Matemática

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Números naturais e números inteiros

Número é um objeto da Matemática usado para descrever quantidade, ordem ou medida. O conceito de número provavelmente foi um dos primeiros conceitos matemáticos assimilados pela humanidade no processo de contagem.

Para isto, os números naturais eram um bom começo. O trabalho dos matemáticos nos levou a descobrir outros tipos de números. Os números inteiros são uma extensão dos números naturais que incluem os números inteiros negativos. Os números racionais, por sua vez, incluem frações de inteiros. Os números reais são todos os números racionais mais os números irracionais.

O conceito de número na sua forma mais simples é claramente abstrata e intuitiva; entretanto, foi objeto de estudo de diversos pensadores. Pitágoras, por exemplo, considerava o número a essência e o princípio de todas as coisas; para Schopenhauer o conceito numérico apresenta-se "como a ciência do tempo puro". Outras definições:

- Número é a relação entre a quantidade e a unidade (Newton);
- Número é um composto da unidade (Euclides);
- Número é o resultado da medida de uma grandeza (Brennes);
- Número é uma coleção de objetos de cuja natureza fazemos abstração (Boutroux);
- Número é o resultado da comparação de qualquer grandeza com a unidade (Benjamin Constant);
- Número é o movimento acelerado ou retardado (Aristóteles);
- Número é a representação da pluralidade (Kambly);
- Número é uma coleção de unidades (Condorcet);
- Número é a pluralidade medida pela unidade (Schuller, Natucci);
- Número é a expressão que determina uma quantidade de coisas da mesma espécie (Baltzer);
- Número é a classe de todas as classes equivalente a uma dada classe (Bertrand Russell).

Conjuntos de números

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \cdots$

Naturais $\mathbb{N}$

Inteiros $\mathbb{Z}$

Racionais $\mathbb{Q}$

Reais $\mathbb{R}$

Imaginários

Complexos $\mathbb{C}$

Números hiper-reais

Números hipercomplexos

Quaterniões $\mathbb{H}$
Octoniões $\mathbb{O}$
Sedeniões $\mathbb{S}$
Complexos hiperbólicos $\mathbb{R}^{1,1}$
Quaterniões hiperbólicos
Bicomplexos
Biquaterniões
Coquaterniões
Tessarines

Curiosidades sobre números

- Número excessivo ou abundante: número cuja soma de seus divisores (excluído o próprio número) é maior do que ele mesmo (p. ex.: 12).
- Número perfeito: número cuja soma de seus divisores (excluído o próprio número) é igual a ele mesmo (p. ex.: 6).
- Número deficiente ou defectivo: número cuja soma de seus divisores (excluído o próprio número) é menor do ele mesmo (p. ex.: 10).
- Número levemente imperfeito: número cuja soma de seus divisores é o próprio número menos a unidade (p. ex.: 4, 8, 16, 32, 2n).
- Números amigáveis: são dois números cuja soma dos divisores de um resulta no outro e vice-versa. Pares amigáveis: 220 e 284, 1184 e 1210, 17296 e 18416, 9363584 e 9437056.
- Números sociáveis: grupo de três ou mais números que formam um círculo fechado, pois a soma dos divisores do primeiro forma o segundo e assim por diante até que a soma dos divisores do último forma o primeiro (p. ex.: 12496, 14288, 15472, 14536 e 14264).
- O número 26 é o único que existe que se encontra entre um quadrado (25 = 52) e um cubo (27 = 33) (provado por Fermat).
- O número 69 é o único que existe cujos algarismos que compõem seu quadrado (692 = 4761) e seu cubo (693 = 328509) formam todos os números entre 0 e 9 sem repetição.
- O número de Skewes (10^10^10^34 = 10^10^10.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000) é um dos maiores números que já serviram a algum propósito em Matemática (na fórmula de Gauss). O número de Graham, ainda maior, aparece em problemas de combinatória.
- Uma pessoa levaria doze dias para contar de 1 até 1 milhão, se demorasse apenas um segundo em cada número. Para chegar a 1 bilhão, ela precisaria de 32 anos.

Conjuntos Numéricos
Números Naturais
Pertencem ao conjunto dos naturais os números inteiros positivos incluindo o zero. Representado pela letra N maiúscula. Os elementos dos conjuntos devem estar sempre entre chaves.
N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, ... }

- Quando for representar o Conjunto dos Naturais não – nulos (excluindo o zero) devemos colocar * ao lado do N.
Representado assim:

N* = {1, 2,3 ,4 ,5 ,6 ,7 ,8 ,9 ,10 ,11 ,12, ... }

A reticência indica que sempre é possível acrescentar mais um elemento.
N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...} ou N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... }

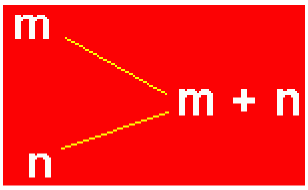
Qualquer que seja o elemento de N, ele sempre tem um sucessor. Também falamos em antecessor de um número.
• 6 é o sucessor de 5.
• 7 é o sucessor de 6.
• 19 é antecessor de 20.
• 47 é o antecessor de 48.
Como todo número natural tem um sucessor, dizemos que o conjunto N é infinito.

Quando um conjunto é finito?
O conjunto dos números naturais maiores que 5 é infinito: {6, 7, 8, 9, ...}
Já o conjunto dos números naturais menores que 5 é finito: {0, 1, 2, 3, 4}
Veja mais alguns exemplos de conjuntos finitos.
• O conjunto dos alunos da classe.
• O conjunto dos professores da escola.
• O conjunto das pessoas que formam a população brasileira.

Operações com Números Naturais

Propriedades da adição:

Fechamento: A propriedade de fechamento é satisfeita pela adição pois a soma de dois números naturais ainda é um número natural, por exemplo: 3 e 5 são números naturais e somados resultam no número 8 que também é um número natural de maneira genérica essa propriedade pode ser representada pelo seguinte diagrama:



Associatividade: A adição no conjunto dos números naturais é associativa pois se somarmos, por exemplo, o número 3 ao número 9 e depois somarmos este resultado ao número 5 obteriamos o valor 17 se somássemos o número 9 ao 5 e depois este resultado ao número 3 também obteriamos o número 17, sendo assim temos:

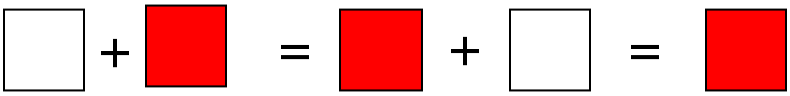
(3 + 9) + 5 = 12 +5 = 17

3 + (9 + 5) = 3 + 14= 17

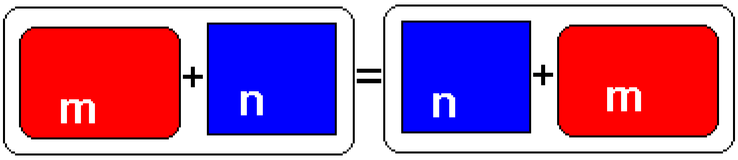
de maneira genérica esta propriedade pode ser representada pelo seguinte diagrama:

$$\boxed{A + B} + C = A + \boxed{B + C}$$

Existência de elemento neutro: Apesar do zero não ser considerado um número natural no sentido de não ser proveniente de objetos de contagem natural vamos considerá-lo como um número natural pois ele possui as mesmas características algébricas dos números naturais. Sendo assim, existe no conjunto dos números naturais um elemento neutro para soma que é o número zero, pois qualquer natural somado a zero é o próprio número, de maneira genérica esta propriedade pode ser representada pelo seguinte diagrama:



Comutatividade: A soma nos naturais é comutativa pois a ordem das parcelas não altera a soma, por exemplo, 3+5=5+3=8. De maneira genérica esta propriedade pode ser representada pelo seguinte diagrama:



Propriedades da subtração

Fechamento: A subtração não possui a propriedade de fechamento pois, por exemplo, o número 3 - 5= -2 não pertence ao conjunto dos naturais.

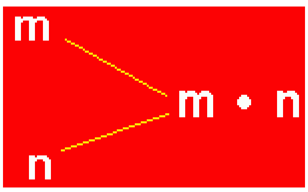
Associatividade: A subtração não possui a propriedade de associatividade pois, por exemplo, (3-5) - 2 não é igual (5-2)-3

Existência de Elemento Neutro: Não existe elemento neutro na subtração pois, por exemplo, 0 - 3= -3 não pertence aos naturais.

Comutatividade: Não existe comutatividade na subtração pois, por exemplo, 5 - 3= 2 não é igual a 3 - 5= -2.

Propriedades da Multiplicação

Fechamento: A propriedade de fechamento é satisfeita pois o produto de dois números naturais ainda é um número natural. De maneira genérica esta propriedade pode ser representada pelo seguinte diagrama.

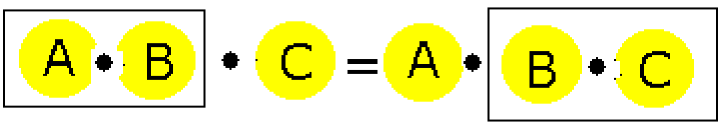


Associatividade: A propriedade de associatividade é satisfeita na multiplicação pois, por exemplo:

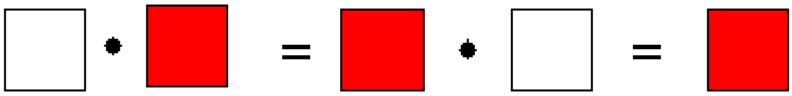
(3.5).2 =15.2 =30

3.(5.2) =3.10 =30

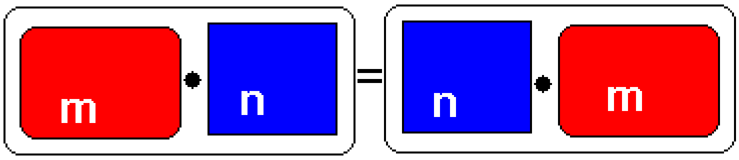
de maneira geral esta propriedade pode ser representada pelo seguinte diagrama.



Existência de Elemento Neutro: O elemento neutro na multiplicação é o número 1, pois qualquer número natural multiplicado por 1 é esse próprio número natural, de maneira geral essa propriedade pode ser representada pelo seguinte diagrama.



Comutatividade: A propriedade comutativa também é satisfeita pela multiplicação, pois a ordem dos fatores não altera o produto. De maneira geral essa propriedade pode ser representada pelo seguinte diagrama.



Distributividade: Um jeito simples de explicar a propriedade distributiva é com o seguinte exemplo, tenho 3 laranjas e ganho mais 5 laranjas então na verdade eu fiquei com (3 + 5) laranjas agora substituímos as laranjas por um número, por exemplo, o número 6. Assim temos, 3.6 + 5.6 = (3 + 5) . 6. De maneira geral, podemos representar a propriedade com o seguinte diagrama.

Propriedades da Divisão

Fechamento: Esta propriedade não é satisfeita pela divisão, pois, por exemplo, 1 dividido por 2 não pertence aos conjunto dos números naturais.

Associatividade: Esta propriedade não é satisfeita, pois (15/5)/3 é diferente de (3/5)/15, por exemplo.

Existência de Elemento Neutro: Esta propriedade não é satisfeita, pois, por exemplo, 2 dividido por 1 é 2, mas 1 dividido por 2 não pertence aos naturais.

Comutatividade: Esta propriedade não é satisfeita, pois, por exemplo, 2 dividido por 1 é diferente de 1 dividido por 2, o qual nem pertence aos naturais.

Algoritmo da Adição

Vimos que a operação adição está ligada à idéia de juntar, acrescentar. Sendo a, b, e c números naturais quaisquer, a sentença matemática que traduz esta operação é:

a + b = c onde, a e b são as parcelas da adição e c é a soma.

NÚMEROS INTEIROS

Tendo em vista que já conhecemos os números Naturais (0, 1, 2, 3, 4 ...), vejamos alguns exemplos do cotidiano onde esses números não são suficientes para representar as situações reais.

1º Exemplo: Quando dizemos que determinado fato ocorreu no ano 257, ficamos sem saber se esse fato ocorreu no ano 257 após o nascimento de Cristo ou antes do nascimento de Cristo. Isto é, o número natural

257 não foi suficiente para representar essa situação. Podemos, então, utilizar o símbolo a.C. (antes de Cristo) para identificar fatos que ocorreram antes do nascimento de Cristo e d.C. (depois de Cristo) para identificar fatos que ocorreram depois do nascimento de Cristo.

- 257 a.C. : ano 257 antes do nascimento de Cristo
- 257 d.C. : ano 257 depois do nascimento de Cristo

2º Exemplo: Quando dizemos que a temperatura ambiente de uma determinada cidade, é de 2º Celsius, com isso não identificamos se esta temperatura está acima de zero ou abaixo de zero.
Para representarmos a situação acima, podemos utilizar os símbolos + e - . Assim teremos:

- + 2ºC representa 2ºC positivos ou 2ºC acima de zero;
- - 2ºC representa 2ºC negativos ou 2ºC abaixo de zero.

Essa notação também é utilizada para demonstrarmos uma conta bancária, uma dívida ou crédito no comércio, ou seja:

- Crédito de 100 reais ou saldo positivo de 100 reais (+ 100 reais);
- Débito de 100 reais ou saldo negativo de 100 reais (- 100 reais).

Nas situações exemplificadas, utilizamos os números naturais precedidos pelos sinais + ou - .
Os números precedidos pelo sinal + são chamados de números inteiros positivos (+1, +2, +3, ...)
Os números precedidos pelo sinal - são chamados de números inteiros negativos (-1, -2, -3, ...).

Para visualizarmos melhor essas situações podemos utilizar a reta numérica, onde nosso referencial é o número zero. Os números negativos ficarão à esquerda do zero e os números positivos ficarão à direita do zero.

Esses números formam o conjunto dos Números Inteiros (representado pelo símbolo Z).

Operações com números inteiros (Z)

Qualquer adição, subtração ou multiplicação de dois números inteiros sempre resulta também um número inteiro. Dizemos então que estas três operações estão bem definidas em Z ou, equivalentemente, que o conjunto Z é fechado para qualquer uma destas três operações.
As divisões, as potenciações e as radiciações entre dois números inteiros nem sempre têm resultado inteiro. Assim, dizemos que estas três operações não estão bem definidas no conjunto Z ou, equivalentemente, que Z não é fechado para qualquer uma destas três operações.

Adições e subtrações com números inteiros

Existe um processo que simplifica o cálculo de adições e subtrações com números inteiros. Observe os exemplos seguintes:

Exemplo1:
Calcular o valor da seguinte expressão:
10 - 7 - 9 + 15 - 3 + 4

Solução:
Faremos duas somas separadas

- uma só com os números positivos: 10 + 15 + 4 = +29
- outra só com os números negativos: (-7) + (-9) + (-3) = -19

Agora calcularemos a diferença entre os dois totais encontrados: +29 - 19 = +10

Atenção: É preciso dar sempre ao resultado o sinal do número que tiver o maior valor absoluto!

Exemplo2:
Calcular o valor da seguinte expressão: -10 + 4 - 7 - 8 + 3 - 2
1º passo: Achar os totais (+) e (-):
(+): +4 + 3 = +7
(-): -10 - 7 - 8 - 2 = -27
2º passo: Calcular a diferença dando a ela o sinal do total que tiver o maior módulo:
-27 + 7 = - 20

Multiplicação

Os termos de uma multiplicação são chamados fatores e o resultado da operação de multiplicação é donominado produto.
1º fator x 2º fator = produto

- O primeiro fator também pode ser chamado multiplicando enquanto o segundo fator pode ser chamado multiplicador.
- A ordem dos fatores nunca altera o resultado de uma multiplicação: a x b = b x a
- O número 1 é o elemento neutro da multiplicação: 1 x a = a x 1 = a
- Se adicionarmos uma constante k a um dos fatores, o produto será adicionado de k vezes o outro fator: a x b = c ⇔ (a + k) x b = c + (k x b)
- Se multiplicarmos um dos fatores por uma constante k, o produto será multiplicado por k: a × b = c ⇔ (a × k) × b = k × c
- Podemos distribuir um fator pelos termos de uma adição ou subtração qualquer: a × (b ± c) = (a × b) ± (a × c)

Divisão inteira

Na divisão inteira de N por $D \neq 0$, existirá um único par de inteiros, Q e R, tais que:

$Q \times D + R = N$ e $0 \leq R < R < |D|$ (onde $|D|$ é o valor absoluto de D)

A segunda condição significa que R (o resto) nunca pode ser negativo.
Os quatro números envolvidos na divisão inteira são assim denominados:
N é o dividendo; D é o divisor (sempre diferente de zero);
Q é o quociente; R é o resto (nunca negativo).

Exemplos:
1) Na divisão inteira de 60 por 7 o dividendo é 60, o divisor é 7, o quociente é 8 e o resto é 4.

$8 \times 7 + 4 = 60$ e $0 \leq 4 < |7|$

2) Na divisão inteira de -60 por 7 o dividendo é -60, o divisor é 7, o quociente é -9 e o resto é 3.

$-9 \times 7 + 3 = -60$ e $0 \leq 3 < |7|$

- Quando ocorrer $R = 0$ na divisão de N por D, teremos $Q \times D = N$ e diremos que a divisão é exata indicando-a como $N \div D = Q$.
- Quando a divisão de N por D for exata diremos que N é divisível por D e D é divisor de N ou, equivalentemente, que N é múltiplo de D e D é fator de N.
- O zero é divisível por qualquer número não nulo: $D \neq 0 \rightarrow 0 \div D = 0$.
- Todo número inteiro é divisível por 1: $N \div 1 = N$.
- Se multiplicarmos o dividendo (N) e o divisor (D) de uma divisão por uma constante $k \neq 0$, o quociente (Q) não será alterado mas o resto (R) ficará multiplicado por k, se $R \times k < D$, ou será igual ao resto da divisão de $R \times k$ por D, se $R \times k \geq D$.

Multiplicação e divisões com números inteiros

Nas multiplicações e divisões de dois números inteiros é preciso observar os sinais dos dois termos da operação:

Exemplos:

Sinais iguais (+)	Sinais opostos (-)
(+) × (+) = +	(+) × (-) = -
(-) × (-) = +	(-) × (+) = -
(+) ÷ (+) = +	(+) ÷ (-) = -
(-) ÷ (-) = +	(-) ÷ (+) = -

Números inteiros - Exercícios Resolvidos

1. Numa adição com duas parcelas, se somarmos 8 à primeira parcela, e subtraírmos 5 da segunda parcela, o que ocorrerá com o total?
Solução:

Seja t o total da adição inicial.
Ao somarmos 8 a uma parcela qualquer, o total é acrescido de 8 unidades:

$t + 8$

Ao subtrairmos 5 de uma parcela qualquer, o total é reduzido de 5 unidades:

$t + 8 - 5 = t + 3$

Resposta: Portanto o total ficará acrescido de 3 unidades.

2. Numa subtração, a soma do minuendo com o subtraendo e o resto é igual a 264. Qual é o valor do minuendo?
Solução:
Sejam m o minuendo, s o subtraendo e r o resto de uma subtração qualquer, é sempre verdade que:

$m - s = r \rightarrow s + r = m$

(a soma de s com r nos dá m)

Ao somarmos os três termos da subtração, m + s + r, observamos que a adição das duas últimas parcelas, s + r, resulta sempre igual a m. Assim poderemos escrever:

$m + (s + r) = m + m = 2m$

O total será sempre o dobro do minuendo.
Deste modo, temos:

$m + s + r = 264$
$2m = 264$
$m = 264 \div 2 = 132$

Resposta: O minuendo será 132.

3. Numa divisão inteira, o divisor é 12, o quociente é 5 e o resto é o maior possível. Qual é o dividendo?
Solução:
Se o divisor é 12, então o maior resto possível é 11, pois o resto não pode superar nem igualar-se ao divisor.
Assim, chamando de n o dividendo procurado, teremos:
n = (quociente) × (divisor) + (resto)
$n = 5 \times 12 + 11$
$n = 60 + 11$
$n = 71$

Resposta: O dividendo Procurado é 71.

Números racionais

Racionais Positivos e Racionais Negativos

O quociente de muitas divisões entre números naturais é um número racional absoluto.

$2:5=\frac{2}{5}$ $35:3=\frac{35}{3}$ $8:100=0{,}08$

Números racionais positivos e números racionais negativos que sejam quocientes de dois negativos que sejam quocientes de dois números inteiros, com divisor diferente de zero.

Por exemplo:

$(+17):(-4)=-\frac{17}{4}$

$-\frac{17}{4}$ é um número racional negativo

Números Racionais Positivos

Esses números são quocientes de dois números inteiros com sinais iguais.

· $(+8):(+5)=\frac{+8}{+5}=+\frac{8}{5}$

· $(-3):(-5)=\frac{-3}{-5}=+\frac{3}{5}$

Números Racionais Negativos

São quocientes de dois números inteiros com sinais diferentes.

·$(-8):(+5)=\frac{-8}{+5}=-\frac{8}{5}$

· $(-3):(+5)=\frac{-3}{+5}=-\frac{3}{5}$

Números Racionais: Escrita Fracionária

$-\frac{2}{6}$, $-\frac{3}{9}$, e $-\frac{8}{24}$ têm valor igual a $-\frac{1}{3}$ e representam o número racional $-\frac{1}{3}$.

Obs.: Todo número inteiro é um número racional, pois pode ser escrito na forma fracionária:

$-2=\frac{-4}{+2}$

Denominamos número racional o quociente de dois números inteiros (divisor diferente de zero), ou seja, todo número que pode ser colocado na forma fracionária, em que o numerador e denominador são números inteiros.

Operações com números racionais

Adição e Subtração

Para simplificar a escrita, transformamos a adição e subtração em somas algébricas. Eliminamos os parenteses e escrevemos os números um ao lado do outro, da mesma forma como fazemos com os números inteiros.

Exemplo 1: Qual é a soma:

$$\left(\frac{17}{24}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{17}{24}-\frac{5}{6} = \frac{1.17}{24}-\frac{4.5}{24} = \frac{17-20}{24} = -\frac{3}{24} = -\frac{1}{8}$$

Exemplo 2: Calcule o valor da expressão $0,3-\frac{4}{5}+\frac{1}{2}-1,8$

$$\frac{3}{10}-\frac{4}{5}+\frac{1}{2}-\frac{18}{10}$$

$$\frac{1.3-2.4+5.1-1.18}{10}$$

$$\frac{3-8+5-18}{10}=-\frac{18}{10}=-\frac{9}{5}$$

Multiplicação e divisão

Na multiplicação de números racionais, devemos multiplicar numerador por numerador, e denominador por denominador, assim como é mostrado nos exemplos abaixo:

$$\frac{8}{3}x\frac{4}{3}=\frac{8x4}{3x3}=\frac{32}{9}$$

$$\frac{-5}{2}x\frac{4}{3}=\frac{-5x4}{2x3}=\frac{-20}{6}=-\frac{20}{6}=-\frac{10}{3}$$

Na divisão de números racionais, devemos multiplicar a primeira fração pelo inverso da segunda, como é mostrado no exemplo abaixo:

$$\frac{\frac{8}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{8}{3}x\frac{3}{4} = \frac{24}{12} = 2$$

Principio da indução finita

Considere $n \in N$ e $P(n)$ como uma proposição que está subordinada ao número natural n.

Indicar que P(n) é verdadeira para todo número natural n ≥ m, significa:

1) Demonstrar que P(n) é verdadeira para n = m.

2) Considerar que P(n) é verdadeira para n = k e demonstrar que P(n) é verdadeira para n = k + 1.

Potenciação e radiciação

Na potenciação, quando elevamos um número racional a um determinado expoente, estamos elevando o numerador e o denominador a esse expoente, conforme os exemplos abaixo:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$

Na radiciação, quando aplicamos a raiz quadrada a um número racional, estamos aplicando essa raiz ao numerador e ao denominador, conforme o exemplo abaixo:

$$\sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{64}} = \frac{5}{8}$$

$$\sqrt{1{,}44} = \sqrt{\frac{144}{100}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{100}} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

NÚMERO COMPLEXO

Definição: Dados dois números reais a e b , define-se o número complexo z como sendo:
z = a + bi , onde i = Ö-1 é a unidade imaginária .
Exs: z = 2 + 3i (a = 2 e b = 3)
w = -3 -5i (a = -3 e b = -5)
u = 100i (a = 0 e b = 100)

NOTAS:
a) diz-se que z = a + bi é a forma binômica ou algébrica do complexo z .

b) dado o número complexo z = a + bi , a é denominada parte real e b parte imaginária.
Escreve-se : a = Re(z) ; b = Im(z) .
c) se em z = a + bi tivermos a = 0 e b diferente de zero, dizemos que z é um imaginário puro . Ex: z = 3i .
d)se em z = a + bi tivermos b = 0 , dizemos que z é um número real .
Ex: z = 5 = 5 + 0i .
e)do item (c) acima concluímos que todo número real é complexo, ou seja,
o conjunto dos números reais é um subconjunto do conjunto dos números complexos.
f) um número complexo z = a + bi pode também ser representado como um par ordenado z = (a,b) .

Exercícios Resolvidos:

1) Sendo z = (m2 - 5m + 6) + (m2 - 1) i , determine m de modo que z seja um imaginário puro.

Solução: Para que o complexo z seja um imaginário puro, sua parte real deve ser nula ou seja, devemos ter m2 - 5m + 6 = 0, que resolvida encontramos m=2 ou m=3.

2) Determine a parte real do número complexo z = (1 + i)12 .

Solução: Observe que (1 + i)12 = [(1 + i)2]6 . Nestas condições, vamos desenvolver o produto notável
(1 + i)2 = 12 + 2.i + i2 = 1 + 2i -1 = 2i \ (1 + i)2 = 2i (isto é uma propriedade importante, que vale a pena ser memorizada).
Substituindo na expressão dada, vem:
(1 + i)12 = [(1 + i)2]6 = (2i)6 = 26.i6 = 64.(i2)3 = 64.(-1)3 = - 64.
Portanto, o número complexo dado fica z = - 64 = - 64 + 0i e portanto sua parte real é igual a -64.

3) Determine a parte imaginária do número complexo z = (1 - i)200 .

Solução: Podemos escrever o complexo z como: z = [(1 - i)2]100 . Desenvolvendo o produto notável
(1 - i)2 = 12 - 2.i + i2 = 1 - 2i -1 = - 2i \ (1 - i)2 = - 2i (isto é uma propriedade importante, que merece ser memorizada).
Substituindo na expressão dada, vem:
z = (- 2i)100 = (- 2)100. i100 = 2100 . i100 = 2100 . (i2)50 = 2100. (- 1)50 = 2100 . 1 = 2100.
Logo, o número complexo z é igual a 2100 e portanto um número real. Daí concluímos que a sua parte imaginária é zero.

CONJUGADO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Dado um número complexo z = a + bi , chama-se conjugado de z e representa-se por $\bar{z}$, a um outro número complexo que possui a mesma parte real de z e a parte imaginária o simétrico aditivo da parte imaginária de z .

z = a + bi ® $\bar{z}$ = a - bi
Ex: z = 3 + 5i ; $\bar{z}$ = 3 - 5i

Obs : Sabemos que os números complexos podem também ser representados na forma de pares ordenados . Assim é que z = a + bi = (a,b).
Portanto , por analogia com o sistema de coordenadas cartesianas , pode-se representar graficamente qualquer número complexo z num sistema de coordenadas cartesianas , bastando marcar a parte real a no eixo horizontal e a parte imaginária b no eixo vertical . Neste caso , o eixo horizontal é chamado eixo real e o eixo vertical é chamado eixo imaginário. O plano cartesiano, neste caso , denomina-se plano de Argand-Gauss.

O ponto que representa o número complexo z , denomina-se afixo de z.

DIVISÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS NA FORMA BINÔMIA

Regra : Para dividir um número complexo z por outro w ¹ 0 , basta multiplicar numerador e denominador pelo complexo conjugado do denominador .

Ex: $\frac{3+2i}{4+2i} = \frac{(3+2i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)} = \frac{12-6i+8i+4}{20} = \frac{16+2i}{20} = \frac{4}{5}+\frac{1}{10}i$ = 0,8 + 0,1 i

Agora que você estudou a teoria, tente resolver os seguintes exercícios:

1 - Calcule o número complexo i126 + i-126 + i31 - i180

2 - Sendo z = 5i + 3i2 - 2i3 + 4i27 e w = 2i12 - 3i15 ,
calcule Im(z).w + Im(w).z .

3 - UCMG - O número complexo 2z, tal que 5z + $\bar{z}$ = 12 + 6i é:

4 - UCSal - Para que o produto (a+i). (3-2i) seja real, a deve ser:

5 - UFBA - Sendo a = -4 + 3i , b = 5 - 6i e c = 4 - 3i , o valor de ac+b é:

6 - Mackenzie-SP - O valor da expressão y = i + i2 + i3 + ... + i1001 é:

7) Determine o número natural n tal que (2i)n + (1 + i)2n + 16i = 0.
Resp: 3
Clique aqui para ver a solução.

8) Calcule [(1+i)80 + (1+i)82] : i96.240
Resp: 1+2i

9) Se os números complexos z e w são tais que z = 2-5i e w = a+bi , sabendo-se que z+w é um número real e z.w .é um imaginário puro , pede-se calcular o valor de b2 - 2a.
Resp: 50

10) Se o número complexo z = 1-i é uma das raízes da equação x10 + a = 0 , então calcule o valor de a.
Resp: 32i

11) Determine o número complexo z tal que iz + 2 . $\bar{z}$ + 1 - i = 0.

12 - UEFS-92.1 - O valor da expressão E = x-1 + x2, para x = 1 - i , é:
a)-3i
b)1-i
c) 5/2 + (5/2)i
d) 5/2 - (3/2)i
e) ½ - (3/2)i

13 -UEFS-93.2 - Simplificando-se a expressão E = i7 + i5 + (i3 + 2i4)2 , obtêm-se:
a) -1+2i
b) 1+2i
c) 1 - 2i
d) 3 - 4i
e) 3 + 4i

14 - UEFS-93.2 - Se m - 1 + ni = (3+i).(1 + 3i), então m e n são respectivamente:
a) 1 e 10
b) 5 e 10
c) 7 e 9
d) 5 e 9
e) 0 e -9

15 - UEFS-94.1 - A soma de um numero complexo z com o triplo do seu conjugado é igual a -8 - 6i. O módulo de z é:
a) Ö 13
b) Ö 7
c) 13
d) 7
e) 5

16 - FESP/UPE - Seja z = 1+i , onde i é a unidade imaginária. Podemos afirmar que z8 é igual a:
a) 16
b) 161
c) 32
d) 32i
e) 32+16i

17 - UCSal - Sabendo que (1+i)22 = 2i, então o valor da expressão
y = (1+i)48 - (1+i)49 é:
a) 1 + i
b) -1 + i
c) 224 . i
d) 248 . i
e) -224 . i

GABARITO:

1) -3 - i
2) -3 + 18i
3) 4 + 3i
4) 3/2
5) -2 + 18i
6) i
7) 3
8) 1 + 2i
9) 50
10) 32i
11) -1 - i
12) B
13) D
14) A
15) A

16) A
17) E

Fatoração

Fatorar é transformar equações algébricas em produtos de duas ou mais expressões, chamadas fatores.

Ex: ax + ay = a.(x+y)

Existem vários casos de fatoração como:

1) Fator Comum em evidência

Quando os termos apresentam fatores comuns

Observe o polinômio:
ax + ay » Ambos os termos apresentam o fator a em evidência.

Assim: ax + ay = a.(x+y)
Forma fatorada

Exs : Fatore:

a) bx + by - bz = b.(x+y-z)

b) $2x^2 - 4xy = 2x(x - 2y)$

c) $12ax^2z + 24axz^2 - 12a^2xz = 12axz.(x + 2z - a)$

d) (a+b)x + (a+b)y = (a+b).(x+y)

e) $x^3 + 2x^2 - x = x.(x^2 + 2x - 1)$

2) Fatoração por agrupamento

Consiste em aplicar duas vezes o caso do fator comum em alguns polinômios especiais.

Como por exemplo:
ax + ay + bx + by
Os dois primeiros termos possuem em comum o fator a , os dois últimos termos possuem em comum o fator b. Colocando esses termos em evidência:

a.(x+y) + b.(x+y)

Este novo polinômio possui o termo (x+y) em comum. Assim colocando-o em evidência:

(x+y).(a+b)

Ou seja: ax + ay + bx + by = (x+y).(a+b)

Exs: Fatore:

a) $x^2 - 3x + ax - 3a = x.(x - 3) + a(x - 3) = (x - 3).(x + a)$
x é fator a é fator (x-3) é fator comum Forma
comum comum fatorada

b)$2b^2 + ab^2 + 2c^3 + ac^3 = b^2(2 + a) + c^3(2 + a) = (2 + a)(b^2 + c^3)$ b^2 é fator c^3 é fator (2+a) é fator comum
Forma

comum comum fatorada

3) Fatoração por diferença de quadrados:

Consiste em transformar as expressões em produtos da soma pela diferença, simplesmente extraindo a raiz quadrada de cada quadrado

Assim: $x^2 - 9 = (x+3).(x-3)$

Exs: Fatore:

a) $a^2 - b^2 = (a+b).(a-b)$

b) $16a^2 - 1 = (4a+1).(4a-1)$

c) $1 - 16x^4 = (1+4x^2).(1-4x^2) = (1+4x^2).(1+2x).(1-2x)$

Note que é possível fatorar a expressão duas vezes

4) Fatoração do trinômio quadrado perfeito:

O trinômio que se obtém quando se eleva um binômio ao quadrado chama-se trinômio quadrado perfeito.

Por exemplo, os trinômios ($a^2 + 2ab + b^2$) e ($a^2 - 2ab + b^2$) são quadrados perfeitos porque são obtidos quando se eleva (a+b) e (a-b) ao quadrado, respectivamente.

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\qquad$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Assim:

$4x^2 - 12xy + 9y^2$

$\sqrt{4x^2}$ $\qquad$ $\sqrt{9y^2}$

2x $\qquad$ 3y

2.2x.3y = 12xy » note que é igual ao segundo termo de $4x^2 - 12xy + 9y^2$

Portanto trata-se de um trinômio quadrado perfeito.

$4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x-3y)^2$ » forma fatorada

Sinal

Logo: $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x+3y)^2$ » forma fatorada

Sinal

Exs:

a) $x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$

b) $16x^2 + 24xy + 9y^2 = (4x+3y)^2$

*Convém lembrarmos que ao fatorarmos uma expressão algébrica, devemos fatorá-la por completo:
Exs:

a) $3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) = 3(x+1)^2$

b) $25a^4 - 100b^2 = 25.(a^4 - 4b^2) = 25(a^2 + 2b).(a^2 - 2b)$

Outros casos de fatoração:

1) $x^3 + y^3 = (x+y).(x^2 - xy + y^2)$

2) $x^3 - y^3 = (x-y).(x^2 + xy + y^2)$

3) $x^2 + y^2 = (x^2 + 2xy + y^2) - 2xy = (x+y)^2 - 2xy =$
$(x + y - \sqrt{2xy}).(x + y + \sqrt{2xy})$

Fatoração

1) Fatore, colocando os fatores comuns em evidência:

Exemplos:
$ax+2a = a(x+2)$

$a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$

$a^2 - 4ab + 4b^2 = (a-2b)^2$

$2x^2-2 = 2(x^2-1) = 2(x+1)(x-1)$

a) $3ax-7ay$

b) $x^3 -x^2 + x$

c) $x^3y^2 + x^2y^2 + xy^2$

d) $a^2b^2 - ab^3$

e) $a^2 + ab + ac + bc$

f) $x^2 - b^2$

g) x^2-25

h) $(x^2/9 - y^2/16)$

i) $x^2 + 4x + 4$

j) $a^2 + 6ab + 9b^2$

l) $144x^2-1$

m) $ab + ac + 10b + 10c$

n) $4a^2 - 4$

o) $x^3y - xy^3$

p) $x^2 + 16x + 64$

q) $2x^2 + 4x + 2$

r) $ax^3 + 2a^2x^2 + a^3x$

Resolução do exercício e) $a^2 + ab + ac + bc = a.(a+b) + c.(a+b) = (a+b).(a+c)$

RAZÃO E PROPORÇÃO

Razão

Chama-se de razão entre dois números racionais a e b, com b ¹ 0, ao quociente entre eles. Indica-se a razão de a para b por a/b ou a : b.

Exemplo:

Na sala da 6ª B de um colégio há 20 rapazes e 25 moças. Encontre a razão entre o número de rapazes e o número de moças. (lembrando que razão é divisão)

$$\frac{20 \div 5}{25 \div 5} = \frac{4}{5} \text{ (Indica que para cada 4 rapazes existe 5 moças)}$$

Voltando ao exercício anterior, vamos encontrar a razão entre o número de moças e rapazes.

$$\frac{25 \div 5}{20 \div 5} = \frac{5}{4}, \text{(indica que para cada 5 moças existe 4 rapazes)}$$

Lendo Razões

$\frac{2}{5}$, lê -se, 2 está para 5 ou 2 para 5.

$\frac{8}{9}$, lê -se, 8 está para 9 ou 8 para 9.

Termos de uma Razão

$$\frac{6}{7}\ \begin{matrix}\text{Antecedente}\\ \text{Consequente}\end{matrix}$$

Grandezas Especiais

Escala, é a razão entre a medida no desenho e o correspondente na medida real.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida do desenho}}{\text{Medida real}}$$

Exemplo:

Em um mapa, a distância entre Montes Claros e Viçosa é representada por um segmento de 7,2 cm. A distância real entre essas cidades é de 4320km. Vamos calcular a escala deste mapa.

As medidas devem estar na mesma unidade, logo 4320km = 432 000 000 cm

$$\text{Escala} = \frac{7{,}2\text{cm}}{432\,000\,000\text{cm}} = \frac{1}{60\,000\,000}$$

$$\text{Escala} = \frac{7{,}2\text{cm}}{432\,000\,000\text{cm}} = \frac{1}{60\,000\,000}$$

Velocidade média, é a razão entre a distância a ser percorrida e o tempo gasto. (observe que neste caso as unidades são diferentes)

$$\text{Velocidade} = \frac{\text{Distância}}{\text{Tempo}}$$

Exemplo:

Um carro percorre 320km em 4h. determine a velocidade média deste carro.

Velocidade= 320/4 = 80

Densidade demográfica, é a razão entre o número de habitantes e a área.

$$\text{Densidade demográfica} = \frac{\text{Nº de habitantes}}{\text{Área}}$$

Exemplo:

O estado do Ceará tem uma área de 148.016 km2 e uma população de 6.471.800 habitantes. Dê a densidade demográfica do estado do Ceará.

$$\text{Densidade} = \frac{6.471.800}{148.016} = 43{,}72 \text{ ham/km}^2$$

Razões Inversas

Vamos observar as seguintes razões.

$$\frac{5}{8} \text{ e } \frac{8}{5}$$

Observe que o antecessor(5) da primeira é o conseqüente(5) da segunda.

Observe que o conseqüente(8) da primeira é o antecessor(8) da segunda.

O Produto das duas razões é igual a 1, isto é 5/8 x 8/5 =1

Dizemos que as razões são inversas.

Exemplos:

A razão inversa de $\frac{6}{7}$ é $\frac{7}{6}$.

GRANDEZAS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

Duas grandezas são diretamente proporcionais quando, aumentando uma delas, a outra aumenta na mesma proporção da primeira.

Exemplo:

Um carro percorre:
* 80 km em 1 hora
* 160 km em 2 horas
* 240km em 3 horas

Então, o tempo e a distância são grandezas diretamente proporcionais, pois aumentam na mesma proporção.

GRANDEZAS INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando, aumentando uma delas, a outra diminui na mesma razão da primeira.

Exemplo:

Um carro faz um percurso em:
* 1 hora com velocidade de 90km/h
* 2 horas com velocidade de 45km/h
* 3 horas com velocidade de 30km/h

Então, o tempo e a velocidade são grandezas inversamente proporcionais, conforme mostrado no exemplo acima.

Exercícios de Grandezas Proporcionais

1) Um prêmio de R$ 600.000,00 vai ser dividido entre os acertadores de um bingo. Observe a tabela e responda:

Número de acertadores	Prêmio
3	R$ 200.000,00
4	R$ 150.000,00

a) Qual a razão entre o número de acertadores do prêmio de R$200.000,00 para o prêmio de

R$150.000,00?

b) Qual a razão entre os prêmios da tabela acima, considerando 3 acertadores e 4 acertadores?

c) O número de acertadores e os prêmios são grandezas diretamente ou inversamente proporcionais?

Resposta a:

$\frac{3}{4}$

Resposta b:

$\frac{4}{3}$

Resposta c:

Inversamente proporcionais.

