

Movimiento de cuerpos en fluidos

Jacobo Parodi Díez

Junio 2023

Descripción del fenómeno

El movimiento de los fluidos responde a toda un área de estudio denominada *Mecánica de Fluidos* donde toda la dinámica se gobierna bajo la ecuación de Navier Stokes. El acercamiento a este problema es desde un punto de vista mucho más básico, pues se considera el movimiento de un cuerpo sólido esférico, liso, impermeable e indeformable dentro de un fluido, este fluido también tiene ciertas idealizaciones, las cuales nos atañerán más adelante. El fenómeno que estudiaremos, será una caída libre compuesta por dos franjas. La primera porción, corresponderá a una caída en el vacío (por su densidad y para velocidades bajas, el aire puede aproximarse a vacío) donde el cuerpo acelerará hasta impactar con un fluido de una densidad ρ_f que puede ser mayor o menos a la densidad de la esfera ρ_s . De la experiencia sabemos que si el cuerpo tiene una densidad menor a la densidad del fluido, éste flotará, mientras que si su densidad es mayor, se hundirá. La pregunta inicial que podemos hacernos es, ¿por qué esto sucede? Y también podemos preguntarnos, según la velocidad a la que entra en el fluido, ¿cuánto se hundirá hasta cambiar de dirección y comenzar a ascender para flotar si su densidad es menor a la del fluido? Estas preguntas que constituyen toda la física de nuestro fenómeno serán discutidas en la sección a continuación.

Principio Físico

Principio de Arquímedes

El principio de Arquímedes es aquel que describe la interacción mecánica entre un cuerpo y un fluido. Éste establece que un cuerpo sufre un empuje por parte del volumen V_f de fluido que desplaza proporcional a su densidad ρ_f o más específicamente:

$$\vec{F}_B = V_f \rho_f g \hat{j} \quad (1)$$

Donde $g = 9.8m/s$ es la aceleración de la gravedad. Es importante notar que esta fuerza se ejerce en la dirección del eje vertical con sentido **positivo**, mientras que el peso del objeto es una fuerza que siempre se ejercerá en sentido **negativo** sobre este mismo eje. Recordemos que el peso es una fuerza cuyo valor se calcula mediante:

$$\vec{F}_W = mg(-\hat{j}) \quad (2)$$

Donde m es la masa del objeto. Esta masa puede ser transformada en términos del volumen y densidad del objeto como $m = \rho_s V_s$, así:

$$\vec{F}_W = V_s \rho_s g(-\hat{j}) \quad (3)$$

Con esta transformación, podemos apreciar las similitudes en las expresiones de ambas fuerzas. Considerando que estas son las únicas fuerzas que se ejercen sobre el cuerpo en el eje vertical, podemos sumarlas y darnos cuenta que:

$$\sum \vec{F} = Vg(\rho_f - \rho_s)\hat{j} = m\vec{a} \quad (4)$$

Donde el volumen del cuerpo es el mismo del fluido desplazado (por eso el cuerpo debe ser indeformable) $V_f = V_s = V$ y queda demostrado que la dirección y magnitud de la fuerza aplicada depende de la diferencia de las densidad del fluido y la esfera en cuestión.

Fuerza de Arrastre

Sin embargo, el empuje producido por el volumen desplazado no es la única fuerza presente en este fenómeno, debido a que los fluidos siempre presentarán una resistencia al movimiento de cuerpos a través de ellos. Esta fuerza se denomina fuerza de arrastre y depende de la velocidad relativa del objeto respecto al fluido. La caracterización de esta fuerza es desafiante pues depende de muchos factores geométricos y mecánicos de forma simultánea. Uno de los parámetros más importantes a la hora de caracterizar un flujo es el número de Reynolds R_e ,

éste es un parámetro adimensional que se usa para predecir los comportamientos del flujo en cuestión. Este se calcula a partir de:

$$R_e = \frac{\rho v L}{\mu} = \frac{2\rho v R}{\mu} \quad (5)$$

Aquí, ρ y μ son la densidad y la viscosidad dinámica del fluido, mientras que v es la velocidad relativa del fluido respecto a un sistema de referencia. Es importante tener en cuenta que este número puede determinarse para un fluido independiente de si hay un objeto dentro de él o no, pero para el caso del fenómeno estudiado, la velocidad del fluido se toma como la velocidad *relativa* del fluido respecto al objeto, la cual vendría a ser la velocidad del objeto en sí misma. Por otro lado, L es dimensión lineal característica del flujo, que, así como para el caso de la velocidad se considera relativa al objeto. Para una esfera, esta dimensión es el diámetro ($d = 2R$).

