# Capítulo 14

# Sistemas polifásicos

## INTRODUCCION

Un sistema polifásico está formado por dos o más tensiones iguales con diferencias de fase constantes que suministran energía a las cargas conectadas a las líneas. En un sistema de dos fases, o bifásico, la diferencia de fase entre las tensiones es de 90°, mientras que en los trifásicos dicha diferencia es de 120°. Los sistemas de seis o más fases se utilizan a veces en rectificadores polifásicos para obtener una tensión rectificada poco ondulada, pero los sistemas trifásicos son los comúnmente utilizados para la generación y transmisión de la energía eléctrica.

## SISTEMAS BIFASICOS

La rotación del par de bobinas perpendiculares de la Fig. 14-1(*a*) en un campo magnético constante da lugar a tensiones inducidas con un defase constante de 90°. Si las bobinas tienen el mismo número de espiras, los fasores de tensión y las tensiones instantáneas tienen valores iguales, como se observa en sus diagramas respectivos en las Figuras 14-1(*b*) y (*c*).

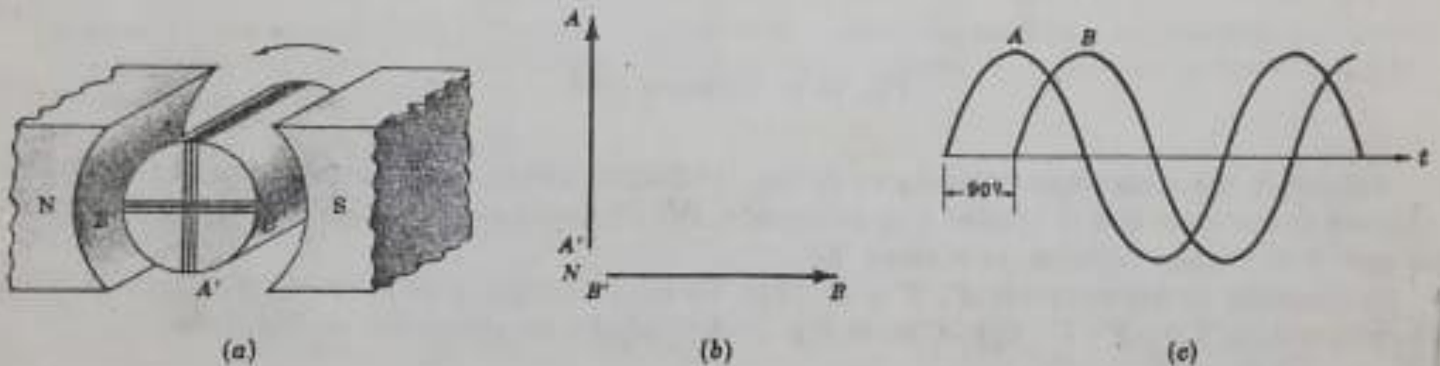



**Fig. 14-1. Sistema bifásico**

El diagrama fasorial de tensiones de la Fig. 14-1(*b*) tiene como referencia $\mathbf{V}_{BN} = V_{\text{bobina}}\angle 0°$ y la tensión $\mathbf{V}_{AN} = V_{\text{bobina}}\angle 90°$. Si se unen los extremos $A'$ y $B'$ de las bobinas constituyendo la línea $N$, el sistema bifásico está formado por las tres líneas $A$, $B$ y $N$. La tensión compuesta entre las líneas o fases $A$ y $B$ (tensión de línea) es superior a la tensión simple entre una línea y neutro (tensión de fase) en el factor $\sqrt{2}$, que se obtiene de la suma $\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{AN} + \mathbf{V}_{BN} = V_{\text{bobina}}\angle 90° + V_{\text{bobina}}\angle 180° = \sqrt{2}V_{\text{bobina}}\angle 135°$.

$= V_A - V_N - V_B - V_N = V_{AB}$

## SISTEMAS TRIFASICOS

Las tensiones inducidas en las tres bobinas igualmente espaciadas de la Fig. 14-2(*a*) presentan una diferencia de fase de 120°. La tensión en la bobina $A$ alcanza el máximo en primer término, luego lo alcanza $B$ y después $C$; la secuencia en $ABC$. Esta secuencia es evidente a partir del diagrama fasorial con su rotación positiva en sentido contrario al de las agujas del reloj, ya que los fasores pasarán por un punto fijo en el orden $A$-$B$-$C$-$A$-$B$-$C\cdots$, y también se ve en el diagrama de tensiones instantáneas de la Fig. 14-2(*c*) que los máximos se suceden en el mismo orden.

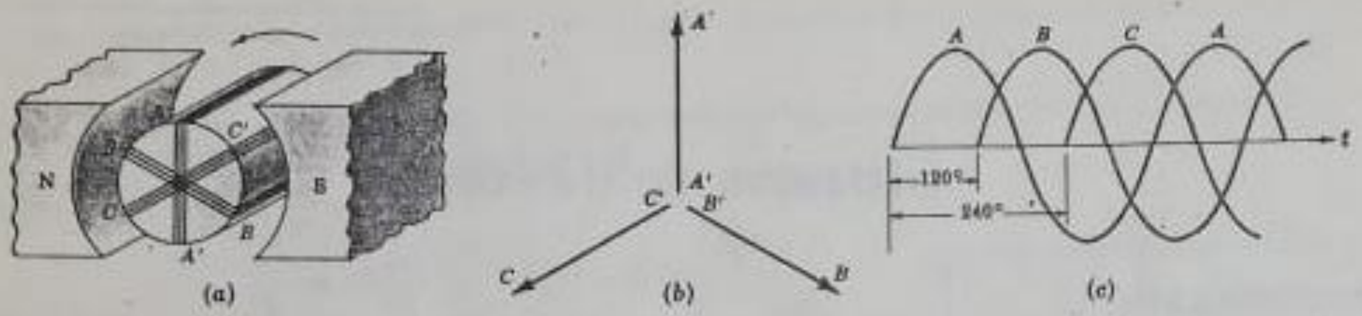



Fig. 14-2. Sistema trifásico

La rotación de las bobinas en sentido opuesto daría lugar a la secuencia *CBA* representada en la Figura 14-3.

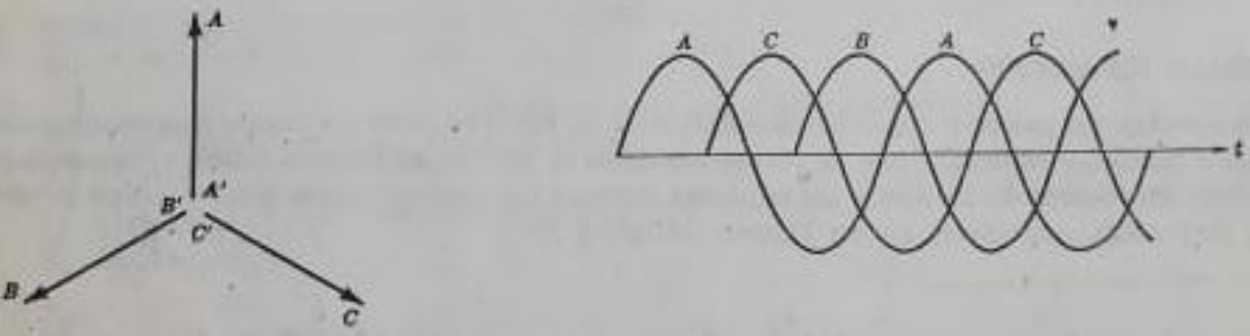



Fig. 14-3. Secuencia *CBA*

Aunque la máquina esquematizada en la Fig. 14-2(*a*) es teóricamente correcta, en la práctica se presentan limitaciones que se oponen a su utilización. Por ello, es el campo magnético el que gira mientras que el devanado trifásico permanece fijo.

La conexión de los extremos *A'*, *B'* y *C'* [Fig. 14-4(*a*)] da lugar a un alternador en estrella. Con la conexión de *A* y *B'*, *B* y *C'*, *C* y *A'* en la Fig. 14-4(*b*) resulta un alternador en triángulo.

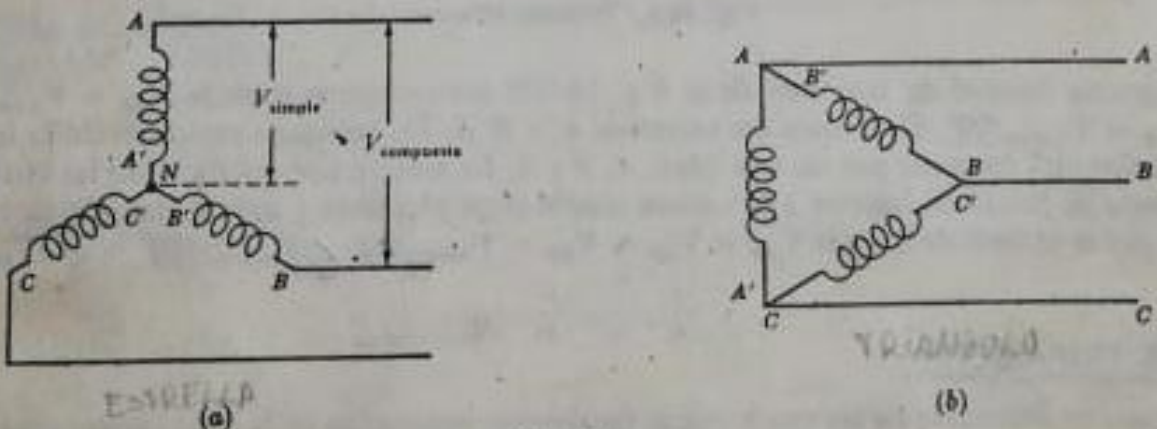


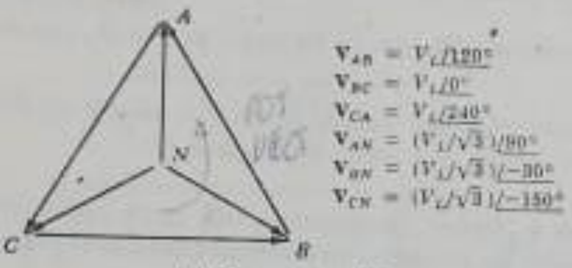

Fig. 14-4

En la conexión en estrella las corrientes de bobina y de línea son iguales y la tensión compuesta entre líneas $\sqrt{3}$ veces la tensión simple de bobina. En la conexión en triángulo la tensión compuesta entre líneas es igual a la simple de bobina, pero la corriente de ésta es $1/\sqrt{3}$ veces la corriente de línea. (Véase Problema 14-2.)

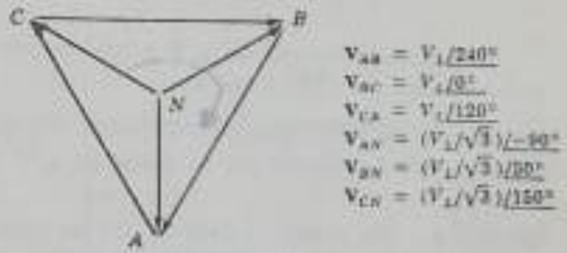
En una y otra conexión las líneas *A*, *B* y *C* proporcionan un sistema trifásico de tensiones. El punto neutro de la conexión en estrella es el cuarto conductor del sistema trifásico de cuatro conductores.

## TENSIONES EN EL SISTEMA TRIFASICO

La elección de una tensión como referencia con un ángulo de fase nulo determina los ángulos de fase de todas las demás tensiones del sistema. Como referencia se toma $\mathbf{V}_{BC}$. Los triángulos de las Figuras 14-5(*a*) y (*b*) representan todas las tensiones para las secuencias *ABC* y *CBA*.




(*a*) Secuencia *ABC*




(*b*) Secuencia *CBA*

**Fig. 14-5**

La *tensión del sistema* es la tensión compuesta entre cualquier par de líneas, *A* y *B*, *B* y *C* o *C* y *A*. En el sistema de cuatro conductores el valor de la tensión simple o de fase de línea a neutro es $1/\sqrt{3}$ veces la tensión compuesta entre líneas. Por ejemplo, en un sistema trifásico, *CBA*, de cuatro conductores de 208 voltios, las tensiones compuestas entre líneas son de 208 voltios y las simples de línea a neutro son de $208/\sqrt{3}$ o 120 voltios. Con la Fig. 14-5(*b*) se determinan los ángulos de fase de las tensiones. Así, $\mathbf{V}_{BC} = 208\angle 0^\circ$, $\mathbf{V}_{AB} = 208\angle 240^\circ$, $\mathbf{V}_{CA} = 208\angle 120^\circ$, $\mathbf{V}_{AN} = 120\angle -90^\circ$, $\mathbf{V}_{BN} = 120\angle 30^\circ$ y $\mathbf{V}_{CN} = 120\angle 150^\circ$.

## CARGAS EQUILIBRADAS EN UN SISTEMA TRIFASICO

**Ejemplo 1.** Un sistema trifásico *ABC* de tres conductores y 110 voltios alimenta a una conexión en triángulo de tres impedancias iguales de $5\angle 45^\circ$ ohmios. Determinar las intensidades de corriente en las líneas $\mathbf{I}_A$, $\mathbf{I}_B$ e $\mathbf{I}_C$ y dibujar el diagrama fasorial.

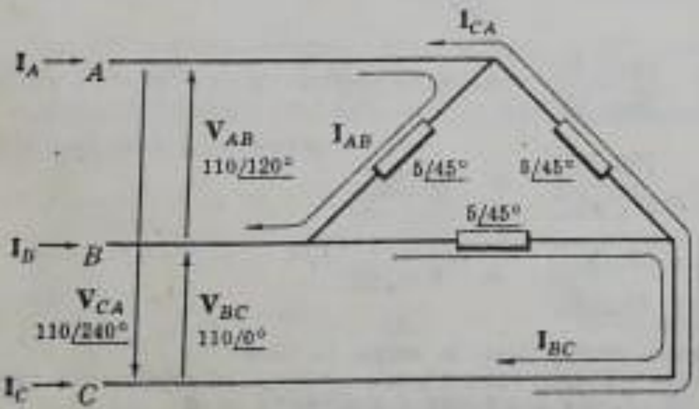



**Fig. 14-6**

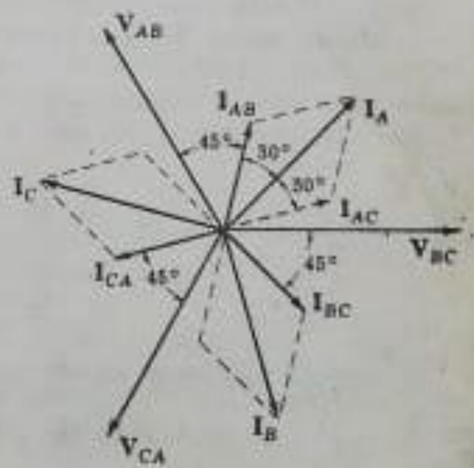



**Fig. 14-7**

Se traza el esquema del circuito con las tensiones en la forma indicada en la Fig. 14-6. Los sentidos positivos de las corrientes son los indicados en el diagrama. Entonces,

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}} = \frac{110\angle 120^\circ}{5\angle 45^\circ} = 22\angle 75^\circ = 5{,}7 + j21{,}2$$

$$\mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}} = \frac{110\angle 0^\circ}{5\angle 45^\circ} = 22\angle -45^\circ = 15{,}55 - j15{,}55$$

$$\mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}} = \frac{110\angle 240^\circ}{5\angle 45^\circ} = 22\angle 195^\circ = -21{,}2 - j5{,}7$$

Aplicando la primera ley de Kirchhoff a cada vértice del triángulo de carga,

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_{AB} + \mathbf{I}_{AC} = 22\underline{/75^\circ} - 22\underline{/195^\circ} = 38{,}1\underline{/45^\circ}$$

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_{BA} + \mathbf{I}_{BC} = -22\underline{/75^\circ} + 22\underline{/-45^\circ} = 38{,}1\underline{/-75^\circ}$$

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{I}_{CA} + \mathbf{I}_{CB} = 22\underline{/195^\circ} - 22\underline{/-45^\circ} = 38{,}1\underline{/165^\circ}$$

El diagrama fasorial de la Fig. 14-7 representa las corrientes equilibradas en las líneas de 38,1 A, con ángulos de fase de 120° entre ellas.

