Estrutura de Dados – 1º semestre de 2020

Professor Mestre Fabio Pereira da Silva

Divisão e Conquista

- Construção incremental
- Consiste em, inicialmente, resolver o problema para um subconjunto dos elementos da entrada e, então adicionar os demais elementos um a um.
- Em muitos casos, se os elementos forem adicionados em uma ordem ruim, o algoritmo não será eficiente.
- Ex: Calcule n!, recursivamente

Divisão e Conquista

- Dividir o problema em determinado número de subproblemas.
- Conquistar os subproblemas, resolvendo os recursivamente.
- Se o tamanho do subproblema for pequeno o bastante, então a solução é direta.
- Combinar as soluções fornecidas pelos subproblemas, a fim de produzir a solução para o problema original.

Merge Sort

- Este algoritmo tem como objetivo a reordenação de uma estrutura linear por **meio da quebra**, **intercalação** e **união dos n elementos existentes.**
- Em outras palavras, a estrutura a ser reordenada será, de forma **recursiva, subdividida em estruturas menores** até que não seja mais possível fazê-lo.
- **Classificação por Intercalação**

Merge Sort

- Em seguida, os elementos serão organizados de modo que cada subestrutura ficará ordenada. Feito isso, as subestruturas menores (agora ordenadas) serão unidas, sendo seus elementos ordenados por meio de intercalação.
- O mesmo processo repete-se até que todos os elementos estejam unidos em uma única estrutura organizada.

Merge Sort

- Merge-sort com uma sequência de entrada S com n elementos consiste de três passos:
- Divide: dividir S em duas sequencias S1 e S2 de aproximadamente n/2 elementos cada
- Recursão: recursivamente ordene S1 e S2
- Conquista: junte S1 e S2 em uma única sequência ordenada

Merge Sort

- Dividir o vetor original em n sub-partes de tamanho 1;
- Intercalar os pares de sub-partes adjacentes, da esquerda para a direita em ordem crescente;
- Repetir o passo anterior até obter um único vetor de tamanho n, que evidentemente estará ordenado.

Algoritmo Merge Sort

```
01. mergesort(A[0...n - 1], inicio, fim)
02. |   se(inicio < fim)
03. |   |   meio ← (inicio + fim) / 2 //calcula o meio
04. |   |   mergesort(A, inicio, meio) //ordena o subvetor esquerdo
05. |   |   mergesort(A, meio + 1, fim) //ordena o subvetor direito
06. |   |   merge(A, inicio, meio, fim) //funde os subvetores esquerdo e direito
07. |   fim_se
08. fim_mergesort
```

Intercalação

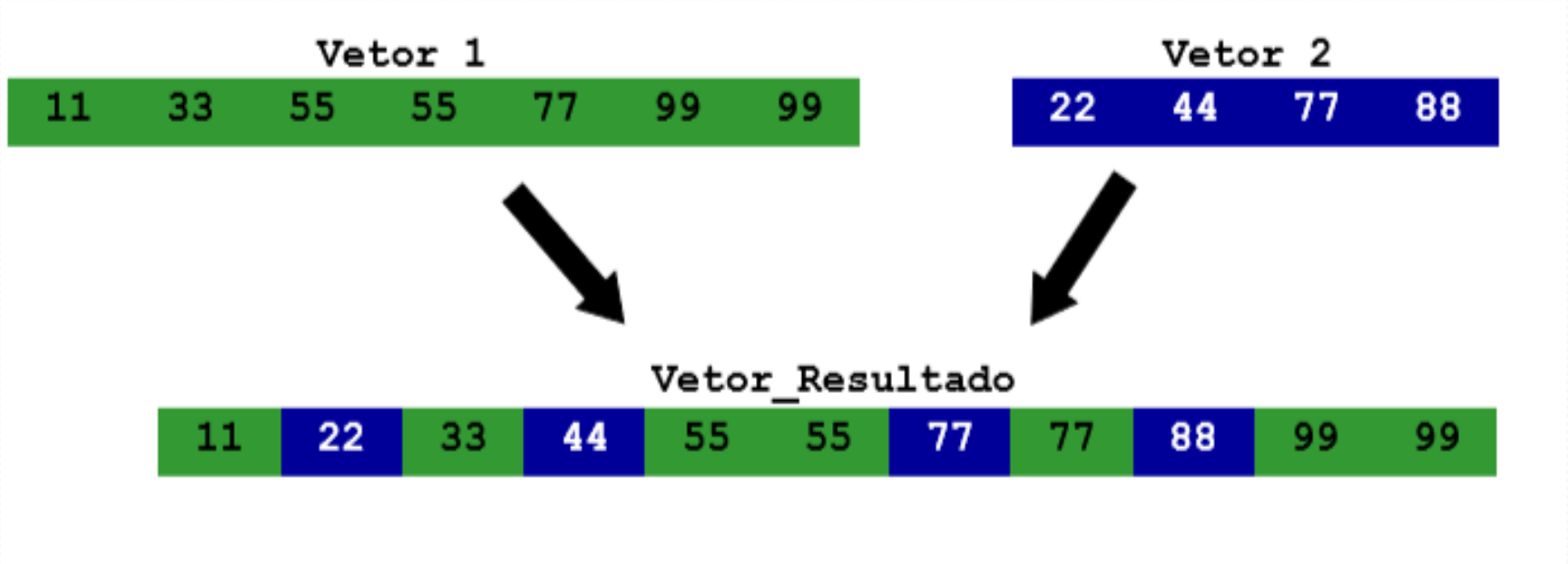
- Generalidades
  - Intercalação é o processo através do qual diversos arquivos sequenciais classificados por um mesmo critério são mesclados gerando um único arquivo sequencial.
- Algorítmo básico
  - De cada um dos arquivos a intercalar basta ter em memória um registro.
  - Consideramos cada arquivo como uma pilha. O registro atual em memória pode ser considerado o topo deste arquivo.
  - Em cada iteração do algoritmo e leitura dos registros, o topo da pilha com menor chave é gravado, e substituído pelo seu sucessor. Pilhas vazias têm topo igual ao maior valor.
  - O algoritmo termina quando todos os topos da pilha tiverem o maior valor

Intercalação

- A intercalação deve ser utilizada também quando há necessidade de unir dados de dois arquivos de dados.
- Desta forma, os dados poderiam ser acessados por meio de suas estruturas.
- Através de comandos de manipulação de arquivos, os dados entre os arquivos poderiam ser intercalados, gerando um novo arquivo de dados.

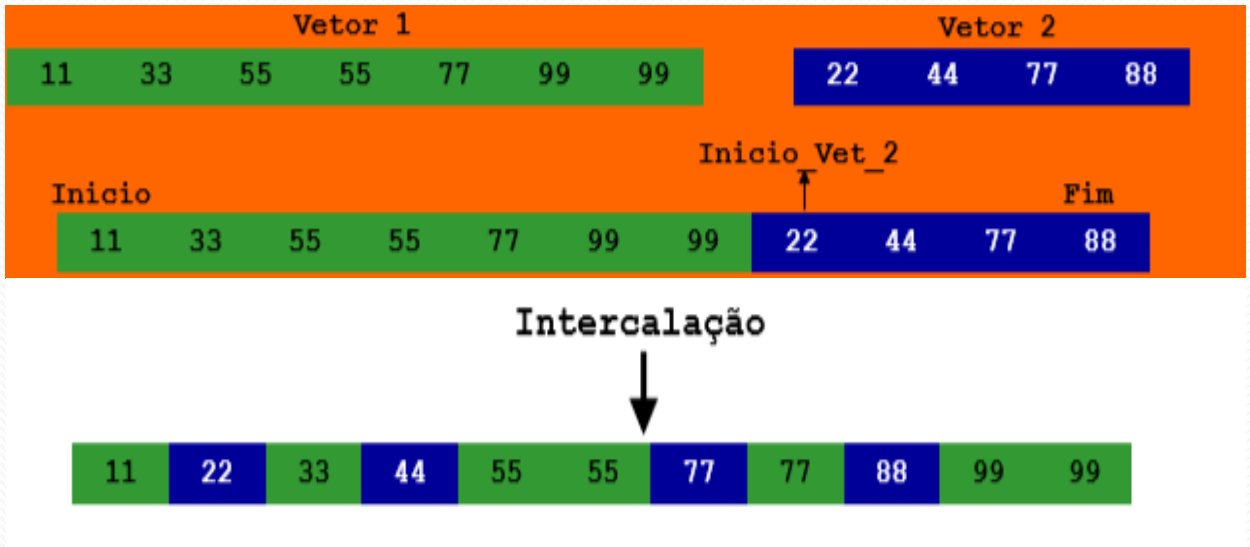
Intercalação

- A forma mais comum de intercalação é mesclar dois vetores (ordenados previamente).
- O resultado final é um vetor ordenado, com os elementos dos vetores utilizados na mesclagem.

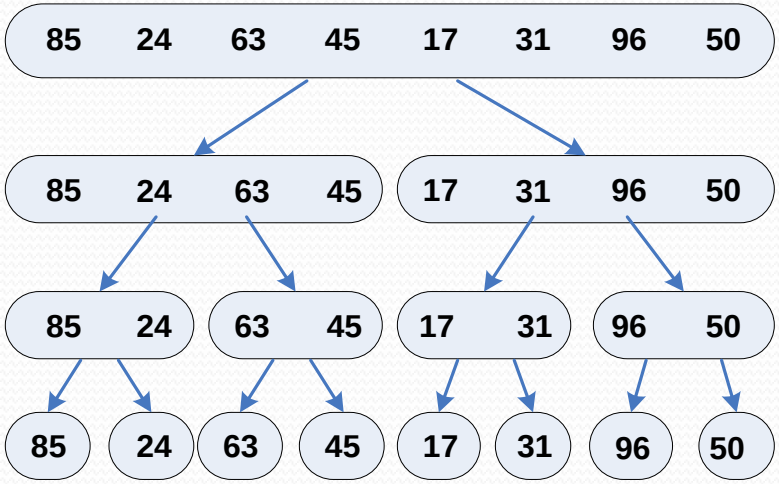


Intercalação

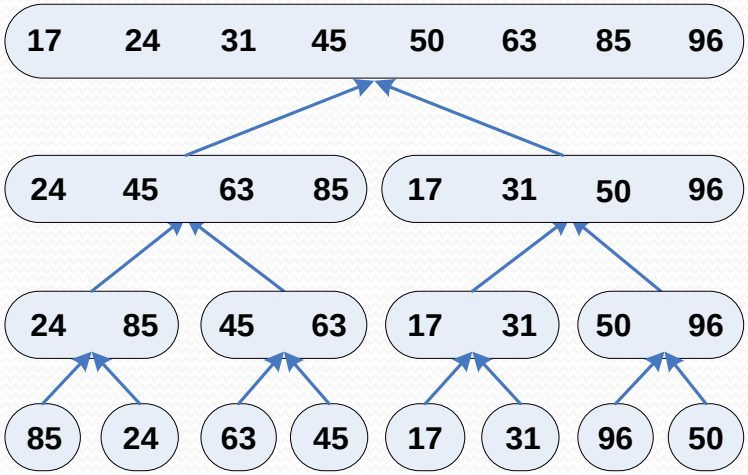
- Inicialmente, para que aconteça a intercalação (merge), os elementos dos dois vetores devem ser copiados para apenas um vetor.
- Para execução do algoritmo de intercalação, o índice de início do segundo vetor e o tamanho do novo vetor devem ser encontrados.



