MNRAS 000, 1–?? (2019) Preprint 11 de julho de 2019 Compiled using MNRAS LaTeX style file v3.0

Aplicação do método MCMC a um Sistema de Binárias Eclipsantes

Fábio Wanderley
Observatório do Valongo, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil

11 de julho de 2019

ABSTRACT
O objetivo deste trabalho, é a partir dos dados de trânsitos de binárias eclipsantes fornecidos, identificar os melhores parâmetros que expliquem tais dados a partir de um modelo dado. Esta tarefa deve ser realizada por meio dos métodos de Monte Carlo e Cadeia de Markov (MCMC).

Key words: Ajuste de Modelos – estrelas binárias – MCMC

Parâmetro	*input*	*output*
A	0.5	0.50222
B	0.7	0.78219
t_1	0.3	0.27835
t_2	0.75	0.76806
ζ_1	0.05	0.04913
ζ_2	0.05	0.04950
ln(f)	-0.69	-2.70517

Table 1. *inputs* iniciais para o cálculo dos parâmetros via método de máxima verossimilhança e seus respectivos *outputs*.

1 DISCUSSÃO

Determinarei neste trabalho os parâmetros que melhor expliquem os dados de binárias eclipsantes fornecidos (tempo, fluxo normalizado e seus erros associados), referentes ao modelo abaixo:

$$\Delta m(t) = 1 - A * \exp(-(t-t_1)^2/\zeta_1^2) - B * exp(-(t-t_2)^2/\zeta_2^2) \quad (1)$$

Para tal, a metodologia consiste em inicialmente utilizar o método da função de máxima verossimilhança (MLE) para estimar os parâmetros, e em um segundo momento utilizar estes parâmetros como *inputs* iniciais ao método MCMC.

Eu utilizei o pacote scipy.optimize para realizar esta tarefa, para tal foi necessário realizar estimativas iniciais dos parâmetros do modelo e da função de verossimilhança. A Tabela 1 apresenta os *inputs* e *outputs* deste método.

Onde A, t_1 e ζ_1 descrevem o primeiro trânsito (respectivamente profundidade, tempo central e largura do trânsito) e B, t_2 e ζ_2 analogamente descrevem o segundo trânsito. O parâmetro f é a função de verossimilhança, que trabalharei como ln(f).

Assim, a Figura 1 apresenta o ajuste aos dados, por meio dos parâmetros obtidos via MLE.

Com estes parâmetros iniciais, eu passo a utilizar o método de Monte Carlo e Cadeia de Markov. O método de Monte Carlo consiste em se utilizar de amostragens aleatórias massivas para obter resultados numéricos, como foi o exemplo do cálculo do número π feito na disciplina. Cadeia de Markov é um método estatístico que consiste em evoluir cadeias de parâmetros onde a distribuição de probabilidade do próximo estado depende apenas do estado atual e não da sequência de eventos que o precederam. Assim, a metodologia MCMC empregada será a seguinte:

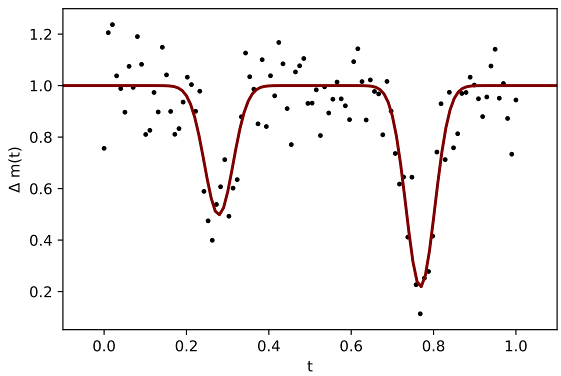

Figure 1. Dados do sistema de binárias eclipsantes e do modelo ajustado pelo método de máxima verossimilhança.

(i) Sortearei um número grande de conjuntos dentro do espaço de fase de parâmetros (conforme Monte Carlo). Cada cojunto de parâmetros será uma Cadeia de Markov.

(ii) Cada cadeia será evoluída em um número definido de passos, ou seja, é estabelecido um algoritmo para progressão do estado dos parâmetros. Assim, o estado que melhor represente os dados (atual ou novo) é o que continua na progressão. Todo estado que for "vencedor"ao menos uma vez é incluído na tabela de parâmetros aceitos.

(iii) Ao fim de muitas progressões os estados aceitos de todas as cadeias são unificados e se tem um histograma para cada parâmetro. As medianas de tais histogramas servem como indicador do melhor parâmetro de ajuste (apesar desta análise ser melhor aproveitada para determinação do intervalo de confiança dos parâmetros, a partir dos intervalos interquartis associados aos histogramas dos parâmetros).

Parâmetro	Valor
A	$0.50222^{+0.00010}_{-0.00009}$
B	$0.78219^{+0.00010}_{-0.00010}$
t_1	$0.27835^{+0.00010}_{-0.00009}$
t_2	$0.76806^{+0.00010}_{-0.00010}$
ζ_1	$0.04913^{+0.00010}_{-0.00010}$
ζ_2	$0.04950^{+0.00009}_{-0.00010}$
ln(f)	$-2.70517^{+0.00010}_{-0.00010}$

Table 2. Resultados dos parâmetros pelo método MCMC e seus respectivos intervalos interquartis associados (superior e inferior).

A metodologia utilizada segue a inferência Bayesiana, onde além de definição da função de verossimilhança, define-se também a função *prior*, que descreve o estado de conhecimento do sistema analisado. Visto que ambas funções podem alcançar valores muito grandes entre um estado e o seguinte da cadeia, iremos compararar os valores logarítmicos das funções. Da funçao de verossimilhança, e da função *prior*, temos a função posterior que será utilizada para definir qual o estado que representa melhor os nossos dados. Assim, para cada cadeia e cada passo, a função posterior definirá o estado vencedor, e que prossegue na cadeia.

