Raciocínio Lógico-Quantitativo

Conteúdo:

01. Noções de Lógica; Estruturas lógicas e diagramas lógicos
02. Lógica de argumentação
03. Álgebra
04. Probabilidades
05. Arranjos, permutações e combinações

NOÇÕES DE LÓGICA

Proposição

Denomina-se proposição a toda sentença, expressa em palavras ou símbolos, que exprima um juízo ao qual se possa atribuir, dentro de certo contexto, somente um de dois valores lógicos possíveis: **verdadeiro** ou **falso**.

Somente às sentenças declarativas pode-se atribuir valores de verdadeiro ou falso, o que ocorre quando a sentença é, respectivamente, confirmada ou negada. De fato, não se pode atribuir um valor de verdadeiro ou falso às demais formas de sentenças como as interrogativas, as exclamativas e outras, embora elas também expressem juízos.

São exemplos de proposições as seguintes sentenças declarativas:

O número 6 é par.

O número 15 não é primo.

Todos os homens são mortais.

Nenhum porco espinho sabe ler.

Alguns canários não sabem cantar.

Se você estudar bastante, então aprenderá tudo.

Eu falo inglês e espanhol.

Míriam quer um sapatinho novo ou uma boneca.

Não são proposições:

Qual é o seu nome?

Preste atenção ao sinal.

Caramba!

Proposição Simples

Uma proposição é dita **proposição simples** ou **proposição atômica** quando não contém qualquer *outra* proposição como sua componente. Isso significa que não é possível encontrar como parte de uma proposição simples alguma outra proposição diferente dela. Não se pode subdividi-la em partes menores tais que alguma delas seja uma nova proposição.

Exemplo:

A sentença "*Cíntia é irmã de Maurício*" é uma proposição simples, pois não é possível identificar como parte dela qualquer outra proposição diferente. Se tentarmos separá-la em duas ou mais partes menores nenhuma delas será uma proposição nova.

Proposição Composta

Uma proposição que contenha qualquer outra como sua parte componente é dita **proposição composta** ou **proposição molecular**. Isso quer dizer que uma proposição é composta quando se pode extrair como parte dela, uma nova proposição.

Conectivos Lógicos

Existem alguns termos e expressões que estão freqüentemente presentes nas proposições compostas, tais como **não**, **e**, **ou**, **se ... então** e **se e somente se** aos quais denominamos conectivos lógicos. Os conectivos lógicos agem sobre as proposições a que estão ligados de modo a criar novas proposições.

Exemplo:

A sentença "***Se*** *x* ***não*** *é maior que y,* ***então*** *x é igual a y* **ou** *x é menor que y*" é uma proposição composta na qual se pode observar alguns conectivos lógicos ("não", "se ... então" e "ou") que estão agindo sobre as proposições simples "*x é maior que y*", "*x é igual a y*" e "*x é menor que y*".

Uma propriedade fundamental das proposições compostas que usam conectivos lógicos é que o seu valor lógico (verdadeiro ou falso) fica completamente determinado pelo valor lógico de cada proposição componente e pela forma como estas sejam ligadas pelos conectivos lógicos utilizados, conforme estudaremos mais adiante.

As proposições compostas podem receber denominações especiais, conforme o conectivo lógico usado para ligar as proposições componentes.

Conjunção: *A e B*

Denominamos conjunção a proposição composta formada por duas proposições quaisquer que estejam ligadas pelo conectivo "***e***".

A conjunção **A e B** pode ser representada simbolicamente como:

$$A \wedge B$$

Exemplo:

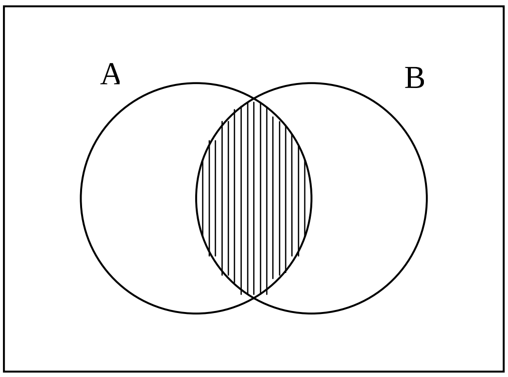
Dadas as proposições simples:

A: Alberto fala espanhol.

B: Alberto é universitário.

Se as proposições **A** e **B** forem representadas como conjuntos através de um diagrama, a conjunção "**A $\wedge$ B**" corresponderá à interseção do conjunto **A** com o conjunto **B**. **A $\cap$ B**.

A $\cap$ B



Uma conjunção é verdadeira somente quando as duas proposições que a compõem forem verdadeiras, Ou seja, a conjunção "**A $\wedge$ B**" é **verdadeira** somente quando **A** é **verdadeira** e **B** é **verdadeira** também. Por isso dizemos que a conjunção exige a **simultaneidade** de condições.

Na tabela-verdade, apresentada a seguir, podemos observar os resultados da conjunção "**A** e **B**" para cada um dos valores que **A** e **B** podem assumir.

A	**B**	**A $\wedge$ B**
V	**V**	**V**
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjunção: *A ou B*

Denominamos disjunção a proposição composta formada por duas proposições quaisquer que estejam ligadas pelo conectivo "**ou**".

A disjunção **A ou B** pode ser representada simbolicamente como:

$$A \vee B$$

Exemplo:

Dadas as proposições simples:

A: Alberto fala espanhol.

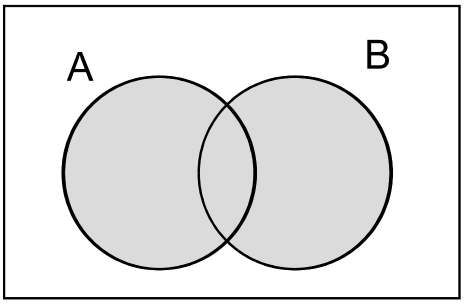
B: Alberto é universitário.

A disjunção "**A ou B**" pode ser escrita como:

A ∨ B: Alberto fala espanhol **ou** é universitário.

Se as proposições **A** e **B** forem representadas como conjuntos através de um diagrama, a disjunção "**A ∨ B**" corresponderá à **união** do conjunto **A** com o conjunto **B**.

A ∪ B



Uma disjunção é **falsa** somente quando as duas proposições que a compõem forem **falsas**. Ou seja, a disjunção "**A ou B**" é **falsa** somente quando **A** é **falsa** e **B** é **falsa** também. Mas se **A** for verdadeira ou se **B** for verdadeira ou mesmo se ambas, **A** e **B**, forem verdadeiras, então a disjunção será verdadeira. Por isso dizemos que, ao contrário da conjunção, a disjunção **não necessita da simultaneidade** de condições para ser verdadeira, bastando que pelo menos uma de suas proposiçoes componentes seja verdadeira.

Na tabela-verdade, apresentada a seguir, podemos observar os resultados da disjunção "**A ou B**" para cada um dos valores que **A** e **B** podem assumir.

A	**B**	**A ∨ B**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	**F**	**F**

Condicional: *Se A então B*

Denominamos condicional a proposição composta formada por duas proposições quaisquer que estejam ligadas pelo conectivo "**Se ... então**" ou por uma de suas formas equivalentes.

A proposição condicional "**Se A, então B**" pode ser representada simbolicamente como:

$$A \rightarrow B$$

Exemplo:

Dadas as proposições simples:

A: José é alagoano.

B: José é brasileiro.

A condicional "**Se A, então B**" pode ser escrita como:

A → B: **Se** José é alagoano, **então** José é brasileiro.

Na proposição condicional “**Se A, então B**” a proposição **A**, que é anunciada pelo uso da conjunção “**se**”, é denominada **condição** ou **antecedente** enquanto a proposição **B**, apontada pelo advérbio “**então**” é denominada **conclusão** ou **conseqüente**.

As seguintes expressões podem ser empregadas como equivalentes de “**Se A, então B**”:

*Se **A**, **B**.*

***B**, se **A**.*

*Todo **A** é **B**.*

***A** implica **B**.*

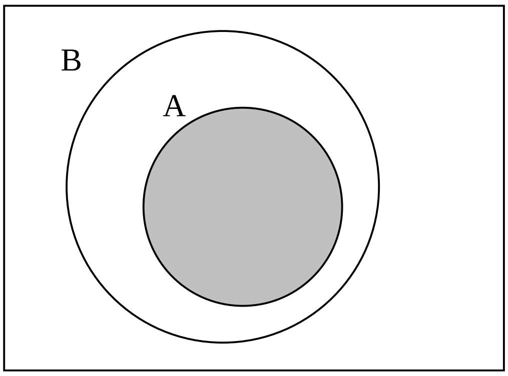
***A** somente se **B**.*

***A** é suficiente para **B**.*

***B** é necessário para **A**.*

Se as proposições **A** e **B** forem representadas como conjuntos através de um diagrama, a disjunção “**A** $\vee$ **B**” corresponderá à **união** do conjunto **A** com o conjunto **B**.

A $\subset$ **B**



Uma condicional “**Se A então B**” é **falsa** somente quando a condição **A** é **verdadeira** e a conclusão **B** é **falsa**, sendo verdadeira em todos os outros casos. Isto significa que numa proposição condicional, a única situação que não pode ocorrer é uma condição verdadeira implicar uma conclusão falsa.

Na tabela-verdade apresentada a seguir podemos observar os resultados da proposição condicional “**Se A então B**” para cada um dos valores que **A** e **B** podem assumir.

A	**B**	**A → B**
V	V	V
V	**F**	**F**
F	V	V
F	F	V

Bicondicional: *A se e somente se B*

Denominamos bicondicional a proposição composta formada por duas proposições quaisquer que estejam ligadas pelo conectivo “**se e somente se**”.

A proposição bicondicional “**A se e somente se B**” pode ser representada simbolicamente como:

$$A \leftrightarrow B$$

Exemplo:

Dadas as proposições simples:

A: Adalberto é meu tio.

B: Adalberto é irmão de um de meus pais.

A proposição bicondicional “**A se e somente se B**” pode ser escrita como:

A ←→ B: Adalberto é meu tio **se e somente se** Adalberto é irmão de um de meus pais.

Como o próprio nome e símbolo sugerem, uma proposição bicondicional “**A se e somente se B**” equivale à proposição composta “**se A então B**”.

Podem-se empregar também como equivalentes de “**A se e somente se B**” as seguintes expressões:

__A__ se e só se __B__.

Todo __A__ é __B__ e todo __B__ é __A__.

Todo __A__ é __B__ e reciprocamente.

Se __A__ então __B__ e reciprocamente.

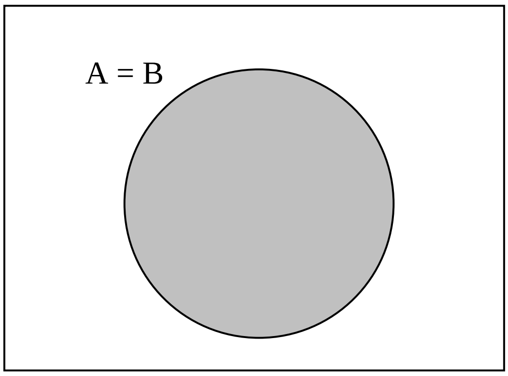
__A__ somente se __B__ e __B__ somente se __A__.

__A__ é necessário e suficiente para __B__.

__A__ é suficiente para __B__ e __B__ é suficiente para __A__.

__B__ é necessário para __A__ e __A__ é necessário para __B__.

Se as proposições **A** e **B** forem representadas como conjuntos através de um diagrama, a proposição bicondicional “**A se e somente se B**” corresponderá à **igualdade** dos conjuntos **A** e **B**.



A proposição bicondicional “**A se e somente se B**” é **verdadeira** somente quando **A** e **B** têm o **mesmo valor lógico** (ambas são verdadeiras ou ambas são falsas), sendo **falsa** quando **A** e **B** têm **valores lógicos contrários**.

Na tabela-verdade, apresentada a seguir, podemos observar os resultados da proposição bicondicional “**A se e somente se B**” para cada um dos valores que **A** e **B** podem assumir.

A	**B**	**A ←→ B**
V	**V**	**V**
V	F	F
F	V	F
F	**F**	**V**

Negação: ***Não A***

Dada uma proposição qualquer **A** denominamos negação de **A** à proposição composta que se obtém a partir da proposição **A** acrescida do conectivo lógico “**não**” ou de outro equivalente.

A negação “**não A**” pode ser representada simbolicamente como:

~A

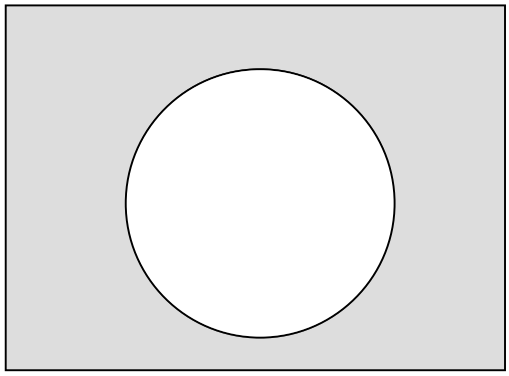
Podem-se empregar, também, como equivalentes de “**não A**” as seguintes expressões:

*Não é verdade que **A**.*

*É falso que **A**.*

Se a proposição **A** for representada como conjunto através de um diagrama, a negação “**não A**” corresponderá ao **conjunto complementar** de **A**.

$\overline{A}$



Uma proposição **A** e sua negação “**não A**” terão sempre **valores lógicos opostos**.

Na tabela-verdade, apresentada a seguir, podemos observar os resultados da negação “**não A**” para cada um dos valores que **A** pode assumir**.**

A	**~A**
V	F
F	V

Tautologia

Uma proposição composta formada pelas proposições **A**, **B**, **C**, ... é uma **tautologia** se ela for **sempre verdadeira**, independentemente dos valores lógicos das proposições **A**, **B**, **C**, ... que a compõem.

Exemplo:

A proposição “*Se (**A** e **B**) então (**A** ou **B**)*” é uma tautologia, pois é sempre verdadeira, independentemente dos valores lógicos de **A** e de **B**, como se pode observar na tabela-verdade abaixo:

A	**B**	**A** e **B**	**A** ou **B**	**(A** e **B)** → **(A** ou **B)**
V	V	V	V	**V**
V	F	F	V	**V**
F	V	F	V	**V**
F	F	F	F	**V**

Contradição

Uma proposição composta formada pelas proposições **A**, **B**, **C**, ... é uma **contradição** se ela for **sempre falsa**, independentemente dos valores lógicos das proposições **A**, **B**, **C**, ... que a compõem.

Exemplo:

A proposição “***A s**e e somente se **não A***” é uma contradição, pois é sempre falsa, independentemente dos valores lógicos de **A** e de **não A**, como se pode observar na tabela-verdade abaixo:

A	~A	A $\leftrightarrow$ ~A
V	F	**F**
F	V	**F**

O exemplo acima mostra que uma proposição qualquer e sua negação nunca poderão ser simultaneamente verdadeiros ou simultaneamente falsos.

Como uma tautologia é sempre verdadeira e uma contradição sempre falsa, tem-se que:

a negação de uma tautologia é sempre uma contradição

enquanto

a negação de uma contradição é sempre uma tautologia

Proposições Logicamente Equivalentes

Dizemos que duas proposições são **logicamente equivalentes** ou simplesmente **equivalentes** quando **são compostas pelas mesmas proposições simples e suas tabelas-verdade são idênticas**. Uma conseqüência prática da equivalência lógica é que ao trocar uma dada proposição por qualquer outra que lhe seja equivalente, estamos apenas mudando a maneira de dizê-la.

A equivalência lógica entre duas proposições, **A** e **B**, pode ser representada simbolicamente como:

$$\Leftrightarrow \mathbf{A}$$

Da definição de equivalência lógica pode-se demonstrar as seguintes equivalências:

Leis associativas:

1. $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
2. $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

Leis distributivas:

3. $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
4. $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Lei da dupla negação:

5. $\sim(\sim A) \Leftrightarrow A$

Equivalências da Condicional

6. $A \rightarrow B \Leftrightarrow \sim A \vee B$
7. $A \rightarrow B \Leftrightarrow \sim B \rightarrow \sim A$

Negação de Proposições Compostas

Um problema de grande importância para a lógica é o da identificação de proposições equivalentes à negação de uma proposição dada. Negar uma proposição simples é uma tarefa que não oferece grandes obstáculos. Entretanto, podem surgir algumas dificuldades quando procuramos identificar a negação de uma proposição composta.