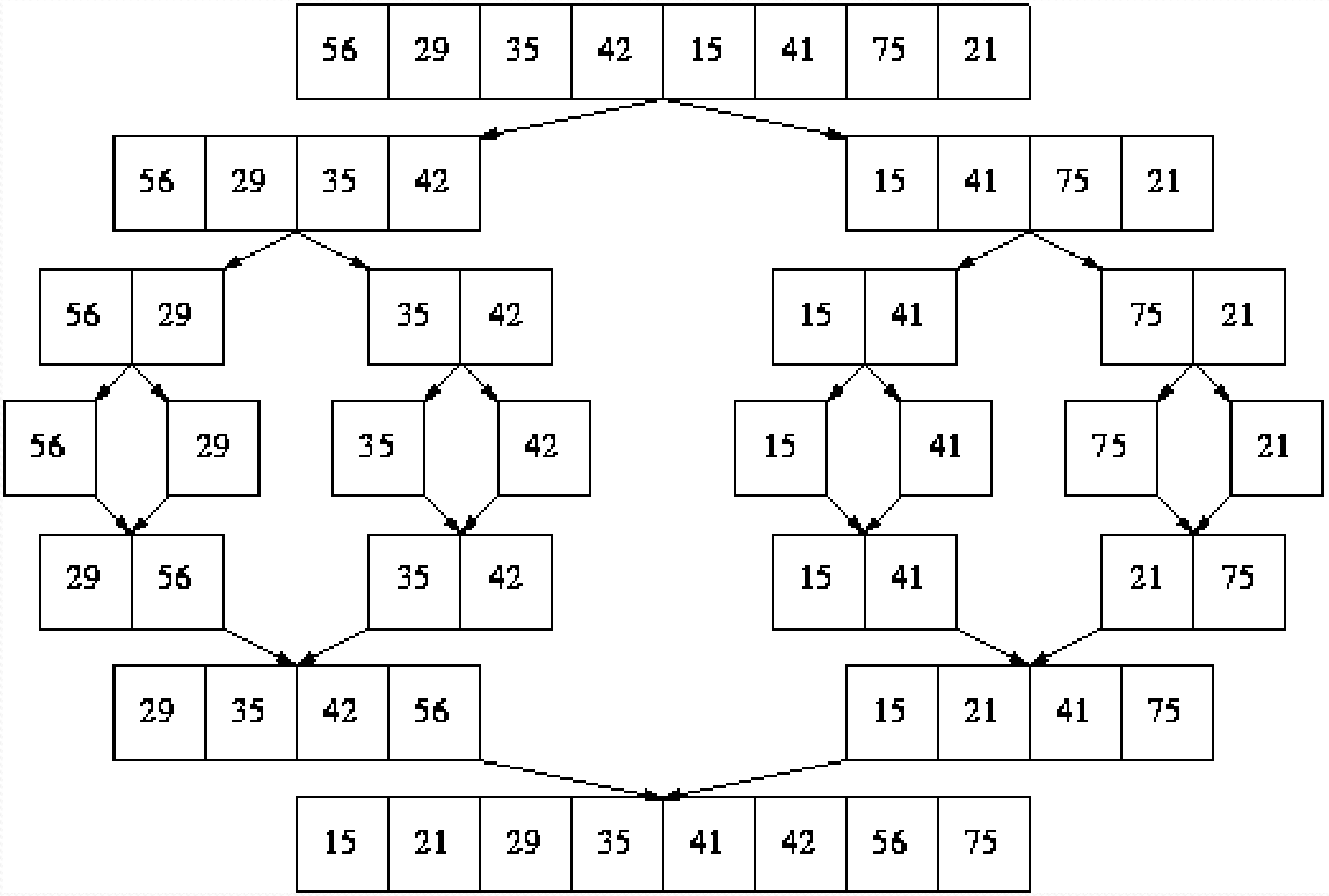
Exemplo Divisão e Conquista (MergeSort)

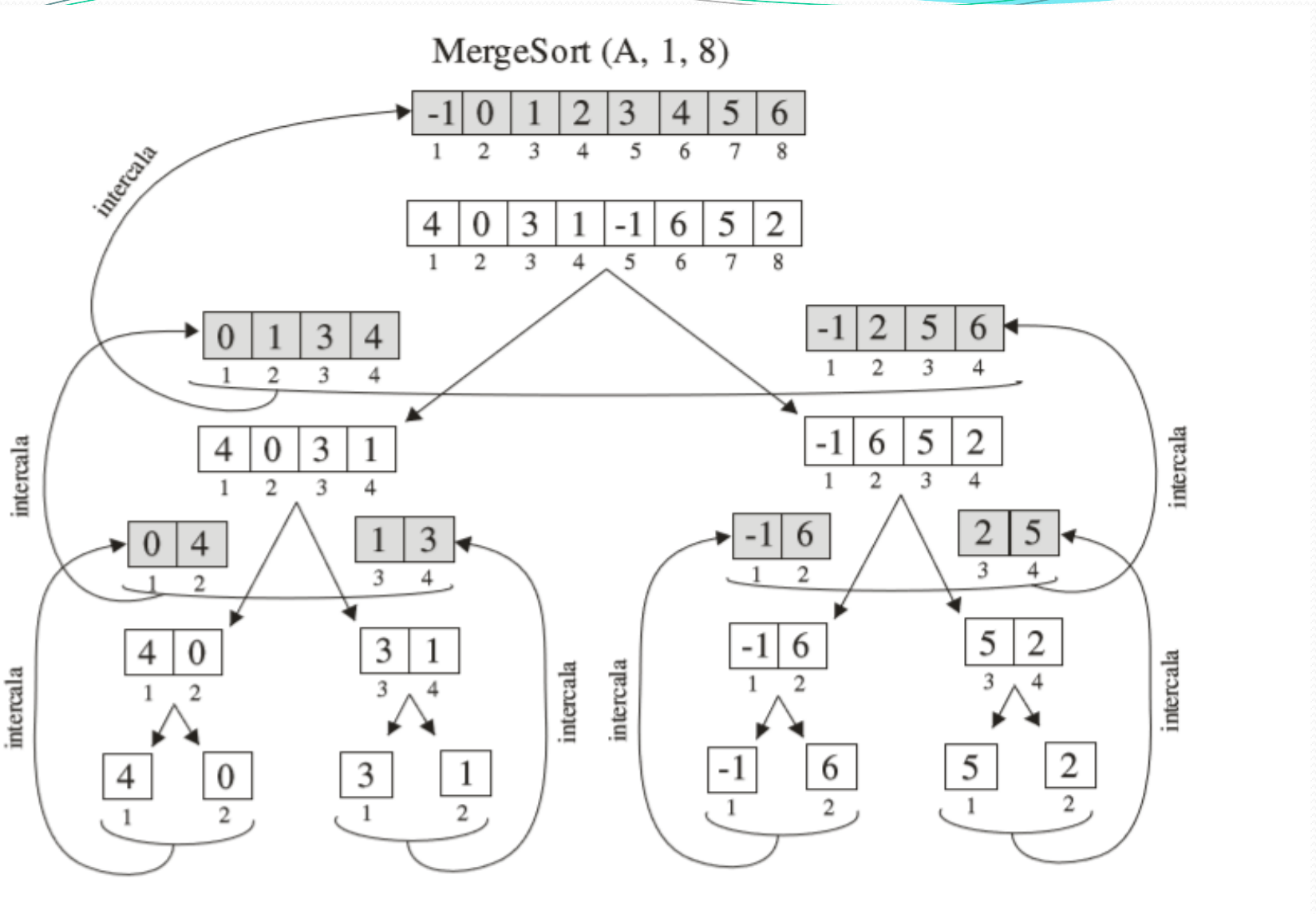


(a) Fase de Divisão



(b) Fase de Conquista


56 29 35 42 15 41 75 21
56 29 35 42
15 41 75 21
56 29
35 42
15 41
75 21
56
29
35
42
15
41
75
21
29 56
35 42
15 41
21 75
29 35 42 56
15 21 41 75
15 21 29 35 41 42 56 75


MergeSort (A, 1, 8)
-1 0 1 2 3 4 5 6
1 2 3 4 5 6 7 8
intercala
4 0 3 1 -1 6 5 2
1 2 3 4 5 6 7 8
0 1 3 4
1 2 3 4
-1 2 5 6
1 2 3 4
intercala
4 0 3 1
1 2 3 4
-1 6 5 2
1 2 3 4
intercala
0 4
1 2
1 3
3 4
-1 6
1 2
2 5
3 4
intercala
intercala
4 0
1 2
3 1
3 4
-1 6
1 2
5 2
3 4
intercala
intercala
4
1
0
2
3
1
1
2
-1
1
6
2
5
1
2
2

Intercalação para ordenação

- Algoritmo MergeSort utiliza a ideia de intercalação para ordenar registros.
- Algoritmo criado por von Neumann
- Complexidade O(NlogN) no caso médio e pior
- No pior caso é mais rápido do que o QuickSort
- Exemplo: Ordenar 10000 chaves
- Algoritmos de O(N2): 100.000.000 comparações
- MergeSort: 40.000 comparações

