Descripción Teórica del Problema del Oscilador Armónico Cuántico

Jonathan Posada, Laura Sofía Arango y Luis Miguel Galvis.

Índice

1. Introducción

1.1. Contexto histórico

La física es la ciencia que estudia como las fuerzas fundamentales de la naturaleza gobiernan la evolución del universo, desde las escalas más pequeñas hasta las más grandes. Desde los inicios del ser humano como especie, este se ha preguntado por el funcionamiento del mundo que lo rodea y cuales son las reglas que lo dominan. Si bien han sido muchas las personas contribuyentes al desarrollo de la física, fue Sr. Isaac Newton a finales del siglo XVII quien formulo rigurosamente un compendio de deducciones y demostraciones que componían la primera formulación de la mecánica, resumidas en las conocidas Leyes de Newton, donde se puede resaltar una de ellas, la segunda que se recita como: 'Fuerza igual a masa por aceleración' y se ve así:

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{1}$$

Esta formulación permitió el avance de las descripción de los fenómenos naturales en ramas distintas a la mecánica, como por ejemplo, el electromagnetismo. A finales del siglo XIX y comienzos del siglo XX, aparecieron una serie de fenómenos que no podían ser descritos por la mecánica de Newton, estos fenómenos parecían retar a la realidad, pero el ingenio humano fue más lejos y para explicar estos, y otros fenómenos, surgió la Mecánica Cuántica.

1.2. Mecánica cuántica

La mecánica cuántica surge de la necesidad de resolver problemas que no podían ser descritos por la mecánica de Newton o como se le conoce hoy en día, mecánica clásica. No se puede decir como tal que la mecánica clásica este equivocada, pues en gran parte de los fenómenos macroscópicos esta describe de forma correcta el comportamiento de los sistemas clásicos. Es un hecho que en el limite macroscópico, la mecánica cuántica tiende a la mecánica clásica. En lineas generales, la mecánica cuántica difiere de la clásica en que esta abandona el concepto de trayectorias y localización, pasando a ser un concepto en si probabilístico, lo cual sin la suficiente exposición puede resultar contra intuitivo, pero es cierto que este desarrollo está suficientemente respaldado experimentalmente.

1.3. Oscilador armónico

El oscilador armónico es un modelo físico básico, utilizado en una gran variedad de ramas de la ciencia para simular y explicar fenómenos de gran complejidad. Este sistema puede ser estudiado clásica y cáusticamente.

En lineas generales, este describe la relación directamente proporcional que existe entre la fuerza que actúa sobre una partícula, o un cuerpo, y el desplazamiento que la misma tiene de su posición de equilibrio. Esto se describe matemáticamente como

$$F = m\vec{a} = -kx. \tag{2}$$

Donde m es la masa de la partícula y k es una constante asociada al resorte del sistema. En forma de ecuación diferencial nos queda que:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{3}$$

Cuya solución es $x = \cos\omega t$, donde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Esta es la conocida solución del problema desde el punto de vista clásico, la cual describe como cambia la posición del oscilador con respecto al tiempo. Su respectiva contra parte cuántica la describiremos a continuación.

2. Oscilador armónico cuántico

La mecánica cuántica debe su nombre a que bajo este régimen encontramos que los sistemas tienen solo un conjunto restringido (discreto) de energías permitidas. A diferencia de la mecánica clásica, donde la energía de los sistemas está en el continuo y pueden tomar cualquier valor. La ecuación de autovalores que nos permite encontrar las energías permitidas para un sistema se llama ecuación de autovalores y viene dada como[1] :

$$\hat{H}\psi(x) = E\psi(x) \tag{4}$$

$\hat{H}$ es el operador para la energía del sistema (denominado Hamiltoniano), luego,

$$\left[\frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2\right]\psi(x) = E\psi(x) \tag{5}$$

Representando los operadores de posición y momento en el espacio de las posiciones (Esto seguramente escapa a los conocimientos de un estudiante de colegio o de una carrera distinta de física, pero por ahora lo vamos a creer para ocuparnos del problema matemático), obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 - E\right]\psi(x) = 0, \tag{6}$$

$\hbar$ es la constante de Planck sobre 2π y ω es la frecuencia asociada a la partícula.

Esta ecuación diferencial se resuelve siguiendo un amplio y engorroso procedimiento, vamos a enunciar la solución teniendo en mente que al final queremos ver los niveles de energía permitidos para una partícula de masa m en este sistema... La solución es:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right). \tag{7}$$

La función H_n se conoce como Polinomios de Hermite y se puede expresar explícitamente como:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dz^n}(e^{-x^2}). \quad (8)$$

Cuando solucionamos 6 encontramos también las energías posibles para el oscilador armónico cuántico,

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega, \quad (9)$$

con n = 0, 1, 2,...

Ya tenemos la solución dependiente de la posición para las funciones de onda, pero nos interesa, también, ver como se comporta las funciones (autofunciones) en el tiempo. Esto lo haremos multiplicando la función dependiente de la posición por el propagador[1], así:

$$\psi_n(x,t) = e^{\frac{-iE_nt}{\hbar}} \psi_n(x) = \left(cos\left(\frac{E_nt}{\hbar}\right) - isin\left(\frac{E_nt}{\hbar}\right)\right)\psi_n(x). \quad (10)$$

En este caso nos interesa mostrar el comportamiento de la fase real por lo que podemos prescindir de la amplitud compleja,

$$\psi_n(x,t) = e^{\frac{-iE_nt}{\hbar}} \psi_n(x) = cos\left(\frac{E_nt}{\hbar}\right)\psi_n(x). \quad (11)$$

Así hemos obtenido la evolución temporal de la amplitud real de la función de onda. Si bien no es para nada sencillo obtener este resultado, el objetivo del ejercicio es ver como la naturaleza cuántica limita y discretiza las configuraciones a las cuales puede estar sujeta una partícula, en este caso viendo como no todas las energías son posibles.

Referencias

[1] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë, *Quantum Mechanics*. No. v. 1 in A Wiley - Interscience publication, Wiley, 1977.