

# Sommario sul Lambda Calcolo

Fabio Brau

15 gennaio 2021

## Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Lambda Espressioni</b>	<b>1</b>
2.1	Variabili libere e legate . . . . .	2
2.2	Operatore di Sostituzione . . . . .	3
<b>3</b>	<b><math>\alpha</math>-equivalenza</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Equivalenza Semantica</b>	<b>5</b>

## 1 Introduzione

## 2 Lambda Espressioni

Dato un insieme  $V$  di *variabili*,  $\Lambda$  è l'insieme delle  $\lambda$ -*espressioni* definito come segue.

**Definizione 1.** Dato un insieme di variabili  $V = \{v_1, v_2, \dots\}$ , l'insieme delle lambda espressioni  $\Lambda$  è definito ricorsivamente come segue:

- $V \subseteq \Lambda$ , cioè ogni variabile è una lambda espressione;
- Se  $M \in \Lambda$  allora  $\lambda x.M \in \Lambda$  per ogni variabile  $x$ . Questo operatore del meta-linguaggio è chiamato *astrazione*;
- Se  $M, N \in \Lambda$  allora  $(MN) \in \Lambda$ . Questo operatore binario del metalinguaggio è anche chiamato *applicazione*;

Una  $\lambda$ -espressione della forma  $\lambda x.M$  è, abusivamente, chiamata *astrazione*.

Osserviamo che i simboli  $M, N, \dots, v_0, v_1, \dots$  sono da considerarsi nomi di  $\lambda$ -espressioni. L'assegnamento di un nome viene rappresentato con il

simbolo di  $=$  ed è sempre da considerarsi nel meta linguaggio. Per esempio nella formula  $M = \lambda x.x$ , il simbolo  $M$  è l'etichetta dell'espressione  $\lambda x.x$ .

È evidente che in una lambda espressione il numero di volte in cui appare un simbolo di parentesi o il simbolo  $\lambda$  può essere non trascurabile. Assumendo che i due operatori del metalinguaggio siano associativi a sinistra possiamo introdurre la seguente notazione che fornisce una scrittura più concisa.

**Notazione 1.** Siano  $x, y$  variabili e sia  $M$  una  $\lambda$ -espressione, allora la notazione  $\lambda xy.M$  è una scrittura abbreviata per  $\lambda x.\lambda y.M$  che per associatività a sinistra rappresenta univocamente  $\lambda x.(\lambda y.M)$ . Analogamente, siano  $X, Y, Z$  lambda espressioni, la notazione  $XYZ$  rappresenta univocamente (per associatività a sinistra)  $((XY)Z)$ .

**Definizione 2.** Diremo che due lambda espressioni  $M, N$  sono *sintatticamente equivalenti*, e scriveremo  $M \equiv N$ , se possono essere mutualmente scritte una nell'altra utilizzando la Notazione 1.

## 2.1 Variabili libere e legate

Consideriamo la  $\lambda$ -espressione  $M = \lambda x.xy$  e sia  $z \neq x$ . Non sorprende che  $M$  sia, in un qualche senso da definire, equivalente a  $\lambda z.zy$ , anche se le due  $\lambda$ -espressioni non sono sintatticamente equivalenti, i.e.  $M \not\equiv \lambda z.zy$ . Questo è dovuto al fatto che, intuitivamente, la variabile  $x$  appare legata a  $\lambda$  nella forma  $\lambda x$ .