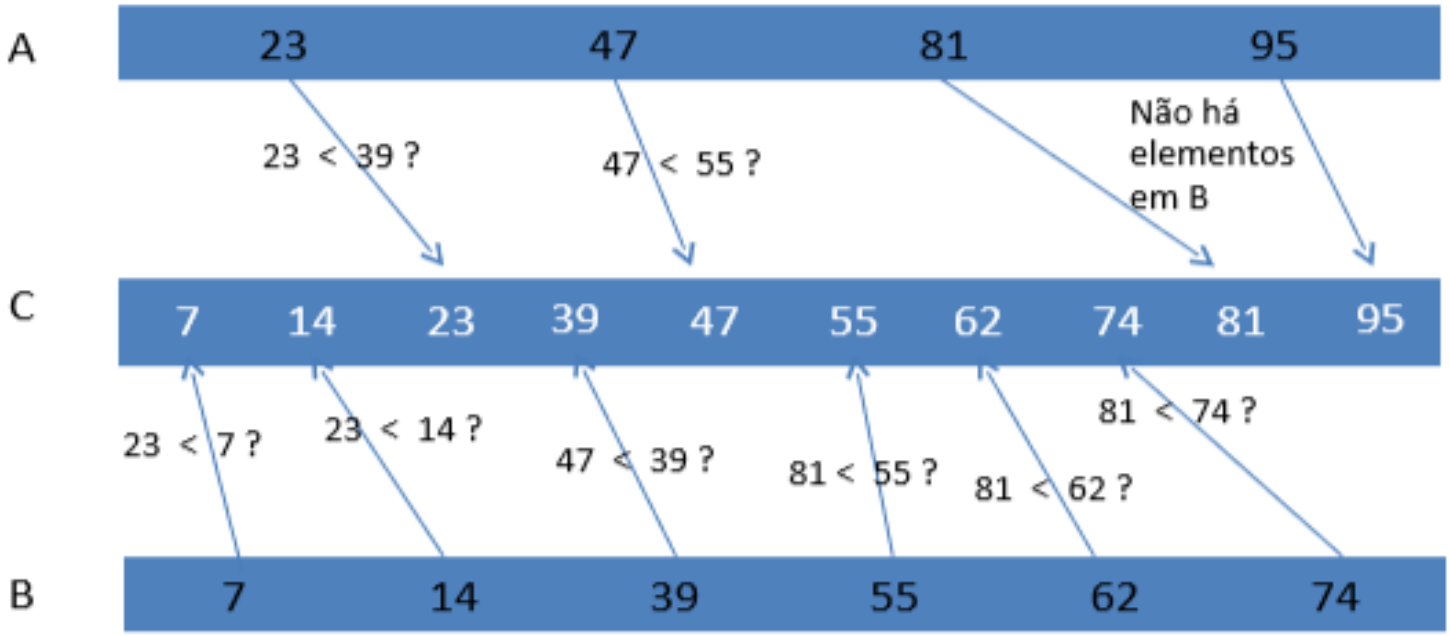
Intercalação para ordenação

- A ideia central ẹ unir dois arrays que já estejam ordenados.
- Ou seja, unir dois arrays A e B já ordenados
- Em seguida, criar um terceiro array C que contenha os elementos de A e B já ordenados na ordem correta.

Exemplo

- Considere que temos dois arrays já ordenados A e B que não precisam ser do mesmo tamanho onde A possui 4 elementos e B possui 6 elementos.
- Eles serão unidos para a criação de um array C com 10 elementos ao final do processo de união

Exemplo

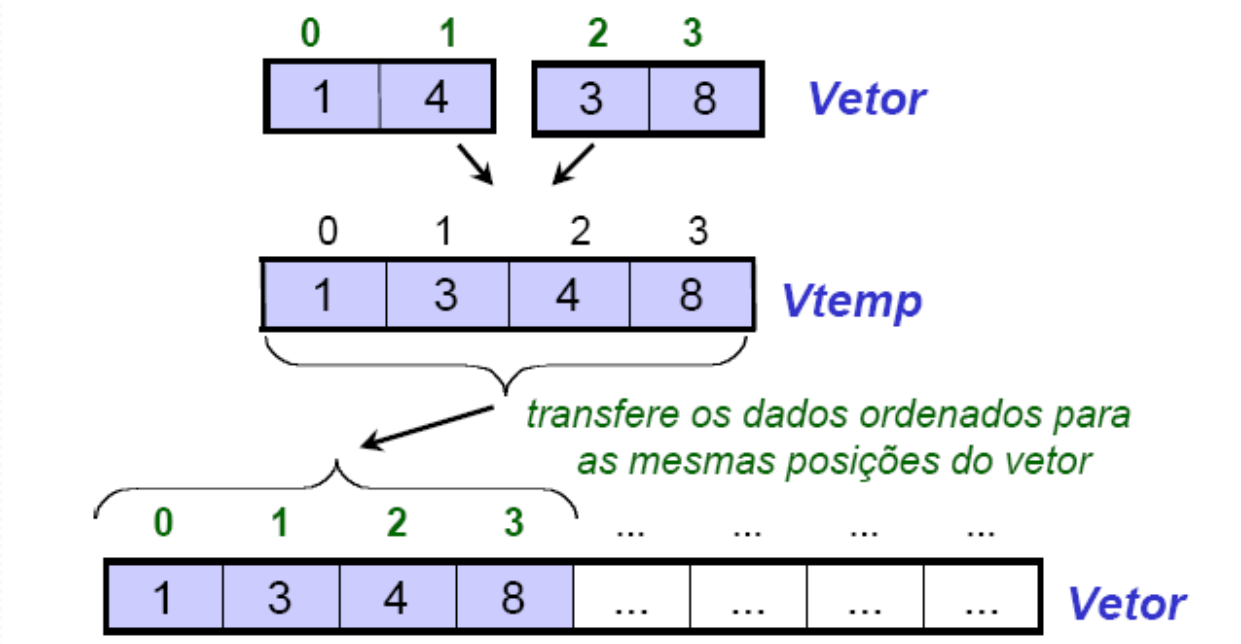

A
23
47
81
95
23 < 39 ?
47 < 55 ?
Não há elementos em B
C
7
14
23
39
47
55
62
74
81
95
23 < 7 ?
23 < 14 ?
47 < 39 ?
81 < 55 ?
81 < 62 ?
81 < 74 ?
B
7
14
39
55
62
74

Ordenação

- A ideia do método MergeSort é dividir um array ao meio, ordenar cada metade e depois unir estas duas metades novamente formando o array original, porém ordenado. Como seria feita essa divisão e ordenação para que as metades possam ser unidas?

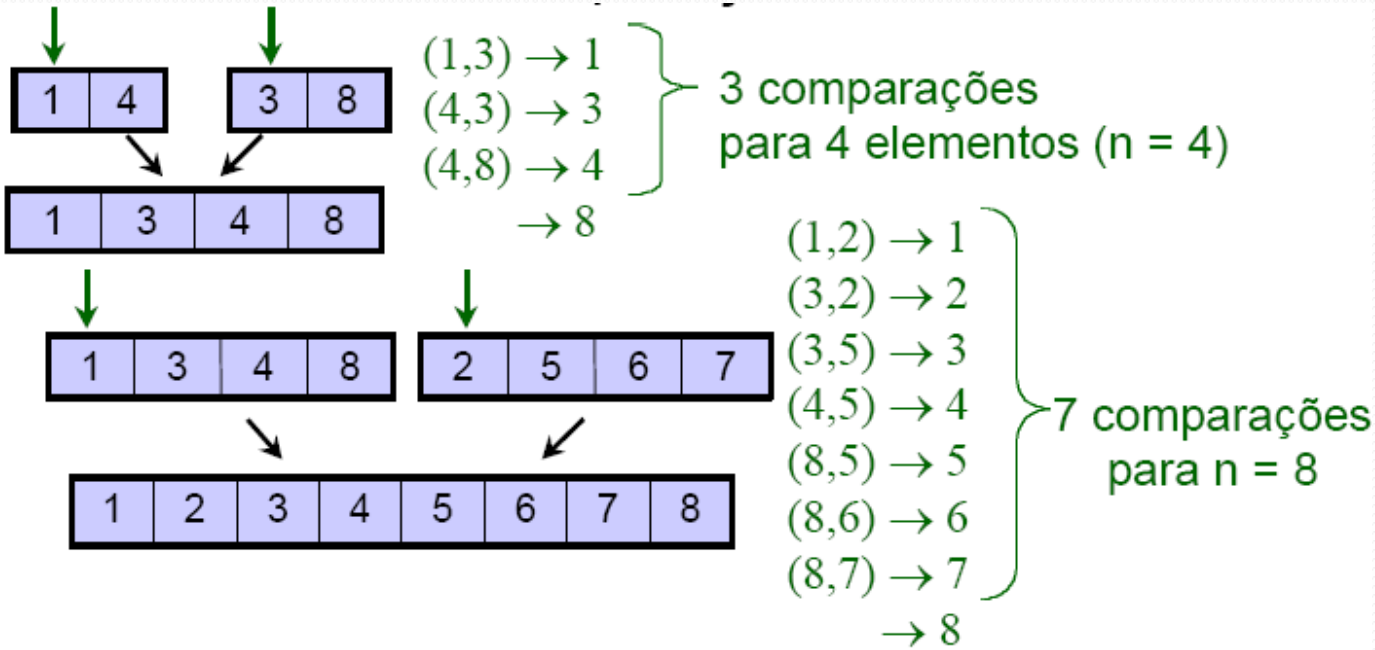
MergeSort: Junção ou Merge

- Após a ordenação, o conteúdo de *Vtemp* é transferido para o vetor.

