Capítulo 1

Números Complexos

1.1 Unidade Imaginária

O fato da equação

$$x^2 + 1 = 0. \tag{1.1}$$

não ser satisfeita por nenhum número real levou à definição dos números complexos. Para solucionar (1.1) definimos a **unidade imaginária**, denotada[1] por i, como sendo o número tal que

$$i^2 = -1.$$

Obviamente este não é um número real, uma vez que seu quadrado é negativo.

1.2 Números complexos

Um número complexo z é um número da forma

$$z = x + iy. \tag{1.2}$$

Em (1.2) observamos que um número complexo é composto de duas partes: dizemos que x é a parte real de z, e escrevemos $Re(z) = x$. Por outro lado, y é a parte imaginária de z, e escrevemos $Im(z) = y$.

Exemplo 1.1 *Dado o número complexo* $z = 3 + 2i$*, temos* $Re(z) = 3$ *e* $Im(z) = 2$

Ainda em (1.2), se $x = 0$, dizemos que z é um número imaginário puro; por outro lado, se $y = 0$ temos que z é um número real puro (ou simplesmente um número real).

1.3 O Plano Complexo

Os números complexos podem ser representados através de pontos em um plano cartesiano. Este plano é denominado **plano complexo**, ou **diagrama de Argand**[2]. No plano complexo grafamos a parte imaginária do número complexo sobre o eixo vertical (chamado **eixo imaginário**) e a parte real sobre o eixo horizontal (chamado **eixo real**). A Figura 1.1 ilustra tal representação.

[1] Em textos de Eletricidade a unidade imaginária é normalmente denotada pela letra j, uma vez que a letra i é geralmente utilizada para representar correntes elétricas.

[2] Jean Robert Argand (1768-1822), Matemático francês. Seu artigo sobre o plano complexo apareceu em 1806.

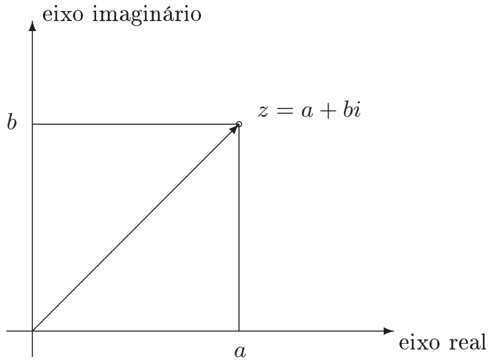

Figura 1.1: O plano complexo.

Assim, cada número complexo $z = a + bi$ está associado biunivocamente[3] ao ponto (a, b) do plano complexo. Por esta razão, uma outra maneira de se denotar um número complexo $z = x + iy$ é através de um par ordenado (x, y), onde fica implícito que a primeira componente é a parte real real do número complexo e a segunda componente é sua parte imaginária. Também é comum associarmos cada número complexo a um vetor do R^2.

Exemplo 1.2 *O número complexo* $z = 3 + 2i$ *pode ser escrito como* $z = (3, 2)$.

1.4 Conjugado de um Número Complexo

Dado $z = x + iy$, seu conjugado, denotado $\overline{z}$, é dado por $\overline{z} = x - iy$. Ou seja, conjuga-se um número complexo simplesmente mudando o sinal de sua parte imaginária. No plano complexo um número e seu conjugado são simétricos em relação ao eixo real (Figura 1.2).

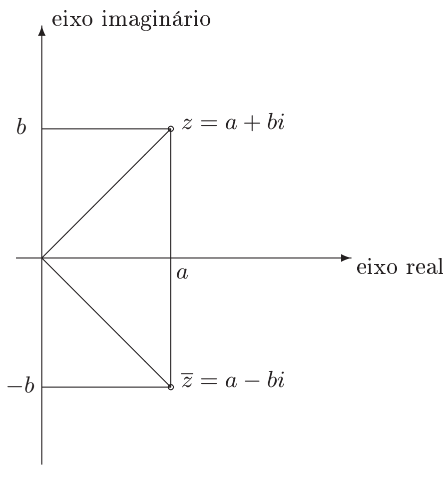

Figura 1.2: O conjugado de um número complexo.