2) Diga se é diretamente ou inversamente proporcional:

a) Número de pessoas em um churrasco e a quantidade (gramas) que cada pessoa poderá consumir.

b) A área de um retângulo e o seu comprimento, sendo a largura constante.

c) Número de erros em uma prova e a nota obtida.

d) Número de operários e o tempo necessário para eles construírem uma casa.

e) Quantidade de alimento e o número de dias que poderá sobreviver um náufrago.

Resposta a:

Inversamente proporcionais.

Resposta b:

Diretamente proporcionais.

Resposta c:

Inversamente proporcionais.

Resposta d:

Inversamente proporcionais.

Resposta e:

Diretamente proporcionais.

3) Os números x, y e 32 são diretamente proporcionais aos números 40, 72, 128. Determine os números x e y.

128/32 = 4

Então,

x = 40 / 4 = 10

y = 72 / 4 = 18

4) Sabendo que a, b, c e 120 são diretamente proporcionais aos números 180, 120, 200 e 480, determine os números a, b e c.

480/120 = 4

Então,

a = 180/4 = 45

b = 120/4 = 30

c = 200/4 = 50

Seqüência Numérica
Seqüência é sucessão, encadeamento de fatos que se sucedem.
É comum percebermos em nosso dia-a-dia conjuntos cujos elementos estão dispostos em certa ordem, obedecendo a uma seqüência.
Por exemplo:
Todos nós sabemos que o Brasil é penta campeão mundial de futebol e os anos, em ordem cronológica, em que ele foi campeão mundial são: 1958, 1962, 1970, 1994 e 2002. Essas datas formam um conjunto com os elementos dispostos numa determinada ordem.
O estudo de seqüência dentro da matemática é o conjunto de números reais dispostos em certa ordem. Assim chamado de seqüência numérica.

Exemplo:
• O conjunto ordenado (0, 2, 4, 6, 8, 10,...) é a seqüência de números pares.
• O conjunto ordenado (7, 9, 11, 13,15) é a seqüência de números impares ≥ 7 e ≤ 15.
• O conjunto ordenado (2, 10, 12, 16, 17, 18, 19, 200) é uma seqüência de números que começa com a letra D.

Matematicamente quando temos uma seqüência numérica qualquer, representamos o seu 1º termo por a1 assim sucessivamente, sendo o n-ésimo termo an.
Exemplo:
• (2, 4, 6, 8, 10) temos: a1 = 2; a2 = 4; a3 = 6; a4 = 8; a5 = 10

A seqüência acima é uma seqüência finita sua representação geral é (a1, a2, a3,..., an), para as seqüências que são infinitas a representação geral é (a1, a2, a3, an, ...).

Para determinarmos uma seqüência numérica precisamos de uma lei de formação.
Exemplo:
A seqüência definida pela lei de formação $an = 2n^2 - 1$, $n \in N^*$, onde n = 1, 2, 3, 4, 5, ... e an é o termo que ocupa a n-ésima posição na seqüência. Por esse motivo, an é chamado de termo geral da sequência.
Utilizando a lei de formação $an = 2n^2 - 1$, atribuindo valores para n, encontramos alguns termos da seqüência.
• $n = 1 \rightarrow a1 = 2 . 1^2 - 1 \rightarrow a1 = 1$
• $n = 2 \rightarrow a2 = 2 . 2^2 - 1 \rightarrow a2 = 7$
• $n = 3 \rightarrow a3 = 2 . 3^2 - 1 \rightarrow a3 = 17$

• n = 4 → a4 = 2 . 4² - 1 → a4 = 31

.

.

.

Assim a seqüência formada é (1, 7, 17, 31, ...)

Progressão aritmética e geométrica

1) Progressão aritmética

- Definição
  Progressão aritmética é uma sequência de números reais cuja diferença entre um termo e seu antecedente, a partir do segundo, é uma constante.
- Propriedades

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$r = a_n - a_{n-1}$$

a_n → termo geral → enésimo termo

a_1 → primeiro termo

n → número de termos

r → razão

S_n → Soma dos n primeiros termos

2) Progressão geométrica

- Definição
  Progressão geométrica é uma sequência de números reais não nulos cujo quociente entre um termo e seu antecedente, a partir do segundo, é uma constante.
- Propriedades

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}; \quad -1 < q < 1$$

a_n → termo geral → enésimo termo

a_1 → primeiro termo

n → número de termos

q → quociente ou razão

S_n → soma dos n primeiros termos

S_∞ → soma de infinitos termos

Progressão geométrica
Soma de um número finito de termos
Numa progressão geométrica (PG) com um número finito de termos é possível calcular a soma desses termos, a exemplo do que ocorre com a progressão aritmética (PA).

Somar os termos da PG significa fazer
$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ ou, ainda, $S_n = a_1 + a_1.q + a_1.q^2 + \ldots + a_1.q^{n-1}$

Para encontrarmos uma expressão para calcular essa soma, multiplicaremos por "q" os dois membros da igualdade acima:

$$q.S_n = q.(a_1 + a_1.q + a_1.q^2 + \ldots + a_1.q^{n-1})$$
$$q.S_n = a_1.q + a_1.q^2 + a_1.q^3 \ldots + a_1.q^n$$

E, subtraindo a 1ª igualdade da 2ª:

$$q.S_n - S_n = a_1.q + a_1.q^2 + a_1.q^3 \ldots + a_1.q^n - (a_1 + a_1.q + a_1.q^2 + \ldots + a_1.q^{n-1})$$
$$S_n(q-1) = -a_1 + a_1.q^n$$
$$\boxed{S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}}$$

Eis a fórmula da soma dos termos de uma PG finita.

No caso de uma PG com razão igual a 1, como, por exemplo, (2, 2, 2, 2, 2), essa fórmula não funciona, pois o denominador seria zero.

Nesse caso, a soma é igual ao número de termos multiplicado pelo 1º termo:

$$\boxed{S_n = n.a_1}$$

PGs infinitas
Mas existe, ainda, outro caso: o das PGs infinitas.

Numa PG do tipo (2, 6, 18, 54, ...) não seria possível calcular exatamente a soma de termos que crescem infinitamente. Essa soma seria infinita.

Porém, em casos em que a PG é decrescente, ou seja, possui razão 0 < q < 1, a soma é bastante intuitiva.

Considere, por exemplo, uma pessoa que possui uma barra de chocolate e não quer vê-la acabar tão cedo. Essa pessoa decide, então, que vai comer sempre a metade do pedaço que ela tiver.

Assim, no primeiro dia comerá a metade da barra inteira. No segundo dia, a metade da metade que sobrou do dia anterior. No terceiro dia, comerá a metade do pedaço do dia anterior, e assim por diante.

Esses pedaços consumidos formam uma PG infinita (considerando-se que a pessoa conseguiria dividi-la sempre) e decrescente: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$.

Porém, a soma de todas essas quantidades seria igual à barra toda, ou seja, 1.

Logo, é possível determinar a soma desse tipo de PG infinita, por meio da expressão:

$$\boxed{S_\infty = \frac{a_1}{1-q}}$$

Exercícios resolvidos

1) Comprei um terreno e vou pagá-lo em 8 prestações crescentes, de modo que a primeira prestação é de 100 unidades monetárias - e cada uma das seguintes é o dobro da anterior. Qual o valor do terreno?

Como sabemos o total de prestações (8), vamos calcular o valor do terreno por meio da soma da PG finita, pois as prestações estão em PG de razão 2.

$$S_8 = \frac{a_1\left(q^8 - 1\right)}{q - 1}$$

$$S_8 = \frac{100\left(2^8 - 1\right)}{2 - 1} = 100.(256 - 1) = 100.255 = 25500$$

Logo, o valor do terreno é de 25500 unidades monetárias.

2) Dê a fração geratriz da dízima periódica 0, 8888...

Podemos escrever a dízima da seguinte forma:

0, 8888... = 0, 8 + 0, 08 + 0, 008 + 0, 0008 + ..., o que seria igual à soma da PG infinita

$$\left(\frac{8}{10}, \frac{8}{100}, \frac{8}{1000}, \ldots\right)$$

.

A fração geratriz é, então, o valor da soma dessa PG.

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{8}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{8}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{8}{9}$$

3) Resolver a equação $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \ldots = 12$.

Mais uma vez, aplicaremos a fórmula da soma da PG infinita, pois o 1º membro da equação é uma PG infinita e decrescente.

$$\frac{a_1}{1-q}=12$$

$$\frac{x}{1-\frac{1}{3}}=12$$

$$x.\frac{3}{2}=12$$

$$x=8$$

$$S=\{8\}$$

A soma de uma número finito de termos de uma PA
Seja uma progressão aritmética, tal que:

an = an – 1 + r

Onde an é o termo atual e r é a razão.

Podemos encontrar a soma dos termos por:

$$S_n=\frac{n\,(a_1+a_n)}{2}$$

Exercícios Resolvidos

1. 1. Determine o quarto termo da PA(3, 9, 15,...).

Resolução:
a1=3
a2=9
r = a2 - a1 = 9 – 3 = 6
(a1, a2, a3, a4,...)

Então:
a4 = a1 + r + r + r
a4 = a1 + 3r
a4 = 3 + 3.6
a4 = 3+18
a4 = 21

com a formula do termo geral:

an = a1 + (n - 1) r
a4= 3 + (4 - 1) 6
a4 = 3 + 3.6

$a4 = 9 + 18$
$a4 = 21$

2. 2. Determine o oitavo termo da PA na qual $a3 = 8$ e $r = -3$.

Resolução:
$a3 = 8$
$r = -3$
(a1, ...,a3, a4, a5, a6, a7, a8,...)

Então:
$a8 = a3 + r + r + r + r + r$
$a8 = a3 + 5r$
$a8 = 8 + 5.-3$
$a8 = 8 - 15$
$a8 = - 7$

com a formula do termo geral :

$an = a1 + (n -1)r$
$a8 = 15 + (8 -1) . (-3)$ --como a razão é negativa a PA é decrescente sendo $a1 = 15$
$a8 = 15 + (-21)$
$a8 = -7$

3. 3. Interpole 3 meios aritméticos entre 2 e 18.
Resolução:
Devemos formar a PA(2, ___, ___, ___, 18), em que:
$a1 = 2$
$an = a5 = 18$
$n = 2 + 3 = 5$
Para interpolarmos os três termos devemos determinar primeiramente a razão da PA. Então:
$a5 = a1 + r + r + r + r$
$a5 = a1 + 4r$
$18 = 2 + 4r$
$16 = 4r$
$r = 16/4$
$r = 4$
Logo temos a PA(2, 6, 10, 14, 18)

Exercícios Resolvidos

1. 1. Calcule a soma dos 50 primeiros termos da PA(2, 6, 10,...).

Resolução:
$a1 = 2$
$r = a2 - a1 = 6 - 2 = 4$
Para podemos achar a soma devemos determinar o an(ou seja, a50):
$a50 = a1 + 49r = 2 + 49.4 = 2 + 196 = 198$

Aplicando a fórmula temos:
$S50 = (a1+an).n/2 = (2+198).50/2 = 200.25=5000$

2. 2. Um ciclista percorre 20 km na primeira hora, 17 km na segunda hora, e assim por diante, em progressão aritmética. Quantos quilômetros percorrerá em 5 horas?

Resolução:
PA = (20, 17,14,...)
$a1 = 20$
$r = a2 - a1 = 17 - 20 = -3$

Para podemos achar quantos quilômetros ele percorrerá em 5 horas devemos somas os 5 primeiros termos da PA e para isto precisamos do an (ou seja, a5):
$a5 = a1 + 4r = 20 + 4.-3 = 20 - 12 = 8$

Aplicando a fórmula temos:
$S5 = (a1+an).n/2 = (20+8).5/2 = 14.5 = 70$
Logo ele percorreu em 5 horas 70 km.

EXERCICIOS

1) Qual é o décimo quinto termo da PA (4, 10......)? (R:88)

2) Qual é o centésimo número natural par? (R:198)

3) Ache o sexagésimo número natural ímpar (R:119)

4) Numa PA de razão 5 o primeiro termo é 4. Qual é a posição do termo igual a 44? (R:9ª)

5) Calcule o numero de termos da PA(5,10.....785) (R:157)

6) Ache a soma dos quarenta primeiros termos da PA(8, 2....) (R:-4360)

7) Numa progressão aritmética, a19=70 e a razão é 7 determine:
---a)O primeiro termo (R:-56)
---b)O décimo termo (R:7)
---c)A soma dos 20 primeiros termos (R:210)

8) O vigésimo termo da Progressão Aritmética , 3, 8, 13, 18 .é
obs: dados an= a1 + (n - 1)r
a) 63
b) 74
c) 87
d) 98 (X)
e) 104

9)Se x, x + 5, -6 são termos consecutivos de uma progressão aritmética (PA) então o valor de x é
a) -16 (X)
b) -14
c) -18
d) -12
e) -20

10) Achar o 14º termo da PA (3,10,17,.....)(R:94)

11) Escrever os três primeiros termos de uma PA de razão 2, sabendo que a32 =79 (R:17,19,21)

12)Determine a localização do número 22 na PA (82,76,70,....) (R:11)

13) Os termos consecutivos de uma progressão aritmética (PA) são x; 10; 12. Podemos concluir que x vale
a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 8 (X)

Porcentagem

Ao abrir um jornal, ligar uma televisão, olhar vitrines, é comum depararmos com expressões do tipo:

- A inflação do mês foi de 4% (lê-se quatro por cento)
- Desconto de 10% (dez por cento) nas compras à vista.
- O índice de reajuste salarial de março é de 0,6% (seis décimos por cento)

A porcentagem é um modo de comparar números usando a proporção direta, onde uma das razões da proporção é uma fração cujo denominador é 100. Toda razão a/b na qual b=100 chama-se porcentagem.

Exemplos:

(1) Se há 30% de meninas em uma sala de alunos, pode-se comparar o número de meninas com o número total de alunos da sala, usando para isto uma fração de denominador 100, para significar que se a sala tivesse 100 alunos então 30 desses alunos seriam meninas. Trinta por cento é o mesmo que

$$\frac{30}{100} = 30\%$$

(2) Calcular 40% de R$300,00 é o mesmo que determinar um valor X que represente em R$300,00 a mesma proporção que R$40,00 em R$100,00. Isto pode ser resumido na proporção:

$$\frac{40}{100} = \frac{X}{300}$$

Como o produto dos meios é igual ao produto dos extremos, podemos realizar a multiplicação cruzada para obter: 100X=12000, assim X=120

Logo, 40% de R$300,00 é igual a R$120,00.

(3) Li 45% de um livro que tem 200 páginas. Quantas páginas ainda faltam para ler?

$$\frac{45}{100} = \frac{X}{200}$$

o que implica que 100X=9000, logo X=90. Como eu já li 90 páginas, ainda faltam 200-90=110 páginas.

JUROS SIMPLES

O regime de juros será simples quando o percentual de juros incidir apenas sobre o valor principal. Sobre os juros gerados a cada período não incidirão novos juros. Valor Principal ou simplesmente principal é o valor inicial emprestado ou aplicado, antes de somarmos os juros. Transformando em fórmula temos:

$$\boxed{J = P \cdot i \cdot n}$$

Onde:

J = juros
P = principal (capital)
i = taxa de juros
n = número de períodos

Exemplo: Temos uma dívida de R$ 1000,00 que deve ser paga com juros de 8% a.m. pelo regime de juros simples e devemos pagá-la em 2 meses. Os juros que pagarei serão:

J = 1000 x 0.08 x 2 = 160

Ao somarmos os juros ao valor principal temos o montante.

Montante = Principal + Juros
Montante = Principal + (Principal x Taxa de juros x Número de períodos)

$$\boxed{M = P \cdot (1 + i \cdot n)}$$

Exemplo: Calcule o montante resultante da aplicação de R$70.000,00 à taxa de 10,5% a.a. durante 145 dias.

SOLUÇÃO:
M = P . (1 + (i.n))
M = 70000 [1 + (10,5/100).(145/360)] = R$72.960,42

Observe que expressamos a taxa i e o período n, na mesma unidade de tempo, ou seja, anos. Daí ter dividido 145 dias por 360, para obter o valor equivalente em anos, já que um ano comercial possui 360 dias.

Exercícios sobre juros simples:

1) Calcular os juros simples de R$ 1200,00 a 13 % a.t. por 4 meses e 15 dias.

0.13 / 3 = 0.0433.. implica que 13% a.t. equivale a 4,33..% a.m.
4 m 15 d = 4,5 m, pois 15 dias significa 0,5 m.
Então j = 1200 x 0.0433..x 4,5 = 234

2 - Calcular os juros simples produzidos por R$40.000,00, aplicados à taxa de 36% a.a., durante 125 dias.

Temos: J = P.i.n
A taxa de 36% a.a. equivale a 0,36/360 = 0,001 a.d.
Agora, como a taxa e o período estão referidos à mesma unidade de tempo, ou seja, dias, poderemos calcular diretamente:
J = 40000.0,001.125 = R$5000,00

3 - Qual o capital que aplicado a juros simples de 1,2% a.m. rende R$3.500,00 de juros em 75 dias?

Temos imediatamente: J = P.i.n ou seja: 3500 = P.(1,2/100).(75/30)
Observe que expressamos a taxa i e o período n em relação à mesma unidade de tempo, ou seja, meses. Logo,
3500 = P. 0,012 x 2,5 = P . 0,030;
Daí, vem: P = 3500 / 0,030 = R$116.666,67

4 - Se a taxa de uma aplicação é de 150% ao ano, quantos meses serão necessários para dobrar um capital aplicado através de capitalização simples?

Objetivo: M = 2.P
Dados: i = 150/100 = 1,5
Fórmula: M = P (1 + i . n)
Desenvolvimento:

2P = P (1 + 1,5 n)

2 = 1 + 1,5 n

n = 2/3 ano = 8 meses

JUROS COMPOSTOS

O regime de juros compostos é o mais comum no sistema financeiro e portanto, o mais útil para cálculos de problemas do dia-a-dia. Os juros gerados a cada período são incorporados ao principal para o cálculo dos juros do período seguinte.

Chamamos de capitalização o momento em que os juros são incorporados ao principal. Após três meses de capitalização, temos:

1º mês: M =P.(1 + i)
2º mês: o principal é igual ao montante do mês anterior: M = P x (1 + i) x (1 + i)

3º mês: o principal é igual ao montante do mês anterior: M = P x (1 + i) x (1 + i) x (1 + i)

Simplificando, obtemos a fórmula:

M = P . (1 + i)n

Importante: a taxa i tem que ser expressa na mesma medida de tempo de n, ou seja, taxa de juros ao mês para n meses.

Para calcularmos apenas os juros basta diminuir o principal do montante ao final do período:

J = M - P

Exemplo:

Calcule o montante de um capital de R$6.000,00, aplicado a juros compostos, durante 1 ano, à taxa de 3,5% ao mês.

Resolução:

P = R$6.000,00
t = 1 ano = 12 meses
i = 3,5 % a.m. = 0,035
M = ?

Usando a fórmula M=P.(1+i)n, obtemos:

M = 6000.(1+0,035)12 = 6000. (1,035)12 = 6000.1,511 = 9066,41.
Portanto o montante é R$9.066,41

Relação entre juros e progressões

No regime de juros simples:
M(n) = P + P.i.n ==> P.A. começando por P e razão J = P.i.n

No regime de juros compostos:
M(n) = P . (1 + i) n ==> P.G. começando por P e razão (1 + i) n

Portanto:

- num regime de capitalização a juros simples o saldo cresce em progressão aritmética
- num regime de capitalização a juros compostos o saldo cresce em progressão geométrica

POLINÔMIOS

Uma expressão formada por adições e subtrações de vários monômios é denominada de polinômios. (Poli = muitos).

Observe a expressão:

5a – 6ab + b – 2ª + 3ab + b é um polinômio formado por seis monômios ou termos da sentença. Como existem termos semelhantes na expressão ou neste polinômio, é possível reduzir os termos efetuando as operações indicadas abaixo:

$$
\begin{aligned}
&5a - 6ab + b - 2a + 3ab + b = \\
&5a - 2a - 6ab + 3ab + b + b = \\
&= 3a + 3ab + 2b
\end{aligned}
$$

A expressão encontrada é chamada de forma reduzida do polinômio, pois os termos restantes da sentença não podem ser mais efetuados.

Desta forma, para somar ou subtrair polinômios, basta reduzir seus termos semelhantes da sentença.

Ainda, se tratando da definição de polinômios, é uma expressão que se encontra na forma de:

$$P(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + A_{n-2} x^{n-2} + \ldots + A_2 x^2 + A_1 x + A_0$$

Temos:

“n” que determina o grau do polinômios(em tutoriais posteriores estudaremos sobre este assunto)

“x” representa a variável do polinômio

n, n-1..., representam os coeficientes do polinômio.

Exemplos para fixação de conteúdo

a) Somar os polinômios abaixo:

$3x^2 + 2xy + y^2 +$

$x^2 + 4xy + 2y^2$

Solução:

$(3x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 + 4xy + 2y^2) =$

$3x^2 + x^2 + 2xy + 4xy + y^2 + 2y^2 =$

$4x^2 + 6xy + 3y^2$

b) Subtrair os polinômios abaixo:

$(-12ab + 6a) -$

$(-13ab + 5a)$

Solução:

$-12ab + 6a + 13ab - 5a =$

$-12ab + 13ab + 6a - 5a =$

$ab + a$

Valor numérico dos Polinômios

O valor numérico de um determinado polinômio P(x) para o valor de x = a, é o número que temos quando é substituído o valor de "x" pelo valor de "a" e efetuamos os devidos cálculos indicados na sentença P(x).

Exemplos para fixação de definição

a) Calcule o valor numérico da expressão

$P(x) = x + 3x + 2$

Para $x = 4$

$P(4) = 4 + 3.4 + 2 = 18$

b) Calcule o valor numérico

$P(x) = 2x + 3x^2 + 5$

Para $x = 2$

$P(2) = 2.2 + 3.(2)^2 + 5$

$P(2) = 4 + 3.4 + 5 = 21$

Operações matemáticas com polinômios

Podemos realizar as operações de soma, subtração e multiplicação com polinômios. Também é possível realizar a divisão, porém não será visto neste tutorial por se tratar de algo mais extenso, possivelmente visto em tutoriais futuros.

Serão exemplificadas todas as operações com polinômios, através de exercícios práticos com as respectivas respostas.

Operação de soma

a) Dados os polinômios $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = 2x^2 - 5x$, determine $f(x) + g(x)$

Resolução:

$f(x) = 3x - 1 +$

$g(x) = 2x^2 - 5x$

$(3x - 1) + (2x^2 - 5x) = -2x + 2x^2 -1$

b) Dados os polinômios $(fx) = 2x^2 + 2$, $g(x) = 4x^2 - 2x$ e $h(x) = 3x^2 - 5$

Determine $f(x) + g(x) + h(x)$

Resolução:

$f(x) = 2x^2 + 2 +$

$g(x) = 4x^2 - 2x +$

$h(x) = 3x^2 - 5$

$(2x^2 + 2) + (4x^2 - 2x) + (3x^2 - 5) = 9x^2 - 2x - 3$

Operação de subtração

a) Dados os polinômios $f(x) = 5x + 7$, $g(x) = 5x^2 - 8x$, determine $f(x) - g(x)$

Resolução:

$f(x) = 5x + 7 -$

$g(x) = 5x^2 - 8x$

$(5x + 7) - (5x^2 - 8x) = 13x - 5x^2 +7$

b) Dados os polinômios $(fx) = 7x^2 + 2x^{\square} + 4x$, $g(x) = 2x^2 - 5x^{\square}$ e $h(x) = 3x - 6$

Determine f(x) – g(x) – h(x)

Resolução:

$f(x) = 7x^2 + 2x^{\square} + 4x$ -

$g(x) = 2x^2 - 5x^{\square}$ -

$h(x) = 3x - 6$

$(7x^2 + 2x^{\square} + 4x) – (2x^2 - 5x^{\square}) – (3x – 6) = 5x^2 + 7x^{\square} + x + 6$

Operação de Multiplicação

a) Dados os polinômios $f(x) = 4x + 2$, $g(x) = 3x^2 - 2x$, determine f(x) . g(x)

Resolução:

$f(x) = 4x + 2$.

$g(x) = 3x^2 - 2x$

$(4x + 2) . (3x^2 - 2x) = 12x^{\square} - 8x^2 + 6x^2 - 4x =$

$12x^{\square} - 2x^2 - 4x$

b) Dados os polinômios $(fx) = 3x^2 + 2x + 3$, $g(x) = 2x - 5x$

Determine f(x) . g(x)

Resolução:

$f(x) = 3x^2 + 2x + 3$.

$g(x) = 2x - 5x$

$(3x + 2x + 3) . (2x - 5x) =$

$6x^2 - 15x^2 + 4x^2 - 10x^2 + 6x – 15x =$

$-15x^2 - 9x$

Equação polinomial

Em matemática, Equações polinomiais monovariáveis são equações da forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0 = 0, a_n \neq 0$$

onde x é a incógnita, o número n é chamado o grau da equação e os coeficientes a_k são números reais, complexos ou, mais geralmente falando, elementos de certo anel dados.

Resolver a equação consiste em encontrar quais são os elementos x que tornam a equação verdadeira. Estes elementos são chamados soluções da equação polinomial.

Exemplos

- $x^2 - 4 = 0$;
- $x + 34 = 0$;
- $x^{32} + x^3 + x^2 + 34x = 0$
- $x^2 + 2x = 0$

Relações entre os coeficientes e as raízes de um polinômio

Os coeficientes de um polinômio possuem informações sobre as raízes deste à medida que os relacionam as raízes.

Seja: $P(x) = a_0 + a_1.x + \cdots\cdots\cdots + a_n.x^n$ dividindo-se P(x) por a_n , suas raízes não são alteradas e temos:

$$\frac{P(x)}{a_n} = x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}.x^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n}.x^{n-2} + \cdots\cdots\cdots\frac{a_1}{a_n}.x + \frac{a_0}{a_n}$$

1) Define-se a soma das raízes de P(x) , $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\ldots \alpha_n$ como sendo igual a:

$$-\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

.

2) Define-se a soma dos produtos das raízes tomadas duas a duas,

$$\alpha_1.\alpha_2 + \alpha_1.\alpha_3 + \cdots\cdots\alpha_1.\alpha_n + \alpha_2.\alpha_3 + \cdots\cdots\alpha_2.\alpha_n + \cdots\cdots\alpha_{n-1}.\alpha_n$$

como sendo igual a $+\frac{a_{n-2}}{a_n}$.

À seguir teremos os produtos das raízes tomadas três a três, quatro a quatro, e assim por diante.

Produto 3 a 3 igual a: $-\frac{a_{n-3}}{a_n}$

Produto 4 a 4 igual a :$+\frac{a_{n-4}}{a_n}$

Finalmente o produto das n raízes do polinômio, $\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3\cdots\cdots.\alpha_n$ é igual a $(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$.

Essas relações, associadas a outras ferramentas permitem que avaliemos possíveis raízes de P(x) .

Exemplos:

1) Sejam a , b e a as raízes de um polinômio P(x) de 3º grau, cujo coeficiente de x^3 é 1 . Calcular P(1) dado que a + b + c = 7 , a . b + a . c + b . c = 14 e a . b . c = 8 .

$P(x)$ é da forma: $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Onde:

$$-a_2 = a + b + c = 7$$

$$a_1 = a.b + a.c + b.c = 14$$

$$-a_0 = a.b.c = 8$$

$$P(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$$

Portanto: P(1) = 1 - 7 + 14 - 8 = 0

x = 1 é raíz de P(x) .

2) Mostrar que se $P(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ possuir duas raizes opostas, então, $p.q = r$

Sejam α_1, α_2 e α_3 as raízes de P(x) , se P(x) tem duas raízes opostas, então: $\alpha_1 = -\alpha_2$.

Sabemos que:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -p$$

$$\alpha_1.\alpha_2 + \alpha_1.\alpha_3 + \alpha_2.\alpha_3 = q$$

$$\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3 = -r$$

temos:

$$\alpha_1 - \alpha_1 + \alpha_3 = -p$$
$$+\alpha_3 = -p$$
$$\alpha_1.(-\alpha_1) + \alpha_1.\alpha_3 + (-\alpha_1).\alpha_3 = q$$
$$-(\alpha_1)^2 + \alpha_1.\alpha_3 - \alpha_1.\alpha_3 = q$$
$$-(\alpha_1)^2 = q$$

$$\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3 = -r$$
$$\alpha_1.(-\alpha_1).\alpha_3 = -r$$
$$-(\alpha_1)^2.\alpha_3 = -r$$
$$q.(-p) = -r$$
$$p.q = r$$

c.q.d.

DICA: Você deve ter notado que no item anterior o sinal dos coeficientes do polinômio se alterna entre + e - , para fornecer as relações entre as raízes e os coeficientes. Uma regra prática é lembrar da relação:

$$\frac{P(x)}{a_n} = \quad x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}.x^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n}.x^{n-2} + \frac{a_{n-3}}{a_n}.x^{n-3} + \cdots\cdots$$
$$+ \quad - \qquad\qquad + \qquad\qquad - \qquad\qquad + \cdots\cdots$$

e alternar sinais + e - , partindo da maior potência com sinal + .

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Sendo P(x) um polinômio em C , chama-se equação algébrica à igualdade P(x) = 0 . Portanto, as raízes da equação algébrica , são as mesmas do polinômio P(x) . O grau do polinômio , será também o grau da equação .
Exemplo: 3x4 - 2x3 + x + 1 = 0 é uma equação do 4º grau .

Propriedades importantes :

P1 - Toda equação algébrica de grau n possui exatamente n raízes .
Exemplo: a equação x3 - x = 0 possui 3 raízes a saber: x = 0 ou x = 1 ou x = -1. Dizemos então que o conjunto verdade ou conjunto solução da equação dada é S = {0, 1, -1}.

P2 - Se b for raiz de P(x) = 0 , então P(x) é divisível por x - b .
Esta propriedade é muito importante para abaixar o grau de uma equação , o que se consegue dividindo P(x) por x - b , aplicando Briot-Ruffini.
Briot - matemático inglês - 1817/1882 e Ruffini - matemático italiano - 1765/1822.

P3 - Se o número complexo a + bi for raiz de P(x) = 0 , então o conjugado a - bi também será raiz .
Exemplo: qual o grau mínimo da equação P(x) = 0, sabendo-se que três de suas raízes são os números 5,3 + 2i e4 - 3i.
Ora, pela propriedade P3, os complexos conjugados 3 - 2i e 4 + 3i são também raízes. Logo, por P1, concluímos que o grau mínimo de P(x) é igual a 5, ou seja, P(x) possui no mínimo 5 raízes.

P4 - Se a equação P(x) = 0 possuir k raízes iguais a m então dizemos que m é uma raiz de grau de multiplicidade k .
Exemplo: a equação (x - 4)10 = 0 possui 10 raízes iguais a 4 . Portanto 4 é raiz décupla ou de multiplicidade 10 .
Outro exemplo: a equação x3 = 0, possui três raízes iguais a 0 ou seja três raízes nulas com ordem de multiplicidade 3 (raízes triplas).
A equação do segundo grau x2 - 8x + 16 = 0, possui duas raízes reais iguais a 4, (x' = x'' = 4). Dizemos então que 4 é uma raiz dupla ou de ordem de multiplicidade dois.

P5 - Se a soma dos coeficientes de uma equação algébrica P(x) = 0 for nula , então a unidade é raiz da equação (1 é raiz).
Exemplo: 1 é raiz de 40x5 -10x3 + 10x - 40 = 0 , pois a soma dos coeficientes é igual a zero.

P6 - Toda equação de termo independente nulo , admite um número de raízes nulas igual ao menor expoente da variável .
Exemplo: a equação 3x5 + 4x2 = 0 possui duas raízes nulas .
A equação x100 + x12 = 0, possui 100 raízes, das quais 12 são nulas!

P7 - Se x1 , x2 , x3 , ... , xn são raízes da equação aoxn + a1xn-1 + a2xn-2 + ... + an = 0 , então ela pode ser escrita na forma fatorada :
ao (x - x1) . (x - x2) . (x - x3) . ... . (x - xn) = 0
Exemplo: Se - 1 , 2 e 53 são as raízes de uma equação do 3º grau , então podemos escrever:
(x+1) . (x-2) . (x-53) = 0 , que desenvolvida fica : x3 - 54x2 + 51x + 106 = 0 . (verifique!).

Relações de Girard - Albert Girard (1590-1633).

São as relações existentes entre os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica .
Para uma equação do 2º grau , da forma ax2 + bx + c = 0 , já conhecemos as seguintes relações entre os coeficientes e as raízes x1 e x2 :
x1 + x2 = - b/a e x1 . x2 = c/a .

Para uma equação do 3º grau , da forma ax3 + bx2 + cx + d = 0 , sendo x1 , x2 e x3 as raízes , temos as seguintes relações de Girard :
x1 + x2 + x3 = - b/a
x1.x2 + x1.x3 + x2.x3 = c/a
x1.x2.x3 = - d/a

Para uma equação do 4º grau , da forma ax4 + bx3 + cx2 + dx + e = 0 , sendo as raízes iguais a x1 , x2 , x3 e x4 , temos as seguintes relações de Girard :

x1 + x2 + x3 + x4 = -b/a
x1.x2 + x1.x3 + x1.x4 + x2.x3 + x2.x4 + x3.x4 = c/a
x1.x2x3 + x1.x2.x4 + x1.x3.x4 + x2.x3.x4 = - d/a
x1.x2.x3.x4 = e/a

NOTA: observe que os sinais se alternam a partir de (-) , tornando fácil a memorização das fórmulas

Determinação de raízes

Determinar as raízes de polinômios, ou "resolver equações algébricas", é um dos problemas mais antigos da matemática. Alguns polinômios, tais como f(x) = x2 + 1, não possuem raízes dentro do conjunto dos números reais. Se, no entanto, o conjunto de candidatos possíveis for expandido ao conjunto dos números imaginários, ou seja, se se passar a tomar em conta o conjunto dos números complexos, então todo o polinômio (não-constante) possui pelo menos uma raiz (teorema fundamental da álgebra).

Existe uma diferença entre a aproximação de raízes e a determinação de fórmulas concretas que as definem. Fórmulas para a determinação de raízes de polinômios de grau até ao 4º são conhecidas desde o século XVI . Mas fórmulas para o 5º grau têm vindo a escapar aos investigadores já há algum tempo. Em 1824, Niels Henrik Abel provou que não pode haver uma fórmula geral (envolvendo apenas as operações aritméticas e radicais) para a determinação de raízes de polinômios de grau igual ou superior ao 5º em termos de coeficientes . Este resultado marcou o início da teoria de Galois, onde se aplica a um estudo detalhado das relações entre raízes de polinômios.

Definição (caso real)

Para a sucessão de termos $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) com $a_n \neq 0$, um polinômio de grau n (ou também função racional inteira) é uma função que possui a forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Alternativamente, o polinômio pode ser escrito recorrendo-se à notação sigma

$$f(x) = \sum_{v=0}^{n} a_v x^v$$

Os números $a_0 \ldots a_n$ são denominados de coeficientes do polinômio e o termo a0 de coeficiente constante, ou termo independente.

Cada elemento somado avxv do polinômio é denominado por termo. Um polinômio com um, dois ou três termos é chamado de monômio, binômio ou trinômio respectivamente.

Em relação ao grau, os polinômios podem ser classificados como a seguir:

- grau 0 - polinômio constante;
- grau 1 - função afim (polinômio linear, caso a0 = 0);
- grau 2 - polinômio quadrático;
- grau 3 - polinômio cúbico.

- ...
- grau n - polinômio de grau n.

Pode-se estender a definição de polinômio para incluir f(x) = 0, chamado polinômio nulo. O polinômio nulo não possui grau definido.

Uma equação polinômica obtem-se quando o polinômio é igualado a zero, ou seja:

$$f(x) = \sum_{v=0}^{n} a_v x^v \quad = 0$$

.

Desta forma podemos falar em raízes do polinômio f(x) e encontrar os valores de x que tornam a igualdade verdadeira, isto é, busca-se a raíz do polinômio f(x) que é um valor de x tal que torne f(x) = 0. Um número que satisfaz uma equação polinômica é chamado de número algébrico. Por exemplo: $\sqrt{2}$ é algébrico e valida o polinômio x2 – 2 = 0 pois $(\sqrt{2})^2 - 2 = 0$.

Definição (genérica)

A definição acima de um polinômio com coeficientes reais (ou complexos) pode ser generalizada para polinômios com coeficientes em estruturas algébricas mais gerais. O resultado é o anel de polinômios.

Seja $(A, +, \times)$ um anel. Então podemos considerar o conjunto $A[x]$ das funções $a : \mathbb{N} \to A$ que tem suporte finito, ou seja, para as quais o conjunto $\{n | a(n) \neq 0\}$ é finito. Essas funções representam os coeficientes do polinômio (notar que a_n é uma forma de se escrever $a(n)$).

O objetivo é escrever uma soma e um produto neste conjunto, de forma que as seqüências do tipo (k, 0, 0, ...) funcionem como os escalares, e a seqüência do tipo (0, 1, 0, ...) funcione como o x dos polinômios.

A definição de $a \oplus b$ e $a \otimes b$ é feita pelos seus coeficientes, ou seja:

$$(a \oplus b)(n) = a_n + b_n$$

$$(a \otimes b)(n) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b_{n-i}$$

Deve-se observar que as duas definições fazem sentido, pois a soma e o produto destas séries tem suporte finito.

Falta provar os axiomas de anel para $(A[x], \otimes, \oplus)$, o que é fácil mas trabalhoso, e que a função

$$\pi : A \to A[x]$$

definida por:

$$\pi(k)_0 = k$$

$$\pi(k)_n = 0, \text{ se } n > 0$$

é um isomorfismo entre A e $\pi(A)$.

Isso mostra que A pode ser visto como um sub-anel de $A[x]$.

Se o anel A possui identidade multiplicativa, então definindo x como a função:

$$x_0 = 0$$
$$x_1 = 1$$
$$x_n = 0 \text{ se } n > 1$$

verifica-se que os elementos de $A[x]$ são todos da forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$.

Notas

- Equações cujas soluções são números inteiros ou racionais são chamadas de Equações Diofantinas.
- Os polinômios até o grau n e o polinômio nulo formam um espaço vectorial que é normalmente denominado por Πn.
-
-
- Os polinômios foram representados a partir de uma base monomial (ex.: 1,x,x2,...,xn) mas deve ser notado que qualquer outra sequência polinomial pode ser usada como base, como por exemplo os polinômios de Chebyshev.
- Se D é um domínio de integridade, então o anel dos polinômios $D[x]$ também é um domínio de integridade.
- Se F é um corpo, então o anel dos polinômios $F[x]$ é uma álgebra sobre o corpo F. Como espaço vetorial, $F[x]$ tem uma base enumerável. A base canônica é o conjunto $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$.

ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

Análise Combinatória
1 - Introdução

Foi a necessidade de calcular o número de possibilidades existentes nos chamados jogos de azar que levou ao desenvolvimento da Análise Combinatória, parte da Matemática que estuda os métodos de contagem. Esses estudos foram iniciados já no século XVI, pelo matemático italiano Niccollo Fontana (1500-1557), conhecido como Tartaglia. Depois vieram os franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662).
A Análise Combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar - de uma forma indireta - o número de elementos de um conjunto, estando esses elementos agrupados sob certas condições.

2 - Fatorial

Seja n um número inteiro não negativo. Definimos o fatorial de n (indicado pelo símbolo n!) como sendo:

n! = n .(n-1) . (n-2) . ... .4.3.2.1 para n ³ 2.

Para n = 0 , teremos : 0! = 1.
Para n = 1 , teremos : 1! = 1

Exemplos:

a) 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720
b) 4! = 4.3.2.1 = 24
c) observe que 6! = 6.5.4!
d) 10! = 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1
e) 10! = 10.9.8.7.6.5!
f) 10! = 10.9.8!

3 - Princípio fundamental da contagem - PFC

Se determinado acontecimento ocorre em n etapas diferentes, e se a primeira etapa pode ocorrer de k1 maneiras diferentes, a segunda de k2 maneiras diferentes, e assim sucessivamente, então o número total T de maneiras de ocorrer o acontecimento é dado por:
T = k1. k2 . k3 . ... . kn

Exemplo:

O DETRAN decidiu que as placas dos veículos do Brasil serão codificadas usando-se 3 letras do alfabeto e 4 algarismos. Qual o número máximo de veículos que poderá ser licenciado?

Solução:
Usando o raciocínio anterior, imaginemos uma placa genérica do tipo PWR-USTZ.
Como o alfabeto possui 26 letras e nosso sistema numérico possui 10 algarismos (de 0 a 9), podemos concluir que: para a 1ª posição, temos 26 alternativas, e como pode haver repetição, para a 2ª, e 3ª também teremos 26 alternativas. Com relação aos algarismos, concluímos facilmente que temos 10 alternativas para cada um dos 4 lugares. Podemos então afirmar que o número total de veículos que podem ser licenciados será igual a: 26.26.26.10.10.10.10 que resulta em 175.760.000. Observe que se no país existissem 175.760.001 veículos, o sistema de códigos de emplacamento teria que ser modificado, já que não existiriam números suficientes para codificar todos os veículos. Perceberam?