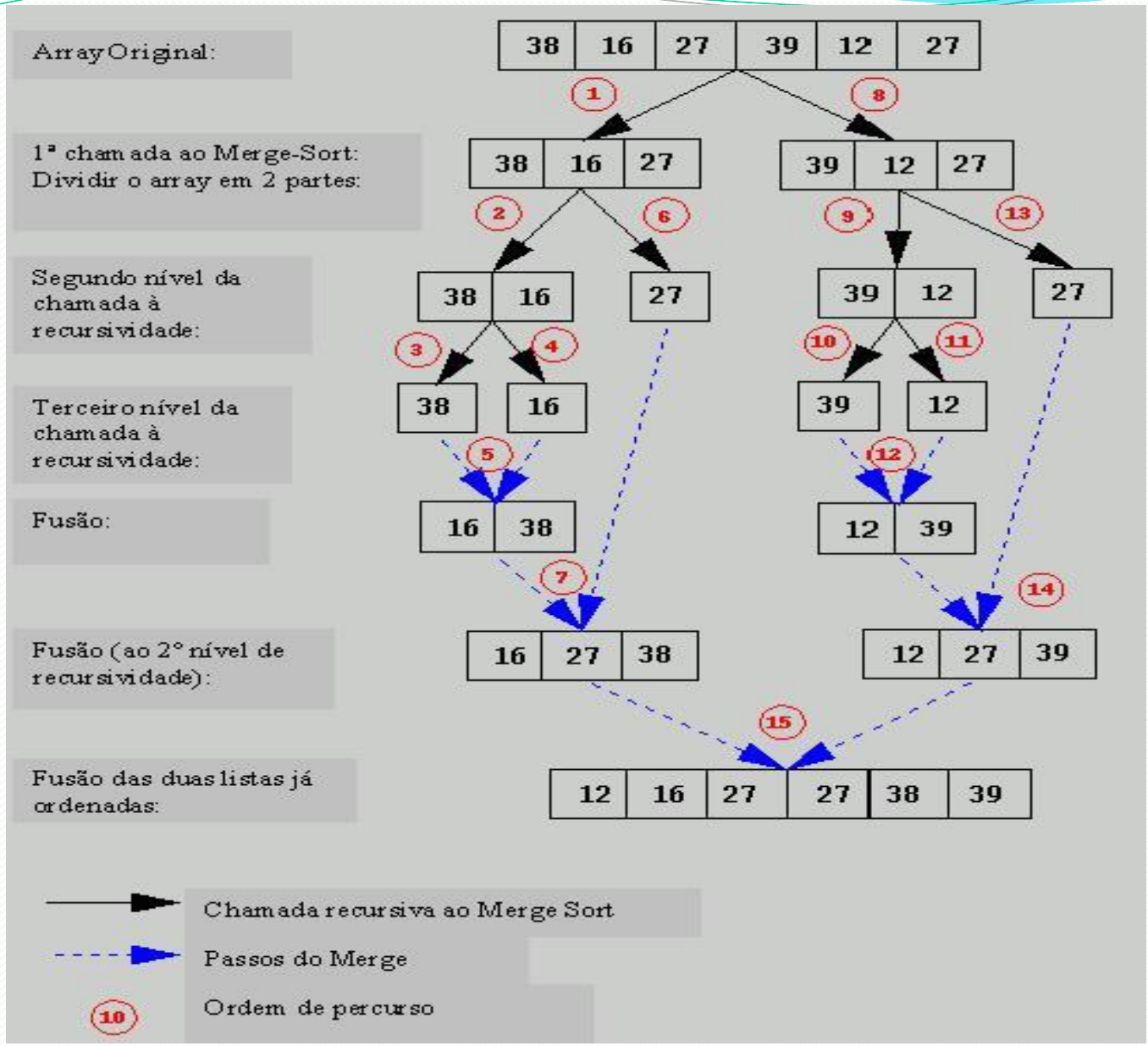


MergeSort: Junção ou Merge

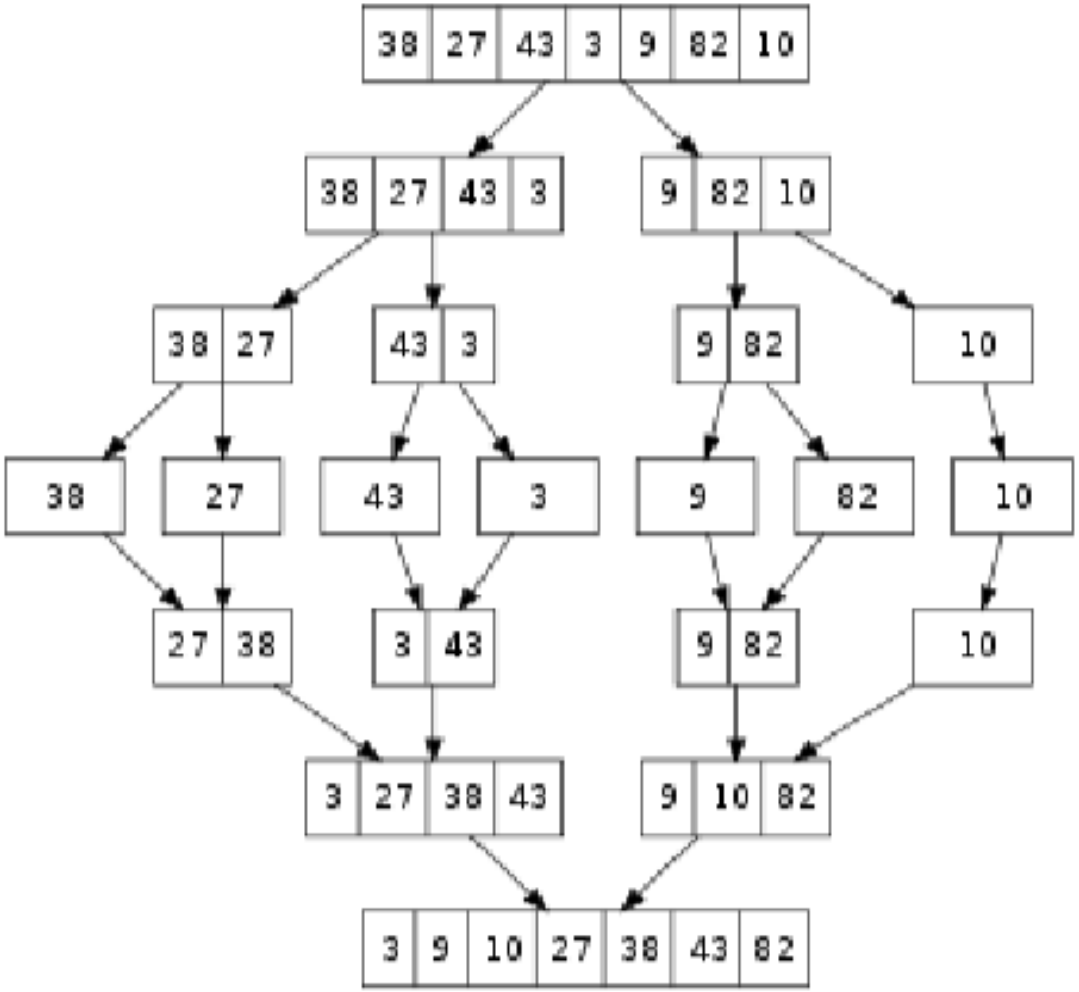
- Número de operações críticas ?



– máximo de comparações: n - 1


Array Original:
38 16 27 39 12 27
1
8
1ª chamada ao Merge-Sort:
Dividir o array em 2 partes:
38 16 27
39 12 27
2
6
9
13
Segundo nível da chamada à recursividade:
38 16
27
39 12
27
3
4
10
11
Terceiro nível da chamada à recursividade:
38
16
39
12
5
12
Fusão:
16 38
12 39
7
14
Fusão (ao 2° nível de recursividade):
16 27 38
12 27 39
15
Fusão das duas listas já ordenadas:
12 16 27 27 38 39
Chamada recursiva ao Merge Sort
Passos do Merge
10
Ordem de percurso

Ordenação


38 27 43 3 9 82 10
38 27 43 3
9 82 10
38 27
43 3
9 82
10
38
27
43
3
9
82
10
27 38
3 43
9 82
10
3 27 38 43
9 10 82
3 9 10 27 38 43 82

Implementação da Intercalação

```
void merge(int [] A, int p, int q, int r) {
    // A subseqüência A[p...q] está ordenada
    // A subseqüência A[q+1...r] está ordenada
1:  int i, j, k;
    // Faz cópias - seq1 = A[p...q] e seq2 = A[q+1...r]
2:  int tamseq1 = q - p + 1; // tamanho da subseqüência 1
3:  int tamseq2 = r - q; // tamanho da subseqüência 2
4:  int [] seq1 = new int [tamseq1];
5:  for(i=0; i < seq1.length; i++) {
      seq1[i] = A[p+i];
    }

6:  int [] seq2 = new int [tamseq2];
7:  for(j=0; j < seq2.length; j++) {
      seq2[j] = A[q+j+1];
    }
```

Implementação da Intercalação

```
    // Faz a junção das duas subseqüências

8:  k = p; i = 0; j = 0;

9:  while (i < seq1.length && j < seq2.length) {
    // Pega o menor elemento das duas seqüências

10:   if(seq2[j] <  seq1[i]) {
11:     A[k] = seq2[j];
12:     j++;
      }
      else {
13:     A[k] = seq1[i];
14:     i++;
      }
15:   k++;
    }
```

Implementação da Intercalação

```
    // Completa com a seqüência que ainda não acabou

16:  while (i < seq1.length) {
17:    A[k] = seq1[i];
18:    k++;
19:    i++;
     }

20:  while (j < seq2.length) {
21:    A[k] = seq2[j];
22:    k++;
23:    j++;
     }
     // A subseqüência A[p...r] está ordenada
}
```

Implementação da Ordenação

```
void mergeSort(int [] numeros, int ini, int fim) {

  if(ini < fim) {
    //Divisao
1:  int meio = (ini + fim)/2;

    // Conquista
2:  mergeSort(numeros, ini, meio);
3:  mergeSort(numeros, meio+1, fim);

    // Combinação
4:  merge(numeros, ini, meio, fim);
  }
  // Solução trivial: ordenacao de um único número.
}
```

Exemplo

Considere o vetor abaixo:

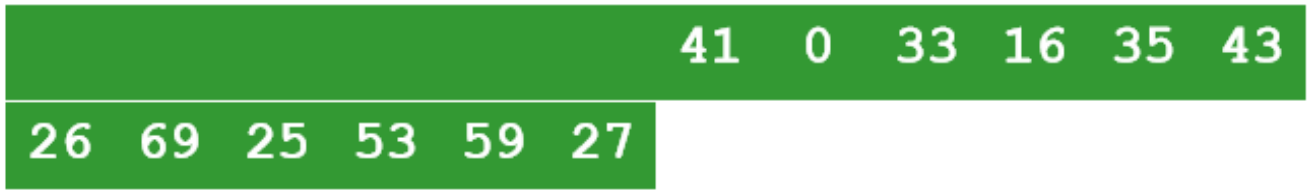
26	69	25	53	59	27	41	0	33	16	35	43

```
mergesort(inteiro *vetor,inteiro inicio,inteiro fim)
{
     inteiro meio;

     Se (inicio < fim) {

          meio = (inicio + fim) / 2;
          mergesort(vetor, inicio, meio);
          mergesort(vetor, meio+1, fim);
          intercala(vetor, inicio, meio, fim);
     }
}
```