Como vimos anteriormente, a negação de uma proposição deve Ter sempre valor lógico oposto ao da proposição dada. Deste modo, **sempre** que uma proposição **A** for verdadeira, a sua negação **não A** deve ser falsa e **sempre** que **A** for falsa**, não A** deve ser verdadeira.

Em outras palavras, a negação de uma proposição deve ser **contraditória** com a proposição dada.

A tabela abaixo mostra as equivalências mais comuns para as negações de algumas proposições compostas:

Proposição	**Negação direta**	**Equivalente da Negação**
A e B	Não (A e B)	Não A ou não B
A ou B	Não (A ou B)	Não A e não B
Se A então B	Não (se A então B)	A e não B
A se e	Não (A se e	[(A e não B) ou
somente se B	somente se B)	(B e não A)]
Todo A é B	Não (todo A é B)	Algum A não é B
Algum A é B	Não (algum A é B)	Nenhum A é B

Argumento

Denomina-se argumento a relação que associa um conjunto de proposições P_1, P_2, ... P_n, chamadas **premissas** do argumento, a uma proposição C a qual chamamos de **conclusão** do argumento.

No lugar dos termos **premissa** e **conclusão** podem ser usados os correspondentes **hipótese** e **tese**, respectivamente.

Os argumentos que têm somente duas premissas são denominados **silogismos**.

Assim, são exemplos de silogismos os seguintes argumentos:

I. P_1: *Todos os artistas são apaixonados.*

P_2: *Todos os apaixonados gosta de flores.*

C: *Todos os artistas gostam de flores.*

II. P_1: *Todos os apaixonados gosta de flores.*

P_2: Míriam gosta de flores.

C: Míriam é uma apaixonada.

Argumento Válido

Dizemos que um argumento é **válido** ou ainda que ele é **legítimo** ou **bem construído** quando a sua conclusão é uma **conseqüência obrigatória** do seu conjunto de premissas. Posto de outra forma: quando um argumento é válido, a verdade das premissas deve **garantir** a verdade da conclusão do argumento. Isto significa que jamais poderemos chegar a uma conclusão falsa quando as premissas forem verdadeiras e o argumento for válido.

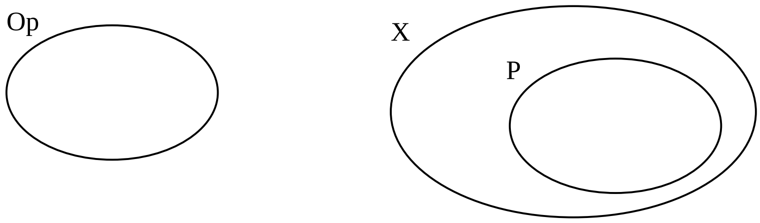
É importante observar que ao discutir a validade de um argumento **é irrelevante** o valor de verdade de cada uma das premissas. Em Lógica, o estudo dos argumentos não leva em conta a verdade ou falsidade das proposições que compõem os argumentos, mas tão-somente a **validade** destes.

Exemplo:

O silogismo:

“Todos os pardais adoram jogar xadrez.
Nenhum enxadrista gosta de óperas.
Portanto, nenhum pardal gosta de óperas.”

está perfeitamente bem construído (veja o diagrama abaixo), sendo, portanto, um argumento válido, muito embora a verdade das premissas seja questionável.



Op = Conjunto dos que gostam de óperas

X = Conjunto dos que adoram jogar xadrez

P = Conjunto dos pardais

Pelo diagrama pode-se perceber que nenhum elemento do conjunto P (pardais) pode pertencer ao conjunto Op (os que gostam de óperas).

Argumento Inválido

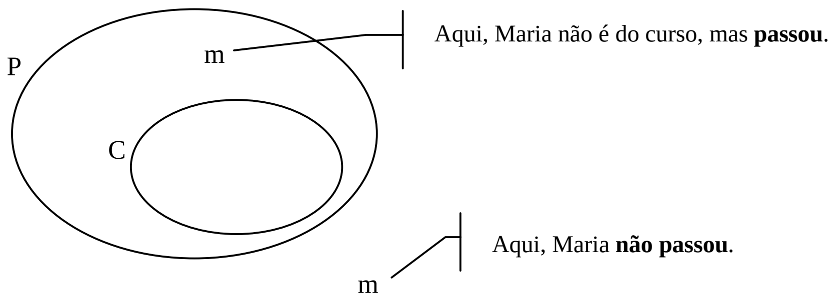
Dizemos que um argumento é **inválido**, também denominado **ilegítimo**, **mal construído** ou **falacioso**, quando a verdade das premisssas **não é suficiente** para garantir a verdade da conclusão.

Exemplo:

O silogismo:

“Todos ps alunos do curso passaram.
Maria não é aluna do curso.
Portanto, Maria não passou.”

é um argumento inválido, falacioso, mal construído, pois as premissas **não garantem** (não obrigam) a verdade da conclusão (veja o diagrama abaixo). Maria pode Ter passado mesmo sem ser aluna do curso, pois a primeira premissa não afirmou que **somente** os alunos do curso haviam passado.



P = Conjunto das pessoas que passaram.

C = Conjunto dos alunos do curso.

Na tabela abaixo, podemos ver um resumo das situações possíveis para um argumento:

Quando um argumento é ...	E as premissas...	Então a conclusão será:
Válido (bem construído)	são todas verdadeiras	Necessariamente Verdadeira
	não são todas verdadeiras	ou Verdadeira ou Falsa
Inválido (mal construído)	são todas verdadeiras	ou Verdadeira ou Falsa
	não são todas verdadeiras	ou Verdadeira ou Falsa

EXERCÍCIOS

1. Represente com diagramas de conjuntos:
a) algum A é B;
b) algum A não é B;
c) todo A é B;
d) se A, então B;
e) nenhum A é B.

2. Considere as sentenças abaixo:
I. $3 + 1 = 4$ e $2 + 3 = 5$
II. $6 > 2$ e $7 < 3$
III. $2 = 3$ e $5 < 0$

a) todas são falsas;
b) I e II são falsas;
c) somente III é falsa;
d) somente I é verdadeira;
e) I e II são verdadeiras.

3. Considere as sentenças abaixo:
I. $5 + 1 = 6$ ou $4 – 4 = 0$
II. $2 + 2 = 5$ ou $7 > 2$
III. $3 = 5$ ou $8 < 6$

a) somente I é verdadeira;
b) somente III é falsa;
c) todas são verdadeiras;
d) todas são falsas;
e) I e III são falsas.

4. Considere as proposições abaixo:
I. $3 + 4 = 7$ ou $2 + 2 = 4$
II. $8 < 4$ e $6 > 3$
III. $6 < 0$ ou $3 = 4$

Assinale a única alternativa correta:
a) todas as proposições são falsas;
b) somente III é falsa;
c) somente II é falsa;
d) I e II são falsas;
e) I é falsa ou II é falsa.

5. Assinale a única sentença falsa.
a) Se 2 é par, então 3 é ímpar.
b) Se 5 é inteiro, então 3 é menor que 5.
c) Se 8 é ímpar, então 7 é maior que 3.
d) Se 13 é par, então 2 é ímpar.
e) Se 10 é par, então 6 é maior que 20.

6. A negação de "todos os homens são bons motoristas" é:
a) todas as mulheres são boas motoristas;
b) algumas mulheres são boas motoristas;
c) nenhum homem é bom motorista;

d) todos os homens são maus motoristas;
e) ao menos um homem é mau motorista.

7. Assinale a assertiva **incorreta**.
a) A negação de "*2 é par e 3 é ímpar*" é "*2 não é par ou 3 não é ímpar*".
b) A negação de "*5 é primo ou 7 é par*" é "*5 não é primo e 7 não é par*".
c) A negação de $2 \geq 5$ é $2 \leq 5$.
d) A negação de "*existe um número primo par*" é "*qualquer número primo não é par*".
e) A negação de "*nenhum número é inteiro*" é "*algum número é inteiro*".

8. Dê uma negação para cada uma das proposições abaixo.
a) O tempo será frio e chuvoso.
b) Ela estudou muito ou teve sorte na prova.
c) Maria não é morena ou Regina é baixa.
d) Se o tempo está chuvoso então está frio.
e) Todos os corvos são negros.
f) Nenhum triângulo é retângulo.
g) Alguns sapos são bonitos.
h) Algumas vidas não são importantes.

9. Assinale a alternativa que contém um argumento válido.

a) Alguns atletas jogam xadrez.
Todos os intelectuais jogam xadrez.
Conclusão: Alguns atletas são intelectuais.

b) Todos os estudantes gostam de Lógica.
Nenhum artista é um estudante.
Conclusão: Ninguém que goste de Lógica é um artista.

c) Se estudasse tudo, eu passaria.
Eu não passei.
Conclusão: Eu não estudei tudo.

d) Se estudasse tudo, eu passaria.
Eu não estudei tudo.
Conclusão: Eu não passei.

10. Considere as premissas:
P1. Os bebês são ilógicos.
P2. Pessoas ilógicas são desprezadas.
P3. Quem sabe amestrar um crocodilo não é desprezado.

Assinale a única alternativa que é uma conseqüência lógica das três premissas apresentadas.
a) Bebês não sabem amestrar crocodilos.
b) Pessoas desprezadas são ilógicas.
c) Pessoas desprezadas não sabem amestrar crocodilos.
d) Pessoas ilógicas não sabem amestrar crocodilos.
e) Bebês são desprezados.

Considere as informações do texto abaixo para responder às questões 11 e 12:

Os sobrenomes de Ana, Beatriz e Carla são, respectivamente, Arantes, Braga e Castro, mas não necessariamente nesta ordem. A de sobrenome Braga, que não é Ana, é mais velha que Carla e a de sobrenome Castro é a mais velha das três.

11. Os sobrenomes de Ana, Beatriz e Carla são, respectivamente:
a) Arantes, Braga e Castro;
b) Arantes, Castro e Braga;
c) Castro, Arantes e Braga;
d) Castro, Braga e Arantes;
e) Braga, Arantes e Castro.

12. Nomeando-as em ordem crescente de idade, teremos:

a) Ana, Beatriz e Carla;
b) Carla, Ana e Beatriz;
c) Beatriz, Carla e Ana;
d) Ana, Carla e Beatriz;
e) Carla, Beatriz e Ana.

13. Três rivais, Ana, Bia e Cláudia, trocam acusações:
A Bia mente - diz Ana.
A Cláudia mente - Bia diz.
Ana e Bia mentem - diz Cláudia.

Com base nestas três afirmações, pode-se concluir que:
a) apenas Ana mente;
b) apenas Cláudia mente;
c) apenas Bia mente;
d) Ana e Cláudia mentem;
e) Ana e Bia mentem.

Considere a situação descrita abaixo para resolver as questões de números 14, 15 e 16.

Ao ver o estrago na sala, mamãe pergunta zangada:
Quem quebrou o vaso da vovó?
Não fui eu - disse André.
Foi o Carlinhos - disse Bruna.
Não fui eu não, foi a Duda - falou Carlinhos.
A Bruna está mentindo! - falou Duda.

14. Sabendo que somente uma das crianças mentiu, pode-se concluir que:
a) André mentiu e foi ele quem quebrou o vaso;
b) Bruna mentiu e Duda quebrou o vaso;
c) Carlinhos mentiu e foi ele quem quebrou o vaso;
d) Duda mentiu e Carlinhos quebrou o vaso;
e) Bruna mentiu e foi ela quem quebrou o vaso.

15. Sabendo que somente uma das crianças disse a verdade, pode-se concluir que:
a) André falou a verdade e Carlinhos quebrou o vaso;
b) Bruna falou a verdade e Carlinhos quebrou o vaso;
c) Duda falou a verdade e André quebrou o vaso;
d) Carlinhos falou a verdade e Duda quebrou o vaso;
e) Duda falou a verdade e foi ela quem quebrou o vaso.

16. Sabendo que somente duas crianças mentiram, podese concluir que:
a) Carlinhos mentiu e André não quebrou o vaso;
b) André mentiu e foi ele quem quebrou o vaso;
c) Bruna mentiu e foi ela quem quebrou o vaso;
d) quem quebrou o vaso foi Bruna ou André;
e) Duda mentiu e Carlinhos quebrou o vaso.

17. Vovó Marina procura saber quem comeu o bolo que havia guardado para o lanche da tarde.
Julinho diz: 1) Não fui eu. 2) Eu nem sabia que havia um bolo. 3) Foi o Maurício.
Maurício diz: 4) Não fui eu. 5) O Julinho mente quando diz que fui eu. 6) Foi o tio Rogério.
Rogério diz: 7) Não fui eu. 8) Eu estava lá em baixo consertando a minha bicicleta. 9) Foi o Zezinho.
Zezinho diz: 10) Não fui eu. 11) Eu nem estava com fome. 12) Não foi o Luiz Antônio.
Luiz Antônio diz: 13) Não fui eu. 14) Eu estava com o Rogério na praia. 15) Foi o Maurício.

Vovó Marina, que não é boba, percebe que cada um deles mentiu sobre uma única das afirmações que fez e encontrou o comilão. Quem comeu o bolo?
a) Julinho.
b) Maurício.
c) Rogério.
d) Zezinho.
e) Luiz Antônio.

18. Resolvi presentear a cada um dos meus colegas com uma pasta para papéis. Então entreguei a de cor branca ao Jonofon, a cinza ao Márcio Lima, e a preta ao Roberto Vasconcelos e disse:
"Nenhum de vocês recebeu a sua própria pasta. Para auxiliá-los dou-lhes ainda três informações, mas só uma delas é correta:
A do Jonofon não é a preta;
A do Márcio não é a branca;
A do Roberto é a cinza."

Depois de alguns segundos de silêncio, quase que simultaneamente, todos disseram as cores corretas de suas próprias pastas. Riram-se e trocaram suas pastas.

As cores das pastas de Jonofon, Márcio e Roberto são, respectivamente:
a) cinza, branca e preta;
b) preta, branca e cinza;
c) branca, preta e cinza;
d) cinza, preta e branca;
e) preta, cinza e branca.

19. Num país há apenas dois tipos de habitantes: os **verds**, que sempre dizem a verdade e os **falcs**, que sempre mentem. Um professor de Lógica, recém chegado a este país, é informado por um nativo que **glup** e **plug**, na língua local, significam sim e não mas o professor não sabe se o nativo que o informou é **verd** ou **falc**. Então ele se aproxima de três outros nativos que estavam conversando juntos e faz a cada um deles duas perguntas:

1ª *Os outros dois são verds?*
2ª *Os outros dois são falcs?*

A primeira pergunta é respondida com **glup** pelos três mas à segunda pergunta os dois primeiros responderam **glup** e o terceiro respondeu **plug**.

Assim, o professor pode concluir que:
a) todos são **verds**;
b) todos são **falcs**;
c) somente um dos três últimos é **falc** e **glup** significa **não**;
d) somente um dos três últimos é **verd** e **glup** significa **sim**;
e) há dois **verds** e **glup** significa **sim**.

20. Mamãe Nírian quer saber de Nathalie, Sophia e Bruna quem terminou de almoçar primeiro. Uma delas diz: *Eu terminei primeiro. A Bruna terminou depois de mim*. Uma outra fala em seguida: *Eu é que terminei primeiro. A Nathalie foi a segunda*. Cada uma das meninas mentiu sobre uma única das declarações que fez e nenhuma delas falou de si mesma duas vezes. Então é certo que:
a) a primeira a falar foi Nathalie, que terminou primeiro o seu almoço.
b) quem terminou primeiro foi Sophia, que foi a segunda a falar.
c) Bruna foi a primeira a falar e a última a terminar o almoço.
d) Sophia não falou e foi a primeira a terminar o almoço.
e) Bruna não falou e foi a última a terminar o almoço.

21. Quatro carros estão parados ao longo do meio fio, um atrás do outro:
Um fusca atrás de outro fusca.
Um carro branco na frente de um carro prata.
Um uno na frente de um fusca.
Um carro prata atrás de um carro preto.
Um carro prata na frente de um carro preto.
Um uno atrás de um fusca.

Do primeiro (na frente) ao quarto carro (atrás) temos então:
a) uno branco, fusca preto, fusca prata e uno prata;
b) uno preto, fusca prata, fusca preto e uno branco;
c) uno branco, fusca prata, fusca preto e uno prata;
d) uno prata, fusca preto, fusca branco e uno preto;
e) uno branco, fusca prata, uno preto e fusca prata.

