

# Estrutura de Dados – 1º semestre de 2023

Professor Mestre Fabio Pereira da Silva

# Recursividade

- Se um problema pode ser resolvido facilmente
  - resolva o problema;
- Se o problema é grande,
  - elabore uma solução menor do problema,
  - relacione com o problema maior,
  - resolva o problema menor,
  - volte ao problema inicial.

# Recursividade

- Um objeto é dito recursivo se ele consistir parcialmente ou for definido em termos de si mesmo.
- Uma função recursiva é uma função que faz uma chamada a si mesma.
- Uma função recursiva é definida em termos dela mesma
- Exemplos
  - Números naturais, Função fatorial, Árvore

# Recursividade Direta ou Indireta

- Se uma função  $A$  contiver uma chamada explícita a si mesma, essa função é dita diretamente recursiva.

$$A \rightarrow A$$

- Se uma função  $A$  contiver uma chamada a uma função  $B$ , que por sua vez contenha uma chamada a função  $A$ , a função  $A$  é dita indiretamente recursiva.

$$A \rightarrow B$$

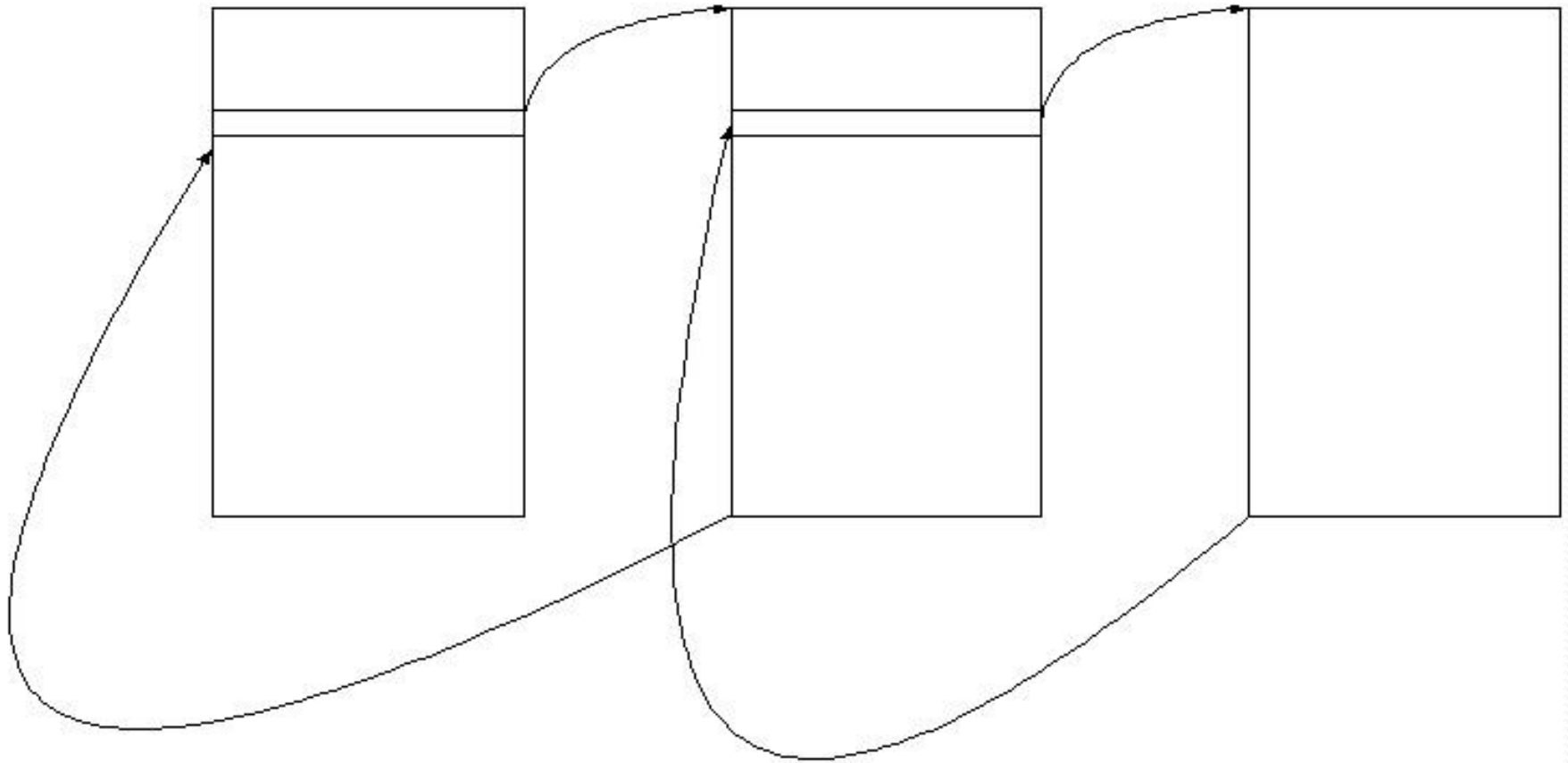
$$B \rightarrow A$$

# Eventos

- **Na chamada de procedimentos**
  - Passagem de argumentos
  - Alocação e inicialização de variáveis locais
  - Transferência de controle para a função
- 
- **No retorno do procedimento**
  - Recuperação do endereço de retorno
  - Liberação da área de dados
  - Desvio para o endereço de retorno