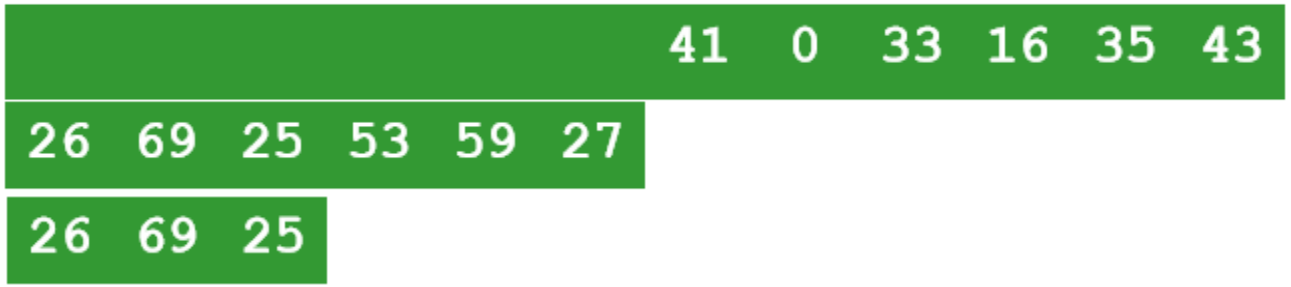
- Execução:




```
...
Se (inicio < fim) {

        meio = (inicio + fim) / 2;
        mergesort(vetor, inicio, meio);
        mergesort(vetor, meio+1, fim);
        intercala(vetor, inicio, meio, fim);
    }
...
```

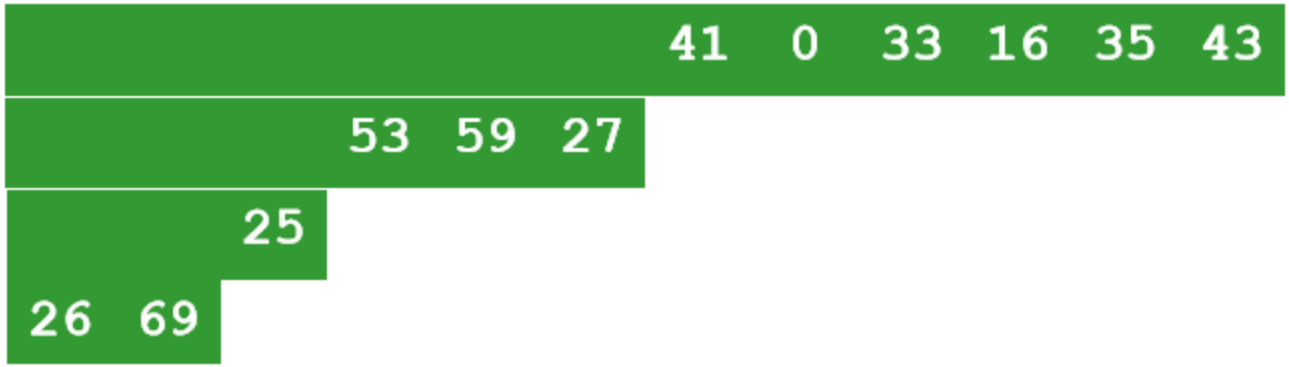
- Execução:




```
...
Se (inicio < fim) {

        meio = (inicio + fim) / 2;
        mergesort(vetor, inicio, meio);
        mergesort(vetor, meio+1, fim);
        intercala(vetor, inicio, meio, fim);
    }
...
```

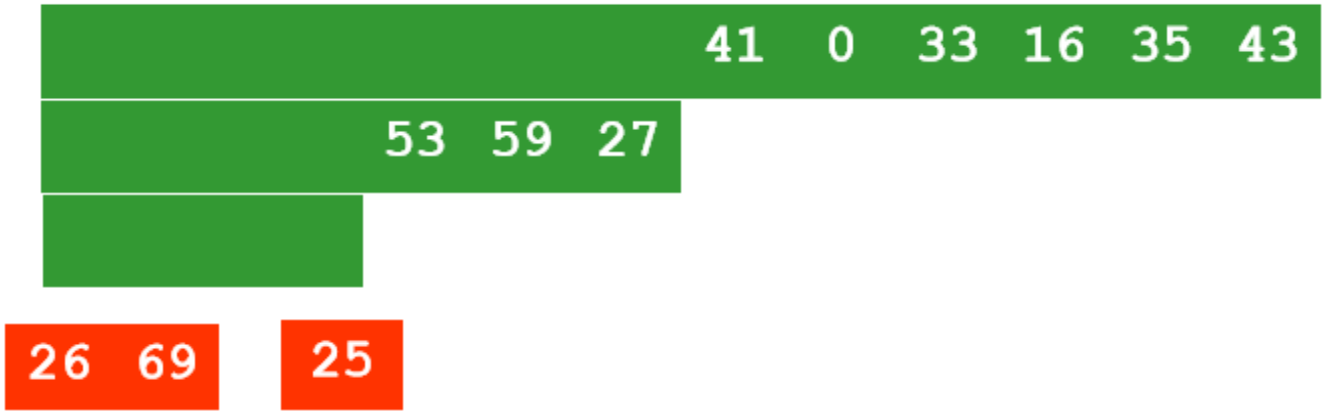
- Execução:




```
...
Se (inicio < fim) {

        meio = (inicio + fim) / 2;
        mergesort(vetor, inicio, meio);
        mergesort(vetor, meio+1, fim);
        intercala(vetor, inicio, meio, fim);
    }
...
```

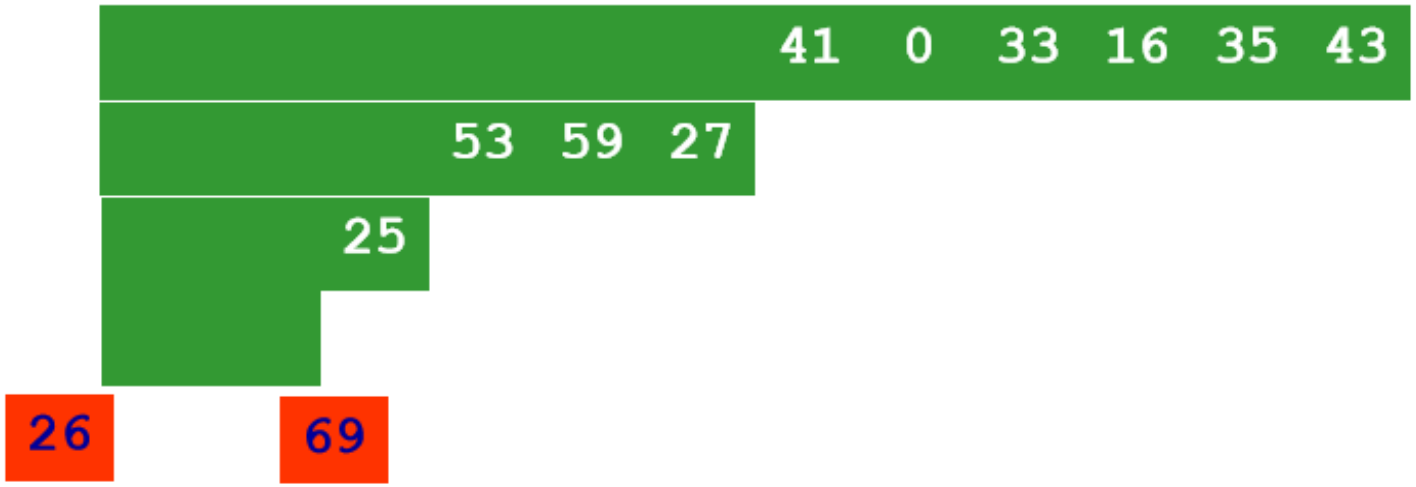
- Execução:




```
...
Se (inicio < fim) {

        meio = (inicio + fim) / 2;
        mergesort(vetor, inicio, meio);
        mergesort(vetor, meio+1, fim);
        intercala(vetor, inicio, meio, fim);
    }
...
```

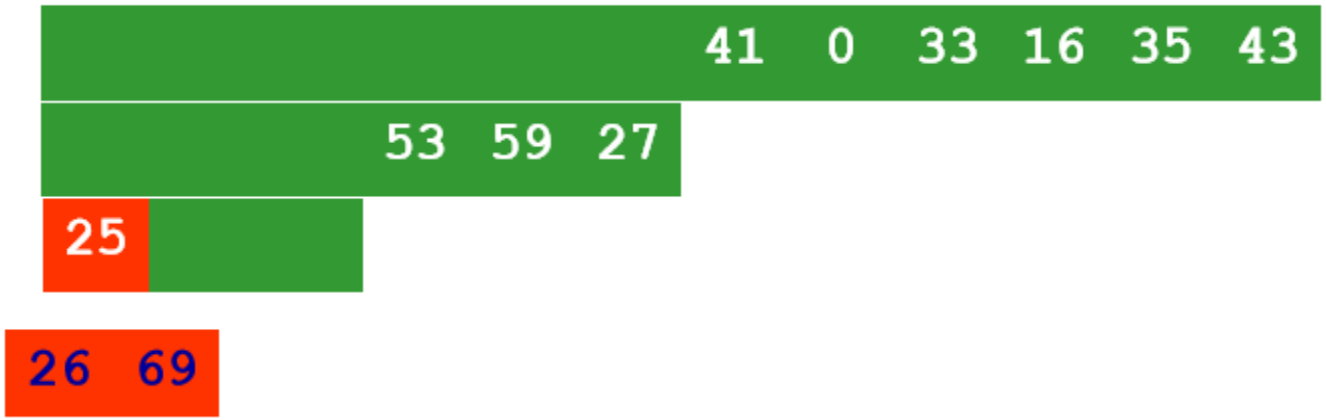
- Execução:




```
...
Se (inicio < fim) {

        meio = (inicio + fim) / 2;
        mergesort(vetor, inicio, meio);
        mergesort(vetor, meio+1, fim);
        intercala(vetor, inicio, meio, fim);
    }
...
```

