# Teoria de Grafos

Representação de Grafos

Prof. Ademar Schmitz, M.Sc.
http://paginas.unisul.br/ademar

Elaborado a partir do material de Jorge César Abrantes Figueiredo
(Teoria de Grafos, 2003-2, UFCG)



## Exercício

- Represente cada um dos grafos apresentados de forma gráfica no quadro através de cada uma das formas de representação de grafos:
  - Listas de adjacência
  - Matriz de adjacência
  - Matriz de incidência
  - Listas de arestas

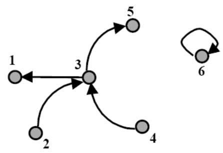


## Definição: Grafo Dirigido

- Um grafo é dito *dirigido* (ou *dígrafo*) se suas arestas possuem orientação. Caso contrário o grafo é *no dirigido*.
- Em um grafo não dirigido, uma aresta ligando dois vértices v e w pode ser representada por vw ou wv. O mesmo não acorre em um grafo orientado.



## Grafo Dirigido




- *V* = {1,2,3,4,5,6}
- *E* = {(3,1),(2,3),(4,4),(3,5),(6,6)}
- |*V*| = n = 6
- |*E*| = m = 5



## Definição: Grafo Valorado

- Também conhecidos como *grafos ponderados*.
- Um grafo é digo *valorado* quanto um número real é associado aos seus vértices e/ou às suas arestas.
- Este número é freqüentemente referido como o *peso* da ligação.



## Definição: Grafo Valorado

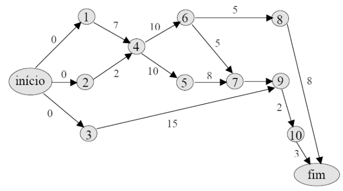
- Na prática, este número pode representar:
  - custos, distâncias, capacidades, e/ou suprimentos e demandas;
  - tempo (trânsito, permanência, etc);
  - confiabilidade de transmissão;
  - probabilidade de ocorrer falhas;
  - capacidade de carga;
  - outros.

# Grafo Valorado

- Um grafo valorado é representado por G = (*V*, *E*, w), onde:
  - *V* é o conjunto de vértices
  - *E* é o conjunto das arestas
  - *w* é o peso associado aos vértices e/ou arestas.
- Neste primeiro momento, vamos considerar pesos somente nas arestas.



# Grafo Valorado




- V = {inicio,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,fim}
- E = {(inicio,1),(inicio,2),...,(10,fim)}
- W = {0,0,...,3}



# Introdução

- A representação gráfica é necessária para a rápida compreensão e utilização na definição dos conceitos básicos da teoria de grafos.
- Entretanto, não é adequada para representar internamente (em um computador) dados sobre as estrutura de um grafo.
- É necessária uma representação que o computador posso entender.



# Introdução

- Existem várias formas de representar um grafo *G = (V, E)*.
- As mais conhecidas são:
  - Listas de adjacência
  - Matriz de adjacência
  - Matriz de incidência
  - Listas de arestas



# Introdução

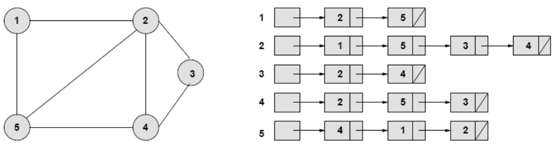
- Lista de adjacência é mais utilizada para representar *grafos esparsos (*grafos onde |E| é bem menos do que $|V|^2$.
- Matriz de adjacência é indicada no caso de *grafos densos* (grafos onde |E| é perto de $|V|^{2)}$.



# Listas de Adjacência

- A representação com *listas de adjacência* de um grafo *G = (V, E)* consiste de um vetor *Adj* de |V| listas, uma para cada vértice de *V*.
- Para cada *u Є V*, a lista de adjacência *Adj[u]* contém um ponteiro para todos os vértices *v*, onde existe um arco *(u, v) Є E*.
- Logo, *Adj[u]* consiste de todos os vértices de *G* que são adjacentes a *u*.
- Esses vértices são armazenados em ordem arbitrária.

# Listas de Adjacência



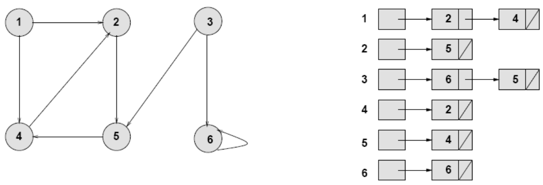


# Listas de Adjacência

- Se *G* é um grafo dirigido, a soma dos tamanhos de todas as listas de adjacência é *|E|*.
- Se *G* não for um grafo dirigido, as soma dos tamanhos de todas as listas de adjacência é *2|E|*.