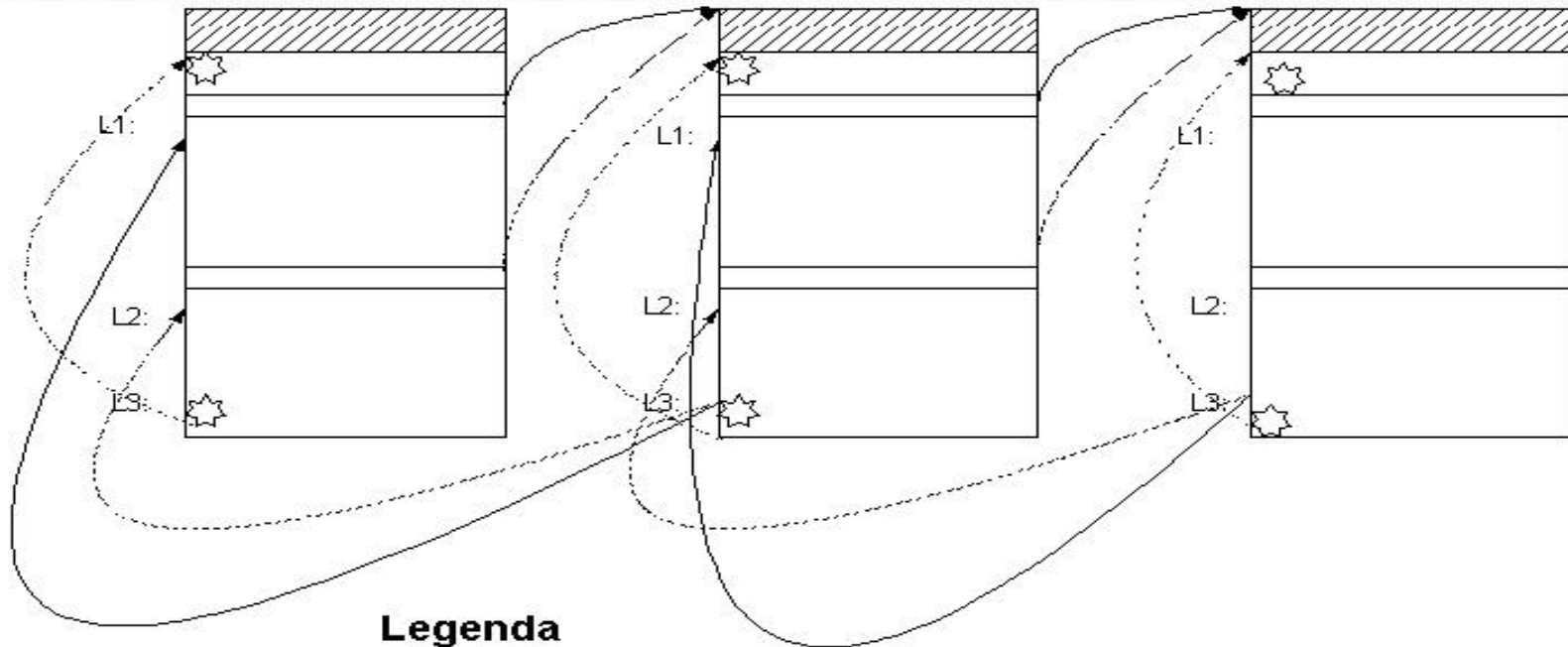
# Procedimentos não recursivos

chamada de procedimento

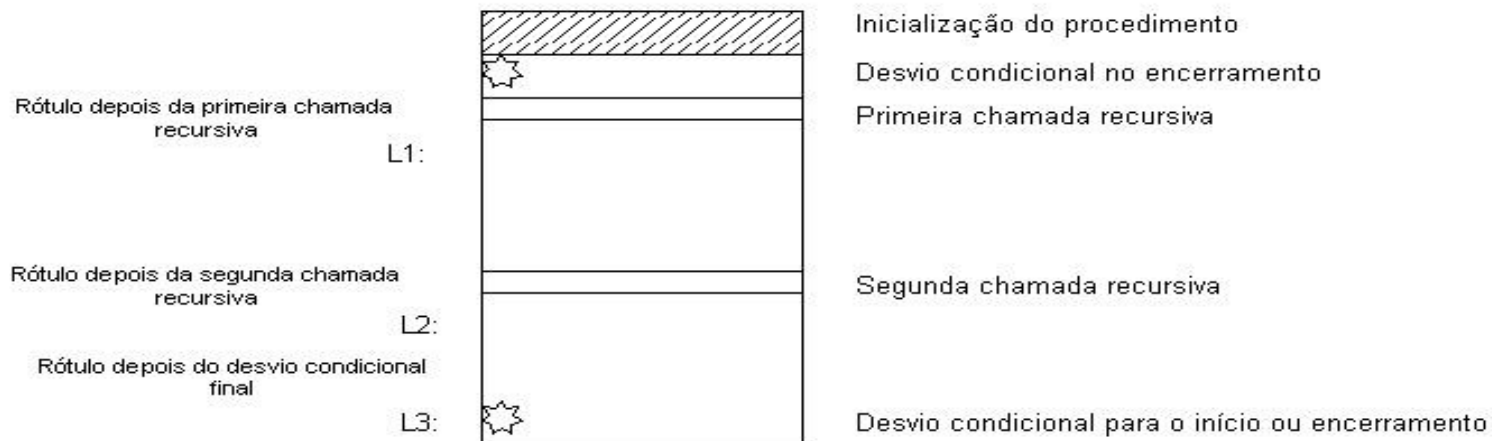


retorno de procedimento

# Chamadas de funções recursivas



## Legenda



# Implementação de procedimentos recursivos

- Procedimentos recursivos só podem ser implementados em alto nível de abstração.
- As máquinas não executam procedimentos recursivos.
- Cabe ao “software” simular procedimentos recursivos.
- A simulação de recursão utilizará uma pilha com os seguintes atributos gravados:
  - Parâmetros
  - Variáveis
  - Valor da função (se for o caso)
  - Endereço de retorno



# Condição de parada

- Nenhum programa nem função pode ser exclusivamente definido por si
  - Um programa seria um loop infinito
  - Uma função teria definição circular
- Condição de parada
  - Permite que o procedimento pare de se executar
  - $F(x) > 0$  onde  $x$  é decrescente

# Implementação de procedimentos recursivos

- A recursividade é uma estratégia que pode ser utilizada sempre que o cálculo de uma função para o valor  $n$ , pode ser descrita a partir do cálculo desta mesma função para o termo anterior  $(n-1)$ .

Exemplo – Função fatorial:

$$n! = n * (n-1) * (n-2) * (n-3) * \dots * 1$$

$$(n-1)! = (n-1) * (n-2) * (n-3) * \dots * 1$$

logo:

$$n! = n * (n-1)!$$

# Fluxo de Execução

- Internamente, quando qualquer chamada de função é feita dentro de um programa, é criado um **Registro de Ativação** na **Pilha de Execução** do programa
- O registro de ativação armazena os parâmetros e variáveis locais da função bem como o “ponto de retorno” no programa ou subprograma que chamou essa função.
- Ao final da execução dessa função, o registro é desempilhado e a execução volta ao subprograma que chamou a função

# Fluxo de Execução

- Sempre que há uma chamada de função (recursiva ou não) os parâmetros e as variáveis locais são empilhadas na pilha de execução.
- No caso da função **recursiva**, para cada chamada é criado um ambiente local próprio. (As variáveis locais de chamadas recursivas são independentes entre si, como se fossem provenientes de funções diferentes).