El número de Reynolds es el que nos permite calcular cual debe ser la ecuación utilizada para el arrastre. Para números de Reynolds bajos (<1000) la fuerza de arrastre se considera proporcional a la velocidad, pero para números de Reynolds altos (>1000), este arrastre pasa a ser proporcional al cuadrado de la velocidad. Para el caso del número de Reynolds bajo, la ecuación gobernante es la ley de Stokes, donde la magnitud de la fuerza de arrastre de calcula como:

$$F_D = 6\pi\mu Rv \quad (6)$$

Para este caso, la viscosidad es un parámetro muy importante. Veamos que ésta se define como la resistencia a que laminas de un fluido se deslicen entre sí, de modo que el esfuerzo al que se opone siempre tiene una dirección cortante (τ). De esto que la viscosidad se defina como:

$$\mu = \tau \frac{dl}{dv} \quad (7)$$

Donde dl es el desplazamiento de una lámina sobre otra, dv es el diferencial de velocidad y t un esfuerzo cortante.

Sin embargo, para un número de Reynolds grande, la viscosidad deja de tomar un papel relevante y la ecuación gobernante se convierte en:

$$F_B = \frac{1}{2}C_D A \rho_f v^2 \quad (8)$$

Para este caso, los valores relevantes son C_D que es el coeficiente de arrastre, la densidad del fluido ρ_f y el área transversal proyectada A , que para el caso de una esfera, corresponde al área de un círculo del mismo radio ($A = \pi R^2$). El coeficiente de arrastre C_D depende de los factores geométricos y también de las propiedades del flujo. En la Figura [1] se aprecia cómo éste varía en función del número de Reynolds para una esfera.

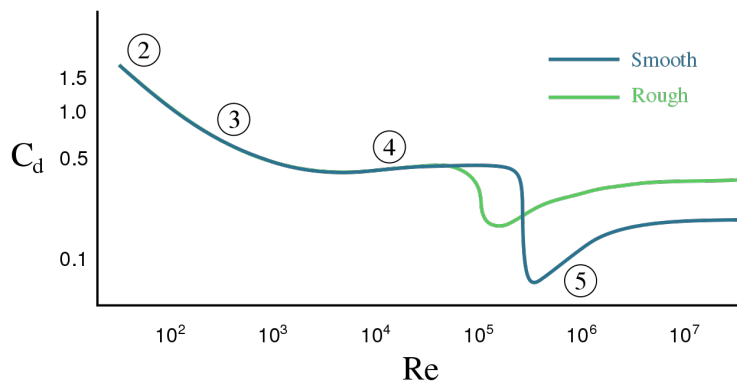


Figure 1: Coeficiente de Arrastre en función del número de Reynolds

Estas determinaciones son experimentales, sin embargo, de querer calcularse de forma teórica, el coeficiente de arrastre tiene cómo fórmula:

$$C_D = 2 \frac{A_w}{A_f} \frac{B_e}{R_e^2} \quad (9)$$

Donde A_w es el área húmeda, A_f el área frontal y B_e el número de Bejan, el cual es una medida adimensional de la caída de presión durante el trayecto del objeto a través del fluido, éste es el que incorpora de forma indirecta los parámetros que parecen haberse perdido en la redefinición de la fuerza de arrastre, como la viscosidad o la dimensión característica. Sin

embargo, no es necesario tener esto en cuenta pues para los números de Reynolds de interés, puede usarse un C_D constante y aproximadamente igual a $C_D \approx 0.5$ la cual es una meseta que se observa en valores de Reynolds desde 1.000 hasta 100.000, valores sobre los cuales puede considerarse el fenómeno.