*En una carga equilibrada conectada en triángulo la tensión compuesta entre líneas y la simple de fase son iguales y la corriente en la línea es $\sqrt{3}$ veces mayor que la corriente en la fase.*

**Ejemplo 2.** Un sistema trifásico *CBA* de cuatro conductores y 208 voltios alimenta a una carga equilibrada conectada en estrella con impedancias de $20\underline{/-30^\circ}$ ohmios. Hallar las corrientes en las líneas y dibujar el diagrama fasorial.

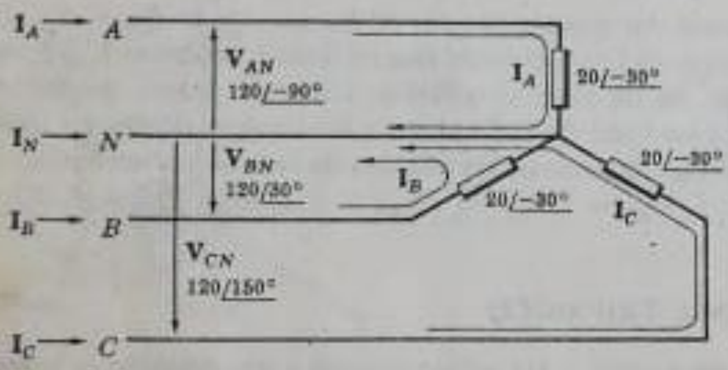



Fig. 14-8

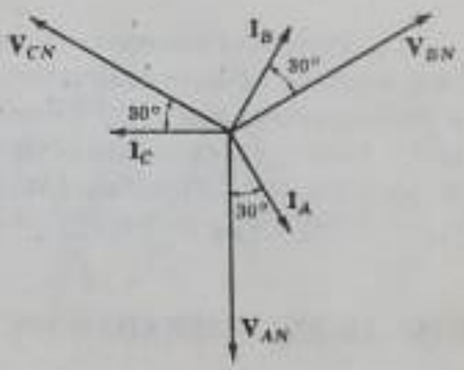



Fig. 14-9

Se traza el esquema del circuito y se escriben en él las tensiones simples entre línea y neutro, utilizando la Fig. 14-5(*b*). Se eligen las corrientes tal como se ha señalado en la Fig. 14-8 con retorno de todas ellas por el conductor neutro. En estas condiciones,

$$\mathbf{I}_A = \frac{\mathbf{V}_{AN}}{\mathbf{Z}} = \frac{120\underline{/-90^\circ}}{20\underline{/-30^\circ}} = 6{,}0\underline{/-60^\circ}$$

$$\mathbf{I}_B = \frac{\mathbf{V}_{BN}}{\mathbf{Z}} = \frac{120\underline{/30^\circ}}{20\underline{/-30^\circ}} = 6{,}0\underline{/60^\circ}$$

$$\mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{V}_{CN}}{\mathbf{Z}} = \frac{120\underline{/150^\circ}}{20\underline{/-30^\circ}} = 6{,}0\underline{/180^\circ}$$

Suponiendo positivo el sentido de la corriente en el neutro hacia la carga, se tiene

$$\mathbf{I}_N = -(\mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_C) = -(6{,}0\underline{/-60^\circ} + 6{,}0\underline{/60^\circ} + 6{,}0\underline{/180^\circ}) = 0$$

El diagrama fasorial de la Fig. 14-9 representa las corrientes equilibradas de línea, estando cada una de ellas adelantada respecto de la tensión simple correspondiente en el ángulo de la impedancia respectiva.

*En una carga equilibrada conectada en estrella las corrientes en las líneas y en las fases son iguales. La corriente en el neutro es cero y la tensión compuesta entre líneas es $\sqrt{3}$, mayor que la tensión simple de fase, es decir, $V_L = \sqrt{3}\, V_F$.*

## CIRCUITO EQUIVALENTE MONOFASICO PARA CARGAS EQUILIBRADAS

De acuerdo con las transformaciones Y-Δ estudiadas en el Capítulo 12, un conjunto de tres impedancias iguales, $\mathbf{Z}_\Delta$, en una conexión en triángulo equivale a un conjunto $\mathbf{Z}_Y$ de tres impedancias iguales conectadas en estrella, siendo $\mathbf{Z}_Y = (1/3)\mathbf{Z}_\Delta$. Entonces es posible un cálculo más directo del circuito en estrella para cargas equilibradas trifásicas de cualquier tipo.

El circuito equivalente monofásico unifilar está formado por una fase del circuito trifásico de cuatro conductores, conectado en estrella de la Fig. 14-10, con una tensión que tiene el módulo de la tensión simple de fase y un ángulo de fase nulo. La corriente de línea calculada para este circuito tiene un ángulo de fase respecto del ángulo cero de la tensión. Por tanto, las intensidades reales de línea $\mathbf{I}_A$, $\mathbf{I}_B$ e $\mathbf{I}_C$ tendrán un de fase, en adelanto o en retraso, respecto de las correspondientes tensiones simples de este mismo ángulo.

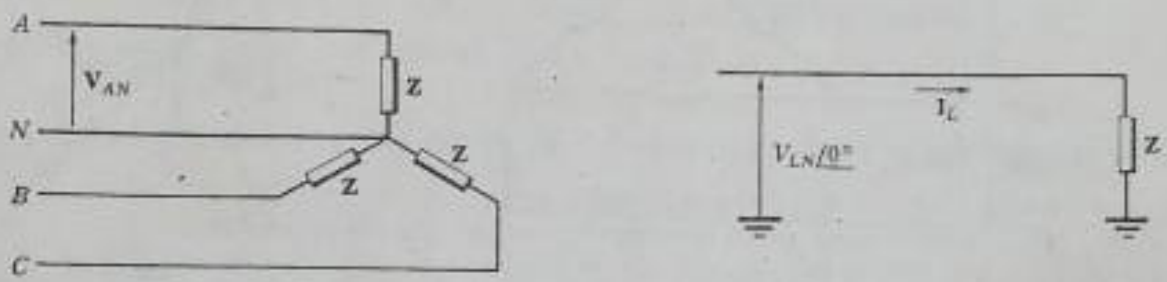



**Fig. 14-10. Circuito monofásico equivalente**

**Ejemplo 3.** Calcular las corrientes de línea del Ejemplo 1 por el método del equivalente monofásico.

Se dibuja el circuito unifilar y se señala con Δ la carga, indicando que las impedancias reales estaban conectadas en triángulo. La impedancia del equivalente en estrella es

$$\mathbf{Z}_Y = \mathbf{Z}_\Delta/3 = (5/3)\underline{/45^\circ}$$

y la tensión simple de línea a neutro es

$$V_{LN} = V_L/\sqrt{3} = 110/\sqrt{3} = 63{,}5$$

Entonces, la corriente en la línea es

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_{LN}}{\mathbf{Z}} = \frac{63{,}5\underline{/0^\circ}}{(5/3)\underline{/45^\circ}} = 38{,}1\underline{/-45^\circ}$$

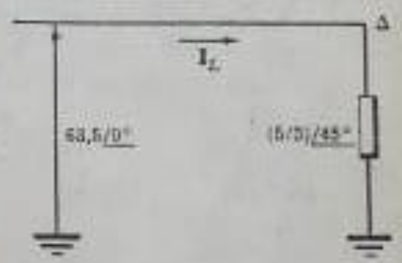



**Fig. 14-11**

Puesto que esta corriente retrasa respecto de la tensión un ángulo de 45°, las corrientes de línea $\mathbf{I}_A$, $\mathbf{I}_B$ e $\mathbf{I}_C$ retrasan respecto de sus correspondientes tensiones, $\mathbf{V}_{AN}$, $\mathbf{V}_{BN}$ y $\mathbf{V}_{CN}$ en 45°. Los ángulos de estas tensiones se obtienen del triángulo *ABC* de la Fig. 14-5(*a*). Seguidamente se dan las tensiones simples de línea a neutro y las corrientes correspondientes.

$$\mathbf{V}_{AN} = 63{,}5\underline{/90^\circ} \qquad \mathbf{I}_A = 38{,}1\underline{/90^\circ - 45^\circ} = 38{,}1\underline{/45^\circ}$$

$$\mathbf{V}_{BN} = 63{,}5\underline{/-30^\circ} \qquad \mathbf{I}_B = 38{,}1\underline{/-30^\circ - 45^\circ} = 38{,}1\underline{/-75^\circ}$$

$$\mathbf{V}_{CN} = 63{,}5\underline{/-150^\circ} \qquad \mathbf{I}_C = 38{,}1\underline{/-150^\circ - 45^\circ} = 38{,}1\underline{/-195^\circ}$$

Estas intensidades de corriente son idénticas a las que se obtuvieron en el Ejemplo 1. Si se desean las corrientes de fase en las impedancias conectadas en triángulo, se pueden obtener a partir de la expresión $I_F = I_L/\sqrt{3} = 38{,}1/\sqrt{3} = 22$. Los ángulos de fase de estas corrientes se deducen estableciendo primero los ángulos de las tensiones compuestas entre líneas, determinando después las corrientes con un retraso de 45°.

$$\mathbf{V}_{AB} = 110\underline{/120^\circ} \qquad \mathbf{I}_{AB} = 22\underline{/120^\circ - 45^\circ} = 22\underline{/75^\circ}$$

$$\mathbf{V}_{BC} = 110\underline{/0^\circ} \qquad \mathbf{I}_{BC} = 22\underline{/0^\circ - 45^\circ} = 22\underline{/-45^\circ}$$

$$\mathbf{V}_{CA} = 110\underline{/240^\circ} \qquad \mathbf{I}_{CA} = 22\underline{/240^\circ - 45^\circ} = 22\underline{/195^\circ}$$

## CARGA DESEQUILIBRADA CONECTADA EN TRIANGULO

La solución del problema de la carga desequilibrada con conexión en Δ se obtiene calculando las corrientes de fase y aplicando después la primera ley de Kirchhoff a los nudos principales para deducir las tres corrientes de línea. Estas ni serán iguales ni presentarán una diferencia de fase de 120°, como ocurría en el caso de cargas equilibradas.

**Ejemplo 4.**

Un sistema trifásico *ABC* de tres conductores y 240 voltios tiene una carga conectada en triángulo con $\mathbf{Z}_{AB} = 10\angle 0^\circ$, $\mathbf{Z}_{BC} = 10\angle 30^\circ$ y $\mathbf{Z}_{CA} = 15\angle -30^\circ$. Obtener las tres corrientes de línea y dibujar el diagrama fasorial.

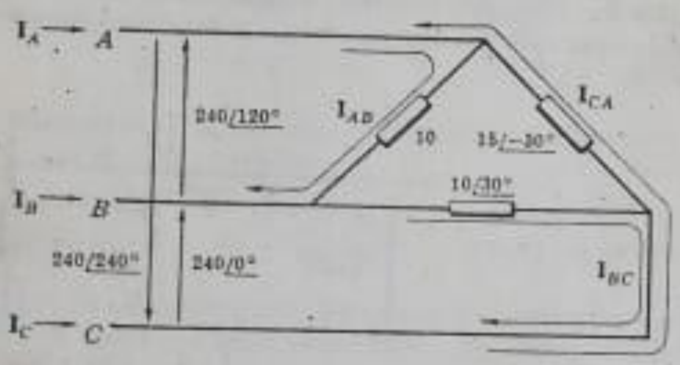



Fig. 14-12

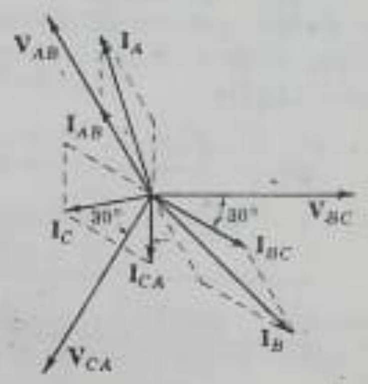



Fig. 14-13

Construido el esquema del circuito, Fig. 14-12, con las correspondientes tensiones, las corrientes de fase, como se ve en la figura, son independientes y vienen dadas por

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_{AB}} = \frac{240\angle 120^\circ}{10\angle 0^\circ} = 24\angle 120^\circ, \quad \mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}_{BC}} = 24\angle -30^\circ, \quad \mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}_{CA}} = 16\angle 270^\circ$$

Aplicando la primera ley de Kirchhoff a los nudos de la carga se tiene

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_{AB} + \mathbf{I}_{AC} = 24\angle 120^\circ - 16\angle 270^\circ = 38{,}7\angle 108{,}1^\circ$$
$$\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_{BA} + \mathbf{I}_{BC} = -24\angle 120^\circ + 24\angle -30^\circ = 46{,}4\angle -45^\circ$$
$$\mathbf{I}_C = \mathbf{I}_{CA} + \mathbf{I}_{CB} = 16\angle 270^\circ - 24\angle -30^\circ = 21{,}2\angle 190{,}9^\circ$$

El diagrama fasorial correspondiente se ha representado en la Figura 14-13.

## CARGA DESEQUILIBRADA CONECTADA EN ESTRELLA CON CUATRO CONDUCTORES

En un sistema de cuatro conductores, por el neutro circulará corriente cuando la carga esté desequilibrada y la tensión en cada una de las impedancias permanecerá constante con el valor de la tensión simple de fase o línea a neutro. Las corrientes de línea son distintas y no están defasadas 120°.