## Fatorial de um número.

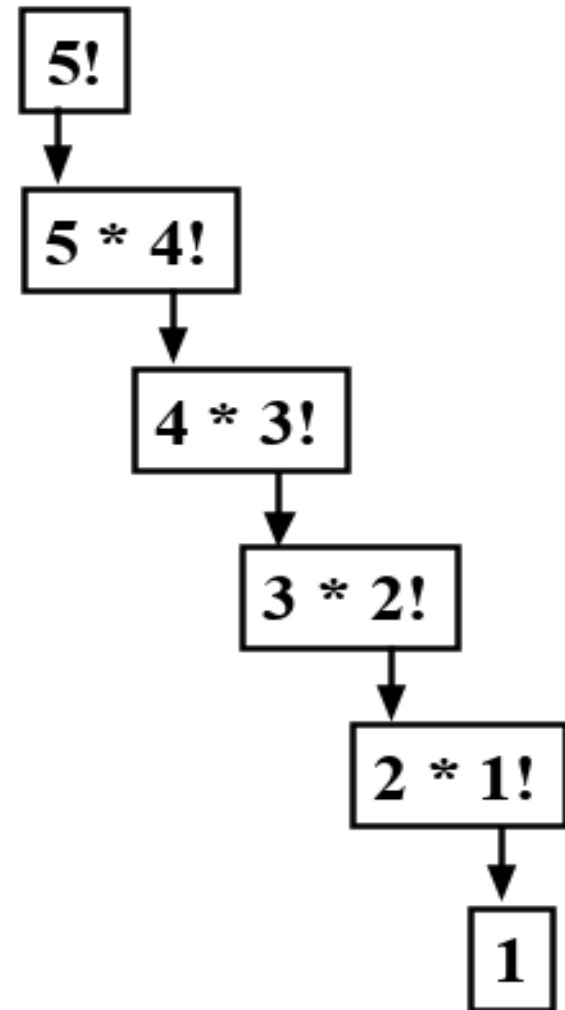
$$1! = 1$$

$$2! = 2 * 1$$

$$3! = 3 * 2 * 1$$

$$4! = 4 * 3 * 2 * 1$$

$$5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1$$





```
fact(n) = n * fact(n - 1)
```

```
se n=0
```

```
então
```

```
fact(0) = 1
```

```
senão
```

```
x = n-1
```

```
y = fact(x)
```

```
fact(n) = n * y
```

```
fim do se
```

												1	ND	ND
								2	ND	ND		2	1	ND
				3	ND	ND		3	2	ND		3	2	ND
<b>n</b>	<b>x</b>	<b>y</b>		<b>n</b>	<b>x</b>	<b>y</b>		<b>n</b>	<b>x</b>	<b>y</b>		<b>n</b>	<b>x</b>	<b>y</b>
<u>Inicialmente</u>				<u>fact(3)</u>				fact(2)				fact(1)		

0	ND	ND												
1	0	ND		1	0	1								
2	1	ND		2	1	ND		2	1	1				
3	2	ND		3	2	<u>ND</u>		3	2	<u>ND</u>		3	2	2
<b>n</b>	<b>x</b>	<b>y</b>		<b>n</b>	<b>x</b>	<b>y</b>		<b>n</b>	<b>x</b>	<b>y</b>		<b>n</b>	<u><b>x</b></u>	<u><b>y</b></u>
<u>fact(0)</u>				y = fact(0)				y = fact(1)				y = fact(2)		

<b>n</b>	<b>x</b>	<b>y</b>	
fact(3)			

```
public class Factorial {  
    public static void main(String[] args) {  
        int input = Integer.parseInt(args[0]);  
        double result = factorial(input);  
        System.out.println(result);  
    }  
    public static double factorial(int x) {  
        if (x<0) return 0.0;  
        else if (x==0) return 1.0;  
        else return x*factorial(x-1);  
    }  
}
```



```
public static int fib(int n)
{
    .
    int x,y;
    if (n <= 1) return 1;
    else {
        x = fib(n-1);
        y = fib(n-2);
        return x + y;
    }
}
```

# Busca Binária

- Divide seu vetor em duas metades
- Três condições
  1. Se o item for igual ao item que está na metade do vetor, o item foi encontrado
  2. Se for menor, procure na primeira metade
  3. Se for maior procure na segunda metade

# Busca Binária

Procurar por R

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	C	E	H	L	M	P	R	T	V
					I		X		F

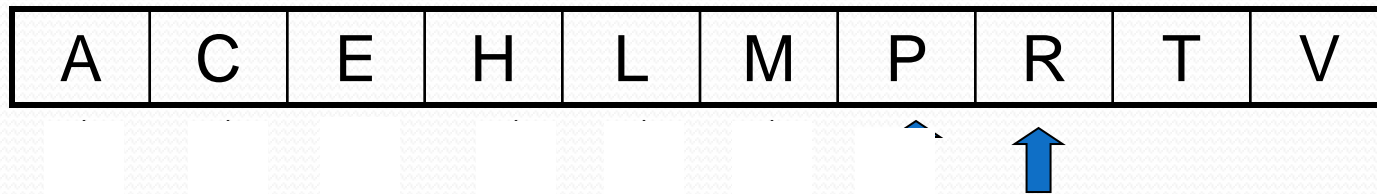
-2 Comparações!

-Pior caso: quando os itens estiverem no início do vetor. Nesse caso, seria melhor utilizar busca seqüencial. Mas como saber quando o item está no início do vetor?

