Unidade2 – Vetores

No nosso dia a dia estamos acostumados a diversas situações que na maioria das vezes passam despercebidas quanto ao seu significado. Por exemplo, quando ligamos a televisão e assistimos os noticiários, o jornalista informa que a temperatura mínima na cidade para o dia seguinte será de 17º C e máxima de 32º C ou quando ouvimos sobre a pavimentação de uma rodovia de com 22 km de extensão, ou ainda, que o preço de 1 kg de frango está 30% mais barato.

Nas três situações descritas abordamos as grandezas temperatura, comprimento e massa, que na física recebem o nome de grandezas escalares.

Grandeza escalar é aquela que fica perfeitamente caracterizada por um número associado a uma unidade de medida.

Vamos agora considerar outra situação: Se eu dissesse que viajei 200 km, provavelmente alguém perguntaria, "para onde?", ou seja, para que a informação fosse adequada deveríamos acrescentar, por exemplo, que viajamos de Florianópolis a Joinville, teríamos uma *direção* norte-sul, um *sentido* de Florianópolis a Joinville, e uma *intensidade* do deslocamento de 200 km. Esta situação é definida como grandeza vetorial, pois só falando em 200 km a informação fica muito vaga.

Grandeza vetorial é aquela que fica caracterizada quando conhecemos sua direção, seu sentido e sua intensidade.

Uma grandeza, que precisa ser caracterizada por uma direção, um sentido e um número chamado módulo (ou intensidade) é chamada de vetor.

Vetor é ente matemático caracterizado por uma direção, um sentido e um módulo (ou intensidade).

Representamos vetor por um segmento orientado de reta $\overrightarrow{AB}$, ou também por uma letra minúscula, com uma flecha em cima $\vec{v} = A\vec{B} = B - A$. Na figura 4 representamos estas características.

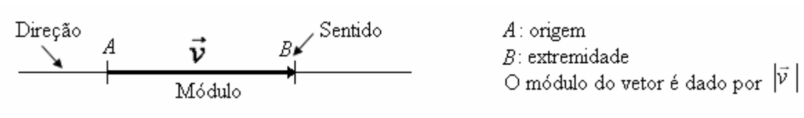


Figura 2.4: Características de um vetor

Agora vamos observar as situações representadas nas figuras 5(a) e 5(b). São segmentos orientados em diferentes posições.

Situação 1

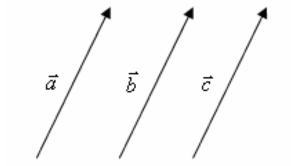


Figura 2.5(a): Segmentos orientados 1

Situação 2

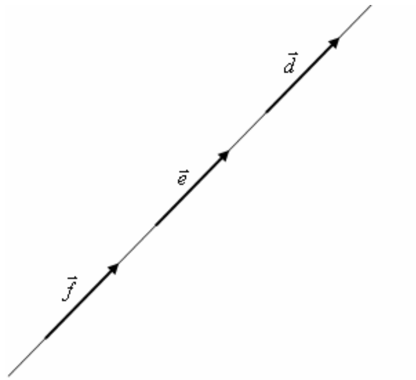


Figura 2.5(b): Segmentos orientados 2

Observe que nas duas situações, os três segmentos têm mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido, por isso, podemos dizer que estes segmentos são eqüipolentes.

Se estes segmentos representam vetores, são vetores iguais?

São sim. Vetores iguais são representados por segmentos eqüipolentes. Assim os segmentos $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ representam vetores iguais, assim como $\vec{d}, \vec{e}, \vec{f}$.

Observe agora a situação 3, na figura 2.6, onde também representamos segmentos orientados. Os segmentos orientados têm o mesmo comprimento, mesma direção e sentidos contrários, e são denominados vetores opostos.

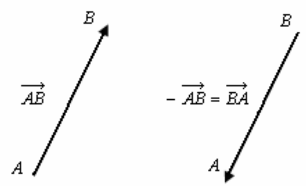


Figura 2.6: Segmentos orientados 3

Na situação 4, representada na figura 2.7, os segmentos orientados são somente paralelos, representando vetores paralelos: $\vec{a} // \vec{b} // \vec{c}$

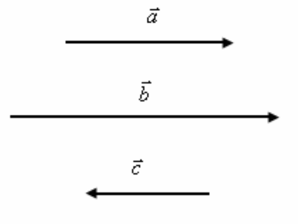


Figura 2.7: Vetores paralelos

Observação: Quando a origem de um vetor coincide com a extremidade, é denominado vetor nulo e representado por $\vec{0}$ ou $\overrightarrow{AA}$, isto é, não possui direção, sentido ou intensidade.