**Ejemplo 5.**

Un sistema trifásico *CBA* de cuatro conductores y 208 voltios alimenta una carga conectada en estrella con $\mathbf{Z}_A = 6\angle 0^\circ$, $\mathbf{Z}_B = 6\angle 30^\circ$ y $\mathbf{Z}_C = 5\angle 45^\circ$. Obtener las tres corrientes en las líneas y en el neutro. Dibujar el diagrama fasorial.

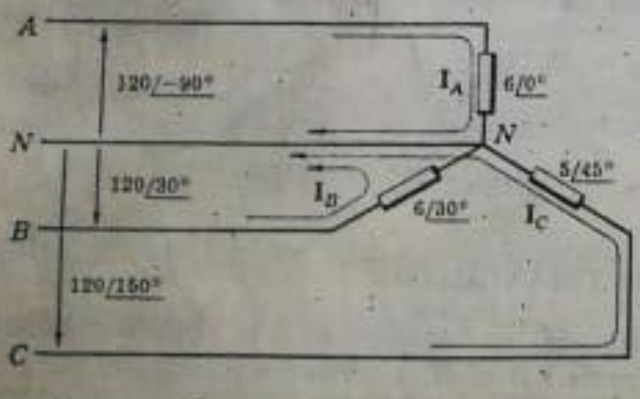



Fig. 14-14

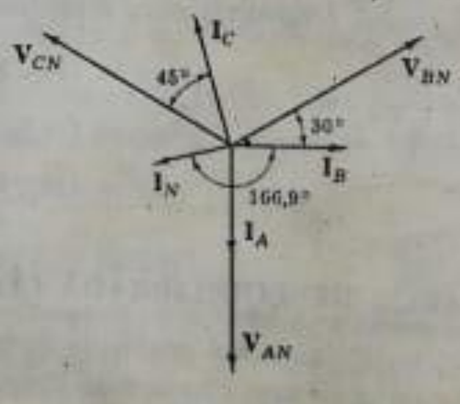



Fig. 14-15

Se construye el esquema del circuito como en la Fig. 14-14. Se aplican las tensiones y se eligen las corrientes como se han dibujado. Las intensidades son independientes y vienen dadas por

$$I_A = \frac{V_{AN}}{Z_A} = \frac{120\underline{/-90^\circ}}{6\underline{/0^\circ}} = 20\underline{/-90^\circ},\quad I_B = \frac{V_{BN}}{Z_B} = 20\underline{/0^\circ},\quad I_C = \frac{V_{CN}}{Z_C} = 24\underline{/105^\circ}$$

Por el conductor neutro circula una corriente cuya intensidad es la suma de las intensidades de línea $\mathbf{I}_A$, $\mathbf{I}_B$ e $\mathbf{I}_C$. Suponiendo que el sentido positivo de $\mathbf{I}_N$ es hacia la carga,

$$I_N = -(I_A + I_B + I_C) = -(20\underline{/-90^\circ} + 20\underline{/0^\circ} + 24\underline{/105^\circ}) = 14{,}1\underline{/-166{,}9^\circ}$$

El diagrama fasorial es el representado en la Figura 14-15.

## CARGA DESEQUILIBRADA CONECTADA EN ESTRELLA CON TRES CONDUCTORES:

Si solamente hay tres líneas *A*, *B* y *C* conectadas a una carga en estrella desequilibrada, el punto común de las tres impedancias de carga no está al potencial del neutro y se designa por la letra «*O*» en lugar de *N*. Las tensiones entre los extremos de las tres impedancias pueden variar considerablemente desde el valor de la tensión simple como se ve en el triángulo de tensiones que relaciona todas las tensiones del circuito. Tiene particular interés el desplazamiento a «*O*» desde *N*, *tensión de desplazamiento del neutro*.

**Ejemplo 6.**

Un sistema trifásico, *CBA*, trifilar, de 208 voltios, tiene una carga en estrella con $\mathbf{Z}_A = 6\underline{/0^\circ}$, $\mathbf{Z}_B = 6\underline{/30^\circ}$ y $\mathbf{Z}_C = 5\underline{/45^\circ}$. Obtener las corrientes de línea y la tensión en cada impedancia. Construir el triángulo de tensiones y determinar la tensión de desplazamiento del neutro, $\mathbf{V}_{ON}$.

Se dibuja el esquema del circuito y se eligen las corrientes de malla $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ como en la Fig. 14-16. El sistema de ecuaciones en forma matricial en las intensidades $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ es

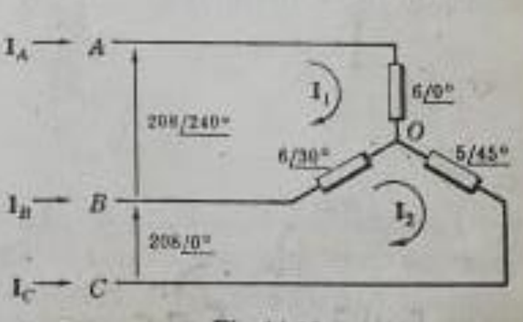


Fig. 14-16

$$\begin{bmatrix} 6\underline{/0^\circ} + 6\underline{/30^\circ} & -6\underline{/30^\circ} \\ -6\underline{/30^\circ} & 6\underline{/30^\circ} + 5\underline{/45^\circ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 208\underline{/240^\circ} \\ 208\underline{/0^\circ} \end{bmatrix}$$

de donde $\mathbf{I}_1 = 23{,}3\underline{/261{,}1^\circ}$ A e $\mathbf{I}_2 = 26{,}5\underline{/-63{,}4^\circ}$ A. Las corrientes en las líneas $\mathbf{I}_A$, $\mathbf{I}_B$ e $\mathbf{I}_C$, con el sentido dado en el esquema, valen

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_1 = 23{,}3\underline{/261{,}1^\circ}$$

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1 = 26{,}5\underline{/-63{,}4^\circ} - 23{,}3\underline{/261{,}1^\circ} = 15{,}45\underline{/-2{,}5^\circ}$$

$$\mathbf{I}_C = -\mathbf{I}_2 = 26{,}5\underline{/116{,}6^\circ}$$

Las tensiones en las tres impedancias vienen dadas por los productos de las corrientes en las líneas por las impedancias correspondientes.

$$\mathbf{V}_{AO} = \mathbf{Z}_A\mathbf{I}_A = (6\underline{/0^\circ})(23{,}3\underline{/261{,}1^\circ}) = 139{,}8\underline{/261{,}1^\circ}$$

$$\mathbf{V}_{BO} = \mathbf{Z}_B\mathbf{I}_B = (6\underline{/30^\circ})(15{,}45\underline{/-2{,}5^\circ}) = 92{,}7\underline{/27{,}5^\circ}$$

$$\mathbf{V}_{CO} = \mathbf{Z}_C\mathbf{I}_C = (5\underline{/45^\circ})(26{,}5\underline{/116{,}6^\circ}) = 132{,}5\underline{/161{,}6^\circ}$$

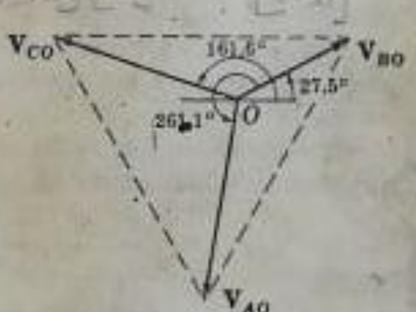


Fig. 14-17

El diagrama fasorial de estas tres tensiones, Fig. 14-17, forma un triángulo equilátero. En la Fig. 14-18 se ha dibujado nuevamente este triángulo, añadiendo del neutro, con lo que se puede observar la tensión de desplazamiento $\mathbf{V}_{ON}$. Esta tensión puede calcularse utilizando cualquiera de los tres puntos *A*, *B* o *C* y siguiendo la notación convencional del doble subíndice. Utilizando el punto *A* se obtiene

$$\mathbf{V}_{ON} = \mathbf{V}_{OA} + \mathbf{V}_{AN} = -139{,}8\underline{/261{,}1^\circ} + 120\underline{/-90^\circ} = 28{,}1\underline{/39{,}8^\circ}$$

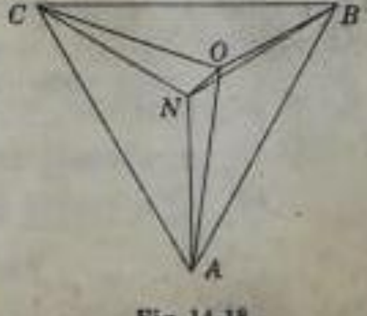


Fig. 14-18

$V_{ON} = V_{OB} + V_{BN}$ $V_{ON} = V_{OC} + V_{CN}$

## * CARGA DESEQUILIBRADA EN ESTRELLA CON TRES CONDUCTORES METODO DEL DESPLAZAMIENTO DEL NEUTRO

En el Ejemplo 6 se ha obtenido la tensión de desplazamiento del neutro $\mathbf{V}_{ON}$ en función de las tensiones de carga. Si se determina una relación para $\mathbf{V}_{ON}$ independiente de las tensiones de carga, las corrientes y tensiones buscadas en el Ejemplo 6 se obtendrán con mayor facilidad, como puede verse en el Ejemplo 7.

Para obtener la tensión $\mathbf{V}_{ON}$ se escriben las corrientes de línea en función de las tensiones en las cargas y las admitancias de carga.

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{V}_{AO}\mathbf{Y}_A, \quad \mathbf{I}_B = \mathbf{V}_{BO}\mathbf{Y}_B, \quad \mathbf{I}_C = \mathbf{V}_{CO}\mathbf{Y}_C \qquad (1)$$

Aplicando ahora la primera ley de Kirchhoff en el punto $O$, Fig. 14-19, se podrá escribir

$$\mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_C = 0 \qquad (2)$$

o bien $$\mathbf{V}_{AO}\mathbf{Y}_A + \mathbf{V}_{BO}\mathbf{Y}_B + \mathbf{V}_{CO}\mathbf{Y}_C = 0 \qquad (3)$$

Utilizando el diagrama de la Fig. 14-18 se pueden expresar las tensiones $\mathbf{V}_{AO}$, $\mathbf{V}_{BO}$ y $\mathbf{V}_{CO}$ en función de sus tensiones componentes,

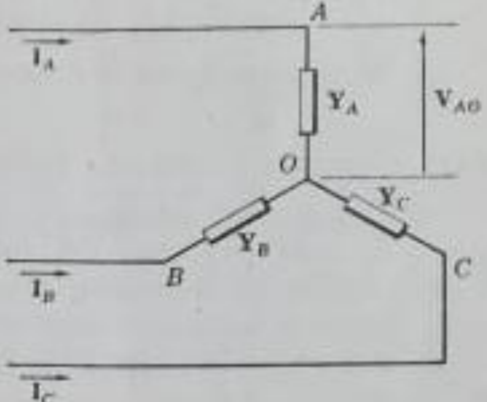



Fig. 14-19

$$\mathbf{V}_{AO} = \mathbf{V}_{AN} + \mathbf{V}_{NO} \qquad \mathbf{V}_{BO} = \mathbf{V}_{BN} + \mathbf{V}_{NO} \qquad \mathbf{V}_{CO} = \mathbf{V}_{CN} + \mathbf{V}_{NO} \qquad (4)$$

Llevando (4) a (3) se tiene

$$(\mathbf{V}_{AN} + \mathbf{V}_{NO})\mathbf{Y}_A + (\mathbf{V}_{BN} + \mathbf{V}_{NO})\mathbf{Y}_B + (\mathbf{V}_{CN} + \mathbf{V}_{NO})\mathbf{Y}_C = 0 \qquad (5)$$

de donde $$\mathbf{V}_{ON} = \frac{\mathbf{V}_{AN}\mathbf{Y}_A + \mathbf{V}_{BN}\mathbf{Y}_B + \mathbf{V}_{CN}\mathbf{Y}_C}{\mathbf{Y}_A + \mathbf{Y}_B + \mathbf{Y}_C} \qquad (6)$$

Las tensiones $\mathbf{V}_{AN}$, $\mathbf{V}_{BN}$ y $\mathbf{V}_{CN}$ en la ecuación (6) se obtienen del triángulo de la Fig. 14-5 para la secuencia dada en el problema. Las admitancias $\mathbf{Y}_A$, $\mathbf{Y}_B$ e $\mathbf{Y}_C$ son los recíprocos de las impedancias de carga $\mathbf{Z}_A$, $\mathbf{Z}_B$ y $\mathbf{Z}_C$. Por tanto, puesto que todos los términos de (6) o son datos o se obtienen con facilidad, puede calcularse la tensión de desplazamiento del neutro y utilizarla luego para determinar las corrientes en las líneas.

**Ejemplo 7.**

Obtener las corrientes en las líneas y las tensiones en las cargas del Ejemplo 6 por el método de la tensión de desplazamiento del neutro.

