Teoría: Movimiento de una partícula inmersa en un campo electromagnético

Carlos A. Granada Palacio, Samuel Hoyos Aristizábal, and Esteban Marulanda Ardila
Instituto de Física, U de A, Calle 70 No. 52-21, Medellín, Colombia.
(Dated: Diciembre 01 de 2022)

I. VECTORES

Los vectores son objetos matemáticos abstractos que aparecen en la teoría de espacios vectoriales. Sin embargo, para la mayoría de fines prácticos, como el de esta simulación, es suficiente con saber lo que es un vector de tres componentes reales, lo cual es, como su nombre lo indica, un arreglo de tres números reales.

Con frecuencia los vectores de denotan con símbolos como $\vec{v}$ y se hace referencia a sus tres componentes, escribiendo:

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)\,.$$

Las componentes del vector se refieren a su magnitud a lo largo de los tres ejes coordenados x, y, z. La magnitud del vector es $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

Los vectores son muy importantes en física puesto que muchas cantidades físicas se representan por medio de estos, por ejemplo, la velocidad de una partícula, la aceleración, las fuerzas, etc. Lo anterior se debe a que estas cantidades no tienen solamente magnitud, sino también dirección y sentido.

Dos vectores se pueden sumar, y también un vector se puede multiplicar por un número real. Estas dos operaciones se definen de la siguiente forma:

$$(v_x, v_y, v_z) + (w_x, w_y, w_z) = (v_x + w_x, v_y + w_y, v_z + w_z)\,,$$

$$\alpha(v_x, v_y, v_z) = (\alpha v_x, \alpha v_y, \alpha v_z)\,.$$

Estas dos no son las únicas operaciones que se pueden hacer entre vectores. Otra muy importante es el producto vectorial, o producto cruz, el cual aparece en varias expresiones de la física mecánica y de la electricidad y magnetismo. Esta operación se define de la siguiente forma:

$$(v_x, v_y, v_z) \times (w_x, w_y, w_z) = (v_y w_z - v_z w_y, v_z w_x - v_x w_z, v_x w_y - v_y w_x)\,.$$

Una manera sencilla de saber que dirección y sentido tiene el producto cruz de dos vectores es por medio de la regla de la mano derecha, ilustrada en la figura I. Esta regla nos dice que para saber hacia donde apunta $a \times b$, precisamos colocar el dedo índice hacia a, el dedo medio hacia b, y la dirección del producto cruz está dada por la de nuestro dedo pulgar (cualdo lo erguimos perpéndicularmente al plano que dorman los otros dos dedos). Una observación interesante es que cuando a y b son paralelos, su producto vectorial es nulo (igual al vector $(0, 0, 0)$).

II. FUNDAMENTOS DE CINEMÁTICA Y DINÁMICA

La segunda ley de Newton afirma que cuando una partícula de masa m es sujeta a una fuerza $\vec{F}$, entonces experimenta una aceleración dada por la siguiente expresión:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}\,. \tag{1}$$

La ecuación anterior permite conocer la velocidad y la posición de la partícula en función del tiempo, teniendo en cuenta que estas cantidades se relacionan entre sí por medio de derivadas. Más específicamente, se tiene que:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt},\ \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}\,.$$

Donde $\vec{v}$ y $\vec{r}$ son la velocidad y la posición de la partícula.