# Busca Sequencial

Procurar por R

A	C	E	H	L	M	P	R	T	V
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---



-8 Comparações!

-Se estivermos procurando o item V, o número de comparações seria a quantidade de elementos no vetor

-O ideal seria dividir o vetor pela metade para então procurar (Busca Binária)

# Busca Binária

**Procedimento** Busca\_Binária(inteiro: x, Início, Fim);

**Inteiro:** meio

**Início**

meio  $\leftarrow$  div((início + fim), 2)

**Se** fim < início **então**

**escreva** ('Elemento Não Encontrado')

**Senão se** (v[meio]) = x **então**

**escreva** ('Elemento está na posição ', meio)

**senão**

**se** v[meio] < x **então**

            início  $\leftarrow$  meio + 1;

            Busca\_Binaria (x, início, fim);

**senão**

            fim  $\leftarrow$  meio - 1;

            Busca\_Binaria (x, início, fim);

**fim se**

**fim se**

**fim se**

**Fim**

# Percurso em lista encadeada

```
void mostra_lista_recursivo2 (Lista* p) {  
    if (p!=NULL) {  
        printf ("%d\t", p->info);  
        mostra_lista_recursivo(p->prox);  
    }  
}
```

# Estratégias para problemas tratáveis

- **Estruturas de Dados**
  - Use uma estrutura adequada
- **Espaço por Tempo**
  - Gaste mais espaço para economizar tempo
- **Algoritmos Probabilísticos**
  - Use aleatoriedade para conseguir eficiência
- **Dividir para conquistar (top-down)**
  - Divida em subproblemas semelhantes e disjuntos, resolva e combine
- **Programação Dinâmica (bottom-up)**
  - Comece com subproblemas e componha um maior, reusando solução de subproblemas compartilhados
- **Algoritmos Gulosos**
  - Sempre pegue o melhor