22. Nathalie pede a suas três irmãs que sentem-se no sofá da sala para tirar uma foto. Do ponto de vista da fotógrafa, tem-se que: a de vestido vermelho senta-se à esquerda da de blusa branca, mas

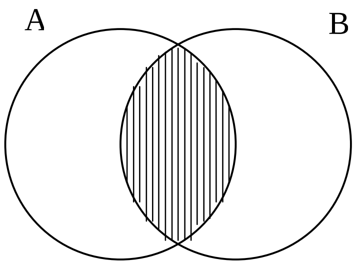
não necessariamente a seu lado; Bruna senta-se à direita de Míriam; Sophia senta-se à esquerda da que veste um conjuntinho azul e esta, à esquerda da que está de blusa branca.

Na foto, que ficou linda, podemos ver:
a) Míriam vestindo uma blusa branca;
b) Sophia de conjuntinho azul;
c) Bruna de vestido vermelho;
d) Míriam sentada entre Sophia e Bruna;
e) Sophia à direita das outras duas.

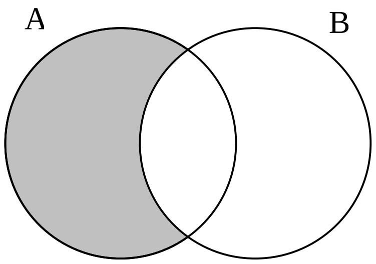
23. Ramirez aprontou uma baita confusão: trocou as caixas de giz e as papeletas de aulas dos professores Júlio, Márcio e Roberto. Cada um deles ficou com a caixa de giz de um segundo e com a papeleta de aulas de um terceiro. O que ficou com a caixa de giz do professor Márcio está com a papeleta de aulas do professor Júlio. Portanto:
a) quem está com a papeleta de aulas do Roberto é o Márcio;
b) quem está com a caixa de giz do Márcio é o Júlio;
c) quem está com a papeleta de aulas do Márcio é o Roberto;
d) quem está com a caixa de giz do Júlio é o Roberto;
e) o que ficou com a caixa de giz do Júlio está com a papeleta de aulas do Márcio.

GABARITO

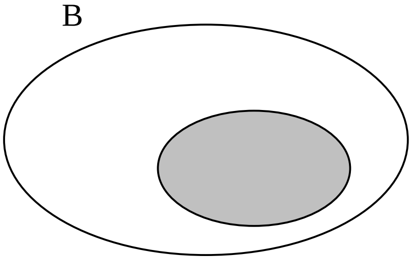
1. Item *a*:



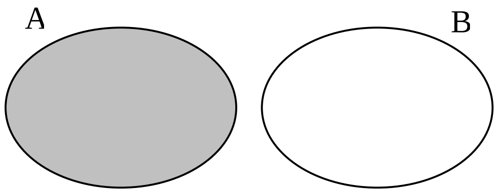
Item *b*:



Para os itens *c* e *d*:



Para o item *e*:



2. d	3. b	4. e	5. e	6. e	7. c

8.
a) O tempo **não** será frio **ou não** será chuvoso.
b) Ela **não** estudou muito **e não** teve sorte na prova.
c) Maria é morena **e** Regina **não** é baixa.
d) O tempo está chuvoso **e não** está frio.
e) **Algum** corvo **não** é negro.
f) **Algum** corvo **não** é negro.
g) **Nenhum** sapo é bonito.
h) **Todas** as vidas são importantes.

9. c	10. a	11. d	12. e	13. d
14. b	15. c	16. a	17. d	18. b
19. c	20. d	21. c	22.d	23. a

LÓGICA DE ARGUMENTAÇÃO

1. Introdução

Desde suas origens na Grécia Antiga, especialmente de Aristóteles (384-322 a.C.) em diante, a lógica tornou-se um dos campos mais férteis do pensamento humano, particularmente da filosofia. Em sua longa história e nas múltiplas modalidades em que se desenvolveu, sempre foi bem claro seu objetivo: fornecer subsídios para a produção de um bom raciocínio.

Por raciocínio, entende-se tanto uma atividade mental quanto o produto dessa atividade. Esse, por sua vez, pode ser analisado sob muitos ângulos: o psicólogo poderá estudar o papel das emoções sobre um determinado raciocínio; o sociólogo considerará as influências do meio; o criminólogo levará em conta as circunstâncias que o favoreceram na prática de um ato criminoso etc. Apesar de todas estas possibilidades, o raciocínio é estudado de modo muito especial no âmbito da lógica. Para ela, pouco importam os contextos psicológico, econômico, político, religioso, ideológico, jurídico ou de qualquer outra esfera que constituam o “ambiente do raciocínio”.

Ao lógico, não interessa se o raciocínio teve esta ou aquela motivação, se respeita ou não a moral social, se teve influências das emoções ou não, se está de acordo com uma doutrina religiosa ou não, se foi produzido por uma pessoa embriagada ou sóbria. Ele considera a sua forma. Ao considerar a forma, ele investiga a coerência do raciocínio, as relações entre as premissas e a conclusão, em suma, sua obediência a algumas regras apropriadas ao modo como foi formulado etc.

Apenas a título de ilustração, seguem-se algumas definições e outras referências à lógica:

“A arte que dirige o próprio ato da razão, ou seja, nos permite chegar com ordem, facilmente e sem erro, ao próprio ato da razão – o raciocínio” (Jacques Maritain).

“A lógica é o estudo dos métodos e princípios usados para distinguir o raciocínio correto do incorreto” (Irving Copi).

“A lógica investiga o pensamento não como ele é, mas como deve ser” (Edmundo D. Nascimento).

“A princípio, a lógica não tem compromissos. No entanto, sua história demonstra o poder que a mesma possui quando bem dominada e dirigida a um propósito determinado, como o fizeram os sofistas, a escolástica, o pensamento científico ocidental e, mais recentemente, a informática” (Bastos; Keller).

1.1. Lógica formal e Lógica material

Desde Aristóteles, seu primeiro grande organizador, os estudos da lógica orientaram-se em duas direções principais: a da *lógica formal,* também chamada de “lógica menor” e a da *lógica material,* também conhecida como “lógica maior”.

A *lógica formal* preocupa-se com a correção formal do pensamento. Para esse campo de estudos da lógica, o conteúdo ou a matéria do raciocínio tem uma importância relativa. A preocupação sempre será com a sua forma. A forma é respeitada quando se preenchem as exigências de coerência interna, mesmo que as conclusões possam ser absurdas do ponto de vista material (conteúdo). Nem sempre um raciocínio formalmente correto corresponde àquilo que chamamos de realidade dos fatos. No entanto, o erro não está no seu aspecto formal e, sim, na sua matéria. Por exemplo, partindo das premissas que

(1) todos os brasileiros são europeus

e que

(2) Pedro é brasileiro,

formalmente, chegar-se-á à conclusão lógica que

(3) Pedro é europeu.

Materialmente, este é um raciocínio falso porque a experiência nos diz que a premissa é falsa. No entanto, formalmente, é um raciocínio válido, porque a conclusão é adequada às premissas. É nesse sentido que se costuma dizer que o computador é falho, já que, na maioria dos casos, processa formalmente informações nele previamente inseridas, mas não tem a capacidade de verificar o valor empírico de tais informações.

Já, a *lógica material* preocupa-se com a aplicação das operações do pensamento à realidade, de acordo com a natureza ou matéria do objeto em questão. Nesse caso, interessa que o raciocínio não só seja formalmente correto, mas que também respeite a matéria, ou seja, que o seu conteúdo corresponda à natureza do objeto a que se refere. Neste caso, trata-se da correspondência entre pensamento e realidade.

Assim sendo, do ponto de vista lógico, costuma-se falar de dois tipos de verdade: a verdade formal e a verdade material. A verdade formal diz respeito, somente e tão-somente, à forma do discurso; já a verdade material tem a ver com a forma do discurso e as suas relações com a matéria ou o conteúdo do próprio discurso. Se houver coerência, no primeiro caso, e coerência e correspondência, no segundo, tem-se a verdade.

Em seu conjunto, a lógica investiga as regras adequadas à produção de um raciocínio válido, por meio do qual visa-se à consecução da verdade, seja ela formal ou material. Relacionando a lógica com a prática, pode-se dizer que é importante que se obtenha não somente uma verdade formal, mas, também, uma verdade que corresponda à experiência. Que seja, portanto, materialmente válida. A conexão entre os princípios formais da lógica e o conteúdo de seus raciocínios pode ser denominada de "lógica informal". Trata-se de uma lógica aplicada ao plano existencial, à vida quotidiana.

1.2. Raciocínio e Argumentação

Três são as principais operações do intelecto humano: a simples apreensão, os juízos e o raciocínio.

A ***simples apreensão*** consiste na captação direta (através dos sentidos, da intuição racional, da imaginação etc) de uma realidade sobre a qual forma-se uma idéia ou conceito (p. ex., de um objeto material, ideal, sobrenatural etc) que, por sua vez, recebe uma denominação (as palavras ou termos, p. ex.: "mesa", "três" e "arcanjo").

O ***juízo*** é ato pelo qual os conceitos ou idéias são ligadas ou separadas dando origem à emissão de um "julgamento" (falso ou verdadeiro) sobre a realidade, mediante *proposições* orais ou escritas. Por exemplo: "Há três arcanjos sobre a mesa da sala"

O ***raciocínio***, por fim, consiste no "arranjo" intelectual dos juízos ou proposições, ordenando adequadamente os conteúdos da consciência. No raciocínio, parte-se de premissas para se chegar a conclusões que devem ser adequadas. Procedendo dessa forma, adquirem-se conhecimentos novos e defende-se ou aprofunda-se o que já se conhece. Para tanto, a cada passo, é preciso preencher os requisitos da coerência e do rigor. Por exemplo: "Se os três arcanjos estão sobre a mesa da sala, não estão sobre a mesa da varanda"

Quando os raciocínios são organizados com técnica e arte e expostos de forma tal a convencer a platéia, o leitor ou qualquer interlocutor tem-se a *argumentação*. Assim, a atividade argumentativa envolve o interesse da persuasão. Argumentar é o núcleo principal da retórica, considerada a arte de convencer mediante o discurso.

Partindo do pressuposto de que as pessoas pensam aquilo que querem, de acordo com as circunstâncias da vida e as decisões pessoais (subjetividade), um argumento conseguirá atingir mais facilmente a meta da persuasão caso as idéias propostas se assentem em boas razões, capazes de mexer com as convicções daquele a quem se tenta convencer. Muitas vezes, julga-se que estão sendo usadas como bom argumento opiniões que, na verdade, não passam de preconceitos pessoais, de modismos, de egoísmo ou de outras formas de desconhecimento. Mesmo assim, a habilidade no argumentar, associada à desatenção ou à ignorância de quem ouve, acaba, muitas vezes, por lograr a persuasão.

Pode-se, então, falar de dois tipos de argumentação: boa ou má, consistente/sólida ou inconsistente/frágil, lógica ou ilógica, coerente ou incoerente, válida ou não-válida, fraca ou forte etc. De qualquer modo, argumentar não implica, necessariamente, manter-se num plano distante da existência humana, desprezando sentimentos e motivações pessoais. Pode-se argumentar bem sem, necessariamente, descartar as emoções, como no caso de convencer o aluno a se esforçar nos estudos diante da perspectiva de férias mais tranqüilas. Enfim, argumentar corretamente (sem armar ciladas para o interlocutor) é apresentar boas razões para o debate, sustentar adequadamente um diálogo, promovendo a dinamização do pensamento. Tudo isso pressupõe um clima democrático.

1.3. Inferência Lógica

Cabe à lógica a tarefa de indicar os caminhos para um raciocínio válido, visando à verdade. Contudo, só faz sentido falar de verdade ou falsidade quando entram em jogo asserções nas quais se declara algo, emitindo-se um juízo de realidade. Existem, então, dois tipos de frases: as assertivas e as não assertivas, que também podem ser chamadas de proposições ou juízos.

Nas frases assertivas afirma-se algo, como nos exemplos: *"a raiz quadrada de 9 é 3"* ou *"o sol brilha à noite".* Já, nas frases não assertivas, não entram em jogo o falso e o verdadeiro, e, por isso, elas não têm "valor de verdade". É o caso das interrogações ou das frases que expressam estados emocionais difusos, valores vivenciados subjetivamente ou ordens. A frase *"toque a bola"*, por exemplo, não é falsa nem verdadeira, por não se tratar de uma asserção (juízo).

As frases declaratórias ou assertivas podem ser combinadas de modo a levarem a conclusões conseqüentes, constituindo raciocínios válidos. Veja-se o exemplo:

(1) Não há crime sem uma lei que o defina;

(2) não há uma lei que defina matar ET's como crime;

(3) logo, não é crime matar ET's.

Ao serem ligadas estas assertivas, na mente do interlocutor, vão sendo criadas as condições lógicas adequadas à conclusão do raciocínio. Esse processo, que muitas vezes permite que a conclusão seja antecipada sem que ainda sejam emitidas todas as proposições do raciocínio, chama-se *inferência*. O ponto de partida de um raciocínio (as premissas) deve levar a conclusões óbvias.

1.4. Termo e Conceito

Para que a validade de um raciocínio seja preservada, é fundamental que se respeite uma exigência básica: as palavras empregadas na sua construção não podem sofrer modificações de significado. Observe-se o exemplo:

Os jaguares são quadrúpedes;

Meu carro é um Jaguar

logo, meu carro é um quadrúpede.

O termo "jaguar" sofreu uma alteração de significado ao longo do raciocínio, por isso, não tem validade.

Quando pensamos e comunicamos os nossos pensamentos aos outros, empregamos palavras tais como "animal", "lei", "mulher rica", "crime", "cadeira", "furto" etc. Do ponto de vista da lógica, tais palavras são classificadas como *termos*, que são palavras acompanhadas de *conceitos.* Assim sendo, o termo é o signo lingüístico, falado ou escrito, referido a um conceito, que é o ato mental correspondente ao signo.

Desse modo, quando se emprega, por exemplo, o termo "mulher rica", tende-se a pensar no conjunto das mulheres às quais se aplica esse conceito, procurando apreender uma nota característica comum a todos os elementos do conjunto, de acordo com a 'intencionalidade' presente no ato mental. Como resultado, a expressão "mulher rica" pode ser tratada como dois termos: pode ser uma pessoa do sexo feminino cujos bens materiais ou financeiros estão acima da média ou aquela cuja trajetória existencial destaca-se pela bondade, virtude, afetividade e equilíbrio.

Para que não se obstrua a coerência do raciocínio, é preciso que fique bem claro, em função do contexto ou de uma manifestação de quem emite o juízo, o significado dos termos empregados no discurso.

1.5. Princípios lógicos

Existem alguns princípios tidos como *conditio sine qua non* para que a coerência do raciocínio, em absoluto, possa ocorrer. Podem ser entendidos como princípios que se referem tanto à realidade das coisas *(plano ontológico),* quanto ao pensamento *(plano lógico),* ou seja, se as coisas em geral devem respeitar tais princípios, assim também o pensamento deve respeitá-los. São eles:

a) ***Princípio da identidade****,* pelo qual se delimita a realidade de um ser. Trata-se de conceituar logicamente qual é a identidade de algo a que se está fazendo referência. Uma vez conceituada uma certa coisa, seu conceito deve manter-se ao longo do raciocínio. Por exemplo, se estou falando de um homem chamado Pedro, não posso estar me referindo a Antônio.

b) ***Princípio da não-contradição***. Se algo é aquilo que é, não pode ser outra coisa, sob o mesmo aspecto e ao mesmo tempo. Por exemplo, se o brasileiro João está doente agora, não está são, ainda que, daqui a pouco possa vir a curar-se, embora, enquanto João, ele seja brasileiro, doente ou são;

c) ***Princípio da exclusão do terceiro termo***. Entre o falso e o verdadeiro não há meio termo, ou é falso ou é verdadeiro. Ou está chovendo ou não está, não é possível um terceiro termo: está meio chovendo ou coisa parecida.

A lógica clássica e a lógica matemática aceitam os três princípios como suas pedras angulares, no entanto, mais recentemente, Lukasiewicz e outros pensadores desenvolveram sistemas lógicos sem o princípio do terceiro excluído, admitindo valor lógico não somente ao *falso* e ao *verdadeiro*, como também ao *indeterminado*.

2. Argumentação e Tipos de Raciocínio

Conforme vimos, a argumentação é o modo como é exposto um raciocínio, na tentativa de convencer alguém de alguma coisa. Quem argumenta, por sua vez, pode fazer uso de diversos tipos de raciocínio. Às vezes, são empregados raciocínios aceitáveis do ponto de vista lógico, já, em outras ocasiões, pode-se apelar para raciocínios fracos ou inválidos sob o mesmo ponto de vista. É bastante comum que raciocínios desse tipo sejam usados para convencer e logrem o efeito desejado, explorando a incapacidade momentânea ou persistente de quem está sendo persuadido de avaliar o valor lógico do raciocínio empregado na argumentação.