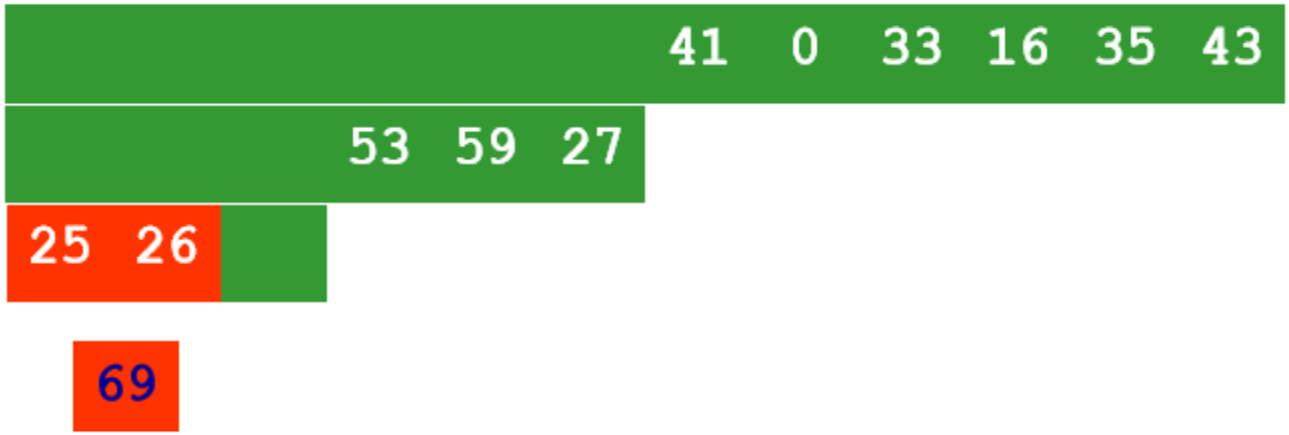
- Execução:




```
...
Se (inicio < fim) {

        meio = (inicio + fim) / 2;
        mergesort(vetor, inicio, meio);
        mergesort(vetor, meio+1, fim);
        intercala(vetor, inicio, meio, fim);
    }
...
```

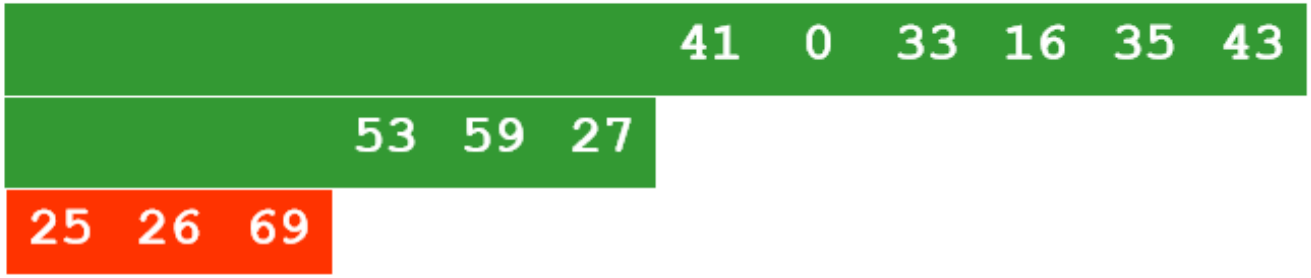
- Execução:




```
...
Se (inicio < fim) {

        meio = (inicio + fim) / 2;
        mergesort(vetor, inicio, meio);
        mergesort(vetor, meio+1, fim);
        intercala(vetor, inicio, meio, fim);
    }
...
```

- Execução:




```
...
Se (inicio < fim) {

        meio = (inicio + fim) / 2;
        mergesort(vetor, inicio, meio);
        mergesort(vetor, meio+1, fim);
        intercala(vetor, inicio, meio, fim);
    }
...
```

QuickSort

- O Quick Sort usa do mesmo princípio de divisão que o Merge Sort, entretanto, **o mesmo não utiliza a intercalação**, uma vez que não subdivide a dada estrutura em muitas menores.
- Esse algoritmo simplesmente **faz uso de um dos elementos da estrutura linear** (determinada pelo programador) como parâmetro inicial, denominado pivô.

QuickSort

- Com o pivô definido, o algoritmo irá dividir a estrutura inicial em duas, a primeira, à esquerda, contendo todos os elementos de valores menores que o pivô, e, à direita, todos os elementos com valores maiores.
- Em seguida, o mesmo procedimento é realizado com o a primeira lista (valores menores<pivô<valores maiores). **O mesmo processo se repete até que todos os elementos estejam ordenados**
- **Classificação por troca**

QuickSort

- Quick-sort é um algoritmo aleatório baseado no paradigma de divisão e conquista
- Divisão: pegue um elemento x aleatório (chamado pivô) e particione S em
  - L elementos menor que x
  - E elementos igual a x
  - G elementos maiores que x
- Recursão: ordene L e G
- Conquista: junte L, E e G

Algorítmo Quick Sort

Dados: $v[0], v[1], \ldots, v[n-1]$

qsort(l, u) : // ordenar $v[l \ldots u]$

se $l \geq u$ então termina imediatamente;

// caso contrário:

$m \leftarrow$ partition(l, u) // partir usando pivo

qsort$(l, m-1)$ // ordenar $v[l \ldots m-1]$

qsort$(m+1, u)$ // ordenar $v[m+1 \ldots u]$

Particionamento

- Mecanismo principal dentro do algoritmo do QuickSort
- Para particionar um determinado conjunto de dados, separamos de um lado todos os itens cuja as chaves sejam maiores que um determinado valor, e do outro lado, colocamos todos os itens cuja as chaves sejam menores que um determinado valor
  - Exemplo: Dividir as fichas de empregados entre quem mora a menos de 15km de distância da empresa e quem mora a uma distância acima de 15km

Particionamento

- Apesar de termos dois grupos de valores, não quer dizer que os valores estejam ordenados nestes grupos.
- Porém, só o fato de estarem separados pelo pivô numa classificação de maior/menor que o pivô, já facilita o trabalho de ordenação.
- A cada passo que um novo pivô é escolhido os grupos ficam mais ordenados do que antes.

Particionamento

- O algoritmo trabalha começando com **2 "ponteiros", um em cada ponta do array**
- O "ponteiro" da esquerda **leftPtr** move-se para a direita e o "ponteiro" da direita **rightPtr** movese para a esquerda
- **LeftPtr** é inicializado com o índice zero e será incrementado e **rightPtr** é inicializado com índice do último elemento do vetor e será decrementado

Estratégias de escolha do Pivô

- Primeiro elemento
- Último elemento
- Elemento do meio
- Elemento aleatório
- Mediana de 3 (primeiro, meio e último)
- Mediana de 3 (aleatório)

Estratégias de escolha do Pivô

- Primeiro elemento.
- Pior caso: quando os elementos estão em ordem crescente ou decrescente.
  - Exemplo: | 0 | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 | 9 |
- Último elemento.
- Pior caso: quando os elementos estão em ordem crescente ou decrescente.
  - Exemplo: | 9 | 7 | 5 | 4 | 3 | 1 | 0 |
- Elemento do meio.
- Pior caso: quando os elementos formam uma espécie de triângulo.
  - Exemplo: | 1 | 2 | 3 | 4 | 3 | 2 | 1 |
- Elemento aleatório.
- Pior caso: depende da escolha dos índices (índices: 3, 0, 2, 6, 5, 1, 4).
  - Exemplo: | 3 | 8 | 4 | 0 | 9 | 7 | 5 |

Quick Sort em Listas Ligadas

- Nesse caso é interessante tratar o problema da partição como sendo a partição em 3 Listas:
- L1 contendo chaves menores que o pivô.
- L2 contendo chaves maiores que o pivô. Lv contendo chaves iguais ao pivô.
- A ordenação é realizada apenas em L1 e L2 e não em Lv . A concatenação é realizada na forma: S1, Lv , L2.

Quick Sort em Listas Ligadas

.

Desempenho

- Quicksort é considerado rápido para realizar ordenação in-place, ou seja, que utiliza apenas movimentações dentro do próprio arranjo, sem uso de memória auxiliar.
- É importante prestar atenção à implementação para evitar casos de execução quadrática. Mesmo alguns livros fornecem algoritmos que podem ser lentos em alguns casos.

Desempenho

- Se o particionamento é balanceado, o algoritmo é executado assintoticamente tão rápido quanto o MergeSort.
- Isto é, O(n log n).
- Vantagem adicional em relação ao MergeSort: é in place, isto é, não utiliza um vetor auxiliar. Note-se que basta ser balanceado, não precisa ser o particionamento mais uniforme!
- Contudo, se o particionamento não é balanceado, ele pode ser executado tão lentamente quanto o BubbleSort.