Observando la Fig. 14-20, la ecuación para la tensión de desplazamiento del neutro es

$$\mathbf{V}_{ON} = \frac{\mathbf{V}_{AN}\mathbf{Y}_A + \mathbf{V}_{BN}\mathbf{Y}_B + \mathbf{V}_{CN}\mathbf{Y}_C}{\mathbf{Y}_A + \mathbf{Y}_B + \mathbf{Y}_C}$$

siendo

$$\mathbf{Y}_A = 1/(6\underline{/0^\circ}) = 0{,}1667\underline{/0^\circ} = 0{,}1667$$

$$\mathbf{Y}_B = 1/(6\underline{/30^\circ}) = 0{,}1667\underline{/-30^\circ} = 0{,}1443 - j0{,}0833$$

$$\mathbf{Y}_C = 1/(5\underline{/45^\circ}) = 0{,}20\underline{/-45^\circ} = 0{,}1414 - j0{,}1414$$

$$\mathbf{Y}_A + \mathbf{Y}_B + \mathbf{Y}_C = 0{,}4524 - j0{,}2247$$

$$= 0{,}504\underline{/-26{,}5^\circ}$$

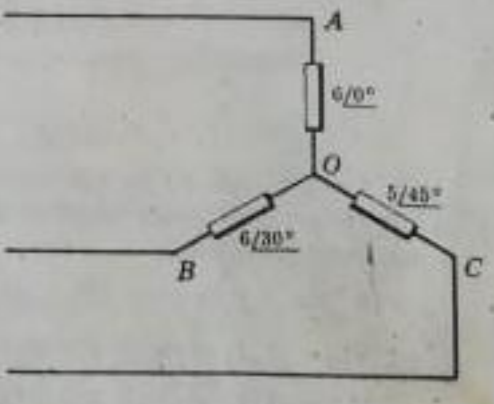



Fig. 14-20

y $$\mathbf{V}_{AN}\mathbf{Y}_A = 120\underline{/-90^\circ}\,(0{,}1667\underline{/0^\circ}) = 20\underline{/-90^\circ} = -j20$$

$$\mathbf{V}_{BN}\mathbf{Y}_B = 120\underline{/30^\circ}\,(0{,}1667\underline{/-30^\circ}) = 20\underline{/0^\circ} = 20$$

$$\mathbf{V}_{CN}\mathbf{Y}_C = 120\underline{/150^\circ}\,(0{,}20\underline{/-45^\circ}) = 24\underline{/105^\circ} = -6{,}2 + j23{,}2$$

$$\mathbf{V}_{AN}\mathbf{Y}_A + \mathbf{V}_{BN}\mathbf{Y}_B + \mathbf{V}_{CN}\mathbf{Y}_C = 13{,}8 + j3{,}2 = 14{,}1\underline{/13{,}1^\circ}$$

Por tanto, $$\mathbf{V}_{ON} = 14{,}1\underline{/13{,}1^\circ}/0{,}504\underline{/-26{,}5^\circ} = 28{,}0\underline{/39{,}6^\circ}$$

Las tensiones $V_{AO}$, $V_{BO}$ y $V_{CO}$ se obtienen a partir de $V_{NO}$ y de la correspondiente tensión simple de línea a neutro.

$$V_{AO} = V_{AN} + V_{NO} = 120\angle -90^\circ - 28{,}0\angle 39{,}6^\circ = 139{,}5\angle 261{,}1^\circ$$
$$V_{BO} = V_{BN} + V_{NO} = 120\angle 30^\circ - 28{,}0\angle 39{,}6^\circ = 92{,}5\angle 27{,}1^\circ$$
$$V_{CO} = V_{CN} + V_{NO} = 120\angle 150^\circ - 28{,}0\angle 39{,}6^\circ = 132{,}5\angle 161{,}45^\circ$$

Las corrientes en las líneas se obtienen fácilmente de las tensiones y correspondientes admitancias de carga:

$$I_A = V_{AO}\,Y_A = 139{,}5\angle 261{,}1^\circ\,(0{,}1667\angle 0^\circ) = 23{,}2\angle 261{,}1^\circ$$
$$I_B = V_{BO}\,Y_B = 92{,}5\angle 27{,}1^\circ\,(0{,}1667\angle -30^\circ) = 15{,}4\angle -2{,}9^\circ$$
$$I_C = V_{CO}\,Y_C = 132{,}5\angle 161{,}45^\circ\,(0{,}20\angle -45^\circ) = 26{,}5\angle 116{,}45^\circ$$

Las corrientes y tensiones anteriores están de acuerdo con las obtenidas en el Ejemplo 6.

## POTENCIA EN CARGAS TRIFASICAS EQUILIBRADAS

Como por las impedancias de las fases en cargas equilibradas, triángulo o estrella, circulan corrientes iguales, la potencia por fase es un tercio de la potencia total. La tensión entre los extremos de la impedancia $Z_\Delta$, Fig. 14-21(*a*), es la *tensión compuesta entre líneas* y la corriente es la *corriente de fase*. El ángulo entre la tensión y la intensidad es el de la impedancia. Entonces, la potencia por fase es

$$P_F = V_L I_F \cos\theta \qquad (7)$$

$P_F = \frac{1}{3} P_T.$

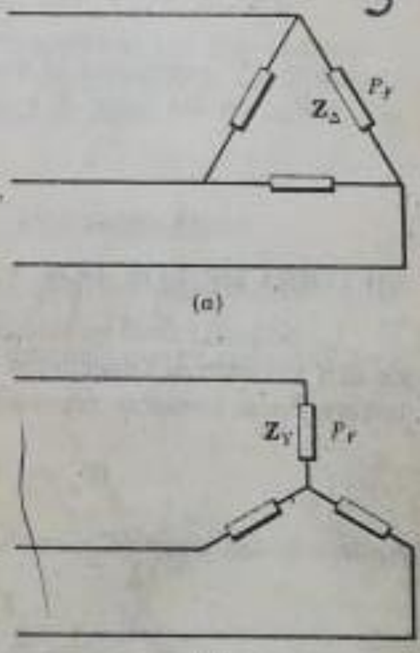


Fig. 14-21

y la potencia total

$$P_T = 3 V_L I_F \cos\theta \qquad (8)$$

Puesto que en las cargas equilibradas en $\Delta$, $I_L = \sqrt{3}\, I_F$,

$$P_T = \sqrt{3}\, V_L I_L \cos\theta \qquad (9)$$

Por las impedancias conectadas en la estrella de la Fig. 14-21(*b*) circulan las *corrientes de línea* y la tensión en $Z_Y$ es la *tensión simple de fase*. El ángulo entre ellas es el de la impedancia. Entonces, la potencia por fase es

$$P_F = V_F I_L \cos\theta \qquad (10)$$

y la potencia total

$$P_T = 3 V_F I_L \cos\theta \qquad (11)$$

Puesto que $V_L = \sqrt{3}\, V_F$,

$$P_T = \sqrt{3}\, V_L I_L \cos\theta \qquad (12)$$

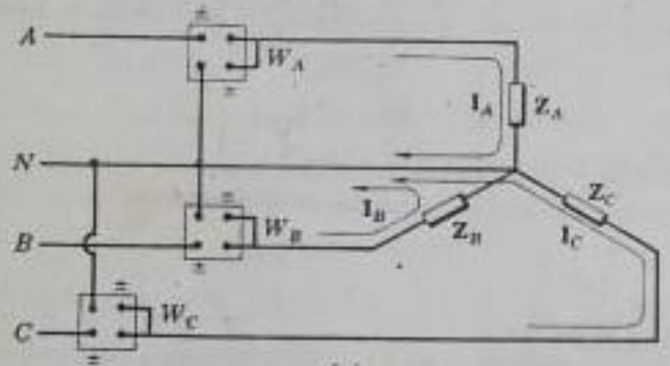
Las ecuaciones (*9*) y (*12*) son idénticas, por tanto, la potencia total en cualquier carga trifásica equilibrada viene dada por $\sqrt{3}\, V_L I_L \cos\theta$, siendo $\theta$ el ángulo de la impedancia de carga o el ángulo en una impedancia equivalente en el caso en que varias cargas equilibradas sean alimentadas por el mismo sistema.

La potencia aparente total $S_T$ y la potencia reactiva total $Q_T$ están relacionadas con $P_T$, como se vio en el Capítulo 7. Por consiguiente, una carga trifásica equilibrada tiene unas potencias activa, aparente y reactiva, que vienen dadas por

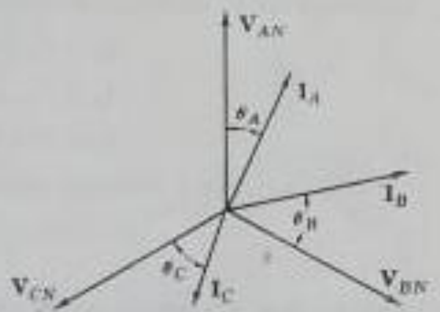
$$P_T = \sqrt{3}\, V_L I_L \cos\theta \qquad S_T = \sqrt{3}\, V_L I_L \qquad Q_T = \sqrt{3}\, V_L I_L \operatorname{sen}\theta \qquad (13)$$

## VATIMETROS Y CARGAS EN ESTRELLA CON CUATRO CONDUCTORES

Un vatímetro es un aparato de medida con una bobina de tensión y otra de intensidad, dispuestas de forma que la desviación es proporcional a $VI\cos\theta$, en donde $\theta$ es el ángulo entre la tensión y la intensidad. Una carga conectada en estrella, con cuatro conductores, necesita tres vatímetros dispuestos en cada línea como muestra la Figura 14-22(*a*).



(*a*)



(*b*)

Fig. 14-22

El diagrama fasorial de la Fig. 14-22(*b*) supone que la corriente está retrasada en la fase *A* y adelantada en las fases *B* y *C*, con defases $\theta_A$, $\theta_B$ y $\theta_C$ respectivamente. Las lecturas del vatímetro son, entonces,

$$W_A = V_{AN}I_A\cos\measuredangle_A^{AN}, \qquad W_B = V_{BN}I_B\cos\measuredangle_B^{BN}, \qquad W_C = V_{CN}I_C\cos\measuredangle_C^{CN} \tag{14}$$

en donde $\measuredangle_A^{AN}$ representa el ángulo entre $\mathbf{V}_{AN}$ e $\mathbf{I}_A$. El vatímetro $W_A$ lee la potencia en la fase *A* y los $W_B$ y $W_C$, en las fases *B* y *C*. La potencia total es

$$P_T = W_A + W_B + W_C \tag{15}$$

## METODO DE LOS DOS VATIMETROS

La potencia total en una carga trifásica con tres conductores viene dada por la suma de las lecturas de dos vatímetros conectados en dos líneas cualesquiera con sus bobinas de tensión conectadas a la tercera línea, como se representa en la Fig. 14-23. Las lecturas de los dos aparatos son

$$W_A = V_{AB}I_A\cos\measuredangle_A^{AB} \qquad \text{y} \qquad W_C = V_{CB}I_C\cos\measuredangle_C^{CB} \tag{16}$$

Aplicando las leyes de Kirchhoff a los nudos *A* y *C* de la carga en triángulo se obtiene

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_{AB} + \mathbf{I}_{AC} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{I}_C = \mathbf{I}_{CA} + \mathbf{I}_{CB} \tag{17}$$

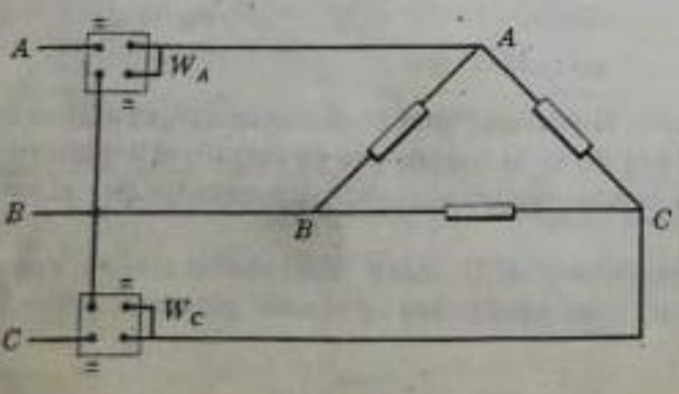


Fig. 14-23

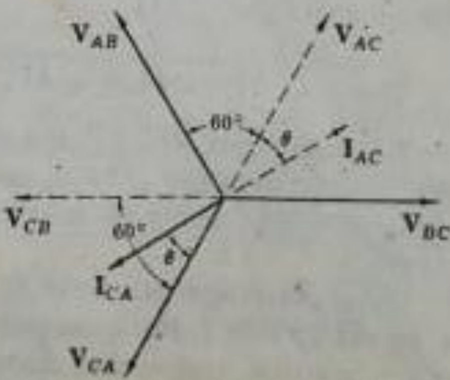


Fig. 14-24

Sustituyendo las expresiones (*17*) de $\mathbf{I}_A$ e $\mathbf{I}_C$ en las ecuaciones (*16*) se obtiene

$$\begin{aligned} W_A &= V_{AB}I_{AB}\cos\measuredangle_{AB}^{AB} + V_{AB}I_{AC}\cos\measuredangle_{AC}^{AB} \\ W_C &= V_{CB}I_{CA}\cos\measuredangle_{CA}^{CB} + V_{CB}I_{CB}\cos\measuredangle_{CB}^{CB} \end{aligned} \tag{18}$$

Los términos $V_{AB}I_{AB}\cos\measuredangle_{AB}^{AB}$ y $V_{CB}I_{CB}\cos\measuredangle_{CB}^{CB}$ se reconocen inmediatamente, ya que son las potencias en las fases *AB* y *CB* de la carga. Los otros dos términos contienen $V_{AB}I_{AC}$ y $V_{CB}I_{CA}$ que pueden escribirse ahora como $V_LI_{AC}$, ya que tanto $V_{AB}$ como $V_{CB}$ son tensiones compuestas entre líneas, e $I_{AC} = I_{CA}$. Para identificar estos dos términos se construye el diagrama fasorial de la Fig. 14-24, en que se ha supuesto que la corriente $\mathbf{I}_{AC}$ retrasa respecto de $\mathbf{V}_{AC}$ un ángulo $\theta$.

El diagrama se deduce,

$$\measuredangle_{AC}^{AB} = 60^\circ + \theta \qquad \text{y} \qquad \measuredangle_{CA}^{CB} = 60^\circ - \theta \tag{19}$$

Sumando los dos términos restantes de (*18*) y sustituyendo $(60^\circ + \theta)$ y $(60^\circ - \theta)$ en lugar de $\measuredangle_{AC}^{AB}$ y $\measuredangle_{CA}^{CB}$ respectivamente,

$$V_LI_{AC}\cos(60^\circ + \theta) + V_LI_{AC}\cos(60^\circ - \theta) \tag{20}$$

Como $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$, se puede escribir

$$V_LI_{AC}(\cos 60^\circ \cos\theta - \operatorname{sen} 60^\circ \operatorname{sen}\theta + \cos 60^\circ \cos\theta + \operatorname{sen} 60^\circ \operatorname{sen}\theta) \tag{21}$$

o bien

$$V_LI_{AC}\cos\theta \tag{22}$$

que es la potencia en la fase restante, esto es, en *AC*. Por tanto, hemos demostrado que dos vatímetros dan la potencia total en una carga conectada en triángulo. La aplicación del método de los dos vatímetros al caso de una carga conectada en estrella se deja como ejercicio al alumno.

## METODO DE LOS DOS VATIMETROS APLICADO A CARGAS EQUILIBRADAS

Para ver la aplicación del método de los dos vatímetros a cargas equilibradas consideremos la conexión en estrella de tres impedancias iguales representada en la Fig. 14-25(*a*). En la Fig. 14-25 (*b*) se ha dibujado el diagrama fasorial para la secuencia *ABC* en la hipótesis de corriente en retraso $\theta$.