Um bom raciocínio, capaz de resistir a críticas, precisa ser dotado de duas características fundamentais: ter premissas aceitáveis e ser desenvolvido conforme as normas apropriadas.

Dos raciocínios mais empregados na argumentação, merecem ser citados a <u>analogia</u>, a <u>indução</u> e a <u>dedução</u>. Dos três, o primeiro é o menos preciso, ainda que um meio bastante poderoso de convencimento, sendo bastante usado pela filosofia, pelo senso comum e, particularmente, nos discursos jurídico e religioso; o segundo é amplamente empregado pela ciência e, também, pelo senso comum e, por fim, a dedução é tida por alguns como o único raciocínio autenticamente lógico, por isso, o verdadeiro objeto da lógica formal.

A maior ou menor valorização de um ou de outro tipo de raciocínio dependerá do objeto a que se aplica, do modo como é desenvolvido ou, ainda, da perspectiva adotada na abordagem da natureza e do alcance do conhecimento.

Às vezes, um determinado tipo de raciocínio não é adequadamente empregado. Vejam-se os seguintes exemplos: o médico alemão Ludwig Büchner (1824-1899) apresentou como argumento contra a existência da alma o fato de esta nunca ter sido encontrada nas diversas dissecações do corpo humano; o astronauta russo Gagarin (1934-1968) afirmou que Deus não existe pois “esteve lá em cima” e não o encontrou. Nesses exemplos fica bem claro que o raciocínio indutivo, baseado na observação empírica, não é o mais adequado para os objetos em questão, já que a alma e Deus são de ordem metafísica, não física.

<u>2.1. Raciocínio analógico</u>

Se raciocinar é passar do desconhecido ao conhecido, é partir do que se sabe em direção àquilo que não se sabe, a analogia (*aná* = segundo, de acordo + *lógon* = razão) é um dos caminhos mais comuns para que isso aconteça. No raciocínio analógico, compara-se uma situação já conhecida com uma situação desconhecida ou parcialmente conhecida, aplicando a elas as informações previamente obtidas quando da vivência direta ou indireta da situação-referência.

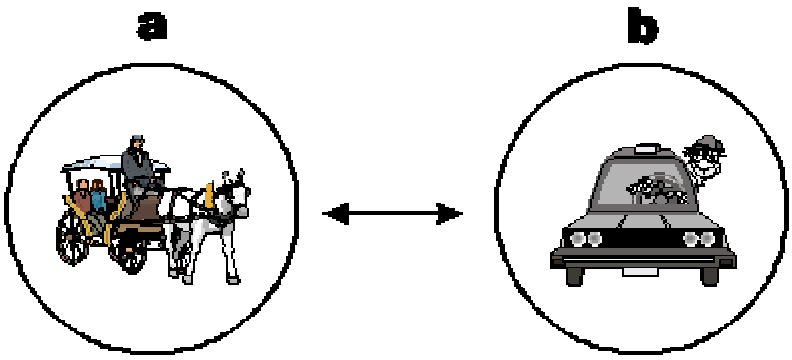
Normalmente, aquilo que é familiar é usado como ponto de apoio na formação do conhecimento, por isso, a analogia é um dos meios mais comuns de inferência. Se, por um lado, é fonte de conhecimentos do dia-a-dia, por outro, também tem servido de inspiração para muitos gênios das ciências e das artes, como nos casos de Arquimedes na banheira (lei do empuxo), de Galileu na catedral de Pisa (lei do pêndulo) ou de Newton sob a macieira (lei da gravitação universal). No entanto, também é uma forma de raciocínio em que se cometem muitos erros. Tal acontece porque é difícil estabelecer-lhe regras rígidas. A distância entre a genialidade e a falha grosseira é muito pequena. No caso dos raciocínios analógicos, não se trata propriamente de considerá-los válidos ou não-válidos, mas de verificar se são fracos ou fortes. Segundo Copi, deles somente se exige “que tenham alguma probabilidade” (*Introdução à lógica*, p. 314).

A força de uma analogia depende, basicamente, de três aspectos:

a) os elementos comparados devem ser verdadeiros e importantes;

b) o número de elementos semelhantes entre uma situação e outra deve ser significativo;

c) não devem existir divergências marcantes na comparação.



No raciocínio analógico, comparam-se duas situações, casos, objetos etc. semelhantes e tiram-se as conclusões adequadas. Na ilustração, tal como a carroça, o carro a motor é um meio de transporte que necessita de um condutor. Este, tanto num caso quanto no outro, precisa ser dotado de bom senso e de boa técnica para desempenhar adequadamente seu papel.

Aplicação das regras acima a exemplos:

a) Os elementos comparados devem ser verdadeiros e relevantes, não imaginários ou insignificantes.tc "a) Os elementos comparados devem ser verdadeiros e relevantes, não imaginários ou insignificantes."

Analogia forte - Ana Maria sempre teve bom gosto ao comprar suas roupas, logo, terá bom gosto ao comprar as roupas de sua filha.

Analogia fraca - João usa terno, sapato de cromo e perfume francês e é um bom advogado; Antônio usa terno, sapato de cromo e perfume francês; logo, deve ser um bom advogado.

b) O número de aspectos semelhantes entre uma situação e outra deve ser significativo.tc "b) O número de aspectos semelhantes entre uma situação e outra deve ser significativo."

Analogia forte - A Terra é um planeta com atmosfera, com clima ameno e tem água; em Marte, tal como na Terra, houve atmosfera, clima ameno e água; na Terra existe vida, logo, tal como na Terra, em Marte deve ter havido algum tipo de vida.

Analogia fraca - T. Edison dormia entre 3 e 4 horas por noite e foi um gênio inventor; eu dormirei durante 3 1/2 horas por noite e, por isso, também serei um gênio inventor.

c) Não devem existir divergências marcantes na comparação.tc "c) Não devem existir divergências marcantes na comparação.."

Analogia forte - A pescaria em rios não é proveitosa por ocasião de tormentas e tempestades; a pescaria marinha não está tendo sucesso porque troveja muito.

Analogia fraca - Os operários suíços que recebem o salário mínimo vivem bem; a maioria dos operários brasileiros, tal como os operários suíços, também recebe um salário mínimo; logo, a maioria dos operários brasileiros também vive bem, como os suíços.

Pode-se notar que, no caso da analogia, não basta considerar a forma de raciocínio, é muito importante que se avalie o seu conteúdo. Por isso, esse tipo de raciocínio não é admitido pela lógica formal. Se as premissas forem verdadeiras, a conclusão não o será necessariamente, mas possivelmente, isto caso cumpram-se as exigências acima.

Tal ocorre porque, apesar de existir uma estrutura geral do raciocínio analógico, não existem regras claras e precisas que, uma vez observadas, levariam a uma conclusão necessariamente válida.

O esquema básico do raciocínio analógico é:

A é N, L, Y, X;

B, tal como A, é N, L, Y, X;

A é, também, Z

logo, B, tal como A, é também Z.

Se, do ponto de vista da lógica formal, o raciocínio analógico é precário, ele é muito importante na formulação de hipóteses científicas e de teses jurídicas ou filosóficas. Contudo, as hipóteses científicas oriundas de um raciocínio analógico necessitam de uma avaliação posterior, mediante procedimentos indutivos ou dedutivos.

Observe-se o seguinte exemplo: John Holland, físico e professor de ciência da computação da Universidade de Michigan, lançou a hipótese (1995) de se verificar, no campo da computação, uma situação semelhante à que ocorre no da genética. Assim como na natureza espécies diferentes podem ser cruzadas para obter o chamado melhoramento genético - um indivíduo mais adaptado ao ambiente -, na informática, também o cruzamento de programas pode contribuir para montar um programa mais adequado para resolver um determinado problema. "*Se quisermos obter uma rosa mais bonita e perfumada, teremos que cruzar duas espécies: uma com forte perfume e outra que seja bela"* diz Holland. *"Para resolver um problema, fazemos o mesmo. Pegamos um programa que dê conta de uma parte do problema e cruzamos com outro programa que solucione outra parte. Entre as várias soluções possíveis, selecionam-se aquelas que parecem mais adequadas. Esse processo se repete por várias gerações - sempre selecionando o melhor programa - até obter o descendente que mais se adapta à questão. É, portanto, semelhante ao processo de seleção natural, em que só sobrevivem os mais aptos".* (Entrevista ao JB, 19/10/95, 1º cad., p. 12).

Nesse exemplo, fica bem clara a necessidade da averiguação indutiva das conclusões extraídas desse tipo de raciocínio para, só depois, serem confirmadas ou não.

2.2. Raciocínio Indutivo - do particular ao geral

Ainda que alguns autores considerem a analogia como uma variação do raciocínio indutivo, esse último tem uma base mais ampla de sustentação. A indução consiste em partir de uma série de casos particulares e chegar a uma conclusão de cunho geral. Nele, está pressuposta a possibilidade da coleta de dados ou da observação de muitos fatos e, na maioria dos casos, também da verificação experimental. Como dificilmente são investigados todos os casos possíveis, acaba-se aplicando o princípio das probabilidades.

Assim sendo, as verdades do raciocínio indutivo dependem das probabilidades sugeridas pelo número de casos observados e pelas evidências fornecidas por estes. A enumeração de casos deve ser realizada com rigor e a conexão entre estes deve ser feita com critérios rigorosos para que sejam indicadores da validade das generalizações contidas nas conclusões.

O esquema principal do raciocínio indutivo é o seguinte:

B é A e é X;

C é A e também é X;

D é A e também é X;

E é A e também é X;

logo, todos os A são X

No raciocínio indutivo, da observação de muitos casos particulares, chega-se a uma conclusão de cunho geral.

Aplicando o modelo:

A jararaca é uma cobra e não voa;

A caninana é uma cobra e também não voa;

A urutu é uma cobra e também não voa;

A cascavel é uma cobra e também não voa;

logo, as cobras não voam.

Contudo,

Ao sair de casa, João viu um gato preto e, logo a seguir, caiu e quebrou o braço. Maria viu o mesmo gato e, alguns minutos depois, foi assaltada. Antonio também viu o mesmo gato e, ao sair do estacionamento, bateu com o carro. Logo, ver um gato preto traz azar.

Os exemplos acima sugerem, sob o ponto de vista do valor lógico, dois tipos de indução: a *indução fraca* e a *indução forte*. É forte quando não há boas probabilidades de que um caso particular discorde da generalização obtida das premissas: a conclusão “nenhuma cobra voa” tem grande probalidade de ser válida. Já, no caso do “gato preto”, não parece haver sustentabilidade da conclusão, por se tratar de mera coincidência, tratando-se de uma indução fraca. Além disso, há casos em que uma simples análise das premissas é suficiente para detectar a sua fraqueza.

Vejam-se os exemplos das conclusões que pretendem ser aplicadas ao comportamento da totalidade dos membros de um grupo ou de uma classe tendo como modelo o comportamento de alguns de seus componentes:

1. Adriana é mulher e dirige mal;

Ana Maria é mulher e dirige mal;

Mônica é mulher e dirige mal;

Carla é mulher e dirige mal;

logo, todas as mulheres dirigem mal.

2. Antônio Carlos é político e é corrupto;

Fernando é político e é corrupto;

Paulo é político e é corrupto;

Estevão é político e é corrupto;

logo, todos os políticos são corruptos.

A avaliação da suficiência ou não dos elementos não é tarefa simples, havendo muitos exemplos na história do conhecimento indicadores dos riscos das conclusões por indução. Basta que um caso contrarie os exemplos até então colhidos para que caia por terra uma “verdade” por ela sustentada. Um exemplo famoso é o da cor dos cisnes. Antes da descoberta da Austrália, onde foram encontrados cisnes pretos, acreditava-se que todos os cisnes fossem brancos porque todos os até então observados eram brancos. Ao ser visto o primeiro cisne preto, uma certeza de séculos caiu por terra.

2.2.1. Procedimentos indutivos

Apesar das muitas críticas de que é passível o raciocínio indutivo, este é um dos recursos mais empregados pelas ciências para tirar as suas conclusões. Há dois procedimentos principais de desenvolvimento e aplicação desse tipo de raciocínio: o da indução por *enumeração incompleta suficiente* e o da indução *por enumeração completa*.

a. Indução por enumeração incompleta suficiente

Nesse procedimento, os elementos enumerados são tidos como suficientes para serem tiradas determinadas conclusões. É o caso do exemplo das cobras, no qual, apesar de não poderem ser conferidos todos os elementos (cobras) em particular, os que foram enumerados são representativos do todo e suficientes para a generalização (“todas as cobras...”)

b. Indução por enumeração completa

Costuma-se também classificar como indutivo o raciocínio baseado na *enumeração completa.* Ainda que alguns a classifiquem como tautologia, ela ocorre quando:

b.a. todos os casos são verificados e contabilizados;

b.b. todas as partes de um conjunto são enumeradas.

Exemplos correspondentes às duas formas de indução por *enumeração completa*:

b.a. todas as ocorrências de dengue foram investigadas e em cada uma delas foi constatada uma característica própria desse estado de morbidez: fortes dores de cabeça; obteve-se, por conseguinte, a conclusão segura de que a dor de cabeça é um dos sintomas da dengue.

b.b. contam-se ou conferem-se todos as peças do jogo de xadrez: ao final da contagem, constata-se que são 32 peças.

Nesses raciocínios, tem-se uma conclusão segura, podendo-se classificá-los como formas de *indução forte*, mesmo que se revelem pouco criativos em termos de pesquisa científica.

O raciocínio indutivo nem sempre aparece estruturado nos moldes acima citados. Às vezes, percebe-se o seu uso pela maneira como o conteúdo (a matéria) fica exposta ou ordenada. Observem-se os exemplos:

- Não parece haver grandes esperanças em se erradicar a corrupção do cenário político brasileiro. Depois da série de protestos realizados pela população, depois das provas apresentadas nas CPI's, depois do vexame sofrido por alguns políticos denunciados pela imprensa, depois do escárnio popular em festividades como o carnaval e depois de tanta insistência de muitos sobre necessidade de moralizar o nosso país, a corrupção parece recrudescer, apresenta novos tentáculos, se disfarça de modos sempre novos, encontrando-se maneiras inusitadas de ludibriar a nação.

- Sentia-me totalmente tranqüilo quanto ao meu amigo, pois, até então, os seus atos sempre foram pautados pelo respeito às leis e à dignidade de seus pares. Assim, enquanto alguns insinuavam a sua culpa, eu continuava seguro de sua inocência.

Tanto no primeiro quanto no segundo exemplos está sendo empregando o método indutivo porque o argumento principal está sustentado pela observação de muitos casos ou fatos particulares que, por sua vez, fundamentam a conclusão. No primeiro caso, a constatação de que diversas tentativas de erradicar a corrupção mostraram-se infrutíferas conduzem à conclusão da impossibilidade de sua superação, enquanto que, no segundo exemplo, da observação do comportamento do amigo infere-se sua inocência.

Analogia, indução e probabilidade

Nos raciocínios analógico e indutivo, apesar de boas chances do contrário, há sempre a possibilidade do erro. Isso ocorre porque se está lidando com probabilidades e estas não são sinônimas de certezas.

Há três tipos principais de probabilidades: a matemática, a moral e a natural.

a) A ***probabilidade matemática*** é aquela na qual, partindo-se dos casos numerados, é possível calcular, sob forma de fração, a possibilidade de algo ocorrer – na fração, o denominador representa os casos possíveis e o numerador o número de casos favoráveis. Por exemplo, no caso de um sorteio usando uma moeda, a probabilidade de dar cara é de 50% e a de dar coroa também é de 50%.

b) A ***probabilidade moral*** é a relativa a fatos humanos destituídos de caráter matemático. É o caso da possibilidade de um comportamento criminoso ou virtuoso, de uma reação alegre ou triste etc. Exemplos: considerando seu comportamento pregresso, é provável que Pedro não tenha cometido o crime, contudo... Conhecendo-se a meiguice de Maria, é provável que ela o receba bem, mas...

c) A ***probabilidade natural*** é a relativa a fenômenos naturais dos quais nem todas as possibilidades são conhecidas. A previsão meteorológica é um exemplo particular de probalidade natural. A *teoria do caos* assenta-se na tese da imprevisibilidade relativa e da descrição apenas parcial de alguns eventos naturais.

Por lidarem com probabilidades, a indução e a analogia são passíveis de conclusões inexatas. Assim sendo, deve-se ter um relativo cuidado com as suas conclusões. Elas expressam muito bem a necessidade humana de explicar e prever os acontecimentos e as coisas, contudo, também revelam as limitações humanas no que diz respeito à construção do conhecimento.