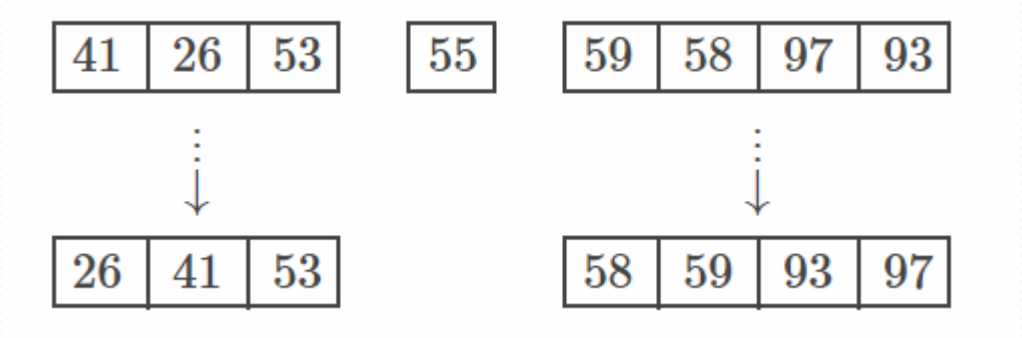
Processo de Ordenação

- Começamos com a sequência:

- Escolhemos o primeiro valor como pivô e reorganizamos os valores:

Processo de Ordenação

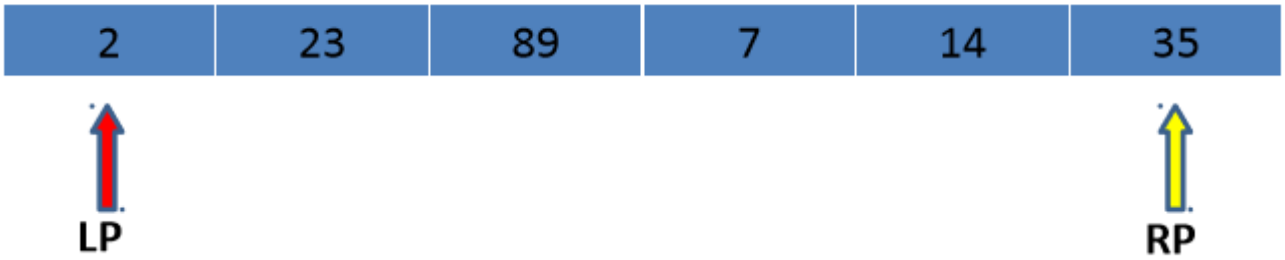
- Recursivamente ordenamos as duas subsequências repetindo este método:



- Sequência final ordenada:

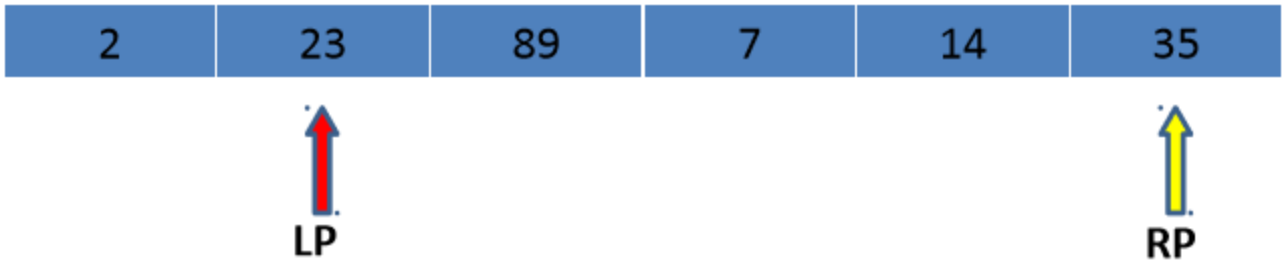
Exemplo

Particionar a seguinte lista com pivô = 15:



Exemplo

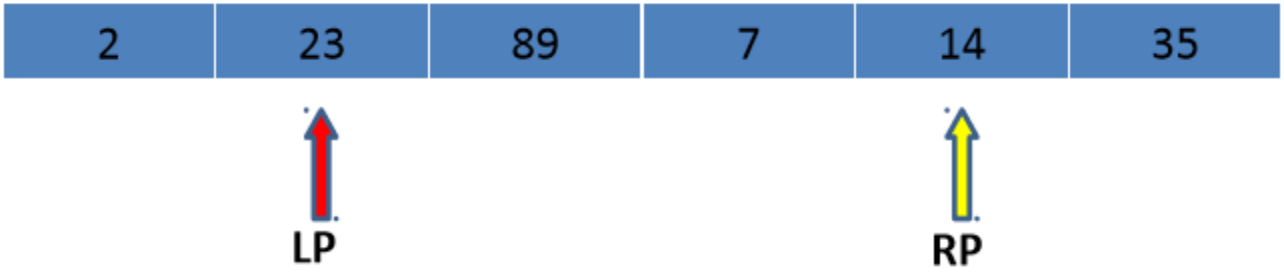
pivô = 15:



23 > 15 logo LP pára e RP começa a se mover!

Exemplo

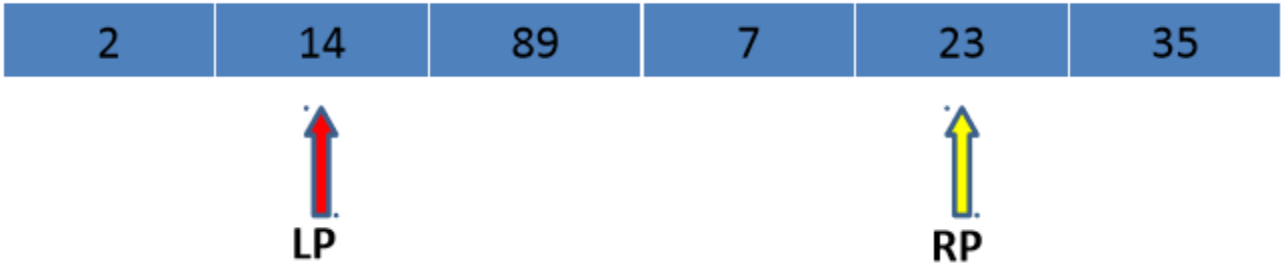
pivô = 15:



14 < 15 logo RP pára! Logo é necessário fazer a troca dos elementos: ***swap*(1,4)**

Exemplo

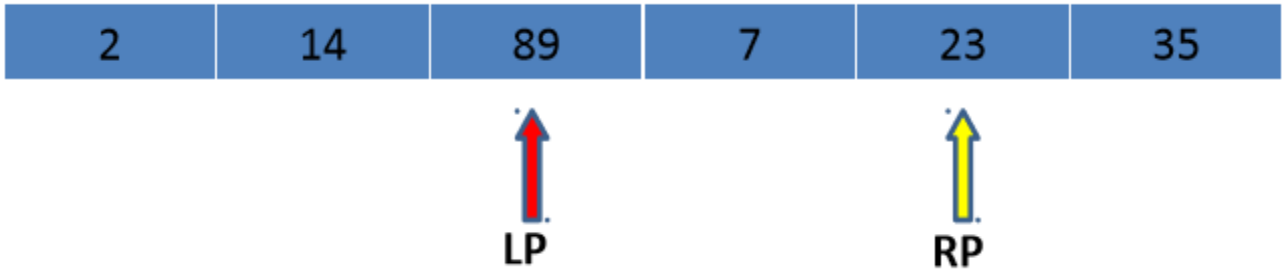
pivô = 15:



O **LP** volta a caminhar no vetor!

Exemplo

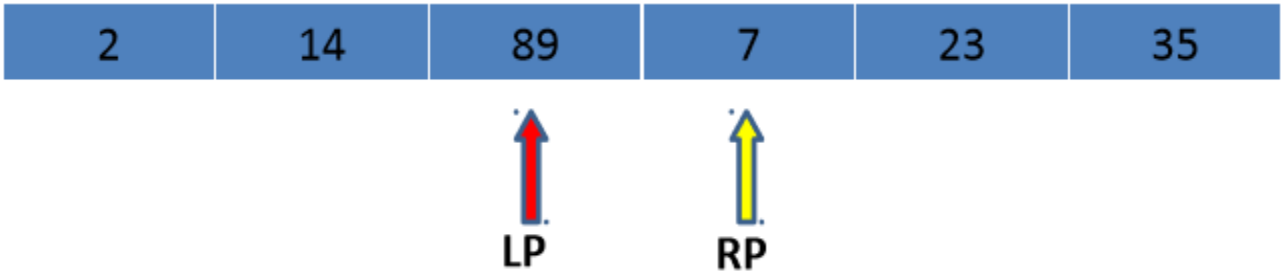
pivô = 15:



89 > 15 logo LP pára e RP volta a se mover!

Exemplo

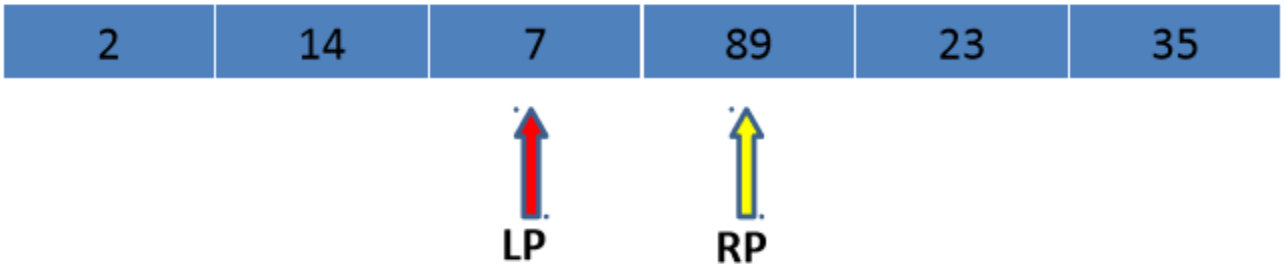
pivô = 15:



7 < 15 logo RP pára! Logo é necessário fazer a troca dos elementos: ***swap*(2,3)**

Exemplo

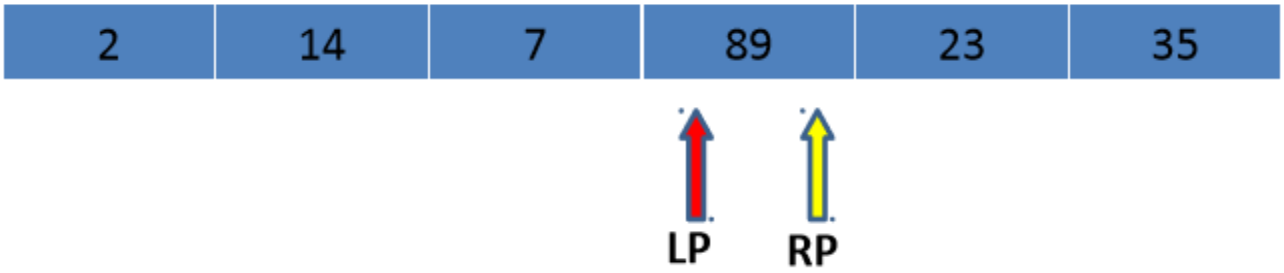
pivô = 15:



O **LP** volta a caminhar no vetor!