# Forma geral da recursão

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

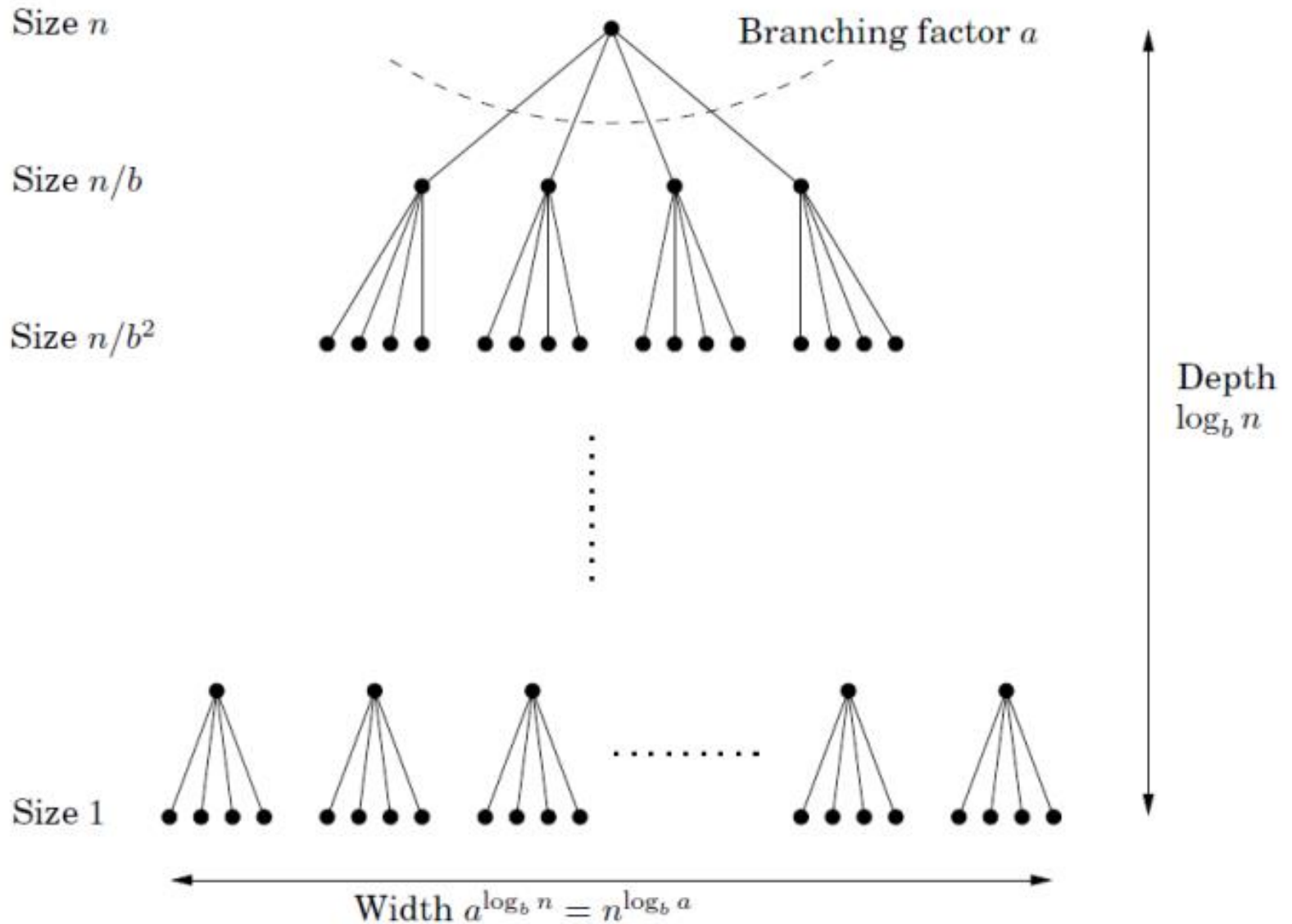
Número de  
subproblemas

Tamanho dos  
subproblemas

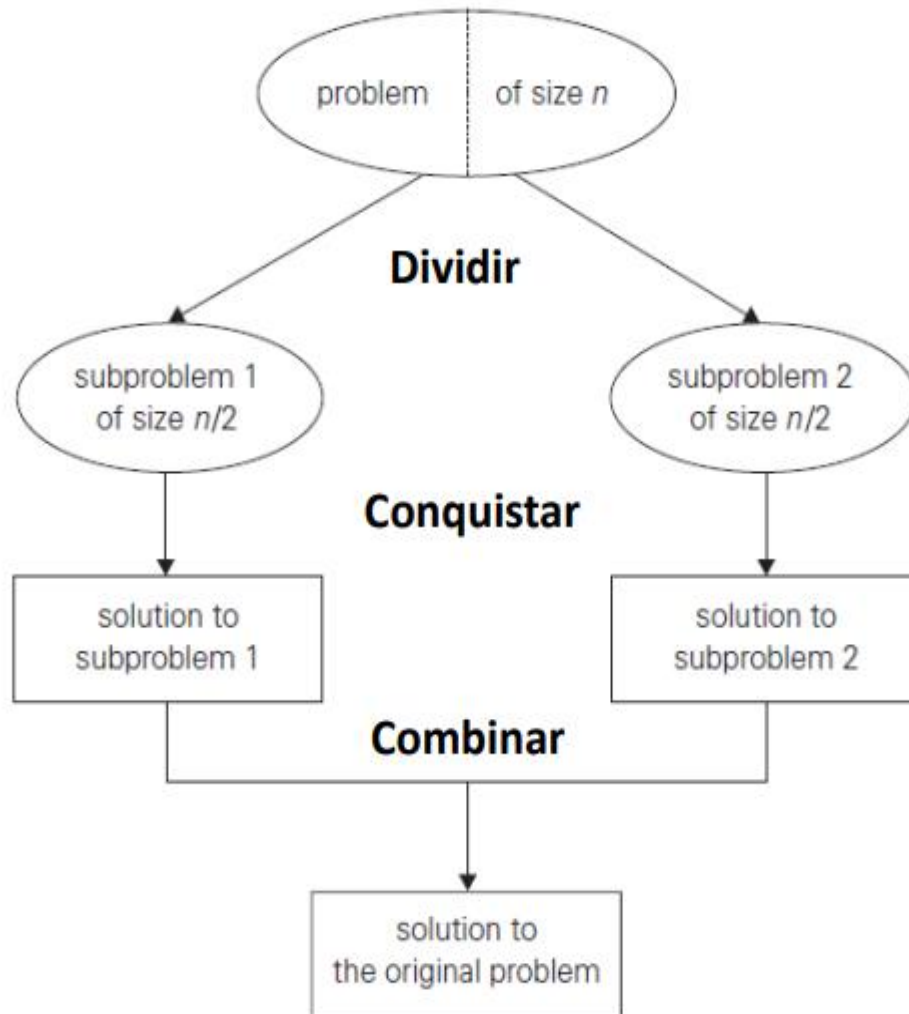
Custo local da  
função



# Forma geral da recursão



# Forma geral da recursão



# Divisão e Conquista

- Algoritmos baseados em divisão e conquista são, em geral, recursivos.
- A maioria dos algoritmos de divisão e conquista divide o problema em subproblemas da mesma natureza, de tamanho  $n/b$
- **Vantagens:**
  - ✓ Requerem um número menor de acessos à memória
  - ✓ São altamente paralelizáveis. Se existem vários processadores disponíveis, a estratégia propicia eficiência