2.3. Raciocínio dedutivo - do geral ao particular

O raciocínio dedutivo, conforme a convicção de muitos estudiosos da lógica, é aquele no qual são superadas as deficiências da analogia e da indução.

No raciocínio dedutivo, inversamente ao indutivo, parte-se do geral e vai-se ao particular. As inferências ocorrem a partir do progressivo avanço de uma premissa de cunho geral, para se chegar a uma conclusão tão ou menos ampla que a premissa. O silogismo é o melhor exemplo desse tipo de raciocínio:

Premissa maior: Todos os homens são mamíferos. *universal*

Premissa menor: Pedro é homem.

Conclusão: Logo, Pedro é mamífero. *Particular*

No raciocínio dedutivo, de uma premissa de cunho geral podem-se tirar conclusões de cunho particular.

Aristóteles refere-se à dedução como *"a inferência na qual, colocadas certas coisas, outra diferente se lhe segue necessariamente, somente pelo fato de terem sido postas".* Uma vez posto que todos os homens são mamíferos e que Pedro é homem, há de se inferir, necessariamente, que Pedro é um mamífero. De certo modo, a conclusão já está presente nas premissas, basta observar algumas regras e inferir a conclusão.

2.3.1. Construção do Silogismo

A estrutura básica do silogismo (*sýn*/com + *lógos*/razão) consiste na determinação de uma premissa maior (ponto de partida), de uma premissa menor (termo médio) e de uma conclusão, inferida a partir da premissa menor. Em outras palavras, o silogismo sai de uma premissa maior, progride através da premissa menor e infere, necessariamente, uma conclusão adequada.

Eis um exemplo de silogismo:

Todos os atos que ferem a lei são puníveis	*Premissa Maior*
A concussão é um ato que fere a lei	*Premissa Menor*
Logo, a concussão é punível	*Conclusão*

O silogismo estrutura-se por *premissas*. No âmbito da lógica, as premissas são chamadas de *proposições* que, por sua vez, são a expressão oral ou gráfica de *frases assertivas* ou *juízos*. O termo é uma palavra ou um conjunto de palavras que exprime um conceito. Os termos de um silogismo são necessariamente três: maior, médio e menor. O termo maior é aquele cuja extensão é maior (normalmente, é o predicado da conclusão); o termo médio é o que serve de intermediário ou de conexão entre os outros dois termos (não figura na conclusão) e o termo menor é o de menor extensão (normalmente, é o sujeito da conclusão). No exemplo acima, *punível* é o termo maior, *ato que fere a lei* é o termo médio e *concussão* é o menor.

2.3.1.1. As Regras do Silogismo

Oito são as regras que fazem do silogismo um raciocínio perfeitamente lógico. As quatro primeiras dizem respeito às relações entre os termos e as demais dizem respeito às relações entre as premissas. São elas:

2.3.1.1.1. Regras dos Termos

1) Qualquer silogismo possui somente três termos: maior, médio e menor.

Exemplo de formulação correta:

Termo Maior: Todos os gatos são mamíferos.

Termo Médio: Mimi é um gato.

Termo Menor: Mimi é um mamífero.

Exemplo de formulação incorreta:

Termo Maior: Toda gata(1) é quadrúpede.

Termo Médio: Maria é uma gata(2).

Termo Menor: Maria é quadrúpede.

O termo “gata” tem dois significados, portanto, há quatro termos ao invés de três.

2) Os termos da conclusão nunca podem ser mais extensos que os termos das premissas.

Exemplo de formulação correta:

Termo Maior: Todas as onças são ferozes.

Termo Médio: Nikita é uma onça.

Termo Menor: Nikita é feroz.

Exemplo de formulação incorreta:

Termo Maior: Antônio e José são poetas.

Termo Médio: Antônio e José são surfistas.

Termo Menor: Todos os surfistas são poetas.

“Antonio e José” é um termo menos extenso que “todos os surfistas”.

3) O predicado do termo médio não pode entrar na conclusão.

Exemplo de formulação correta:

Termo Maior: Todos os homens podem infringir a lei.

Termo Médio: Pedro é homem.

Termo Menor: Pedro pode infringir a lei.

Exemplo de formulação incorreta:

Termo Maior: Todos os homens podem infringir a lei.

Termo Médio: Pedro é homem.

Termo Menor: Pedro ou é homem (?) ou pode infringir a lei.

A ocorrência do termo médio “homem” na conclusão é inoportuna.

4) O termo médio deve ser tomado ao menos uma vez em sua extensão universal.

Exemplo de formulação correta:

Termo Maior: <u>Todos os homens</u> são dotados de habilidades.

Termo Médio: Pedro é <u>homem</u>.

Termo Menor: Pedro é dotado de habilidades.

Exemplo de formulação incorreta:

Termo Maior: Alguns homens são sábios.

Termo Médio: Ora os ignorantes são homens

Termo Menor: Logo, os ignorantes são sábios

O predicado “homens” do termo médio não é universal, mas particular.

2.3.1.1.2. Regras das Premissas

5) De duas premissas negativas, nada se conclui.

Exemplo de formulação incorreta:

Premissa Maior: <u>Nenhum gato</u> é mamífero

Premissa Menor: Lulu <u>não é um gato</u>.

Conclusão: (?).

6) De duas premissas afirmativas, não se tira uma conclusão negativa.

Exemplo de formulação incorreta:

Premissa Maior: Todos os bens morais devem ser desejados.

Premissa Menor: Ajudar ao próximo é um bem moral.

Conclusão: Ajudar ao próximo <u>não</u> (?) deve ser desejado.

7) A conclusão segue sempre a premissa mais fraca. A premissa mais fraca é sempre a de caráter negativo.

Exemplo de formulação incorreta:

Premissa Maior: As aves são animais que voam.

Premissa Menor: Alguns animais não são aves.

Conclusão: Alguns animais não voam.

Exemplo de formulação incorreta:

Premissa Maior: As aves são animais que voam.

Premissa Menor: Alguns animais não são aves.
Conclusão: Alguns animais voam.

8) De duas premissas particulares nada se conclui.
Exemplo de formulação incorreta:
Premissa Maior: Mimi é um gato.
Premissa Menor: Um gato foi covarde.
Conclusão: (?)

ÁLGEBRA LINEAR

SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM DUAS VARIÁVEIS

Um sistema de equações com duas variáveis, x e y, é um conjunto de equações do tipo

$$\mathbf{ax + by = c(a, b, c \in R)}$$

ou de equações redutíveis a esta forma.

Exemplo:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x + 3y = 9 \end{cases}$$

Resolver um sistema significa encontra todos os *pares ordenados* (x ; y) onde os valores de x e de y satisfazem a todas as equações do sistema ao mesmo tempo.

Exemplo:

No sistema indicado no exemplo anterior, o único par ordenado capaz de satisfazer às duas equações simultaneamente é:

$$\mathbf{(x ; y) = (2 ; 1)}$$

Ou seja, x = 2 e y = 1

Resolução algébrica

Dentre os vários métodos de resolução algébrica aplicáveis aos sistemas do 1º grau, destacamos dois:

a) *método da adição*

b) *método da substituição*

Para exemplificá-los, resolveremos o sistema seguinte pelos dois métodos:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 & \text{(I)} \\ 3x + 2y = 12 & \text{(II)} \end{cases}$$

a) Método da Adição

1º passo: multiplicamos as equações por números escolhidos de forma a obtermos *coeficientes opostos* em uma das variáveis.

No caso, poderemos multiplicar a equação (I) por –2:

$$2x + y = 7 \xrightarrow{X\ (-2)} -4x - 2y = -14$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} -4x - 2y = -14 \\ 3x + 2y = 12 \end{array}$$

Observe agora que a variável y tem, agora, *coeficientes opostos.*

2º passo: somamos membro a membro as equações encontradas:

$$\begin{array}{r} -4x - 2y = -14 \\ 3x + 2y = 12 \\ \hline -1x + 0 = -2 \end{array}$$

A variável y foi *cancelada* restando apenas a variável x na última equação.

3º passo: resolvemos a equação resultante que tem somente uma variável:

$$-1x = -2$$

$$\boxed{x = 2}$$

4º passo: o valor da variável encontrada é substituído numa das equações iniciais que contenha também a outra variável e, então, resolvemos a equação resultante:

$$2x + y = 7$$
$$2(2) + y = 7$$
$$4 + y = 7$$
$$y = 7 - 4$$
$$\boxed{y = 3}$$

b) Método da Substituição

1º passo: isolamos uma das variáveis em uma das equações dadas:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \mathbf{y} = 7 - 2x$$

2º passo: a variável isolada é substituída na outra equação e, então, resolvemos a equação resultante que tem somente uma variável:

$$3x + 2\mathbf{y} = 12$$
$$3x + 2\mathbf{(7 - 2x)} = 12$$
$$3x + 14 - 4x = 12$$
$$3x - 4x = 12 - 14$$
$$-1x = -2$$
$$\boxed{x = 2}$$

3º passo: levamos o valor encontrado para a equação que tem a variável isolada e calculamos o valor desta:

$$y = 7 - 2x$$
$$y = 7 - 2(2)$$
$$y = 7 - 4$$
$$\boxed{y = 3}$$

4º passo: escrevemos o conjunto solução:

$$S = \{(2; 3)\}$$

Sistema indeterminado

Se, ao tentarmos encontrar o valor de uma das variáveis, chegarmos a uma expressão do tipo

$$0 = 0$$
ou
$$3 = 3$$

ou qualquer outra que expresse uma sentença, *sempre verdadeira*, o sistema terá ***infinitas soluções*** e diremos que ele é ***possível mas indeterminado***.

Sistema impossível

Se, ao tentarmos encontrar o valor de uma das variáveis, chegarmos a uma expressão do tipo

$$0 = 3$$
ou
$$2 = 5$$

ou qualquer outra que expresse uma sentença *sempre falsa*, o sistema ***não terá qualquer solução*** e diremos que ele é ***impossível***.

O conjunto-solução de um sistema impossível é ***vazio***.

Resolução Gráfica

Vamos considerar um sistema de 1º grau com duas variáveis e duas equações:

$$\begin{cases} ax + by = c (r) \\ mx + ny = p (s) \end{cases}$$

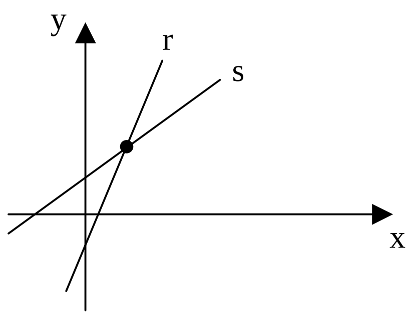
* Cada equação do sistema representa uma reta

A pergunta-chave é: **"Quantos pontos coincidem entre as retas?"** Pois cada ponto comum às retas do sistema corresponde a uma solução.

Graficamente, existirão três situações possíveis:

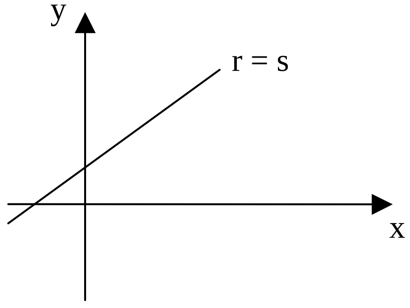
1º) ***Retas Concorrentes***

Se as retas forem concorrentes o sistema terá **uma única solução**. Será um sistema **possível e determinado**.



2º) ***Retas Paralelas Coincidentes***

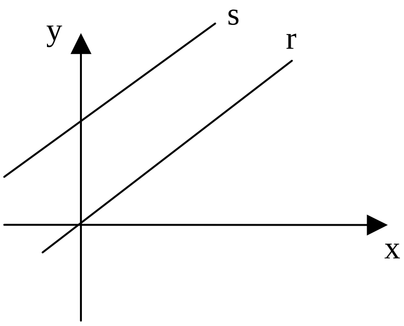
Se as retas forem coincidentes o sistema terá **infinitas soluções**. Será um sistema **possível, mas indeterminado**.



* Infinitos pontos coincidentes

3º) ***Retas Paralelas Distintas***

Se as retas forem paralelas e distintas o sistema **não terá qualquer solução**. Será um sistema **impossível**.



* Nenhum ponto coincidente

EXERCÍCIOS

1) Resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ x - y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + 3y = -4 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x - 7y = 13 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x + 5y = 17 \\ 3x - 2y = 16 \end{cases}$

2) Dividir o número 85 em duas partes iguais tais que a maior exceda a menor em 21 unidades.

3) Dois números são tais que multiplicando-se o maior por 5 e o menor por 6 os produtos serão iguais. O menor, aumentado de 1 unidade, fica igual ao maior, diminuído de 2 unidades. Quais são estes números?

4) Numa gincana cultural, cada resposta correta vale 5 pontos mas perdem-se 3 pontos para cada resposta errada. Em 20 perguntas, minha equipe só conseguiu 44 pontos. Quantas perguntas ela acertou?

5) Somando-se 8 ao numerador, uma fração fica equivalendo a 1. Se, em vez disso, somássemos 7 ao denominador, a fração ficaria equivalente a $\frac{1}{2}$. Qual é a fração original?

6) Num quintal encontram-segalinhas e coelhos, num total de 30 animais. Contando-se os pés seriam, ao todo, 94. Quantos coelhos e quantas galinhas estão no quintal?

7) A soma dos valores absolutos dos dois algarismos de um número é 9. Somado com 27, totaliza outro número, representado pelos mesmos algarismos dele, mas na ordem inversa. Qual é este número?

8) O mago Paulo Coelho tem em seu “laboratório” algumas cobras, sapos e morcegos. Ao todo são 14 cabeças, 26 patas e 6 asas. Quantos animais de cada tipo estão no laboratório?

9) Calcular três números tais que a soma do 1º com o 2º é 40, a soma do 2º com o 3º é 70 e a soma do 1º o 3º é 60.

10) José Antônio tem o dobro da idade que Antônio José tinha quando José Antônio tinha a idade que Antônio José tem. Quando Antônio José tiver a idade que José Antônio tem, a soma das idades deles será 63 anos. Quantos anos tem cada um deles?

11) Uma ração para canários é composta por dois tipos de sementes, A e B. Cada uma delas contém três nutrientes importantes, x, y e z, em quantidades diferentes, conforme mostrado na tabela abaixo.

	x	y	z
A	5	3	1
B	4	6	2

Se a ração for preparada com 2 partes da semente A e 3 partes da semente B, qual a quantidade que encontraremos para cada um dos três nutrientes?

Enunciado para as questões 12 e 13:

Ao se compararem 3 projetos diferentes para residências, constatou-se que as quantidades utilizadas para 4 materiais de acabamento variavam de um projeto para outro de acordo com a tabela abaixo que mostra as quantidades utilizadas para cada um deles.

	tintas	cerâmicas	louças	vidros
Projeto A	6	9	4	6
Projeto B	8	4	3	5
Projeto C	5	10	2	4

Sabe-se que os custos unitários de cada material são: tinta = $ 12; cerâmica = $ 15; louça = $ 8 e vidro = $ 9. Pergunta-se:

12) Qual dos três projetos terá o menor custo de acabamento e de quanto será este custo?

13) Se uma cooperativa construir uma vila com 3, 5 e 2 casas de projetos A, B e C respectivamente, qual será o custo total do material de acabamento?

14) Uma fábrica produz três tipos de fertilizantes para o solo, A, B e C, cada um deles contendo determinada quantidade de nitrogênio (N), de fósforo (P) e de potássio (K). A tabela abaixo mostra, em g/kg, as concentrações de N, P e K em cada tipo de fertilizante.

	N	P	K
A	1	3	4
B	2	3	5
C	3	0	3

15) Uma fábrica especializada em equipamentos de computação fabrica três tipos de computadores: A, B e C, empregando, em cada um, componentes X, Y, Z e W, nas quantidades indicadas na tabela abaixo.

	X	Y	Z	W
A	5	20	16	7
B	7	18	12	9
C	6	25	8	5

Sabe-se que os preços, por unidade, dos componentes X, Y, Z e W são, respectivamente, $ 15.000, $ 8.000, $ 5.000 e $ 1.000. Os preços unitários de cada tipo de micro, A, B e C, serão, respectivamente:

a) $ 335.000, $ 318.000 e $ 322.000

b) $ 335.000, $ 322.000 e $ 318.000

c) $ 322.000, $ 318.000 e $ 335.000

d) $ 318.000, $ 322.000 e $ 335.000

e) $ 322.000, $ 335.000 e $ 318.000

16) Para uma construção foram pesquisados três tipos de concreto, de três diferentes fábricas, A, B e C. Para cada quilo de concreto, determinou-se que:

I – O concreto da fábrica A tem 1 unidade de brita, 3 de areia e 4 de cimento.

