, c \in \mathbb{R}\}$.

2. Determine se o conjunto B é uma base do espaço vetorial V, nos seguintes casos:

   (a) $V = \mathbb{R}^2$, $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$.

   (b) $V = \mathbb{P}_2$, $B = \{1, x - 1, (x - 1)^2\}$.

   (c) $V = \mathbb{M}_{22}$, $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$.

   (d) $V = \mathbb{M}_{22}$, $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$.

3. Qual a nulidade da transformação linear $T : \mathbb{M}_{22} \to \mathbb{R}$ definida por $T(A) = \operatorname{tr}(A)$, em que $\operatorname{tr}(\cdot)$ é a função traço? E no caso de $A \in \mathbb{M}_{nn}$?

4. Verifique se T é uma transformação linear, onde:

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x) = yx^T y$ para $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

   (b) $T : \mathbb{M}_{nn} \to \mathbb{M}_{nn}$, definida por $T(X) = X^T X$.

5. Sejam $T : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transformações lineares, onde $T(p(x)) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \end{bmatrix}$ e $S\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a - 2b \\ 2a - b \end{bmatrix}$. Encontre a matriz da transformação $S \circ T$.

6. Determine a matriz mudança de base de B para C, onde B e C são bases do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ dadas por:

   (a) $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ e $C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

   (b) $B = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ e $C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$.

7. Dada uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida como $T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -4b \\ a + 5b \end{bmatrix}$, encontre uma base C em $\mathbb{R}^2$ tal que a matriz $[T]$ seja diagonal em relação à base C.