Sommario sul Lambda Calcolo

Fabio Brau

11 gennaio 2021

Indice

1 Introduzione

2 Lambda Espressioni

Dato un insieme V di *variabili*, Λ è l'insieme delle λ-*espressioni* definito come segue.

Definizione 1. Dato un insieme di variabili $V = \{v_1, v_2, \dots\}$, l'insieme delle lambda espressioni Λ è definito ricorsivamente come segue:

- $V \subseteq \Lambda$, cioè ogni variabile è una lambda espressione;
- Se $M \in \Lambda$ allora $\lambda x.M \in \Lambda$ per ogni variabile x. Questo operatore del meta-linguaggio è chiamato *astrazione*;
- Se $M, N \in \Lambda$ allora $(MN) \in \Lambda$. Questo operatore binario del metalinguaggio è anche chiamato *applicazione*;

Una λ-espressione della forma $\lambda x.M$ è, abusivamente, chiamata astrazione.

Osserviamo che i simboli $M, N, \dots, v_0, v_1, \dots$ sono da considerarsi nomi di λ-espressioni. L'assegnamento di un nome viene rappresentato con il simbolo di $=$ ed è sempre da considerarsi nel meta linguaggio. Per esempio nella formula $M = \lambda x.x$, il simbolo M è l'etichetta dell'espressione $\lambda x.x$.

È evidente che in una lambda espressione il numero di volte in cui appare un simbolo di parentesi o il simbolo λ può essere non trascurabile. Assumendo che i due operatori del metalinguaggio siano associativi a sinistra possiamo introdurre la seguente notazione che fornisce una scrittura più concisa.

Notazione 1. Siano x, y variabili e sia M una λ-espressione, allora la notazione $\lambda xy.M$ è una scrittura abbreviata per $\lambda x.\lambda y.M$ che per associatività a sinistra rappresenta univocamente $\lambda x.(\lambda y.M)$. Analogamente, siano X, Y, Z lambda espressioni, la notazione XYZ rappresenta univocamente (per associatività a sinistra) $((XY)Z)$.

Definizione 2. Diremo che due lambda espressioni M, N sono *sintatticamente equivalenti*, e scriveremo $M \equiv N$, se possono essere mutualmente scritte una nell'altra utilizzando la Notazione 1.

2.1 Variabili libere e legate

Consideriamo la λ-espressione $M = \lambda x.xy$ e sia $z \neq x$. Non sorprende che M sia, in un qualche senso da definire, equivalente a $\lambda z.zy$, anche se le due λ-espressioni non sono sintatticamente equivalenti, i.e. $M \not\equiv \lambda z.zy$. Questo è dovuto al fatto che, intuitivamente, la variabile x appare legata a λ nella forma λx.

Definizione 3. Data una λ-espressione M, l'insieme delle *variabili libere* $\mathcal{F}(M)$ è costruito induttivamente come segue:

- $\mathcal{F}(x) = \{x\}$;
- $\mathcal{F}(\lambda x.P) = \mathcal{F}(P) \setminus \{x\}$;
- $\mathcal{F}(PQ) = \mathcal{F}(P) \cup \mathcal{F}(Q)$;

dove x è una qualunque variabile e P, Q sono λ-espressioni. Analogamente, l'insieme delle *variabili legate* $\mathcal{B}(M)$ è definito ricorsivamente sulla costruzione di M come segue:

- $\mathcal{B}(x) = \emptyset$;
- $\mathcal{B}(\lambda x.P) = \mathcal{B}(P) \cup \{x\}$;
- $\mathcal{B}(PQ) = \mathcal{B}(P) \cup \mathcal{B}(Q)$;

Osserviamo che può accadere che per una λ-espressione M vale $\mathcal{B}(M) \cap \mathcal{F}(M) \neq \emptyset$. I seguenti esempi possono essere di chiarimento.

Esempio 1. La λ-espressione $x(\lambda x.xx)$ ha una sola variabile libera (x) e solo una variabile legata (x).

Definizione 4. Definiamo l'insieme dei *combinatori* $\Lambda^0 \subseteq \Lambda$ come

$$\Lambda^0 = \{M \in \Lambda \,:\, \mathcal{F}(M) = \emptyset\}\,. \tag{1}$$

2.2 Operatore di Sostituzione

Consideriamo una λ-espressione M contente una variabile x. Vogliamo definire formalmente l'operazione di *sostituzione* e cioè l'operazione nel metalinguaggio che consiste nel sostituire alla variabile x una λ-espressione N.