II – O concreto da fábrica B tem 2, 3 e 5 unidades, respectivamente, de brita, areia e cimento.

III – o concreto da fábrica C tem 3 unidades de brita, 2 de areia e 3 de cimento.

O concreto ideal deverá conter 23 unidades de brita, 25 de areia e 38 de cimento. Usando-se concreto das três fábricas, as quantidades, em kg, de cada uma delas, necessárias para se obter o concreto ideal serão, respectivamente, para A, B e C:

a) 5, 3 e 2

b) 4, 4 e 2

c) 3, 4 e 5

d) 2, 3 e 5

e) 1, 5 e 3

17) As idades de quatro pessoas são tais que:

a soma das três primeiras é 73 anos;

a soma das três últimas é 60;

a primeira somada com as duas últimas é 63;

a última somada com as duas primeiras é 68.

A idade da mais velha é:

a) 32 b) 28 c) 25 d) 20 e) 15

18) Quando o professor Oliveira entrou na sala dos professores, o número de professores (homens) presentes ficou igual ao triplo do número de professoras. Se, juntamente com Oliveira, entrasse também uma professora, o número destas seria a metade do número de professores (homens). Professores e Professoras, quantos estavam na sala após a chegada do mestre Oliveira?

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

19) Um colégio tem 525 alunos, entre moças e rapazes. A soma dos quocientes do número de rapazes por 25 com o do número de moças por 30 é igual a 20. Seja **r** o número de rapazes e **m** o de moças, pode-se afirmar que:

a) **r** é 40% de (**r** + **m**)

b) (**r** + **m**) é 250% de **m**

c) **r** é 150% maior que **m**

d) (**r** - **m**) é 150% maior que **m**

e) **m** é 60% de **r**

20) No sistema abaixo, cada letra representa um número inteiro de 1 a 6.

$$\begin{cases} A + B + C = 12 \\ C + D + E = 14 \\ E + F + A = 10 \end{cases}$$

Então:

a) A = 6 b) B = 5 c) C = 4 d) D = 3 e) E = 2

GABARITO:

1) a) (3; 2) c) (7; 2) e) (3; -1) g) (2; -1)
b) (5; 1) d) (4; 3) f) (2; -2) h) (6; 1)

2) 53 e 32

3) 15 e 18

4) 13 perguntas

5) 15/23

6) 13 galinhas e 17 coelhos

7) 36

8) 6 cobras, 5 sapos, 3 morcegos (e 1 Coelho – o Paulo *Coelho*)

9) O primeiro é 15, o segundo é 25 e o terceiro é 45.

10) José Antônio tem 28 anos e Antônio José tem 21 anos.

11) x = 22, y = 24 e z = 8.

12) O projeto B: $ 225,00

13) $ 2.816,00

14) A: 1 kg; B: 2 kg e C: 2 kg.

15) c

16) d

17) b

18) d

19) c

20 d

PROBABILIDADES

1 – Introdução

Chama-se **experimento aleatório** àquele cujo resultado é imprevisível, porém pertence necessariamente a um conjunto de resultados possíveis denominado **espaço amostral**. Qualquer subconjunto desse espaço amostral é denominado **evento**.

Se este subconjunto possuir apenas **um elemento**, o denominamos **evento elementar**.

Por exemplo, no lançamento de um dado, o nosso espaço amostral seria U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Exemplos de eventos no espaço amostral U:

A: sair número maior do que 4: A = {5, 6}

B: sair um número primo e par: B = {2}

C: sair um número ímpar: C = {1, 3, 5}

Nota: O espaço amostral é também denominado espaço de prova.

Trataremos aqui dos espaços amostrais equiprováveis, ou seja, aqueles onde os eventos elementares possuem a mesma chance de ocorrerem.

Por exemplo, no lançamento do dado acima, supõe-se que sendo o dado perfeito, as chances de sair qualquer número de 1 a 6 são iguais. Temos então um espaço equiprovável.

Em oposição aos **fenômenos aleatórios**, existem os **fenômenos determinísticos**, que são aqueles cujos resultados são previsíveis, ou seja, temos certeza dos resultados a serem obtidos.

Normalmente existem diversas possibilidades possíveis de ocorrência de um fenômeno aleatório, sendo a medida numérica da ocorrência de cada uma dessas possibilidades, denominada Probabilidade.

Consideremos uma urna que contenha 49 bolas azuis e 1 bola branca. Para uma retirada, teremos duas possibilidades: bola azul ou bola branca. Percebemos entretanto que será muito mais freqüente obtermos numa retirada, uma bola azul, resultando daí, podermos afirmar que o evento "sair bola azul" tem maior probabilidade de ocorrer, do que o evento "sair bola branca".

2 – Conceito elementar de Probabilidade

Seja U um espaço amostral finito e equiprovável e A um determinado evento ou seja, um subconjunto de U. A probabilidade p(A) de ocorrência do evento A será calculada pela fórmula

p(A) = n(A) / n(U)

onde:

n(A) = número de elementos de A e n(U) = número de elementos do espaço de prova U.

Vamos utilizar a fórmula simples acima, para resolver os seguintes exercícios introdutórios:

1.1 - Considere o lançamento de um dado. Calcule a probabilidade de:

a) sair o número 3:

Temos U = {1, 2, 3, 4, 5, 6} [n(U) = 6] e A = {3} [n(A) = 1]. Portanto, a probabilidade procurada será igual a p(A) = 1/6.

b) sair um número par: agora o evento é A = {2, 4, 6} com 3 elementos; logo a probabilidade procurada será p(A) = 3/6 = 1/2.

c) sair um múltiplo de 3: agora o evento A = {3, 6} com 2 elementos; logo a probabilidade procurada será p(A) = 2/6 = 1/3.

d) sair um número menor do que 3: agora, o evento A = {1, 2} com dois elementos. Portanto, p(A) = 2/6 = 1/3.

e) sair um quadrado perfeito: agora o evento A = {1,4} com dois elementos. Portanto, p(A) = 2/6 = 1/3.

1.2 - Considere o lançamento de dois dados. Calcule a probabilidade de:

a) sair a soma 8

Observe que neste caso, o espaço amostral U é constituído pelos pares ordenados (i,j), onde i = número no dado 1 e j = número no dado 2.

É evidente que teremos 36 pares ordenados possíveis do tipo (i, j) onde i = 1, 2, 3, 4, 5, ou 6, o mesmo ocorrendo com j.

As somas iguais a 8, ocorrerão nos casos:(2,6),(3,5),(4,4),(5,3) e (6,2). Portanto, o evento "soma igual a 8" possui 5 elementos. Logo, a probabilidade procurada será igual a p(A) = 5/36.

b) sair a soma 12

Neste caso, a única possibilidade é o par (6,6). Portanto, a probabilidade procurada será igual a p(A) = 1/36.

1.3 – Uma urna possui 6 bolas azuis, 10 bolas vermelhas e 4 bolas amarelas. Tirando-se uma bola com reposição, calcule as probabilidades seguintes:

a) sair bola azul

p(A) = 6/20 = 3/10 = 0,30 = 30%

b) sair bola vermelha

p(A) = 10/20 =1/2 = 0,50 = 50%

c) sair bola amarela

p(A) = 4/20 = 1/5 = 0,20 = 20%

Vemos no exemplo acima, que as probabilidades podem ser expressas como porcentagem. Esta forma é conveniente, pois permite a estimativa do número de ocorrências para um número elevado de experimentos. Por exemplo, se o experimento acima for repetido diversas vezes, podemos afirmar que em aproximadamente 30% dos casos, sairá bola azul, 50% dos casos sairá bola vermelha e 20% dos casos sairá bola amarela. Quanto maior a quantidade de experimentos, tanto mais a distribuição do número de ocorrências se aproximará dos percentuais indicados.

3 – Propriedades

P_1: A probabilidade do evento impossível é nula.

Com efeito, sendo o evento impossível o conjunto vazio (Ø), teremos:

p(Ø) = n(Ø)/n(U) = 0/n(U) = 0

Por exemplo, se numa urna só existem bolas brancas, a probabilidade de se retirar uma bola verde (evento impossível, neste caso) é nula.

P_2: A probabilidade do evento certo é igual a unidade.

Com efeito, p(A) = n(U)/n(U) = 1

Por exemplo, se numa urna só existem bolas vermelhas, a probabilidade de se retirar uma bola vermelha (evento certo, neste caso) é igual a 1.

P_3: A probabilidade de um evento qualquer é um número real situado no intervalo real [0, 1].

Esta propriedade, decorre das propriedades 1 e 2 acima.

P_4: A soma das probabilidades de um evento e do seu evento complementar é igual a unidade.

Seja o evento **A** e o seu complementar **A'**. Sabemos que **A** U **A'** = **U**.

n(A U A') = n(U) e, portanto, n(A) + n(A') = n(U).

Dividindo ambos os membros por n(U), vem:

n(A)/n(U) + n(A')/n(U) = n(U)/n(U), de onde conclui-se:

p(A) + p(A') = 1

Nota: esta propriedade simples, é muito importante pois facilita a solução de muitos problemas aparentemente complicados. Em muitos casos, é mais fácil calcular a probabilidade do evento complementar e, pela propriedade acima, fica fácil determinar a probabilidade do evento.

P_5: Sendo A e B dois eventos, podemos escrever:

p(A U B) = p(A) + p(B) – p(A ∩ B)

Observe que se A ∩ B= Ø (ou seja, a interseção entre os **conjuntos** A e B é o conjunto vazio), então **p(A U B) = p(A) + p(B)**.

Com efeito, já sabemos da Teoria dos Conjuntos que

n(A U B) = n(A) + n(B) – n(A ∩ B)

Dividindo ambos os membros por n(U) e aplicando a definição de probabilidade, concluímos rapidamente a veracidade da fórmula acima.

Exemplo:

Em uma certa comunidade existem dois jornais J e P. Sabe-se que 5000 pessoas são assinantes do jornal J, 4000 são assinantes de P, 1200 são assinantes de ambos e 800 não lêem jornal. Qual a probabilidade de que uma pessoa escolhida ao acaso seja assinante de ambos os jornais?

SOLUÇÃO:

Precisamos calcular o número de pessoas do conjunto universo, ou seja, nosso espaço amostral.

Teremos:
n(U) = N(J U P) + N.º de pessoas que não lêem jornais.

n(U) = n(J) + N(P) – N(J ∩ P) + 800

n(U) = 5000 + 4000 – 1200 + 800

n(U) = 8600

Portanto, a probabilidade procurada será igual a:

p = 1200/8600 = 12/86 = 6/43.

Logo, p = 6/43 = 0,1395 = 13,95%.

A interpretação do resultado é a seguinte: escolhendo-se ao acaso uma pessoa da comunidade, a probabilidade de que ela seja assinante de ambos os jornais é de aproximadamente 14%.(contra 86% de probabilidade de não ser).

4 – Probabilidade condicional

Considere que desejamos calcular a probabilidade da ocorrência de um evento A, sabendo-se de antemão que ocorreu um certo evento B. Pela definição de probabilidade vista anteriormente, sabemos que a probabilidade de A deverá ser calculada, dividindo-se o número de elementos de elementos de A que também pertencem a B, pelo número de elementos de B. A probabilidade de ocorrer A, sabendo-se que já ocorreu B, é denominada Probabilidade condicional e é indicada por p(A/B) – probabilidade de ocorrer A sabendo-se que já ocorreu B – daí, o nome de **probabilidade condicional**.

Teremos então:

$p(A/B) = n(A \cap B)/ n(B)$

onde $A \cap B$ = interseção dos conjuntos A e B.

Esta fórmula é importante, mas pode ser melhorada. Vejamos:

Ora, a expressão acima, pode ser escrita sem nenhum prejuízo da elegância, nem do rigor, como:

$p(A/B) = [n(A \cap B)/n(U)] . [n(U)/n(B)]$

$p(A/B) = p(A \cap B) . 1/p(B)$

Vem, então: $P(A/B) = p(A \cap B)/p(B)$, de onde concluímos finalmente:

$p(A \cap B) = p(A/B).p(B)$

Esta fórmula é denominada Lei das Probabilidades Compostas.

Esta importante fórmula, permite calcular a probabilidade da ocorrência simultânea dos eventos A e B, sabendo-se que já ocorreu o evento B.

Se a ocorrência do evento B, não mudar a probabilidade da ocorrência do evento A, então $p(A/B) = p(A)$ e, neste caso, os eventos são ditos independentes, e a fórmula acima fica:

$p(A \cap B) = p(A) . p(B)$

Podemos então afirmar, que a probabilidade de ocorrência simultânea de eventos independentes, é igual ao produto das probabilidades dos eventos considerados.

Exemplo:

Uma urna possui cinco bolas vermelhas e duas bolas brancas.

Calcule as probabilidades de:

a) em duas retiradas, sem reposição da primeira bola retirada, sair uma bola vermelha (V) e depois uma bola branca (B).

Solução:

$p(V \cap B) = p(V) . p(B/V)$

$p(V) = 5/7$ (5 bolas vermelhas de um total de 7).

Supondo que saiu bola vermelha na primeira retirada, ficaram 6 bolas na urna. Logo:

$p(B/V) = 2/6 = 1/3$

Da lei das probabilidades compostas, vem finalmente que:

$P(V \cap B) = 5/7 . 1/3 = 5/21 = 0,2380 = 23,8\%$

b) em duas retiradas, com reposição da primeira bola retirada, sair uma bola vermelha e depois uma bola branca.

Solução:

Com a reposição da primeira bola retirada, os eventos ficam independentes. Neste caso, a probabilidade buscada poderá ser calculada como:

$P(V \cap B) = p(V) . p(B) = 5/7 . 2/7 = 10/49 = 0,2041 = 20,41\%$

Observe atentamente a diferença entre as soluções dos itens (a) e (b) acima, para um entendimento perfeito daquilo que procuramos transmitir.

Vimos que num espaço amostral **U**, finito e equiprovável, a probabilidade de ocorrência de um evento **A** é dada por:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

onde n(A) = n.º de elementos de A **e** n(U) = n.º de elementos de U.

Sabe-se que p(A) é um número real que pode assumir valores de 0 a 1, sendo p(A) = 0, a probabilidade de um evento impossível (conjunto vazio) e p(A) = 1, a probabilidade de um evento certo (conjunto universo).

Já sabemos também que definido um evento A, podemos considerar o seu evento complementar

$A' = \{x \in U; x \notin A\}$.

Além disto, vimos que $p(A') = 1 - p(A)$.

Vejamos um exemplo de aplicação imediata das fórmulas acima:

Ao sortear ao acaso um dos números naturais menores que 100, qual a probabilidade do número sorteado ser menor do que 30?

Ora, neste caso, o nosso espaço amostral é: U = {0,1,2,3, ... , 99}.

O evento A é igual a: A ={0,1,2,3, ... , 29}.

O evento complementar de A é igual a: A'= {30,31,32, ... , 99}.

Temos que: n(U) = 100, n(A) = 30 e n(A') = 70.

Portanto:

p(A) = 30/100 = 0,30 = 30%

p(A') = 70/100 = 0,70 = 70%

Vemos que p(A) + p(A') = 0,30 + 0,70 = 1, o que confirma que a probabilidade de um evento somada à probabilidade do seu evento complementar, é igual à unidade.

Vimos também que, sendo A e B dois eventos do espaço amostral U, podemos escrever:

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Vejamos um exemplo de aplicação da fórmula supra:

No lançamento de um dado, determine a probabilidade de se obter um número ímpar ou mais de 4 pontos na face de cima.

Ora, neste caso, teremos:

Espaço amostral: U = {1,2,3,4,5,6} \ n(U) = 6

Evento A: A = {1,3,5} \ n(A) = 3

Evento B: B = {5,6} \ n(B) = 2

Evento interseção: $A \cap B$ = {5} \ $n(A \cap B) = 1$

Então, vem: $p(A \cup B) = 3/6 + 2/6 - 1/6 = 4/6 = 2/3 = 0,6667 = 66,67\%$.

NOTA: Se $A \cap B$ = f , então dizemos que A e B são eventos mutuamente exclusivos, e, neste caso, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, já que $p(\emptyset) = 0$ [evento impossível].

Vejamos um exemplo ilustrativo do caso acima:

Suponha que no lançamento de um dado, deseja-se saber qual a probabilidade de se obter um número par ou um número menor do que 2.