4 - Permutações simples

4.1 - Permutações simples de n elementos distintos são os agrupamentos formados com todos os n elementos e que diferem uns dos outros pela ordem de seus elementos.

Exemplo: com os elementos A,B,C são possíveis as seguintes permutações: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA.

4.2 - O número total de permutações simples de n elementos distintos é dado por n!, isto é
Pn = n! Onde n! = n(n-1)(n-2)... .1 .

Exemplos:

a) P6 = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720

b) Calcule o número de formas distintas de 5 pessoas ocuparem os lugares de um banco retangular de cinco lugares.
P5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120

4.3 - Denomina-se ANAGRAMA o agrupamento formado pelas letras de uma palavra, que podem ter ou não significado na linguagem comum.

Exemplo:

Os possíveis anagramas da palavra REI são:
REI, RIE, ERI, EIR, IRE e IER.

5 - Permutações com elementos repetidos

Se entre os n elementos de um conjunto, existem a elementos repetidos, b elementos repetidos, c elementos repetidos e assim sucessivamente , o número total de permutações que podemos formar é dado por:

$$P_n^{(a,b,c,...)} = \frac{n!}{a!b!c!...}$$

Exemplo:
Determine o número de anagramas da palavra MATEMÁTICA.(não considere o acento)

Solução:
Temos 10 elementos, com repetição. Observe que a letra M está repetida duas vezes, a letra A três , a letra T, duas vezes. Na fórmula anterior, teremos: n=10, a=2, b=3 e c=2. Sendo k o número procurado, podemos escrever:
k= 10! / (2!.3!.2!) = 151200
Resposta: 151200 anagramas.

6 - Arranjos simples

6.1 - Dado um conjunto com n elementos , chama-se arranjo simples de taxa k , a todo agrupamento de k elementos distintos dispostos numa certa ordem. Dois arranjos diferem entre si, pela ordem de colocação dos elementos. Assim, no conjunto E = {a,b,c}, teremos:
a) arranjos de taxa 2: ab, ac, bc, ba, ca, cb.
b) arranjos de taxa 3: abc, acb, bac, bca, cab, cba.

6.2 - Representando o número total de arranjos de n elementos tomados k a k (taxa k) por An,k , teremos a seguinte fórmula:

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Obs : é fácil perceber que An,n = n! = Pn . (Verifique)

Exemplo:

Um cofre possui um disco marcado com os dígitos 0,1,2,...,9. O segredo do cofre é marcado por uma seqüência de 3 dígitos distintos. Se uma pessoa tentar abrir o cofre, quantas tentativas deverá fazer(no máximo) para conseguir abri-lo?

Solução:

As seqüências serão do tipo xyz. Para a primeira posição teremos 10 alternativas, para a segunda, 9 e para a terceira, 8. Podemos aplicar a fórmula de arranjos, mas pelo princípio fundamental de contagem, chegaremos ao mesmo resultado:
10.9.8 = 720.
Observe que 720 = A10,3

7 - Combinações simples

7.1 - Denominamos combinações simples de n elementos distintos tomados k a k (taxa k) aos subconjuntos formados por k elementos distintos escolhidos entre os n elementos dados. Observe que duas combinações são diferentes quando possuem elementos distintos, não importando a ordem em que os elementos são colocados.

Exemplo:

No conjunto E= {a,b.c,d} podemos considerar:
a) combinações de taxa 2: ab, ac, ad,bc,bd, cd.
b) combinações de taxa 3: abc, abd,acd,bcd.
c) combinações de taxa 4: abcd.

7.2 - Representando por Cn,k o número total de combinações de n elementos tomados k a k (taxa k) , temos a seguinte fórmula:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Nota: o número acima é também conhecido como Número binomial e indicado por:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemplo:

Uma prova consta de 15 questões das quais o aluno deve resolver 10. De quantas formas ele poderá escolher as 10 questões?

Solução:

Observe que a ordem das questões não muda o teste. Logo, podemos concluir que trata-se de um problema de combinação de 15 elementos com taxa 10.

Aplicando simplesmente a fórmula chegaremos a:
$C15,10 = 15! / [(15-10)! . 10!] = 15! / (5! . 10!) = 15.14.13.12.11.10! / 5.4.3.2.1.10! = 3003$

Agora que você viu o resumo da teoria, tente resolver os 3 problemas seguintes:

01 - Um coquetel é preparado com duas ou mais bebidas distintas. Se existem 7 bebidas distintas, quantos coquetéis diferentes podem ser preparados?
Resp: 120

02 - Sobre uma circunferência são marcados 9 pontos distintos. Quantos triângulos podem ser construídos com vértices nos 9 pontos marcados?
Resp: 84

03 - Uma família com 5 pessoas possui um automóvel de 5 lugares. Sabendo que somente 2 pessoas sabem dirigir, de quantos modos poderão se acomodar para uma viagem?
Resp: 48

Exercício resolvido:

Um salão tem 6 portas. De quantos modos distintos esse salão pode estar aberto?

Solução:

Para a primeira porta temos duas opções: aberta ou fechada
Para a segunda porta temos também, duas opções, e assim sucessivamente.
Para as seis portas, teremos então, pelo Princípio Fundamental da Contagem - PFC:
$N = 2.2.2.2.2.2 = 64$
Lembrando que uma dessas opções corresponde a todas as duas portas fechadas, teremos então que o número procurado é igual a 64 - 1 = 63.

Resposta: o salão pode estar aberto de 63 modos possíveis.

PROBABILIDADE

A história da teoria das probabilidades, teve início com os jogos de cartas, dados e de roleta. Esse é o motivo da grande existência de exemplos de jogos de azar no estudo da probabilidade. A teoria da probabilidade permite que se calcule a chance de ocorrência de um número em um experimento aleatório.

Experimento Aleatório

É aquele experimento que quando repetido em iguais condições, podem fornecer resultados diferentes, ou seja, são resultados explicados ao acaso. Quando se fala de tempo e possibilidades de ganho na loteria, a abordagem envolve cálculo de experimento aleatório.

Espaço Amostral

É o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. A letra que representa o espaço amostral, é S.

Exemplo:

Lançando uma moeda e um dado, simultaneamente, sendo S o espaço amostral, constituído pelos 12 elementos:

S = {K1, K2, K3, K4, K5, K6, R1, R2, R3, R4, R5, R6}

1. Escreva explicitamente os seguintes eventos: A={caras e m número par aparece}, B={um número primo aparece}, C={coroas e um número ímpar aparecem}.
2. Idem, o evento em que:

a) A ou B ocorrem;

b) B e C ocorrem;

c) Somente B ocorre.

3. Quais dos eventos A,B e C são mutuamente exclusivos

Resolução:

1. Para obter A, escolhemos os elementos de S constituídos de um K e um número par: A={K2, K4, K6};

Para obter B, escolhemos os pontos de S constituídos de números primos: B={K2,K3,K5,R2,R3,R5}

Para obter C, escolhemos os pontos de S constituídos de um R e um número ímpar: C={R1,R3,R5}.

2. (a) A ou B = AUB = {K2,K4,K6,K3,K5,R2,R3,R5}

(b) B e C = B Ç C = {R3,R5}

(c) Escolhemos os elementos de B que não estão em A ou C;

B Ç Ac Ç Cc = {K3,K5,R2}

3. A e C são mutuamente exclusivos, porque A Ç C = Æ

Conceito de probabilidade

Se em um fenômeno aleatório as possibilidades são igualmente prováveis, então a probabilidade de ocorrer um evento A é:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Por, exemplo, no lançamento de um dado, um número par pode ocorrer de 3 maneiras diferentes dentre 6 igualmente prováveis, portanto, P = 3/6= 1/2 = 50%

Dizemos que um espaço amostral S (finito) é equiprovável quando seus eventos elementares têm probabilidades iguais de ocorrência.

Num espaço amostral equiprovável S (finito), a probabilidade de ocorrência de um evento A é sempre:

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos de A}}{\text{número de elementos de S}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Propriedades Importantes:

1. Se A e A’ são eventos complementares, então:

P(A) + P(A') = 1

2. A probabilidade de um evento é sempre um número entre Æ (probabilidade de evento impossível) e 1 (probabilidade do evento certo).

$0 \leq P(S) \leq 1$

Probabilidade Condicional

Antes da realização de um experimento, é necessário que já tenha alguma informação sobre o evento que se deseja observar. Nesse caso, o espaço amostral se modifica e o evento tem a sua probabilidade de ocorrência alterada.

Fórmula de Probabilidade Condicional

P(E1 e E2 e E3 e ...e En-1 e En) é igual a P(E1).P(E2/E1).P(E3/E1 e E2)...P(En/E1 e E2 e ...En-1).

Onde P(E2/E1) é a probabilidade de ocorrer E2, condicionada pelo fato de já ter ocorrido E1;

P(E3/E1 e E2) é a probabilidade ocorrer E3, condicionada pelo fato de já terem ocorrido E1 e E2;

P(Pn/E1 e E2 e ...En-1) é a probabilidade de ocorrer En, condicionada ao fato de já ter ocorrido E1 e E2...En-1.

Exemplo:

Uma urna tem 30 bolas, sendo 10 vermelhas e 20 azuis. Se ocorrer um sorteio de 2 bolas, uma de cada vez e sem reposição, qual será a probabilidade de a primeira ser vermelha e a segunda ser azul?

Resolução:

Seja o espaço amostral S=30 bolas, e considerarmos os seguintes eventos:

A: vermelha na primeira retirada e P(A) = 10/30

B: azul na segunda retirada e P(B) = 20/29

Assim:

P(A e B) = P(A).(B/A) = 10/30.20/29 = 20/87

Eventos independentes

Dizemos que E1 e E2 e ...En-1, En são eventos independentes quando a probabilidade de ocorrer um deles não depende do fato de os outros terem ou não terem ocorrido.

Fórmula da probabilidade dos eventos independentes:

P(E1 e E2 e E3 e ...e En-1 e En) = P(E1).P(E2).p(E3)...P(En)

Exemplo:

Uma urna tem 30 bolas, sendo 10 vermelhas e 20 azuis. Se sortearmos 2 bolas, 1 de cada vez e repondo a sorteada na urna, qual será a probabilidade de a primeira ser vermelha e a segunda ser azul?

Resolução:

Como os eventos são independentes, a probabilidade de sair vermelha na primeira retirada e azul na segunda retirada é igual ao produto das probabilidades de cada condição, ou seja, P(A e B) = P(A).P(B). Ora, a probabilidade de sair vermelha na primeira retirada é 10/30 e a de sair azul na segunda retirada 20/30. Daí, usando a regra do produto, temos: 10/30.20/30=2/9.

Observe que na segunda retirada forma consideradas todas as bolas, pois houve reposição. Assim, P(B/A) =P(B), porque o fato de sair bola vermelha na primeira retirada não influenciou a segunda retirada, já que ela foi reposta na urna.

Probabilidade de ocorrer a união de eventos

Fórmula da probabilidade de ocorrer a união de eventos:

P(E1 ou E2) = P(E1) + P(E2) - P(E1 e E2)

De fato, se existirem elementos comuns a E1 e E2, estes eventos estarão computados no cálculo de P(E1) e P(E2). Para que sejam considerados uma vez só, subtraímos P(E1 e E2).

Fórmula de probabilidade de ocorrer a união de eventos mutuamente exclusivos:

P(E1 ou E2 ou E3 ou ... ou En) = P(E1) + P(E2) + ... + P(En)

Exemplo: Se dois dados, azul e branco, forem lançados, qual a probabilidade de sair 5 no azul e 3 no branco?

Considerando os eventos:

A: Tirar 5 no dado azul e P(A) = 1/6

B: Tirar 3 no dado branco e P(B) = 1/6

Sendo S o espaço amostral de todos os possíveis resultados, temos:

n(S) = 6.6 = 36 possibilidades. Daí, temos:P(A ou B) = 1/6 + 1/6 – 1/36 = 11/36

Exemplo: Se retirarmos aleatoriamente uma carta de baralho com 52 cartas, qual a probabilidade de ser um 8 ou um Rei?

Sendo S o espaço amostral de todos os resultados possíveis, temos: n(S) = 52 cartas. Considere os eventos:

A: sair 8 e P(A) = 4/52

B: sair um rei e P(B) = 4/52

Assim, P(A ou B) = 4/52 + 4/52 – 0 = 8/52 = 2/13. Note que P(A e B) = 0, pois uma carta não pode ser 8 e rei ao mesmo tempo. Quando isso ocorre dizemos que os eventos A e B são mutuamente exclusivos.

NOÇÕES BÁSICAS DE ESTATÍSTICA

A estatística utiliza-se das teorias probabilísticas para explicar a frequência da ocorrência de eventos, tanto em estudos observacionais quanto em experimento modelar a aleatoriedade e a incerteza de forma a estimar ou possibilitar a previsão de fenômenos futuros, conforme o caso.

Ou seja mais resumido: A estatística utiliza-se através das teorias probabilísticas para explicar a frequência de fenômenos e para possibilitar a previsão desses fenômenos no futuro.

Algumas práticas estatísticas incluem, por exemplo, o planejamento, a sumarização e a interpretação de observações. Dado que o objetivo da estatística é a produção da melhor informação possível a partir dos dados disponíveis, alguns autores sugerem que a estatística é um ramo da teoria da decisão.

A estatística é uma ciência que se dedica à coleta, análise e interpretação de dados. Preocupa-se com os métodos de recolha, organização, resumo, apresentação e interpretação dos dados, assim como tirar conclusões sobre as características das fontes donde estes foram retirados, para melhor compreender as situações.

Análise combinatória

Para aprender como fazer cálculos de análise combinatória, útil para determinar probabilidades, veja um exercício resolvido:

Escrito há cerca de 3 mil anos, o "I - Ching" ou "Livro das Mutações" apresenta um conjunto de símbolos criados a partir de dois princípios (o masculino Yang, representado por uma linha inteira -, e o feminino Ying, representado por uma linha quebrada - -).

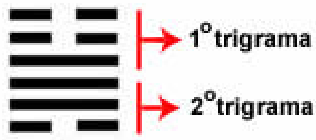
Entre outras funções, esse conjunto de símbolos permitiria adivinhar o futuro, o que torna o livro muito popular ainda hoje em dia. A base do sistema é um conjunto de três símbolos montados com as linhas Ying e Yang, que se constroem do seguinte modo:

1o símbolo	2o símbolo	3o símbolo
duas possibilidades ⚊ ou ⚋	duas possibilidades ⚊ ou ⚋	duas possibilidades ⚊ ou ⚋

A essas figuras chamadas Pa-Kua (as Oito Mutações), atribuíam-se nomes, características, imagens, papéis numa estrutura familiar, além dos pontos cardeais, como se vê a seguir:

Norte	Nordeste	Leste	Sudeste
☷	☳	☲	☱
Sul	Sudoeste	Oeste	Noroeste
☰	☴	☵	☶

Combinando-se dois desses trigramas, obtém-se um hexagrama, figura de significado ainda mais amplo, que constitui a resposta do oráculo a uma pergunta de quem o consulta. Por exemplo:



Sem entrar nas questões de caráter filosófico ou oracular do I-Ching, podemos nos perguntar: quantos hexagramas é possível formar com cada dois trigramas?

1o trigrama	2o trigrama	Total: 64 hexagramas
8 possibilidades	8 possibilidades	

Pensando de forma análoga, podemos considerar que se constrói um hexagrama escolhendo seis símbolos de um grupo de dois (linha inteira, linha quebrada). Assim, o total de símbolos será 26 = 64.

Usamos aqui um princípio multiplicativo que é a base da análise combinatória, um conjunto de procedimentos que sistematiza a contagem de agrupamentos.

O princípio fundamental da contagem
Um evento ocorre em n etapas, sucessivas e independentes, de modo que a primeira etapa ocorre de k1 maneiras, a segunda etapa ocorre de k2 maneiras, ..., e a enésima etapa ocorre de kn. Então, o evento pode ocorrer de k1, k2, ...Kn maneiras distintas.

Essa é a versão multiplicativa do princípio: para que ocorra o evento, todas as etapas devem ser cumpridas. Por exemplo: para se escolher um número de três algarismos, devemos escolher o algarismo das unidades e das dezenas e também das centenas - não se podem omitir quaisquer etapas. Se as etapas não forem sucessivas, mas alternativas, o princípio fica enunciado assim:

Um evento ocorre em n etapas, alternativas e independentes, de modo que a primeira etapa ocorre de k1 maneiras, a segunda etapa ocorre de k2 maneiras, ..., e a enésima etapa ocorre de k2. Então, o evento pode ocorrer de k12 + ... + Kn maneiras distintas.

Se, para o seu almoço, você pode escolher um lanche com ou sem maionese, então você pode escolher entre dois lanches!

Agrupamentos
De modo geral, pode-se resolver um grande número de situações de contagem usando os princípios fundamentais. No entanto, alguns conjuntos podem ser agrupados por critérios que facilitam a sua compreensão; compreender a que classe de agrupamento pertence a situação que estamos tratando pode facilitar muito a resolução.

Arranjos: são agrupamentos nos quais a ordem dos elementos é relevante. Três pessoas (A, B, C) que se inscrevem em um concurso que premia os dois primeiros lugares podem dar a esse concurso seis classificações distintas:

1o lugar	2o lugar
A	B

A	C
B	A
B	C
C	A
C	B

Observe que duas mesmas pessoas podem terminar o concurso de duas maneiras distintas.

O número de arranjos possíveis de p elementos tirados de um grupo de n elementos, com n $\geq$ p pode ser escrito como:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Combinações: são agrupamentos em que a ordem dos elementos não é relevante. No exemplo anterior, se as pessoas A, B e C tivessem que se organizar para formar uma comissão de duas pessoas, só haveria três possibilidades : A e B, A e C, B e C. O número de combinações de p elementos tirados de um grupo de n elementos, com n $\geq$ p é:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!.p!}$$

As permutações são casos particulares de arranjos em que o número de elementos do agrupamento é igual ao número de elementos disponíveis:

$$P_n = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

A sistemática da análise combinatória não é novidade. Em toda a história do desenvolvimento matemático do homem aparecem registros de investigações nos cálculos de possíveis agrupamentos:

- Na obra de Euclides (300 a.C.) há um método para se encontrar o valor de (1 + x)2;
- Além da fórmula resolutiva para equações de 2o grau, Baskhara descreveu algumas situações práticas em que se permutam possibilidades - na poesia, na arquitetura e na medicina;
- Trabalhos do início da Era Cristã relacionados à cabala analisam combinações e permutações entre números inteiros;
- Astrônomos da Idade Média calculavam as possíveis conjunções entre dois, três, n planetas,
- À época do Renascimento, a pressão das recentes descobertas e necessidades mercantis fizeram com que matemáticos europeus desenvolvessem a sistemática de combinatória na descrição de várias circunstâncias: as possibilidades de n pessoas se sentarem em torno de uma mesa, as combinações possíveis de fechaduras, os agrupamentos possíveis de objetos e, naturalmente, as chances nos jogos de azar.

Apesar de tantas outras motivações, foi o interesse pelos jogos de azar a grande motivação para o desenvolvimento da análise combinatória, nos trabalhos de Pascal e Fermat. Naturalmente, outros ramos da matemática usaram esse conhecimento e vieram a se desenvolver: a probabilidade, a teoria de grafos, os conjuntos e a criptologia. A chance de jogos como a MegaSena é um saber relacionado à análise combinatória.

EXPERIMENTOS ALEATÓRIOS, ESPAÇO AMOSTRAL E EVENTO.

Encontramos na natureza dois tipos de fenômenos: determinísticos e aleatórios.

Os fenômenos determinísticos são aqueles em que os resultados são sempre os mesmos, qualquer que seja o número de ocorrência dos mesmos.

Se tomarmos um determinado sólido, sabemos que a uma certa temperatura haverá a passagem para o estado líquido. Esse exemplo caracteriza um fenômeno determinístico.

Nos fenômenos aleatórios, os resultados não serão previsíveis, mesmo que haja um grande número de repetições do mesmo fenômeno.

Por exemplo: se considerarmos a produção agrícola de uma determinada espécie, as produções de cada planta serão diferentes e não previsíveis, mesmo que as condições de temperatura, pressão, umidade, solo sejam as mesmas para todas as plantas.

Podemos considerar como experimentos aleatórios os fenômenos produzidos pelo homem.

Exemplos:

a) lançamento de uma moeda;

b) lançamento de um dado;

c) determinação da vida útil de um componente eletrônico;

d) previsão do tempo.

A cada experimento aleatório está associado o resultado do mesmo, que não é previsível, chamado evento aleatório.

Um conjunto S que consiste de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é denominado espaço amostral.

PROBABILIDADE DE UM EVENTO

A probabilidade de um evento A, denotada por P(A), é um número de 0 a 1 que indica a chance de ocorrência do evento A. Quanto mais próxima de 1 é P(A), maior é a chance de ocorrência do evento A, e quanto mais próxima de zero, menor é a chance de ocorrência do evento A. A um evento impossível atribui-se probabilidade zero, enquanto que um evento certo tem probabilidade 1,0.

As probabilidades podem ser expressas de diversas maneiras, inclusive decimais, frações e percentagens. Por exemplo, a chance de ocorrência de um determinado evento pode ser expressa como 20%; 2 em 10; 0,20 ou 1/5.

Conceito elementar de Probabilidade

Seja U um espaço amostral finito e equiprovável e A um determinado evento ou seja, um subconjunto de U.

A probabilidade p(A) de ocorrência do evento A será calculada pela fórmula

p(A) = n(A) / n(U)

onde:
n(A) = número de elementos de A e n(U) = número de elementos do espaço de prova U.

Vamos utilizar a fórmula simples acima, para resolver os seguintes exercícios introdutórios:

1.1 - Considere o lançamento de um dado. Calcule a probabilidade de:

a) sair o número 3:
Temos U = {1, 2, 3, 4, 5, 6} [n(U) = 6] e A = {3} [n(A) = 1]. Portanto, a probabilidade procurada será igual a p(A) = 1/6.

b) sair um número par: agora o evento é A = {2, 4, 6} com 3 elementos; logo a probabilidade procurada será p(A) = 3/6 = 1/2.

c) sair um múltiplo de 3: agora o evento A = {3, 6} com 2 elementos; logo a probabilidade procurada será p(A) = 2/6 = 1/3.

d) sair um número menor do que 3: agora, o evento A = {1, 2} com dois elementos. Portanto,p(A) = 2/6 = 1/3.

e) sair um quadrado perfeito: agora o evento A = {1,4} com dois elementos. Portanto, p(A) = 2/6 = 1/3.

1.2 - Considere o lançamento de dois dados. Calcule a probabilidade de:

a) sair a soma 8
Observe que neste caso, o espaço amostral U é constituído pelos pares ordenados (i,j), onde i = número no dado 1 e j = número no dado 2.
É evidente que teremos 36 pares ordenados possíveis do tipo (i, j) onde i = 1, 2, 3, 4, 5, ou 6, o mesmo ocorrendo com j.
As somas iguais a 8, ocorrerão nos casos:(2,6),(3,5),(4,4),(5,3) e (6,2). Portanto, o evento "soma igual a 8" possui 5 elementos. Logo, a probabilidade procurada será igual a p(A) = 5/36.

b) sair a soma 12
Neste caso, a única possibilidade é o par (6,6). Portanto, a probabilidade procurada será igual a p(A) = 1/36.

1.3 – Uma urna possui 6 bolas azuis, 10 bolas vermelhas e 4 bolas amarelas. Tirando-se uma bola com reposição, calcule as probabilidades seguintes:

a) sair bola azul
p(A) = 6/20 = 3/10 = 0,30 = 30%

b) sair bola vermelha
p(A) = 10/20 =1/2 = 0,50 = 50%

c) sair bola amarela
p(A) = 4/20 = 1/5 = 0,20 = 20%

Vemos no exemplo acima, que as probabilidades podem ser expressas como porcentagem. Esta forma é conveniente, pois permite a estimativa do número de ocorrências para um número elevado de experimentos. Por exemplo, se o experimento acima for repetido diversas vezes, podemos afirmar que em aproximadamente 30% dos casos, sairá bola azul, 50% dos casos sairá bola vermelha e 20% dos casos sairá bola amarela. Quanto maior a quantidade de experimentos, tanto mais a distribuição do número de ocorrências se aproximará dos percentuais indicados.

Estatística Descritiva

A Estatística é uma ciência cujo campo de aplicação estende-se a muitas áreas do conhecimento humano. Entretanto, um equívoco comum que deparamos nos dias atuais é que, em função da facilidade que o advento dos computadores nos proporciona, permitindo desenvolver cálculos avançados e aplicações de processos sofisticados com razoável eficiência e rapidez, muitos pesquisadores consideram-se aptos a fazerem análises e inferências estatísticas sem um conhecimento mais aprofundado dos conceitos e teorias. Tal prática, em geral, culmina em interpretações equivocadas e muitas vezes errôneas...

Em sua essência, a Estatística é a ciência que apresenta processos próprios para coletar, apresentar e interpretar adequadamente conjuntos de dados, sejam eles numéricos ou não. Pode- se dizer que seu objetivo é o de apresentar informações sobre dados em análise para que se tenha maior compreensão dos fatos que os mesmos representam. A Estatística subdivide-se em três áreas: descritiva, probabilística e inferencial. A estatística descritiva, como o próprio nome já diz, se preocupa em descrever os dados. A estatística inferencial, fundamentada na teoria das probabilidades, se preocupa com a análise destes dados e sua interpretação.

A palavra estatística tem mais de um sentido. No singular se refere à teoria estatística e ao método pelo qual os dados são analisados enquanto que, no plural, se refere às estatísticas descritivas que são medidas obtidas de dados selecionados.
A estatística descritiva, cujo objetivo básico é o de sintetizar uma série de valores de mesma natureza, permitindo dessa forma que se tenha uma visão global da variação desses valores, organiza e descreve os dados de três maneiras: por meio de tabelas, de gráficos e de medidas descritivas.
A tabela é um quadro que resume um conjunto de observações, enquanto os gráficos são formas de apresentação dos dados, cujo objetivo é o de produzir uma impressão mais rápida e viva do fenômeno em estudo.
Para ressaltar as tendências características observadas nas tabelas, isoladamente, ou em comparação com outras, é necessário expressar tais tendências através de números ou estatísticas. Estes números ou estatísticas são divididos em duas categorias: medidas de posição e medidas de dispersão.

Distribuição de Freqüência

Tabela Primitiva

Vamos considerar, neste capítulo, a forma pela qual podemos descrever os dados estatísticos resultantes de variáveis quantitativas, como é o caso de notas obtidas pelos alunos de uma classe, estaturas de um conjunto de pessoas, salários recebidos pelos operários de uma fábrica etc.

Suponhamos termos feito uma coleta de dados relativos às estaturas de quarenta alunos, que compõem uma amostra dos alunos de um colégio A, resultando a seguinte tabela de valores:

TABELA 1

ESTATURAS DE 40 ALUNOS DA FACULDADE A

166 160 161 150 162 160 165 167 164 160

162 168 161 163 156 173 160 155 164 168

155 152 163 160 155 155 169 151 170 164

154 161 156 172 153 157 156 158 158 161

A esse tipo de tabela, cujos elementos não foram numericamente organizados, denominamos tabela primitiva.

Rol

Partindo dos dados acima – tabela primitiva – é difícil averiguar em torno de que valor tende a se concentrar as estaturas, qual a menor ou qual a maior estatura ou, ainda, quantos alunos se acham abaixo ou acima de uma dada estatura.

Assim, conhecidos os valores de uma variável, é difícil formarmos uma idéia exata do comportamento do grupo como um todo, a partir dos dados não ordenados. A maneira mais simples de organizar os dados é através de uma certa ordenação (crescente ou decrescente). A tabela obtida através da ordenação dos dados recebe o nome de rol.

TABELA 2

ESTATURAS DE 40 ALUNOS DA FACULDADE A

150 154 155 157 160 161 162 164 166 169

151 155 156 158 160 161 162 164 167 170

152 155 156 158 160 161 163 164 168 172

153 155 156 160 160 161 163 165 168 173

Agora, podemos saber, com relativa facilidade, qual a menor estatura (173 cm); que a amplitude de variação foi de 173 – 150 = 23 cm; e, ainda, a ordem que um valor particular da variável ocupa no conjunto. Com um exame mais acurado, vemos que há uma concentração das estaturas em algum valor entre 160 cm e 165 cm e, mais ainda, que há poucos valores abaixo de 155 cm e acima de 170 cm.

Distribuição de Freqüência

No exemplo que trabalhamos, a variável em questão, estatura, será observada e estudada muito mais facilmente quando dispusermos valores ordenados em uma coluna e colocarmos, ao lado de cada valor, o número de vezes que aparece repetido.

Denominamos freqüência o número de alunos que fica relacionado a um determinado valor da variável. Obtemos, assim, uma tabela que recebe o nome de distribuição de freqüência:

163	2
164	3
165	1
166	1
167	1
168	2
169	1
170	1
172	1
173	1
Total	40

Mas o processo dado é ainda inconveniente, já que exige muito mais espaço, mesmo quando o número de valores da variável (n) é de tamanho razoável. Sendo possível, a solução mais aceitável, pela própria natureza da variável contínua, é o agrupamento dos valores em vários intervalos.

Assim, se um dos intervalos for, por exemplo, 154 158 —| (é um intervalo fechado à esquerda e aberto à direita, tal que: $154 \leq x < 158$), em vez de dizermos que a estatura de 1 aluno é de 154 cm; de 4 alunos, 155 cm; de 3 alunos, 156 cm; e de 1 aluno, 157 cm, dizemos que 9 alunos têm estaturas entre 154, inclusive, e 158 cm.

Deste modo, estaremos agrupando os valores da variável em intervalos, sendo que, em Estatística, preferimos chamar os intervalos de classes.

Chamando de freqüência de uma classe o número de valores da variável pertencente à classe, os dados da Tabela 3 podem ser dispostos como na Tabela 4, denominada distribuição de freqüência com intervalos de classe:

Exemplo:

TABELA 4

ESTATURAS DE 40 ALUNOS DA FACULDADE A - 2007	
ESTATURAS (cm)	FREQUÊNCIA
150 154 —l	4
154 158 —l	9
158 162 —l	11
162 166 —l	8
166 170 —l	5
170 174 —l	3
Total	40
Dados fictícios.	

Ao agruparmos os valores da variável em classes, ganhamos em simplicidade para perdermos em pormenores. Assim, na Tabela 3 podemos verificar, facilmente, que quatro alunos têm 161 cm de altura e que não existe nenhum aluno com 1,71 cm de altura. Já na Tabela 4 não podemos ver se algum aluno tem a estatura de 159 cm. No entanto, sabemos, com segurança, que onze alunos têm estatura compreendida entre 158 e 162 cm.

O que pretendemos com a construção dessa nova tabela é realçar o que há de essencial nos dados e, também, tornar possível o uso de técnicas analíticas para sua total descrição, até porque a estatística tem por finalidade específica analisar o conjunto de valores, desinteressando-se por casos isolados.

Notas:

· Se nosso intuito é, desde o início, a obtenção de uma distribuição de freqüência com intervalos de classe, basta, a partir da Tabela 1, fazemos uma tabulação.

· Quando os dados estão organizados em uma distribuição de freqüência, são comumente denominados dados agrupados.

Elementos de uma Distribuição de Freqüência

1) Classes de freqüência ou, simplesmente, classes são intervalos de variação da variável.

As classes são representadas simbolicamente por i, sendo i = 1, 2, 3, ..., k (onde k é o número total de classes da distribuição).

Assim, em nosso exemplo, o intervalo 154 ⊢— 158 define a segunda classe ($i = 2$). Como a distribuição é formada de seis classes, podemos afirmar que $k = 6$.

2) Denominamos limites de classe os extremos de cada classe.

O menor número é o limite inferior da classe (li) e o maior número, o limite superior da classe (Li).

Na segunda classe, por exemplo, temos:

$l2 = 154$ e $L2 = 158$

Nota:

· Os intervalos de classe devem ser escritos, de acordo com a Resolução 886/66 do IBGE, em termos desta quantidade até menos aquela, empregando, para isso, o símbolo |— (inclusão de li e exclusão de Li). Assim, o indivíduo com uma estatura de 158 cm está incluído na terceira classe ($i = 3$) e não na segunda.

3) Amplitude de um intervalo de classe, ou, simplesmente, intervalo de classe é a medida do intervalo que define a classe.

Ela é obtida pela diferença entre os limites superior e inferior dessa classe e indicada por hi. Assim:

$hi = Li - li$

Na distribuição da Tabela 1.6.5.4, temos: $h2 = L2 – l2$ Þ $h2 = 158 – 154 = 4$ cm

4) Amplitude total da distribuição (AT) é a diferença entre o limite superior da última classe (limite superior máximo) e o limite inferior da primeira classe (limite inferior mínimo):

$AT = L(máx) – l(mín)$

Em nosso exemplo, temos: $AT = 174 – 14501 = 24$ Þ $AT = 24$ cm

Nota:

· É evidente que, se as classes possuem o mesmo intervalo, verificamos a relação:

AT ¸ hi = k

5) Amplitude amostral (AA) é a diferença entre o valor máximo e o valor mínimo da amostra:

$AA = x(máx) – x(mín)$

Em nosso exemplo, temos: AA = 173 - 150 = 23 Þ AA = 23 cm

Observe que a amplitude total da distribuição jamais coincide com a amplitude amostral.

6) Ponto médio de uma classe (xi) é, como o próprio nome indica, o ponto que divide o intervalo de classe em duas partes iguais.

Para obtermos o ponto médio de uma classe, calculamos a semi-soma dos limites de da classe (média aritmética):

xi = (li + Li) ¸ 2

Assim, o ponto médio da segunda classe, em nosso exemplo, é:

xi = (li + Li) ¸ 2 Þ x2 = (154 + 158) ¸ 2 = 156 cm

Nota:

· O ponto médio de uma classe é o valor que a representa.

7) Freqüência simples ou freqüência absoluta ou, simplesmente, freqüência de uma classe ou de um valor individual é o número de observações correspondentes a essa classe ou a esse valor.

A freqüência simples é simbolizada por fi (lemos: f índice i ou freqüência da classe i).

Assim, em nosso exemplo, temos: f1 = 4, f2 = 9, f3 = 11, f4 = 8, f5 = 5 e f6 = 3

A soma de todas as freqüências é representada pelo símbolo de somatório (∑):

∑(i=1 → k)fi = n

Para a distribuição em estudo, temos: ∑(i=1 → 6)fi = 40 ou ∑fi = 40

Podemos, agora, dar à distribuição de freqüência das estaturas dos quarenta alunos da faculdade A, a seguinte representação tabular técnica:

TABELA 5
ESTATURAS DE 40 ALUNOS DA FACULDADE A

i	ESTATURAS (cm)	fi
1	150 154 —I	4
2	154 158 —I	9
3	158 162 —I	11

4 5 6	162 166 —| 166 170 —| 170 174 —|	8 5 3
		∑fi = 40

Número de Classes – Intervalos de Classe

A primeira preocupação que temos, na construção de uma distribuição de freqüência, é a determinação do número de classes e, consequentemente, da amplitude e dos limites dos intervalos de classe.

Para a determinação do número de classes de uma distribuição podemos lançar mão da regra de Sturges, que nos dá o número de classes em função do número de valores da variável: $i \approx 1 + 3{,}3 \cdot \log n$

onde:

i é o número de classe;

n é o número total de dados.

Essa regra nos permite obter a seguinte tabela:

TABELA 6

ESTATURAS (cm)	fi
3 5| —| 6 11| —| 12 22| —| 23 46| —| 47 90| —| 91 181| —| 182 362| —| ...	3 4 5 6 7 8 9 ...

Além da regra de Sturges, existem outras fórmulas empíricas que pretendem resolver o problema da determinação do número de classes que deve ter a distribuição (há quem prefira: i = Öh). Entretanto, a verdade é que essas fórmulas não nos levam a uma decisão final; esta vai depender, na realidade, de um julgamento pessoal, que deve estar ligado à natureza dos dados, da unidade usada para expressa-los e, ainda, do objetivo que se tem em vista, procurando, sempre que possível, evitar classe com freqüência nula ou com freqüência relativa muito exagerada etc.

Decidido o número de classes que deve ter a distribuição, resta-nos resolver o problema da determinação da amplitude do intervalo de classe, o que conseguimos dividindo a amplitude total pelo número de classes:

$h \approx AT / i$

Quando o resultado não é exato, devemos arredondá-lo para mais.

Outro problema que surge é a escolha dos limites dos intervalos, os quais deverão ser tais que forneçam, na medida do possível, para pontos médios, números que facilitem os cálculos – números naturais.

Em nosso exemplo, temos:

Para n = 40, pela Tabela 6, i = 6

Logo: h = (173 -150) / 6 = 23/6 = 3,8 ≈ 4

Isto é, seis classes de intervalos iguais a 4.

Resolva:

1) As notas obtidas por 50 alunos de uma classe foram:

1 2 3 4 5 6 6 7 7 8

2 3 3 4 4 6 6 7 8 8

2 3 4 4 5 6 6 7 8 9

2 3 4 5 5 6 6 7 8 9

2 3 4 5 5 6 7 7 8 9

a. Complete a distribuição de freqüência abaixo:

i	NOTAS	xi	fi
1 2 3 4 5 6	0 2 —| 2 4 —| 4 6 —| 6 8 —| 8 10 —|	1	1 ....
			∑fi = 50

b. Agora responda:

1. Qual a amplitude amostral?
2. Qual a amplitude da distribuição?
3. Qual o número de classes da distribuição?
4. Qual o limite inferior da quarta classe?
5. Qual o limite superior da classe de ordem 2?
6. Qual a amplitude do segundo intervalo da classe?

c. Complete:

1. h_3 = ...   2. n = ...   3. l_1 = ...   4. L_3 = ...   5. x_2 = ...   6. f_5 = ...

Tipos de Freqüências

1) Freqüências simples ou absolutas (f_i) são os valores que realmente representam o número de dados de cada classe.

Como vimos, a soma das freqüências simples é igual ao número total dos dados:

$\sum f_i = n$

2) Freqüências relativas (fr_i) são os valores das razões entre as freqüências simples e a freqüência total:

Como vimos, a soma das freqüências simples é igual ao número total dos dados:

$fr_i = f_i / \sum f_i$

Logo, a freqüência relativa da terceira classe, em nosso exemplo (Tabela 5), é:

$fr_3 = f_3 / \sum f_3$ Þ $fr_3 = 11 / 40 = 0{,}275$

Evidentemente: $\sum fr_i = 1$ ou 100%

Nota:

·O propósito das freqüências relativas é o de permitir a análise ou facilitar as comparações.

3) Freqüência acumulada (F_i) é o total das freqüências de todos os valores inferiores ao limite superior do intervalo de uma dada classe:

$F_k = f_1 + f_2 + ... + f_k$ ou $F_k = \sum f_i$ $(i = 1, 2, ..., k)$

Assim, no exemplo apresentado no início deste capítulo, a freqüência acumulada correspondente à terceira classe é:

$F_3 = \sum(i=1 \rightarrow 3) f_i = f_1 + f_2 + f_3$ Þ $F_3 = 4 + 9 + 11 = 24$,

O que significa existirem 24 alunos com estatura inferior a 162 cm (limite superior do intervalo da terceira classe).

4) Freqüência acumulada relativa (Fr_i) de uma classe é a freqüência acumulada da classe, dividida pela freqüência total da distribuição:

$Fr_i = F_i / \sum f_i$

Assim, para a terceira classe, temos: Fri = Fi / ∑ fi Þ Fri = 24/40 = 0,6

Considerando a Tabela 3, podemos montar a seguinte tabela com as freqüências estudadas:

TABELA 7

i	ESTATURAS (cm)	fi	xi	fri	Fi	Fri
1	150 154 —I	4	152	0,100	4	0,100
2	154 158 —I	9	156	0,225	913	0,325
3	158 162 —I	11	160	0,275	24	0,600
4	162 166 —I	8	164	0,200	32	0,800
5	166 170 —I	5	168	0,125	37	0,925
6	170 174 —I	3	172	0,075	40	1,000
		∑ = 40		∑ = 1,000		

O conhecimento dos vários tipos de freqüência ajuda-nos a responder a muitas questões com relativa facilidade, como as seguintes:

a. Quantos alunos têm estatura entre 154 cm, inclusive, e 158 cm?

Esses são os valores da variável que formam a segunda classe. Como f2 = 9, a resposta é : 9 alunos.

b. Qual a percentagem de alunos cujas estaturas são inferiores a 154 cm?

Esses valores são os que formam a primeira classe. Como fr1 = 0,100, obtemos a resposta multiplicando a freqüência relativa por 100:

0,100 x 100 = 10

Logo, a percentagem de alunos é 10%.

c. Quantos alunos têm estatura abaixo de 162?