# Divisão e Conquista

- Diminuir complexidade (em geral de linear para logarítmico) de algoritmos polinomiais
  - Busca, Ordenação, Multiplicação e Exponenciação
- Apresentar melhor função de complexidade de pior caso
  - Mínimo/máximo

# Divisão e Conquista

- Construção incremental
- Consiste em, inicialmente, resolver o problema para um subconjunto dos elementos da entrada e, então adicionar os demais elementos um a um.
- Em muitos casos, se os elementos forem adicionados em uma ordem ruim, o algoritmo não será eficiente.
- Ex: Calcule  $n!$ , recursivamente

# Divisão e Conquista

- **Dividir** o problema em determinado número de subproblemas, importante para se obter uma boa eficiência temporal
- **Conquistar** os subproblemas, resolvendo os recursivamente.
- Se o tamanho do subproblema for pequeno o bastante, então a solução é direta.
- **Combinar** as soluções fornecidas pelos subproblemas, a fim de produzir a solução para o problema original.
- **Algoritmos adequados para processamento paralelo**

# Divisão e Conquista

- **A busca binária recursiva utiliza essa técnica?**
- **Dividir**
  - Divide o problema em subproblemas?
- **Conquistar:**
  - Resolve os subproblemas recursivamente?
- **Combinar:**
  - Forma a solução final a partir da combinação das soluções dos subproblemas?
- **Nesse caso, a etapa de combinar tem custo zero, pois o resultado do subproblema já é o resultado do problema maior.**

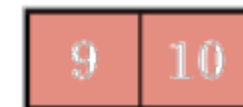
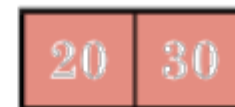
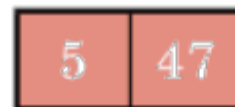
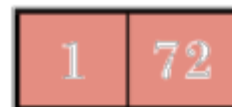
# Divisão e Conquista

- Problemas menores (fração), **independentes e não-sobrepostos**
- **Divisão e combinação são partes não-recursivas**
  - Algoritmos tendem a tornar uma das duas mais complicada
  - Mergesort, Quicksort
- Importante definir o que é pequeno
  - Parada de recursão (multiplicação de números)

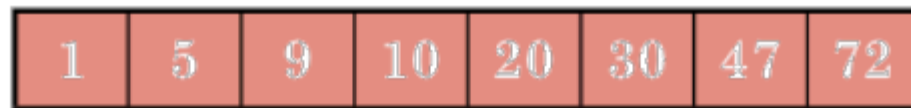
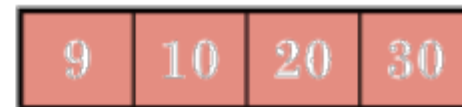