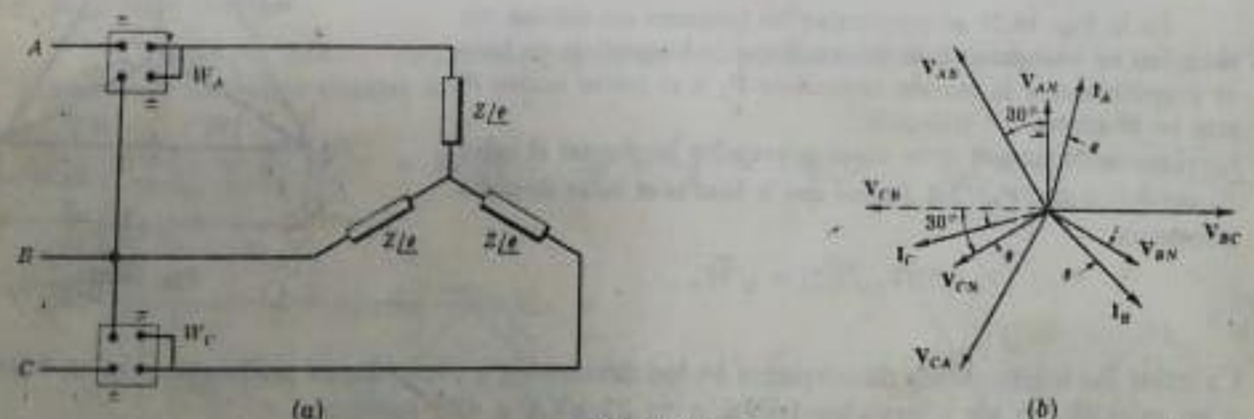



Fig. 14-25

Con los vatímetros en las líneas *A* y *C* sus lecturas son

$$W_A = V_{AB}I_A\cos\measuredangle_A^{AB} \qquad \text{y} \qquad W_C = V_{CB}I_C\cos\measuredangle_C^{CB} \tag{23}$$

Del diagrama fasorial,

$$\measuredangle_A^{AB} = 30^\circ + \theta \qquad \text{y} \qquad \measuredangle_C^{CB} = 30^\circ - \theta \tag{24}$$

Sustituyendo en (23),

$$W_A = V_{AB} I_A \cos(30° + \theta) \qquad \text{y} \qquad W_C = V_{CB} I_C \cos(30° - \theta) \tag{25}$$

Si el método de los dos vatímetros se utiliza con cargas equilibradas, las lecturas son $V_L I_L \cos(30° + \theta)$ y $V_L I_L \cos(30° - \theta)$ en donde $\theta$ es el ángulo de la impedancia. Ambas lecturas se pueden emplear para hallar el ángulo $\theta$.

Escribiendo la expresión de $W_1$ y teniendo en cuenta la fórmula del coseno de la suma de dos ángulos, se obtiene

$$W_1 = V_L I_L (\cos 30° \cos\theta - \operatorname{sen} 30° \operatorname{sen}\theta) \tag{26}$$

Análogamente,

$$W_2 = V_L I_L (\cos 30° \cos\theta + \operatorname{sen} 30° \operatorname{sen}\theta) \tag{27}$$

Por tanto, la suma vale $W_1 + W_2 = \sqrt{3} V_L I_L \cos\theta$ y la diferencia $W_2 - W_1 = V_L I_L \operatorname{sen}\theta$.

de donde

$$\operatorname{tg}\theta = \sqrt{3}\left(\frac{W_2 - W_1}{W_1 + W_2}\right) \tag{28}$$

En consecuencia, la tangente del ángulo en Z es $\sqrt{3}$ veces la relación entre la diferencia y la suma de las lecturas. Sin conocer las líneas en las que están colocados los medidores ni la secuencia del sistema no es posible distinguir entre $+\theta$ y $-\theta$. Por el contrario, si se conocen ambas cosas, puede determinarse el signo por las expresiones siguientes. Para la secuencia $ABC$,

$$\operatorname{tg}\theta = \sqrt{3}\,\frac{W_A - W_B}{W_A + W_B} = \sqrt{3}\,\frac{W_B - W_C}{W_B + W_C} = \sqrt{3}\,\frac{W_C - W_A}{W_C + W_A} \tag{29}$$

y para $CBA$,

$$\operatorname{tg}\theta = \sqrt{3}\,\frac{W_B - W_A}{W_B + W_A} = \sqrt{3}\,\frac{W_C - W_B}{W_C + W_B} = \sqrt{3}\,\frac{W_A - W_C}{W_A + W_C} \tag{30}$$

# Problemas resueltos

**14-1** Demostrar que la tensión compuesta entre líneas $V_L$ en un sistema trifásico es $\sqrt{3}$ veces mayor que la tensión simple de fase o de línea a neutro $V_F$.

En la Fig. 14-26 se representan las tensiones del sistema trifásico en un triángulo equilátero en el que la longitud de un lado es proporcional a la tensión compuesta $V_L$ y el punto neutro $N$ está en el centro del triángulo.

La tensión simple tiene como proyección horizontal el valor $V_F \cos 30°$, o sea, $V_F\sqrt{3}/2$. Puesto que la base es el doble de dicha proyección,

$$V_L = 2(V_F\sqrt{3}/2) = \sqrt{3}V_F$$

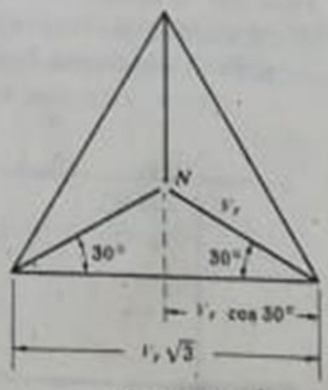



Fig. 14-26

**14-2** Calcular las intensidades de corriente en los devanados a plena carga para conexión en triángulo y en estrella, en un alternador trifásico de 25 kVA a 480 voltios.

En la conexión en estrella la corriente en la línea y en el devanado son iguales. En un sistema trifásico equilibrado,

$$S(\text{kVA}) = \sqrt{3}\, V_L I_L \times 10^{-3} \qquad \text{y} \qquad I_L = \frac{S(\text{kVA})}{\sqrt{3}\, V_L \times 10^{-3}} = \frac{25}{\sqrt{3}\,(480 \times 10^{-3})} = 30{,}1$$

El alternador con conexión en triángulo y de la misma potencia aparente (kVA) tiene también corrientes a plena carga de 30,1 A. Las corrientes en los devanados son $I_L/\sqrt{3}$. Por tanto, $I_{\text{bobina}} = 30{,}1/\sqrt{3} = 17{,}35$ A.

**14-3** Un sistema bifásico con una tensión simple de fase de 150 voltios alimenta a una carga equilibrada, conectada en triángulo, con impedancias de $10\underline{/53,1^\circ}$ ohmios. Hallar las intensidades en las líneas y la potencia total.

En un sistema bifásico las dos tensiones simples tienen una diferencia de fase de 90°. Por tanto, si $\mathbf{V}_{BN}$ se toma como referencia, $\mathbf{V}_{AN}$ está a 90°, como se observa en la Fig. 14-27. La tensión compuesta entre líneas es igual a $\sqrt{2}$ veces la tensión simple de línea a neutro. Por consiguiente, $V_{AB} = \sqrt{2}\,(150) = 212$ V. Las corrientes en las fases son

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}} = \frac{212\underline{/135^\circ}}{10\underline{/53,1^\circ}} = 21,2\underline{/81,9^\circ}$$

$$\mathbf{I}_{AN} = \frac{\mathbf{V}_{AN}}{\mathbf{Z}} = \frac{150\underline{/90^\circ}}{10\underline{/53,1^\circ}} = 15,0\underline{/36,9^\circ}$$

$$\mathbf{I}_{BN} = \frac{\mathbf{V}_{BN}}{\mathbf{Z}} = \frac{150\underline{/0^\circ}}{10\underline{/53,1^\circ}} = 15,0\underline{/-53,1^\circ}$$

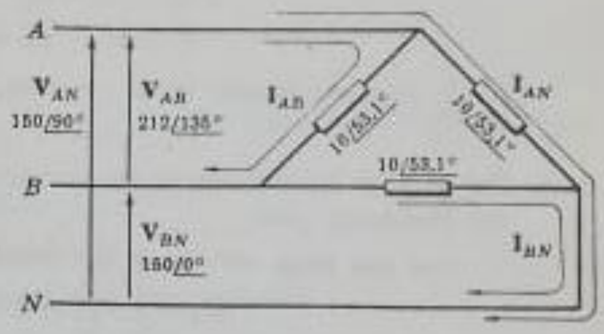



Fig. 14-27

Las corrientes en las líneas se obtienen a partir de las de fase sin más que aplicar la primera ley de Kirchhoff a los nudos de la carga en triángulo. Si se admite como sentido positivo para estas corrientes el sentido hacia la carga, se tiene

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_{AN} + \mathbf{I}_{AB} = \quad 15,0\underline{/36,9^\circ} + 21,2\underline{/81,9^\circ} \quad = 33,5\underline{/63,4^\circ}$$
$$\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_{BN} + \mathbf{I}_{BA} = \quad 15,0\underline{/-53,1^\circ} - 21,2\underline{/81,9^\circ} = 33,6\underline{/-79,7^\circ}$$
$$\mathbf{I}_N = \mathbf{I}_{NA} + \mathbf{I}_{NB} = -15,0\underline{/36,9^\circ} - 15,0\underline{/-53,1^\circ} = 21,2\underline{/171,86^\circ}$$

La potencia total se obtiene utilizando la corriente eficaz en las impedancias

$$P_{AB} = RI_{AB}^2 = (6)(21,2)^2 = 2700 \text{ W}$$
$$P_{AN} = RI_{AN}^2 = (6)(15,0)^2 = 1350 \text{ W}$$
$$P_{BN} = RI_{BN}^2 = (6)(15,0)^2 = 1350 \text{ W}$$
$$\text{Potencia total} = 5400 \text{ W}$$

**4-4**. Un sistema trifásico *ABC* con tres conductores a 100 voltios alimenta a una carga con conexión Δ e impedancias de $20\underline{/45^\circ}$ ohmios. Hallar las intensidades de corriente en las líneas y dibujar el diagrama fasorial.

Se aplican las tensiones compuestas entre líneas de secuencia *ABC* al circuito dado en la Fig. 14-28. Entonces, las corrientes elegidas son

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}} = \frac{100\underline{/120^\circ}}{20\underline{/45^\circ}} = 5,0\underline{/75^\circ}, \quad \mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}} = 5,0\underline{/-45^\circ}, \quad \mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}} = 5,0\underline{/195^\circ}$$

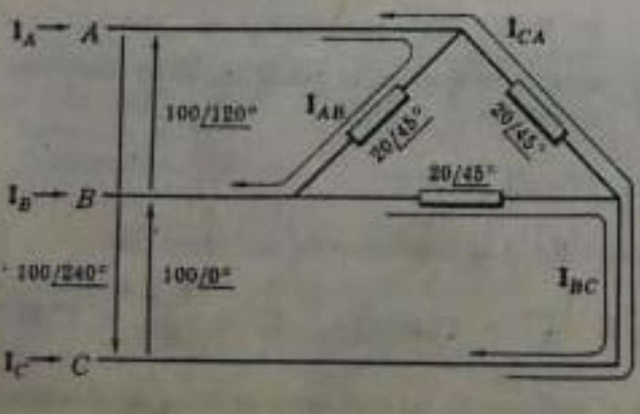



Fig. 14-28

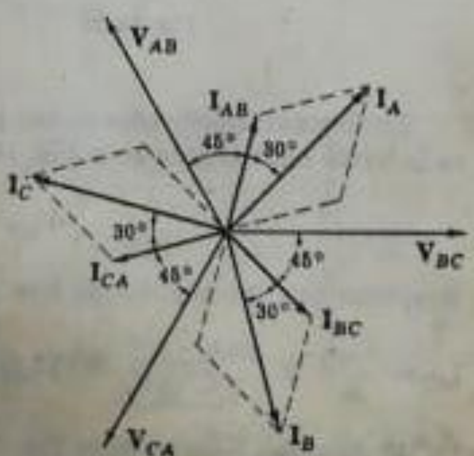



Fig. 14-29

Para obtener las corrientes en las líneas (véase el esquema del circuito) se aplica la primera ley de Kirchhoff a cada uno de los nudos principales de la carga. Por tanto,

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_{AB} + \mathbf{I}_{AC} = \quad 5{,}0\underline{/75^\circ} - 5{,}0\underline{/195^\circ} \quad = 8{,}66\underline{/45^\circ}$$
$$\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_{BA} + \mathbf{I}_{BC} = -5{,}0\underline{/75^\circ} + 5{,}0\underline{/-45^\circ} \;= 8{,}66\underline{/-75^\circ}$$
$$\mathbf{I}_C = \mathbf{I}_{CA} + \mathbf{I}_{CB} = \quad 5{,}0\underline{/195^\circ} - 5{,}0\underline{/-45^\circ} = 8{,}66\underline{/165^\circ}$$

El diagrama fasorial de las corrientes de fase y de línea se representa en la Figura 14-29.

**14-5** Determinar las lecturas de los vatímetros al aplicar el método de los dos vatímetros al circuito del Problema 14-4.

Con una carga trifásica de tres conductores las lecturas del vatímetro son

$$W_1 = V_L T_L \cos(30^\circ + \theta) \qquad \text{y} \qquad W_2 = V_L T_L \cos(30^\circ - \theta) \tag{1}$$

en donde $\theta$ es el ángulo de la impedancia de carga. En el Problema 14-4, $V_L = 100$ V, $I_L = 8{,}66$ A y el ángulo de la impedancia de carga es 45°. Sustituyendo estos valores en (*1*) resulta

$$W_1 = 100(8{,}66)\cos(30^\circ + 45^\circ) = 866\cos 75^\circ = 224 \text{ W}$$
$$W_2 = 100(8{,}66)\cos(30^\circ - 45^\circ) = 866\cos(-15^\circ) = 836 \text{ W}$$

La potencia total es $P_T = W_1 + W_2 = 1060$ W.

Como comprobación, se puede calcular la potencia total en cualquier carga trifásica equilibrada por

$$P = \sqrt{3}\,V_L I_L \cos\theta = \sqrt{3}\,100(8{,}66)\cos 45^\circ = 1060 \text{ W}$$

**14-6** Se conectan en estrella tres impedancias idénticas de $5\underline{/-30^\circ}$ ohmios. El sistema es trifásico, de tres conductores, 150 voltios y secuencia *CBA*. Determinar las intensidades de corriente en las líneas y dibujar el diagrama fasorial.

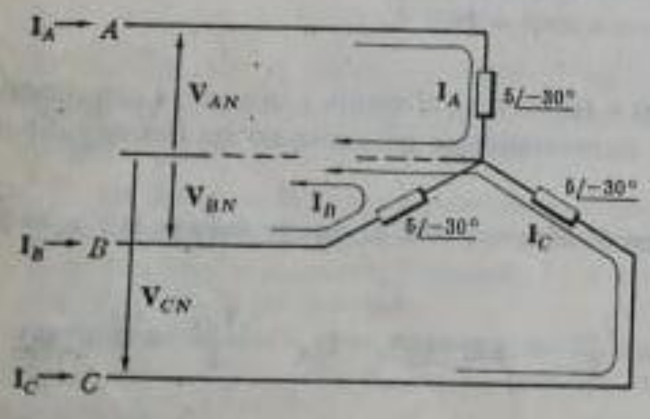



Fig. 14-30

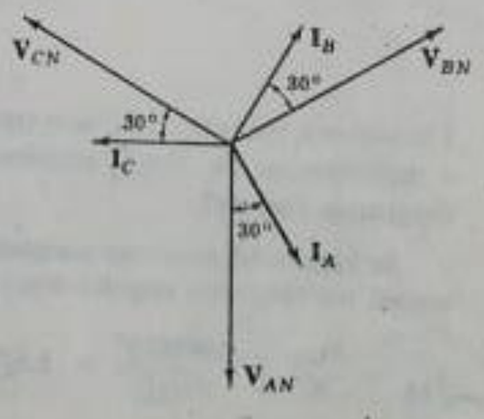



Fig. 14-31

En sistemas equilibrados de tres conductores, conectados en estrella, se puede añadir el conductor neutro, en la forma representada en la Fig. 14-30. Las tensiones simples de módulo

$$V_{LN} = V_L/\sqrt{3} = 150/\sqrt{3} = 86{,}6$$

se aplican con los ángulos de fase de la secuencia *CBA*. Las corrientes en las líneas son

$$\mathbf{I}_A = \frac{\mathbf{V}_{AN}}{\mathbf{Z}} = \frac{86{,}6\underline{/-90^\circ}}{5\underline{/-30^\circ}} = 17{,}32\underline{/-60^\circ}, \quad \mathbf{I}_B = \frac{\mathbf{V}_{BN}}{\mathbf{Z}} = 17{,}32\underline{/60^\circ}, \quad \mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{V}_{CN}}{\mathbf{Z}} = 17{,}32\underline{/180^\circ}$$

El diagrama fasorial de la Fig. 14-31 muestra el conjunto de las corrientes de línea equilibradas con 30° en adelanto respecto de las tensiones simples de línea a neutro, el cual corresponde al ángulo de la impedancia.