# Listas de Adjacência





# Listas de Adjacência

- Em ambos os casos a representação com lista de adjacência possui uma propriedade desejável que indica que a quantidade de memória requerida é *O(max(V,E)) = O(V+E)*.
- As listas de adjacência também podem ser utilizadas no caso de grafos valorados. **Como?**
- A maior desvantagem desse método de representação é a de não possuir uma forma eficiente de dizer se uma determinada aresta *uv* está presente do grafo.



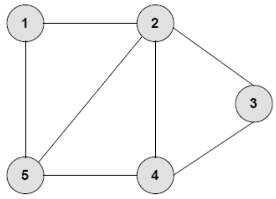
# Matriz de Adjacência

- A representação por *matriz de adjacência* de um grafo *G = (V, E)* requer que os vértices sejam arbitrariamente numerados de 1, 2, ..., |V|.
- A matriz de adjacência de um grafo é uma matriz A = ($a_{ij}$), de ordem |V| x |V|, onde:

$$a_{ij} \begin{cases} 1, se\,(i,\,j) \in E \\ 0, caso\; contrário \end{cases}$$



# Matriz de Adjacência



| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 5 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

## Matriz de Adjacência

- Um laço pode ser representado com um 1 na diagonal principal.
- Arestas paralelas podem ser representadas por um número maior que 1, isto é, pelo número de arestas paralelas.
- Para um grafo não dirigido, a matriz de adjacência é simétrica, portanto é suficiente armazenar somente a parte triangular superior.

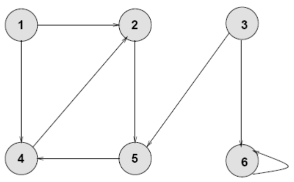


## Matriz de Adjacência

- Esse tipo de representação requer $O(V^2)$ de memória, independente do número de arestas do grafo.
- A matriz de adjacência pode ser usada para representar grafos dirigidos.



## Matriz de Adjacência




| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |



## Matriz de Adjacência

- A matriz de adjacência pode ser usada para representar grafos valorados. Em vez de 1 para indicar a presença de uma aresta, utiliza-se o peso da aresta.
- Neste caso, a matriz de adjacência é também conhecida como *matriz de custo*.

$$a_{ij} \begin{cases} custo\ da\ aresta, se\ (i, j) \in E \\ 0\ ou \propto, caso\ contrário \end{cases}$$



## Matriz de Adjacência

- A simplicidade de uma matriz de adjacência a torna preferível no caso de grafos pequeno.
- No caso de grafos não valorados, a representação com matriz de adjacência tem a vantagem de requerer uma bit por entrada.



## Matriz de Incidência

- A representação por *matriz de incidência* de um grafo G = (V, E) é uma matriz de dimensões *n x m* na qual cada linha corresponde a um vértice e cada coluna a uma aresta.

# Matriz de Incidência

- A matriz de incidência de um grafo não dirigido é uma matriz B = ($b_{ij}$), de ordem |V| x |E|, onde:

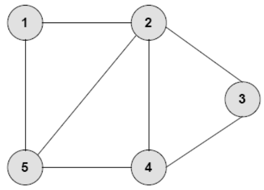
$$b_{ij}\begin{cases}1, \text{se } v_i \text{ for o vértice inicial de } e_j\\ 0, \text{caso contrário}\end{cases}$$

- Se G for um grafo orientado, então:

$$b_{ij}\begin{cases}1, \text{se } v_i \text{ for o vértice inicial de } e_j\\ -1, \text{se } v_i \text{ for o vértice final de } e_j\\ 0, \text{caso contrário}\end{cases}$$



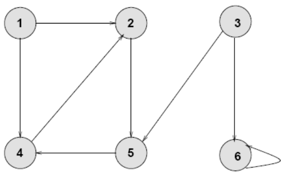
# Matriz de Incidência




- Como fica a matriz de incidência deste grafo não dirigido?



# Matriz de Incidência




- Como fica a matriz de incidência deste grafo dirigido?

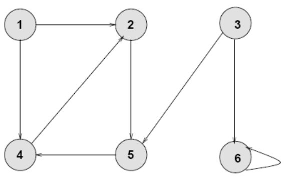


# Listas de Arestas

- A representação por listas de arestas é feita utilizando-se duas listas de vértices, onde a primeira contém os inícios das arestas, e a segunda, os respectivos términos.



# Listas de Arestas




- g = (1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 6)
- h = (2, 4, 5, 5, 6, 2, 4, 6)