# Exemplo: Algoritmo Merge Sort

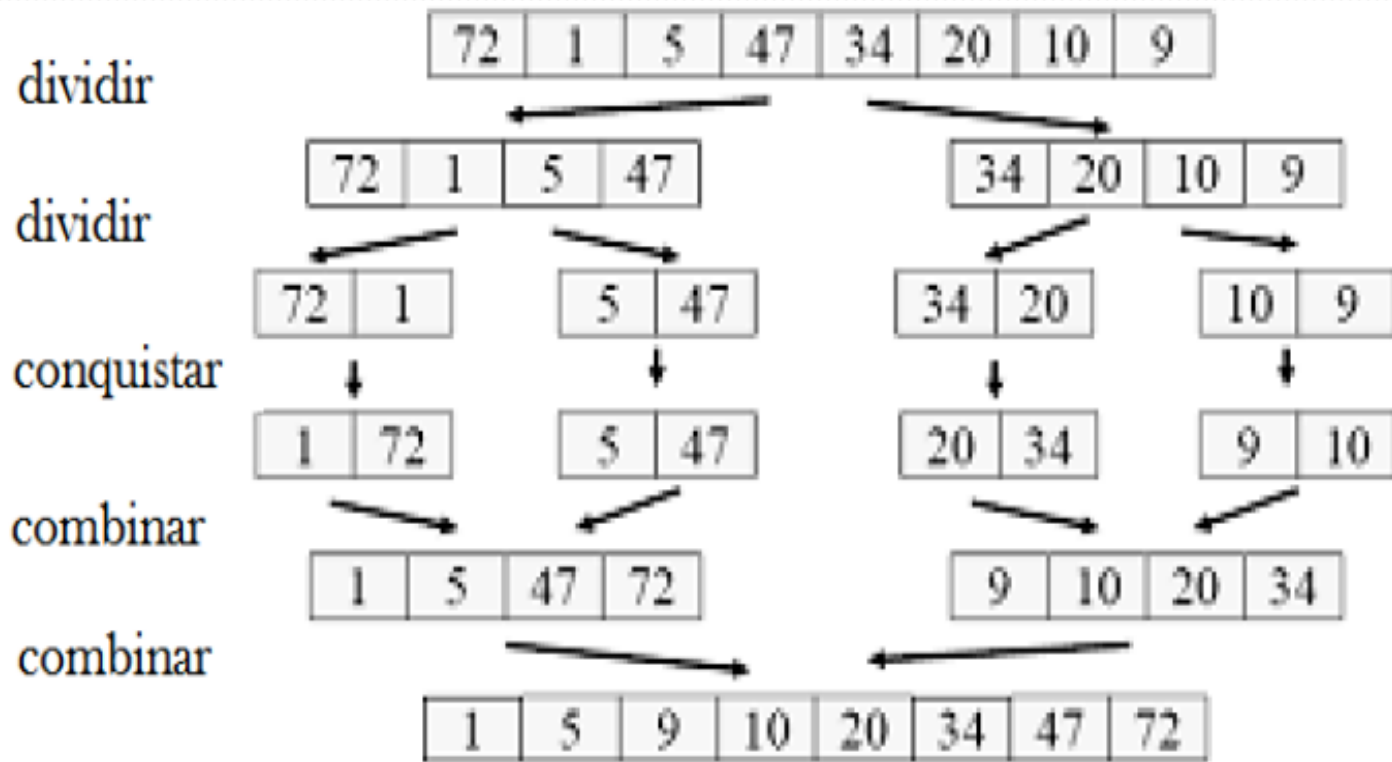
divisão



conquista



# Exemplo: Algoritmo Merge Sort



# Divisão e Conquista - Vantagens

- Resolução de problemas difíceis, como a Torre de Hanói
- Pode gerar algoritmos eficientes
- Ótima ferramenta para busca de algoritmos eficientes, com forte tendência a complexidade logarítmica
- Paralelismo
- Facilmente paralelizável na fase de conquista

# Divisão e Conquista - Desvantagens

- Recursão ou Pilha explícita
- Tamanho da Pilha
- Número de chamadas recursivas e/ou armazenadas na pilha pode ser um inconveniente
- Dificuldade na seleção dos casos bases
- Repetição de subproblemas
- Situação que pode ser resolvida através do uso de memorização

# Exemplo

```
def divisao_e_conquista(x):  
    if x é pequeno ou simples:  
        return resolve(x)  
    else:  
        decompor x em n conjuntos menores  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$   
        for i in  $[0, 1, \dots, n-1]$ :  
             $y_i = \text{divisao\_e\_conquista}(x_i)$   
        combinar  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  em y  
        return y
```

# Exemplo – Maior valor de um vetor

- É possível aplicar Divisão em Conquista para encontrar o maior valor em um vetor?
- Opção 1:

```
int maxVal1(int A[], int n) {  
    int max = A[0];  
    for (int i = 1; i < n; i++) {  
        if( A[i] > max ) max = A[i];  
    }  
    return max;  
}
```

- Melhor alternativa??

# Exemplo – Maior valor de um vetor

- Opção 2:

```
int maxVal2(int A[], int init, int end) {  
    if (end - init <= 1)  
        return max(A[init], A[end]);  
    else {  
        int m = (init + end)/2;  
        int v1 = maxVal2(A,init,m);  
        int v2 = maxVal2(A,m+1,end);  
        return max(v1,v2);  
    }  
}
```

- E agora? Melhorou?

# Exemplo – Exponenciação

```
int pow1(int a, int n) {  
    int p = 1;  
    for (int i = 0; i < n; i++)  
        p = p * a;  
    return p;  
}
```

```
int pow2(int a, int n) {  
    if (n == 0)  
        return 1;  
    if (n % 2 == 0)  
        return pow2(a, n/2) * pow2(a, n/2);  
    else  
        return pow2(a, (n-1)/2) * pow2(a, (n-1)/2) * a;  
}
```



# Contatos

- Email: [fabio.silva321@fatec.sp.gov.br](mailto:fabio.silva321@fatec.sp.gov.br)
- LinkedIn: <https://br.linkedin.com/in/b41a5269>
- Facebook: <https://www.facebook.com/fabio.silva.56211>