**14-7** Determinar las lecturas de los vatímetros si se aplica el método de los dos vatímetros al circuito del Problema 14-6.

Con carga trifásica equilibrada,

$$W_1 = V_L I_L \cos(30^\circ + \theta) = 150(17{,}32)\cos(30^\circ + 30^\circ) = 1300 \text{ W}$$

$$W_2 = V_L I_L \cos(30^\circ - \theta) = 150(17{,}32)\cos(30^\circ - 30^\circ) = 2600 \text{ W}$$

La potencia activa total es $P_T = W_1 + W_2 = 3900$ W.

Como comprobación, se puede calcular la potencia por fase $P_F = RI_L^2 = 4{,}33(17{,}32)^2 = 1300$ W y, por tanto, la potencia activa total es

$$P_T = 3P_F = 3(1300) = 3900 \text{ W}$$

O bien, con cargas trifásicas equilibradas, la potencia activa total es

$$P = \sqrt{3}\, V_L I_L \cos\theta = \sqrt{3}\,(150)(17{,}32)\cos(-30^\circ) = 3900 \text{ W}$$

**14-8** Tres impedancias idénticas de $15\underline{/30^\circ}$ ohmios se conectan en triángulo a un sistema trifásico, de tres conductores, 200 voltios y secuencia *ABC*. Hallar las intensidades de corriente en las líneas utilizando el método del equivalente monofásico.

Como la carga está conectada en triángulo se obtiene primeramente la impedancia equivalente de la carga con conexión en estrella:

$$\mathbf{Z}_Y = \mathbf{Z}_\Delta/3 = 15\underline{/30^\circ}/3 = 5\underline{/30^\circ}$$

El módulo de la tensión simple de línea a neutro es

$$V_{LN} = V_L/\sqrt{3} = 200/\sqrt{3} = 115{,}5$$

Ahora bien, en el circuito equivalente monofásico de la Fig. 14-32 la tensión aplicada es $115{,}5\underline{/0^\circ}$ voltios y la corriente resultante es

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_{LN}}{\mathbf{Z}} = \frac{115{,}5\underline{/0^\circ}}{5\underline{/30^\circ}} = 23{,}1\underline{/-30^\circ}$$

Fig. 14-32

Para obtener las intensidades de corriente en las líneas $\mathbf{I}_A$, $\mathbf{I}_B$ e $\mathbf{I}_C$ se determina en primer lugar el ángulo de fase en las correspondientes tensiones simples de línea a neutro en la secuencia *ABC*. Puesto que $\mathbf{V}_{AN}$ tiene un ángulo de 90°, $\mathbf{I}_A = 23{,}1\underline{/90^\circ - 30^\circ} = 23{,}1\underline{/60^\circ}$ A. De igual forma, $\mathbf{I}_B = 23{,}1\underline{/-60^\circ}$ A, $\mathbf{I}_C = 23{,}1\underline{/180^\circ}$ A.

Las corrientes en las impedancias en Δ están relacionadas con las corrientes de línea por $I_L = \sqrt{3}\, I_F$, de donde $I_F = 23{,}1/\sqrt{3} = 13{,}3$ A.

El ángulo de $\mathbf{V}_{AB}$ en la secuencia *ABC* es de 120° y, por tanto, $\mathbf{I}_{AB} = 13{,}3\underline{/120^\circ - 30^\circ} = 13{,}3\underline{/90^\circ}$ A. Por el mismo procedimiento, $\mathbf{I}_{BC} = 13{,}3\underline{/-30^\circ}$ A e $\mathbf{I}_{CA} = 13{,}3\underline{/210^\circ}$ A.

**14-9** Tres impedancias iguales de $10\underline{/30^\circ}$ ohmios, conectadas en estrella, y otras tres impedancias también iguales de $15\underline{/0^\circ}$ ohmios, igualmente en estrella, están unidas a un mismo sistema trifásico, de tres conductores, de 250 voltios. Hallar la potencia total.

Puesto que ambas cargas están conectadas en estrella, sus impedancias de fase pueden ponerse directamente en un circuito equivalente monofásico, como se representa en la Fig. 14-33. La tensión aplicable a dicho sistema monofásico es

$$V_{LN} = V_L/\sqrt{3} = 250/\sqrt{3} = 144{,}5$$

La corriente tiene una intensidad, pues,

$$\mathbf{I}_L = \frac{144{,}5\underline{/0^\circ}}{10\underline{/30^\circ}} + \frac{144{,}5\underline{/0^\circ}}{15\underline{/0^\circ}}$$

$$= 14{,}45\underline{/-30^\circ} + 9{,}62\underline{/0^\circ} = 23{,}2\underline{/-18{,}1^\circ}$$

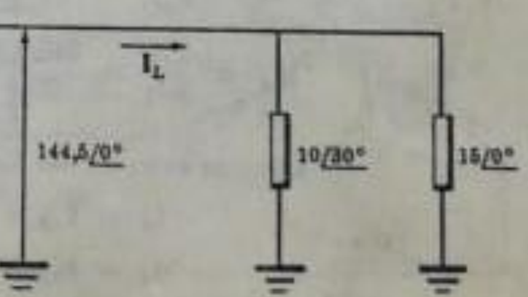


Fig. 14-33

En la fórmula de la potencia activa $P = \sqrt{3}\, V_L I_L \cos\theta$, $\theta$ es el ángulo de la impedancia de carga equivalente. Al calcular $\mathbf{I}_L$, se han considerado ambas cargas y se ha visto que la corriente retrasa respecto de la tensión un ángulo de 18,1°. Por tanto, se sabe que la impedancia equivalente es inductiva y tiene un ángulo de 18,1°. En estas condiciones,

$$P = \sqrt{3}\, V_L I_L \cos\theta = \sqrt{3}\, 250(23{,}2) \cos 18{,}1^\circ = 9530 \text{ W}$$

**14-10** Tres impedancias idénticas de $12\underline{/30^\circ}$ ohmios, en triángulo, y otras tres idénticas de $5\underline{/45^\circ}$ ohmios, en estrella, se unen al mismo sistema trifásico, de tres conductores, de 208 voltios y secuencia *ABC*. Hallar las intensidades de corriente en las líneas y la potencia total.

Como la primera de las cargas está conectada en triángulo, se obtiene la equivalente en estrella

$$\mathbf{Z}_Y = \mathbf{Z}_\Delta/3 = 12\underline{/30^\circ}/3 = 4\underline{/30^\circ}$$

Con una tensión compuesta entre líneas de 208 V la tensión simple es $208/\sqrt{3} = 120$ V.

El circuito equivalente monofásico es el representado en la Fig. 14-34 con las dos impedancias de carga $4/30^\circ\ \Omega$ y $5\underline{/45^\circ}\ \Omega$. Estas impedancias pueden ser sustituidas por una equivalente

$$\mathbf{Z}_{eq} = \frac{4\underline{/30^\circ}\,(5\underline{/45^\circ})}{4\underline{/30^\circ} + 5\underline{/45^\circ}} = 2{,}24\underline{/36{,}6^\circ}$$

Con esto, la corriente es

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_{LN}}{\mathbf{Z}_{eq}} = \frac{120\underline{/0^\circ}}{2{,}24\underline{/36{,}6^\circ}} = 53{,}6\underline{/-36{,}6^\circ}$$

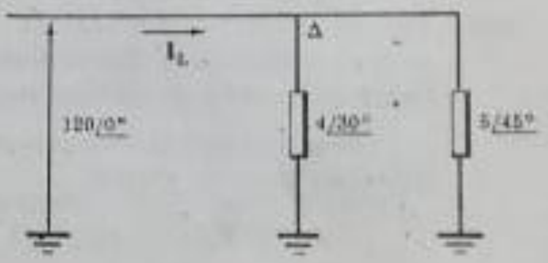



Fig. 14-34

La tensión $\mathbf{V}_{AN}$ en la secuencia *ABC* tiene un ángulo de fase de 90° y, por consiguiente, $\mathbf{I}_A = 53{,}6\underline{/(90^\circ - 36{,}6^\circ)} = 53{,}6\underline{/53{,}4^\circ}$ A. Análogamente, vemos que $\mathbf{I}_B = 53{,}6\underline{/-66{,}6^\circ}$ A e $\mathbf{I}_C = 53{,}6\underline{/-186{,}6^\circ}$ A.

La potencia activa total es

$$P = \sqrt{3}\, V_L I_L \cos\theta = \sqrt{3}\, 208(53{,}6) \cos 36{,}6^\circ = 15.500 \text{ W}$$

**14-11** Un sistema trifásico de tres conductores, 240 voltios y secuencia *CBA* alimenta a una carga conectada en triángulo en la que $\mathbf{Z}_{AB} = 25\underline{/90^\circ}$, $\mathbf{Z}_{BC} = 15\underline{/30^\circ}$ y $\mathbf{Z}_{CA} = 20\underline{/0^\circ}$ ohmios. Hallar las intensidades de corriente en las líneas y la potencia total.

Aplicando las tensiones compuestas entre líneas de la secuencia *CBA* a la carga conectada en triángulo de la Fig. 14-35 y eligiendo las corrientes de fase como se ve en el esquema, se tiene

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_{AB}} = \frac{240\underline{/240^\circ}}{25\underline{/90^\circ}} = 9{,}6\underline{/150^\circ}$$

$$\mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}_{BC}} = \frac{240\underline{/0^\circ}}{15\underline{/30^\circ}} = 16{,}0\underline{/-30^\circ}$$

$$\mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}_{CA}} = \frac{240\underline{/120^\circ}}{20\underline{/0^\circ}} = 12{,}0\underline{/120^\circ}$$

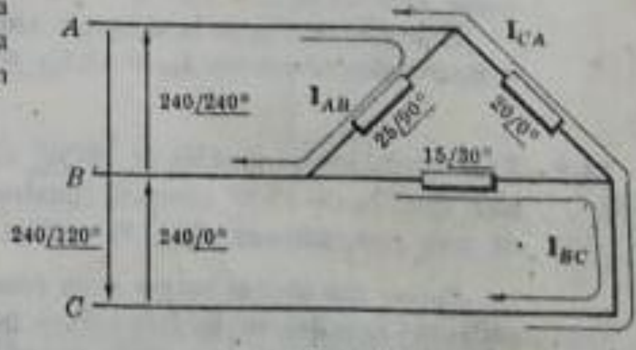



Fig. 14-35

Las corrientes en las líneas pueden calcularse, ahora, en función de las corrientes en las fases.

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_{AB} + \mathbf{I}_{AC} = 9{,}6\underline{/150^\circ} - 12\underline{/120^\circ} = 6{,}06\underline{/247{,}7^\circ}$$

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_{BA} + \mathbf{I}_{BC} = -9{,}6\underline{/150^\circ} + 16\underline{/-30^\circ} = 25{,}6\underline{/-30^\circ}$$

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{I}_{CA} + \mathbf{I}_{CB} = 12\underline{/120^\circ} - 16\underline{/-30^\circ} = 27{,}1\underline{/137{,}2^\circ}$$

Como era de esperar, en una carga desequilibrada las corrientes en las líneas no son iguales.

La potencia en cada fase se calcula de la manera siguiente:

Impedancia $Z_{AB} = 25\angle 90^\circ = 0 + j25\ \Omega$, $R_{AB} = 0$ e $I_{AB} = 9{,}6$ A. Entonces,

$$P_{AB} = R_{AB}I_{AB}^2 = (0)(9{,}6)^2 = 0$$

Impedancia $Z_{BC} = 15\angle 30^\circ = 13 + j7{,}5\ \Omega$, $R_{BC} = 13\ \Omega$ e $I_{BC} = 16$ A. Por tanto,

$$P_{BC} = R_{BC}I_{BC}^2 = (13)(16)^2 = 3330 \text{ W}$$

Impedancia $Z_{CA} = 20\angle 0^\circ = 20 + j0\ \Omega$, $R_{CA} = 20\ \Omega$ e $I_{CA} = 12$ A. Por tanto,

$$P_{CA} = R_{CA}I_{CA}^2 = (20)(12)^2 = 2880 \text{ W}$$

La potencia total es la suma de las potencias por fase

$$P_T = P_{AB} + P_{BC} + P_{CA} = 0 + 3330 + 2880 = 6210 \text{ W}$$

**14-12** Hallar las lecturas del vatímetro cuando se utiliza el método de los dos vatímetros en el circuito del Problema 14-11, con medidas entre las líneas (*a*) *A* y *B*, (*b*) *A* y *C*.

(*a*) Con los vatímetros en *A* y *B*,

$$(1)\quad W_A = V_{AC}I_A \cos \measuredangle_A^{AC} \qquad\qquad (2)\quad W_B = V_{BC}I_B \cos \measuredangle_B^{BC}$$

Del Problema 14-11, $\mathbf{V}_{AC} = 240\angle -60^\circ$ V, $\mathbf{I}_A = 6{,}06\angle 247{,}7^\circ$ A. Entonces, el ángulo $\measuredangle_A^{AC}$ es el ángulo entre 247,7° y −60°, o sea, 52,3°. Sustituyendo en (*1*),

$$W_A = 240(6{,}06)\cos 52{,}3^\circ = 890 \text{ W}$$

También, del Problema 14-11, $\mathbf{V}_{BC} = 240\angle 0^\circ$ V e $\mathbf{I}_B = 25{,}6\angle -30^\circ$ A. Entonces, $\measuredangle_B^{BC} = 30^\circ$. Sustituyendo en (*2*),

$$W_B = 240(25{,}6)\cos 30^\circ = 5320 \text{ W}$$

La potencia total es $P_T = W_A + W_B = 890 + 5320 = 6210$ W.