[3] A cada número complexo está associado um **único** ponto do plano, e a cada ponto do plano está associado um **único** número complexo. Lembre-se que em coordenadas polares tal associação não é biunívoca, uma vez que um dado ponto do plano possui infinitas coordenadas polares.

1.5 Operações com Números Complexos

Considerando os números complexos $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, temos:

- **Igualdade**[4]: dizemos que $z_1 = z_2$ se suas respectivas partes real e imaginária são iguais, ou seja, se $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.
- **Adição**: a soma $z_1 + z_2$ é obtida pelas somas das respectivas partes real e imaginária, ou seja
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$
- **Subtração**: de modo análogo à adição, temos
$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$
- **Multiplicação**: aplicamos a distributividade e agrupamos as partes real e imaginária (lembrar que $i^2 = -1$)
$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_1 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned}$$
- **Divisão**: a razão $\frac{z_1}{z_2}$ é obtida multiplicando-se o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador[5], isto é
$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} \\ &= \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} \\ &= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned} \tag{1.3}$$

  Evidentemente não é necessário memorizar a fórmula em (1.3); a razão deve ser obtida simplesmente multiplicando-se o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador e simplificando-se ao máximo o resultado.

Exemplo 1.3 *Dados $z_1 = 3 + 2i$ e $z_2 = 4 - i$, temos*

(a) $z_1 + z_2 = (3 + 2i) + (4 - i) = 7 + i$

(b) $z_1 - z_2 = (3 + 2i) - (4 - i) = -1 + 3i$

(c) $z_1z_2 = (3 + 2i)(4 - i) = 12 - 3i + 8i - 2i^2 = 14 + 5i$

(d) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+2i}{4-i} = \frac{(3+2i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} = \frac{12+3i+8i+2i^2}{16-i^2} = \frac{10}{17} + i\frac{11}{17}$

[4] Atenção: para números complexos não se define relações de ordem, ou seja, desigualdades do tipo $z_1 < z_2$ ou $z_1 \geq z_2$ não possuem qualquer significado.

[5] A prova deste resultado será deixada a cargo do leitor.

1.6 Propriedades

Dados z_1, z_2 e z_3, temos

- comutatividade

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \tag{1.4}$$

$$z_1 z_2 = z_2 z_1 \tag{1.5}$$

- associatividade

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \tag{1.6}$$

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3) \tag{1.7}$$

- distributividade

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \tag{1.8}$$

Estas leis seguem imediatamente das correspondentes leis para números reais e das operações algébricas definidas anteriormente para os números complexos.

1.7 Problemas Propostos

(1) Sejam $z_1 = 5 + 2i$ e $z_2 = 1 + 3i$. Reduza cada expressão a seguir à forma $a + ib$

(a) $z_1 + z_2$
(b) $z_1 - z_2$
(c) $z_1 z_2$
(d) $(2 - 4i)z_1$
(e) $\frac{z_2}{z_1}$
(f) z_1^2
(g) $(z_1 + z_2)^2$
(h) $\frac{z_1}{z_2}$
(i) $(\frac{z_1}{z_2})^2$

(10) Reduza cada expressão a seguir a forma $a + ib$

(a) $(1 + i)^2$
(b) $(\frac{1+i}{1-i})^2$
(c) $(\frac{1+i}{1-i})^2 - (\frac{1-i}{1+i})^2$

(4) Resolva as equações

(a) $z^2 + 9 = 0$
(b) $z^2 - 2z + 2 = 0$
(c) $z^2 + 2z + 5 = 0$
(d) $z^2 + z + 9 = 0$

(5) Prove que

(a) o conjugado da soma é a soma dos conjugados, isto é $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
(b) o conjugado da diferença é a diferença dos conjugados, isto é $\overline{(z_1 - z_2)} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$.
(c) o conjugado do produto é o produto dos conjugados, isto é $\overline{(z_1 z_2)} = \overline{z_1 z_2}$.
(d) o conjugado da razão é a razão dos conjugados, isto é $\overline{\frac{(z_1}{z_2}}) = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

(6) Represente os números $z_1 = 2 + 4i$, $z_2 = 2 - 4i$, $z_1 = -2 + 4i$ e $z_1 = -2 - 4i$ no plano complexo.