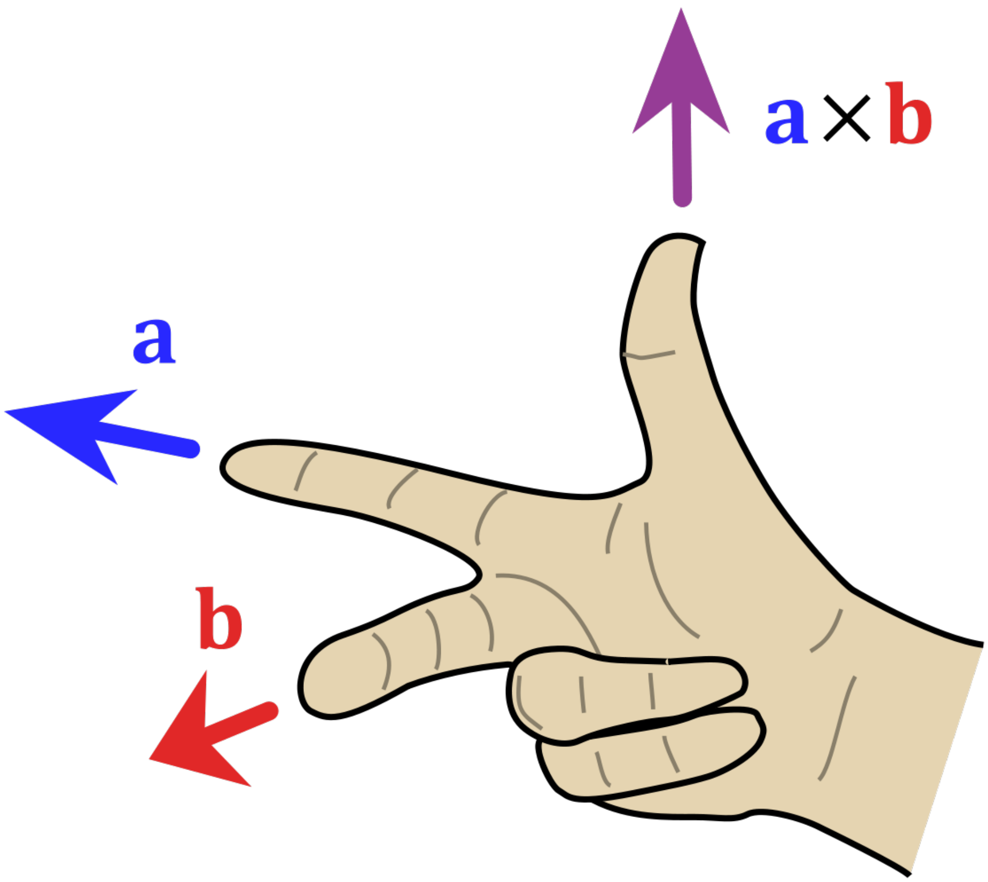

Figura 1. Ilustración de la regla de la mano derecha, la cual sirve para determinar la dirección y sentido de un producto cruz sin hacer cálculos.

A. Ejemplos

Supongamos que tenemos una partícula de masa m sujeta a la acción de una fuerza constante $\vec{F}$. Encontremos como evoluciona su posición y velocidad en función del tiempo, cuando esta partícula se encuentra inicialmente (en un tiempo $t = 0$) en el origen de un cierto sistema de coordenadas, según el cuál empieza con una velocidad inicial $\vec{v}_0$. Teniendo la ecuación 1 la aceleración de la partícula es constante y está dada por $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$. Esta aceleración constante se relaciona con la derivada de la velocidad de tal forma que en componentes podemos escribir:

$$a_i = \frac{dv_i}{dt}\,.$$

Donde los índices se refieren a las tres componentes de los vectores en el sistema de referencia que se está observando el movimiento. La ecuación anterior se puede integrar para obtener:

$$v_i(t) - v_i(0) = \int_0^t \frac{F_i}{m} ds\,.$$

Teniendo en cuenta que la fuerza es constante, se obtiene:

$$v_i(t) = v_i(0) + \frac{F_i}{m} t\,.$$

Vectorialmente, la expresión anterior se puede escribir como:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \frac{\vec{F}}{m} t \,.$$

Integrando una vez más, se obtiene por componentes:

$$r_i(t) = r_i(0) + \int_0^t \left(v_i(0) + \frac{F_i}{m} s \right) ds$$

$$= r_i(0) + v_i(0)t + \frac{F_i}{2m} t^2 \,.$$

Escribiendo esta expresión de forma vectorial, se obtiene:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}(0)t + \frac{\vec{F}}{2m} t^2 \,.$$