(*b*) Con los vatímetros en las líneas *A* y *C*,

$$(3)\quad W_A = V_{AB}I_A \cos \measuredangle_A^{AB} \qquad\qquad (4)\quad W_C = V_{CB}I_C \cos \measuredangle_C^{CB}$$

Del Problema 14-11, $\mathbf{V}_{AB} = 240\angle 240^\circ$ V. Como $\mathbf{I}_A = 6{,}06\angle 247{,}7^\circ$ A, $\measuredangle_A^{AB} = 7{,}7^\circ$. Sustituyendo en (*3*),

$$W_A = 240(6{,}06)\cos 7{,}7^\circ = 1440 \text{ W}$$

Del mismo modo, $\mathbf{V}_{CB} = 240\angle 180^\circ$ V e $\mathbf{I}_C = 27{,}1\angle 137{,}2^\circ$ A, de donde $\measuredangle_C^{CB} = 42{,}8$. Sustituyendo en (*4*),

$$W_C = 240(27{,}1)\cos 42{,}8^\circ = 4770 \text{ W}$$

y la potencia total, $P_T = W_A + W_C = 1440 + 4770 = 6210$ W.

**14-13** Un sistema trifásico de cuatro conductores, 208 voltios y secuencia *ABC* alimenta a una carga en estrella en la que $\mathbf{Z}_A = 10\angle 0^\circ$, $\mathbf{Z}_B = 15\angle 30^\circ$ y $\mathbf{Z}_C = 10\angle -30^\circ$ óhmios. Hallar las intensidades de corriente en las líneas, la del neutro y la potencia total.

Aplicando al circuito las tensiones simples de línea a neutro de la secuencia *ABC*, como se ve en la Fig. 14-36, y suponiendo positivo el sentido de las corrientes hacia la carga, se tiene

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{V}_{AN}/\mathbf{Z}_A = (120\angle 90^\circ)/(10\angle 0^\circ) = 12\angle 90^\circ$$

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{V}_{BN}/\mathbf{Z}_B = (120\angle -30^\circ)/(15\angle 30^\circ) = 8\angle -60^\circ$$

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{V}_{CN}/\mathbf{Z}_C = (120\angle -150^\circ)/(10\angle -30^\circ) = 12\angle -120^\circ$$

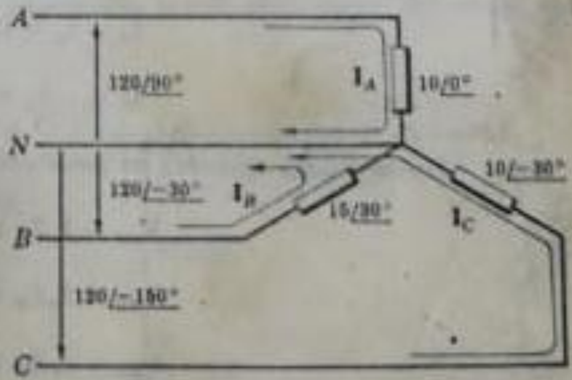



Fig. 14-36

La corriente en el neutro es el fasor suma de los correspondientes a las intensidades de línea y si el sentido positivo es hacia la carga,

$$\mathbf{I}_N = -(\mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_C) = -(12\underline{/90^\circ} + 8\underline{/-60^\circ} + 12\underline{/-120^\circ}) = 5{,}69\underline{/69{,}4^\circ}$$

La impedancia $\mathbf{Z}_A = 10 + j0\ \Omega$ es atravesada por la corriente $\mathbf{I}_A = 12\underline{/90^\circ}$ A y la potencia en esta fase de la carga es $P_A = 10(12)^2 = 1440$ W. Por la impedancia $\mathbf{Z}_B = 15\underline{/30^\circ} = 13 + j7{,}5\ \Omega$ circula la corriente $\mathbf{I}_B = 8\underline{/-60^\circ}$ A y la potencia en la fase es $P_B = 13(8)^2 = 832$ W. De igual forma, por $\mathbf{Z}_C = 10\underline{/-30^\circ} = 8{,}66 - j5\ \Omega$ circula la corriente $\mathbf{I}_C = 12\underline{/-120^\circ}$ A y $P_C = 8{,}66(12)^2 = 1247$ W.

La potencia total es $P_T = P_A + P_B + P_C = 1440 + 832 + 1247 = 3519$ W.

**14-14** Las impedancias de carga del problema anterior se conectan a un sistema trifásico de tres conductores, 208 voltios y secuencia *ABC*. Hallar las intensidades de corriente de línea y las tensiones entre los extremos de las impedancias de carga.

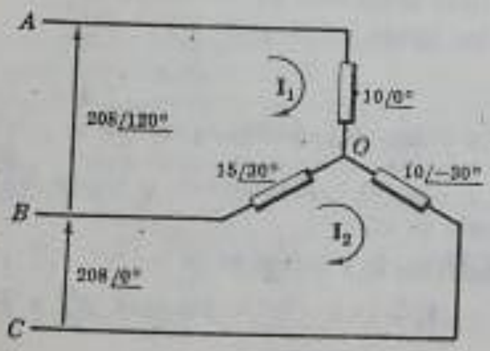



**Fig. 14-37**

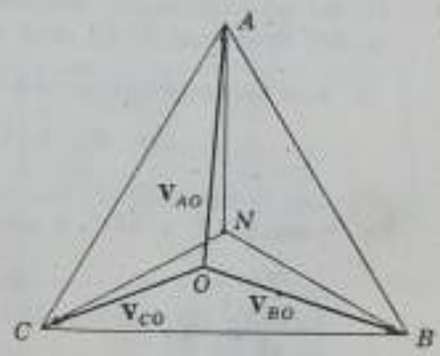



**Fig. 14-38**

En el circuito de la Fig. 14-37 se han puesto las dos tensiones compuestas $\mathbf{V}_{AB}$ y $\mathbf{V}_{BC}$. Con las corrientes de malla $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ elegidas como en la figura, la forma matricial del sistema de ecuaciones en las corrientes es

$$\begin{bmatrix} 10\underline{/0^\circ} + 15\underline{/30^\circ} & -15\underline{/30^\circ} \\ -15\underline{/30^\circ} & 15\underline{/30^\circ} + 10\underline{/-30^\circ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 208\underline{/120^\circ} \\ 208\underline{/0^\circ} \end{bmatrix}$$

de donde

$$\mathbf{I}_1 = \frac{5210\underline{/90^\circ}}{367{,}5\underline{/3{,}9^\circ}} = 14{,}15\underline{/86{,}1^\circ}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{3730\underline{/56{,}6^\circ}}{367{,}5\underline{/3{,}9^\circ}} = 10{,}15\underline{/52{,}7^\circ}$$

Las corrientes en las líneas, con sentido positivo hacia la carga, vienen dadas en función de $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ por

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_1 = 14{,}15\underline{/86{,}1^\circ}$$

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1 = 10{,}15\underline{/52{,}7^\circ} - 14{,}15\underline{/86{,}1^\circ} = 8{,}0\underline{/-49{,}5^\circ}$$

$$\mathbf{I}_C = -\mathbf{I}_2 = 10{,}15\underline{/(52{,}7^\circ - 180^\circ)} = 10{,}15\underline{/-127{,}3^\circ}$$

Por tanto, las tensiones en las impedancias son

$$\mathbf{V}_{AO} = \mathbf{I}_A\mathbf{Z}_A = 14{,}15\underline{/86{,}1^\circ}\,(10\underline{/0^\circ}) = 141{,}5\underline{/86{,}1^\circ}$$

$$\mathbf{V}_{BO} = \mathbf{I}_B\mathbf{Z}_B = 8{,}0\underline{/-49{,}5^\circ}\,(15\underline{/30^\circ}) = 120\underline{/-19{,}5^\circ}$$

$$\mathbf{V}_{CO} = \mathbf{I}_C\mathbf{Z}_C = 10{,}15\underline{/-127{,}3^\circ}\,(10\underline{/-30^\circ}) = 101{,}5\underline{/-157{,}3^\circ}$$

La representación de las tres tensiones $\mathbf{V}_{AO}$, $\mathbf{V}_{BO}$ y $\mathbf{V}_{CO}$ muestra el triángulo de secuencia *ABC* al unir los extremos de los fasores por rectas. Puede añadirse también el punto *N*, como en la Figura 14-38.

**14-15** Resolver nuevamente el Problema 14-14 por el método del desplazamiento del neutro.

En el método del desplazamiento se calcula $V_{ON}$ a partir de la fórmula

$$V_{ON} = \frac{V_{AN}Y_A + V_{BN}Y_B + V_{CN}Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C}$$

Por el Problema 14-14, $Y_A = 1/10 = 0{,}1$, $Y_B = 1/(15\underline{/30^\circ}) = 0{,}0577 - j0{,}033$ e $Y_C = 1/(10\underline{/-30^\circ}) = 0{,}0866 + j0{,}050$. Por tanto,

$$Y_A + Y_B + Y_C = 0{,}244 + j0{,}0167 = 0{,}244\underline{/3{,}93^\circ}$$

y

$$\begin{aligned} V_{AN}Y_A &= 120\underline{/90^\circ}\,(0{,}1) &&= 12\underline{/90^\circ} &&= \quad j12 \\ V_{BN}Y_B &= 120\underline{/-30^\circ}\,(0{,}0667\underline{/-30^\circ}) &&= 8{,}0\underline{/-60^\circ} &&= 4{,}0 - j6{,}93 \\ V_{CN}Y_C &= 120\underline{/-150^\circ}\,(0{,}1\underline{/30^\circ}) &&= 12\underline{/-120^\circ} &&= -6{,}0 - j10{,}4 \end{aligned}$$

$$V_{AN}Y_A + V_{BN}Y_B + V_{CN}Y_C = -2{,}0 - j5{,}33 = 5{,}69\underline{/249{,}4^\circ}$$

En consecuencia, $V_{ON} = (5{,}69\underline{/249{,}4^\circ})/(0{,}244\underline{/3{,}93^\circ}) = 23{,}3\underline{/245{,}5^\circ} = -9{,}66 - j21{,}2$

Las tensiones en las impedancias de carga pueden expresarse en función de la correspondiente tensión simple de línea a neutro y la de desplazamiento del neutro en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} V_{AO} &= V_{AN} + V_{NO} = 120\underline{/90^\circ} + (9{,}66 + j21{,}2) &&= 141{,}2\underline{/86{,}08^\circ} \\ V_{BO} &= V_{BN} + V_{NO} = 120\underline{/-30^\circ} + (9{,}66 + j21{,}2) &&= 120\underline{/-18{,}9^\circ} \\ V_{CO} &= V_{CN} + V_{NO} = 120\underline{/-150^\circ} + (9{,}66 + j21{,}2) &&= 102\underline{/202{,}4^\circ} \end{aligned}$$

Para obtener las corrientes de línea se forman los productos de estas tensiones y las admitancias correspondientes,

$$\begin{aligned} I_A &= V_{AO}Y_A = 141{,}2\underline{/86{,}08^\circ}\,(0{,}1\underline{/0^\circ}) &&= 14{,}12\underline{/86{,}08^\circ} \\ I_B &= V_{BO}Y_B = 120\underline{/-18{,}9^\circ}\,(0{,}0667\underline{/-30^\circ}) &&= 8{,}0\underline{/-48{,}9^\circ} \\ I_C &= V_{CO}Y_C = 102\underline{/202{,}4^\circ}\,(0{,}1\underline{/30^\circ}) &&= 10{,}2\underline{/232{,}4^\circ} \quad \text{o bien} \quad 10{,}2\underline{/-127{,}6^\circ} \end{aligned}$$

Los resultados anteriores están de acuerdo con los del Problema 14-14 dentro del orden de exactitud de la regla de cálculo.

**14-16** Utilizando el método de los dos vatímetros en un caso de carga equilibrada se han obtenido las lecturas 1154 y 577 vatios. Obtener las impedancias de carga, con conexión triángulo, si la tensión del sistema es de 100 voltios.

Para cargas trifásicas equilibradas

$$\operatorname{tg}\theta = \sqrt{3}\,\frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2} = \pm\sqrt{3}\,\frac{1154 - 577}{1154 + 577} = \pm 0{,}577$$

de donde $\theta = \pm 30^\circ$. (Se pone $\pm$, ya que sin conocer ni la secuencia ni la colocación de los vatímetros, no puede determinarse el signo.)

La potencia total es $P = \sqrt{3}\,V_L I_L \cos\theta$, e

$$I_L = \frac{P}{\sqrt{3}\,V_L \cos\theta} = \frac{1731}{\sqrt{3}\,(100)(0{,}866)} = 11{,}55 \text{ A}$$

Se dibuja el circuito monofásico equivalente y se aplica la tensión $(100/\sqrt{3})\underline{/0^\circ} = 57{,}7\underline{/0^\circ}$ V, como se ve en la Fig. 14-39. Entonces, la impedancia con conexión en estrella

$$Z_Y = \frac{V}{I} = \frac{57{,}7\underline{/0^\circ}}{11{,}55\underline{/\mp 30^\circ}} = 5{,}0\underline{/\pm 30^\circ}$$

y

$$Z_\Delta = 3Z_Y = 15\underline{/\pm 30^\circ}$$

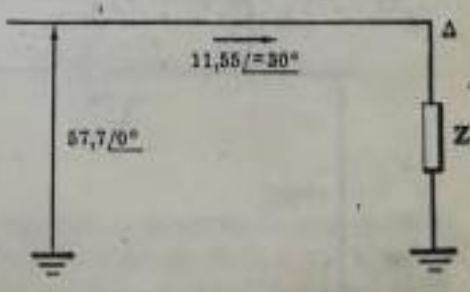



Fig. 14-39

# Problemas propuestos

**14-21** Se conectan en triángulo tres impedancias iguales de $10\angle 53{,}1^\circ$ ohmios a un sistema trifásico de tres conductores, 240 voltios y secuencia *CBA*. Hallar las intensidades de corriente de línea.
*Sol.* $41{,}6\angle -143{,}1^\circ$; $41{,}6\angle -23{,}1^\circ$, y $41{,}6\angle 96{,}9^\circ$ A.

**14-22** Se conectan en triángulo a un sistema trifásico de tres conductores, 100 voltios y secuencia *CBA* tres impedancias iguales de $15{,}9\angle 70^\circ$ ohmios. Hallar las intensidades de corriente de línea y la potencia total.
*Sol.* $10{,}9\angle -160^\circ$; $10{,}9\angle -40^\circ$; $10{,}9\angle 80^\circ$ A; 646 W.

**14-23** Tres impedancias de $42\angle -35^\circ$ ohmios se conectan en triángulo a un sistema trifásico de tres conductores, 350 voltios y secuencia *ABC*. Hallar las intensidades de corriente de línea y la potencia total.
*Sol.* $14{,}4\angle 125^\circ$; $14{,}4\angle 5^\circ$; $14{,}4\angle -115^\circ$ A; 7130 W.