(7) Calcule

(a) $\frac{1}{i}$
(b) i^3
(c) i^4
(d) i^5
(e) i^6
(f) i^7
(g) i^8
(h) i^9
(i) i^{26}
(j) i^{31}
(k) i^{54}
(l) i^{87}

(13) Seja $z = x + iy$. Determine

(a) $Re(\frac{1}{z})$
(b) $Im(\frac{1}{z})$
(c) $Im(z^3)$
(d) $Im(\frac{1}{z^2})$
(e) $Re(z^2 + z)$
(f) $Re(-iz^2)$
(g) $Im(4iz^2 - 6z + 8i)$
(h) $Re(\frac{1}{z-i})$

(9) Prove o resultado em (1.3). Sugestão: faça $\frac{z_1}{z_2} = z$, onde $z = u + iv$ e resolva a equação resultante em termos de u e v.

1.8 Valor Absoluto ou Módulo

Dado o número complexo $z = x + iy$, seu valor absoluto (ou módulo), denotado $|z|$ ou r, é dado por

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.9}$$

Geometricamente o valor absoluto de um número complexo nos dá a distância do ponto que o representa à origem do plano complexo (Aplique o Teorema de Pitágoras na Figura 1.3).

É interessante observar que:

- o módulo de um número complexo é igual ao módulo de seu conjugado:

$$|z| = |\overline{z}|; \tag{1.10}$$

- o produto de um número complexo pelo seu conjugado é igual ao quadrado de seu módulo:

$$z\overline{z} = |z|^2. \tag{1.11}$$

As provas destes resultados são imediatas e ficam como exercício para o leitor.

1.9 Forma Polar

Introduzindo as coordenadas polares r e θ no plano complexo (Figura 1.3), de modo que

$$x = rcos(\theta) \quad \text{e} \quad y = rsen(\theta),$$

o número $z = x + iy$ pode ser reescrito como

$$z = rcos(\theta) + irsen(\theta) = r[cos(\theta) + isen(\theta)] \tag{1.12}$$

chamada **forma polar** ou **trigonométrica** de um número complexo.

Em (1.12) o valor r é o valor absoluto de z, enquanto o ângulo θ é o **argumento** de z. Denota-se $arg(z) = \theta$. Geometricamente, o argumento é o ângulo formado pelo semi-eixo real positivo e pelo segmento de reta que representa r, e pode ser obtido pela expressão

$$\theta = arctg\left(\frac{y}{x}\right), \ x \neq 0, \ y \neq 0. \tag{1.13}$$

Evidentemente o argumento de um número complexo é definido a menos de múltiplos inteiros de 2π, no sentido que, se $arg(z) = \alpha$, então $arg(z) = \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Se a parte real x ou a parte imaginária y de um número complexo $z = x + iy$ for nula, a determinação de sua fase torna-se um pouco mais sutil. Vejamos as possibilidades

(a) Se $x = 0$ nosso número complexo é da forma $z = 0 + iy = iy$, ou seja é um número imaginário puro e o ponto que o representa está sobre o eixo imaginário. O valor de sua fase depende do sinal da parte imaginária y:

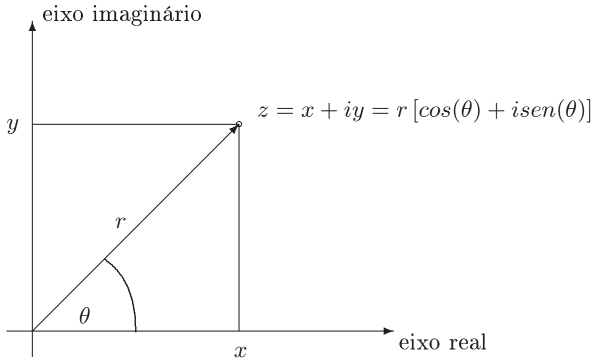

Figura 1.3: A forma polar.