Temos os seguintes eventos:

A = {2,4,6} $\therefore$ n(A) = 3

B = {1} $\therefore$ n(B) = 1

$A \cap B = \emptyset \therefore n(A \cap B) = 0$

Portanto, $p(A \cup B) = 3/6 + 1/6 = 4/6 = 2/3 = 0,6667 = 66,67\%$

Vimos também que a probabilidade de ocorrência simultânea de dois eventos A e B é dada por:

$\mathbf{p(A \cap B) = p(A) . p(B/A)}$ ou $\mathbf{p(A \cap B) = p(B) . p(A/B)}$

onde:

p(A/B) = probabilidade de ocorrer A, sabendo-se que ocorreu o evento B.

$p(B/A)$ = probabilidade de ocorrer B, sabendo-se que ocorreu o evento A.

Se a ocorrência do evento B não modifica a chance de ocorrer o evento A, diremos que os eventos A e B são INDEPENDENTES e, neste caso, teremos que $p(B/A) = p(B)$, e a fórmula resume-se a:
$p(A \cap B) = p(A).p(B)$

O exemplo ilustrativo a seguir, ajudará a entender a afirmação supra:

Qual a probabilidade de em dois lançamentos de um dado, se obter número par no primeiro e número ímpar no segundo?

Ora, os eventos são obviamente independentes, pois a ocorrência de um não afeta o outro.
Logo, teremos:
$p(A \cap B) = p(A).p(B) = 3/6 . 3/6 = 1/2.1/2 = 1/4 = 0{,}25 = 25\%$.

Vejamos agora, um exemplo de eventos dependentes:

Suponha que uma caixa possui duas bolas pretas e quatro verdes, e, outra caixa possui uma bola preta e três bolas verdes. Passa-se uma bola da primeira caixa para a segunda, e retira-se uma bola da segunda caixa. Qual a probabilidade de que a bola retirada da segunda caixa seja verde?

Este problema envolve dois eventos mutuamente exclusivos, quais sejam:

Ou a bola transferida é verde ou a bola transferida é preta.

Ora, teremos: (observe atentamente a simbologia utilizada, comparando com o que foi dito anteriormente).

1ª possibilidade: a bola transferida é verde:

Probabilidade de que a bola transferida seja verde = $p(V) = 4/6 = 2/3$

(4 bolas verdes em 6).

Portanto, a probabilidade que saia BOLA VERDE na 2ª caixa, supondo-se que a bola transferida é de cor VERDE, será igual a:

$P(V/V') = 4/5$ (a segunda caixa possui agora, 3 bolas verdes + 1 bola verde transferida + 1 bola preta, portanto, 4 bolas verdes em 5).

Pela regra da probabilidade condicional, vem:

$P(V \cap V') = p(V) . p(V/V') = 2/3 . 4/5 = 8/15$

2ª possibilidade: a bola transferida é preta:

Probabilidade de que a bola transferida seja preta = $p(P) = 2/6 = 1/3$

(2 bolas pretas e 4 verdes, num total de 6).

Portanto, a probabilidade que saia BOLA VERDE, supondo-se que a bola transferida é de cor PRETA, será igual a:

$P(V/P) = 3/5$ (observe que a segunda caixa possui agora, 1 bola preta + 3 bolas verdes + 1 bola preta transferida = 5 bolas).

Daí, vem:

$p(V \cap P) = p(P) . p(V/P) = 1/3 . 3/5 = 1/5$.

Finalmente vem:

$P[(V \cap V') \cup (V \cap P)] = p(V \cap V') + p(V \cap P) = 8/15 + 1/5 = 8/15 + 3/15 = 11/15$, que é a resposta do problema.

Mas $11/15 = 0{,}7333 = 73{,}33\%$

Portanto, a probabilidade de que saia uma bola verde é de 73,33%.

Uma interpretação válida para o problema acima é que se o experimento descrito for repetido 100 vezes, em aproximadamente 73 vezes será obtido bola verde. Se o experimento for repetido 1000 vezes, em aproximadamente 733 vezes será obtido bola verde; e se o experimento for repetido um milhão de vezes?

Resposta: obteremos bola verde em aproximadamente 7333 vezes. Perceberam?

Agora, resolva este:

Uma caixa contém três bolas vermelhas e cinco bolas brancas e outra possui duas bolas vermelhas e três bolas brancas. Considerando-se que uma bola é transferida da primeira caixa para a segunda, e que uma bola é retirada da segunda caixa, podemos afirmar que a probabilidade de que a bola retirada seja da cor vermelha é:

a) 18/75

b) 19/45

c) 19/48

d) 18/45

e) 19/75

Resposta: C

Obs: 19/48 = 39,58%, ou seja, em 10.000 experimentos, seriam obtidos aproximadamente 3958 bolas brancas. Em 100 experimentos? Claro que teríamos aproximadamente 39 bolas brancas.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS DE PROBABILIDADES

1 – Uma urna possui três bolas pretas e cinco bolas brancas. Quantas bolas azuis devem ser colocadas nessa urna, de modo que retirando-se uma bola ao acaso, a probabilidade dela ser azul seja igual a 2/3?

SOLUÇÃO:

Seja x o número de bolas azuis a serem colocadas na urna. O espaço amostral possuirá, neste caso, 3 + 5 + x = x + 8 bolas.

Pela definição de probabilidade vista nas aulas anteriores, a probabilidade de que uma bola retirada ao acaso seja da cor azul será dada por: x/(x+8). Mas, o problema diz que a probabilidade deve ser igual a 2/3.

Logo, vem: x/(x+8) = 2/3; daí, vem, resolvendo a equação do 1º grau:

3x = 2(x+8) , donde 3x = 2x + 16 e, finalmente vem que x = 16.

Resp: 16 bolas azuis.

2 – Considere uma urna que contém uma bola preta, quatro bolas brancas e x bolas azuis. Uma bola é retirada ao acaso dessa urna, a sua cor é observada e a bola é devolvida à urna. Em seguida, retira-se novamente, ao acaso, uma bola dessa urna. Para que valores de x a probabilidade de que as bolas sejam da mesma cor vale 1/2?

SOLUÇÃO:

O espaço amostral do experimento possui n(U) = 1 + 4 + x = x + 5 bolas.

Vamos considerar as três situações distintas possíveis:

A. as bolas retiradas são ambas da cor preta.

Como existe reposição da bola retirada, os eventos são independentes. Logo, a probabilidade que saia uma bola preta (P) e em seguida outra bola preta (P') será dada por:
$p(P \cap P') = p(P).p(P') =[1/(x+5)].[1/(x+5)] = 1/(x+5)^2$

B. as bolas retiradas são ambas da cor branca.

Usando o mesmo raciocínio anterior e considerando-se que os eventos são independentes (pois ocorre a reposição da bola retirada), teremos:

$P(B \cap B') = p(B) . p(B') = [4/(x+5)].[4/(x+5)] = 16/(x+5)^2$

C. as bolas retiradas são ambas da cor azul.
Analogamente, vem:
$p(A \cap A') = p(A) . p(A') = [x/(x+5)].[x/(x+5)] = x^2/(x+5)^2$

Estes três eventos são INDEPENDENTES – pois com a reposição da bola retirada – a ocorrência de um deles, não modifica as chances de ocorrência do outro. Logo, a probabilidade da união desses três eventos, será igual a soma das probabilidades individuais. Daí, pelos dados do problema, vem que:

$[1/(x+5)^2] + [16/(x+5)^2] + [x^2/(x+5)^2] = ½$

Vamos resolver esta equação do 2º grau:

$(1+16+x^2)/(x+5)^2 = 1/2$

$2(17+x^2) = 1.(x+5)^2$

$34 + 2x^2 = x^2 + 10x + 25$

$x^2 – 10x + 9 = 0$, de onde concluímos x=1 ou x=9.

Resp: x=1 ou x=9.

Nota: as questões 1 e 2 acima, compareceram no vestibular da FUVEST – 1995 – segunda fase, subdivididas em dois ítens (a) e (b) da questão de número 08.

3 – Uma máquina produziu 60 parafusos dos quais 5 eram defeituosos. Escolhendo-se ao acaso dois parafusos dessa amostra, qual a probabilidade de que os dois sejam perfeitos?

SOLUÇÃO:

Existem problemas de Probabilidades nos quais a contagem do número de elementos do espaço amostral U não pode ser feita diretamente. Teremos que recorrer à Análise Combinatória, para facilitar a solução.

Para determinar o número de elementos do nosso espaço amostral U, teremos que calcular quantos grupamentos de 2 parafusos poderemos obter com os 60 parafusos da amostra. Trata-se de um típico problema de Combinações simples, já visto em Análise Combinatória. Teremos então:

$n(U) = C_{60,2} = 60!/(58!.2!) = 60.59.58!/58!.1.2 = 30.59$

Considerando-se o evento E: os dois parafusos retirados são perfeitos, vem que:

60 parafusos – 5 defeituosos = 55 parafusos perfeitos.

Teremos então que o número de possibilidades desse evento será dado por:

$n(E) = C_{55,2} = 55!/53!.2! = 55.54.53!/53!.1.2 = 55.27$

Logo, a probabilidade de ocorrencia do evento E será igual a:

$p(E) = n(E)/n(U) = 55.27/30.59 = 1485/1770 = 0,838983 = 83,8983\%$

Resp: aproximadamente 84%.

A interpretação deste resultado é que se o experimento for repetido 100 vezes, obteremos aproximadamente em 84 vezes, dois parafusos perfeitos.

Agora resolva as seguintes questões:

Q1) Uma máquina produziu 50 parafusos dos quais 5 eram defeituosos. Retirando-se ao acaso, 3 parafusos dessa amostra, determine a probabilidade de que os 3 parafusos sejam defeituosos.

Resp: aproximadamente 0,05%

Q2) Em relação à questão anterior, determine a probabilidade de numa retirada de 3 parafusos ao acaso, saiam pelo menos dois parafusos defeituosos.

Resp: aproximadamente 2,30%

Observação: pelo menos 2 defeituosos = 2 defeituosos ou 3 defeituosos.

Q3) FEI-SP – Uma urna contém 10 bolas pretas e 8 bolas vermelhas. Retiramos 3 bolas sem reposição. Qual é a probabilidade de as duas primeira serem pretas e a terceira vermelha?

Resp: 5/34 ou aproximadamente 14,7%

Q4) FMU-SP – Uma urna contém 5 bolas vermelhas e 4 pretas; dela são retiradas duas bolas, uma após a outra, sem reposição; a primeira bola retirada é de cor preta; Qual a probabilidade de que a segunda bola retirada seja vermelha?

Resp: 5/8 ou 62,5%

ARRANJOS, PERMUTAÇÕES E COMBINAÇÕES

ANÁLISE COMBINATÓRIA

1 – Introdução

Foi a necessidade de calcular o número de possibilidades existentes nos chamados jogos de azar que levou ao desenvolvimento da Análise Combinatória, parte da Matemática que estuda os métodos de contagem. Esses estudos foram iniciados já no século XVI, pelo matemático italiano Niccollo Fontana (1500-1557), conhecido como Tartaglia. Depois vieram os franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662).

A Análise Combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar - de uma forma indireta - o número de elementos de um conjunto, estando esses elementos agrupados sob certas condições.

2 - Fatorial

Seja n um número inteiro não negativo. Definimos o fatorial de n (indicado pelo símbolo n!) como sendo:

n! = n .(n-1) . (n-2) . ... .4.3.2.1 para $n \geq 2$.

Para n = 0 , teremos : 0! = 1.

Para n = 1 , teremos : 1! = 1

Exemplos:

a) 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720

b) 4! = 4.3.2.1 = 24

c) observe que 6! = 6.5.4!

d) 10! = 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1

e) 10! = 10.9.8.7.6.5!

f) 10! = 10.9.8!

3 - Princípio fundamental da contagem - PFC

Se determinado acontecimento ocorre em n etapas diferentes, e se a primeira etapa pode ocorrer de k_1 maneiras diferentes, a segunda de k_2 maneiras diferentes, e assim sucessivamente, **então** o número total T de maneiras de ocorrer o acontecimento é dado por: $T = k_1 . k_2 . k_3 . ... . k_n$

Exemplo:

O DETRAN decidiu que as placas dos veículos do Brasil serão codificadas usando-se 3 letras do alfabeto e 4 algarismos. Qual o número máximo de veículos que poderá ser licenciado?

Solução:

Usando o raciocínio anterior, imaginemos uma placa genérica do tipo PWR-USTZ. Como o alfabeto possui 26 letras e nosso sistema numérico possui 10 algarismos (de 0 a 9), podemos concluir que: para a 1ª posição, temos 26 alternativas, e como pode haver repetição, para a 2ª, e 3ª também teremos 26 alternativas. Com relação aos algarismos, concluímos facilmente que temos 10 alternativas para cada um dos 4 lugares. Podemos então afirmar que o número total de veículos que podem ser licenciados será igual a: 26.26.26.10.10.10.10 que resulta em 175.760.000. Observe que se no país existissem 175.760.001 veículos, o sistema de códigos de emplacamento teria que ser modificado, já que não existiriam números suficientes para codificar todos os veículos. Perceberam?

4 - Permutações simples

4.1 - Permutações simples de n elementos distintos são os agrupamentos formados com todos os n elementos e que diferem uns dos outros pela ordem de seus elementos.

Exemplo: com os elementos A,B,C são possíveis as seguintes permutações: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA.

4.2 - O número total de permutações simples de n elementos distintos é dado por n!, isto é

P_n = n! onde n! = n(n-1)(n-2)... .1 .

Exemplos:

a) $P_6 = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$

b) Calcule o número de formas distintas de 5 pessoas ocuparem os lugares de um banco retangular de cinco lugares.

$P_5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$

4.3 - Denomina-se ANAGRAMA o agrupamento formado pelas letras de uma palavra, que podem ter ou não significado na linguagem comum.

Exemplo:

Os possíveis anagramas da palavra REI são:

REI, RIE, ERI, EIR, IRE e IER.

5 - Permutações com elementos repetidos

Se entre os n elementos de um conjunto, existem a elementos repetidos, b elementos repetidos, c elementos repetidos e assim sucessivamente , o número total de permutações que podemos formar é dado por:

$$p_n^{(a,b,c,...)} = \frac{n!}{a!b!c!...}$$

Exemplo:

Determine o número de anagramas da palavra MATEMÁTICA.(não considere o acento)

Solução:

Temos 10 elementos, com repetição. Observe que a letra M está repetida duas vezes, a letra A três , a letra T, duas vezes. Na fórmula anterior, teremos: n=10, a=2, b=3 e c=2. Sendo k o número procurado, podemos escrever:

k= 10! / (2!.3!.2!) = 151200

Resposta: 151200 anagramas.

6 - Arranjos simples

6.1 - Dado um conjunto com n elementos , chama-se arranjo simples de taxa k , a todo agrupamento de k elementos distintos dispostos numa certa ordem. Dois arranjos diferem entre si, pela ordem de colocação dos elementos. Assim, no conjunto E = {a,b,c}, teremos:

a) arranjos de taxa 2: ab, ac, bc, ba, ca, cb.

b) arranjos de taxa 3: abc, acb, bac, bca, cab, cba.

6.2 - Representando o número total de arranjos de n elementos tomados k a k (taxa k) por $A_{n,k}$, teremos a seguinte fórmula:

$$p_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Obs : é fácil perceber que $A_{n,n}$ = n! = $P_{n\,.}$ (Verifique)

Exemplo:

Um cofre possui um disco marcado com os dígitos 0,1,2,...,9. O segredo do cofre é marcado por uma seqüência de 3 dígitos distintos. Se uma pessoa tentar abrir o cofre, quantas tentativas deverá fazer(no máximo) para conseguir abri-lo?

Solução:

As seqüências serão do tipo xyz. Para a primeira posição teremos 10 alternativas, para a segunda, 9 e para a terceira, 8. Podemos aplicar a fórmula de arranjos, mas pelo princípio fundamental de contagem, chegaremos ao mesmo resultado:

10.9.8 = 720.

Observe que 720 = $A_{10,3}$

7 - Combinações simples

7.1 - Denominamos combinações simples de n elementos distintos tomados k a k (taxa k) aos subconjuntos formados por k elementos distintos escolhidos entre os n elementos dados. Observe que duas combinações são diferentes quando possuem elementos distintos, não importando a ordem em que os elementos são colocados.

Exemplo:

No conjunto E= {a,b.c,d} podemos considerar:

a) combinações de taxa 2: ab, ac, ad,bc,bd, cd.

b) combinações de taxa 3: abc, abd,acd,bcd.

c) combinações de taxa 4: abcd.