É evidente que as estaturas consideradas são aquelas que formam as classes de ordem 1, 2 e 3. Assim, o número de alunos é dado por:

F3 = ∑(i=1 → 3) fi = f1 + f2 + f3 Þ F3 = 24

Portanto, 24 alunos têm estatura abaixo de 162 cm.

d. Quantos alunos têm estatura não-inferior a 158 cm? O número de alunos é dado por:

∑(i=1 → 6) fi = f3 + f4 + f5 + f6 = 11 + 8 + 5 + 3 = 27

Ou, então:

∑(i=1 → 6) fi – F2 = n - F2 = 40 – 13 = 27

Distribuição de Freqüência sem Intervalos de Classe

Quando se trata de variável discreta de variação relativamente pequena, cada valor pode ser tomado como um intervalo de classe (intervalo degenerado) e, nesse caso, a distribuição é chamada distribuição sem intervalos de classe, tomando a seguinte forma:

TABELA 8

xi	fri
x1	f1
x2	f2
.	.
.	.
.	.
xn	fn
	∑ fi = n

Exemplo:

Seja x a variável "número de cômodos das casas ocupadas por vinte famílias entrevistadas":

TABELA 9

i	xi	fi
1	2	4
2	3	7
3	4	5
4	5	2
5	6	1
6	7	1
		∑ = 40

Completada com vários tipos de freqüência, temos:

TABELA 10

i	xi	fi	fri	Fi	Fri

1	2	4	0,20	4	0,20	
2	3	7	0,35	11	0,55	
3	4	5	0,25	16	0,80	
4	5	2	0,10	18	0,90	
5	6	1	0,05	19	0,95	
6	7	1	0,05	20	1,00	
	∑ = 20		∑ = 1,00			

Nota:

· Se a variável toma numerosos valores distintos, é comum trata-la como uma variável contínua, formando intervalos de classe de amplitude diferente de um.

Este tratamento (arbitrário) abrevia o trabalho, mas acarreta alguma perda de precisão.

Resolva:

1) Complete a distribuição abaixo, determinando as freqüências simples:

i	xi	fi	Fi	
1	2	....	2	
2	3	....	9	
3	4	....	21	
4	5	....	29	
5	6	....	34	
		∑ = 20		

Gráficos estatísticos

Os gráficos constituem uma forma clara e objetiva na apresentação de dados estatísticos, a intenção é de proporcionar aos leitores em geral a compreensão e veracidade dos fatos. De acordo com a característica da informação precisamos escolher o gráfico correto, os mais usuais são: gráfico de segmentos, gráfico de barras e gráfico de setores.

Gráfico de Segmento ou gráfico de linhas

Objetivos: simplicidade, clareza e veracidade.

Uma locadora de filmes em DVD registrou o número de locações no 1º semestre do ano de 2008. Os dados foram expressos em um gráfico de segmentos.

Mês	Número de filmes locados
Janeiro	300
Fevereiro	220
Março	100
Abril	150
Maio	250
Junho	110

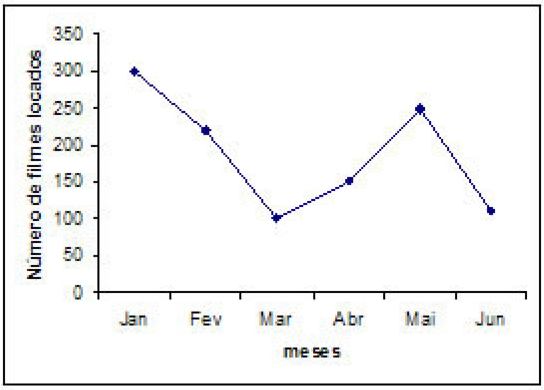
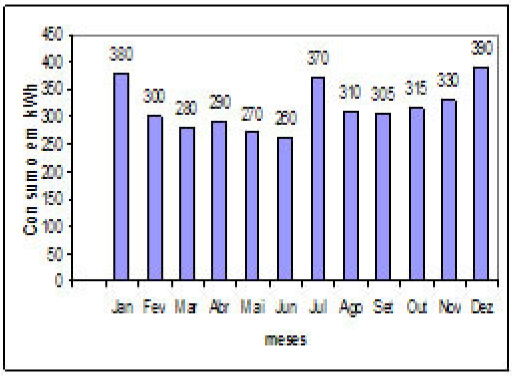


Gráfico de Barras horizontal e vertical

Objetivo: representar os dados através de retângulos, com o intuito de analisar as projeções no período determinado.

O exemplo abaixo mostra o consumo de energia elétrica no decorrer do ano de 2005 de uma família.

Mês	Consumo em kWh
Janeiro	380
Fevereiro	300
Março	280
Abril	290
Maio	270
Junho	260
Julho	370
Agosto	310
Setembro	305
Outubro	315
Novembro	330
Dezembro	390



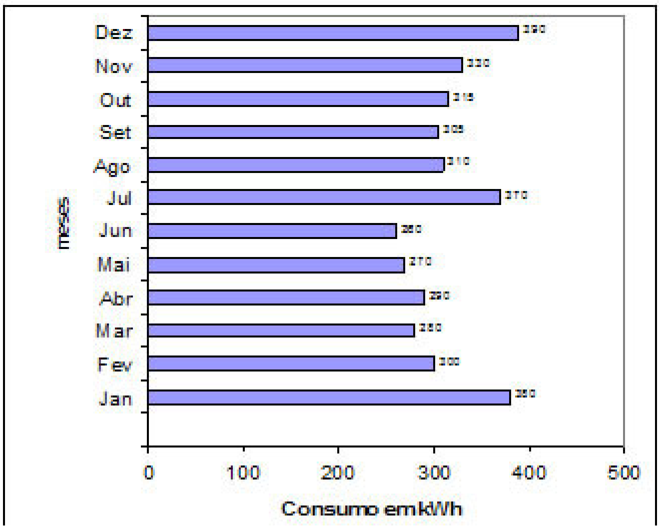
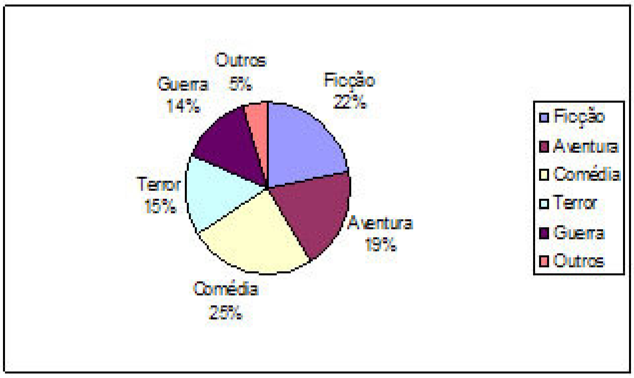


Gráfico de setores

Objetivos: expressar as informações em uma circunferência fracionada. É um gráfico muito usado na demonstração de dados percentuais.

O gráfico a seguir mostrará a preferência dos clientes de uma locadora quanto ao gênero dos filmes locados durante a semana.

Gênero	Frequência Absoluta	Frequência Relativa
Ficção	88	22%
Aventura	76	19%
Comédia	100	25%
Terror	60	15%
Guerra	56	14%
Outros	20	5%
	400	100%



Medidas de posição

São as estatísticas que representam uma série de dados orientando-nos quanto à posição da distribuição em relação ao eixo horizontal do gráfico da curva de freqüência. As medidas de posições mais importantes são média aritmética, mediana e moda. Usaremos as seguintes notações:

* X: valor de cada indivíduo da amostra.
* $\overline{X}$: média amostral. : média amostral.
* n: tamanho amostral.

Média aritmética

Há dois tipos de média aritmética - simples ou ponderada.

- Média aritmética simples

A média aritmética simples é a mais utilizada no nosso dia-a-dia. É obtida dividindo-se a soma das observações pelo número delas. É um quociente geralmente representado pelo símbolo $\bar{x}$. Se tivermos uma série de n valores de uma variável x, a média aritmética simples será determinada pela expressão:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- Média aritmética ponderada

Consideremos uma coleção formada por n números: $x_1, x_2, \cdots, x_n$, de forma que cada um esteja sujeito a um peso [Nota: "peso" é sinônimo de "ponderação"], respectivamente, indicado por: $p_1, p_2, \cdots, p_n$. A média aritmética ponderada desses n números é a soma dos produtos de cada um multiplicados por seus respectivos pesos, dividida pela soma dos pesos, isto é:

$$\bar{x} = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n}$$

Obviamente, a média aritmética e a média ponderada podem ser generalizadas para estruturas algébricas mais complexas; a única restrição é que a soma dos pesos seja um número invertível (em particular, não pode ser zero).

Exemplos

Um aluno tirou as notas 5, 7, 9 e 10 em quatro provas. A sua média será (5 + 7 + 9 + 10) / 4 = 7.75

- Um aluno fez um teste (peso 1) e uma prova (peso 2), tirando 10 no teste e 4 na prova. A sua média (ponderada) será (10 x 1 + 4 x 2) / (1 + 2). Teríamos então: (10 + 8) / 3. Logo, o resultado da média aritmética ponderada para este exemplo é: 6. Se o teste e a prova tivessem mesmo peso (e não importa qual o valor do peso, importa apenas a relação entre os pesos), a média ponderada aritmética seria sempre 7. Isto é, se o aluno fizesse um teste (peso 3) e uma prova (peso 3) obtendo respectivamente a mesma pontuação anterior (10 e 4), teríamos: (10 x 3 + 4 x 3) / (3 + 3). Continuando: (30 + 12) / 6. O resultado para pesos iguais será sempre: "7". Veja: (30 + 12) / 6 = 7.
- Um triângulo no plano tem vértices dados pelas coordenadas cartesianas (2, 1), (4, -1) e (3, 6). O seu baricentro é a média dos vértices, ou seja (3, 2).

Mediana

A mediana é uma medida de tendência central, um número que caracteriza as observações de uma determinada variável de tal forma que este número (a mediana) de um grupo de dados ordenados separa a metade inferior da amostra, população ou distribuição de probabilidade, da metade superior. Mais concretamente, 1/2 da população terá valores inferiores ou iguais à mediana e 1/2 da população terá valores superiores ou iguais à mediana.

A mediana pode ser calculada para um conjunto de observações ou para funções de distribuição de probabilidade.

Cálculo da mediana para dados ordenados

No caso de dados ordenados de amostras de tamanho n, se n for ímpar, a mediana será o elemento central $\frac{(n+1)}{2}$. Se n for par, a mediana será o resultado da média simples entre os elementos $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2}+1$.

Exemplos

Para a seguinte população:

1, 3, 5, 7, 9

A mediana é 5 (igual à média)

No entanto, para a população:

1, 2, 4, 10, 13

A mediana é 4 (enquanto a média é 6)

Para populações pares:

1, 2, 4, 7, 9, 10

A mediana é (4+7)/2, que é 5.5.

Cálculo da mediana para dados classificados
Quando se trata de um conjunto de dados classificados, o cálculo da mediana é feito através do histograma, ou através da função cumulativa de frequências relativas. A mediana é o ponto do eixo das abcissas correspondente a 50% da frequência relativa acumulada.

No caso de variáveis contínuas, a mediana é calculada pela solução da equação $\int_{-\infty}^{m} f(x)dx = \frac{1}{2}$ ou, equivalentemente, $\int_{m}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}$.

No caso de variáveis discretas, e quando as frequências estão calculadas por unidade, a mediana é o ponto do eixo das abcissas para o qual a frequência relativa acumulada é inferior ou igual a 50% e superior ou igual a 50% para o ponto imediatamente a seguir.

Moda
A moda é o valor que detém o maior número de observações, ou seja, o valor ou valores mais frequentes. A moda não é necessariamente única, ao contrário da média ou da mediana. É especialmente útil quando os valores ou observações não são numéricos, uma vez que a média e a mediana podem não ser bem definidas.

A moda de {maçã, banana, laranja, laranja, laranja, pêssego} é laranja.

A série {1, 3, 5, 5, 6, 6} apresenta duas modas (bimodal): 5 e 6.

A série {1, 3, 2, 5, 8, 7, 9} não apresenta moda. Bimodal: possui dois valores modais Amodal: não possui moda.

MATRIZES, DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES

Uma matriz de ordem m x n é qualquer conjunto de m . n elementos dispostos em m linhas e n colunas.

Representação

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Cada elemento de uma matriz é localizado por dois índices: aij. O primeiro indica a linha, e o segundo, a coluna.

A matriz A pode ser representada abreviadamente por uma sentença matemática que indica a lei de formação para seus elementos.

A = (aij)mxn | lei de formação.

Ex.: (aij)2x3 | aij = i . j

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Classificação das Matrizes

Em função dos valores de m e n, classifica-se a matriz A = (aij)mxn em:

Matriz retangular, se $m \neq n$.

Ex.: $A_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz linha, se m = 1.

Ex.: $A_{1x3} = [1\ 0\ -3]$

Matriz coluna, se n =1.

Ex.: $A_{3x1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

Matriz quadrada, se m = n.

Ex.: $A_{3x3} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Ex.: é uma matriz quadrada de ordem 3.

Numa matriz A = (aij)mxn quadrada de ordem n, os elementos aij com i = j constituem a diagonal principal. Os elementos aij com i + j = n + 1 formam a diagonal secundária.

Ex.: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Tipos de Matrizes

Matriz Nula

É a matriz onde todos os elementos são nulos.

Ex.: $O_{2x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Matriz Oposta

Matriz oposta de uma matriz A = (aij)mxn é a matriz B = (bij)mxn tal que bij = -aij.

Ex.: $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; B = -A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Exemplo de Matriz

Considerando as matrizes:

A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ e **B =** $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Vamos obter a matriz A.B.

Resolução:

Obtemos o elemento c_{11} da matriz produto **A. B** através da **primeira linha de A** e a **primeira coluna de B:**

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \square & \square \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & \square \\ 2 & \square \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.3 + 1.2 & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

Obtemos o elemento c_{12} da matriz produto **A. B** através da **primeira linha de A** e a **segunda coluna de B:**

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \square & \square \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \square & 5 \\ \square & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.5 + 1.1 & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

Obtemos o elemento c_{21} da matriz produto **A. B** através da **segunda linha de A** e a **primeira coluna de B**:

$$\begin{pmatrix} \square & \square \\ 6 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & \square \\ 2 & \square \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 6.3 + 4.2 & \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 26 & \square \end{pmatrix}$$

Obtemos o elemento c_{22} da matriz produto **A. B** através da **segunda linha de A** e a **segunda coluna de B:**

$$\begin{pmatrix} \square & \square \\ 6 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \square & 5 \\ \square & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & 6.5 + 4.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 26 & 34 \end{pmatrix}$$

Portanto A . B = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 26 & 34 \end{pmatrix}$

Operações com Matrizes

Matriz Identidade ou Matriz Unidade

É a matriz A = $(a_{ij})_{mxn}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} 1, se\ i = j \\ 0, se\ i \neq j \end{cases}$

Ex.: $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz Transposta (At)

É a matriz que se obtém trocando ordenadamente as linhas pelas colunas da matriz dada.

Se B = (bij)mxn é transposta de A = (aij)mxn, então bij = aij.

Ex.: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}; B = A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Matriz Diagonal

É uma matriz quadrada onde aij = 0, para i $\neq$ j, isto é, os elementos que não estão na diagonal principal são nulos.

Ex.: $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Matriz Simétrica

É uma matriz quadrada A tal que At = A, isto é, aij = aij para i j.

Ex.: $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

Matriz Anti-simétrica

É uma matriz quadrada A tal que At = -A , isto é, aij = -aij para i e j quaisquer.

Ex.: $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Operações com Matrizes

Igualdade de Matrizes

Duas matrizes A = (aij)mxn e B = (bij)mxn de mesma ordem, são iguais se, e somente se, aij = bij.

Ex.: $\begin{bmatrix} \log 1 & \sqrt{25} \\ 2^0 & (-3)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$

Propriedades da Igualdade

- Se A = B, então At = Bt

- (At)t = A

Adição e subtração de Matrizes

A soma de duas matrizes A = (aij)mxn e B = (bij)mxn de mesma ordem é uma matriz C = (aij)mxn tal que C = aij + bij.

A subtração de matrizes é dada pela sentença:

A – B = A + (– B)

Ex.: Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} e\ B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} e\ A - B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Propriedades da adição de Matrizes

a) A + B = B + A (COMUTATIVA)

b) (A + B) + C = A + (B + C) (ASSOCIATIVA)

c) A + 0 = 0 + A = A (ELEMENTO NEUTRO)

d) A + (-A) = (-A) + A = 0 (ELEMENTO OPOSTO)

e) (A + B)T = AT + BT (TRANSPOSTA DA SOMA)

Matriz inversa
Sabemos calcular o inverso de um número real e o inverso de uma matriz segue o mesmo conceito. Quando queremos encontrar o inverso de um número real temos que nos orientar pela seguinte definição:

Sendo t e g dois números reais, t será inverso de g, se somente se, t . g ou g . t for igual a 1.

Quando um número real é inverso do outro, indicamos o inverso com um expoente -1:
1 / 5 = 5-1, dizemos que 1 /5 é o inverso de 5, pois se multiplicarmos 1 / 5 . 5 = 1

Dizemos que uma matriz terá uma matriz inversa se for quadrada e se o produto das duas matrizes for igual a uma matriz identidade quadrada de mesma ordem das outras.

Dada duas matrizes quadradas C e D, C será inversa de D se, somente se, C . D ou D . C for igual à In. Portanto, dizemos que
C = D-1 ou D = C-1.

Exemplo 1:

Verifique se a matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e a matriz B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ são inversas entre si.

Para que seja verdade o produto A . B = I2.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2+5 & 4+5 \\ 1+3 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto, concluímos que as matrizes A e B não são inversas.

Exemplo 2:

Verifique se as matrizes G= $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e K= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ são inversas entre si.

Para que seja verdade o produto de G . K = I3

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3+0-2 & 0+0+0 & -6+0+6 \\ 9-2-7 & 0+1+0 & -18-3+21 \\ 1+0-1 & 0+0+0 & -2+0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto, concluímos que as matrizes G e K são inversas entre si.

DETERMINANTES de Matriz

Entenderemos por determinante , como sendo um número ou uma função, associado a uma matriz quadrada , calculado de acordo com regras específicas .

É importante observar , que só as matrizes quadradas possuem determinante .

Regra para o cálculo de um determinante de 2ª ordem
Dada a matriz quadrada de ordem 2 a seguir:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- O determinante de A será indicado por det(A) e calculado da seguinte forma :
- det (A) = ½ A½ = ad - bc

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ -\cos x & \operatorname{sen} x \end{vmatrix} = \operatorname{sen} x . \operatorname{sen} x - [\cos x . (-\cos x)]) = \operatorname{sen} x . \operatorname{sen} x + \cos x . \cos x$$

Ora, senx.senx + cosx.cosx = sen2x + cos2x = 1 (Relação Fundamental da Trigonometria) . Portanto, o determinante da matriz dada é igual à unidade.

Para o cálculo de um determinante de 3ª ordem pela Regra de Sarrus, proceda da seguinte maneira:

1 - Reescreva abaixo da 3ª linha do determinante, a 1ª e 2ª linhas do determinante.

2 - Efetue os produtos em "diagonal" , atribuindo sinais negativos para os resultados à esquerda e sinal positivo para os resultados à direita.

3 - Efetue a soma algébrica. O resultado encontrado será o determinante associado à matriz dada.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 4 \\ 6 & 9 & 8 \end{vmatrix} = 2.7.8 + 1.9.5 + 6.3.4 - 5.7.6 - 4.9.2 - 8.3.1 = -77$$

.2 3 5
.1 7 4
Portanto, o determinante procurado é o número real negativo .- 77.

Principais propriedades dos determinantes

P1) somente as matrizes quadradas possuem determinantes.

P2) o determinante de uma matriz e de sua transposta são iguais: det(A) = det(At).

P3) o determinante que tem todos os elementos de uma fila iguais a zero , é nulo.
Obs: Chama-se FILA de um determinante, qualquer LINHA ou COLUNA.

P4) se trocarmos de posição duas filas paralelas de um determinante, ele muda de sinal.

P5) o determinante que tem duas filas paralelas iguais ou proporcionais, é nulo.

P6) multiplicando-se (ou dividindo-se) os elementos de uma fila por um número, o determinante fica multiplicado (ou dividido) por esse número.

P7) um determinante não se altera quando se substitui uma fila pela soma desta com uma fila paralela, multiplicada por um número real qualquer.

P8) determinante da matriz inversa : det(A-1) = 1/det(A) .

Se A-1 é a matriz inversa de A , então A . A-1 = A-1 . A = In , onde In é a matriz identidade de ordem n .
Nestas condições , podemos afirmar que det(A.A-1) = det(In) e portanto igual a 1.
Logo , podemos também escrever det(A) . det(A-1) = 1 ;
logo , concluímos que: det(A-1) = 1 / det(A).

Notas:

1) se det(A) = 0 , não existe a matriz inversa A-1. Dizemos então que a matriz A é SINGULAR ou NÃO INVERSÍVEL .

2) se det A ¹ 0 , então a matriz inversa A-1 existe e é única . Dizemos então que a matriz A é INVERSÍVEL .

P9) Se todos os elementos situados de um mesmo lado da diagonal principal de uma matriz quadrada de ordem n , forem nulos (matriz triangular), o determinante é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

P10) Se A é matriz quadrada de ordem n e k Î R então det(k.A) = kn . det A

Exemplos:

1) Qual o determinante associado à matriz?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 10 & 87 & 100 \\ 6 & 9 & 3 & 24 \end{pmatrix}$$

Observe que a 4ª linha da matriz é proporcional à 1ª linha (cada elemento da 4ª linha é obtido multiplicando os elementos da 1ª linha por 3). Portanto, pela propriedade P5 , o determinante da matriz dada é NULO.

2) Calcule o determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 25 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 34 \\ 32 & 0 & 87 \end{vmatrix}$$

Observe que a 2ª coluna é composta por zeros; FILA NULA Þ DETERMINANTE NULO , conforme propriedade P3 acima. Logo, D = 0.

3) Calcule o determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 67 & 5 & 0 \\ 44 & 21 & 9 \end{vmatrix}$$

Ora, pela propriedade P9 acima, temos: D = 2.5.9 = 90

Exercícios propostos:

1) As matrizes A e B , quadradas de ordem 3, são tais que B = 2.At , onde At é a matriz transposta de A. Se o determinante de B é igual a 40 , então o determinante da matriz inversa de A é igual a:

*a) 1/5
b) 5
c) 1/40
d) 1/20
e) 20

2) Seja a matriz A de ordem n onde aij = 2 para i = j e aij = 0 para i ¹ j .
Se det (3A) = 1296 , então n é igual a:
Resp: n = 4

3) Determine a soma dos elementos da diagonal principal da matriz A = (aij)3 X 3 , onde
aij = i + j se i ³ j ou aij = i - j se i < j. Qual o determinante de A?
Resp: soma dos elementos da diagonal principal = 12 e determinante = 82

4) Se A = (aij) é matriz quadrada de ordem 3 tal que aij = i - j então podemos afirmar que o determinante da matriz 5 A é igual a:
Resp: zero

Relação entre Matriz e Sistemas Lineares

Os sistemas lineares são formados por um conjunto de equações lineares de m incógnitas. Todos os sistemas possuem uma representação matricial, isto é, constituem matrizes envolvendo os coeficientes numéricos e a parte literal. Observe a representação matricial do seguinte sistema: $\begin{cases} 2x+9y=-20 \\ 7x-5y=6 \end{cases}$.

Matriz incompleta (coeficientes numéricos)

$$A=\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 7 & -5 \end{vmatrix}$$

Matriz completa

$$B=\begin{vmatrix} 2 & 9 & -20 \\ 7 & -5 & 6 \end{vmatrix}$$

Representação Matricial

$$\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -20 \\ 6 \end{vmatrix}$$

A relação existente entre um sistema linear e uma matriz consiste na resolução de sistemas pelo método de Cramer.

Vamos aplicar a regra de Cramer na resolução do seguinte sistema: $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x+y+z=6 \\ x-y+2z=5 \end{cases}$.

Aplicamos a regra de Cramer utilizando a matriz incompleta do sistema linear. Nessa regra utilizamos Sarrus no cálculo do determinante das matrizes estabelecidas. Observe o determinante da matriz dos sistemas:

$$B=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow D=5$$

Regra de Sarrus: soma dos produtos da diagonal principal subtraída da soma dos produtos da diagonal secundária.

Substituir a 1ª coluna da matriz dos sistemas pela coluna formada pelos termos independentes do sistema.

$$B_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow D_x = 5$$

Substituir a 2ª coluna da matriz dos sistemas pela coluna formada pelos termos independentes do sistema.

$$B_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow D_y = 10$$

Substituir a 3ª coluna da matriz dos sistemas pela coluna formada pelos termos independentes do sistema.

$$B_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow D_z = 15$$

De acordo com regra de Cramer, temos:

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{5}{5} = 1$$

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{10}{5} = 2$$

$$z = \frac{Dz}{D} = \frac{15}{5} = 3$$

Portanto, o conjunto solução do sistema de equações é: x = 1, y = 2 e z = 3.

Relação entre Matriz e Sistemas Lineares

Os sistemas lineares são formados por um conjunto de equações lineares de m incógnitas. Todos os sistemas possuem uma representação matricial, isto é, constituem matrizes envolvendo os coeficientes numéricos e a parte literal. Observe a representação matricial do seguinte sistema: $\begin{cases} 2x + 9y = -20 \\ 7x - 5y = 6 \end{cases}$.

Matriz incompleta (coeficientes numéricos)

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 7 & -5 \end{vmatrix}$$

Matriz completa

$$B = \begin{vmatrix} 2 & 9 & -20 \\ 7 & -5 & 6 \end{vmatrix}$$

Representação Matricial

$$\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -20 \\ 6 \end{vmatrix}$$

A relação existente entre um sistema linear e uma matriz consiste na resolução de sistemas pelo método de Cramer.

Vamos aplicar a regra de Cramer na resolução do seguinte sistema: $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y + z = 6 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$.

Aplicamos a regra de Cramer utilizando a matriz incompleta do sistema linear. Nessa regra utilizamos Sarrus no cálculo do determinante das matrizes estabelecidas. Observe o determinante da matriz dos sistemas:

$$B = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow D = 5$$

Regra de Sarrus: soma dos produtos da diagonal principal subtraída da soma dos produtos da diagonal secundária.

Substituir a 1ª coluna da matriz dos sistemas pela coluna formada pelos termos independentes do sistema.

$$B_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow D_x = 5$$

Substituir a 2ª coluna da matriz dos sistemas pela coluna formada pelos termos independentes do sistema.

$$B_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow D_y = 10$$

Substituir a 3ª coluna da matriz dos sistemas pela coluna formada pelos termos independentes do sistema.

$$B_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow D_z = 15$$

De acordo com regra de Cramer, temos:

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{5}{5} = 1$$

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{10}{5} = 2$$

$$z = \frac{Dz}{D} = \frac{15}{5} = 3$$

Portanto, o conjunto solução do sistema de equações é: x = 1, y = 2 e z = 3.

Sistema de equações lineares

Sistemas lineares é um ramo da álgebra linear, uma matéria que é fundamental para a matemática moderna. Algoritmos computacionais para achar soluções são uma parte importante da álgebra linear numérica, e tais métodos têm uma grande importância na engenharia, física, química, ciência da computação e economia. Um sistema de equações não-lineares freqüentemente pode ser aproximado para um sistema linear, uma técnica útil quando se está fazendo um modelo matemático ou simulação computadorizada de sistemas complexos.

Técnicas de resolução

Existem vários métodos equivalentes de resolução de sistemas.

Método da substituição

O método da substituição consiste em isolar uma incógnita em qualquer uma das equações, obtendo igualdade com um polinômio. Então deve-se substituir essa mesma incógnita em outra das equações pelo polinômio ao qual ela foi igualada.

Sistemas com duas equações

Um sistema com duas equações lineares se apresenta por:

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = dx + c \end{cases}$$

Onde x e y são as incógnitas.

Para solucioná-lo por substituição, substituem-se as variáveis em suas equações por seus polinômios correspondentes:

$$\begin{gathered} y = ax + b \\ (a-d)\,x = c - b \\ x = \tfrac{c-b}{a-d} \end{gathered} \qquad \begin{gathered} ax = y - b \\ dx = y - c \\ \tfrac{y-c}{d} = \tfrac{y-b}{a} \\ ay - ac = dy - db \\ (a-d)y = ac - db \\ y = \tfrac{ac-db}{a-d} \end{gathered}$$

Portanto:

$$x = \frac{c-b}{a-d}$$
$$y = \frac{ac-db}{a-d}$$

Método da soma

O método da soma é o mais direto para se resolverem os sistemas, pois é uma forma simplificada de usar o método da substituição. Só é possível quando as equações são dispostas de forma que, ao subtrair ou somar os polinômios das equações, todas as incógnitas, exceto uma, se anulam. É mais simples e direto que o outro método $\begin{cases} 2x - y = 9 \\ x + y = 12 \end{cases}$ 3x = 21 x = 7y = 12 – 7 = 5

Sistemas com duas equações

Para solucionar um sistema como o apresentado a seguir por soma, onde x e y são as incógnitas, deve-se subtrair os polinômios das equações.

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = dx + c \end{cases}$$
$$y - y = ax + b - dx - c$$
$$ax + b - dx - c = 0$$
$$x = \frac{c-b}{a-d}$$

O método da soma é possível apenas com determinadas incógnitas, dependendo das equações do sistema. Nesse caso, é possível apenas com uma. A outra deve ser determinada substituindo o valor descoberto para a primeira incógnita em uma das equações do sistema.

Método da comparação

Consiste em compararmos as duas equações do sistema, após termos isolado a mesma variável (x ou y) nas duas equações. e as equações ficam mais detalhadas.

Fatorizações de matrizes

Os métodos mais utilizados computacionalmente para resolver sistemas lineares envolvem fatorizações de matrizes. O mais conhecido, a eliminação de Gauss, origina a fatorização LU. Resolver o sistema Ax=b é equivalente a resolver os sistemas mais simples Ly=b e Ux=6.

Regra de Cramer

A Regra de Cramer é um método resolver sistemas lineares utilizando determinantes.

Considere o sistema:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

Pela regra de Cramer:

$$x = \frac{Dx}{D}$$

Em que Dx é o determinante da matriz dos termos do sistema excluindo a linha dos coeficientes de x, e D é o determinante da matriz dos coeficientes das incógnitas.

$$Dx = \begin{vmatrix} b & e \\ d & f \end{vmatrix} \qquad D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Para calcular o y basta trocar o Dx pelo Dy, que deve ser calculado da mesma forma, calculando o determinante da matriz dos termos do sistema excluindo a coluna dos coeficientes de y.

Esse método serve para sistemas de qualquer tamanho, desde que o numero de incógnitas seja igual ao numero de equações. E muitas vezes esse método se mostra o caminho mais facil para solução de um sistema.

Determinantes - Exercícios resolvidos

01. (UNIFORM) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. O determinante da matriz A . B é:

a) 64

b) 8

c) 0

d) -8

e) -64

RESPOSTA: D

02. Para que o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1+a & -1 \\ 3 & 1-a \end{bmatrix}$ seja nulo, o valor de a deve ser:

a) 2 ou -2

b) 1 ou 3

c) -3 ou 5

d) -5 ou 3

e) 4 ou -4

RESPOSTA: A

03. O produto M . N na matriz $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pela matriz $N = (111)$:

a) não se define;

b) é uma matriz de determinante nulo;

c) é a matriz identidade de ordem 3;

d) é uma matriz de uma linha e uma coluna;

e) não é matriz quadrada.

RESPOSTA: B

04. Sabendo-se que o determinante associado à matriz $\begin{pmatrix} 1 & -11 & 6 \\ -2 & 4 & -3 \\ -3 & -7 & 2 \end{pmatrix}$ é nulo, concluímos que essa matriz tem:

a) duas linhas proporcionais;

b) duas colunas proporcionais;

c) elementos negativos;

d) uma fila combinação linear das outras duas filas paralelas;

e) duas filas paralelas iguais.

RESPOSTA: D

05. (UESP) Se o determinante da matriz $\begin{pmatrix} p & 2 & 2 \\ p & 4 & 4 \\ p & 4 & 1 \end{pmatrix}$ é igual a -18, então o determinante da matriz $\begin{pmatrix} p & -1 & 2 \\ p & -2 & 4 \\ p & -2 & 1 \end{pmatrix}$ é igual a:

a) -9

b) -6

c) 3

d) 6

e) 9

RESPOSTA: E

06. (UESP) Se o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ k & k & k \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ é igual a 10, então o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ k+4 & k+3 & k-1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ é igual a:

a) 7

b) 8

c) 9

d) 10

e) 11

RESPOSTA: C

07. Calcular o determinante da matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ aplicando o Teorema de Laplace e utilizando a 3ª coluna.

RESOLUÇÃO: det M = 21

08. (PUC) O co-fator do elemento a_{23} da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ é:

a) 2

b) 1

c) -1

d) -2

e) 3

RESPOSTA: D

09. Para que $\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 & x \\ c & 0 & d & x & e \\ f & 0 & x & 0 & 0 \\ g & x & h & i & j \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} < -32$, devemos ter:

a) $x > 2$

b) $0 < x < 5$

c) $x < -2$

d) $x > 5$

e) $1 < x < 2$

RESPOSTA: C

10. (MACK) O valor de $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ é:

a) -4

b) -2

c) 0

d) 1

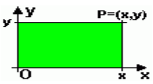
e) 1131

RESPOSTA: C

GEOMETRIA ANALÍTICA

Eixos Coordenados

Consideremos um plano e duas retas perpendiculares, sendo uma delas horizontal e a outra vertical. A horizontal será denominada Eixo das Abscissas (eixo OX) e a Vertical será denominada Eixo das Ordenadas (eixo OY). Os pares ordenados de pontos do plano são indicados na forma P=(x,y) onde x será a abscissa do ponto P e y a ordenada do ponto P.



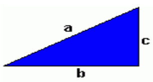
Na verdade, x representa a distância entre as duas retas verticais indicadas no gráfico e y é a distância entre as duas retas horizontais indicadas no gráfico. O sistema de Coordenadas Ortogonais é conhecido por Sistema de Coordenadas Cartesianas e tal sistema possui quatro regiões denominadas quadrantes.

Segundo quadrante	Primeiro quadrante
Terceiro quadrante	Quarto quadrante

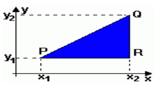
Quadrante	sinal de x	sinal de y	Ponto
	não tem	não tem	(0,0)
Primeiro	+	+	(2,4)
Segundo	-	+	(-4,2)
Terceiro	-	-	(-3,-7)
Quarto	+	-	(7,-2)

Distância entre dois pontos do plano cartesiano

Teorema de Pitágoras: Em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa a é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos b e c, isto é, a2=b2+c2.



Dados P=(x1,y1) e Q=(x2,y2), obtemos a distância entre P e Q, traçando as projeções destes pontos sobre os eixos coordenados, obtendo um triângulo retângulo e usando o Teorema de Pitágoras.



O segmento PQ é a hipotenusa do triângulo retângulo PQR, o segmento PR é um cateto e o segmento QR é o outro cateto, logo:

[d(P,Q)]2 = [d(P,R)]2 + [d(Q,R)]2

Como:

[d(P,R)]2 = | x1 - x2| 2 = (x1 - x2)2

e

[d(Q,R)] 2 = | y1 - y2| 2 = (y1 - y2)2

então

$$d(P,Q)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

Exemplos: A distância entre P=(2,3) e Q=(5,12) é

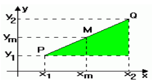
$$d(P,Q)=\sqrt{(2-5)^2+(3-12)^2}=\sqrt{90}$$

A distância entre a origem O=(0,0) e um ponto P=(x,y) é dada por:

$$d(0,P)=\sqrt{x^2+y^2}$$

Ponto médio de um segmento

Aplicação: Dados os pares ordenados P=(x1,y1) e Q=(x2,y2), pode-se obter o Ponto Médio M=(xm,ym) que está localizado entre P e Q.



O ponto médio é obtido com o uso da média aritmética, uma vez para as abscissas e outra vez para as ordenadas.

xm = (x1 + x2)/2,   ym = (y1 + y2)/2

Observação: O centro de gravidade de um triângulo plano cujas coordenadas dos vértices são A=(x1,y1), B=(x2,y2) e C=(x3,y3), é:

G=((x1+x2+x3)/3, (y1+y2+y3)/3)

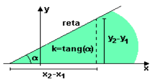
Retas no plano cartesiano

Na Geometria Euclidiana, dados dois pontos P1=(x1,y1) e P2=(x2,y2) no plano cartesiano, existe uma única reta que passa por esses pontos. Para a determinação da equação de uma reta existe a necessidade de duas informações e dois conceitos importantes são: o coeficiente angular da reta e o coeficiente linear da reta.

Coeficiente angular de uma reta: Dados os pontos P1=(x1,y1) e P2=(x2,y2), com x1 $\neq$ x2, o coeficiente angular k da reta que passa por estes pontos é o número real

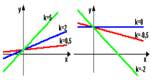
$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Significado geométrico do coeficiente angular: O coeficiente angular de uma reta é o valor da tangente do ângulo alfa que a reta faz com o eixo das abscissas.



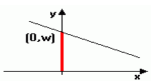
Se o ângulo está no primeiro quadrante ou no terceiro quadrante, o sinal do coeficiente angular é positivo e se o ângulo está no segundo quadrante ou no quarto quadrante, o sinal do coeficiente angular é negativo.

Declividade de uma reta: A declividade indica o grau de inclinação de uma reta. O fato do coeficiente angular ser maior que outro indica que a reta associada a este coeficiente cresce mais rapidamente que a outra reta. Se um coeficiente angular é negativo e o módulo deste é maior que o módulo de outro coeficiente, temos que a reta associada ao mesmo decresce mais rapidamente que a outra.

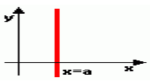


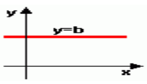
Se o coeficiente angular é nulo, a reta é horizontal.

Coeficiente linear de uma reta: é a ordenada (altura) w do ponto (0,w) onde a reta cortou o eixo das ordenadas.



Retas horizontais e verticais: Se uma reta é vertical ela não possui coeficiente linear e coeficiente angular. Assim, a reta é indicada apenas por x=a, a abscissa do ponto onde a reta cortou o eixo OX.





Se uma reta é horizontal, o seu coeficiente angular é nulo e a equação desta reta é dada por y=b, ordenada do ponto onde está reta corta o eixo OY.

Equação reduzida da reta

Dado o coeficiente angular k e o coeficiente linear w de uma reta, então poderemos obter a equação da reta através de sua equação reduzida dada por:

$y = k\,x + w$

Exemplos

1. Se k=5 e w=-4, então a reta é dada por y=5x-4.
2. Se k=1 e w=0, temos a reta (identidade) y=x.
3. Se k=0 e w=5, temos a reta y=5.

Reta que passa por um ponto e tem coeficiente angular dado: Uma reta que passa por um ponto P=(xo,yo) e tem coeficiente angular k, é dada por:

y - yo = k (x - xo)

Exemplos

1. Se P=(1,5) pertence a uma reta que tem coeficiente angular k=8, então a equação da reta é y=8(x-1)+5.
2. Se uma reta passa pela origem e tem coeficiente angular k= -1, então a sua equação é dada por: y=-x.

Reta que passa por dois pontos: Se dois pontos (x1,y1) e (x2,y2) não estão alinhados verticalmente, podemos obter a equação da reta que passa por estes pontos com:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Retas paralelas e perpendiculares

Retas paralelas: Duas retas no plano são paralelas se ambas são verticais ou se têm os mesmos coeficientes angulares.

Exemplos

1. x=3 e x=7 são retas paralelas.
2. As retas y=34 e y=0 são paralelas.
3. As retas y=2x+5 e y=2x-7 são paralelas.

Retas perpendiculares: Duas retas no plano são perpendiculares se uma delas é horizontal e a outra é vertical, ou, se elas têm coeficientes angulares k' e k" tal que k'k"=-1.

Exemplos

1. As retas y=x+3 e y=-x+12 são perpendiculares, pois k'=1, k"=-1 e k'k"=-1.
2. As retas y=5x+10 e y=(-1/5)x-100 são perpendiculares, pois k'=5, k"=-1/5 e k'k"=-1.

Equação geral da reta

Toda reta no plano cartesiano pode ser escrita pela sua equação geral:

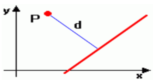
a x + b y + c = 0

Exemplos

1. Se a=-1, b=1 e c=-1, tem-se a reta -x+y-1=0.
2. Se a=0, b=1 e c=0, tem-se a reta y=0.
3. Se a=1 , b=0 e c=5 , tem-se a reta x+5=0.