(i) se $y > 0$, então $arg(z) = \theta = \frac{\pi}{2}$ (veja o número z_1 na Figura 1.4);
(ii) se $y < 0$, então $arg(z) = \theta = -\frac{\pi}{2}$ (veja o número z_2 na Figura 1.4).

(b) Se $y = 0$ nosso número complexo é da forma $z = x + i0 = x$, ou seja é um número real puro e o ponto que o representa está sobre o eixo real. O valor de sua fase depende do sinal da parte real x:

(i) se $x > 0$, então $arg(z) = \theta = 0$ (veja o número z_3 na Figura 1.4);
(ii) se $x < 0$, então $arg(z) = \theta = -\pi$ (veja o número z_4 na Figura 1.4).

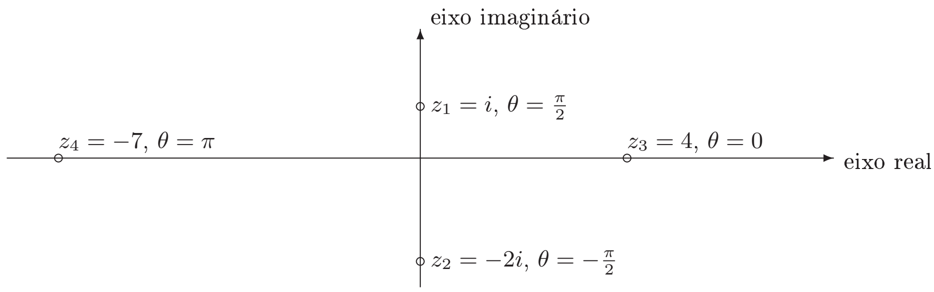

Figura 1.4: Alguns números complexos e seus respectivos argumentos.

Agrupando estes resultados com a equação (1.13), a fase de um número complexo $z = x + iy$ é dada por:

$$\theta = \begin{cases} arctg\left(\frac{y}{x}\right) & , \quad \text{se } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & , \quad \text{se } x = 0 \text{ e } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & , \quad \text{se } x = 0 \text{ e } y < 0 \\ 0 & , \quad \text{se } y = 0 \text{ e } x > 0 \\ \pi & , \quad \text{se } y = 0 \text{ e } x < 0 \end{cases} . \tag{1.14}$$

Exemplo 1.4 *Dado* $z = 1 + i$, *temos* $|z| = \sqrt{2}$ *e* $arg(z) = arctg\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, *onde* $k \in \mathbb{Z}$. *Assim*

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{4} \pm 2k\pi\right) + isen\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right],\ k \in \mathbb{Z},$$

ou simplesmente

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Multiplicação e divisão

A forma polar é particularmente útil para a multiplicação e divisão dos números complexos. Consideremos os números

$$z_1 = x_1 + iy_1 = r_1\big[cos(\theta_1) + isen(\theta_1)\big] \quad \text{e} \quad z_2 = x_2 + iy_2 = r_2\big[cos(\theta_2) + isen(\theta_2)\big].$$

- O produto $z_1 z_2$ fica

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1\big[cos(\theta_1) + isen(\theta_1)\big]\, r_2\big[cos(\theta_2) + isen(\theta_2)\big] \\ &= r_1 r_2\big[cos(\theta_1) + isen(\theta_1)\big]\,\big[cos(\theta_2) + isen(\theta_2)\big] \\ &= r_1 r_2\big[cos(\theta_1)cos(\theta_2) + icos(\theta_1)sen(\theta_2) + isen(\theta_1)cos(\theta_2) - sen(\theta_1)sen(\theta_2)\big] \\ &= r_1 r_2\Big[\big[cos(\theta_1)cos(\theta_2) - sen(\theta_1)sen(\theta_2)\big] + i\big[cos(\theta_1)sen(\theta_2) + sen(\theta_1)cos(\theta_2)\big]\Big], \end{aligned}$$