Para a função *prior*, admiti como razoável tomar a premissa de que os valores no intervalo de 0.5 a 1.5 dos parâmetros ajustados por MLE possuem probabilidade diferente de zero. O método de MCMC foi realizado na linguagem python a partir do pacote EMCEE, onde foram criadas 1000 Cadeias de Markov, que foram evoluídas em 1000 passos. Foram rejeitados os 50 primeiros valores de cada cadeia, para excluir o *bias* associado aos valores iniciais. Esse procedimento resultou em um total de 950000 valores aceitos para cada parâmetro.

A Figura 2 apresenta os triângulos plot que englobam os histogramas de valores aceitos para cada parâmetro, assim como a relação entre cada dupla de variáveis. Junto a isso temos a mediana, e o segundo e quarto quartis associados a cada parâmetro, e retas que são os *best-fits* obtidos previamente com a função de verossimilhança, de forma que se pode comparar os valores obtidos por MLE com os obtidos por MCMC.

Os valores e intervalos interquartis associados podem ser vistos na Tabela 2.

Os parâmetros obtidos via MLE estão dentro do intervalo entre o quartil de 25% e de 75% dos histogramas dos parâmetros obtidos via MCMC, mostrando assim que os resultados obtidos por ambos os métodos estão de acordo. Esses intervalos interquartis podem ser úteis também para nos fornecer o intervalo de confiança dos parâmetros.

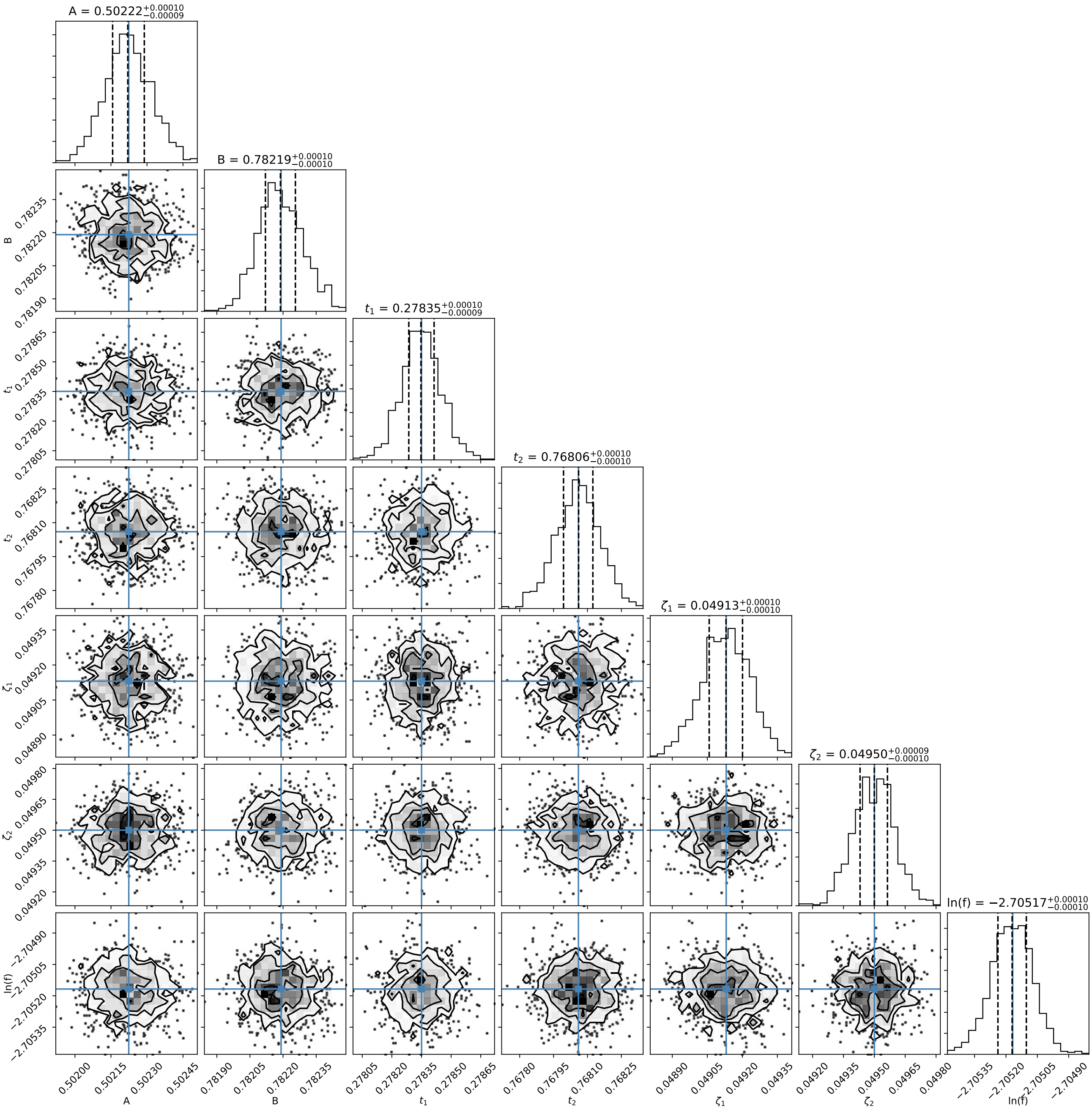

Figure 2. Resultado do método de MCMC, com os triângulos plot, os valores das medianas e intervalos interquartis obtidos e comparação com os *best-fits* prévios provenientes do método MLE.