

Teoria de Grafos

Problemas de Caminhos (Parte 01)

Prof. Ademar Schmitz, M.Sc.
<http://paginas.unisul.br/ademar>

20/4/2009

1

Caminhos

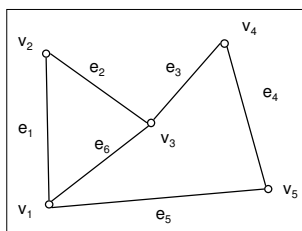
- *Caminho* é qualquer seqüência de arestas onde o vértice final de uma aresta é o vértice inicial da próxima.

Teoria de Grafos
Prof. Ademar Schmitz, M.Sc.

20/4/2009

2

Caminhos



- Exemplos:
 $\{e_1, e_6, e_3, e_4\}$
 $\{e_6, e_3, e_4\}$
 $\{e_2, e_3, e_4, e_5\}$

20/4/2009

Teoria de Grafos
Prof. Ademar Schmitz, M.Sc.

3

Caminhos

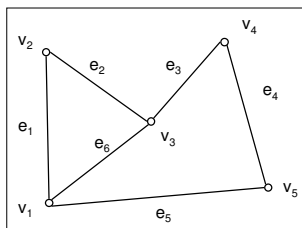
- Em um caminho, as seqüências de vértices podem também ser escritas na forma de seqüência de vértices.

Teoria de Grafos
Prof. Ademar Schmitz, M.Sc.

20/4/2009

4

Caminhos



- Exemplos:
 $\{v_2, v_1, v_3, v_4, v_5\}$
 $\{v_1, v_3, v_4, v_5\}$
 $\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_1\}$

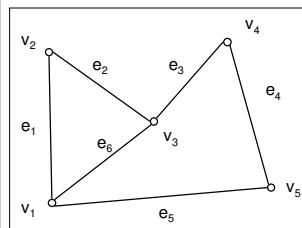
20/4/2009

Teoria de Grafos
Prof. Ademar Schmitz, M.Sc.

5

Caminhos

- Podemos definir mais algum caminho além destes dos três?



Teoria de Grafos
Prof. Ademar Schmitz, M.Sc.

20/4/2009

6

Caminhos

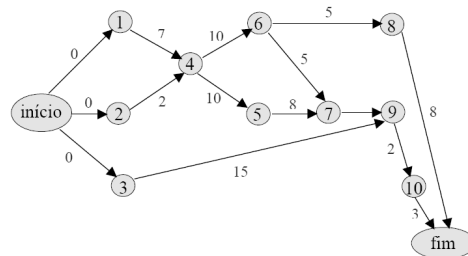
- Como um caminho de k vértices é formado por $k-1$ arestas $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{k-1}v_k$, diz-se que o valor $k-1$ é o *comprimento do caminho*.
- Se o grafo for valorado, o comprimento do caminho pode ser definido pelo somatório dos valores das arestas.
- Se um grafo for dirigido, precisamos também levar em consideração a direção das arestas.

20/4/2009

Teoria de Grafos
Prof. Ademar Schmitz, M.Sc.

7

Caminhos



20/4/2009

Teoria de Grafos
Prof. Ademar Schmitz, M.Sc.

8

Caminhos

- Se todos os vértices do caminho são distintos, então a sequência recebe o nome de *caminho simples*.

20/4/2009

Teoria de Grafos
Prof. Ademar Schmitz, M.Sc.

9

Caminhos

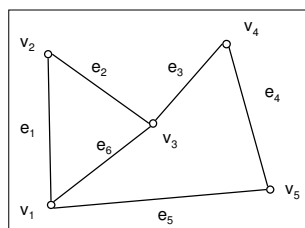
- Um *ciclo* é um caminho fechado, isto é, uma sequência formada de $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{k-1}v_k, v_kv_1$ e $k \geq 3$.
- Se o caminho fechado for simples, então o ciclo é dito *ciclo simples*.
- Um grafo que não possui ciclo é dito *acíclico*.

20/4/2009

Teoria de Grafos
Prof. Ademar Schmitz, M.Sc.

10

Caminhos



- Encontre:
 - Caminho simples
 - Ciclo simples

20/4/2009

Teoria de Grafos
Prof. Ademar Schmitz, M.Sc.

11

Grafos Eulerianos

- O problema das pontes de Königsberg, resolvido por Euler em 1746, sugere uma pergunta:
 - Quais os tipos de grafos G , onde é possível achar um caminho fechado, passando em cada aresta uma única vez?

20/4/2009

Teoria de Grafos
Prof. Ademar Schmitz, M.Sc.

12

Grafos Eulerianos

■ Antes de responder:

- Um caminho fechado, passando uma única vez em cada aresta do grafo, foi denominado *Caminho de Euler*.
- E um grafo que consiste de um caminho de Euler é um *Grafo de Euler*.