**Definizione 3.** Data una  $\lambda$ -espressione  $M$ , l'insieme delle *variabili libere*  $\mathcal{F}(M)$  è costruito induttivamente come segue:

- $\mathcal{F}(x) = \{x\}$ ;
- $\mathcal{F}(\lambda x.P) = \mathcal{F}(P) \setminus \{x\}$ ;
- $\mathcal{F}(PQ) = \mathcal{F}(P) \cup \mathcal{F}(Q)$ ;

dove  $x$  è una qualunque variabile e  $P, Q$  sono  $\lambda$ -espressioni. Analogamente, l'insieme delle *variabili legate*  $\mathcal{B}(M)$  è definito ricorsivamente sulla costruzione di  $M$  come segue:

- $\mathcal{B}(x) = \emptyset$ ;
- $\mathcal{B}(\lambda x.P) = \mathcal{B}(P) \cup \{x\}$ ;
- $\mathcal{B}(PQ) = \mathcal{B}(P) \cup \mathcal{B}(Q)$ ;

Osserviamo che può accadere che per una  $\lambda$ -espressione  $M$  vale  $\mathcal{B}(M) \cap \mathcal{F}(M) \neq \emptyset$ . I seguenti esempi possono essere di chiarimento.

**Esempio 1.** La  $\lambda$ -espressione  $x(\lambda x.xx)$  ha una sola variabile libera ( $x$ ) e solo una variabile legata ( $x$ ).

**Definizione 4.** Definiamo l'insieme dei *combinatori*  $\Lambda^0 \subseteq \Lambda$  come

$$\Lambda^0 = \{M \in \Lambda : \mathcal{F}(M) = \emptyset\}. \quad (1)$$

## 2.2 Operatore di Sostituzione

Consideriamo una  $\lambda$ -espressione  $M$  contenente una variabile  $x$ . Vogliamo definire formalmente l'operazione di *sostituzione* e cioè l'operazione nel metalinguaggio che consiste nel sostituire alla variabile  $x$  una  $\lambda$ -espressione  $N$ .

**Definizione 5** (Curry). Sia  $M, N \in \Lambda$ , definiamo l'operatore di *sostituzione senza cattura* che sostituisce la variabile  $x$  nella  $\lambda$ -espressione  $M$  con la  $\lambda$ -espressione  $N$ , restituendo una  $\lambda$ -espressione indicata da  $M[x := N]$ , in modo ricorsivo sulla costruzione delle  $\lambda$ -espressioni:

Caso 1 Se  $M$  è una variabile:

- Se  $M = x$  allora  $M[x := N] \equiv N$ ;
- Se  $M = y \neq x$  allora  $M[x := N] \equiv y$ ;

Caso 2 Se  $M = M_1 M_2$  è una applicazione:

- $M[x := N] \equiv (M_1[x := N])(M_2[x := N])$ ;

Caso 3 Se  $M$  è una astrazione:

- Se  $M = \lambda x.M_1$  allora  $M[x := N] \equiv M$ ;
- Se  $M = \lambda y.M_1$ , con  $x \neq y$ , allora

$$M[x := N] \equiv \lambda z.M_1[y := z][x := N]$$

dove:  $z = y$  se  $x \notin \mathcal{F}(M_1)$  o  $y \notin \mathcal{F}(N)$ ;  $z$  scelta tale che non compare né in  $M$  né in  $N$  altrimenti;

I primi due casi sono intuitivi, mentre il terzo è più delicato. Consideriamo  $M = \lambda xy.yx$  e  $N = y$ . Nella sostituzione  $M[x := N]$ , la variabile libera  $y$  presente in  $N$  verrebbe catturata, in quanto è presente in  $M$  come variabile legata, diventando anch'essa legata: Questo fenomeno si chiama *cattura* e rende necessario introdurre la nuova variabile  $z$ .

**Lemma 1.** Valgono le seguenti proposizioni

1. Se  $x \in \mathcal{F}(M)$  e  $y \notin \mathcal{F}(M)$ , allora  $M \equiv M[x := y][y := x]$ ;
2. Se  $x \in \mathcal{F}(M)$  e  $y \notin \mathcal{F}(M)$ , allora  $x \notin \mathcal{F}(M[x := y])$  e  $y \in \mathcal{F}(M[x := y])$ ;

### 3 $\alpha$ -equivalenza

Intuitivamente una  $\lambda$ -espressione è ottenuta tramite astrazione e/o applicazione di  $\lambda$ -espressioni. Due  $\lambda$ -espressioni si dicono  $\alpha$  equivalenti se possono essere riscritte una nell'altra a meno di sostituzione di variabili legate. Questa conversione, per quanto sia facilmente comprensibile a livello intuitivo, nasconde una serie di complicazioni. La seguente definizione è una riformulazione della definizione formale fornita da [Curry et al.].

