# Teoria de Grafos

Problemas de Caminhos
(Parte 02)

Prof. Ademar Schmitz, M.Sc.
http://paginas.unisul.br/ademar



## Caminhos

- *Caminho* é qualquer seqüência de arestas onde o vértice final de uma aresta é o vértice inicial da próxima.



## Caminhos

- Como um caminho de *k* vértices é formado por *k-1* arestas $v_1v_2$, $v_2v_3$, ..., $v_{k-1}v_k$, diz-se que o valor *k-1* é o *comprimento do caminho*.
- Se o grafo for valorado, o comprimento do caminho pode ser definido pelo somatório dos valores das arestas.
- Se um grafo for dirigido, precisamos também levar em consideração a direção das arestas.



## Caminhos

- Se todos os vértices do caminho são distintos, então a seqüência recebe o nome de *caminho simples*.



## Caminhos

- Um *ciclo* é um caminho fechado, isto é, uma seqüência formada de $v_1v_2$, $v_2v_3$, ..., $v_{k-1}v_k$, $v_kv_1$ e k >= 3.
- Se o caminho fechado for simples, então o ciclo é dito *ciclo simples*.
- Um grafo que não possui ciclo é dito *acíclico*.



## Grafos Eulerianos

- Um caminho fechado, passando uma única vez em cada aresta do grafo, foi denominado *Caminho de Euler.*
- E um grafo que consiste de um caminho de Euler é um *Grafo de Euler*.

## Grafos Eulerianos

- Quando um dado grafo é de Euler?
  - Um grafo conexo G é um grafo de Euler se e somente se todos os seus vértices são de grau par.
  - Um grafo dirigido G contem um ciclo Euleriano, se e somente se os graus de entrada e saída de cada vértice forem iguais.



## Grafos Hamiltonianos

- Define-se *caminho hamiltoniano* como sendo um caminho simples que passa por todos os vértices de G.
- O comprimento do caminho hamiltoniano em um grafo conexo de n vértices é n - 1.
- Se o grafo for valorado, o comprimento do caminho hamiltoniano corresponde ao somatório dos valores das arestas.



## Grafos Hamiltonianos

- Um *Grafo Hamiltoniano* é um grafo que contém um caminho fechado, passando exatamente uma única vez em cada um dos vértices.



## Grafos Hamiltonianos

- Em um grafo completo, com n vértices, existem *(n-1)/2* ciclos hamiltonianos com arestas disjuntas se *n* for ímpar e *(n-2)/2* se *n* for par.



## Grafos Hamiltonianos
## Exemplo

- Nove membros de um clube reúnem-se todos os dias para almoçar. Eles decidiram que cada dia deveriam sentar-se ao lado de pessoas diferentes do grupo.
- Durante quantos dias novos arranjos podem ser feitos?



## Grafos Hamiltonianos

- O teorema diz apenas quantos ciclos existem e não quais são eles.
- Ainda é um problema de solução difícil.

## Grafos Hamiltonianos

- Uma condição suficiente, mas não necessária, para que um grafo simples *G* possua um ciclo hamiltoniano, é que o grau de cada vértice em *G* seja pelo menos igual a *n/2*, onde *n* é o número de vértices em *G*.



## Grafos Hamiltonianos Problema do Caixeiro Viajante

- Um caixeiro viajante deseja visitar um número de cidades a fim de vender seus produtos. Dadas as distâncias entre as cidades, em qual ordem ele as percorrerá, a fim de visitar cada cidade precisamente uma única vez, com o mínimo de quilometragem percorrida?



## Grafos Hamiltonianos Problema do Caixeiro Viajante

- Se o grafo for completo, então existirão (n-1)!/2 ciclos hamiltonianos.
- O problema pode ser resolvido da seguinte forma:
  - Enumere todos os ciclos hamiltonianos
  - Considere aquele caminho de menor custo



## Grafos Hamiltonianos Problema do Caixeiro Viajante

- 10 vértices = 9!/2 = 181.440 ciclos
- 20 vértices = 19!/2 = $6*10^{16}$ ciclos
- Quanto tempo será necessário para encontrar um solução de cada um dos ciclos necessitar de 1 segundo?