Um vetor bastante utilizado é o chamado vetor unitário ou versor, cujo módulo é *1*. Em geral, se $\vec{a} \neq 0$, então o vetor que tem a mesma direção e sentido de $\vec{a}$ e módulo *1* é o vetor unitário de $\vec{a}$.

Exemplo 1: Na figura 2.8, representamos um vetor unitário $\vec{v}$ de um vetor $\vec{u}$ de módulo *4*.

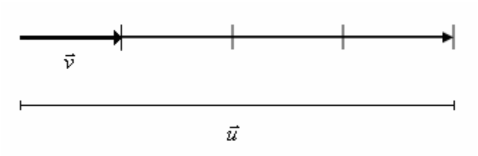


Figura 2.8: Vetor unitário $\vec{v}$

Observação: Num vetor $\vec{v}$, unitário, temos $|\vec{v}| = 1$. Na figura 8, $|\vec{u}| = 4$ e $|\vec{v}| = 1$.

Os vetores podem ser representados e utilizados no espaço bidimensional e tridimensional. Se a origem e a extremidade de diversos vetores estão situadas num mesmo plano ou não, estes são denominados coplanares ou não coplanares, como na figura 2.9(a) e 2.9(b).

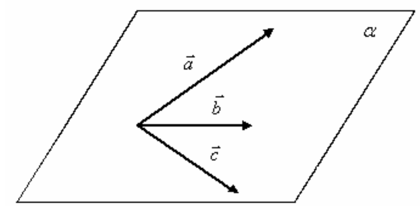


Figura 2.9(a): Vetores coplanares

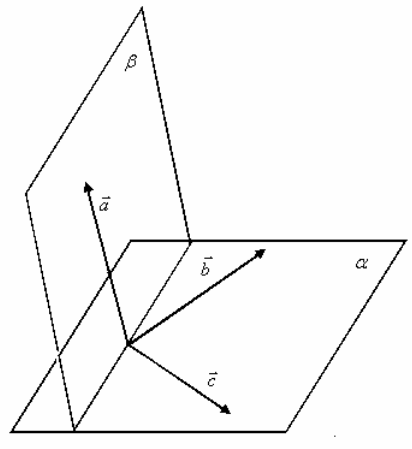


Figura 2.9(b): Vetores não coplanares

Exemplo 1

Grandezas como massa de um corpo, distância entre dois pontos e volume de um líquido, são grandezas escalares e podem ser somadas aritmeticamente, mantendo a unidade de medida:

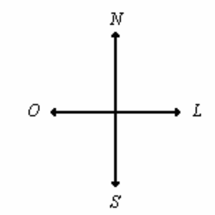
$$2\,kg + 5\,kg = 7\,kg$$
$$2000\,km + 3000\,km = 5000\,km$$
$$5\,ml + 2\,ml = 7\,ml$$

Quando lidamos com grandezas vetoriais, o cálculo aritmético vem acompanhado com a interpretação e representação gráfica, pois além do módulo, trabalhamos também com a direção e o sentido do vetor que representa a grandeza.

Exemplo 2

Vamos considerar um carro que sai da cidade *A* e percorre 40 km em linha reta para o Sul, atingindo a cidade *B*; em seguida, percorre mais 30 km, a partir da cidade *B*, para o Oeste, até chegar a cidade *C*.. Qual é a distância que separa a cidade *A* da cidade *C*?

Para resolver a questão temos que considerar as referências dadas para os deslocamentos. Na figura 2.10, representamos estes deslocamentos.



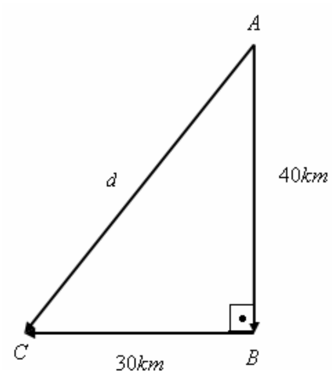


Figura 2.10: Deslocamento do carro

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo *ABC*, temos que: $d^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \Rightarrow d^2 = 40^2 + 30^2 \Rightarrow d^2 = 1600 + 900 \Rightarrow d^2 = 2500 \Rightarrow d = 50$, logo a distância da cidade *A* até a cidade *C*, é de $50km$, na direção e sentido previstos.

Observação: As grandezas vetoriais exigem a utilização de representações gráficas.

Para resolvermos problemas que envolvam adição de vetores vamos recorrer a duas regras conhecidas: a regra do polígono e a regra do paralelogramo. Vamos ver como funcionam.