7.2 - Representando por $C_{n,k}$ o número total de combinações de n elementos tomados k a k (taxa k) , temos a seguinte fórmula:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Nota: o número acima é também conhecido como Número binomial e indicado por:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemplo:

Uma prova consta de 15 questões das quais o aluno deve resolver 10. De quantas formas ele poderá escolher as 10 questões?

Solução:

Observe que a ordem das questões não muda o teste. Logo, podemos concluir que trata-se de um problema de combinação de 15 elementos com taxa 10.

Aplicando simplesmente a fórmula chegaremos a:

$C_{15,10}$ = 15! / [(15-10)! . 10!] = 15! / (5! . 10!) = 15.14.13.12.11.10! / 5.4.3.2.1.10! = 3003

Agora que você viu o resumo da teoria, tente resolver os 3 problemas seguintes:

01 - Um coquetel é preparado com duas ou mais bebidas distintas. Se existem 7 bebidas distintas, quantos coquetéis diferentes podem ser preparados?

Resp: 120

02 - Sobre uma circunferência são marcados 9 pontos distintos. Quantos triângulos podem ser construídos com vértices nos 9 pontos marcados?

Resp: 84

03 - Uma família com 5 pessoas possui um automóvel de 5 lugares. Sabendo que somente 2 pessoas sabem dirigir, de quantos modos poderão se acomodar para uma viagem?

Resp: 48

Exercício resolvido:

Um salão tem 6 portas. De quantos modos distintos esse salão pode estar aberto?

Solução:

Para a primeira porta temos duas opções: aberta ou fechada

Para a segunda porta temos também, duas opções, e assim sucessivamente.

Para as seis portas, teremos então, pelo Princípio Fundamental da Contagem - PFC:

N = 2.2.2.2.2.2 = 64

Lembrando que uma dessas opções corresponde a todas as duas portas fechadas, teremos então que o número procurado é igual a 64 - 1 = 63.

Resposta: o salão pode estar aberto de 63 modos possíveis.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

1 - De quantos modos diferentes podem ser dispostas em fila **(p+q)** pessoas sendo **p** homens de alturas todas diferentes e **q** mulheres também de alturas diferentes, de modo que, tanto no grupo dos homens como no das mulheres, as pessoas se sucedam em alturas crescentes?

Solução:

Supondo os **p** homens e as **q** mulheres ordenados segundo suas alturas crescentes, teremos ao todo **(p+q)** pessoas. Ordenando-se os **p** homens em **p** dos **(p+q)** lugares, as **q** mulheres ocuparão os **q** lugares restantes.

Ora, basta calcular então, o número de maneiras de preencher **p** lugares entre os **(p+q)** lugares existentes, isto é, determinar quantos subconjuntos de **p** elementos podem ser formados num conjunto de **(p+q)** elementos, com a condição de ordenamento crescente das alturas.

O número procurado será igual ao número de combinações possíveis de **(p+q)** elementos tomados **p** a **p**.

Logo:

$$C_{p+q,p} = \frac{(p+q)!}{p!.[(p+q)-p]!} = \frac{(p+q)!}{p!.q!}$$

Portanto, **p** homens e **q** mulheres podem ser dispostos em fila em ordem crescente de altura, de

(p+q)! / p!.q! maneiras distintas.

Exemplo de verificação:

Considere três homens e duas mulheres, com as seguintes alturas em metros:

Pedro, com 1,76m = P

Rafael, com 1,77m = R

Eduardo, com 1,78m = E

Maria, com 1,75 m = M

Samantha, com 1,74m = S

Em termos de alturas temos:

P > R > E > M > S

Pela fórmula acima, o número de maneiras de dispor estas cinco pessoas em ordem crescente de altura, será igual a:

n = (3+2)! / 3!.2! = 5! /3!.2! = 120/12 = 10.

São as seguintes, as **10** disposições possíveis, considerando-se a ordem decrescente de alturas:

01 – PRE**MS**

02 – PR**M**E**S**

03 – PR**MS**E

04 – **M**PRE**S**

05 – **M**PR**S**E

06 – **M**P**S**RE

07 – P**M**RE**S**

08 – P**M**R**S**E

09 – P**MS**RE

10 – **MS**PRE

2 - A Diretoria de uma Empresa tem seis membros. Quantas comissões de quatro membros podem ser formadas, com a condição de que em cada comissão figurem sempre o Presidente e o Vice-Presidente?

SOLUÇÃO:

Os agrupamentos são do tipo combinações, já que a ordem dos elementos não muda o agrupamento.

O número procurado é igual a:

$C_{6-2,4-2} = C_{4,2}$ = (4.3)/(2.1) = 6.

Observe que raciocinamos com a formação das comissões de 2 membros escolhidos entre 4, já que duas posições na comissão são fixas: a do Presidente e do Vice.

3 – A Diretoria de uma Empresa tem seis membros. Quantas comissões de dois membros podem ser formadas, com a condição de que em nenhuma delas figure o Presidente e o Vice?

SOLUÇÃO:

Ora, retirados o Presidente e o Vice, restam 6 – 2 = 4 elementos. Logo, O número procurado será igual a:

$C_{6-2,2} = C_{4,2}$ = (4.3)/(2.1) = 6.

4 - Numa assembléia de quarenta cientistas, oito são físicos. Quantas comissões de cinco membros podem ser formadas incluindo no mínimo um físico?

SOLUÇÃO:

A expressão “no mínimo um físico” significa a presença de 1, 2, 3, 4 ou 5 físicos nas comissões.

Podemos raciocinar da seguinte forma: em quantas comissões não possuem físicos e subtrair este número do total de agrupamentos possíveis.

Ora, existem $C_{40,5}$ comissões possíveis de 5 membros escolhidos entre 40 e, existem $C_{40-8,5} = C_{32,5}$ comissões nas quais não aparecem físicos.

Assim, teremos:

$C_{40,5} - C_{32,5}$ = 456 632 comissões.

Observe que Cn,k = n!/(n-k)!.k!

5 - Ordenando de modo crescente as permutações dos algarismos 2, 5, 6, 7 e 8, qual o lugar que ocupará a permutação 68275?

SOLUÇÃO:

O número 68275 será precedido pelos números das formas:

a) 2xxxx, 5xxxx que dão um total de 4! + 4! = 48 permutações

b) 62xxx, 65xxx, 67xxx que dão um total de 3.3! = 18 permutações

c) 6825x que dá um total de 1! = 1 permutação.

Logo o número 68275 será precedido por 48+18+1 = 67 números. Logo, sua posição será a de número 68.

6 - Sabe-se que o número de maneiras de n pessoas sentarem-se ao redor de uma mesa circular é dado pela fórmula

P'n = (n - 1)! . Nestas condições, de quantas maneiras distintas 7 pessoas podem sentar-se em torno de uma mesa circular, de tal modo que duas determinadas pessoas fiquem sempre acomodadas juntas?

SOLUÇÃO:

Supondo que as pessoas A e B fiquem sentadas juntas, podemos considerar que os agrupamentos possíveis serão das seguintes formas:

a) (AB)XYZWK.......P'n = (6-1)! = 120

b) (BA)XYZWK.......P'n = (6-1)! = 120

Logo o número total será: 120+120 = 240.

7 - De quantas maneiras seis pessoas podem sentar-se ao redor de uma mesa circular?

SOLUÇÃO:

P'n = (6-1)! = 5! = 5.4.3.2.1 = 120.

8 - Numa reunião de sete pessoas há nove cadeiras. De quantos modos se podem sentar as pessoas?

SOLUÇÃO:

Trata-se de um problema de arranjos simples, cuja solução é encontrada calculando-se:

$A_{9,7}$ = 9.8.7.6.5.4.3 = 181.440

Nota: observe que $A_{n,k}$ contém k fatores decrescentes a partir de n. Exemplo: $A_{10,2}$ = 10.9 = 90, $A_{9,3}$ = 9.8.7 = 504, etc.

Poderíamos também resolver aplicando a regra do produto, com o seguinte raciocínio:

a primeira pessoa tinha 9 opções para sentar-se, a segunda, 8 , a terceira,7 , a quarta,6 , a quinta,5 , a sexta, 4 e finalmente a sétima, 3. Logo, o número total de possibilidades será igual a 9.8.7.6.5.4.3 = 181.440

9 - Quantos são os anagramas da palavra UNIVERSAL que começam por consoante e terminam por vogal?

SOLUÇÃO:

A palavra dada possui 5 consoantes e 4 vogais. Colocando uma das consoantes, por exemplo, N, no início da palavra, podemos dispor em correspondência, cada uma das 4 vogais no final. Eis o esquema correspondente:

(N...U) (N...I) (N...E) (N....A)

Podemos fazer o mesmo raciocínio para as demais consoantes. Resultam 5.4=20 esquemas do tipo acima. Permutando-se as 7 letras restantes situadas entre a consoante e a vogal, de todos os modos possíveis, obteremos em cada esquema 7! anagramas. O número pedido será, pois, igual a

20.7! = 20.7.6.5.4.3.2.1 = 100.800.

10 - Numa reunião estão doze pessoas. Quantas comissões de três membros podem ser formadas, com a condição de que uma determinada pessoa A esteja sempre presente e uma determinada pessoa B nunca participe junto com a pessoa A?

SOLUÇÃO:

Como um dos 3 integrantes é sempre A, resta determinar os dois outros, com a condição de que não seja B. Logo, dos 12, excluindo A(que tem presença garantida) e B (que não pode participar junto com A) restam 10 pessoas que deverão ser agrupadas duas a duas. Portanto, o número procurado é igual a $C_{10,2}$ = (10.9)/(2.1) = 45.

11 - Numa assembléia há cinqüenta e sete deputados sendo trinta e um governistas e os demais, oposicionistas. Quantas comissões de sete deputados podem ser formadas com quatro membros do governo e três da oposição?

SOLUÇÃO:

Escolhidos três deputados oposicionistas, com eles podemos formar tantas comissões quantas são as combinações dos 31 deputados do governo tomados 4 a 4 (taxa 4), isto é: $C_{31,4}$. Podemos escolher 3 oposicionistas, entre os 26 existentes, de $C_{26,3}$ maneiras distintas; portanto o número total de comissões é igual a $C_{26,3}$. $C_{31,4}$ = 81.809.000, ou seja, quase oitenta e dois milhões de comissões distintas!.

12 - Quantas anagramas podem ser formados com as letras da palavra ARARA?

SOLUÇÃO:

Observe que a palavra ARARA possui 5 letras porém com repetição. Se as 5 letras fossem distintas teríamos

5! = 120 anagramas.Como existem letras repetidas, precisamos "descontar" todas as trocas de posições entre letras iguais. O total de anagramas será, portanto, igual a

P = 5!/(3!.2!) = 10.

É óbvio que podemos também calcular diretamente usando a fórmula de permutações com repetição.

13 – De quantos modos podemos dispor 5 livros de Matemática, 3 de Física e 2 de Química em uma prateleira, de modo que os livros do mesmo assunto fiquem sempre juntos?

SOLUÇÃO:

Dentre os 5 livros de Matemática, podemos realizar 5! permutações distintas entre eles. Analogamente, 3! para os livros de Física e 2! para os livros de Química.

Observe que estes 3 conjuntos de livros podem ainda serem permutados de 3! maneiras distintas entre si. Logo, pela regra do produto, o número total de possibilidades será:

N = [(5!).(3!).(2!)].(3!) = 120.6.2.6 = 8640 modos distintos.

Agora resolva estes:

1 – Com seis homens e quatro mulheres, quantas comissões de quatro pessoas podemos formar?

2 – Com seis homens e quatro mulheres, quantas comissões de cinco pessoas podemos formar, constituídas por dois homens e três mulheres?

3 - De quantos modos podemos dispor cinco livros de Matemática, três de Física e dois de Química em uma prateleira, de modo que os livros do mesmo assunto e na ordem dada no enunciado, fiquem sempre juntos?

Gabarito: 1) 210 2) 60 3) 1440.

14 - Uma pastelaria vende pastéis de carne, queijo e palmito. De quantas formas uma pessoa pode escolher cinco pastéis?

A) 18

B) 21

C) 15

D) 35

E) 25

Solução:

Pelo enunciado, temos <u>três</u> tipos de pastéis, para serem agrupados em grupos de <u>cinco</u> unidades. Sendo C = pastel de carne, Q = pastel de queijo e P = pastel de palmito, poderíamos por exemplo, ter os seguintes agrupamentos:

CCCCC – no caso da pessoa escolher 5 pastéis de carne.

PPQQC – no caso da pessoa escolher 2 pastéis de palmito, 2 de queijo e 1 de carne, etc.

Podemos observar que, sendo <u>x</u> o número de pastéis de queijo, <u>y</u> o número de pastéis de queijo e <u>z</u> o número de pastéis de palmito, é válido escrever:

x + y + z = 5

Como <u>x</u>, <u>y</u> e <u>z</u> são números inteiros não negativos, o problema proposto é equivalente à determinação do número total de soluções inteiras e não negativas, da equação acima.

Ora, o número de soluções inteiras e não negativas desta equação, será dado por

$$Y = \binom{n+b-1}{b} = \frac{(n+b-1)!}{b!(n+b-1-b)!} = \frac{(n+b-1)!}{b!(n-1)!}$$

onde n = 3 e b = 5.

Portanto, substituindo os valores, encontraremos a solução procurada:

$$y = \frac{(3+5-1)!}{5!(3-1)!} = \frac{7!}{5!.2!} = \frac{7.6.5.4.3.2.1}{5.4.3.2.1.2.1} = 21$$

Logo, existem 21 maneiras de escolher cinco pastéis entre os 3 tipos disponíveis, o que nos leva à alternativa **B**.

Poderíamos também, resolver o problema de outra maneira, a saber:

Temos <u>5 unidades</u> para serem divididas em <u>3 partes ordenadas</u>.

Exemplos:

(2,3,0) é uma solução, ou seja: 2 pastéis de carne e 3 de queijo.

(1,3,1) é uma solução, ou seja: 1 pastel de carne, 3 de queijo e 1 de palmito.

(0,0,5) é uma solução, ou seja: 5 pastéis de palmito, etc

....

A representação a seguir, <u>mostra uma disposição de uma das soluções possíveis</u>:

(1,2,2), ou seja: 1 pastel de carne, 2 de queijo e 2 de palmito.

|•|• •|• •|

Observe que temos **7** = (**5 + 2**) <u>símbolos</u>, sendo **5** “pontinhos” e **2** “traços”.

Tudo funciona como se tivéssemos que permutar 7 elementos com repetição de 5 deles e de 2 deles. Assim, usando a fórmula de **permutações com repetição**, teremos finalmente:

$$p_1^{5,2} = \frac{7!}{5!.2!} = \frac{7.6.5.4.3.2.1}{5.4.3.2.1.2.1} = \frac{7.6.5!}{5!.2.1} = \frac{42}{2} = 21$$

Ou seja, existem 21 maneiras de se escolher 5 pastéis entre 3 tipos diferentes.

Estas 21 maneiras distintas de escolha, estão indicadas abaixo, onde

C = pastel de carne

Q = pastel de queijo

P = pastel de palmito:

(5,0,0) – CCCCC
(4,1,0) – CCCCQ
(4,0,1) – CCCCP
(3,2,0) – CCCQQ
(3,0,2) – CCCPP
(3,1,1) – CCCQP
(2,3,0) – CCQQQ
(2,0,3) – CCPPP
(2,1,2) – CCQPP
(2,2,1) – CCQQP
(1,4,0) – CQQQQ
(1,0,4) – CPPPP
(1,1,3) – CQPPP
(1,3,1) – CQQQP
(1,2,2) – CQQPP
(0,5,0) – QQQQQ
(0,0,5) – PPPPP
(0,1,4) – QPPPP
(0,4,1) – QQQQP
(0,2,3) – QQPPP
(0,3,2) – QQQPP

Observe que a solução do problema, coincide com a determinação do número de soluções inteiras e não negativas da equação linear x + y + z = 5.

Agora tente resolver este:

Uma pastelaria vende pastéis de carne, queijo e palmito. De quantas formas uma pessoa pode escolher quatro pastéis?

Resposta: 15 formas distintas, a saber, onde C = carne, Q = queijo e P = palmito:

(4,0,0) – CCCC
(3,1,0) – CCCQ
(3,0,1) – CCCP
(2,0,2) – CCPP
(2,1,1) – CCQP
(2,2,0) – CCQQ
(1,0,3) – CPPP
(1,1,2) – CQPP
(1,2,1) – CQQP
(1,3,0) – CQQQ
(0,4,0) – QQQQ
(0,3,1) – QQQP
(0,2,2) – QQPP
(0,1,3) – QPPP
(0,0,4) - PPPP