Una consideración final es que la dirección de esta fuerza siempre es en la dirección opuesta a su movimiento (es decir, de su velocidad). En una caída vertical, la fuerza se aplica en la dirección positiva del eje vertical, pero si el cuerpo posee alguna componente horizontal en su velocidad, la fuerza de arrastre se descompone en una componente vertical y otra horizontal. En la Figura [2] se aprecia el diagrama de cuerpo libre para un cuerpo de geometría arbitraria para el caso puntual de una caída vertical.

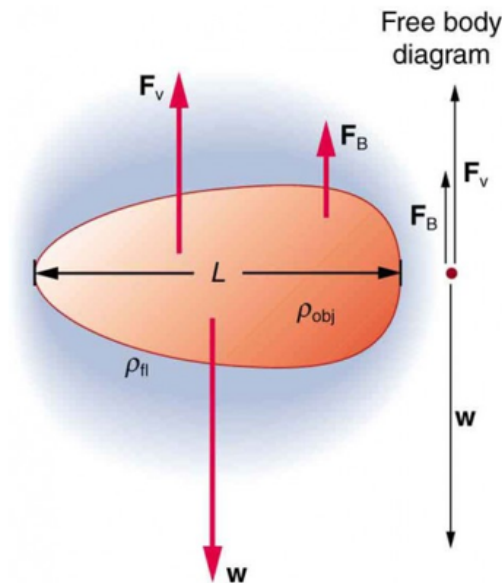


Figure 2: Diagrama de Cuerpo Libre

Con esto, tenemos todos los ingredientes dinámicos del fenómeno, compuestos por las tres fuerzas presentes en éste: La fuerza gravitacional, el empuje de Arquímedes y el arrastre.

Determinación del volumen y área transversal

Existe una región de transición que debe ser tenida en especial consideración. Hasta ahora, hemos pensando únicamente en la esfera en la caída libre, y en el comportamiento cuando toda ella está dentro del fluido, sin embargo, en los instantes en que se sumerge, existe una porción dentro del fluido y una porción fuera, lo que hace que la fuerza de empuje y de arrastre no sean tan grandes como lo son cuando la esfera está completamente sumergida.

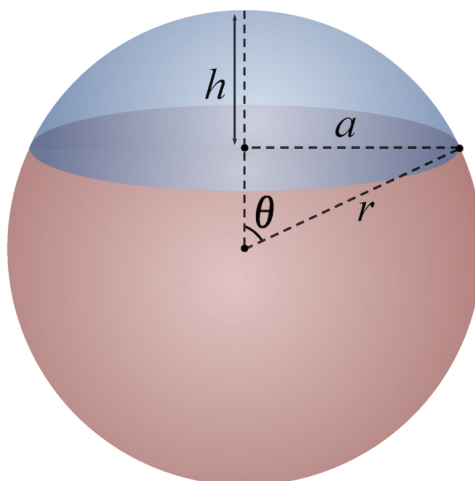


Figure 3: Casquete esférico

Como estamos considerando el caso único de una esfera, debe calcularse cuál es el volumen de un casquete esférico. Para eso podemos integrar este volumen en coordenadas cilíndricas (no esféricas pues el parámetro de desplazamiento vertical h en la coordenada vertical z es importante).

$$V_{cap} = \int \int \int_V dx dy dz = \int_{-R}^h \int_0^{2\pi} \int_0^{R(z)=\sqrt{R^2-z^2}} r dr d\theta dz \quad (10)$$

Aquí, la primera integral, en la coordenada vertical se integra desde el final de la esfera en $-R$ hasta una variable arbitraria h que puede variar entre $-R < h < R$. Por otro lado, la integral interior en la coordenada radial va hasta el radio que depende también de la coordenada vertical $R(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$. Integrando se halla que:

$$V_{cap} = \frac{\pi}{3} (2R^3 + 3R^2h - h^3) \quad (11)$$

Aquí, la coordenada h varía entre $[-R, R]$ pero puede transformarse para que varíe entre $[0, 2R]$ de donde se obtiene la expresión final:

$$V_{cap} = \frac{\pi h^2}{3} (3R - h) \quad (12)$$

El procedimiento para calcular el área proyectada es mucho más sencillo pues ésta área proyectada está relacionada con la cantidad a que se aprecia en la Figura [3]. Esta puede determinarse fácilmente por medio del principio de Pitágoras, donde, despejando se halla:

$$a = \sqrt{2Rh - h^2} \quad (13)$$

De modo que el área proyectada vendría a ser:

$$A_{cap} = \pi a^2 = \pi(2Rh - h^2) \quad (14)$$

Para cuando h varía entre 0 y R , desde que la mitad de la esfera se sumerge, el área proyectada se mantiene y es toda el área del círculo que conforma la esfera.