Adição de Vetores

Regra do polígono

A soma de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, representados na figura 2.11 se dá transportando o vetor $\vec{u}$, mantendo sua direção, sentido e comprimento, e, a partir da extremidade desse vetor, transportamos o segundo vetor $\vec{v}$ mantendo também suas características. Ligamos a origem do primeiro vetor $\vec{u}$ com a extremidade do segundo vetor $\vec{v}$ e obtemos o vetor $\vec{s}$, que é a adição de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

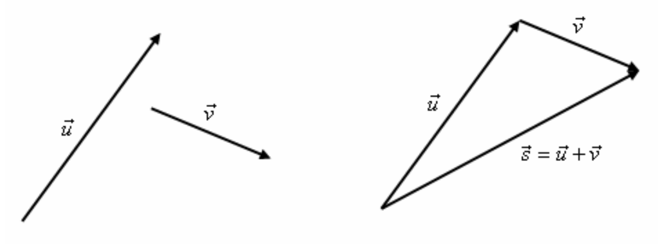


Figura 2.11: Soma dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pela regra do polígono.

Observação: Para determinar a adição de mais vetores procede-se da mesma maneira, ligando cada um deles a extremidade do anterior, mantendo o módulo, a direção e o sentido, até desenhar todos. O vetor resultante da adição se obtém ligando a origem do primeiro com a extremidade do último vetor representado.

Regra do paralelogramo

Esta regra utiliza a representação de um paralelogramo construído sobre cada dois vetores a serem somados. Na soma de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ transportamos os dois vetores, fazendo que suas origens coincidam e, pela extremidade de cada um dos vetores, traça-se uma reta paralela ao outro, construindo um paralelogramo a partir de suas extremidades. A soma $\vec{s}$ de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o vetor que corresponde a diagonal desse paralelogramo.

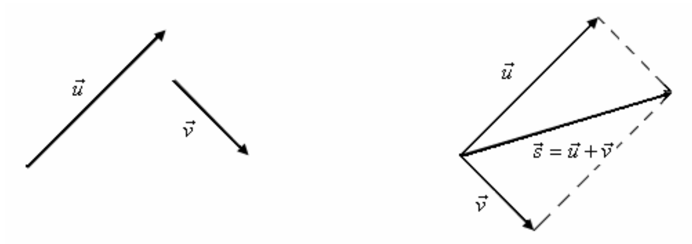


Figura 2.12: Soma dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pela regra do paralelogramo.

Observação: A diferença de vetores é definida através da operação soma, do primeiro vetor com o oposto do segundo vetor. Se $\vec{d}$ é o vetor diferença entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ temos a operação $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} \Rightarrow \vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b})$, conforme representamos na figura 2.13.

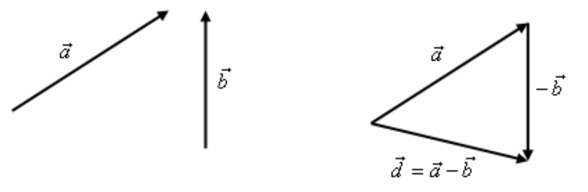


Figura 2.13: Subtração de vetores

Logo, para subtrairmos um vetor de outro, vamos somar o oposto desse vetor ao outro.

Propriedades da Adição de Vetores

A adição de vetores apresenta algumas propriedades peculiares à adição de escalares.
Sejam dados $\vec{a}, \vec{b},$ e $\vec{c}$ vetores quaisquer, então:

a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (comutativa)
b) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (associativa)
c) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ (elemento neutro)
d) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ (elemento simétrico)

Produto de um número real por um vetor

É possível multiplicar um vetor por um número real. O produto de um número real ou escalar diferente de zero por um vetor mantém a mesma direção do vetor original, enquanto que a direção e o módulo dependem do número real. O novo vetor diminui, aumenta de tamanho e até pode mudar o sentido se o número tiver sinal negativo, preservando a mesma direção.

Exemplo 1

Seja $\vec{a}$ o vetor dado, podemos multiplicar este por números reais conforme representado na figura 2.14.