**14-24** Se une a un sistema trifásico de tres conductores, 208 voltios y secuencia *CBA* una carga equilibrada en estrella con impedancias de $6\angle 45^\circ$ ohmios. Hallar las intensidades de corriente de línea, incluida la del neutro.
*Sol.* $20\angle -135^\circ$; $20\angle -15^\circ$; $20\angle 105^\circ$; 0 A.

**14-25** Una carga equilibrada con impedancias de $65\angle -20^\circ$ ohmios se conecta en estrella a un sistema trifásico de tres conductores, 480 voltios y secuencia *CBA*. Hallar las intensidades de corriente de línea y la potencia total.
*Sol.* $4{,}26\angle -70^\circ$; $4{,}26\angle 50^\circ$; $4{,}26\angle 170^\circ$; 3320 W.

**14-26** Un motor de inducción de 37,3 kW, con un rendimiento a plena carga del 85 % y un factor de potencia 0,80, se conecta a un sistema trifásico de 480 voltios. Hallar la impedancia en estrella equivalente que puede sustituir a dicho motor. *Sol.* $4{,}2\angle 36{,}9^\circ$.

**14-27** Un motor de inducción trifásico de 186,5 kW, con rendimiento a plena carga del 82 % y un factor de potencia 0,75, se conecta a un sistema de 208 voltios. Hallar la impedancia equivalente en triángulo que puede sustituir a dicho motor y determinar las lecturas con el método de los dos vatímetros.
*Sol.* $4{,}28\angle 41{,}4^\circ$ Ω; 5,58 kW; 17,15 kW.

**14-28** Tres impedancias idénticas de $9\angle -30^\circ$ ohmios en triángulo y tres impedancias de $5\angle 45^\circ$ ohmios en estrella se conectan al mismo sistema trifásico de tres conductores, 480 voltios y secuencia *ABC*. Hallar el módulo de la intensidad de corriente de línea y la potencia total. *Sol.* 119,2 A; 99 kW.

**14-29** Una carga en triángulo equilibrada con impedancias de $27\angle -25^\circ$ ohmios y otra en estrella equilibrada con impedancias de $10\angle -30^\circ$ ohmios, se conectan a un sistema trifásico de tres conductores, 208 voltios y secuencia *ABC*. Hallar las intensidades de corriente de línea y la potencia en cada carga.
*Sol.* $25{,}3\angle 117{,}4^\circ$ A; $25{,}3\angle -2{,}6^\circ$ A; $25{,}3\angle -122{,}6^\circ$ A; 4340 W; 3740 W.

**14-30** Un sistema trifásico, a 100 voltios, alimenta a una carga equilibrada en triángulo con impedancias de $10\angle -36{,}9^\circ$ ohmios y una carga en estrella equilibrada con impedancias de $5\angle 53{,}1^\circ$ ohmios. Hallar la potencia en cada carga y el módulo de la intensidad de corriente en la línea total. *Sol.* 2400 W; 1200 W; 20,8 A.

**14-31** Dos cargas equilibradas en triángulo con impedancias de $20\angle -60^\circ$ y $18\angle 45^\circ$ ohmios, respectivamente, se conectan a un sistema trifásico de 150 voltios. Hallar la potencia en cada carga. *Sol.* 1690 y 2650 W.

**14-32** Un sistema trifásico de tres conductores, 173,2 voltios y secuencia *CBA* alimenta a tres cargas equilibradas con las siguientes conexiones e impedancias: en estrella de $10\angle 0^\circ$ ohmios, en triángulo de $24\angle 90^\circ$ ohmios y la tercera en triángulo con impedancia desconocida. Determinar esta impedancia sabiendo que la intensidad de corriente en la línea *A*, con sentido positivo hacia la carga, es $32{,}7\angle -138{,}1^\circ$ amperios.
*Sol.* $18\angle 45^\circ$ Ω.

**14-33** Los vatímetros situados en las líneas *A* y *B* de un sistema de 120 voltios y secuencia *CBA*, indican los valores 1500 y 500 vatios, respectivamente. Hallar las impedancias de la carga equilibrada en triángulo.
*Sol.* $16{,}3\angle -41^\circ$ Ω.

**14-34** Las lecturas de los vatímetros colocados en las líneas *A* y *B* de un sistema de 173,2 voltios y secuencia *ABC* son −301 y +1327 vatios, respectivamente. Hallar las impedancias de la carga equilibrada en estrella.
*Sol.* $10\angle -70^\circ$ Ω.

**14-35** Hallar las lecturas de los dos vatímetros utilizados en un sistema de tres conductores, de 240 voltios, con una carga, conectada en triángulo y equilibrada, de $20\angle 80^\circ$ ohmios. *Sol.* −1710, 3210 W.

**14-36** Hay dos vatímetros colocados en las líneas *B* y *C* de un sistema *CBA* de tres conductores y 173,2 voltios, que alimenta a una carga equilibrada. Determinar las lecturas de dichos vatímetros si la intensidad de corriente de línea es $\mathbf{I}_A = 32{,}7\angle -41{,}9^\circ$ amperios. *Sol.* 1170, 5370 W.

**14-37** Un sistema de 100 voltios y secuencia *CBA* alimenta a una carga equilibrada y tiene dos vatímetros en las líneas *A* y *B*. Si $\mathbf{I}_B = 10{,}9\angle -40^\circ$ amperios es la intensidad de corriente en la línea *B*, hallar las lecturas de ambos vatímetros. *Sol.* −189, 835 W.

**14-38** Una carga conectada en triángulo, con $\mathbf{Z}_{AB} = 10\angle 30^\circ$, $\mathbf{Z}_{BC} = 25\angle 0^\circ$ y $\mathbf{Z}_{CA} = 20\angle -30^\circ$ ohmios, se une a un sistema trifásico de tres conductores, 500 voltios y secuencia *ABC*. Hallar las intensidades de corriente en las líneas y la potencia total. *Sol.* $75\angle 90^\circ$ A; $53{,}9\angle -68{,}2^\circ$ A; $32\angle 231{,}3^\circ$ A; 42,4 kW.

**14-39** Un sistema trifásico de tres conductores, 208 voltios y secuencia *ABC* alimenta a una carga en triángulo en que $\mathbf{Z}_{AB} = 5\underline{/0^\circ}$, $\mathbf{Z}_{BC} = 4\underline{/30^\circ}$, $\mathbf{Z}_{CA} = 6\underline{/-15^\circ}$ ohmios. Hallar las intensidades de corriente de línea y las lecturas de los vatímetros instalados en las líneas *A* y *C*.
*Sol.* $70{,}5\underline{/99{,}65^\circ}$ A; $90{,}5\underline{/-43{,}3^\circ}$ A; $54{,}6\underline{/187{,}9^\circ}$ A; 13,7 kW; 11,25 kW.

**14-40** Una carga en estrella, con $\mathbf{Z}_A = 3 + j0$, $\mathbf{Z}_B = 2 + j3$ y $\mathbf{Z}_C = 2 - j1$ ohmios, se conecta a un sistema trifásico de cuatro conductores, 100 voltios y secuencia *CBA*. Determinar las intensidades de corriente en las líneas, incluido el neutro, suponiendo positivo el sentido hacia la carga.
*Sol.* $19{,}25\underline{/-90^\circ}$ A; $16\underline{/-26{,}3^\circ}$ A; $25{,}8\underline{/176{,}6^\circ}$ A; $27{,}3\underline{/65{,}3^\circ}$ A.

**14-41** Se conecta una carga en estrella en que $\mathbf{Z}_A = 12\underline{/45^\circ}$, $\mathbf{Z}_B = 10\underline{/30^\circ}$ y $\mathbf{Z}_C = 8\underline{/0^\circ}$ ohmios a un sistema de cuatro conductores y 208 voltios. Hallar la potencia total. *Sol.* 3898 W.

**14-42** La intensidad de corriente de línea en un sistema trifásico de tres conductores, 220 voltios y secuencia *ABC* son $\mathbf{I}_A = 43{,}5\underline{/116{,}6^\circ}$, $\mathbf{I}_B = 43{,}3\underline{/-48^\circ}$ e $\mathbf{I}_C = 11{,}39\underline{/218^\circ}$ amperios. Obtener las lecturas de los vatímetros en las líneas (*a*) *A* y *B*, (*b*) *B* y *C*, (*c*) *A* y *C*. *Sol.* (*a*) 5270, 6370 W; (*b*) 9310, 2330 W; (*c*) 9550, 1980 W.

**14-43** Las intensidades de corriente de línea en un sistema trifásico de tres conductores, 440 voltios y secuencia *ABC* son $\mathbf{I}_A = 19{,}72\underline{/90^\circ}$, $\mathbf{I}_B = 57{,}3\underline{/-9{,}9^\circ}$ e $\mathbf{I}_C = 57{,}3\underline{/189{,}9^\circ}$ amperios. Hallar las lecturas de los vatímetros en las líneas (*a*) *A* y *B*, (*b*) *B* y *C*. *Sol.* (*a*) 7,52, 24,8 kW; (*b*) 16,15, 16,15 kW.

**14-44** El diagrama fasorial de la Fig. 14-44 representa las corrientes de línea y las tensiones compuestas entre líneas de un sistema trifásico de tres conductores, 346 voltios y secuencia *ABC*. Si el módulo de la corriente de línea es 10 amperios, hallar la impedancia de la carga conectada en estrella. *Sol.* $20\underline{/90^\circ}$ Ω.

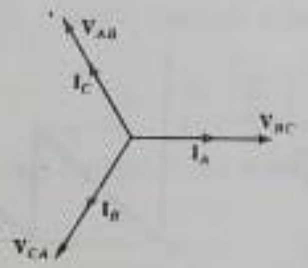



**Fig. 14-44**

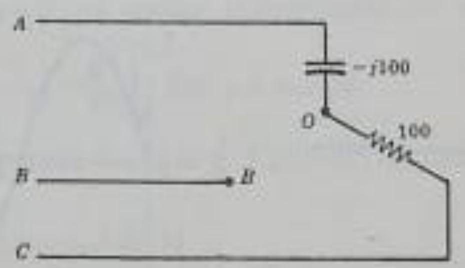



**Fig. 14-45**

**14-45** El circuito de la Fig. 14-45 presenta una impedancia infinita (circuito abierto) en la fase *B* de la carga en estrella. Hallar el fasor tensión $\mathbf{V}_{OB}$ si el sistema es de 208 voltios y secuencia *ABC*. *Sol.* $284\underline{/150^\circ}$ V.

**14-46** Un alternador trifásico con conexión Y y 440 voltios tiene un límite de 35 amperios por arrollamiento. (*a*) ¿Cuál es la potencia aparente (kVA) de régimen de la máquina? (*b*) Si el alternador suministra una corriente de línea de 20 amperios de intensidad con un factor de potencia 0,65, ¿cuál es la potencia aparente (kVA) por fase de la máquina? *Sol.* 26,6 kVA; 5,08 kVA.

**14-47** El sistema de corrientes de línea equilibradas en el diagrama fasorial de la Fig. 14-46 tiene un valor absoluto de 10 amperios y la tensión compuesta es de 120 voltios. Determinar las correspondientes potencias activa y aparente. *Sol.* 1,47 kW; 2,08 kVA.

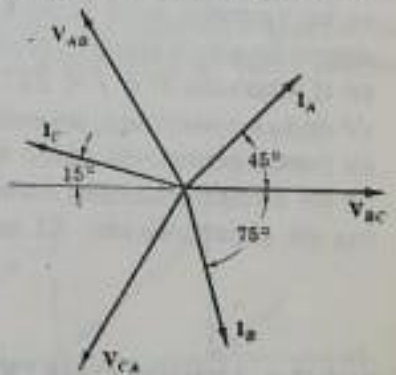



**Fig. 14-46**

**14-48** Una carga en estrella con impedancias $\mathbf{Z}_A = 10\underline{/0^\circ}$, $\mathbf{Z}_B = 10\underline{/60^\circ}$ y $\mathbf{Z}_C = 10\underline{/-60^\circ}$ ohmios se conecta a un sistema trifásico de tres conductores, 200 voltios y secuencia *ABC*. Hallar las tensiones en las impedancias de carga $\mathbf{V}_{AO}$, $\mathbf{V}_{BO}$, $\mathbf{V}_{CO}$.
*Sol.* $173\underline{/90^\circ}$ V; $100\underline{/0^\circ}$ V; $100\underline{/180^\circ}$ V.

**14-49** Una carga en estrella con $\mathbf{Z}_A = 10\underline{/-60^\circ}$, $\mathbf{Z}_B = 10\underline{/0^\circ}$ y $\mathbf{Z}_C = 10\underline{/60^\circ}$ ohmios se conecta a una línea trifásica de tres conductores, 208 voltios y secuencia *CBA*. Hallar las tensiones en las impedancias de carga.
*Sol.* $208\underline{/-120^\circ}$ V; 0 V; $208\underline{/180^\circ}$ V.

**14-50** Un sistema de tres conductores, 480 voltios y secuencia *ABC* alimenta a una carga en estrella en la que $\mathbf{Z}_A = 10\underline{/0^\circ}$, $\mathbf{Z}_B = 5\underline{/-30^\circ}$ y $\mathbf{Z}_C = 5\underline{/30^\circ}$ ohmios. Hallar las lecturas de los vatímetros en las líneas *A* y *B*.
*Sol.* 8,92 kW; 29,6 kW.

**14-51** Un sistema de tres conductores, 100 voltios y secuencia *CBA* alimenta a una carga con conexión Y en la que $\mathbf{Z}_A = 3 + j0$, $\mathbf{Z}_B = 2 + j3$ y $\mathbf{Z}_C = 2 - j1$ ohmios. Determinar las tensiones en las impedancias de la carga.
*Sol.* $31{,}6\underline{/-67{,}9^\circ}$ V; $84{,}3\underline{/42{,}7^\circ}$ V; $68{,}6\underline{/123{,}8^\circ}$ V.

**14-52** Tres impedancias idénticas de $15\underline{/60^\circ}$ ohmios se conectan en estrella a un sistema trifásico de tres conductores a 240 voltios. Las líneas tienen entre la alimentación y la carga impedancias de $2 + j1$ ohmios. Hallar el módulo de la tensión compuesta en la carga. *Sol.* 213 V.

**14-53** Repetir el Problema 14-52 para impedancias en estrella de $15\underline{/-60^\circ}$ ohmios y comparar los resultados dibujando el diagrama fasorial de tensiones. *Sol.* 235 V.

PRACTICOS DE RESOLUCION DE PROBLEMAS A REALIZAR EN FORMA MANUSCRITA POR CADA ALUMNO Y REMITIR AL DOCENTE

Problemas:

14.24

14.29

14.38

14.39

14.40

14.42

14.48

14.51

En todos los casos realizar diagrama fasorial, con tensiones que den origen a las corrientes y la totalidad de las corrientes.