Cuerpos rigidos rodando en un plano inclinado

Andrés Felipe Gómez and Edwin Dair Zapata

Instituto de física, Universidad de Antioquia, Medellin, Antioquia, Colombia.

Contributing authors: andres.gomez29@udea.edu.co; Dair.zapata@udea.edu.co;

Abstract

En el presente texto encontrarás una breve descripción acerca de la simulación de cuerpos rígidos cayendo por un plano inclinado el cual con ayuda de conceptos como momento de inercia y conservación de la energía darán luces acerca de la rapidez con la que llegan los objetos.

Keywords: Momento de inercia, conservación de la energía, rotación

1 Introducción

El movimiento de los cuerpos se describe respecto a un sistema de referencia ya sea suelo, un árbol o una persona. La física moderna nos enseña que no existe el movimiento absoluto, sino que es referente a algo. Si vas en un tren ves pasar los arboles, las calles y personas, sus posiciones cambian respecto a ti como observador. Para ti ellos son los que se mueven, sin embargo los ”otros” dicen los contrario: eres tú quien se desplaza respecto a ellos. Es evidente entonces que una adecuada descripción de los cuerpos en el espacio es necesaria para predecir y explicar el movimiento de los cuerpos a nuestro alrededor. Imagínate un sistema planetario, ¿dónde pondrías tú sistema de referencia?, ¿respecto a qué mides la posición de los objetos?. No estarías en desacuerdo si propongo al sol o estrella como centro intuyendo que al ser mas masivo su importancia en el sistema es mayor.

Ya sabemos que es importante una adecuada descripción del movimiento de los cuerpos en el espacio a la hora de predecir su evolución. Ahora debemos tener en cuenta que varios factores juegan papeles importantes en su descripción, por ejemplo, la masa es uno de estos pero no es lo único relevante,también lo es como esta se distribuye esta en el espacio, es decir la geometría de los objetos físicos es relevante al describir su evolución. También Los conceptos como el momento de inercia, energía cinética y potencial son clave para entender el fenómeno de movimiento de los cuerpos.

Cuando describimos objetos en movimiento los podemos considerar de manera puntual ignorando su geometría y distribución de masa el cual sirve en ocasiones como una primera aproximación poco precisa, sin embargo, no siempre es posible ignorarlos. Nos centraremos en esta experiencia. ¿Como ruedan los cuerpos rígidos a través de un plano inclinado?. La idea de este articulo es comprender cuáles parámetros físicos son importantes para estudiar este fenómeno.

2 Marco teórico

Un plano inclinado es una superficie plana que forma un ángulo con el plano horizontal. El movimiento de traslación de los cuerpos rígidos en este plano se da naturalmente debido a la interacción gravitacional, que actúa en el centro de masa. Para el movimiento de rotación la fuerza de fricción es fundamental, ya que sin esta no habría rotación. En la figura 1 podemos observar las fuerzas que actúan en el sistema.

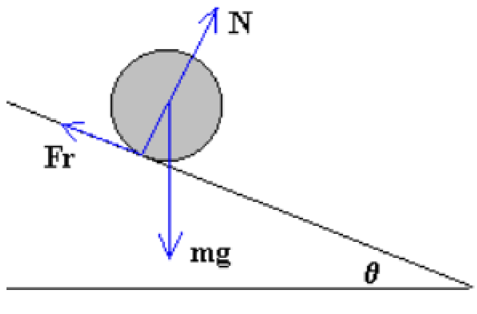

Fig. 1 Fuerzas en un cuerpo rígido sobre un plano inclinado.

Estamos familiarizados con el término Inercia la cual un cuerpo la tiene en menor o mayor medida si es mas o menos rápido o si es o no masivo. Es así que un taxi moviéndose en linea recta a 80km/h lleva mas inercia que otra que vaya a 30km/h. Otro ejemplo es si una volqueta y un taxi van a 60 km/h es claro que el vehículo de mayor inercia es la volqueta porque es mas masiva.

Cuando tenemos objetos que rotan se definen términos análogos al de masa , velocidad y fuerza. El momento de inercia de un cuerpo tiene un papel fundamental en la rotación de un cuerpo rígido, muy similar al que tiene la masa en el movimiento de traslación. Este parámetro nos indica que tan "fácil" es hacer que un cuerpo rote, así como la masa nos indica que tan difícil es hacer que un cuerpo se acelere.