  e finalmente, utilizando as identidades trigonométricas

$$\begin{aligned} cos(\theta_1 + \theta_2) = cos(\theta_1)cos(\theta_2) - sen(\theta_1)sen(\theta_2) \\ sen(\theta_1 + \theta_2) = cos(\theta_1)sen(\theta_2) + sen(\theta_1)cos(\theta_2), \end{aligned}$$

  obtemos

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\big[cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2)\big] \tag{1.15}$$

  A partir de (1.15), observamos que o módulo do produto é o produto dos módulos, ou seja,

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1||z_2|,$$

  e que o argumento do produto é a soma dos argumentos, ou seja,

$$arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = arg(z_1) + arg(z_2).$$

- A razão $\frac{z_1}{z_2}$ fica

$$\begin{aligned} \frac{z_1 \overline{z}_2}{z_2 \overline{z}_2} &= \frac{r_1 r_2}{r_2^2}\big[cos(\theta_1) + isen(\theta_1)\big]\,\big[cos(\theta_2) - isen(\theta_2)\big] \\ &= \frac{r_1}{r_2}\big[cos(\theta_1)cos(\theta_2) - icos(\theta_1)sen(\theta_2) + isen(\theta_1)cos(\theta_2) + sen(\theta_1)sen(\theta_2)\big] \\ &= r_1 r_2\Big[\big[cos(\theta_1)cos(\theta_2) + sen(\theta_1)sen(\theta_2)\big] + i\big[sen(\theta_1)cos(\theta_2) - cos(\theta_1)sen(\theta_2)\big]\Big], \end{aligned}$$

  e finalmente, utilizando as identidades trigonométricas

$$\begin{aligned} cos(\theta_1 - \theta_2) = cos(\theta_1)cos(\theta_2) + sen(\theta_1)sen(\theta_2) \\ sen(\theta_1 - \theta_2) = sen(\theta_1)cos(\theta_2) - cos(\theta_1)sen(\theta_2), \end{aligned}$$

  obtemos

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2) \tag{1.16}$$

  A partir de (1.16), observamos que o módulo da razão é a razão dos módulos, ou seja,

$$|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

  e que o argumento da razão é a diferença dos argumentos, ou seja,

$$arg(\frac{z_1}{z_2}) = arg(z_1) - arg(z_2).$$

Potências

Utilizando (1.15) e indução matemática, observamos que

$$z^n = r^n[cos(n\theta) + isen(n\theta)], \tag{1.17}$$

expressão válida para todo $n \in \mathbb{Z}$. A partir de (1.17) podemos escrever

$$\left\{r[cos(\theta) + isen(\theta)]\right\}^n = r^n[cos(n\theta) + isen(n\theta)]$$

da qual, fazendo $r = 1$, obtemos a fórmula de *de Moivre*[6]

$$[cos(\theta) + isen(\theta)]^n = cos(n\theta) + isen(n\theta) \tag{1.18}$$

1.10 Problemas Propostos

(1) Prove as equações 1.10 e 1.11.

(2) Escreva os seguintes números complexos na forma polar

(a) $2 - 2i$ (b) i (c) $3 + 4i$ (d) $5 + 5i$ (e) $-5 + 5i$ (f) $-5 - 5i$

(7) Dados os números $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$ e $z_3 = -2i$, efetue as operações a seguir e represente os resultados no plano complexo.

(a) $\frac{z_1}{z_2 z_3}$ (b) $\frac{z_1^8}{z_2^4}$ (c) $\frac{z_3}{z_1 + z_3}$

(4) Mostre que $arg(z) = -arg(\overline{z})$ (a menos de múltiplos inteiros de 2π).

(5) Mostre que $arg(1/z) = -arg(z)$ (a menos de múltiplos inteiros de 2π).