Definizione 5 (Curry)**.** Sia $M, N \in \Lambda$, definiamo l'operatore di *sostituzione* che sostituisce la variabile x nella λ-espressione M con la λ-espressione N, restituendo una λ-espressione indicata da $M[x := N]$, in modo ricorsivo sulla costruzione delle λ-espressioni:

Caso 1 Se M è una variabile:

- Se $M = x$ allora $M[x := N] \equiv N$;
- Se $M = y \neq x$ allora $M[x := N] \equiv y$;

Caso 2 Se $M = M_1M_2$ è una applicazione:

- $M[x := N] \equiv (M_1[x := N])(M_2[x := N])$;

Caso 3 Se M è una astrazione:

- Se $M = \lambda x.M_1$ allora $M[x := N] \equiv M$;
- Se $M = \lambda y.M_1$, con $x \neq y$, allora

  $$M[x := N] \equiv \lambda z.M_1[y := z][x := N]$$

  dove: $z = y$ se $x \notin \mathcal{F}(M_1)$ o $y \notin \mathcal{F}(N)$, z non compare né in M né in N altrimenti;

I primi due casi sono intuitivi, mentre il terzo è più delicato. Consideriamo $M = \lambda xy.yx$ e $N = y$. Nella sostituzione $M[x := N]$, la variabile libera y presente in N verrebbe catturata, in quanto è presente in M come variabile legata, diventando anch'essa legata: Questo fenomeno si chiama *cattura* e si rende quindi necessario introdurre la nuova variabile z.

3 α-equivalenza

Intuitivamente una λ-espressione è ottenuta tramite astrazione e/o applicazione di λ-espressioni. Sarà utile nella definizione di α-equivalenza la seguente definizione

Definizione 6. Sia $M \in \Lambda$, definiamo ricorsivamente l'insieme $Sub(M)$, dei *sottotermini* o *sottoespressioni* di M, come segue:

- Se $M = x$ è una variabile, allora $Sub(M) = \{x\}$;
- Se $M = \lambda x.M_1$, allora $Sub(M) = \{M\} \cup Sub(M_1)$;
- Se $M = M_1M_2$, allora $Sub(M) = \{M\} \cup Sub(M_1) \cup Sub(M_2)$.

Possiamo ora definire la relazione la α-equivalenza come segue

Definizione 7 (α-equivalenza)**.** Sia $M \in \Lambda$, un cambio della variabile legata x in M con la variabile y, fresca, è definito sostituendo $\lambda x.N$ con $\lambda y.N[x := y]$ per ogni sottotermine di astrazione di M.

Due termini M, N si dicono α-equivalenti se esiste una catena finita di cambiamenti di variabili legate che scrivono un termine nell'altro.

Lemma 1. *La sostituzione è invariante per α-equivalenza. Formalmente, se $M \equiv_\alpha M'$ e se $N \equiv_\alpha N'$ allora*

$$M[x := N] \equiv_\alpha M'[x := N']$$

4 Equivalenza Semantica

Possiamo ora definire una prima versione della equivalenza semantica come segue

Definizione 8. La relazione di equivalenza semantica $\doteq$ è definita ricorsivamente come segue

(β) $(\lambda x.M)N \doteq M[x := N]$;

(ξ) $M \doteq N \Rightarrow \lambda x.M \doteq \lambda x.N$;

(I) $\doteq \subseteq \Lambda \times \Lambda$ è di equivalenza;

(II) $M \doteq N \Rightarrow \quad ZM \doteq ZN \wedge MZ \doteq NZ$;

Definizione 9 (teoria-λ)**.** Indichiamo con λ la teoria del primo ordine avente linguaggio Λ, senza costanti, senza simboli di funzione e con un unico simbolo di relazione $\doteq$, costituita dalle formule β, ξ, I, II.

Ricordando che una teoria del primo ordine è *inconsistente* se dimostra contemporaneamente una formula e la sua negazione, o equivalente, se dimostra ogni formula chiusa, vale il seguente teorema.