## Grafos Hamiltonianos

- Existem muitas pesquisas no sentido de solucionar o problema de encontrar o ciclo hamiltoniano de custo mínimo.
- Inclusive alguns métodos com soluções heurísticas (resolução de problemas em IA), algoritmos genéticos, etc.



## Problema do Menor Caminho

- O problema consiste em determinar a distância do menor caminho ente quaisquer dois vértices $v_i$ e $v_j$.

## Problema do Menor Caminho Algoritmo de Floyd

- Algoritmo matricial, que aceita valores negativos para as arestas, mas a possibilidade de ciclos absorventes exige precaução na avaliação dos resultados.



## Problema do Menor Caminho Algoritmo de Dijkstra

- Seja um grafo *G(V,E)* e uma função de distância *d* que associe cada aresta *(v,w)* a um número real não negativo *d(v,w)* e também um vértice fixo $v_0$ em *V*, chamado fonte.
- O problema consiste em se determinar os caminhos de $v_0$ para cada vértice *v* de *G*, de tal forma que a somatória das distâncias das arestas envolvidas em cada caminho seja mínima.



## Problema do Menor Caminho Algoritmo de Dijkstra

- Considere o dígrafo *G(V,E)*, uma fonte $v_0$ e um função de distância *d*.
- A função *d,* que associa cada aresta a um número real não negativo, é dada pela seguinte fórmula:

$$d(v_i, v_j) = \begin{cases} \infty, se\ não\ existe\ aresta\ (v_i, v_j) \\ 0, se\ v_i = v_j \\ custo, se\ v_i \neq v_j\ e\ existe\ uma\ aresta\ (v_i, v_j) \end{cases}$$



## Problema do Menor Caminho Algoritmo de Dijkstra

- Constrói-se um conjunto *S*, que contém os vértices $v_i$ cujo comprimento mínimo de $v_0$ a cada $v_i$ seja conhecido.
- A cada passo se adiciona ao conjunto *S* o vértice *w* pertencente a *V-S* tal que o comprimento do caminho $v_0$ a *w* seja menor do que o correspondente de qualquer outro vértice de *V-S*.
- Pode-se garantir que o caminho mínimo de $v_0$ a qualquer vértice *v* em *S* contém somente vértices pertencentes a *S*.



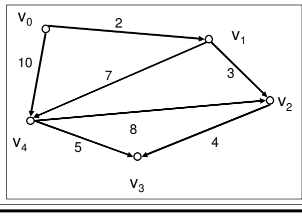
## Problema do Menor Caminho Algoritmo de Dijkstra

```
INÍCIO
  S ← {v0}
  D[v0] ← 0
  Para cada v Є V-{v0} faça
    D[v] ← d(v0,v)
  Enquanto S ≠ V faça
    Escolha o vértice w Є V-S tal que D[w] seja mínimo
    Coloque w em S
    Para cada v Є V-S faça
      D[v] ← MIN(D[v], D[w] + d(w,v))
FIM
```



## Problema do Menor Caminho Algoritmo de Dijkstra - Exemplo

- Exemplo: para o grafo a seguir, determine o menos caminho de $v_0$ para todos os vértices *v* Є *V*.



## Problema do Menor Caminho Algoritmo de Dijkstra - Exemplo

| Iteração | S | w | D[w] | D[$v_1$] | D[$v_2$] | D[$v_3$] | D[$v_4$] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Início | $v_0$ | - | - | 2 | ∞ | ∞ | 10 |
| 1 | $v_0$, $v_1$ | $v_1$ | 2 | - | 5 | ∞ | 9 |
| 2 | $v_0$, $v_1$, $v_2$ | $v_2$ | 5 | - | - | 9 | 9 |
| 3 | $v_0$, $v_1$, $v_2$, $v_3$ | $v_3$ | 9 | - | - | - | 9 |
| 4 | $v_0$, $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$ | $v_4$ | 9 | - | - | - | - |



## Problema do Menor Caminho Algoritmo de Dijkstra - Exercício

- Conforme enunciado em sala de aula.



## Problema do Menor Caminho Algoritmo A*

- O Algoritmo A* é o algoritmo de Dijkstra acrescido de um critério de busca, dado por uma função heurística.
- Será visto na disciplina de IA.