Distância de um ponto a uma reta no plano

Seja um ponto P=(xo,yo) e uma reta r no plano definida por ax+by+c=0.



A distância d=d(P,r) do ponto P à reta r pode ser obtida pela fórmula abaixo:

$$d(P,r)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Exemplo: A distância de (0,0) à reta 5x+12y+25=0 é:

$$d(P,r)=\frac{|5\times 0+12\times 0+25|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{25}{13}$$

Área de um triângulo no plano cartesiano

Dado um ponto (x1,y1) localizado fora de uma reta que passa pelos pontos (x2,y2) e (x3,y3), pode-se calcular a área do triângulo cujos vértices são estes três pontos, bastando para isto determinar a medida da base do triângulo que é a distância entre (x2,y2) e (x3,y3) e a altura do triângulo que é a distância de (x1,y1) à reta que contém os outros dois pontos.

Como o processo é bastante complicado, apresentamos um procedimento equivalente muito bonito, simples e fácil de memorizar.

A área do triângulo é dada pela metade do valor absoluto do determinante da matriz indica pela expressão:

$$A=\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_2 & 1\end{pmatrix}\right|$$

Exemplo: A área do triângulo cujos vértices são (1,2), (3,4) e (9,2) é igual a 8, pois:

$$A=\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 1\\ 9 & 2 & 1\end{pmatrix}\right|=8$$

Colinearidade de 3 pontos no plano: Três pontos no plano, (x1,y1), (x2,y2) e (x3,y3) são colineares se pertencem à mesma reta.

Um processo simples sugere que estes três pontos formem um triângulo de área nula, assim basta verificar que o determinante da matriz abaixo deve ser nulo.

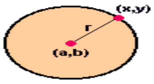
$$C = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo: Os pontos (2,0), (1,1) e (0,2) são colineares pois:

$$\det(C) = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Circunferências no plano

Do ponto de vista da Geometria Euclidiana, uma circunferência com centro no ponto (a,b) de um plano e tendo raio r, é o lugar geométrico de todos os pontos (x,y) deste plano que estão localizados à mesma distância r do centro (a,b).



A equação desta circunferência é dada por:

(x - a)2 + (y - b)2 = r2

Disco circular é a região que contém a circunferência e todos os pontos contidos no interior da circunferência.

Exemplo: A equação da circunferência com centro em (2,3) e raio igual a 8 é:

(x - 2)2 + (y - 3)2 = 82

A equação da circunferência com centro na origem (0,0) e raio r, recebe o nome de forma canônica da circunferência e é dada por:

x2 + y2 = r2

Equação geral da circunferência: Dada a equação (x-a)2+(y-b)2=r2, podemos desenvolver a mesma para obter a forma geral da circunferência:

x2 + y2 + A x + B y + C = 0

Exemplo: A equação geral da circunferência com centro em (2,3) e raio r=8 é:

x2 + y2 - 4x - 6y - 51 = 0

Equação da circunferência com centro em um ponto e passando em outro: Dado o centro O=(a,b) da circunferência e um outro ponto Q=(xo,yo) que pertence à circunferência, pode-se obter o raio da mesma através da distância entre O e Q e se utilizar a equação normal da circunferência para se obter a sua equação.

Exemplo: A circunferência centrada em (3,5) que passa em (8,16) tem raio tal que:

r2 = (8-3)2 + (16-5)2 = 25+121 = 146

logo, a sua equação é dada por:

(x-3)2 + (y-5)2 = 146

Equação da circunferência que passa por 3 pontos: Quando conhecemos três pontos da circunferência, podemos utilizar a equação geral da circunferência para obter os coeficientes A, B e C através de um sistema linear com 3 equações e 3 incógnitas.

Exemplo: Seja uma circunferência que passa pelos pontos (2,1), (1,4) e (-3,2). Dessa forma, utilizando a equação geral da circunferência:

x2 + y2 + A x + B y + C = 0

substituiremos estes pares ordenados para obter o sistema:

(-2)2 + (1)2 + A(-2) + B(1) + C = 0
(1)2 + (4)2 + A(1) + B(4) + C = 0
(-3)2 + (2)2 + A(-3) + B(2) + C = 0

que pode ser simplificado na forma:

-2 A + 1 B + 1 C = -5
 1 A + 4 B + 1 C = 5
-3 A + 2 B + 1 C = 13

e através da Regra de Cramer, podemos obter:

A = , B = , C =

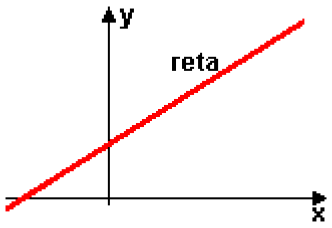
assim a equação geral desta circunferência é:

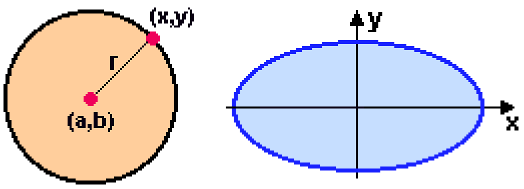
x2 + y2 + ( )x + ( )y + ( ) = 0

Relações importantes no plano cartesiano

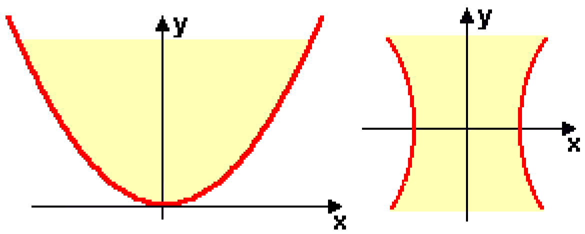
Uma relação em um plano é qualquer subconjunto deste plano, mas as mais importantes relações, do ponto de vista prático, são as que podem ser representadas por linhas, como: retas, parábolas, circunferências, elipses, hipérboles.

Muitos confundem os nomes das linhas que envolvem regiões planas com as próprias regiões. Iremos colorir algumas regiões fechadas para dar mais destaque às curvas que as contém, que são as relações matemáticas.





Circunferência e Elipse



Parábola e Hipérbole

Seções cônicas

Todas as curvas apresentadas anteriormente podem ser obtidas através de seções (cortes planos) de um cone circular reto com duas folhas como aquele apresentado abaixo. Tais curvas aparecem como a interseção do cone com um plano apropriado.

Se o plano for :

1. horizontal e passar pelo vértice do cone, teremos apenas um ponto.
2. vertical e passar pelo vértice do cone, teremos duas retas concorrentes.
3. horizontal e passar fora do vértice, teremos uma circunferência.
4. tangente ao cone, teremos uma reta.
5. vertical e passar fora do vértice, teremos uma hipérbole.
6. paralelo à linha geratriz do cone, teremos uma parábola.
7. inclinado, teremos uma elipse.

Equações de algumas seções cônicas

Nome	Equação
Ponto	$x^2+y^2=0$
Reta	$y=kx+w$
Parábola	$y=ax^2+bx+c$
Circunferência	$x^2+y^2=r^2$

Elipse $x^2/a^2+y^2/b^2=1$
Hipérbole $x^2/a^2-y^2/b^2=1$
Duas retas $x^2/a^2-y^2/b^2=0$

FUNÇÕES

Funções injetoras

Uma função $f:A\rightarrow B$ é injetora se quaisquer dois elementos distintos de A, sempre possuem imagens distintas em B, isto é:

$x1\neq x2$ implica que $f(x1)\neq f(x2)$

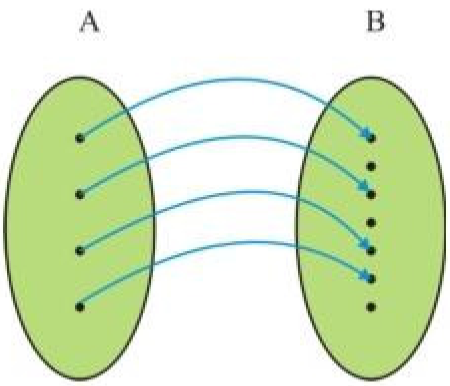
ou de forma equivalente

$f(x1)=f(x2)$ implica que $x1=x2$

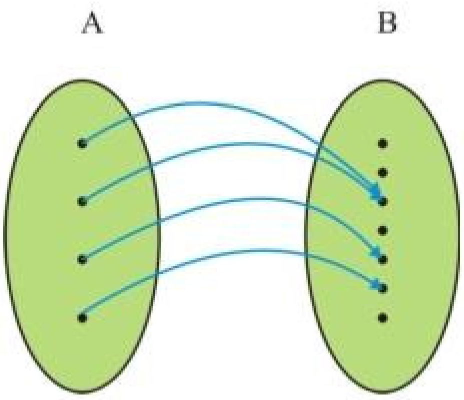
Exemplos:

1. A função $f:R\rightarrow R$ definida por $f(x)=3x+2$ é injetora, pois sempre que tomamos dois valores diferentes para x, obtemos dois valores diferentes para f(x).
2. A função $f:R\rightarrow R$ definida por $f(x)=x^2+5$ não é injetora, pois para x=1 temos f(1)=6 e para x=-1 temos f(-1)=6.

O diagrama a seguir representa a função injetora f: A → B



Exemplo 2: O diagrama a seguir não representa uma função injetora f: A → B



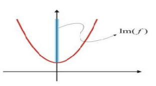
Funções sobrejetoras

Uma função f:A→B é sobrejetora se todo elemento de B é a imagem de pelo menos um elemento de A. Isto equivale a afirmar que a imagem da função deve ser exatamente igual a B que é o contradomínio da função, ou seja, para todo y em B existe x em A tal que y=f(x).

Exemplos:

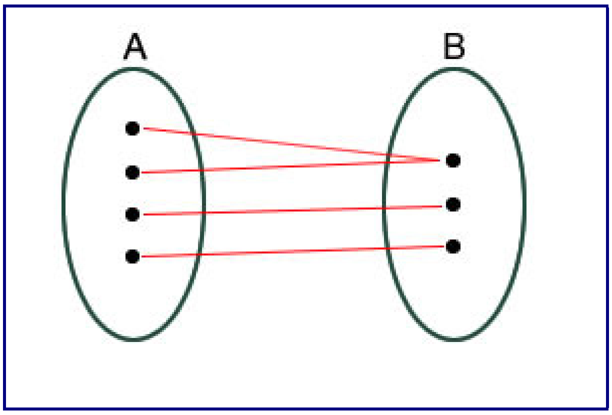
1. A função f:R→R definida por f(x)=3x+2 é sobrejetora, pois todo elemento de R é imagem de um elemento de R pela função.
2. A função f:R→(0,∞) definida por f(x)=x² é sobrejetora, pois todo elemento pertecente a (0,∞) é imagem de pelo menos um elemento de R pela função.
3. A função f:R→R definida por f(x)=2x não é sobrejetora, pois o número -1 é elemento do contradomínio R e não é imagem de qualquer elemento do domínio.

Exemplo 1: A função f: R → [1,∞) é sobrejetora, pois, segundo o gráfico



Im(f) = [1,∞)

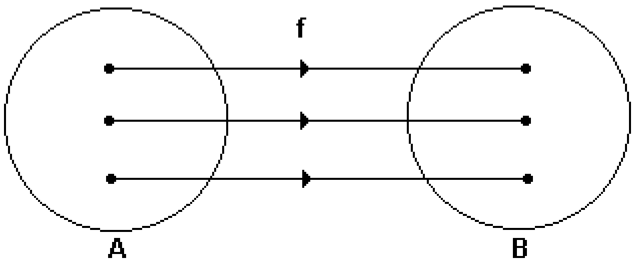
Exemplo 2: A função f: A → B, a seguir, representa uma função sobrejetora:



Funções bijetoras

Uma função f:A→B é bijetora se ela é ao mesmo tempo injetora e sobrejetora.

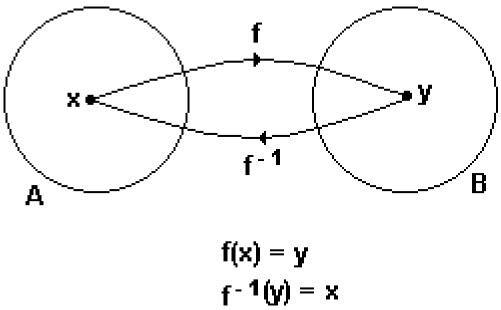
Exemplo: A função f:R→R dada por f(x)=2x é bijetora, pois é injetora e bijetora.



FUNÇÃO INVERSA

Dada uma função f : A ® B , se f é bijetora , então define-se a função inversa f -1 como sendo a função de B em A , tal que f -1 (y) = x .

Veja a representação a seguir:

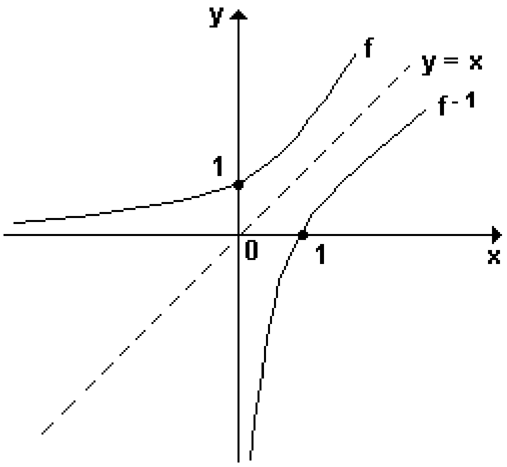


É óbvio então que:
a) para obter a função inversa , basta permutar as variáveis x e y .
b) o domínio de f -1 é igual ao conjunto imagem de f .
c) o conjunto imagem de f -1 é igual ao domínio de f .
d) os gráficos de f e de f -1 são curvas simétricas em relação à reta y = x ou seja , à bissetriz do primeiro quadrante .

Exemplo:
Determine a INVERSA da função definida por y = 2x + 3.
Permutando as variáveis x e y, fica: x = 2y + 3
Explicitando y em função de x, vem:
2y = x - 3 \ y = (x - 3) / 2, que define a função inversa da função dada.

O gráfico abaixo, representa uma função e a sua inversa.

Observe que as curvas representativas de f e de f-1, são simétricas em relação à reta
y = x, bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes.



Exercício resolvido:

A função f: R ® R , definida por f(x) = x2 :

a) é inversível e sua inversa é f -1 (x) = Ö x

b) é inversível e sua inversa é f -1(x) = - Ö x

c) não é inversível

d) é injetora

e) é bijetora

SOLUÇÃO:

Já sabemos que somente as funções bijetoras são inversíveis, ou seja, admitem função inversa. Ora, a função f(x) = x2, definida em R - conjunto dos números reais - não é injetora, pois elementos distintos possuem a mesma imagem. Por exemplo,

f(3) = f(-3) = 9. Somente por este motivo, a função não é bijetora e, em conseqüência, não é inversível.

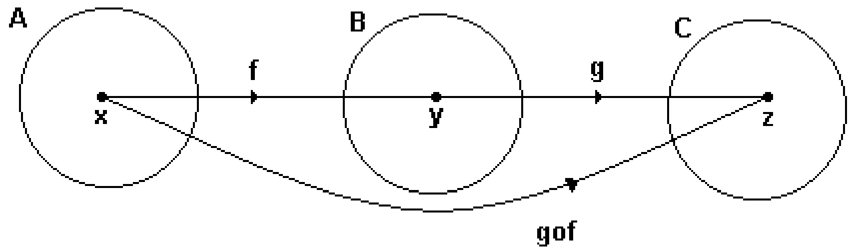
Observe também que a função dada não é sobrejetora, pois o conjunto imagem da função f(x) = x2 é o conjunto R + dos números reais não negativos, o qual não coincide com o contradomínio dado que é igual a R. A alternativa correta é a letra C.

FUNÇÃO COMPOSTA

Chama-se função composta (ou função de função) à função obtida substituindo-se a variável independente x , por uma função.

Simbologia : fog (x) = f(g(x)) ou gof (x) = g(f(x)) .

Veja o esquema a seguir:



Obs : atente para o fato de que fog ¹ gof , ou seja, a operação " composição de funções " não é comutativa .

Exemplo:
Dadas as funções $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = 5x$, pede-se determinar gof(x) e fog(x).
Teremos:
$gof(x) = g[f(x)] = g(2x + 3) = 5(2x + 3) = 10x + 15$
$fog(x) = f[g(x)] = f(5x) = 2(5x) + 3 = 10x + 3$
Observe que fog ¹ gof .

Exercícios resolvidos:

1 - Sendo f e g duas funções tais que: $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$. Podemos afirmar que a igualdade gof(x) = fog(x) ocorrerá se e somente se:
a) $b(1 - c) = d(1 - a)$
b) $a(1 - b) = d(1 - c)$
c) $ab = cd$
d) $ad = bc$
e) $a = bc$

SOLUÇÃO:
Teremos:
fog(x) = f[g(x)] = f(cx + d) = a(cx + d) + b \ fog(x) = acx + ad + b
gof(x) = g[f(x)] = g(ax + b) = c(ax + b) + d \ gof(x) = cax + cb + d

Como o problema exige que gof = fog, fica:
$acx + ad + b = cax + cb + d$

Simplificando, vem:
$ad + b = cb + d$
ad - d = cb - b \ d(a - 1) = b(c - 1), que é equivalente a d(a - 1) = b(c - 1), o que nos leva a concluir que a alternativa correta é a letra A. .

2 - Sendo f e g duas funções tais que $fog(x) = 2x + 1$ e $g(x) = 2 - x$ então $f(x)$ é:
a) $2 - 2x$
b) $3 - 3x$
c) $2x - 5$
*d) $5 - 2x$
e) uma função par.

SOLUÇÃO:
Sendo $fog(x) = 2x + 1$, temos: $f[g(x)] = 2x + 1$
Substituindo $g(x)$ pelo seu valor, fica: $f(2 - x) = 2x + 1$
Fazendo uma mudança de variável, podemos escrever $2 - x = u$, sendo u a nova variável. Portanto, $x = 2 - u$.

Substituindo, fica:
$f(u) = 2(2 - u) + 1 \backslash f(u) = 5 - 2u$
Portanto, $f(x) = 5 - 2x$, o que nos leva à alternativa D.

Agora resolva esta:

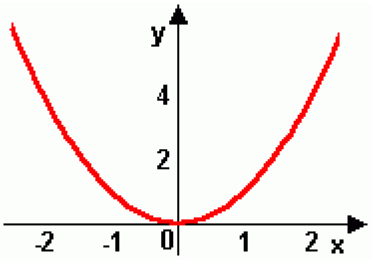
Dadas as funções $f(x) = 4x + 5$ e $g(x) = 2x - 5k$, ocorrerá $gof(x) = fog(x)$ se e somente se k for igual a:
a) -1/3
b) 1/3
c) 0
d) 1
e) -1

Gabarito = A

FUNÇÕES

Funções quadráticas

Sejam a, b e c números reais, com a não nulo. A função quadrática é uma função f:R → R que para cada x em R, f(x)=ax²+bx+c.



Exemplos:

1. $f(x)=x^2$
2. $f(x)=-4\ x^2$
3. $f(x)=x^2-4x+3$
4. $f(x)=-x^2+2x+7$

O gráfico de uma função quadrática é uma curva denominada parábola.

Funções Logarítmica e Exponencial

Quando os logaritmos foram introduzidos no século XVII como uma ferramenta computacional, eles forneceram aos cientistas daquela época um poder de cálculo até então inimaginável. Embora os computadores e as calculadoras tenham substituído amplamente os logaritmos em cálculos numéricos, as funções logarítmica e suas relativas tem uma vasta aplicação na matemática e na ciência.

- EXPOENTES IRRACIONAIS

Em álgebra, as potências inteiras e racionais de um número b estão definidas por

$$bn = b \times b \times \ldots \times b \quad (n \text{ fatores}), \qquad b^{-n} = \frac{1}{b^n}, \qquad b^0 = 1$$

$$b^{p/q} = \sqrt[q]{b^p} = (\sqrt[q]{b})^p, \qquad b^{-p/q} = \frac{1}{b^{p/q}}$$

Se b for negativo, então algumas das potências fracionárias de b terão valores imaginários; por exemplo, $(-2)^{1/2} = \sqrt{-2}$. Para evitar esta complicação, vamos supor que $b \geq 0$, mesmo que não seja estabelecido explicitamente.

Observe que as definições precedentes não incluem potências irracionais de b, tais como

2^{π}, $3^{\sqrt{2}}$ e $\pi^{-\sqrt{7}}$

Há vários métodos para definir potências irracionais. Uma abordagem é definir potências irracionais de b como limite de potências racionais. Por exemplo, para definir 2^{π} devemos começar com a representação decimal de π, isto é, 3,1415926

Desta decimal, podemos formar uma seqüência de números racionais que ficam cada vez mais próximos de π isto é,

3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; 3,14159

e a partir destes podemos formar uma seqüência de potências racionais de 2:

$2^{3,1}$; $2^{3,14}$; $2^{3,141}$; $2^{3,1415}$; $2^{3,14159}$

Uma vez que os expoentes dos termos desta seqüência tendem a um limite π, parece plausível que os próprios termos tendam a um limite; sendo assim, é razoável definir 2^{π} como sendo este limite. A tabela abaixo fornece evidência numérica de que a seqüência, na realidade, tem um limite e para quatro casas decimais, o valor deste limite é $2^{\pi} \approx$ 8,8250. Em geral, para qualquer expoente irracional p e número positivo b, podemos definir b^{p} como o limite de potências racionais de b, criadas pela expansão decimal de p.

Tabela

x	2^{x}
3	8,000000
3,1	8,574188
3,14	8,815241
3,141	8,821353
3,1415	8,824411
3,14159	8,824962
3,141592	8,824974

- A FAMÍLIA DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Uma função da forma f (x) = b^{x}, onde b > 0 e b $\neq$ 1, é chamada de função exponencial de base b, cujos exemplos são

f (x) = 2^{x},   f (x) = $(\frac{1}{2})^{x}$,   f (x) = π^{x}

Note que uma função exponencial tem uma base constante e um expoente variável. Assim as funções tais como f (x) = x^{2} e f (x) = x^{π} não seriam classificadas como funções exponenciais, uma vez que elas tem uma base variável e um expoente constante.

Pode ser mostrado que as funções exponenciais são contínuas e têm um dos dois aspectos básicos mostrados na figura 1, dependendo de se 0 < b < 1 ou b > 1. A figura 2 mostra os gráficos de algumas funções exponenciais específicas.

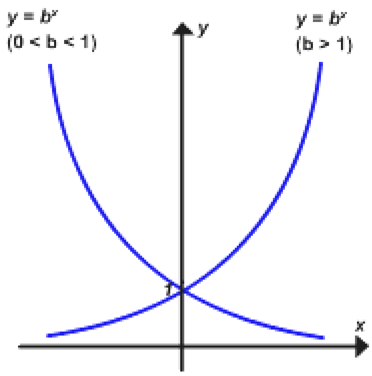


figura 1

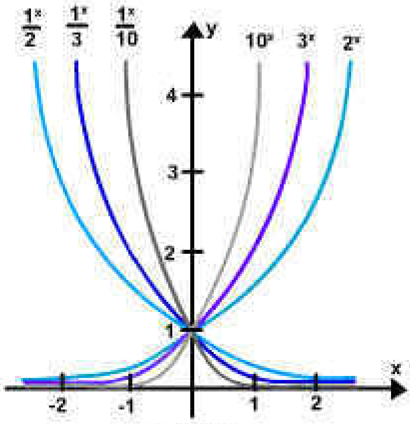


figura 2

OBSERVAÇÃO. Se b = 1, então a função b^x é constante, uma vez que $b^x = 1^x = 1$. Este caso não é de nosso interesse aqui, assim o excluímos da família das funções exponenciais.

LOGARITMOS

Lembre-se que, algebricamente, o logaritmo é um expoente. Mais precisamente, se b > 0 e b ≠ 1, então para valores positivos de x o logaritmo na base b de x é denotado por

$\log_b x$

e é definido como sendo aquele expoente ao qual b deve ser elevado para produzir x. Por exemplo,

$\log_{10} 100 = 2,$ $(10^2 = 100)$ $\log_{10}(1/1000) = -3,$ $(10^{-3} = 1/1000)$ $\log_2 16 = 4,$ $(2^4 = 16)$

$\log_b 1 = 0,$ $(b^0 = 1)$ $\log_b b = 1$ $(b^1 = b)$

Historicamente, os primeiros logaritmos a serem estudados foram os de base 10 chamados de logaritmos comuns. Para tais logaritmos, é usual suprimir referência explícita para a base e escrever log x e não $\log_{10} x$. Mais recentemente, os logaritmos de base dois desempenharam importante papel em ciência computacional, uma vez que surgem naturalmente em sistema numérico binário. Porém, os logaritmos mais largamente usados nas aplicações são logaritmos naturais, os quais tem uma base natural denotada pela letra e em homenagem ao matemático suíço Leonard Euler, que primeiro sugeriu sua aplicação aos logaritmos no artigo não-publicado, escrito em 1728. Esta constante, cujo valor está em seis casas decimais, é

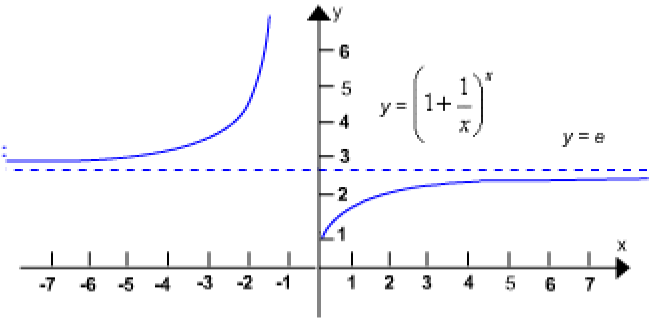
$e \approx 2,718282$

surge como assíntota horizontal ao gráfico da equação

$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Os valores de $(1+1/x)^x$ aproximam-se a e

x	$1+\dfrac{1}{x}$	$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$
1	2	$\approx$ 2,000000
10	1,1	2,593742
100	1,01	2,704814
1000	1,001	2,716924
10.000	1,0001	2,718146
100.000	1,00001	2,718268
1.000.000	1,000001	2,718280



O fato de que y = e, quando x $\to +\infty$ e quando x $\to -\infty$ é expresso pelos limites

$$e = \lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \quad \text{e} \quad e = \lim_{x \to -\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

A função exponencial f (x) = e^x é chamada de função exponencial natural. Para simplificar a tipografia, esta função é, algumas vezes, escrita como exp x. Assim, por exemplo, você pode ver a relação $e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2}$ expressa como

exp($x_1 + x_2$) = exp(x_1) exp(x_2)

Esta notação é também usada por recursos computacionais, e é típico acessar a função e^x com alguma variação do comando EXP.

FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

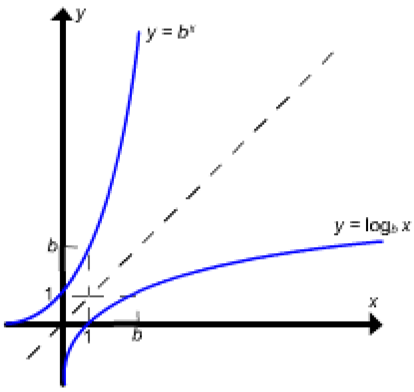
A figura 1 que se encontram no item família de funções exponenciais sugere que se b > 0 e b $\neq$ 1, então o gráfico de y = b^x satisfaz o teste da reta horizontal, e isso implica que a função f (x) = b^x tem uma inversa. Para encontrar uma fórmula para esta inversa (com x como variável independente), podemos resolver a equação x = b^y para y com uma função de x. Isto pode ser feito tomando o logaritmo na base de b de ambos os lados desta equação. Isto dá lugar a

$\log_b x = \log_b(b^y)$

Porém, se pensarmos $\log_b(b^y)$ como expoente ao qual b se deve ser elevado para produzir b^y, então fica evidente que $\log_b(b^y)$. Assim, pode ser reescrito como

y = $\log_b x$

de onde concluímos que a inversa de f (x) = b^x é f^{-1}(x) = $\log_b$ x. Isto implica que o gráfico de x = b^y e o de y = $\log_b x$ são reflexões um do outro, em relação relação à reta y = x.



Chamaremos $\log_b x$ de função logarítmica na base b.

Em particular, se tomarmos f (x) = b^x e f^{-1}(x) = $\log_b x$, e se tivermos em mente que o domínio de f^{-1} é o mesmo que a imagem de f, então obtemos

logb(bx)=x para todos os valores reais de x
blog x=x para x>0

Em outras palavras, a equação nos diz que as funções logb(bx) e blog x cancelam o efeito de outra quando compostas em qualquer ordem; por exemplo

$\log 10^x = x, \quad 10^{\log x} = x, \quad \ln e^x = x, \quad e^{\ln x} = x, \quad \ln e^5 = 5, \quad e^{\ln \pi} = \pi$

Equações e Inequações

As equações e inequações lineares, bem como os sistemas de equações e inequações simultâneas, são muito úteis em problemas de economia, transporte, dieta, administração, etc. Estas inequações, geralmente expressando condições subsidiárias, vão determinar uma região do plano onde devemos procurar a solução do problema, que de maneira geral será do tipo máximo ou mínimo

Equação linear

É uma equação da forma

a11 x1 + a12 x2 + a13 x3 + ... + a1n xn = b1 onde

- $x1, x2, ..., xn$ são as incógnitas;
- $a11, a12, ..., a1n$ são os coeficientes (reais ou complexos);
- $b1$ é o termo independente (número real ou complexo).

Exemplos de equações lineares

1. $4 x + 3 y - 2 z = 0$
2. $2 x - 3 y + 0 z - w = -3$
3. $x1 - 2 x2 + 5 x3 = 1$
4. $4i x + 3 y - 2 z = 2-5i$

Notação: Usamos R[x] para a raiz quadrada de x>0.

Exemplos de equações não-lineares

1. $3 x + 3y R[x] = -4$
2. $x2 + y2 = 9$
3. $x + 2 y - 3 z w = 0$
4. $x2 + y2 = -9$

Solução de uma equação linear

Uma sequência de números reais (r1,r2,r3,r4) é solução da equação linear

$a11 x1 + a12 x2 + a13 x3 + a14 x4 = b1$

se trocarmos cada xi por ri na equação e este fato implicar que o membro da esquerda é identicamente igual ao membro da direita, isto é:

$a11 r1 + a12 r2 + a13 r3 + a14 r4 = b1$

Exemplo: A sequência (5,6,7) é uma solução da equação 2x+3y-2z=14 pois, tomando x=5, y=6 e z=7 na equação dada, teremos:

$2\times5 + 3\times6 - 2\times7 = 14$

Equação quadrática ou equação do segundo grau é uma equação polinomial de grau dois. A forma geral deste tipo de equação é:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

onde x é uma variável, e a, b e c são constantes, das quais a ≠ 0 (caso contrário, a equação torna-se linear). As constantes a, b e c, são chamadas respectivamente de coeficiente quadrático, coeficiente linear e coeficiente constante ou termo livre. A variável x representa um valor a ser determinado, e também é chamada de incógnita.

Equação Completa do segundo grau

Uma equação do segundo grau é completa, se todos os coeficientes a, b e c são diferentes de zero.

Exemplos:

1. $2x^2 + 7x + 5 = 0$
2. $3x^2 + x + 2 = 0$

Equação incompleta do segundo grau

Uma equação do segundo grau é incompleta se b=0 ou c=0 ou b=c=0. Na equação incompleta o coeficiente a é diferente de zero.

Exemplos:

1. $4x^2 + 6x = 0$
2. $3x^2 + 9 = 0$
3. $2x^2 = 0$

Resolução de equações incompletas do 2o. grau

Equações do tipo $ax^2=0$: Basta dividir toda a equação por a para obter:

$x^2 = 0$

significando que a equação possui duas raízes iguais a zero.

Equações do tipo $ax^2+c=0$: Novamente dividimos toda a equação por a e passamos o termo constante para o segundo membro para obter:

$x^2 = -c/a$

Se -c/a for negativo, não existe solução no conjunto dos números reais.

Se -c/a for positivo, a equação terá duas raízes com o mesmo valor absoluto (módulo) mas de sinais contrários.

Equações do tipo $ax^2+bx=0$: Neste caso, fatoramos a equação para obter:

$x (ax + b) = 0$

e a equação terá duas raízes:

$x' = 0$ ou $x'' = -b/a$

Exemplos gerais

1. $4x^2=0$ tem duas raízes nulas.
2. $4x^2-8=0$ tem duas raízes: x'=R[2], x"= -R[2]
3. $4x^2+5=0$ não tem raízes reais.
4. $4x^2-12x=0$ tem duas raízes reais: x'=3, x"=0

Exercícios: Resolver as equações incompletas do segundo grau.

1. $x^2 + 6x = 0$
2. $2 x^2 = 0$
3. $3 x^2 + 7 = 0$
4. $2 x^2 + 5 = 0$
5. $10 x^2 = 0$
6. $9 x^2 - 18 = 0$

Resolução de equações completas do 2o. grau

Como vimos, uma equação do tipo: $ax^2+bx+c=0$, é uma equação completa do segundo grau e para resolvê-la basta usar a fórmula quadrática (atribuída a Bhaskara), que pode ser escrita na forma:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

onde $D=b^2-4ac$ é o discriminante da equação.

Para esse discriminante D há três possíveis situações:

1. Se $D<0$, não há solução real, pois não existe raiz quadrada real de número negativo.
2. Se $D=0$, há duas soluções iguais:

   x' = x" = -b / 2a

3. Se $D>0$, há duas soluções reais e diferentes:

   x' = (-b + R[D])/2a
   x" = (-b - R[D])/2a

Exemplos: Preencher a tabela com os coeficientes e o discriminante de cada equação do segundo grau, analisando os tipos de raízes da equação.

Equação	a	b	c	Delta	Tipos de raízes
$x^2-6x+8=0$	1	-6	8	4	reais e diferentes
$x^2-10x+25=0$					
$x^2+2x+7=0$					
$x^2+2x+1=0$					
$x^2+2x=0$					

O uso da fórmula de Bhaskara

Você pode realizar o Cálculo das Raízes da Equação do segundo grau com a entrada dos coeficientes a, b e c em um formulário, mesmo no caso em que D é negativo, o que força a existência de raízes complexas conjugadas.

Mostraremos agora como usar a fórmula de Bhaskara para resolver a equação:

$x^2 - 5 x + 6 = 0$

1. Identificar os coeficientes: $a=1$, $b= -5$, $c=6$
2. Escrever o discriminante $D = b^2-4ac$.
3. Calcular $D=(-5)^2-4\times1\times6=25-24=1$
4. Escrever a fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

5. Substituir os valores dos coeficientes a, b e c na fórmula:

   x' = (1/2)(5+R[1]) = (5+1)/2 = 3
   x'' = (1/2)(5-R[1]) = (5-1)/2 = 2

Exercícios

1. Calcular o discriminante de cada equação e analisar as raízes em cada caso:
   a. $x^2 + 9x + 8 = 0$
   b. $9x^2 - 24x + 16 = 0$
   c. $x^2 - 2x + 4 = 0$
   d. $3x^2 - 15x + 12 = 0$
   e. $10x^2 + 72x - 64 = 0$
2. Resolver as equações:
   a. $x^2 + 6x + 9 = 0$
   b. $3x^2 - x + 3 = 0$
   c. $2x^2 - 2x - 12 = 0$
   d. $3x^2 - 10x + 3 = 0$

As equações exponenciais são aquelas que apresentam a incógnita no expoente. Observe os exemplos:

2x = 256
3x+1 = 9
4x = 1024
2x+2 = 512

As equações exponenciais possuem um método de resolução diferenciado, precisamos igualar as bases para aplicarmos a propriedade de igualdade entre os expoentes. Observe a resolução da seguinte equação:

5x = 625 (fatorando 625 temos: 54)
5x = 54

x = 4
A solução da equação exponencial será x = 4.

Observação: fatorar significa decompor o número em fatores primos, isto é, escrever o número através de uma multiplicação de fatores iguais utilizando as regras de potenciação.

Acompanhe outro exemplo:

Vamos determinar a solução da equação 2x + 8 = 512.

Devemos escrever 512 na forma fatorada, 512 = 29.
Então:
2x + 8 = 29
x + 8 = 9
x = 9 – 8
x = 1
A solução da equação exponencial 2x + 8 = 512 é x = 1.

Exemplo 3

Resolva a equação $2^x = \sqrt[5]{128}$.
Transforme a raiz quinta em potência:
2x = 1281/5

Pela fatoração do número 128 temos 27, então:
2x = (27)1/5
x = 7 . 1/5
x = 7/5
Portanto, a solução da equação exponencial $2^x = \sqrt[5]{128}$ é x = 7/5.

Exemplo 4

Encontre o valor de x que satisfaça a equação exponencial 2x² - 7x + 12 = 1.

Para igualar as bases, vamos lembrar a regra da potenciação que diz o seguinte: “todo número diferente de zero elevado a zero é igual a 1.”
Com base na regra, podemos dizer que 1 = 20, então:

2x² - 7x + 12 = 20
x² - 7x + 12 = 0, temos uma equação completa do 2º grau que deverá ser resolvida pelo teorema de Bháskara.

Aplicando o método resolutivo descobrimos os seguintes valores:
x' = 3 e x" = 4.
Portanto, os valores que satisfazem a equação exponencial $2x^2 - 7x + 12 = 1$ é x = 3 e x = 4.

Por último, as equações logarítmicas

Os estudos sobre logaritmos são atribuídos aos matemáticos John Napier e Henry Briggs. Toda equação deve possuir uma igualdade e uma variável qualquer. Aquelas em que a variável se encontra no logaritmando ou na base serão chamadas de equações logarítmicas.

Observe alguns exemplos:

log2(x + 1) = 10
log5(x + 100) = 3
log3x = 2

Vamos considerar duas situações gerais:

logbx = logby, onde x = y

logbx = a, onde x = ba

Exemplos Resolvidos

1) log4(x+3) = 1
x + 3 = 41
x = 4 – 3
x = 1

2) log 1/5 (log1/2x) = – 1
log1/2x = (1/5) –1
log1/2x = 5
x = (1/2)5
x = 1/32

3) log4(x – 3) = log4(– x + 7)
x – 3 = – x + 7
x + x = 7 + 3
2x = 10
x = 10/2
x = 5

4) $\log 0{,}2(3x - 2) = - 1$
$3x - 2 = 0{,}2-1$
$3x - 2 = (2/10)-1$
$3x - 2 = (10/2)1$
$3x - 2 = 51$
$3x = 5 + 2$
$3x = 7$
$x = 7/3$

TRIGONOMETRIA

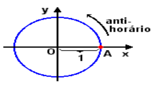
Com o uso de triângulos semelhantes podemos calcular distâncias inacessíveis, como a altura de uma torre, a altura de uma pirâmide, distância entre duas ilhas, o raio da terra, largura de um rio, entre outras.

A Trigonometria é um instrumento potente de cálculo, que além de seu uso na Matemática, também é usado no estudo de fenômenos físicos, Eletricidade, Mecânica, Música, Topografia, Engenharia entre outros.

Ponto móvel sobre uma curva

Consideremos uma curva no plano cartesiano. Se um ponto P está localizado sobre esta curva, simplesmente dizemos P pertence à curva e que P é um ponto fixo na mesma. Se assumirmos que este ponto possa ser deslocado sobre a curva, este ponto receberá o nome de ponto móvel.

Um ponto móvel localizado sobre uma circunferência, partindo de um ponto A pode percorrer esta circunferência em dois sentidos opostos. Por convenção, o sentido anti-horário (contrário aos ponteiros de um relógio) é adotado como sentido positivo.

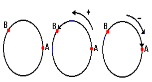


Arcos da circunferência

Se um ponto móvel em uma circunferência partir de A e parar em M, ele descreve um arco AM. O ponto A é a origem do arco e M é a extremidade do arco.

Quando escolhemos um dos sentidos de percurso, o arco é denominado arco orientado e simplesmente pode ser denotado por AB se o sentido de percurso for de A para B e BA quando o sentido de percurso for de B para A.

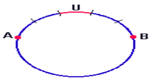
Quando não consideramos a orientação dos arcos formados por dois pontos A e B sobre uma circunferência, temos dois arcos não orientados sendo A e B as suas extremidades.



Medida de um arco

A medida de um arco de circunferência é feita por comparação com um outro arco da mesma circunferência tomado como a unidade de arco. Se u for um arco de comprimento unitário (igual a 1), a medida do arco AB, é o número de vezes que o arco u cabe no arco AB.

Na figura em anexo, a medida do arco AB é 5 vezes a medida do arco u. Denotando a medida do arco AB por m(AB) e a medida do arco u por m(u), temos m(AB)=5 m(u).



A medida de um arco de circunferência é a mesma em qualquer um dos sentidos. A medida algébrica de um arco AB desta circunferência, é o comprimento deste arco, associado a um sinal positivo se o sentido de A para B for anti-horário, e negativo se o sentido for horário.