(6) Encontre o valor absoluto dos seguintes números

(a) $1 + \sqrt{3}i$ (c) $2 + i\sqrt{5}$ (e) $2 + 3i$
(b) $-9i$ (d) $2 - i\sqrt{5}$ (f) $(4 + i)^3$

(7) Encontre o valor absoluto e o argumento dos seguintes números

(a) $(-1 + i)(1 - \sqrt{3}i)$ (c) $\frac{(3+3i)(-2i)}{2-\sqrt{3}i}$ (e) $(\frac{1+i}{1-i})^8$.
(b) $\frac{1+i}{2+\sqrt{3}i}$ (d) $\frac{(4-3i)(\frac{1}{2}+i)^4}{(1-\frac{3i}{4})^2(-3+4i)}$. (f) $(3 + 4i)^3(-1 - i)^6$.

(8) Represente no plano complexo a região representada pelas seguintes equações e inequações

(a) $|z| = 1$. (c) $Re(z^2) = -1$. (e) $\frac{\pi}{4} \leq arg(z) \leq \frac{\pi}{4}$.
(b) $|z - 1| = 1$. (d) $Im(2z) = -1$.

(9) Utilize a fórmula de *de Moivre* para estabelecer as seguintes identidades

(a) $cos(3\theta) = cos^3(\theta) - 3cos(\theta)sen^2(\theta)$.
(b) $sen(3\theta) = 3cos^2(\theta)sen(\theta) - sen^3(\theta)$.

(10) Encontre identidades similares às do problema anterior para $cos(2\theta)$ e $cos(4\theta)$.

[6] Abraham de Moivre (1667-1754) - Matemático francês. Introduziu quantidades imaginárias na trigonometria.

Capítulo 2

Funções complexas

2.1 Problemas Propostos

(1) Dada $f(z) = z^2 - 3z$ determine

(a) $f(2-i)$ (b) $f(-i)$ (c) $f(-4+2i)$

(2) Dada $f(z) = \frac{z-1}{z+i}$ determine

(a) $f(2-i)$ (b) $f(-i)$ (c) $f(-4+2i)$

(3) Dada $f(z) = \frac{z^2-1}{z^2+1}$ determine

(a) $f(2-i)$ (b) $f(-i)$ (c) $f(-4+2i)$

(4) Determine as partes real e imaginária das funções a seguir

(a) $f(z) = z^2 - 3z + 4 - i$

(b) $f(z) = 3z^2 - 2\overline{z}$

(c) $f(z) = z^3 - z^2$

(d) $f(z) = \frac{1}{z-1}$

(e) $f(z) = \frac{z}{z+1}$

(f) $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$

(5) Suponha que z varie em uma região R do plano complexo. Determine a região S correspondente às imagens de $w = f(z)$. Esboce as duas regiões sobre o plano complexo.

(a) $f(z) = iz$, onde $R = \{z \in \mathbb{C} \mid Re[z] \geq 0\}$

(b) $f(z) = 3z - 1$, onde $R = \{z \in \mathbb{C} \mid -1 < Re[z] < 1\}$

(c) $f(z) = z^2$, onde $R = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq arg[z] \leq \pi/4,\ |z| \leq 1\}$

(d) $f(z) = z^2$, onde $R = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq arg[z] \leq \pi/2,\ 1 \leq |z| \leq 2\}$

(6) Determine todos os valores das raízes a seguir e represente-as no plano complexo.

(a) $\sqrt{i}$ (b) $\sqrt[3]{-1}$ (c) $\sqrt{-i}$

(d) $\sqrt{-25}$ (e) $\sqrt[3]{i}$ (f) $\sqrt[4]{1}$

(g) $\sqrt[3]{-i}$ (h) $\sqrt[8]{1}$ (i) $\sqrt[7]{-128}$

(j) $\sqrt{1+i}$ (k) $\sqrt[3]{1+i}$ (l) $\sqrt{1-\sqrt{3}\,i}$

(7) Determine todos as soluções das equações a seguir e represente-as no plano complexo.