El momento de inercia de un cuerpo rígido con una geometría bien definida esta dado por:

$$I = kMR^2 \tag{1}$$

Donde M es la masa total del cuerpo rígido, R es la distancia desde el punto de rotación a nuestro punto de interés(en este caso el centro de masa, pero no necesariamente debe ser respecto a ese punto) y k es un factor geométrico que es diferente para cada cuerpo.

A continuación se listaran los momentos de inercia de las 4 figuras con las que se hará la simulación, presta atención los parámetros de los que depende el momento de inercia I.

- El momento de inercia para una esfera de radio R:

$$I = \frac{2}{5}MR^2 \tag{2}$$

- El momento de inercia para un disco de radio R:

$$I = \frac{1}{2}MR^2 \tag{3}$$

- El momento de inercia para un anillo de radio R es:

$$I = MR^2 \tag{4}$$

- El momento de inercia cilindro de radio R

$$I = \frac{1}{2}MR^2 \tag{5}$$

Para calcular la caída de alguna de las figuras a través de un plano inclinado usamos la conservación de la energía. La energia total es la suma de la energía de traslación del cuerpo mas su energía de rotación y energía potencias gravitacional

$$E_{total} = k_t + k_r + U_g \tag{6}$$

Balanceando las energías el inicio y final del movimiento para la configuración del sistema de la figura 3. se tiene que

$$\cancel{k_{t1}} + \cancel{k_{r1}} + U_{g1} = k_{t2} + k_{r2} + \cancel{U_{g2}} \tag{7}$$

La ecuación anterior nos dice que antes de caer el cuerpo por el plano, toda su energía está en forma de energía potencial , una vez va cayendo esa energía potencial se convierte en energía cinética, tanto traslacional como rotacional.

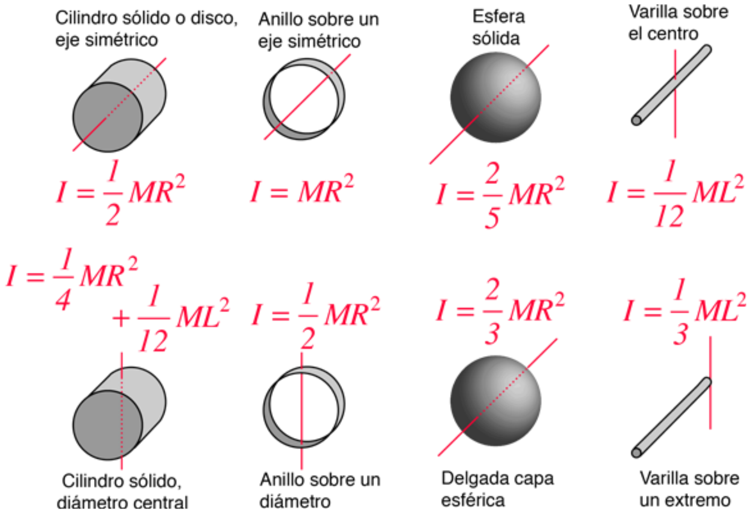

Fig. 2 Momentos de inercia de varios cuerpos

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{8}$$

Vamos a analizar el caso en el que el cuerpo rígido rueda sin deslizar en el plano inclinado, en este caso podemos utilizar la siguiente relación entre la velocidad angular y la velocidad del centro de masa:

$$v_{cm} = \omega R \tag{9}$$

Además utilizando la relación del momento de inercia de la ecuación (1) la ecuacion (8) nos queda de la siguiente manera:

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}MR^2(\frac{v_{cm}}{R})^2 \tag{10}$$

Por tanto despejando la velocidad del centro de masa de la ecuación(10) podemos hallar el valor de esta en la parte mas baja del plano:

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2gh}{1+k}} \tag{11}$$

Como vemos es inversamente proporcional al valor geométrico k, este factor esta relacionado con el momento de inercia de manera proporcional (entre mayor sea el factor geométrico mayor sera el momento de inercia). Por tanto podemos concluir que el cuerpo con menor momento de inercia llegara primero a la meta. Podemos ver que esta expresión no depende ni de la masa ni del radio de la figura, solo de como la masa esta distribuida alrededor de el eje de rotación.

References

1 Zemansky, Sears. Física Universitaria Volumen 1