O número pi

Para toda circunferência, a razão entre o perímetro e o diâmetro é constante. Esta constante é denotada pela letra grega π, que é um número irracional, isto é, não pode ser expresso como a divisão de dois números inteiros. Uma aproximação para o número π é dada por:

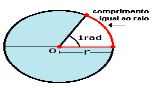
π = 3,1415926535897932384626433832795...

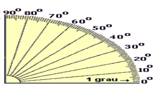
Mais informações sobre o número pi, podem ser obtidas na nossa página Áreas de regiões circulares.

Unidades de medida de arcos

A unidade de medida de arco do Sistema Internacional (SI) é o radiano, mas existem outras medidas utilizadas pelos técnicos que são o grau e o grado. Este último não é muito comum.

Radiano: Medida de um arco que tem o mesmo comprimento que o raio da circunferência na qual estamos medindo o arco. Assim o arco tomado como unidade tem comprimento igual ao comprimento do raio ou 1 radiano, que denotaremos por 1 rad.





Grau: Medida de um arco que corresponde a 1/360 do arco completo da circunferência na qual estamos medindo o arco.

Grado: É a medida de um arco igual a 1/400 do arco completo da circunferência na qual estamos medindo o arco.

Exemplo: Para determinar a medida em radianos de um arco de comprimento igual a 12 cm, em uma circunferência de raio medindo 8 cm, fazemos,

$$m(AB) = \frac{\text{comprimento do arco(AB)}}{\text{comprimento do raio}} = \frac{12}{8}$$

Portanto m(AB)=1,5 radianos

Arcos de uma volta

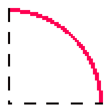
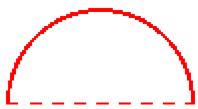
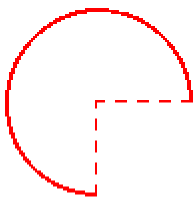
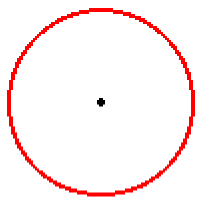
Se AB é o arco correspondente à volta completa de uma circunferência, a medida do arco é igual a C=2 π r, então:

$$m(AB) = \frac{\text{comprimento do arco(AB)}}{\text{comprimento do raio}} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Assim a medida em radianos de um arco de uma volta é 2 π rad, isto é,

2 π rad=360 graus

Podemos estabelecer os resultados seguintes

Desenho				
Grau	90	180	270	360
Grado	100	200	300	400
Radiano	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

0 graus = 0 grado = 0 radianos

Mudança de unidades

Consideremos um arco AB de medida R em radianos, esta medida corresponde a G graus. A relação entre estas medidas é obtida pela seguinte proporção,

2 π rad .... 360 graus

R rad .... G graus

Assim, temos a igualdade R/2 π =G/360, ou ainda,

$$R = G$$

$$\pi \qquad 180$$

Exemplos

1. Para determinar a medida em radianos de um arco de medida 60 graus, fazemos

$$\frac{R}{\pi} = \frac{60}{180}$$

   Assim R=π/3 ou 60 graus=π/3 rad

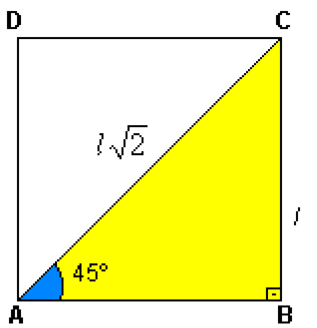
2. Para determinar a medida em graus de um arco de medida 1 radiano, fazemos:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{G}{180}$$

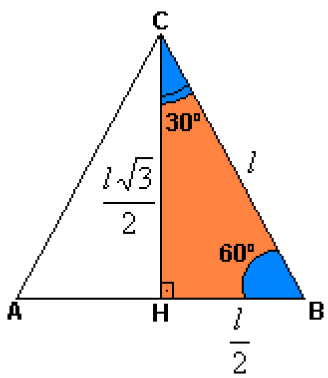
   Asim 1 rad=180/π graus.

As razões trigonométricas de 30º, 45º e 60º

Considere as figuras:



quadrado de lado l e diagonal $l\sqrt{2}$



Triângulo eqüilátero de lado I e altura $\frac{l\sqrt{3}}{2}$

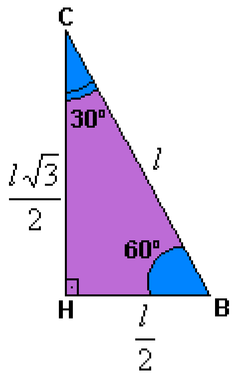
Seno, cosseno e tangente de 30º

Aplicando as definições de seno, cosseno e tangente para os ângulos de 30º, temos:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{\cancel{l}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{l}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\cancel{l}\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{l}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{\cancel{l}.2}{2.\cancel{l}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



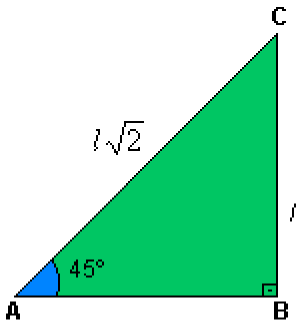
Seno, cosseno e tangente de 45º

Aplicando as definições de seno, cosseno e tangente ´para um ângulo de 45º, temos:

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\cancel{l}.1}{\cancel{l}.\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\cancel{l}.1}{\cancel{l}.\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45^\circ = \frac{\cancel{l}}{\cancel{l}} = 1$$



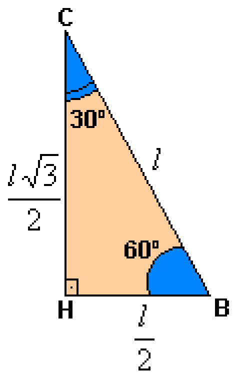
Seno, cosseno e tangente de 60º

Aplicando as definições de seno, cosseno e tangente para um ângulo de 60º, temos:

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\cancel{l}\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{l}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{\cancel{l}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{l}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \frac{\cancel{l}\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{l}} = \sqrt{3}$$



Resumindo

x	sen x	cos x	tg x

30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Resolva

Sistema sexagesimal	0°	90°	180°	270°
Sistema circular	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
seno				
cosseno				
tangente				
cotangente				

Sistema sexagesimal	30°	45°	60°
Sistema circular	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
seno			
cosseno			
tangente			
cotangente			

Triângulo Retângulo

É um triângulo que possui um ângulo reto, isto é, um dos seus ângulos mede noventa graus, daí o nome triângulo retângulo. Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, então os outros dois ângulos medirão 90°.

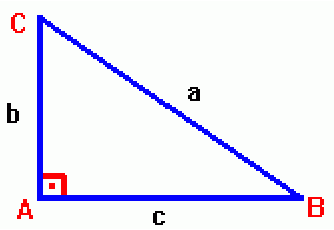
Observação: Se a soma de dois ângulos mede 90°, estes ângulos são denominados complementares, portanto podemos dizer que o triângulo retângulo possui dois ângulos complementares.

Lados de um triângulo retângulo

Os lados de um triângulo retângulo recebem nomes especiais. Estes nomes são dados de acordo com a posição em relação ao ângulo reto. O lado oposto ao ângulo reto é a hipotenusa. Os lados que formam o ângulo reto (adjacentes a ele) são os catetos.

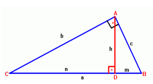
Termo	Origem da palavra
Cateto	Cathetós: (perpendicular)
Hipotenusa	Hypoteinusa: Hypó(por baixo) + teino(eu estendo)

Para padronizar o estudo da Trigonometria, adotaremos as seguintes notações:

Letra	Lado	Triângulo	Vértice = Ângulo	Medida
a	Hipotenusa		A = Ângulo reto	A=90°
b	Cateto		B = Ângulo agudo	B<90°
c	Cateto		C = Ângulo agudo	C<90°

Propriedades do triângulo retângulo

1. Ângulos: Um triângulo retângulo possui um ângulo reto e dois ângulos agudos complementares.
2. Lados: Um triângulo retângulo é formado por três lados, uma hipotenusa (lado maior) e outros dois lados que são os catetos.
3. Altura: A altura de um triângulo é um segmento que tem uma extremidade num vértice e a outra extremidade no lado oposto ao vértice, sendo que este segmento é perpendicular ao lado oposto ao vértice. Existem 3 alturas no triângulo retângulo, sendo que duas delas são os catetos. A outra altura (ver gráfico acima) é obtida tomando a base como a hipotenusa, a altura relativa a este lado será o segmento AD, denotado por h e perpendicular à base.



A hipotenusa como base de um triângulo retângulo

Tomando informações da mesma figura acima, obtemos:

1. o segmento AD, denotado por h, é a altura relativa à hipotenusa CB, indicada por a.
2. o segmento BD, denotado por m, é a projeção ortogonal do cateto c sobre a hipotenusa CB, indicada

por a.

3. o segmento DC, denotado por n, é a projeção ortogonal do cateto b sobre a hipotenusa CB, indicada por a.

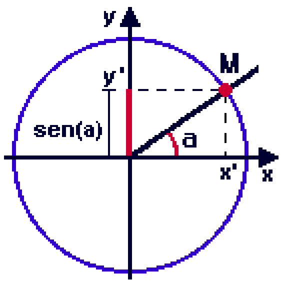
Resolução de triângulos quaisquer: lei dos senos e lei dos cossenos

Seno e cosseno

Dada uma circunferência trigonométrica contendo o ponto A=(1,0) e um número real x, existe sempre um arco orientado AM sobre esta circunferência, cuja medida algébrica corresponde a x radianos.

Seno: No plano cartesiano, consideremos uma circunferência trigonométrica, de centro em (0,0) e raio unitário. Seja M=(x',y') um ponto desta circunferência, localizado no primeiro quadrante, este ponto determina um arco AM que corresponde ao ângulo central a. A projeção ortogonal do ponto M sobre o eixo OX determina um ponto C=(x',0) e a projeção ortogonal do ponto M sobre o eixo OY determina outro ponto B=(0,y').

A medida do segmento OB coincide com a ordenada y' do ponto M e é definida como o seno do arco AM que corresponde ao ângulo a, denotado por sen(AM) ou sen(a).

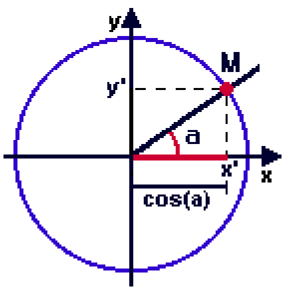


Como temos várias determinações para o mesmo ângulo, escreveremos

sen(AM)=sen(a)=sen(a+2kπ)=y'

Para simplificar os enunciados e definições seguintes, escreveremos sen(x) para denotar o seno do arco de medida x radianos.

Cosseno: O cosseno do arco AM correspondente ao ângulo a, denotado por cos(AM) ou cos(a), é a medida do segmento 0C, que coincide com a abscissa x' do ponto M.



Como antes, existem várias determinações para este ângulo, razão pela qual, escrevemos

$\cos(AM) = \cos(a) = \cos(a+2k\pi) = x'$

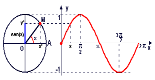
Função seno

Dado um ângulo de medida x, a função seno é a relação que associa a cada x em R, o seno do ângulo x, denotado pelo número real sen(x). A função é denotada por f(x)=sen(x) ou y=sen(x).

Segue uma tabela com valores de f no intervalo $[0,2\pi]$.

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
y	0	$½\sqrt{2}$	1	$½\sqrt{2}$	0	$-½\sqrt{2}$	-1	$-½\sqrt{2}$	0

Gráfico: Na figura, o segmento Oy' que mede sen(x), é a projeção do segmento OM sobre o eixo OY.



Propriedades da função seno

1. Domínio: A função seno está definida para todos os valores reais, sendo assim Dom(sen)=R.
2. Imagem: O conjunto imagem da função seno é o intervalo $I=\{y \text{ em } R: -1<y<1\}$
3. Periodicidade: A função é periódica de período 2π. Para todo x em R e para todo k em Z:

   $\text{sen}(x) = \text{sen}(x+2\pi) = \text{sen}(x+4\pi) =...= \text{sen}(x+2k\pi)$

   Justificativa: Pela fórmula do seno da soma de dois arcos, temos

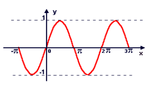
   $\text{sen}(x+2k\pi) = \text{sen}(x)\cos(2k\pi) + \cos(x)\text{sen}(2k\pi)$

   para k em Z, $\cos(2k\pi)=1$ e $\text{sen}(2k\pi)=0$

   $\text{sen}(x+2k\pi) = \text{sen}(x)(1)+\cos(x)(0) = \text{sen}(x)$

   A função seno é periódica de período fundamental $T=2\pi$.

   Completamos o gráfico da função seno, repetindo os valores da tabela em cada intervalo de medida 2π.

4. Sinal:

Intervalo	[0,π/2]	[π/2,π]	[π,3π/2]	[3π/2,2π]
Função seno	positiva	positiva	negativa	negativa

5. Monotonicidade:

Intervalo	[0,π/2]	[π/2,π]	[π,3π/2]	[3π/2,2π]
Função seno	crescente	decrescente	decrescente	crescente

6. Limitação: O gráfico de y=sen(x) está inteiramente contido na faixa do plano situada entre as retas horizontais y=-1 e y=1. Para todo x real temos:

   $-1 < sen(x) < 1$

7. Simetria: A função seno é ímpar, pois para todo x real, tem-se que:

   sen(-x) = -sen(x)

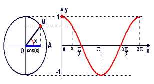
Função cosseno

Dado um ângulo de medida x, a função cosseno é a relação que associa a cada x em R o número real cos(x). Esta função é denotada por f(x)=cos(x) ou y=cos(x).

Segue uma tabela com valores de f no intervalo [0,2π].

x	0	π/4	π/2	3 π/4	π	5π/4	3π/2	7π/4	2π
y	1	½ $\sqrt{2}$	0	½ $\sqrt{2}$	-1	-½ $\sqrt{2}$	0	½ $\sqrt{2}$	1

Gráfico: O segmento Ox, que mede cos(x), é a projeção do segmento OM sobre o eixo horizontal OX.



Propriedades da função cosseno

1. Domínio: A função cosseno está definida para todos os valores reais, assim Dom(cos)=R.
2. Imagem: O conjunto imagem da função cosseno é o intervalo I={y em R: -1 < y < 1}
3. Periodicidade: A função é periódica de período 2π. Para todo x em R e para todo k em Z:

$\cos(x)=\cos(x+2\pi)=\cos(x+4\pi)=...=\cos(x+2k\pi)$

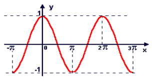
Justificativa: Pela fórmula do cosseno da soma de dois arcos, temos

$\cos(x+2k\pi)=\cos(x)\ \cos(2k\pi)-\text{sen}(x)\ \text{sen}(2k\pi)$

Para todo k em Z: $\cos(2k\pi)=1$ e $\text{sen}(2k\pi)=0$, então

$\cos(x+2k\pi)=\cos(x)\ (1)-\text{sen}(x)\ (0)=\cos(x)$

A função cosseno é periódica de período fundamental $T=2\pi$.



4. Sinal:

Intervalo	$[0,\pi/2]$	$[\pi/2,\pi]$	$[\pi,3\pi/2]$	$[3\pi/2,2\pi]$
Função cosseno	positiva	negativa	negativa	positiva

5. Monotonicidade:

Intervalo	$[0,\pi/2]$	$[\pi/2,\pi]$	$[\pi,3\pi/2]$	$[3\pi/2,2\pi]$
Função cosseno	decrescente	decrescente	crescente	crescente

6. Limitação: O gráfico de $y=\cos(x)$ está inteiramente contido na faixa do plano situada entre as retas horizontais $y=-1$ e $y=1$. Para todo x real temos:

   $-1 < \cos(x) < 1$

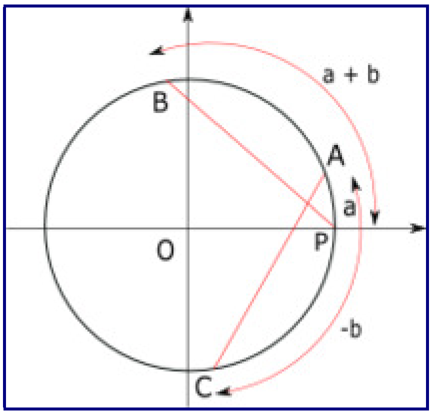
7. Simetria: A função cosseno é par, pois para todo x real, tem-se que:

$\cos(-x) = \cos(x)$

Fórmulas de adição, subtração, duplicação e bisseção de arcos. Transformações de somas de funções trigonométricas em produtos.

Adição de arcos

Cosseno da soma



Considere a figura ao lado. Sejam três pontos A, B e C pertencentes à circunferência , cujas coordenadas são $A\,(\cos a, \operatorname{sen} a)$, $B\,(\cos(a+b)\,, \operatorname{sen}\,(a+b))$ e $C\,(\cos b, -\operatorname{sen} b)$. Os arcos $\widehat{PB}$ e $\widehat{CA}$ têm medidas iguais, logo as cordas $\overline{PB}$ e $\overline{CA}$ também têm a mesma medida. Após aplicarmos a fórmula da distância entre dois pontos da Geometria analítica, temos:

$$d_{PB}^2 = 2 - 2 \cdot \cos(a+b)$$

$$d_{CA}^2 = 2 - 2 \cdot \cos a \cdot \cos b + 2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

Ao igualarmos as duas expressões, temos a fórmula:

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

Seno da soma

Sabemos que $\operatorname{sen} x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. A partir disto e sendo $x = a + b$, obtemos:

- $\operatorname{sen}(a+b) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a+b)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right]$

Utilizando a fórmula do cosseno da diferença de dois arcos nessa última expressão:

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \cos b + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \operatorname{sen} b$

Substituindo $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \operatorname{sen} a$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$ nesta expressão, então:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$$

Tangente da soma

Sabendo que $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ e utilizando as fórmulas anteriores para soma de senos e cossenos, podemos facilmente conseguir uma expressão para $\tan(a+b)$:

- $\tan(a+b) = \frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b}$

$= \frac{\frac{\operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b}}{\frac{\cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b}{\cos a \cdot \cos b}}$

Então:

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

Vale lembrar que essa fórmula só pode ser usada se $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$ porque a relação $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ só é válida se e somente se $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}.$

Cotangente da soma

Como $\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x},$ podemos obter, de maneira semelhante à formula da tangente da soma, uma expressão para $\cot(a+b)$:

- $\cot(a+b) = \frac{\cos(a+b)}{\operatorname{sen}(a+b)} = \frac{\cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a}$

$= \frac{\frac{\cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b}}{\frac{\operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a}{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b}}$

Simplificando, temos:

$$\cot(a+b) = \frac{\cot a \cdot \cot b - 1}{\cot a + \cot b}$$

Como $\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ é válida se e somente se $x \neq 0, \pi, 2\pi,$ a identidade que demonstramos acima só pode ser usada se $a \neq k\pi, b \neq k\pi$ e $a + b \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Exemplos

- Calcule:

$$(1)\ \cos 75^\circ : (2)\ \operatorname{sen} 105^\circ : (3)\ \tan 105^\circ : (4)\ \cot 75^\circ$$

- Resolução

(1) [illegible]

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; (2) [illegible] $= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$; (3) $\tan 105° = \tan(45° + 60°) = \frac{\tan 45° + \tan 60°}{1 - \tan 45° \cdot \tan 60°} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-1\cdot\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$; (4) $\cot 75° = \cot(30° + 45°) = \frac{\cot 30° \cdot \cot 45° - 1}{\cot 30° + \cot 45°}$

$= \frac{\sqrt{3}\cdot 1 - 1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

Subtração de arcos

Cosseno da diferença

Para calcular $\cos(a-b)$, fazemos uso da igualdade $a - b = a + (-b)$ na fórmula do cosseno da soma, conforme a seguir:

- $\cos(a-b) = \cos[a + (-b)]$

$= \cos a \cdot \cos(-b) - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen}(-b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot (-\operatorname{sen} b)$

Então:

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

Seno da diferença

Podemos fazer a mesma substituição da igualdade $a - b = a + (-b)$ para encontrar as outras relações de diferença de arcos. Para o seno, usaremos a fórmula do seno da soma e a igualdade citada acima, conforme a seguir:

- [illegible]

Logo,

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a$$

Tangente da diferença

Usando novamente a igualdade $a - b = a + (-b)$ e, desta vez, a fórmula da tangente da soma:

- $\tan(a-b) = \tan[a + (-b)] = \frac{\tan a + \tan(-b)}{1 - \tan a \cdot \tan(-b)}$

Simplificando, temos:

$$\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\cdot\tan b}$$

Pelos motivos já citados anteriormente, esta fórmula só é válida se $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ e $a-b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$

Cotangente da diferença

Mais uma vez, usaremos a igualdade $a-b=a+(-b)$ e, desta vez, a fórmula da cotangente da soma:

- $\cot(a-b)=\cot[a+(-b)]=\dfrac{\cot a\cdot\cot(-b)-1}{\cot a+\cot(-b)}$

Logo, obtemos a identidade:

$$\cot(a-b)=\frac{\cot a\cdot\cot b+1}{\cot b-\cot a}$$

Está fórmula só pode ser aplicada se $a\neq k\pi, b\neq k\pi$ e $a-b\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}.$

Exemplos

- Calcule:

$$(1)\ \cos 15^\circ : (2)\ \operatorname{sen} 15^\circ : (3)\ \cot 15^\circ$$

  - Resolução

(1) [illegible] $=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(2) [illegible] $=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(3) $\cot 15^\circ=\cot 15^\circ(60^\circ-45^\circ)=\dfrac{\cot 60^\circ\cdot\cot 45^\circ+1}{\cot 45^\circ-\cot 60^\circ}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 1+1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

- Dados $\tan\alpha=1$ e $\tan\beta=\frac{1}{2}$, calcule $\tan(\alpha-\beta)$.

  - Resolução

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+1\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

Multiplicação de arcos

É possível deduzir fórmulas para calcular as funções trigonométricas de $2a, 3a, \ldots$, utilizando as fórmulas obtidas para a soma de arcos e fazendo $2a = a + a, 3a = 2a + a, \ldots$, conforme será mostrado adiante.

Cosseno

Usando a fórmula do cosseno da soma, temos:

- $\cos 2a = \cos(a + a) = \cos a \cdot \cos a - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$

Logo, utilizando a Identidade relacional básica, podemos obter duas fórmulas finais:

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$$

ou

$$\cos 2a = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a$$

- $\cos 3a = \cos(2a + a) = \cos 2a \cdot \cos a - \operatorname{sen} 2a \cdot \operatorname{sen} a$

$$= (2\cos^2 a - 1) \cdot \cos a - (2 \cdot \operatorname{sen} a \cos a) \cdot \operatorname{sen} a = (2\cos^2 a - 1) \cdot \cos a - 2\operatorname{sen}^2 a \cdot \cos a$$

Utilizando a Identidade relacional básica e trabalhando algebricamente, temos:

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

Expressões para $\cos 4a, \cos 5a, \ldots$ são obtidas por processos semelhantes.

Seno

Ultilizando a fórmula do seno da soma:

- $\operatorname{sen} 2a = \operatorname{sen}(a + a) = \operatorname{sen} a \cdot \cos a + \operatorname{sen} a \cdot \cos a$

Então, temos:

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \cdot \operatorname{sen} a \cos a$$

- $\operatorname{sen} 3a = \operatorname{sen}(2a + a) = \operatorname{sen} 2a \cdot \cos a + \cos 2a \cdot \operatorname{sen} a$

$$= (2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos a) \cdot \cos a + \operatorname{sen} a (1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2 a)$$

Utilizando a Identidade relacional básica:

- $= 2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \left(1 - \operatorname{sen}^2 a\right) + \operatorname{sen} a \cdot \left(1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2 a\right)$

Logo:

$$\operatorname{sen} 3a = 3 \cdot \operatorname{sen} a - 4 \operatorname{sen}^3 a$$

Expressões para $\operatorname{sen} 4a, \operatorname{sen} 5a, \ldots$ são obtidas por processos semelhantes.

Tangente

A partir da fórmula da tangente da soma:

- $\tan 2a = \tan(a + a) = \dfrac{\tan a + \tan a}{1 - \tan a \cdot \tan a}$

Logo:

$$\tan 2a = \frac{2 \cdot \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

- $\tan 3a = \tan\left(2a + a\right) = \dfrac{\tan 2a + \tan a}{1 - \tan 2a \cdot \tan a}$

Ao subtituimos a fórmula anterior para $\tan 2a$ e simplificarmos, obtemos como fórmula final:

$$\tan 3a = \frac{3 \cdot \tan a - \tan^3 a}{1 - 3 \cdot \tan^2 a}$$

Expressões para $\tan 4a, \tan 5a, \ldots$ são obtidas por processos semelhantes.

Exemplo

- Se $\cot x = \dfrac{5}{3}$ e $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, calcule $\cos 2x$.
    - Resolução

Precisamos encontrar $\operatorname{sen} x$ para aplicarmos a fórmula. Para tanto, utilizaremos a identidade $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$, que relaciona as funções cotangente e cossecante. A partir da cossecante obtida, podemos encontrar o valor do seno, uma vez que $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$. Como $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, o valor da cossecante é positivo.

$$\csc x = \sqrt{1 + \cot^2 x} = \sqrt{1 + \frac{25}{9}} = \sqrt{\frac{34}{9}} = \frac{\sqrt{34}}{3}$$

De onde vem $\operatorname{sen} x = \dfrac{3}{\sqrt{34}}$.

Podemos finalmente calcular:

$$\cos 2x = 1 - 2 \cdot \ sin^2 x = 1 - 2 \cdot \frac{9}{34} = 1 - \frac{18}{34} = \frac{8}{17}.$$

Bissecção de arcos

Cosseno

Vamos utilizar as duas fórmulas que encontramos para $\cos 2a$ a fim de que, dado o cosseno de uma arco x qualquer, possamos obter $\cos \frac{x}{2}, \operatorname{sen} \frac{x}{2}$ ou $\tan \frac{x}{2}$. Para isto, consideraremos $2a = x$.

A partir de $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$:

- $\cos x = 2 \cdot \cos^2 \frac{x}{2} - 1$

$\Rightarrow \cos \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

A partir de $\cos 2a = 1 - 2\text{sen}^2 a$, temos:

- $\cos x = 1 - 2 \cdot \text{sen}^2 \frac{x}{2}$

$\Rightarrow \text{sen}\, \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

Finalmente, sabendo que $\tan x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$, temos:

- $\tan \frac{x}{2} = \frac{\text{sen}\, \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}$

$\Rightarrow \tan \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

Seno

Caso nos seja dado o $\text{sen}\, x$, sabendo que $\cos x = \pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x}$, calculamos $\cos x$ e usamos as fórmulas dadas logo acima para o cosseno.

Tangente

Precisamos agora encontrar fórmulas que permitam calcular $\text{sen}\, x$, $\cos x$ e $\tan x$, conhecida a $\tan \frac{x}{2}$. Para tanto, tomaremos as fórmulas de multiplicação

$$\text{sen}\, 2a = 2 \cdot \text{sen}\, a \cos a = 2 \cdot \text{sen}\, a \cdot \frac{\cos^2 a}{\cos a} = 2 \cdot \frac{\text{sen}\, a}{\cos a} \cdot \frac{1}{\sec^2 a} = \frac{2 \cdot \tan a}{1 + \tan^2 a}$$

$$\tan 2a = \frac{2 \cdot \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

e consideraremos $2a = x$, de modo que:

$$\text{sen}\, x = \frac{2 \cdot \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

$$\tan x = \frac{2 \cdot \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

Exemplos

- Se $\operatorname{sen} x = \frac{4}{5}$, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule as funções circulares de $\frac{x}{2}$.

    - Resolução

$$\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

Logo, temos:

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}} :$$

$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} :$$

$$\tan \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{1 + \frac{3}{5}}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

- Se $\tan \frac{x}{2} = \frac{1}{4}$, determine $\operatorname{sen} x$.

    - Resolução

Podemos aplicar diretamente a fórmula, de modo que:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2 \cdot \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{16}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{17}{16}} = \frac{8}{17}$$

As fórmulas de transformação de soma e diferença em produto, também conhecidas como Fórmulas de Prostaférese, são:

$$\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y) = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Dedução - soma e diferença dos senos

Partindo das fórmulas do seno da soma de arcos:

$$\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen}(a)\cos(b)+\operatorname{sen}(b)\cos(a)$$

$$\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen}(a)\cos(b)-\operatorname{sen}(b)\cos(a)$$

Somando-as membro a membro:

$$\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)=2\cdot\operatorname{sen}(a)\cos(b)\,(I)$$

Fazendo:

$x = a + b$: $y = a - b$

Temos:

$$a=\frac{x+y}{2}$$

$$b=\frac{x-y}{2}$$

Substituindo a e b, em (I):

$$\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}(y)=2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Procedendo da mesma forma, novamente a partir de:

$$\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen}(a)\cos(b)+\operatorname{sen}(b)\cos(a)$$

$$\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen}(a)\cos(b)-\operatorname{sen}(b)\cos(a)$$

Subtraindo-as membro a membro:

$$\operatorname{sen}(a+b)-\operatorname{sen}(a-b)=2\cdot\operatorname{sen}(b)\cos(a)$$ (II)

Substituindo a e b, em (II):

$$\operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}(y)=2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

Dedução - soma e diferença dos cossenos

Agora para a função cosseno

$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\operatorname{sen}(b)\operatorname{sen}(a)$$

$$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\mathrm{sen}(b)\mathrm{sen}(a)$$

Somando-as membro a membro:

$$\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cdot\cos(a)\cos(b) \quad \text{(III)}$$

Substituindo a e b, em (III):

$$\cos(x)+\cos(y)=2\cdot\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

E por fim:

$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\mathrm{sen}(b)\mathrm{sen}(a)$$
$$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\mathrm{sen}(b)\mathrm{sen}(a)$$

Subtraindo-as membro a membro:

$$\cos(a+b)-\cos(a-b)=-2\cdot\mathrm{sen}(a)\mathrm{sen}(b) \quad \text{(IV)}$$

Substituindo a e b, em (IV):

$$\cos(x)-\cos(y)=2\cdot\mathrm{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Equações e Inequações Trigonométricas

O que difere a equação e inequação trigonométrica das outras é que elas possuem funções trigonométricas das incógnitas.

Função trigonométrica é a relação feita entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo. Essas relações recebem o nome de seno, co-seno, tangente, co-secante, secante, co-tangente.

▸Veja alguns exemplos de quando uma equação é trigonométrica e quando ela não é trigonométrica.
sen x + cos y = 3 é uma equação trigonométrica, pois as incógnitas x e y possuem funções trigonométricas.

x + tg30º - y2 + cos60º = √3 não é uma equação trigonométrica, pois as funções trigonométricas não pertencem às incógnitas, ou seja, as incógnitas independem das funções trigonométricas.

▸Veja agora exemplos de inequações trigonométricas e quando uma inequação não é trigonométrica por que possui funções trigonométricas.

sen x > √3 é uma inequação trigonométrica pois função trigonométrica é função de uma incógnita.

(sen 30°) . x + 1 > 2 não é uma função trigonométrica, pois função trigonométrica não é uma função da incógnita.

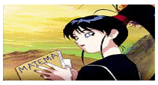
GEOMETRIA PLANA

Ponto, Reta e Plano são noções primitivas dentre os conceitos geométricos. Os conceitos geométricos são estabelecidos por meio de definições. As noções primitivas são adotadas sem definição. Como podemos imaginar ou formar idéias de ponto, reta e plano, então serão aceitos sem definição.

Podemos ilustrar com as seguintes idéias para entender alguns conceitos primitivos em Geometria:

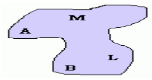
Ponto: uma estrela, um pingo de caneta, um furo de agulha, ...

Reta: fio esticado, lados de um quadro, ...

Plano: o quadro negro, a superfície de uma mesa, ...

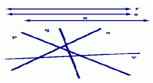
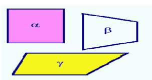
Notações de Ponto, Reta e Plano: As representações de objetos geométricos podem ser realizadas por letras usadas em nosso cotidiano, da seguinte forma:



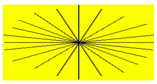
Pontos A, B, L e M representados por letras maiúsculas latinas;

Retas r, s, x, p, q, u e v representados por letras minúsculas latinas;

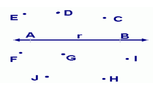
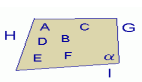
Planos Alfa, Beta e Gama representados por letras gregas minúsculas. Plano Alfa (rosa), Plano Beta (azul claro) e Plano Gama (amarelo).

Observação: Por um único ponto passam infinitas retas. De um ponto de vista prático, imagine o Pólo Norte e todas as linhas meridianas (imaginárias) da Terra passando por este ponto. Numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos, mas dois pontos distintos determinam uma única reta. Em um plano e também fora dele, há infinitos pontos.

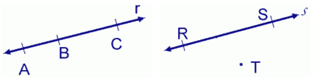


As expressões "infinitos pontos" ou "infinitas retas", significam "tantos pontos ou retas quantas você desejar".

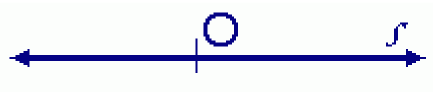



Pontos Colineares e semi-retas

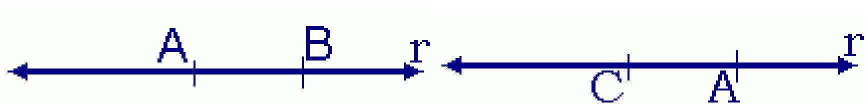
Pontos colineares: são pontos que pertencem a uma mesma reta. Na figura da esquerda, os pontos A, B e C são colineares, pois todos pertencem à mesma reta r. Na figura da direita, os pontos R, S e T não são colineares, pois T não pertence a reta s.



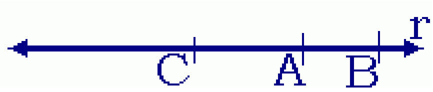
Semi-retas: Um ponto O sobre uma reta s, divide esta reta em duas semi-retas. O ponto O é a origem comum às duas semi-retas que são denominadas semi-retas opostas.



O ponto A é a origem da semi-reta que contém os pontos A e B e também é a origem da semi-reta que contém os pontos A e C, nas duas figuras ao lado. A semi-reta que contém os pontos A e B e a semi-reta que contém os pontos A e C são semi-retas opostas. A notação XY para uma semi-reta significa uma semi-reta que contém os pontos X e Y.

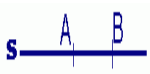


As semi-retas AB e AC estão na mesma reta, têm a mesma origem e são infinitas em sentidos contrários, isto é, iniciam em um ponto e se prolongam infinitamente.

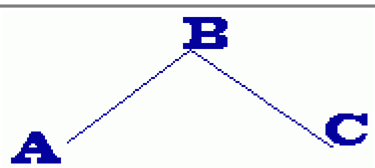
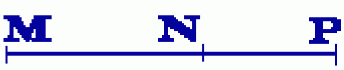
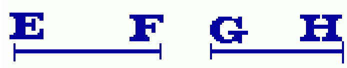


Segmentos Consecutivos, Colineares, Congruentes e Adjacentes

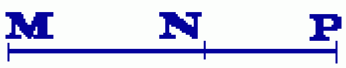
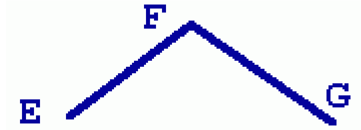
Dada uma reta s e dois pontos distintos A e B sobre a reta, o conjunto de todos os pontos localizados entre A e B, inclusive os próprios A e B, recebe o nome de segmento de reta, neste caso, denotado por AB. Às vezes, é interessante trabalhar com segmentos que tem início em um ponto chamado origem e terminam em outro ponto chamado extremidade. Os segmentos de reta são classificados como: consecutivos, colineares, congruentes e adjacentes.



Segmentos Consecutivos: Dois segmentos de reta são consecutivos se, a extremidade de um deles é também extremidade do outro, ou seja, uma extremidade de um coincide com uma extremidade do outro.

AB e BC são consecutivos	MN e NP são consecutivos	EF e GH não são consecutivos
		

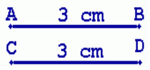
Segmentos Colineares: Dois segmentos de reta são colineares se estão numa mesma reta.

AB e CD são colineares	MN e NP são colineares	EF e FG não são colineares
		

Sobre segmentos consecutivos e colineares, podemos ter algumas situações:


Os segmentos AB, BC e CD são consecutivos e colineares, mas os segmentos AB e CD não são consecutivos embora sejam colineares, mas os segmentos de reta EF e FG são consecutivos e não são colineares

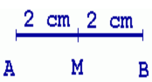
Segmentos Congruentes: são aqueles que têm as mesmas medidas. No desenho ao lado, AB e CD são congruentes. A congruência entre os segmentos AB e CD é denotada por AB~CD, onde "~" é o símbolo de congruência.



Segmentos Adjacentes: Dois segmentos consecutivos e colineares são adjacentes, se possuem em comum apenas uma extremidade e não têm outros pontos em comum. MN e NP são adjacentes, tendo somente N em comum. MP e NP não são adjacentes, pois existem muitos pontos em comum.

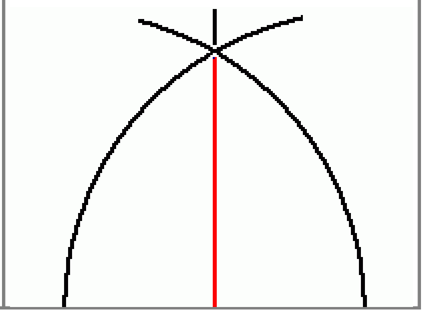
Ponto Médio de um segmento

M é o ponto médio do segmento de reta AB, se M divide o segmento AB em dois segmentos congruentes, ou seja, AM~MB. O ponto médio é o ponto de equilíbrio de um segmento de reta.



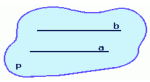
Construção do ponto médio com régua e compasso

Com o compasso centrado no ponto A, traçamos um arco com o raio igual à medida do segmento AB;	
Com o compasso centrado no ponto B, traçamos um outro arco com o mesmo raio que antes;	
Os arcos terão interseção em dois pontos localizados fora do segmento AB;	

Traçamos a reta (vermelha) ligando os pontos obtidos na interseção dos arcos;	
O ponto médio M é a interseção da reta (vermelha) com o segmento AB.	

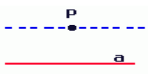
Retas paralelas

Duas retas são paralelas se estão em um mesmo plano e não possuem qualquer ponto em comum. Se as retas são coincidentes ("a mesma reta") elas são paralelas.



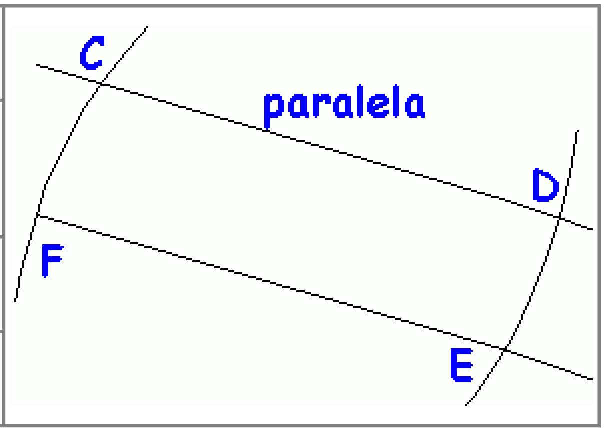
É usual a notação a||b, para indicar que as retas a e b são paralelas.

Propriedade da paralela: Por um ponto localizado fora de uma reta dada, pode ser traçada apenas uma reta paralela. Este fato é verdadeiro apenas na Geometria Euclidiana, que é a Geometria do nosso cotidiano.



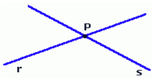
Construção de paralela com régua e compasso

Dada uma reta r e um ponto C fora dessa reta, podemos construir uma reta paralela à reta dada que passa por C. Este tipo de construção gerou muitas controvérsias e culminou com outras definições de geometrias denominadas "não Euclidianas", que embora sejam utilizadas na prática, não se comportam da forma usual como um ser humano olha localmente para um objeto geométrico.

Centrar o compasso no ponto C, traçar um arco que corta a reta em E.	
Com a mesma abertura do compasso, colocar a ponta seca do mesmo no ponto E e traçar um outro arco cortando a reta em F.	
Do ponto E, com abertura igual à corda CF, traçar um arco para obter D.	
Traçar uma reta ligando os pontos C e D e observar que a reta que passa em CD é paralela à reta que passa em EF.	

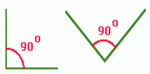
Retas concorrentes

Duas retas são concorrentes se possuem um único ponto em comum. Um exemplo de retas concorrentes pode ser obtido pelas linhas retas que representam ruas no mapa de uma cidade e a concorrência ocorre no cruzamento das retas (ruas).