20/4/2009

Teoria de Grafos
Prof. Ademir Schmitz, M.Sc.

13

Grafos Eulerianos

■ Antes de responder:

- Um caminho é sempre conexo.
- Desde que o caminho de Euler contém todas as arestas do grafo, então o grafo de Euler é sempre conexo.
- Um grafo consistindo de um vértice isolado é também dito um grafo de Euler.

20/4/2009

Teoria de Grafos
Prof. Ademir Schmitz, M.Sc.

14

Grafos Eulerianos

■ Quando um dado grafo é de Euler?

- Um grafo conexo G é um grafo de Euler se e somente se todos os seus vértices são de grau par.
- Um grafo dirigido G contém um ciclo Euleriano, se e somente se os graus de entrada e saída de cada vértice forem iguais.

20/4/2009

Teoria de Grafos
Prof. Ademir Schmitz, M.Sc.

15

Grafo Eulerianos

■ Algoritmo de Fleury

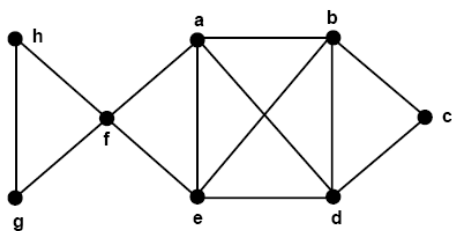
- Inicie em qualquer vértice e atravesse as arestas de uma maneira arbitrária, segundo as seguintes regras:
- R1) Apague a aresta que foi visitada e, se algum vértice ficar isolado, apague-o também.
- R2) Em cada estágio, use um istmo somente se não houver alternativa, isto é, nunca atravesse uma aresta, se naquele particular momento a remoção daquela aresta divide o grafo em dois ou mais componentes (excluindo-se os vértices isolados).

20/4/2009

Teoria de Grafos
Prof. Ademir Schmitz, M.Sc.

16

Grafo Eulerianos

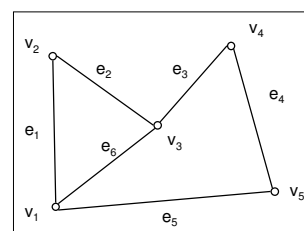


20/4/2009

Teoria de Grafos
Prof. Ademir Schmitz, M.Sc.

17

Caminhos

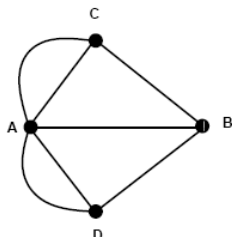


20/4/2009

Teoria de Grafos
Prof. Ademir Schmitz, M.Sc.

18

Grafos Eulerianos



20/4/2009

Teoria de Grafos
Prof. Ademir Schmitz, M.Sc.

19

Grafos Hamiltonianos

- Um *ciclo hamiltoniano* em um grafo conexo G é definido como um caminho simples fechado.
- Passa-se em cada vértice de G exatamente uma vez, exceto naturalmente no vértice inicial que é considerado também o vértice terminal.

20/4/2009

Teoria de Grafos
Prof. Ademir Schmitz, M.Sc.

20

Grafos Hamiltonianos

- Define-se *caminho hamiltoniano* como sendo um caminho simples (sem repetição de vértice).
- O comprimento do caminho hamiltoniano em um grafo conexo de n vértices é $n - 1$.
- Se o grafo for valorado, o comprimento do caminho hamiltoniano corresponde ao somatório dos valores das arestas.

20/4/2009

Teoria de Grafos
Prof. Ademir Schmitz, M.Sc.

21

Grafo Hamiltoniano

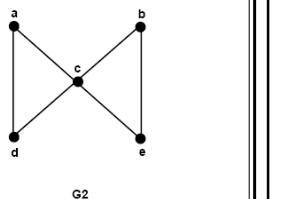
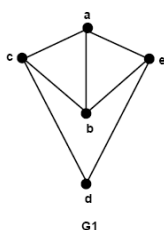
- Um *Grafo Hamiltoniano* é um grafo que contém um caminho fechado, passando exatamente uma única vez em cada um dos vértices.

20/4/2009

Teoria de Grafos
Prof. Ademir Schmitz, M.Sc.

22

Grafos Hamiltonianos



20/4/2009

Teoria de Grafos
Prof. Ademir Schmitz, M.Sc.

23

Grafos Hamiltonianos

- Nem todo grafo conexo possui um ciclo hamiltoniano.
- O grande problema é saber-se a condição necessária e suficiente para que um grafo conexo G possua um tal ciclo.
- Esta questão foi proposta pelo famoso matemático Sir William Rowan Hamilton em 1859.

20/4/2009

Teoria de Grafos
Prof. Ademir Schmitz, M.Sc.

24

Trabalho III

- Pesquisar e descrever característica/propriedades de grafos que podem sugerir a existência de um ciclo hamiltoniano, bem como o número de ciclos hamiltonianos e um grafo.