III. FUNDAMENTOS DE ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

A. La ley de Coulomb

En esta sección se explicaran algunos conceptos fundamentales sobre la dinámica de una partícula cargada inmersa en un campo electromagnético. Primeramente, cuando dos partículas con cargas q_1 y q_2 se encuentran separadas por una distancia d, ambas sienten una fuerza con magnitud:

$$F = \frac{k_e q_1 q_2}{d^2} \,. \tag{2}$$

Donde $k_e \approx 8{,}98 \times 10^9 N \cdot m^2 \cdot C^{-2}$. Esta fuerza es atractiva cuando las partículas tienen cargas de signos opuestos, y repulsiva cuando tienen cargas de signos iguales. Finalmente, la dirección de esta fuerza es a lo largo del segmento que une a las dos cargas.

B. El concepto de campo eléctrico

Imaginemos que tenemos una partícula fija con carga q en el espacio, y queremos, de algún modo, entender su interacción con otras partículas que potencialmente se pueden ubicar en el espacio. Sabemos que al ubicar otra partícula a una distancia, digamos r de la partícula inicial, esta va a sentir una fuerza que es inversamente proporcional a r, en virtud de la ecuación 2. Si ubicamos el origen de coordenadas en la partícula fija, podemos escribir vectorialmente la fuerza que sentiría otra partícula de carga q', como:

$$\vec{F} = \frac{k_e q q'}{d^2} \hat{e}_r \,.$$

Donde $\hat{e}_r$ es un vector de magnitud 1 que apunta hacia la posición de la partícula de carga q'. Si definimos el siguiente vector:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{k_e q}{r^2} \vec{e_r} \,. \tag{3}$$

El cual depende de $\vec{r}$, un vector que define la posición en el espacio de cualquier punto respecto a la partícula de carga q, entonces podemos afirmar que para cualquier partícula de carga q' que se ubica con un vector $\vec{r}$ en relación a la de carga q, esta experimenta la siguiente fuerza:

$$\vec{F} = q' \vec{E} \,. \tag{4}$$

El campo eléctrico creado por una partícula puntual, que es definido mediante la ecuación 3, es un campo eléctrico muy especifico. Cuando se ubican varias cargas y se busca saber cómo es el campo eléctrico que generan, este generalmente es más complicado, sin embargo, arreglando de forma adecuada un conjunto de cargas, es posible obtener muchas formas posibles de campos eléctricos, como por ejemplo, uno con magnitud y dirección constante en el espacio. Este tipo de campo eléctrico se puede generar de manera aproximada haciendo uso de dos placas metálicas rectangulares paralelas.

C. Interacciones magnéticas y el concepto de campo magnético

Cuando dos partículas se ponen en movimiento, aparece una nueva fuerza que se conoce como fuerza magnética. En este sentido las interacciones magnéticas se deben a cargas eléctricas en movimiento. Sin embargo, también es posible obtener interacciones magnéticas cuando una carga eléctrica en movimiento está en presencia de un material magnético, como por ejemplo, un imán. O cuando dos materiales magnéticos están cerca el uno del otro.

De la misma forma que se construye el concepto de campo eléctrico, se construye el concepto de campo magnético. Es decir, uno puede imaginar que una partícula cargada en movimiento, o un material magnético, impregnan el espacio de un campo magnético, el cual potencialmente puede interactuar con otras partículas en movimiento o con otros materiales magnéticos. Cuando en el espacio existe un campo magnético $\vec{B}$ y se tiene una partícula en movimiento q, con velocidad $\vec{v}$, esta siente una fuerza dada por la ecuación 5 presentada a continuación.