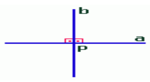


Retas perpendiculares

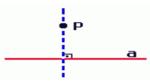
Ângulo reto: Um ângulo que mede 90 graus. Todos os ângulos retos são congruentes. Este tipo de ângulo é fundamental nas edificações.



Retas perpendiculares: são retas concorrentes que formam ângulos de 90 graus. Usamos a notação a $\perp$ b para indicar que as retas a e b são perpendiculares.

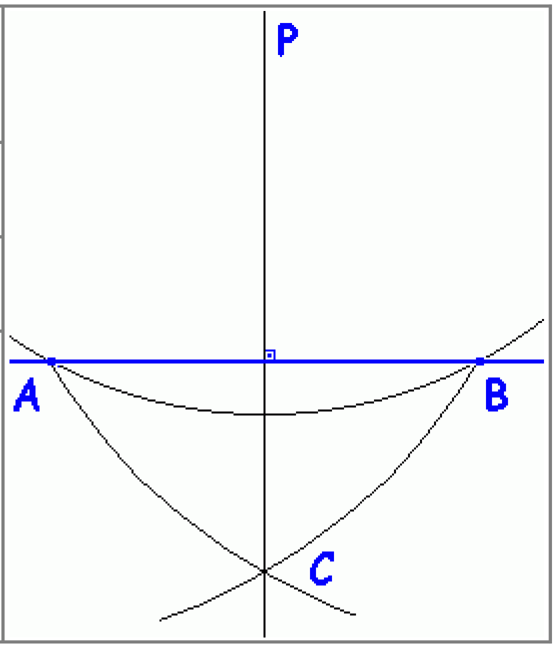


Propriedade da reta perpendicular: Por um ponto localizado fora de uma reta dada, pode ser traçada apenas uma reta perpendicular.



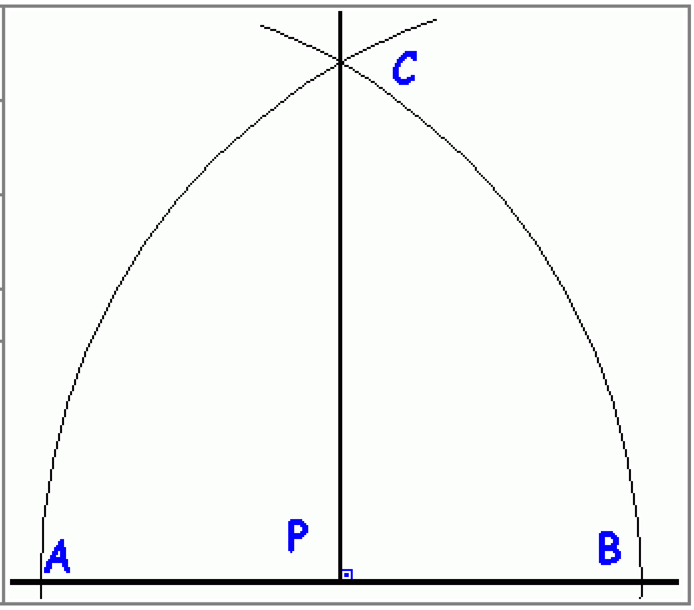
Construir perpendicular com régua e compasso (1)

Dada uma reta e um ponto fora da reta, podemos construir uma outra reta perpendicular à primeira, da seguinte forma:

Centrar o compasso no ponto P e com uma abertura maior do que a distância de P à reta e traçar um arco cortando a reta em dois pontos A e B;	
Centrar o compasso no ponto A e com um raio igual à medida do segmento AB traçar um arco;	
Centrar o compasso no ponto B e com a mesma abertura que antes traçar outro arco cortando o arco obtido antes no ponto C;	
A reta que une os pontos P e C é perpendicular à reta dada, Portanto AB é perpendicular a PC.	

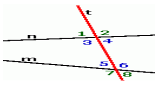
Construir perpendicular com régua e compasso (2)

Dada uma reta e um ponto P na reta, podemos obter uma reta perpendicular à reta dada, do seguinte modo:

Centrar o compasso no ponto P e marcar os pontos A e B sobre a reta que estão à mesma distância de P;	
Centrar o compasso no ponto A e raio igual à medida de AB para traçar um arco;	
Centrar o compasso no ponto B e com o mesmo raio, traçar um outro arco;	
Os arcos cruzam-se em C;	
A reta contendo PC é perpendicular à reta contendo o segmento AB.	

Retas transversais e ângulos especiais

Reta transversal a outras retas, é uma reta que tem interseção com as outras retas em pontos diferentes.



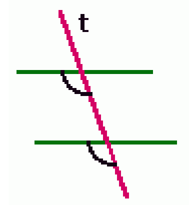
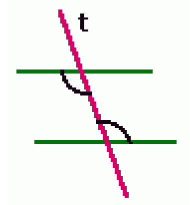
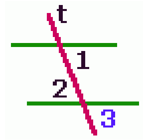
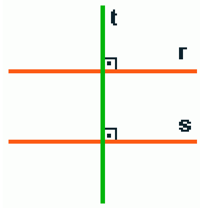
Na figura acima, a reta t é transversal às retas m e n e estas três retas formam 8 ângulos, sendo que os ângulos 3, 4, 5 e 6 são ângulos internos e os ângulos 1, 2, 7 e 8 são ângulos externos. Cada par destes ângulos, recebe nomes de acordo com a localização em relação à reta transversal e às retas m e n.

Ângulos Correspondentes	Estão do mesmo lado da reta transversal. Um deles é interno e o outro é externo.			
	1 e 5	2 e 6	3 e 7	4 e 8
Ângulos Alternos	Estão em lados opostos da reta transversal. Ambos são externos ou ambos são internos.			
	1 e 8	2 e 7	3 e 6	4 e 5
Ângulos Colaterais	Estão do mesmo lado da reta transversal. Ambos são externos ou ambos são internos.			
	1 e 7	2 e 8	3 e 5	4 e 6

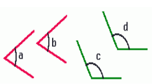
Ângulos alternos e colaterais ainda podem ser internos ou externos:

alternos	alternos internos	3 e 6	4 e 5
	alternos externos	1 e 8	2 e 7
colaterais	colaterais internos	3 e 5	4 e 6
	colaterais externos	1 e 7	2 e 8

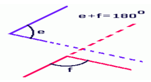
Propriedades das retas tranversais

Se duas retas paralelas (em cor preta) são cortadas por uma reta transversal (em cor vermelha), os ângulos correspondentes são congruentes, isto é, têm as mesmas medidas.	
Se duas retas paralelas são cortadas por uma reta transversal, os ângulos alternos internos são congruentes.	
Na figura ao lado, o ângulo 3 também é congruente aos ângulos 1 e 2.	
Quando duas retas r e s são paralelas e uma reta transversal t é perpendicular a uma das paralelas, então ela também será perpendicular à outra.	

Ângulos de lados paralelos: são ângulos cujos lados são paralelos, sendo que tais ângulos podem ser congruentes ou suplementares.



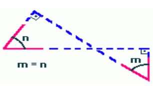
Congruentes: Quando ambos os ângulos são agudos, retos ou obtusos.



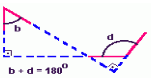
Suplementares: Quando ambos os ângulos são retos ou quando um deles for agudo e o outro obtuso.

Ângulos de lados perpendiculares: são ângulos cujos lados são perpendiculares e também podem ser congruentes ou suplementares.

Congruentes: Quando os dois ângulos são: agudos, retos ou obtusos.



Suplementares: Quando os dois ângulos são retos ou um dos ângulos é agudo e o outro obtuso.

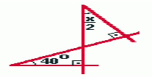


Alguns exercícios resolvidos

Em todos os exercícios abaixo, você deve obter as medidas dos ângulos, levando em consideração cada figura anexada.

1. Calcular a medida do ângulo x.

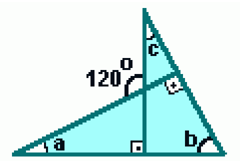
Solução: x/2=40graus, pois são ângulos agudos de lados perpendiculares x=80º.



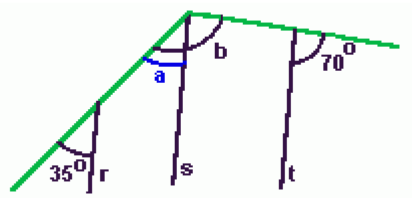
2. Calcular a medida do ângulo x.
   Solução: 2x+40º=180º (ângulos de lados perpendiculares um deles agudo e o outro obtuso), logo x=70º.

3. Calcular as medidas dos ângulos x e y.
   Solução: Como x+2x/3=180º (ângulos colaterais externos), então 3x+2x=540º, logo x=108º. Mas, y=2x/3 (ângulos opostos pelos vértices) e temos que y=72º

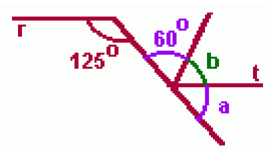
4. Calcular as medidas dos ângulo a, b e c.
   Solução: Como b+120º=180º (ângulos com lados perpendiculares um deles agudo e o outro obtuso), então b=60º, mas a=c (ângulos agudos com lados perpendiculares) e a+b+90º=180º(soma dos ângulos de um triângulo). Assim: a=30º e c=30º.



5. Calcular as medidas dos ângulos a e b, se as retas r, s e t são paralelas.
   Solução: Como a=35º (r||s e os ângulos correspondentes), segue que b-a=70º (s||t e os ângulos correspondentes). Assim b=105º.



6. Se as retas r e t são paralelas, determinar as medidas dos ângulos a e b.
   Solução: a+125º=180º (ângulos com lados paralelos um agudo e outro obtuso) e b+60º=125º (ângulos agudos com lados paralelos). Logo a=55º e b=65º.

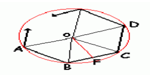
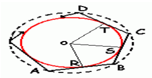


Polígonos regulares

Um polígono regular é aquele que possui todos os lados congruentes e todos os ângulos congruentes.

Existem duas circunferências associadas a um polígono regular.

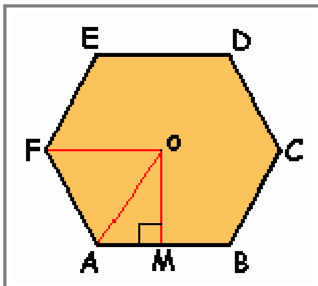
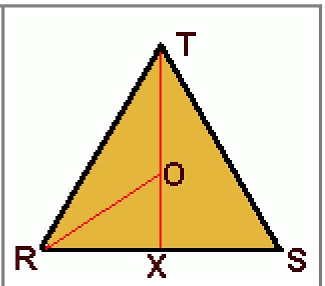
Circunferência circunscrita: Em um polígono regular com n lados, podemos construir uma circunferência circunscrita (por fora), que é uma circunferência que passa em todos os vértices do polígono e que contém o polígono em seu interior.

Circunferência inscrita: Em um polígono regular com n lados, podemos colocar uma circunferência inscrita (por dentro), isto é, uma circunferência que passa tangenciando todos os lados do polígono e que está contida no polígono.

Elementos de um polígono regular

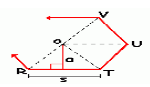
1. Centro do polígono é o centro comum às circunferências inscrita e circunscrita.
2. Raio da circunferência circunscrita é a distância do centro do polígono até um dos vértices.
3. Raio da circunferência inscrita é o apótema do polígono, isto é, a distância do centro do polígono ao ponto médio de um dos lados.
4. Ângulo central é o ângulo cujo vértice é o centro do polígono e cujos lados contém vértices consecutivos do polígono.

<table>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Apótema: OM,
Raios: OA,OF
Ângulo central: AOF</td><td>Apótema: OX,
Raios: OR,OT
Ângulo central: ROT</td></tr>
</table>

5. Medida do ângulo central de um polígono com n lados é dada por 360/n graus. Por exemplo, o ângulo central de um hexágono regular mede 60 graus e o ângulo central de um pentágono regular mede 360/5=72 graus.

Áreas de polígonos regulares

Traçando segmentos de reta ligando o centro do polígono regular a cada um dos vértices desse polígono de n-lados, iremos decompor este polígono em n triângulos congruentes.



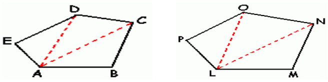
Assim, a fórmula para o cálculo da área da região poligonal regular será dada pela metade do produto da medida do apótema a pelo perímetro P, isto é:

A = a × Perímetro / 2

Demonstração da fórmula

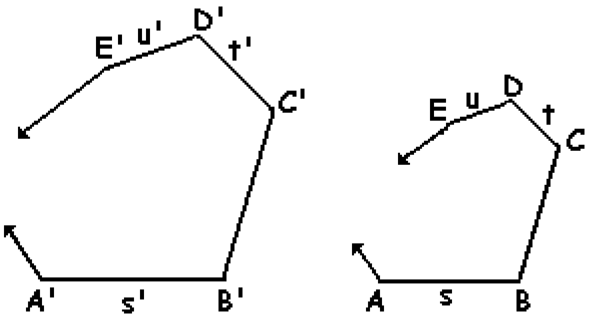
Comparando áreas entre polígonos semelhantes

Apresentamos abaixo dois pentágonos irregulares semelhantes. Dos vértices correspondentes A e L traçamos diagonais decompondo cada pentágono em três triângulos.



Os pares de triângulos correspondentes ABC e LMN, parecem semelhantes, o que pode ser verificado diretamente através da medição de seus ângulos com um transferidor. Assumiremos que tal propriedade seja válida para polígonos semelhantes com n lados.

Observação: Se dois polígonos são semelhantes, eles podem ser decompostos no mesmo número de triângulos e cada triângulo é semelhante ao triângulo que ocupa a posição correspondente no outro polígono.



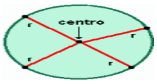
Este fato e o teorema sobre razão entre áreas de triângulos semelhantes são usados para demonstrar o seguinte teorema sobre áreas de polígonos semelhantes.

Teorema: A razão entre áreas de dois polígonos semelhantes é igual ao quadrado da razão entre os comprimentos de quaisquer dois lados correspondentes.

$$\frac{\text{Área de ABCDE...}}{\text{Área de A'B'C'D'E'...}} = \frac{s^2}{(s')^2} = \frac{t^2}{(t')^2}$$

Circunferência e Círculo

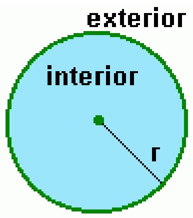
Circunferência: A circunferência é o lugar geométrico de todos os pontos de um plano que estão localizados a uma mesma distância r de um ponto fixo denominado o centro da circunferência. Esta talvez seja a curva mais importante no contexto das aplicações.



Círculo: (ou disco) é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja distância a um ponto fixo O é menor ou igual que uma distância r dada. Quando a distância é nula, o círculo se reduz a um ponto. O círculo é a reunião da circunferência com o conjunto de pontos localizados dentro da mesma. No gráfico acima, a circunferência é a linha de cor verde-escuro que envolve a região verde, enquanto o círculo é toda a região pintada de verde reunida com a circunferência.

Pontos interiores de um círculo e exteriores a um círculo

Pontos interiores: Os pontos interiores de um círculo são os pontos do círculo que não estão na circunferência.



Pontos exteriores: Os pontos exteriores a um círculo são os pontos localizados fora do círculo.

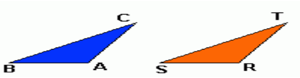
Congruências

A idéia de congruência: Duas figuras planas são congruentes quando têm a mesma forma e as mesmas dimensões, isto é, o mesmo tamanho.

Para escrever que dois triângulos ABC e DEF são congruentes, usaremos a notação:

ABC ~ DEF

Para os triângulos das figuras abaixo:



existe a congruência entre os lados, tal que:

AB ~ RS, BC ~ ST, CA ~ TR

e entre os ângulos:

A ~ R , B ~ S , C ~ T

Se o triângulo ABC é congruente ao triângulo RST, escrevemos:

ABC ~ RST

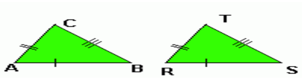
Dois triângulos são congruentes, se os seus elementos correspondentes são ordenadamente congruentes, isto é, os três lados e os três ângulos de cada triângulo têm respectivamente as mesmas medidas.

Para verificar se um triângulo é congruente a outro, não é necessário saber a medida de todos os seis elementos, basta conhecer três elementos, entre os quais esteja presente pelo menos um lado. Para facilitar o estudo, indicaremos os lados correspondentes congruentes marcados com símbolos gráficos iguais.

Casos de Congruência de Triângulos

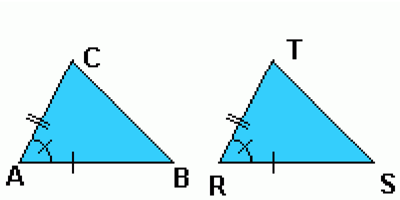
1. LLL (Lado, Lado, Lado): Os três lados são conhecidos.

   Dois triângulos são congruentes quando têm, respectivamente, os três lados congruentes. Observe que os elementos congruentes têm a mesma marca.

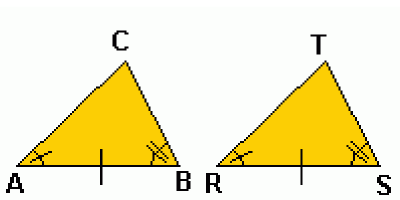
2. LAL (Lado, Ângulo, Lado): Dados dois lados e um ângulo

   Dois triângulos são congruentes quando têm dois lados congruentes e os ângulos formados por eles também são congruentes.

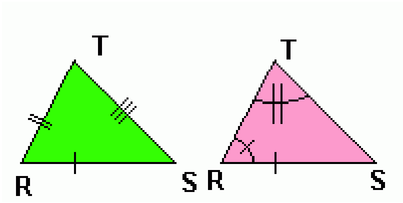
3. ALA (Ângulo, Lado, Ângulo): Dados dois ângulos e um lado

   Dois triângulos são congruentes quando têm um lado e dois ângulos adjacentes a esse lado, respectivamente, congruentes.

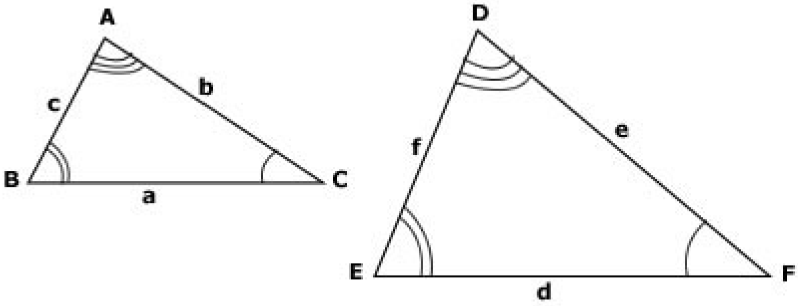
4. LAAo (Lado, Ângulo, Ângulo oposto): Conhecido um lado, um ângulo e um ângulo oposto ao lado.

   Dois triângulos são congruentes quando têm um lado, um ângulo, um ângulo adjacente e um ângulo oposto a esse lado respectivamente congruentes.



Definição de Semelhança entre Triângulos

Dizemos que dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem seus três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos (homo = mesmo, logos = lugar) proporcionais.



Traduzindo a definição em símbolos:

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} m(\angle ABC) = m(\angle DEF) \ \left[\hat{A} \equiv \hat{D}\right] \\ m(\angle BAC) = m(\angle EDF) \ \left[\hat{B} \equiv \hat{E}\right] \\ m(\angle CAB) = m(\angle FDE) \ \left[\hat{C} \equiv \hat{F}\right] \\ \qquad\qquad e \\ \dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{e} = \dfrac{c}{f} \end{array} \right)$$

onde:

$\Delta ABC \Rightarrow$ indica o triângulo ABC

$\sim \ \Rightarrow$ sinal de semelhança

$m(\angle ABC) \Rightarrow$ medida do ângulo com vértice em A

$\hat{A} \Rightarrow$ ângulo A

$\equiv \ \Rightarrow$ sinal de congruência

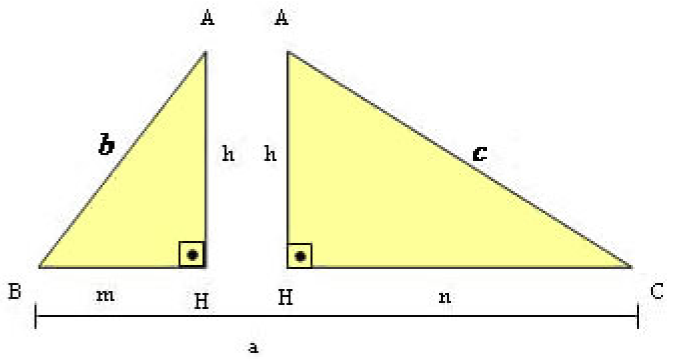
Observe que as três primeiras expressões entre os parêntesis indicam a congruência ordenada dos ângulos e a última a proporcionalidade dos lados homólogos.

Em bom português, podemos, ainda, definir a semelhança entre triângulos através da frase: dois triângulos são semelhantes se um pode ser obtido pela expansão uniforme do outro.

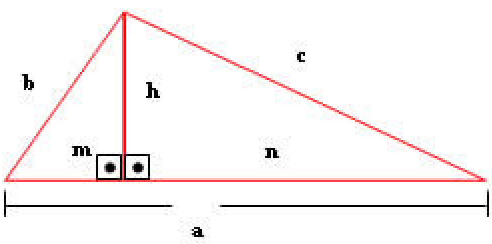
Relações Métricas

Relações métricas no triângulo retângulo

Observe os triângulos:



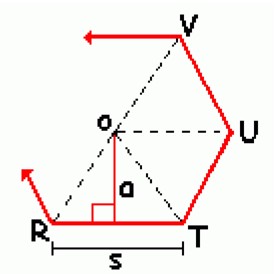
Os triângulos AHB e AHC são semelhantes, então podemos estabelecer algumas relações métricas importantes:



$h^2 = mn$ $b^2 = na$ $c^2 = am$ $bc = ah$

Áreas de polígonos regulares

Traçando segmentos de reta ligando o centro do polígono regular a cada um dos vértices desse polígono de n-lados, iremos decompor este polígono em n triângulos congruentes.



Assim, a fórmula para o cálculo da área da região poligonal regular será dada pela metade do produto da medida do apótema a pelo perímetro P, isto é:

A = a × Perímetro / 2

Área do círculo

Área de um círculo de raio r é o limite das áreas das regiões poligonais regulares inscritas no mesmo. Nesse caso, o diâmetro D=2r. As fórmulas para a área do círculo são:

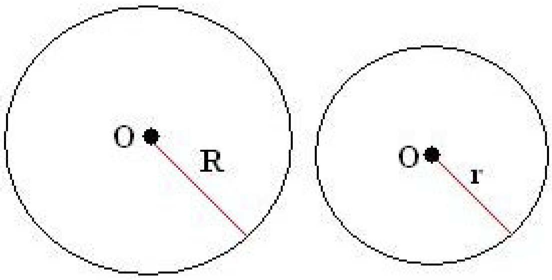
Área = $\pi r^2 = \frac{1}{4} \pi D^2$

Proporção com áreas: Sejam dois círculos de raios, respectivamente, iguais a r1 e r2, áreas A1 e A2 e diâmetros D1 e D2. A razão entre as áreas desses dois círculos é a mesma que a razão entre os quadrados de seus raios ou os quadrados de seus diâmetros.

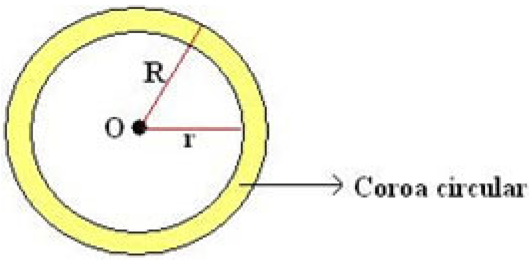
$$\frac{A1}{A2} = \frac{(D1)^2}{(D2)^2} = \frac{(r1)^2}{(r2)^2}$$

Área da Coroa

Quando duas ou mais circunferências possuem o mesmo centro, são denominadas concêntricas. Nesse caso elas podem ter raio de tamanhos diferentes. Observe:



Ao unirmos duas circunferências de mesmo centro com raios R e r, considerando R > r, temos que a diferença entre as áreas é denominada coroa circular. Observe:



A área da coroa circular representada pode ser calculada através da diferença entre as áreas totais das duas circunferências, isto é, área do círculo maior menos a área do círculo menor.

Área da coroa = Área do círculo maior – Área do círculo menor

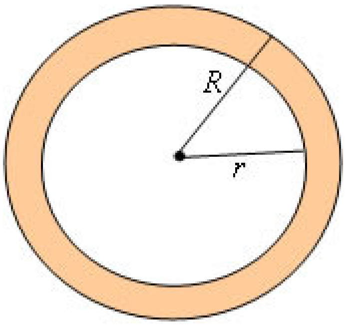
Área da coroa = $(\pi * R^2) - (\pi * r^2)$

Área da coroa = $\pi * (R^2 - r^2)$

Observação: Os resultados podem ser dados em função de π, caso seja necessário substitua π por seu valor aproximado, 3,14.

Exemplo 1

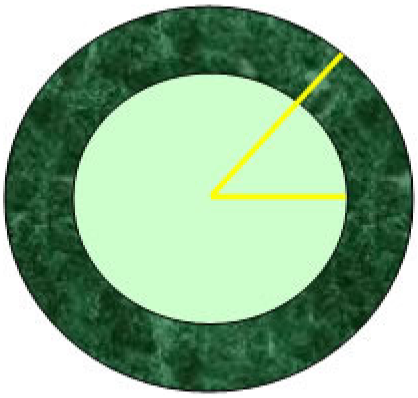
Determine a área da coroa circular da figura a seguir, considerando o raio da circunferência maior igual a 10 metros e raio da circunferência menor igual a 8 metros.



$A = \pi * (R^2 - r^2)$
$A = \pi * (10^2 - 8^2)$
$A = \pi * (100 - 64)$
$A = \pi * 36$
$A = 36\pi\ m^2$
ou
$A = 36 * 3{,}14$
$A = 113{,}04\ m^2$

Exemplo 2

Um cavalo está amarrado em uma árvore através de uma corda de 20 metros de comprimento. A área total da pastagem possui raio de 50 metros de comprimento. Considerando a área de pastagem máxima do cavalo, determine a área não utilizada na alimentação do cavalo.



$A = \pi * (50^2 - 20^2)$
$A = \pi * (2500 - 400)$

$A = \pi * (2100)$
$A = \pi * 2100$
$A = 2100\pi\ m^2$
ou
$A = 2100 * 3,14$
$A = 6594\ cm^2$

Área do setor circular

A área total de um círculo é proporcional ao tamanho do raio e pode ser calculada pela expressão $\pi * r^2$, na qual π equivale a 3,14 e r é a medida do raio do círculo. O círculo pode ser dividido em infinitas partes, as quais recebem o nome de arcos (partes de um círculo). Os arcos de uma região circular são determinados de acordo com a medida do ângulo central, e é com base nessa informação que calcularemos a área de um segmento circular.

Uma volta completa no círculo corresponde a 360º, valor que podemos associar à expressão do cálculo da área do círculo, $\pi * r^2$. Partindo dessa associação podemos determinar a área de qualquer arco com a medida do raio e do ângulo central, através de uma simples regra de três. Observe:

360º ------------- $\pi * r^2$
θº ------------------ x

onde:
$\pi = 3,14$
r = raio do círculo
θº = medida do ângulo central
x = área do arco

Exemplo 1

Determine a área de um segmento circular com ângulo central de 32º e raio medindo 2 m.
Resolução:

360º ------------- $\pi * r^2$
32º ------------------ x

$360x = 32 * \pi * r^2$
$x = 32 * \pi * r^2 / 360$
$x = 32 * 3,14 * 2^2 / 360$
$x = 32 * 3,14 * 4 / 360$
$x = 401,92 / 360$
$x = 1,12$

A área do segmento circular possui aproximadamente 1,12 m².

Exemplo 2

Qual a área de um setor circular com ângulo central medindo 120º e comprimento do raio igual a 12 metros.

360º ------------- $\pi * r^2$
120º ------------------ x

$360x = 120 * \pi * r^2$
$x = 120 * \pi * r^2 / 360$
$x = 120 * 3,14 * 12^2 / 360$
$x = 120 * 3,14 * 144 / 360$
$x = 54259,2 / 360$
$x = 150,7$

A área do setor circular citado corresponde, aproximadamente, a 150,7 m².

GEOMETRIA ESPACIAL

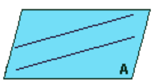
Retas e planos no espaço. Paralelismo e perpendicularismo

Planos e retas

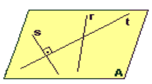
Um plano é um subconjunto do espaço R3 de tal modo que quaisquer dois pontos desse conjunto, podem ser ligados por um segmento de reta inteiramente contido no conjunto.

Duas retas (segmentos de reta) no espaço R3 podem ser: paralelas, concorrentes ou reversas.

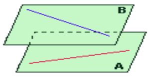
Retas paralelas: Duas retas são paralelas se elas não possuem interseção e estão em um mesmo plano.



Retas concorrentes: Duas retas são concorrentes se elas têm um ponto em comum. As retas perpendiculares são retas concorrentes que formam entre si um ângulo reto.



Retas reversas: Duas retas são ditas reversas quando uma não tem interseção com a outra e elas não são paralelas. Isto significa que elas estão em planos diferentes. Pode-se pensar de uma reta r desenhada no chão de uma casa e uma reta s, não paralela a r, desenhada no teto dessa mesma casa.



Posições de pontos, retas e planos

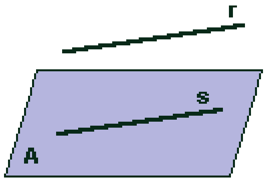
Um plano no espaço R3 pode ser determinado por qualquer uma das situações:

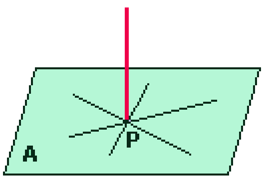
1. Três pontos não colineares (não pertencentes à mesma reta).
2. Um ponto e uma reta ou um segmento de reta que não contém o ponto.
3. Um ponto e um segmento de reta que não contém o ponto.
4. Duas retas paralelas que não se sobrepõe.
5. Dois segmentos de reta paralelos que não se sobrepõe.
6. Duas retas concorrentes.
7. Dois segmentos de reta concorrentes.

Posições de retas e planos

Há duas relações importantes, relacionando uma reta e um plano no espaço R3.

Reta paralela a um plano: Uma reta r é paralela a um plano no espaço R3, se existe uma reta s inteiramente contida no plano que é paralela à reta dada.





Reta perpendicular a um plano: Uma reta é perpendicular a um plano no espaço R3, se ela intersecta o plano em um ponto P e todo segmento de reta contido no plano que tem P como uma de suas extremidades é perpendicular à reta.

Ângulos diedros e ângulos poliédricos.

Ângulo diedro ou diedro ou ângulo diédrico é a reunião de dois semiplanos de mesma origem, não contidos num mesmo plano.

A origem comum dos semiplanos é a aresta do diedro e os dois semiplanos são suas faces.

Podemos estender a definição acima para termos o diedro nulo, quando suas faces são coincidentes e raso se suas faces são semiplanos opostos.

Características

O interior de um diedro é convexo.

Os pontos do interior de um diedro são pontos internos ao diedro.

A reunião de um diedro com se interior é um setor diedral ou diedro completo, também conhecido por diedro convexo.

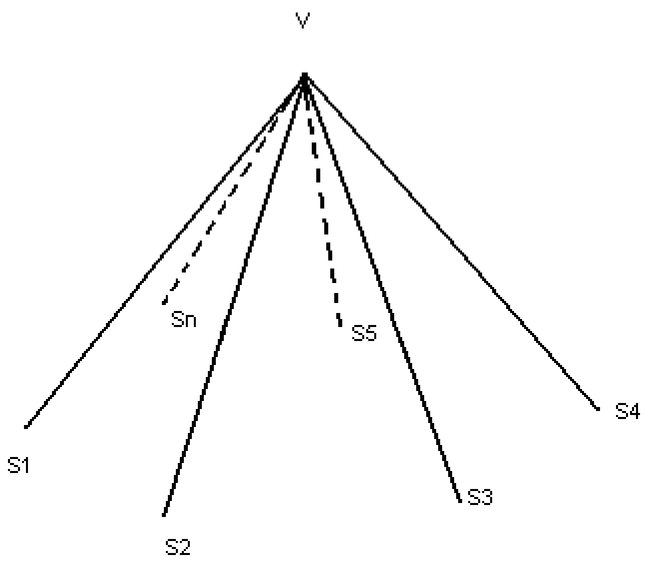
O exterior de um diedro é côncavo.

Os pontos do exterior de um diedro são os pontos externos ao diedro.

A reunião de um diedro com seu exterior é também conhecida por diedro côncavo

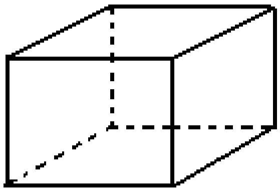
Ângulo poliédrico

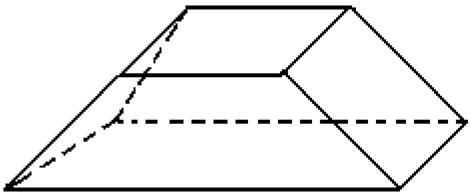
Sejam n $n \geq 3$ semi-retas de mesma origem tais que nunca fiquem três num mesmo semiplano. Essas semi-retas determinam n ângulos em que o plano de cada um deixa as outras semi-retas em um mesmo semi-espaço. A figura formada por esses ângulos é o ângulo poliédrico.

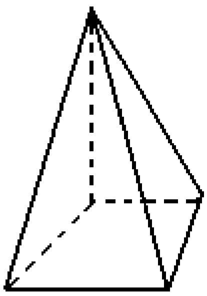


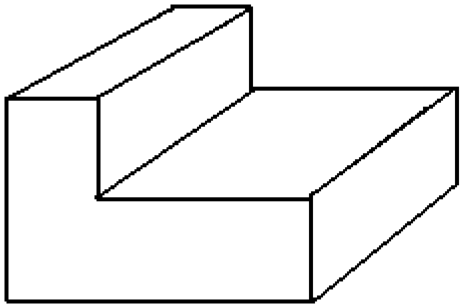
Poliedros: poliedros regulares

Chamamos de poliedro o sólido limitado por quatro ou mais polígonos planos, pertencentes a planos diferentes e que têm dois a dois somente uma aresta em comum. Veja alguns exemplos:







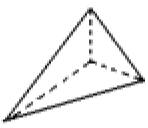
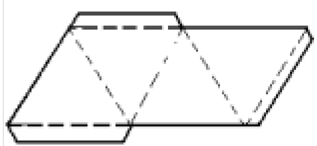
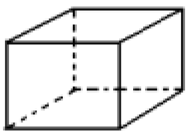
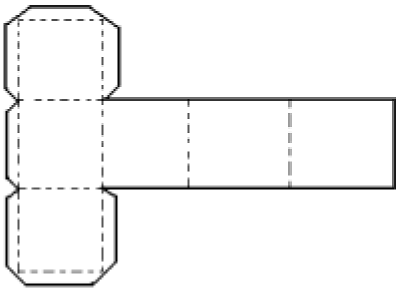


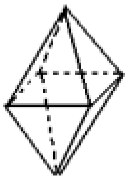
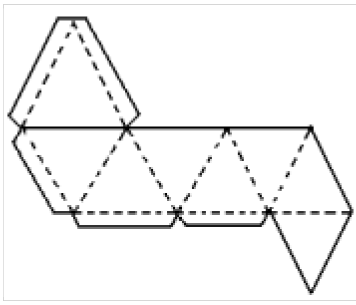
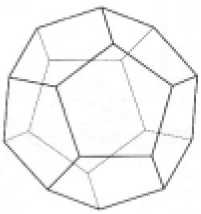
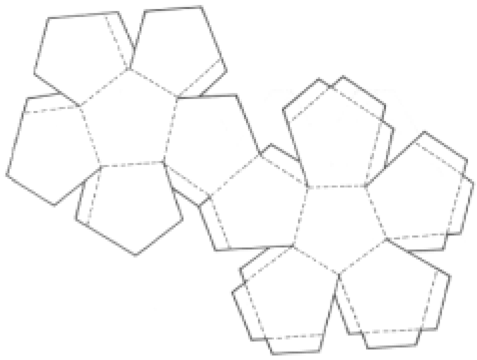
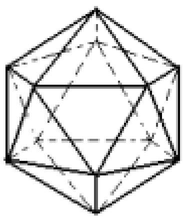
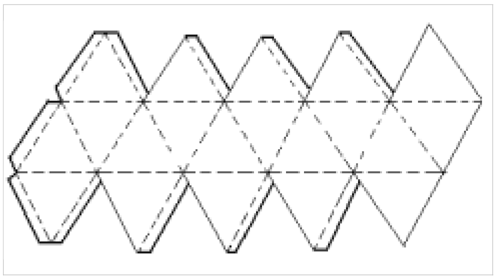
Os polígonos são as faces do poliedro; os lados e os vértices dos polígonos são as arestas e os vértices do poliedro.

Poliedros regulares

Um poliedro convexo é chamado de regular se suas faces são polígonos regulares, cada um com o mesmo número de lados e, para todo vértice, converge um mesmo número de arestas.

Existem cinco poliedros regulares:

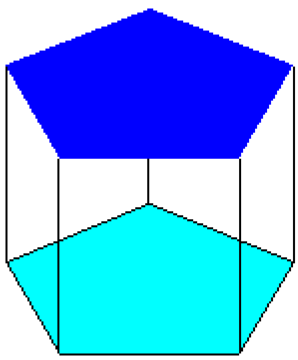
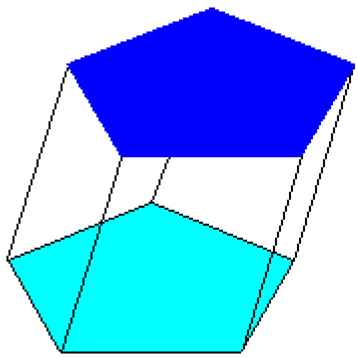
Poliedro	Planificação	Elementos
 Tetraedro		4 faces triangulares 4 vértices 6 arestas
 Hexaedro		6 faces quadrangulares 8 vértices 12 arestas

 Octaedro		8 faces triangulares 6 vértices 12 arestas
 Dodecaedro		12 faces pentagonais 20 vértices 30 arestas
 Icosaedro		20 faces triangulares 12 vértices 30 arestas

Prismas, pirâmides e respectivos troncos. Cálculo de áreas e volumes

Prisma

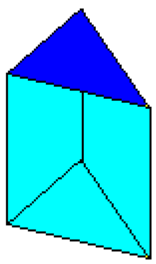
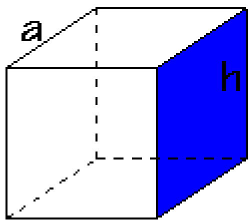
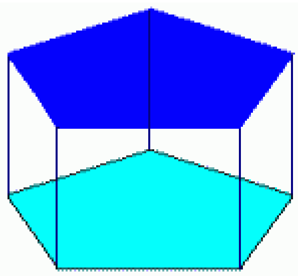
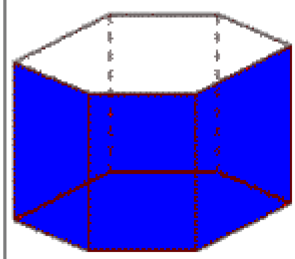
Prisma é um sólido geométrico delimitado por faces planas, no qual as bases se situam em planos paralelos. Quanto à inclinação das arestas laterais, os prismas podem ser retos ou oblíquos.

Prisma reto	Aspectos comuns	Prisma oblíquo
	Bases são regiões poligonais congruentes	
	A altura é a distância entre as bases	
	Arestas laterais são paralelas com as mesmas medidas	

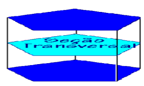
	Faces laterais são paralelogramos	

Objeto	Prisma reto	Prisma oblíquo
Arestas laterais	têm a mesma medida	têm a mesma medida
Arestas laterais	são perpendiculares ao plano da base	são oblíquas ao plano da base
Faces laterais	são retangulares	não são retangulares

Quanto à base, os prismas mais comuns estão mostrados na tabela:

Prisma triangular	Prisma quadrangular	Prisma pentagonal	Prisma hexagonal
			
Base:Triângulo	Base:Quadrado	Base:Pentágono	Base:Hexágono

Seções de um prisma



Seção transversal: É a região poligonal obtida pela interseção do prisma com um plano paralelo às bases, sendo que esta região poligonal é congruente a cada uma das bases.

Seção reta (seção normal): É uma seção determinada por um plano perpendicular às arestas laterais.

Princípio de Cavalieri: Consideremos um plano P sobre o qual estão apoiados dois sólidos com a mesma altura. Se todo plano paralelo ao plano dado interceptar os sólidos com seções de áreas iguais, então os volumes dos sólidos também serão iguais.