**Definizione 6** ( $\alpha$ -equivalenza). Definiamo la relazione  $\equiv_\alpha$  induttivamente simultaneamente alla costruzione della lambda espressioni. Preso  $\Lambda_0$  come l'insieme delle  $\lambda$ -espressioni di rango 0 (costituite da una sola variabile, senza astrazioni o applicazioni), definiamo

$$\forall x, y \in \Lambda_0, \quad x \equiv_\alpha y \iff x = y.$$

Osserviamo che  $\equiv_\alpha$  è di equivalenza su  $\Lambda_0$ . Consideriamo ora l'insieme delle  $\lambda$ -espressioni di rango  $k > 0$  definito ricorsivamente come  $\Lambda_k = \hat{\Lambda}_k \cup \bar{\Lambda}_k$ , dove

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_k &= \{\lambda x.M : M \in \Lambda_{k-1}\} \\ \bar{\Lambda}_k &= \{(MN), (NM) : M \in \Lambda_{k-1}, N \in \Lambda_i, i < k\} \end{aligned}$$

Su questo insieme definiamo la relazione  $\equiv_\alpha$  come

- Se  $M, N \in \hat{\Lambda}_k$ , con  $M = \lambda x.M_1$  e  $N = \lambda y.N_1$  allora
  - Se  $x = y$ , allora

$$M \equiv_\alpha N \iff M_1 \equiv_\alpha N_1$$

- Se  $x \neq y$ , allora

$$M \equiv_\alpha N \iff N_1 \equiv_\alpha M_1[x := y] \quad \wedge \quad (y \notin \mathcal{F}(M_1) \wedge x \notin \mathcal{F}(N_1))$$

- Se  $M, N \in \bar{\Lambda}_k$ , con  $M = M_1M_2$  e  $N = N_1N_2$ , allora

$$M \equiv_\alpha N \iff M_1 \equiv_\alpha N_1 \wedge M_2 \equiv_\alpha N_2$$

Per induzione forte e Lemma 1 si dimostra che  $\equiv_\alpha$  è di equivalenza su  $\Lambda_k$  per ogni  $k$ . In conclusione, essendo  $\Lambda = \cup_k \Lambda_k$ , le relazioni di equivalenza si estendono ad una relazione di equivalenza sulle lambda espressioni.

**Lemma 2.** *La sostituzione è invariante per  $\alpha$ -equivalenza. Formalmente, se  $M \equiv_\alpha M'$  e se  $N \equiv_\alpha N'$  allora*

$$M[x := N] \equiv_\alpha M'[x := N']$$

## 4 Equivalenza Semantica

Possiamo ora definire una prima versione della equivalenza semantica come segue

**Definizione 7.** La relazione di equivalenza semantica  $\doteq$  è definita ricorsivamente come segue

$$(\beta) \ (\lambda x.M)N \doteq M[x := N];$$

$$(\xi) \ M \doteq N \Rightarrow \lambda x.M \doteq \lambda x.N;$$

$$(I) \ \doteq \subseteq \Lambda \times \Lambda \text{ è di equivalenza};$$

$$(II) \ M \doteq N \Rightarrow \quad ZM \doteq ZN \wedge MZ \doteq NZ;$$

**Definizione 8** (teoria- $\lambda$ ). Indichiamo con  $\lambda$  la teoria del primo ordine avente linguaggio  $\Lambda$ , senza costanti, senza simboli di funzione e con un unico simbolo di relazione  $\doteq$ , costituita dalle formule  $\beta, \xi, I, II$ .

Ricordando che una teoria del primo ordine è *inconsistente* se dimostra contemporaneamente una formula e la sua negazione, o equivalente, se dimostra ogni formula chiusa, vale il seguente teorema.