Punto de equilibrio

Cuando un objeto flota, dependiendo de su densidad relativa respecto a la densidad del fluido, una parte de éste se sumerge. Para calcular la porción de volumen que está sumergido, debe calcularse el punto de equilibrio donde el empuje de Arquímedes equipare la fuerza gravitacional ejercida sobre el objeto, es decir $F_B = F_g$. Donde en la fuerza $F_B = V_f \rho_f g$ este volumen sería el volumen sumergido, mientras que en la fuerza gravitacional actúa sobre todo el objeto $F_g = V_s \rho_s g$. Reemplazando por las ecuaciones de los volúmenes correspondientes (para el casquete esférico parametrizado por h y el volumen total de la esfera):

$$\frac{\pi h^2}{3} (3R - h) \rho_f = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_s \quad (15)$$

En este caso, debe despejarse y hallarse h pues es la variable que determina el hundimiento, pero para normalizar esta variable, se reemplaza por $H = h/2R$ la cual sólo puede variar en $0 < H < 1$. Haciendo esta sustitución, llamando $\rho_{rel} = \rho_s/\rho_f$ como la densidad relativa y reagrupando, se halla la ecuación:

$$2H^3 - 3H^2 + \rho_{rel} = 0 \quad (16)$$

En general, la resolución de las ecuaciones cúbicas suele ser difícil. Puede comprobarse que solamente para $0 < \rho_{rel} < 1$ tiene sentido solucionar esta ecuación y es, de hecho, el único rango donde existe por lo menos una solución real dentro del rango esperado para H , es decir, $0 < H < 1$.

Una forma de solucionar este problema es resolver numéricamente el problema, barriendo los valores posibles de ρ_{rel} y luego ajustando las raíces por medio de un polinomio cúbico. De esta manera, una forma aproximada de solución es:

$$H(\rho_{rel}) = a\rho_{rel}^3 + b\rho_{rel}^2 + c\rho_{rel} + d \quad (17)$$

Aquí, los parámetros de ajuste son:

$$\begin{aligned} a &= +1.01690463 \\ b &= -1.52535695 \\ c &= +1.38199556 \\ d &= +0.06322838 \end{aligned}$$

Es posible que esta solución no sea la mejor de todas, pero nos es útil para cálculos rápidos. El comportamiento de esta cobertura H en función de la densidad relativa puede apreciarse en la Figura [4].

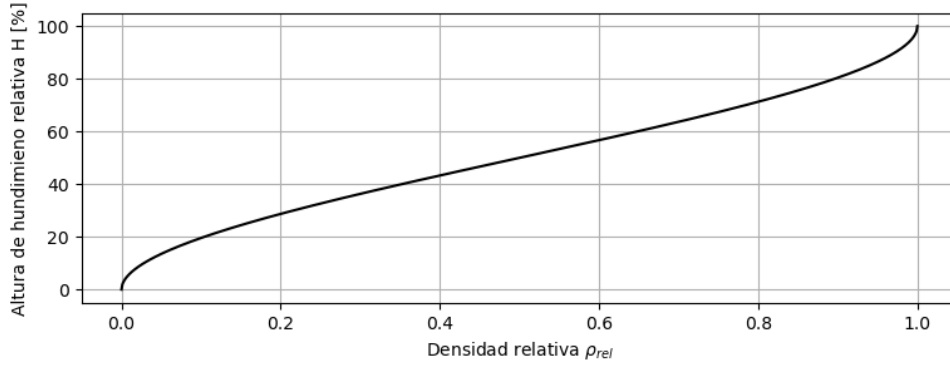


Figure 4: Hundimiento relativo en función de la densidad relativa

Velocidad terminal

Otro fenómeno que puede observarse del movimiento de los cuerpos en los fluidos es la velocidad terminal, esta se define como la velocidad máxima a la que puede llegar un objeto en caída libre. Esto sucede pues el arrastre es proporcional a la velocidad o su cuadrado, de modo que a mayor velocidad, mayor oposición generará hasta el punto que equipará la fuerza de gravedad impidiéndole al cuerpo acelerar más. Para este ejemplo, podemos pensar en un cuerpo ligeramente más denso que el fluido, que comienza su descenso por el fluido en reposo. La velocidad terminal ocurrirá cuando la fuerza de gravedad y empuje equipare al arrastre, esto es:

$$F_W - F_B = F_D \quad (18)$$

Reemplazando y siempre considerando que nuestro cuerpo de estudio es una esfera, se tiene, para un flujo rápido y un régimen de Reynolds alto que:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 g(\rho_s - \rho_f) = \frac{1}{2}C_D \rho_f v^2 (\pi R^2) \quad (19)$$

$$v_{\infty}^{(Re < 1000)} = \sqrt{\frac{8}{3} \frac{Rg}{C_D} \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f}} \quad (20)$$

Y, para el caso de un número de Reynolds bajo, donde la ecuación de arrastre gobernante es la ley de Stokes, se tiene:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 g(\rho_s - \rho_f) = 6\pi\mu Rv \quad (21)$$

$$v_{\infty}^{(Re > 1000)} = \frac{2}{9}R^2 g \frac{\rho_s - \rho_f}{\mu} \quad (22)$$

Consideraciones energéticas

Las energías usualmente relacionadas en los problemas mecánicos son la energía cinética definida como:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad (23)$$

Y la energía potencial, la cual se entiende como una energía asociada a la presencia de campos de fuerzas y se define directamente de estas como:

$$U = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (24)$$

Para el caso del potencial gravitacional donde el cambio de altura no es mucho y se considera la aceleración de la gravedad constante, la energía potencial asociada es ampliamente conocida como $U = mgh$ donde h es la altura a la que se encuentra el cuerpo. Una característica a remarcar de la energía potencial es que los únicos valores que tienen sentido físico son los relativos, pues el trabajo necesario para mover un objeto de un lugar a otro depende de la diferencia de la energía potencial según:

$$W_{a \rightarrow b} = \Delta U = U_b - U_a \quad (25)$$

Por tanto, sumar o restar escalares a la energía potencial solamente cambia el lugar donde se define su cero, pero no varía el fenómeno físico que describe. Esto también se nota en la forma en que se recuperan las fuerzas desde la energía potencial:

$$\vec{F} = -\nabla U \quad (26)$$

Como la fuerza se relaciona con la energía potencial a través de una derivada, al derivar, los escalares se vuelven irrelevantes. Por otro lado, recordemos que la energía total del sistema, entendida como la suma de la energía cinética y potencial sólo se conserva si todas las fuerzas del sistema pueden derivarse de un potencial (por esto, estas fuerzas se llaman conservativas). Para el caso de nuestro fenómeno, la fuerza de empuje de Arquímedes *puede* derivarse de un potencial, sin embargo, el arrastre, al ser una función dependiendo de la velocidad, no puede, y la energía no se conserva. De todas formas, puede calcularse la energía potencial total como la suma de la energía potencial gravitacional y la relacionada con el empuje de Arquímedes. Siguiendo el procedimiento usual, se halla que:

$$U = \rho_s g V(y - R) - \rho_f g \nu(y)y \quad (27)$$

Veamos primero que se reemplazó la masa del objeto por su equivalente en volumen y densidad, esto para demostrar el parecido con la energía potencial asociado al empuje de Arquímedes, el cual es el segundo término. Aquí, se usa la densidad del fluido ρ_f y un volumen desplazado $\nu(y)$ que depende de la altura y . Esta dependencia es debido a que cuando el cuerpo está por encima del fluido, el volumen desplazado es cero y no hay energía potencial asociado, sin embargo, una vez el cuerpo está completamente sumergido $\nu(y)$ tiende al volumen total de la esfera $V = 4/3\pi R^3$, sin embargo, durante el proceso de inmersión, la energía potencial tiene que integrarse directamente de la fuerza, por medio de:

$$U_B = \rho_f g \int_{-y}^0 V(y) dy \quad (28)$$

$$= \rho_f g \int_{-y}^0 \frac{\pi y^2}{3} (3R - y) dy \quad (29)$$

$$= \frac{\pi \rho_f g}{6} (4Ry^2 + y^3)y \quad (30)$$

Los límites de integración tienen ciertas peculiaridades en torno a la elección del sistema de referencia. Para este caso, se toma que el 0 del eje vertical se ubica a un radio por encima de la superficie del líquido, esto asegura que el tramo de inmersión ocurra en el intervalo $[0, -2R]$, lo cual, salvo por la dirección, coincide con la elección de la fórmula del volumen de la superficie. Puede corroborarse la bondad de la fórmula, pues al sustituir $y = -2R$ se recupera la energía potencial relacionada al volumen completo de la esfera. De esta forma, este volumen efectivo termina teniendo la forma de:

$$\nu(y) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi R^3 & y \leq -2R \\ \frac{\pi}{6}(4Ry^2 + y^3) & -2R < y \leq 0 \\ 0 & y > 0 \end{cases}$$

Esta elección del cero del sistema coordenado es la más cómoda y se corresponde con el desplazamiento que se efectúa sobre la energía potencial gravitacional en R unidades para que el cero de esta coincida con el cero coordenado y no con el de la superficie del agua. La forma de la energía potencial depende de si la diferencia entre las densidades es positiva o negativa, como puede verse en la Figura [5].

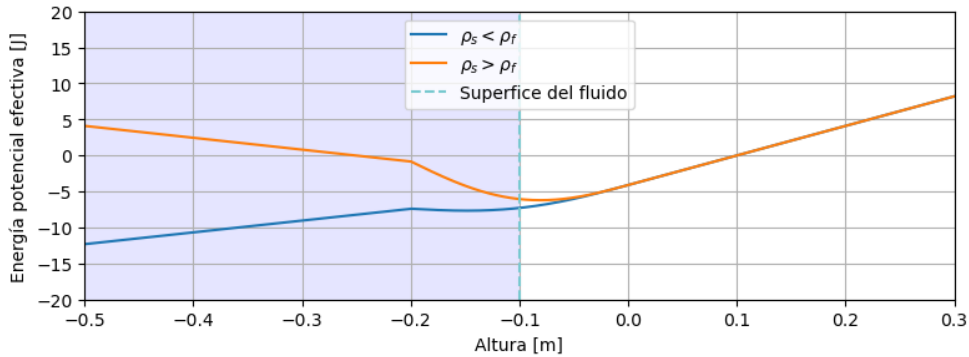


Figure 5: Energía potencial

Aquí, la forma de la energía potencial es equivalente en ambas curvas siempre que se mantenga la misma masa, para este caso se eligió una esfera de 10cm y $1000\text{kg}/\text{m}^3$ de densidad. Mientras que el fluido cuenta con una densidad de $600\text{kg}/\text{m}^3$ y $1400\text{kg}/\text{m}^3$ respectivamente. Para el caso del fluido denso, se espera que la esfera flote y que se ubique, cuando pierda toda su energía en el mínimo de potencial, mientras que para el caso del cuerpo más denso que el fluido, puede observarse que no hay un mínimo cerca a la superficie y por tanto el cuerpo se hunde.

Referencias

- [1] Polyanin, Andrei D; Manzhirov, Alexander V. (2006), Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists, CRC Press, p. 69, ISBN 9781584885023.
- [2] Stokes, G. G. (1851). "On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums". Transactions of the Cambridge Philosophical Society. 9, part ii: 8–106.
- [3] McCormick, Barnes W. (1979). Aerodynamics, Aeronautics, and Flight Mechanics. New York: John Wiley & Sons, Inc. p. 24. ISBN 0-471-03032-5.
- [4] "Drag Coefficient". Engineeringtoolbox.com. Archived from the original on 2010-12-04. Retrieved 2010-12-07.
- [5] "What is buoyant force?". Khan Academy.
- [6] Lima, F M S. (2012). "Using surface integrals for checking the Archimedes' law of buoyancy". European Journal of Physics. 33 (1): 101–113. arXiv:1110.5264. S2CID 54556860
- [7] Riazi, A.; Türker, U. (January 2019). "The drag coefficient and settling velocity of natural sediment particles". Computational Particle Mechanics. S2CID 127789299.