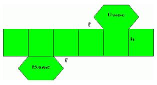
Prisma regular

É um prisma reto cujas bases são regiões poligonais regulares.

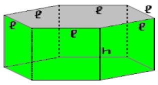
Exemplos: Um prisma triangular regular é um prisma reto cuja base é um triângulo equilátero. Um prisma quadrangular regular é um prisma reto cuja base é um quadrado.

Planificação do prisma

Um prisma é um sólido formado por todos os pontos do espaço localizados dentro dos planos que contêm as faces laterais e os planos das bases.



As faces laterais e as bases formam a envoltória deste sólido. Esta envoltória é uma "superfície" que pode ser planificada no plano cartesiano. Tal planificação se realiza como se cortássemos com uma tesoura esta envoltória exatamente sobre as arestas para obter uma região plana formada por áreas congruentes às faces laterais e às bases. A planificação é útil para facilitar os cálculos das áreas lateral e total.



Volume de um prisma

O volume de um prisma é dado por:

V(prisma) = A(base).h

Área lateral do prisma reto com base poligonal regular

A área lateral de um prisma reto que tem por base uma região poligonal regular de n lados é dada pela soma das áreas das faces laterais. Como neste caso todas as áreas das faces laterais são iguais, basta tomar a área lateral como:

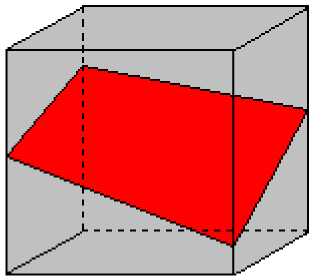
A(lateral) = n A(Face Lateral)

Uma forma alternativa para obter a área lateral de um prisma reto tendo como base um polígono regular de n lados é tomar P como o perímetro desse polígono e h como a altura do prisma.

A(lateral) = P.h

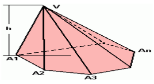
Tronco de prisma

Quando seccionamos um prisma por um plano não paralelo aos planos das bases, a região espacial localizada dentro do prisma, acima da base inferior e abaixo do plano seccionante é denominado tronco de prisma. Para calcular o volume do tronco de prisma, multiplicamos a média aritmética das arestas laterais do tronco de prisma pela área da base.



Pirâmide

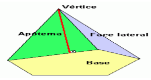
Consideremos um polígono contido em um plano (por exemplo, o plano horizontal) e um ponto V localizado fora desse plano. Uma Pirâmide é a reunião de todos os segmentos que têm uma extremidade em P e a outra num ponto qualquer do polígono. O ponto V recebe o nome de vértice da pirâmide.



Exemplo: As pirâmides do Egito, eram utilizadas para sepultar faraós, bem como as pirâmides no México e nos Andes, que serviam a finalidades de adoração aos seus deuses. As formas piramidais eram usadas por tribos indígenas e mais recentemente por escoteiros para construir barracas.

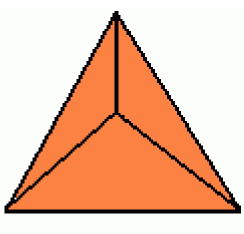
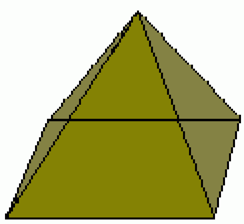
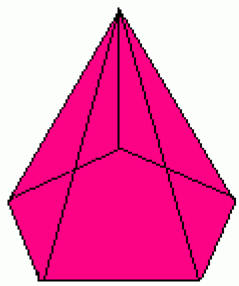
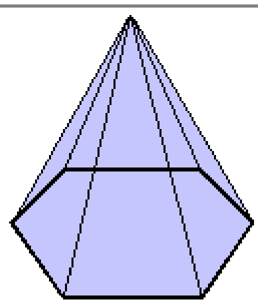
Elementos de uma pirâmide

Em uma pirâmide, podemos identificar vários elementos:



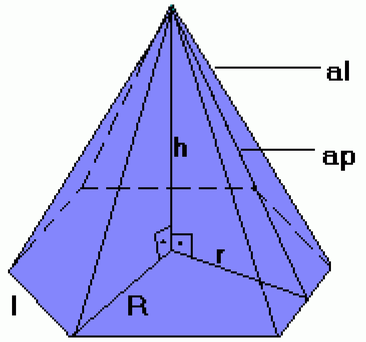
1. Base: A base da pirâmide é a região plana poligonal sobre a qual se apoia a pirâmide.
2. Vértice: O vértice da pirâmide é o ponto isolado P mais distante da base da pirâmide.
3. Eixo: Quando a base possui um ponto central, isto é, quando a região poligonal é simétrica ou regular, o eixo da pirâmide é a reta que passa pelo vértice e pelo centro da base.
4. Altura: Distância do vértice da pirâmide ao plano da base.
5. Faces laterais: São regiões planas triangulares que passam pelo vértice da pirâmide e por dois vértices consecutivos da base.
6. Arestas Laterais: São segmentos que têm um extremo no vértice da pirâmide e outro extremo num vértice do polígono situado no plano da base.
7. Apótema: É a altura de cada face lateral.
8. Superfície Lateral: É a superfície poliédrica formada por todas as faces laterais.
9. Aresta da base: É qualquer um dos lados do polígono da base.

Classificação das pirâmides pelo número de lados da base

triangular	quadrangular	pentagonal	hexagonal
			
base:triângulo	base:quadrado	base:pentágono	base:hexágono

Pirâmide Regular reta

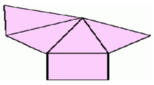
Pirâmide regular reta é aquela que tem uma base poligonal regular e a projeção ortogonal do vértice V sobre o plano da base coincide com o centro da base.

<table>
<tr><td rowspan="6">
</td><td>R</td><td>raio do circulo circunscrito</td></tr>
<tr><td>r</td><td>raio do círculo inscrito</td></tr>
<tr><td>l</td><td>aresta da base</td></tr>
<tr><td>ap</td><td>apótema de uma face lateral</td></tr>
<tr><td>h</td><td>altura da pirâmide</td></tr>
<tr><td>al</td><td>aresta lateral</td></tr>
<tr><td colspan="3">As faces laterais são triângulos isósceles congruentes</td></tr>
</table>

Área Lateral de uma pirâmide

Às vezes podemos construir fórmulas para obter as áreas das superfícies que envolvem um determinado sólido. Tal processo é conhecido como a planificação desse sólido. Isto pode ser realizado se tomarmos o sólido de forma que a sua superfície externa seja feita de papelão ou algum outro material.

No caso da pirâmide, a idéia é tomar uma tesoura e cortar (o papelão d)a pirâmide exatamente sobre as arestas, depois reunimos as regiões obtidas num plano que pode ser o plano de uma mesa.



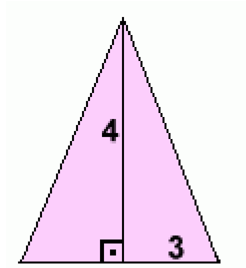
As regiões planas obtidas são congruentes às faces laterais e também à base da pirâmide.

Se considerarmos uma pirâmide regular cuja base tem n lados e indicarmos por A(face) a área de uma face lateral da pirâmide, então a soma das áreas das faces laterais recebe o nome de área lateral da pirâmide e pode ser obtida por:

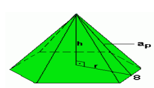
A(lateral) = n A(face)

Exemplo: Seja a pirâmide quadrangular regular que está planificada na figura acima, cuja aresta da base mede 6cm e cujo apótema mede 4cm.

Como A(lateral)=n.A(face) e como a pirâmide é quadrangular temos n=4 triângulos isósceles, a área da face lateral é igual à área de um dos triângulos, assim:

<table>
<tr><td>A(face) = b h/2 = 6.4/2 = 12
A(lateral) = 4.12 = 48 cm²</td><td>
</td></tr>
</table>

Exemplo: A aresta da base de uma pirâmide hexagonal regular mede 8 cm e a altura 10 cm. Calcular a área lateral.



Tomaremos a aresta com $a=8$ cm e a altura com $h=10$ cm. Primeiro vamos calcular a medida do apótema da face lateral da pirâmide hexagonal. Calcularemos o raio r da base.
Como a base é um hexágono regular temos que $r=(a/2)R[3]$, assim $r=8R[3]/2=4R[3]$ e pela relação de Pitágoras, segue que $(ap)^2=r^2+h^2$, logo:

$(ap)^2= (4R[3])^2+10^2 = 48+100 = 148 = 4\cdot 37 = 2R[37]$

A área da face e a área lateral, são dadas por:

$A(face) = 8.2[37]/2 = 8.R[37]$
$A(lateral) = n.A(face) = 6.8.R[37] = 48.R[37]$

Área total de uma Pirâmide

A área total de uma pirâmide é a soma da área da base com a área lateral, isto é:

$A(total) = A(lateral) + A(base)$

Exemplo: As faces laterais de uma pirâmide quadrangular regular formam ângulos de 60 graus com a base e têm as arestas da base medindo 18 cm. Qual é a área total?

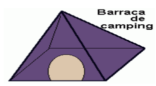
Já vimos que $A(lateral)=n.A(face)$ e como $\cos(60^o)=(lado/2)/a$, então $1/2=9/a$ donde segue que $a=18$, assim:

$A(face) = b.h/2 = (18.18)/2 = 162$
$A(lateral) = 4.162 = 648$
$A(base) = 18^2 = 324$

Concluímos que:

$A(total) = A(lateral) + A(base) = 648+324 = 970$

Exemplo: Um grupo de escoteiros quer obter a área total de suas barracas, as quais têm forma piramidal quadrangular. Para isso, eles usam medidas escoteiras. Cada dois passos de um escoteiro mede 1 metro. A barraca tem 4 passos escoteiros de lado da base e 2 passos de apótema. Calcular a área da base, área lateral e a área total.



$A(base) = 2.2 = 4\ m^2$
$A(lateral) = 4.2.1 = 8\ m^3$

Logo, a área total da barraca é

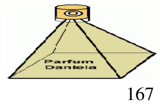
$A(total) = A(lateral) + A(base) = 8+4 = 12\ m^2$

Volume de uma Pirâmide

O volume de uma pirâmide pode ser obtido como um terço do produto da área da base pela altura da pirâmide, isto é:

$Volume = (1/3)\ A(base)\ h$

Exemplo: Juliana tem um perfume contido em um frasco com a forma de uma pirâmide



regular com base quadrada. A curiosa Juliana quer saber o volume de perfume que o frasco contém. Para isso ela usou uma régua e tirou duas informações: a medida da aresta da base de 4cm e a medida da aresta lateral de 6cm.
Como V(pirâmide)=A(base).h/3, devemos calcular a área da base e a medida da altura. Como a base tem forma quadrada de lado a=4cm, temos que A(base)=a^2=4cm.4cm=16 cm^2.

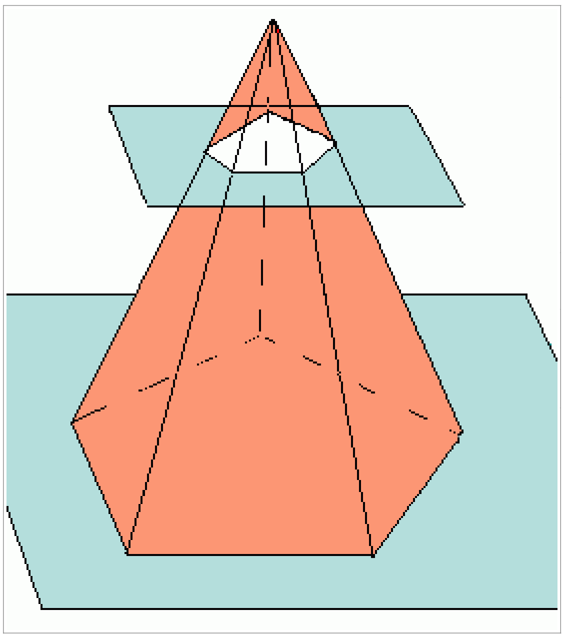
A altura h da pirâmide pode ser obtida como a medida de um cateto de um triângulo retângulo cuja hipotenusa é dada pela altura L=6cm da aresta lateral e o outro cateto Q=2×R[2] que é a metade da medida da diagonal do quadrado. Dessa forma $h^2=L^2-Q^2$, se onde segue que h^2=36-8=28 e assim temos que h=2R[7] e o volume será dado por V=(1/3).16.2R[7]=(32/3)R[7].

Seção Transversal de uma pirâmide

Seção transversal de uma pirâmide é a interseção da pirâmide com um plano paralelo à base da mesma. A seção transversal tem a mesma forma que a base, isto é, as suas arestas correspondentes são proporcionais. A razão entre uma aresta da seção transversal e uma aresta correspondente da base é dita razão de semelhança.

Observações sobre seções transversais:

1. Em uma pirâmide qualquer, a seção transversal e a base são regiões poligonais semelhantes. A razão entre a área da seção transversal e a área da base é igual ao quadrado da razão de semelhança.
2. Ao seccionar uma pirâmide por um plano paralelo à base, obtemos outra pirâmide menor (acima do plano) semelhante em todos os aspectos à pirâmide original.
3. Se duas pirâmides têm a mesma altura e as áreas das bases são iguais, então as seções transversais localizadas à mesma distância do vértice têm áreas iguais.



V(seção)	Volume da seção até o vértice (volume da pirâmide menor)
V(piram)	Volume da pirâmide (maior)
A(seção)	Área da seção transversal (base da pirâmide menor)
A(base)	Área da base da pirâmide (maior)
h	Distância do vértice à seção (altura da pirâmide menor)
H	Altura da pirâmide (maior)

Assim:

$$\frac{V(\text{seção})}{V(\text{base})} = \frac{A(\text{seção})}{A(\text{piram})} \cdot \frac{h}{H}$$

$$\frac{A(\text{seção})}{A(\text{base})} = \frac{h^2}{H^2}$$

Então:

$$\boxed{\frac{V(\text{seção})}{V(\text{base})} = \frac{h^3}{H^3}}$$

Exemplo: Uma pirâmide tem a altura medindo 9cm e volume igual a $108cm^3$. Qual é o volume do tronco desta pirâmide, obtido pelo corte desta pirâmide por um plano paralelo à base da mesma, sabendo-se que a altura do tronco da pirâmide é 3cm?

Como

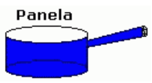
$V(pirMenor)/V(pirâmide) = h^3/H^3$
$V(pirMenor)/108 = 6^3/9^3$
$V(pirMenor) = 32$
então

$V(tronco)=V(pirâmide)-V(pirMenor)= 108cm^3-2cm^3 = 76\ cm^3$

Cilindro, cone e esfera: cálculo de áreas e volumes

Cilindros

O conceito de cilindro é muito importante. Nas cozinhas encontramos aplicações intensas do uso de cilindros. Nas construções, observamos caixas d'água, ferramentas, objetos, vasos de plantas, todos eles com formas cilíndricas.

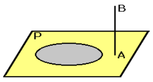


Existem outras formas cilíndricas diferentes das comuns, como por exemplo o cilindro sinuzoidal obtido pela translação da função seno.

Aplicações práticas: Os cilindros abaixo sugerem alguma aplicação importante em sua vida?

A Construção de cilindros

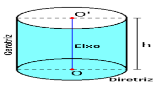
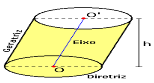
Seja P um plano e nele vamos construir um círculo de raio r e tomemos também um segmento de reta AB que não seja paralelo ao plano P e nem esteja contido neste plano P. Um cilindro circular é a reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos a AB com uma extremidade no círculo.



Observamos que um cilindro é uma superfície no espaço R^3, mas muitas vezes vale a pena considerar o cilindro como a região sólida contida dentro do cilindro. Quando nos referirmos ao cilindro como um sólido usaremos aspas, isto é, "cilindro" e quando for à superfície, simplesmente escreveremos cilindro.

A reta que contém o segmento AB é denominada geratriz e a curva que fica no plano do "chão" é a diretriz.

Em função da inclinação do segmento AB em relação ao plano do "chão", o cilindro será chamado reto ou oblíquo, respectivamente, se o segmento AB for perpendicular ou oblíquo ao plano que contém a curva diretriz.

Objetos geométricos em um "cilindro"

Em um cilindro, podemos identificar vários elementos:

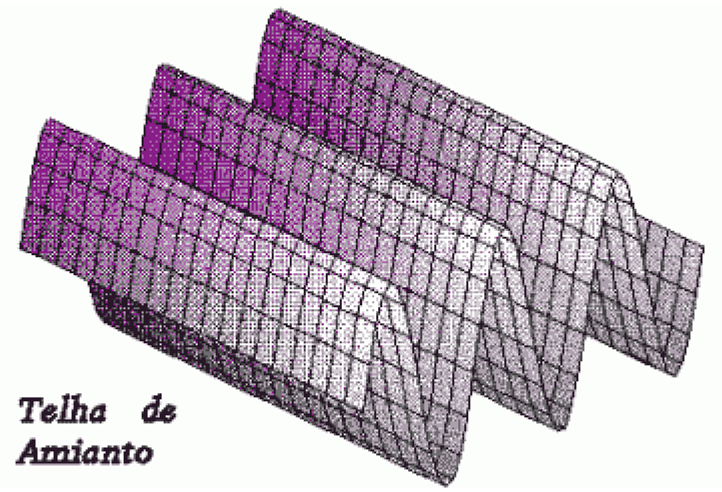
1. Base: É a região plana contendo a curva diretriz e todo o seu interior. Num cilindro existem duas bases.
2. Eixo: É o segmento de reta que liga os centros das bases do "cilindro".
3. Altura: A altura de um cilindro é a distância entre os dois planos paralelos que contêm as bases do "cilindro".
4. Superfície Lateral: É o conjunto de todos os pontos do espaço, que não estejam nas bases, obtidos pelo deslocamento paralelo da geratriz sempre apoiada sobre a curva diretriz.
5. Superfície Total: É o conjunto de todos os pontos da superfície lateral reunido com os pontos das bases do cilindro.
6. Área lateral: É a medida da superfície lateral do cilindro.
7. Área total: É a medida da superfície total do cilindro.
8. Seção meridiana de um cilindro: É uma região poligonal obtida pela interseção de um plano vertical que passa pelo centro do cilindro com o cilindro.

Extensão do conceito de cilindro

As características apresentadas antes para cilindros circulares, são também possíveis para outros tipos de curvas diretrizes, como: elipse, parábola, hipérbole, seno ou outra curva simples e suave num plano.

Mesmo que a diretriz não seja uma curva conhecida, ainda assim existem cilindros obtidos quando a curva diretriz é formada por uma reunião de curvas simples. Por exemplo, se a diretriz é uma curva retangular, temos uma situação patológica e o cilindro recebe o nome especial de prisma.

Em função da curva diretriz, o cilindro terá o nome de cilindro: elíptico, parabólico, hiperbólico, sinuzoidal (telha de eternit).



Classificação dos cilindros circulares

1. Cilindro circular oblíquo: Apresenta as geratrizes oblíquas em relação aos planos das bases.
2. Cilindro circular reto: As geratrizes são perpendiculares aos planos das bases. Este tipo de cilindro é também chamado de cilindro de revolução, pois é gerado pela rotação de um retângulo.
3. Cilindro eqüilátero: É um cilindro de revolução cuja seção meridiana é um quadrado.

Volume de um "cilindro"

Em um cilindro, o volume é dado pelo produto da área da base pela altura.

V = A(base) h

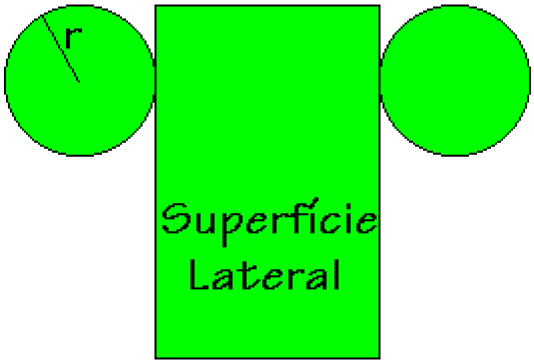
Se a base é um círculo de raio r, e pi=3,141593..., então:

V = pi r^2 h

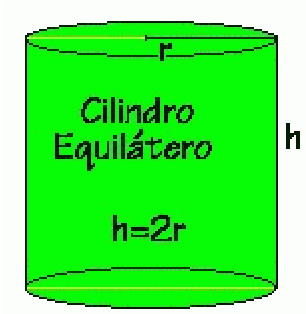
Exercício: Calcular o volume de um cilindro oblíquo com base elíptica (semi-eixos a e b) e altura h. Sugestão: Veja nesta mesma Página um material sobre a área da região elíptica.

Área lateral e área total de um cilindro circular reto

Em um cilindro circular reto, a área lateral é dada por A(lateral)=2pi.r.h, onde r é o raio da base e h é a altura do cilindro. A área total corresponde à soma da área lateral com o dobro da área da base.

A(total) = A(lateral) + 2 A(base) A(total) = 2 pi r h + 2 pi r² A(total) = 2 pi r(h+r)	

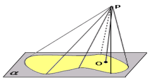
Exemplo: Um cilindro circular equilátero é aquele cuja altura é igual ao diâmetro da base, isto é h=2r. Neste caso, para calcular a área lateral, a área total e o volume, podemos usar as fórmulas, dadas por:

A(lateral) = 4 pi r^2 A(base) = pi r^2 A(total) = A(lateral) + 2 A(base) = 6 pi r^2 Volume = A(base).h = pi r^2.2r = 2 pi r^3	

Exercício: Seja um cilindro circular reto de raio igual a 2cm e altura 3cm. Calcular a área lateral, área total e o seu volume.

A(base) = pi.r^2 = pi.2^2 = 4 pi cm^2
A(lateral) = 2.pi.r.h = 2.pi.2.3 = 12 pi cm^2
A(total) = A(lateral) + 2 A(base) = 12pi + 8pi = 20 pi cm^2
Volume = A(base).h = pi.r^2h = pi.4.3 = 12 pi cm^3

Cone
Considere uma região plana limitada por uma curva suave (sem quinas), fechada e um ponto P fora desse plano.



Denominamos cone ao sólido formado pela reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade em um ponto P (vértice) e a outra num ponto qualquer da região.

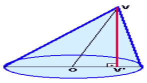
Elementos do cone

Em um cone, podem ser identificados vários elementos:

1. Vértice de um cone é o ponto P, onde concorrem todos os segmentos de reta.
2. Base de um cone é a região plana contida no interior da curva, inclusive a própria curva.
3. Eixo do cone é quando a base do cone é uma região que possui centro, o eixo é o segmento de reta que passa pelo vértice P e pelo centro da base.
4. Geratriz é qualquer segmento que tenha uma extremidade no vértice do cone e a outra na curva que envolve a base.
5. Altura é a distância do vértice do cone ao plano da base.
6. Superfície lateral de um cone é a reunião de todos os segmentos de reta que tem uma extremidade em P e a outra na curva que envolve a base.
7. Superfície do cone é a reunião da superfície lateral com a base do cone que é o círculo.
8. Seção meridiana de um cone é uma região triangular obtida pela interseção do cone com um plano que contem o eixo do mesmo.

Classificação do cone

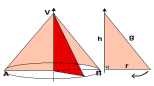
Ao observar a posição relativa do eixo em relação à base, os cones podem ser classificados como retos ou oblíquos. Um cone é dito reto quando o eixo é perpendicular ao plano da base e é oblíquo quando não é um cone reto. Ao lado apresentamos um cone oblíquo.



Observação: Para efeito de aplicações, os cones mais importantes são os cones retos. Em função das bases, os cones recebem nomes especiais. Por exemplo, um cone é dito circular se a base é um círculo e é dito elíptico se a base é uma região elíptica.

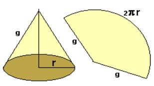
Observações sobre um cone circular reto

Um cone circular reto é denominado cone de revolução por ser obtido pela rotação (revolução) de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos



A seção meridiana do cone circular reto é a interseção do cone com um plano que contem o eixo do cone. Na figura ao lado, a seção meridiana é a região triangular limitada pelo triângulo isósceles VAB.

Em um cone circular reto, todas as geratrizes são congruentes entre si. Se g é a medida da geratriz então, pelo Teorema de Pitágoras, temos uma relação notável no cone: $g^2=h^2+r^2$, que pode ser "vista" na figura abaixo:



A Área Lateral de um cone circular reto pode ser obtida em função de g (medida da geratriz) e r (raio da base do cone):

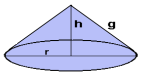
A(lateral) = pi.r.g

A Área total de um cone circular reto pode ser obtida em função de g (medida da geratriz) e r (raio da base do cone):

A(total) = pi.r.g + pi.r² = = pi.r.(g+r)

Cones Equiláteros

Um cone circular reto é um cone equilátero se a sua seção meridiana é uma região triangular equilátera e neste caso a medida da geratriz é igual à medida do diâmetro da base.



A área da base do cone é dada por:

A(base) = pi r²

Pelo Teorema de Pitágoras temos que (2r)²=h²+r², logo h²=4r²-r²=3r², assim:

h = r $\sqrt{3}$

Como o volume do cone é obtido por 1/3 do produto da área da base pela altura, então:

V = (1/3) pi $\sqrt{3}$ r3

Como a área lateral pode ser obtida por:

A(lateral) = pi.r.g = pi.r.2r = 2.pi.r²

então a área total será dada por:

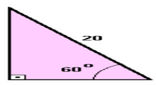
A(total) = 3 pi r²

Exercícios resolvidos

Notação: Usaremos a notação R[3] para representar a raiz quadrada de 3.

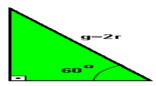
1. A geratriz de um cone circular reto mede 20 cm e forma um ângulo de 60 graus com o plano da base. Determinar a área lateral, área total e o volume do cone.

   Como sen(60o)=h/20, então

   (1/2) R[3] = h/20
   h = 10 R[3] cm
   Como V = (1/3)×(A(base).h, então:

   V = (1/3) pi.r²h
   V = (1/3) pi.10².10 R[3]
   V = (1/3) 1000.R[3].pi cm³
   Se r=10cm; g=20cm e A(lateral)=pi.r.g, escreveremos:

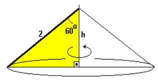
   A(lataral) = pi.r.g = pi.10.20 = 200.pi cm²

A(total) = A(lateral) + A(base)

= pi.r.g + pi.r² = pi.r.(r+g)

= pi.10.(10+20) = 300 pi cm²

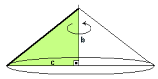
2. A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 2cm e um dos ângulos mede 60 graus. Girando-se o triângulo em torno do cateto menor, obtem-se um cone. Qual é o seu volume? Como sen(60º)=r/2, segue que:



R[3]/2 = r/2
r = R[3] cm
Substituindo os valores de g e de r, na relação g²=h²+r², obtemos

h = 1cm
V = (1/3).A(base).h = (1/3) pi.r²h
= (1/3).pi.3 = pi cm³

3. Os catetos de um triângulo retângulo medem b e c, e a sua área mede 2m². O cone obtido pela rotação do triângulo em torno do cateto b tem volume 16 pi m³. Obteremos a medida do cateto c. Como a área do triângulo mede 2m², segue que: (1/2)bc=2, o que garante que bc=4. Como a área da base é dada por A(base)=pi.r²=pi.c², temos que



V = 16 pi = (1/3) pi c² b
c = 12 m

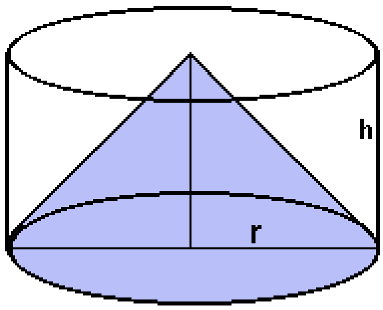
4. As áreas das bases de um cone circular reto e de um prisma quadrangular reto são iguais. O prisma tem altura 12 cm e volume igual ao dobro do volume do cone. Determinar a altura do cone.

Se

h(prisma) = 12
A(base do prisma) = A(base do cone) = A
V(prisma) = 2×V(cone)
assim:

A×h(prisma) = 2(A h)/3
A 12 = (2/3)A h
h = 18 cm

5. Anderson colocou uma casquinha de sorvete dentro de uma lata cilíndrica de mesma base, mesmo raio r e mesma altura h da casquinha. Qual é o volume do espaço (vazio) compreendido entre a lata e a casquinha de sorvete?



V = V(cilindro) - V(cone)
= A(base).h - (1/3) A(base).h
= pi.r².h - (1/3).pi.r².h
= (2/3) pi.r².h cm³

Esfera

A esfera no espaço R^3 é uma superfície muito importante em função de suas aplicações a problemas da vida. Do ponto de vista matemático, a esfera no espaço R^3 é confundida com o sólido geométrico (disco esférico) envolvido pela mesma, razão pela qual muitas pessoas calculam o volume da esfera. Na maioria dos livros elementares sobre Geometria, a esfera é tratada como se fosse um sólido, herança da Geometria Euclidiana.

Embora não seja correto, muitas vezes necessitamos falar palavras que sejam entendidas pela coletividade. De um ponto de vista mais cuidadoso, a esfera no espaço R^3 é um objeto matemático parametrizado por duas dimensões, o que significa que podemos obter medidas de área e de comprimento mas o volume tem medida nula. Há outras esferas, cada uma definida no seu respectivo espaço n-dimensional. Um caso interessante é a esfera na reta unidimensional:

So = {x em R: x^2=1} = {+1,-1}

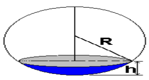
Por exemplo, a esfera

S1 = { (x,y) em R^2: $x^2 + y^2 = 1$ }

é conhecida por nós como uma circunferência de raio unitário centrada na origem do plano cartesiano.

Aplicação: volumes de líquidos

Um problema fundamental para empresas que armazenam líquidos em tanques esféricos, cilíndricos ou esféricos e cilíndricos é a necessidade de realizar cálculos de volumes de regiões esféricas a partir do conhecimento da altura do líquido colocado na mesma. Por exemplo, quando um tanque é esférico, ele possui um orifício na parte superior (polo Norte) por onde é introduzida verticalmente uma vara com indicadores de medidas. Ao retirar a vara, observa-se o nível de líquido que fica impregnado na vara e esta medida corresponde à altura de líquido contido na região esférica. Este não é um problema trivial, como observaremos pelos cálculos realizados na sequência.



A seguir apresentaremos elementos esféricos básicos e algumas fórmulas para cálculos de áreas na esfera e volumes em um sólido esférico.

A superfície esférica

A esfera no espaço R^3 é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão localizados a uma mesma distância denominada raio de um ponto fixo chamado centro.

Uma notação para a esfera com raio unitário centrada na origem de R^3 é:

S^2 = { (x,y,z) em R^3: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ }

Uma esfera de raio unitário centrada na origem de R4 é dada por:

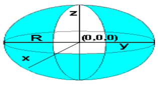
S^3 = { (w,x,y,z) em R4: $w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$ }

Você conseguiria imaginar espacialmente tal esfera?

Do ponto de vista prático, a esfera pode ser pensada como a película fina que envolve um sólido esférico.

Em uma melancia esférica, a esfera poderia ser considerada a película verde (casca) que envolve a fruta.

É comum encontrarmos na literatura básica a definição de esfera como sendo o sólido esférico, no entanto não se deve confundir estes conceitos. Se houver interesse em aprofundar os estudos desses detalhes, deve-se tomar algum bom livro de Geometria Diferencial que é a área da Matemática que trata do detalhamento de tais situações.



O disco esférico é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão localizados na casca e dentro da esfera. Do ponto de vista prático, o disco esférico pode ser pensado como a reunião da película fina que envolve o sólido esférico com a região sólida dentro da esfera. Em uma melancia esférica, o disco esférico pode ser visto como toda a fruta.

Quando indicamos o raio da esfera pela letra R e o centro da esfera pelo ponto (0,0,0), a equação da esfera é dada por:

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

e a relação matemática que define o disco esférico é o conjunto que contém a casca reunido com o interior, isto é:

$x^2 + y^2 + z^2 < R^2$

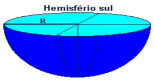
Quando indicamos o raio da esfera pela letra R e o centro da esfera pelo ponto (xo,yo,zo), a equação da esfera é dada por:

$(x-xo)^2 + (y-yo)^2 + (z-zo)^2 = R^2$

e a relação matemática que define o disco esférico é o conjunto que contém a casca reunido com o interior, isto é, o conjunto de todos os pontos (x,y,z) em R^3 tal que:

$(x-xo)^2 + (y-yo)^2 + (z-zo)^2 < R^2$

Da forma como está definida, a esfera centrada na origem pode ser construída no espaço euclidiano R^3 de modo que o centro da mesma venha a coincidir com a origem do sistema cartesiano R^3, logo podemos fazer passar os eixos OX, OY e OZ, pelo ponto (0,0,0).



Seccionando a esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$ com o plano z=0, obteremos duas superfícies semelhantes: o hemisfério Norte ("boca para baixo") que é o conjunto de todos os pontos da esfera onde a cota z é não negativa e o hemisfério Sul ("boca para cima") que é o conjunto de todos os pontos da esfera onde a cota z não é positiva.

Se seccionarmos a esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$ por um plano vertical que passa em (0,0,0), por exemplo, o plano x=0, teremos uma circunferência maximal C da esfera que é uma circunferência contida na esfera cuja medida do raio coincide com a medida do raio da esfera, construída no plano YZ e a equação desta circunferência será:

$x=0, y^2 + z^2 = R2$

sendo que esta circunferência intersecta o eixo OZ nos pontos de coordenadas (0,0,R) e (0,0,-R). Existem infinitas circunferências maximais em uma esfera.

Se rodarmos esta circunferência maximal C em torno do eixo OZ, obteremos a esfera através da rotação e por este motivo, a esfera é uma superfície de revolução.

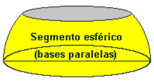
Se tomarmos um arco contido na circunferência maximal cujas extremidades são os pontos (0,0,R) e (0,p,q) tal que $p^2+q^2=R^2$ e rodarmos este arco em torno do eixo OZ, obteremos uma superfície denominada calota esférica.

Na prática, as pessoas usam o termo calota esférica para representar tanto a superfície como o sólido geométrico envolvido pela calota esférica. Para evitar confusões, usarei "calota esférica" com aspas para o sólido e sem aspas para a superfície.

A partir da rotação, construiremos duas calotas em uma esfera, de modo que as extremidades dos arcos sejam (0,0,R) e (0,p,q) com $p^2+q^2=R^2$ no primeiro caso (calota Norte) e no segundo caso (calota Sul) as extremidades dos arcos (0,0,-R) e (0,r,-s) com $r^2+s^2=R^2$ e retirarmos estas duas calotas da esfera, teremos uma superfície de revolução denominada zona esférica.

De um ponto de vista prático, consideremos uma melancia esférica. Com uma faca, cortamos uma "calota esférica" superior e uma "calota esférica" inferior. O que sobra da melancia é uma região sólida envolvida pela zona esférica, algumas vezes denominada zona esférica.

Consideremos uma "calota esférica" com altura h1 e raio da base r1 e retiremos desta calota uma outra "calota esférica" com altura h2 e raio da base r2, de tal modo que os planos das bases de ambas sejam paralelos. A região sólida determinada pela calota maior menos a calota menor recebe o nome de segmento esférico com bases paralelas.



No que segue, usaremos esfera tanto para o sólido como para a superfície, "calota esférica" para o sólido envolvido pela calota esférica, a letra maiúscula R para entender o raio da esfera sobre a qual estamos realizando os cálculos, V será o volume, A(lateral) será a área lateral e e A(total) será a área total.

Algumas fórmulas (relações) para objetos esféricos

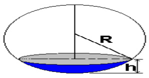
Objeto	Relações e fórmulas
Esfera	Volume = (4/3) Pi R^3 A(total) = 4 Pi R^2
Calota esférica (altura h, raio da base r)	R^2 = h (2R-h) A(lateral) = 2 Pi R h A(total) = Pi h (4R-h) $V=Pi.h^2(3R-h)/3=Pi(3R^2+h^2)/6$

Segmento esférico **(altura h, raios das bases $r1>r^2$)**	**$R^2 = a^2 + [(r1^2 - r2^2 - h^2)/2h)]^2$** **A(lateral) = 2 Pi R h** **$A(total) = Pi(2Rh+r1^2+r2^2)$** **$Volume=Pi.h(3r1^2+3r2^2+h^2)/6$**

Estas fórmulas podem ser obtidas como aplicações do Cálculo Diferencial e Integral, mas nós nos limitaremos a apresentar um processo matemático para a obtenção da fórmula do cálculo do volume da "calota esférica" em função da altura da mesma.

Volume de uma calota no hemisfério Sul

Consideremos a esfera centrada no ponto (0,0,R) com raio R.



A equação desta esfera será dada por:

$x^2 + y^2 + (z-R)^2 = R^2$

A altura da calota será indicada pela letra h e o plano que coincide com o nível do líquido (cota) será indicado por z=h. A interseção entre a esfera e este plano é dado pela circunferência

$x^2 + y^2 = R^2 - (h-R)^2$

Obteremos o volume da calota esférica com a altura h menor ou igual ao raio R da esfera, isto é, h pertence ao intervalo [0,R] e neste caso poderemos explicitar o valor de z em função de x e y para obter:

$$z = R - \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$$

Para simplificar as operações algébricas, usaremos a letra r para indicar:

$r^2 = R^2 - (h-R)^2 = h(2R-h)$

A região circular S de integração será descrita por $x^2+y^2<R^2$ ou em coordenadas polares através de:

$0<m<R, \quad 0<t<2Pi$

A integral dupla que representa o volume da calota em função da altura h é dada por:

$$V_C(h) = \iint_S (h - z)\,dx\,dy$$

ou seja

$$V_C(h) = \iint_S \left(h - R + \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}\right) dx\,dy$$

Escrita em Coordenadas Polares, esta integral fica na forma:

$$V_C(h) = \int_{t=0}^{2\pi} \int_{m=0}^{R} \left(h - R + \sqrt{R^2 - m^2}\right) m\,dm\,dt$$

Após realizar a integral na variável t, podemos separá-la em duas integrais:

$$V_C(h) = 2\pi \left\{ \int_0^R (h - R)\, m\,dm + \int_0^R \sqrt{R^2 - m^2}\, m\,dm \right\}$$

ou seja:

$$V_C(h) = \pi\{(h-R)R^2 - \int_0^R \sqrt{R^2-m^2}\,(-2m)\,dm\}$$

Com a mudança de variável $u=R^2-m^2$ e $du=(-2m)dm$ poderemos reescrever:

$$V_C(h) = \pi\{(h-R)R^2 + \int_{u=0}^{R^2} \sqrt{u}\,du\}$$

Após alguns cálculos obtemos:

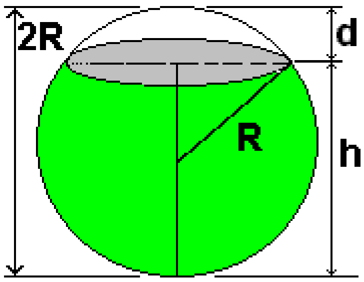
$VC(h) = Pi\ (h-R)\ [R^2 -(h-R)^2] - (2/3)Pi[(R-h)^3 - R^3]$

e assim temos a fórmula para o cálculo do volume da calota esférica no hemisfério Sul com a altura h no intervalo [0,R], dada por:

$VC(h) = Pi\ h^2(3R-h)/3$

Volume de uma calota no hemisfério Norte

Se o nível do líquido mostra que a altura h já ultrapassou o raio R da região esférica, então a altura h está no intervalo [R,2R]



Lançaremos mão de uma propriedades de simetria da esfera que nos diz que o volume da calota superior assim como da calota inferior somente depende do raio R da esfera e da altura h e não da posição relativa ocupada.

Aproveitaremos o resultado do cálculo utilizado para a calota do hemisfério Sul. Tomaremos a altura tal que: $h=2R-d$, onde d é a altura da região que não contém o líquido. Como o volume desta calota vazia é dado por:

$VC(d) = Pi\ d^2(3R-d)/3$

e como $h=2R-d$, então para h no intervalo [R,2R], poderemos escrever o volume da calota vazia em função de h:

$VC(h) = Pi\ (2R-h)^2(R+h)/3$

Para obter o volume ocupado pelo líquido, em função da altura, basta tomar o volume total da região esférica e retirar o volume da calota vazia, para obter:

$V(h) = 4Pi\ R^3/3 - Pi\ (2R-h)^2(R+h)/3$

que pode ser simplificada para:

$V(h) = Pi\ h^2(3R-h)/3$

Independentemente do fato que a altura h esteja no intervalo [0,R] ou [R,2R] ou de uma forma geral em [0,2R], o cálculo do volume ocupado pelo líquido é dado por:

$V(h) = Pi\ h^2(3R-h)/3$