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}\,. \tag{5}$$

IV. MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA CARGADA EN UN CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

Resumiendo el contenido de las secciones anteriores en una sola ecuación, específicamente las ecuaciones 4 y 4, podemos afirmar que una partícula de carga q que se mueve con velocidad $\vec{v}$, en una región del espacio donde existe un campo eléctrico $\vec{E}$ y uno magnético $\vec{B}$, esta experimenta una fuerza dada por la ecuación 6:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{6}$$

En la simulación asociada con este texto, se puede simular el movimiento de una partícula cargada cuando se encuentra en una región con campos eléctricos y magnéticos constantes. Por lo anterior, se trabajará acá con campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ que son iguales en cada punto del espacio y que además tampoco dependen del tiempo.

Supongamos entonces que tenemos $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$, $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ que son campos que no varían en el espacio, y además tenemos una partícula de masa q que se mueve inicialmente con una velocidad $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$.

La idea es resolver las ecuaciones 6 de la manera más sencilla posible. Notemos que por ejemplo, uno podría observar el movimiento desde una perspectiva en la cual $\vec{B}$ está sobre un eje fijo. Esto simplifica las ecuaciones puesto que en este caso el vector de campo magnético solamente tiene una componente. Llamemos Σ al sistema de referencia original y Σ' al sistema de referencia rotado, uno en el cual $\vec{B} = (B, 0, 0)$, $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Una forma de obtener este sistema de referencia es rotar de manera apropiada a Σ. Esto se puede visualizar en la figura 2. Llamemos $\hat{k}$ al vector unitario que apunta en la dirección positiva del eje azul, se puede apreciar que si el sistema de referencia Σ, caracterizado por los tres ejes: azul, rojo y verde, es rotado respecto al vector $\hat{k} \times \vec{B}$ un ángulo igual al ángulo formado por el eje azul y el vector de campo magnético, entonces el nuevo sistema de referencia rotado Σ', cumple las características descritas anteriormente. Este sistema se puede visualizar en la figura 3

Las ecuaciones que surgen al considerar la expresión 6 con componentes, son:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{q}{m} E_1\,, \\ a_2 &= \frac{q}{m}(E_2 + v_3 B)\,, \\ a_3 &= \frac{q}{m}(E_3 - v_2 B)\,. \end{aligned} \tag{7}$$

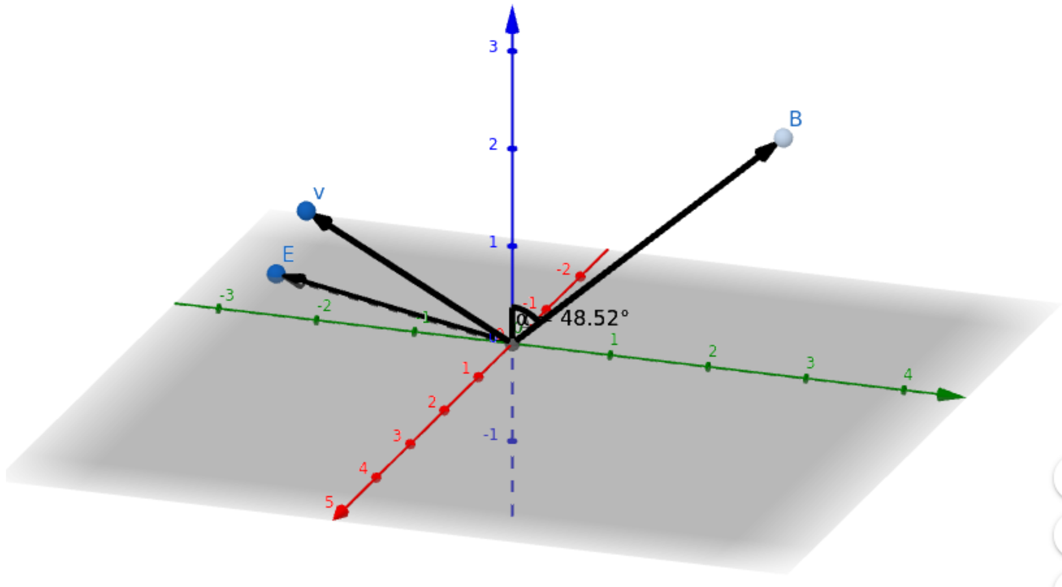

Figura 2. Vista de los vectores en un sistema de referencia inicial Σ.