Exemplo

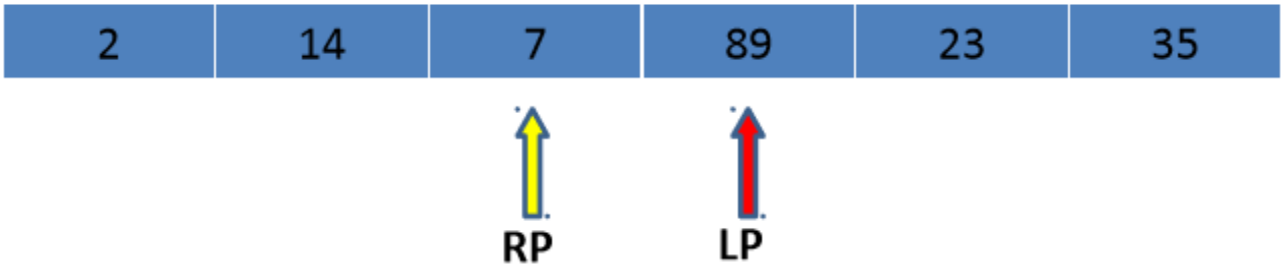
pivô = 15:



89 > 15 logo LP pára e RP volta a se mover!

Exemplo

pivô = 15:



7 < 15 logo RP pára! A condição **LP** >= **RP** é satisfeita e o particionamento termina!

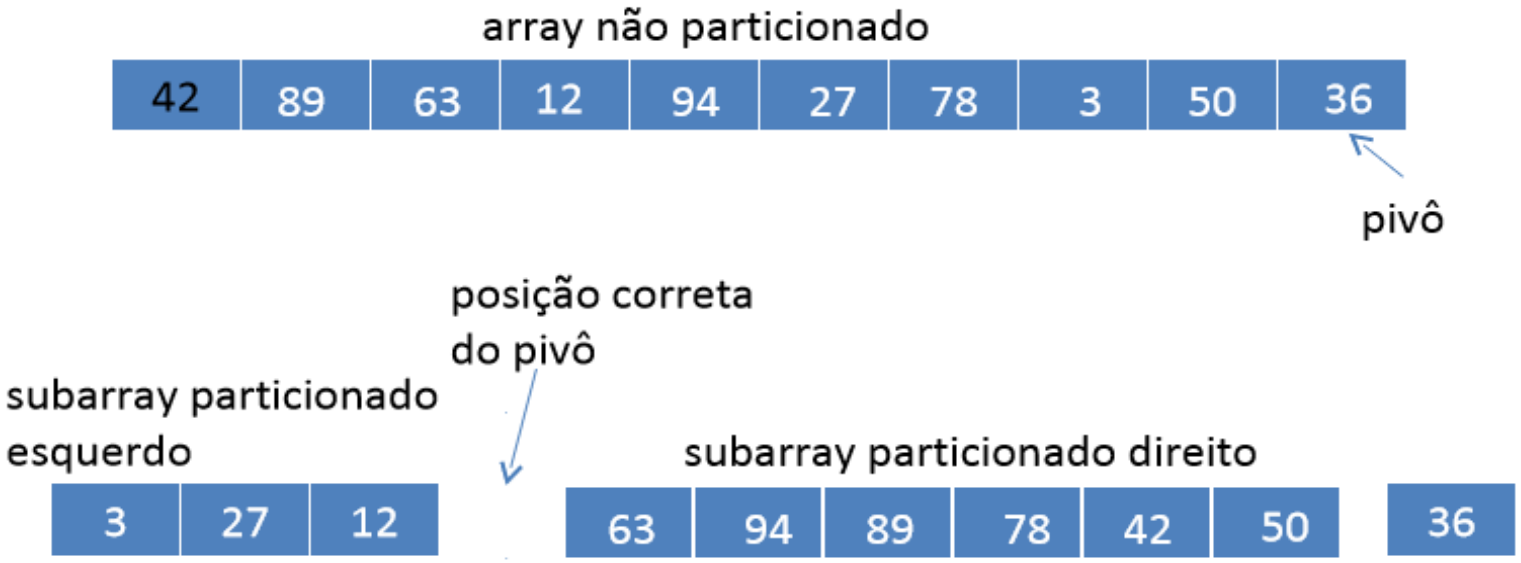
Passos básicos

- Particionamento do array ou subarray em um grupo de chaves menores (lado esquerdo) e um grupo de chaves maiores (lado direito)
- Chamada recursiva para ordenar/particionar o lado esquerdo
- Chamada recursiva para ordenar/particionar o lado direito

Pivô à direita

- O pivô deve ser algum dos valores que compõem o array O pivô pode ser escolhido aleatoriamente. Para simplificar, como pivô será usado o elemento que está na extrema direita de todo subarray que será particionado
- Após o particionamento, se o pivô é inserido no limite entre os dois subarrays particionados, ele já estará automaticamente em sua posição correta na ordenação

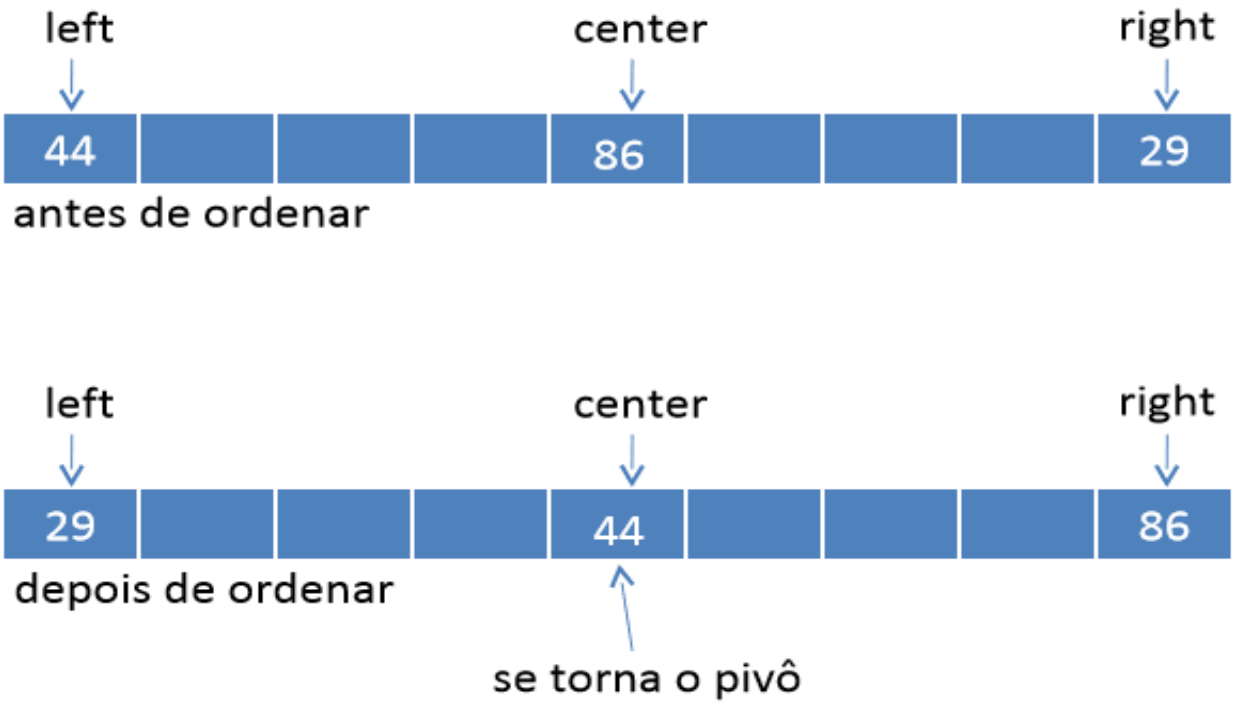
Pivô à direita



Pivô na média

- Uma solução simples e atraente é obter o valor mediano entre três elementos do array:
  - 1º elemento
  - Elemento no meio do array
  - Último elemento
- Processo chamado “média-dos-três”
  - Agilidade no processo e possui altas taxas de sucesso
  - Ganho de desempenho no algoritmo

Pivô na Média



Particionamento com Pivô à Direita

```
int particao (int[] A, int ini, int fim) {
 int i, j, temp;
 int x = A[fim]; // pivô
 i = ini;
 j = fim - 1;
 while (i <= j) {
   if(A[i] <= x) {
     i++;
   } else if (A[j] > x) {
     j--;
   } else { // trocar A[i] e A[j]
     temp = A[i];
     A[i] = A[j];
     A[j] = temp;
   } i++; j--;
 }
 A[fim] = A[i];  // reposicionar o pivô
 A[i] = x;
 return i;
}
```

Particionamento com Pivô Aleatório

```
int particaoAleatoria (int[] A, int ini, int fim) {
  int i, temp;
  double f;
  // Escolhe um número aleatório entre ini e fim
  f = java.lang.Math.random();
  // retorna um real f tal que 0 <= f < 1
  i = (int) (ini + (fim - ini) * f);
  // i é tal que ini <= i < fim
  // Troca de posicao A[i] e A[fim]
  temp = A[fim];
  A[fim] = A[i];
  A[i] = temp;
  return particao(A, ini, fim);
}
```

Implementação da Ordenação

```
void quickSortAleatorio(int[] A, int ini, int fim) {
  if (ini < fim) {
    int q = particaoAleatoria(A, ini, fim);
    quickSortAleatorio(A, ini, q - 1);
    quickSortAleatorio(A, q + 1, fim);
  }
}
```

Desempenho dos algoritmos de Ordenação

VETOR [10.000]									
Lista	Ordem Crescente			Ordem Decrescente			Ordem Aleatória		
Algoritmo	Tempo (s)	Comp.	Trocas	Tempo (s)	Comp.	Trocas	Tempo (s)	Comp.	Trocas
Bubble Sort	0,4269048	49995000	0	0,9847921	49995000	49995000	0,7649256	49995000	25084128,1
Insertion Sort	0,0003026	9999	0	0,4580984	9999	49995000	0,225615	9999	24963151
Selection Sort	0,3637704	49995000	0	0,3827789	49995000	5000	0,360824	49995000	9988
Merge Sort	0,0058387	135423	250848	0,0056613	74911	254944	0,006185	132011,1	252879
Quick Sort	0,4415975	49995000	0	1,192945	49995000	49995000	0,1867259	158055	25098217,7
Shell Sort	0,001431	75243	0	0,0019362	75243	161374	0,0034228	75243	161374

Contatos

- Email: fabio.silva321@fatec.sp.gov.br
- Linkedin: https://br.linkedin.com/in/b41a5269
- Facebook: https://www.facebook.com/fabio.silva.56211