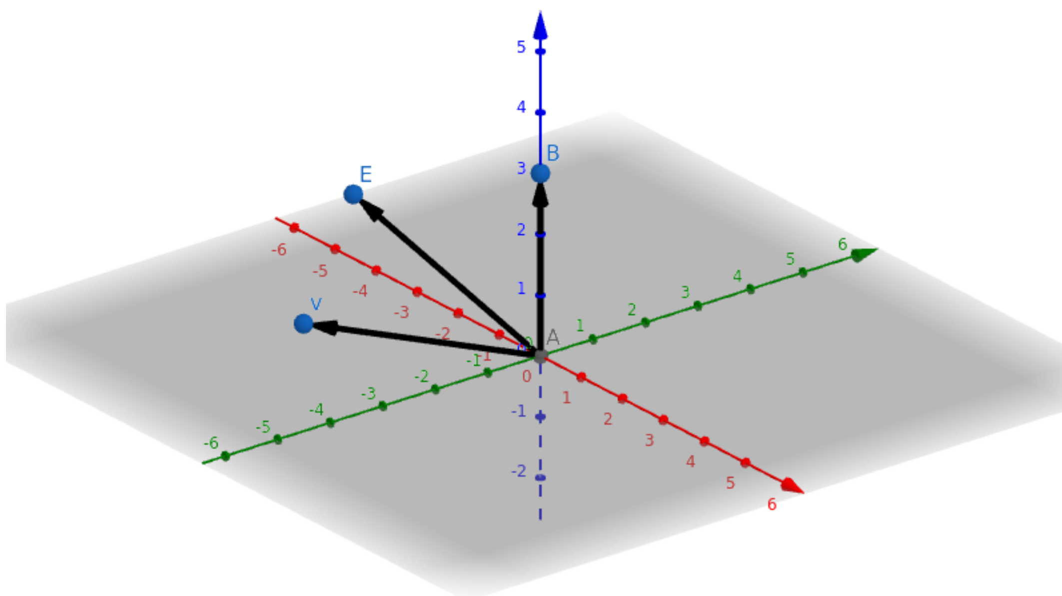

Figura 3. Vista de los vectores en el sistema Σ', donde $\vec{B}$ se ve sobre un eje.

Para esto se ha hecho la cuenta del producto cruz entre $\vec{v}$ y $\vec{B}$, el cual da como resultado:

$$(v_1, v_2, v_3) \times (B, 0, 0) = (0, v_3 B, -v_2 B)\,.$$

El sistema de ecuaciones 7 se puede resolver utilizando números complejos y algunos resultados sobre la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias. Puesto que estos métodos se salen del alcance de este trabajo, se omite el procedimiento, y simplemente se muestran las soluciones a continuación.

$$x_1(t) = x_1(0) + v_1(0)t + \frac{q}{2m}E_1 t^2\,.$$

$$x_2(t) = x_2(0) + \frac{E_3}{B}t + \frac{m}{qB}\left(v_2(0) - \frac{E_3}{B}\right)\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) - \frac{m}{qB}\left(v_3(0) + \frac{E_2}{B}\right)\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{m}{qB}\left(v_3(0) + \frac{E_2}{B}\right) \tag{8}$$

$$x_3(t) = x_3(0) + \frac{E_2}{B}t + \frac{m}{qB}\left(v_3(0) + \frac{E_2}{B}\right)\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{m}{1B}\left(v_2(0) - \frac{E_3}{B}\right)\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{m}{qB}\left(v_3(0) + \frac{E_2}{B}\right)$$