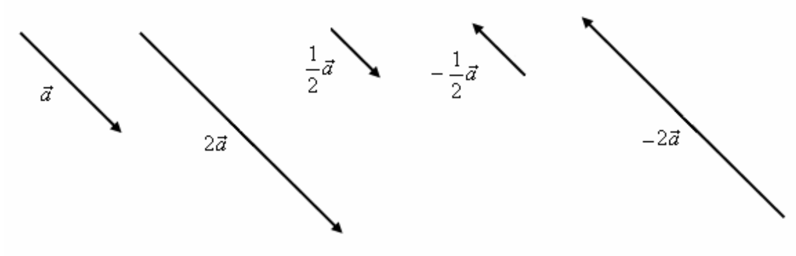


Figura 2.14: Produto de um vetor por um número real

A multiplicação de vetores também tem suas propriedades. Seja $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores quaisquer e c e d números reais temos:
a) $c(\vec{a} + \vec{b}) = c\vec{a} + c\vec{b}$ (distributiva)
b) $(c + d)\vec{a} = c\vec{a} + d\vec{a}$ (distributiva)
c) $(cd)\vec{a} = c(d\vec{a})$ (associativa)
d) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ (elemento neutro)

Vetores como combinação linear dos vetores da base ortogonal i, j e k;

Até agora tratamos os vetores exclusivamente do ponto de vista geométrico, como segmento de reta orientado. Os vetores também podem ser associados com os sistemas de coordenadas do plano (R^2) e do espaço (R^3).

a) Vetores no plano (R^2)

Para representar vetores no plano, podemos utilizar como base os vetores cujas origens são a origem do plano cartesiano xy e extremidades os pontos $(1,0)$ e $(0,1)$, conhecidos respectivamente como vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$, as vezes simplesmente representados por ***i*** e ***j***, conforme a figura 2.15.

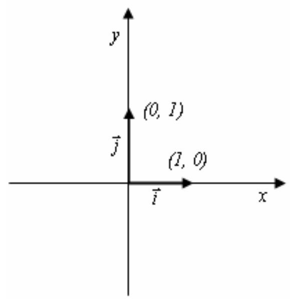


Figura 2.15: Vetores da base ortogonal $\vec{i}$ e $\vec{j}$

Observação: A base formada pelos vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$ é chamada de base canônica que é particularmente importante por estar associada à representação cartesiana usual da geometria plana. Os vetores e os pares ordenados compartilham os mesmos pontos do plano cartesiano.

Conhecidos os vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$, de módulo 1, qualquer vetor $\vec{v}$ do plano cartesiano pode ser decomposto segundo as direções de $\vec{i}$ e $\vec{j}$, ou seja, temos que determinar dois vetores cujas direções sejam $\vec{i}$ e $\vec{j}$, e cuja soma seja $\vec{v}$. Considerando a multiplicação de um vetor por um escalar (número real), podemos indicar o vetor $\vec{v}$ como a soma dos vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$ multiplicados pelos escalares *a* e *b* convenientes.

Temos então, o vetor $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$, que pode ser representado no plano usando as projeções ortogonais das extremidades de $\vec{v}$ sobre os eixos coordenados *x* e *y*, determinando ali os componentes escalares *a* e *b*, da representação vetorial. A figura 2.16 ilustra essa decomposição.

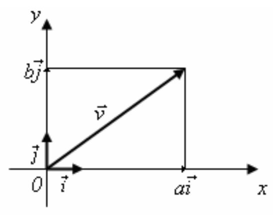


Figura 2.16: Componentes de um vetor $\vec{v}$ no plano

Assim, qualquer vetor no plano *xy* pode ser expresso em função da base padrão $\vec{i}$ e $\vec{j}$.
Um vetor bidimensional $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$ pode ser representado genericamente por um par ordenado:

$$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} \text{ pode ser representado por } \vec{v} = (a,b) \text{ ou } \vec{v} = \langle a,b \rangle$$

Exemplo 2

Vejamos a representação genérica de vetores com base ortogonal $\vec{i}$ e $\vec{j}$ para os vetores:

a) $\vec{i} = \langle 1,0 \rangle = (1,0)$

b) $\vec{j} = \langle 0,1 \rangle = (0,1)$

c) $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} = \langle 2,3 \rangle = (2,3)$

d) $\vec{u} = -\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j} = \left\langle -1, \frac{3}{5} \right\rangle = \left(-1, \frac{3}{5} \right)$

Exemplo 3

O vetor $\vec{w} = \frac{3}{2}\vec{i} + 2\vec{j}$ tem a representação gráfica conforme a figura 2.17(a) ou simplesmente como na figura 2.17(b):

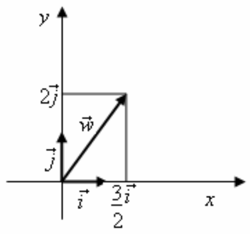


Figura 2.17(a): Vetor no plano 1

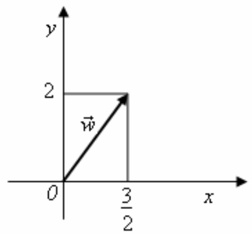


Figura 2.17(b): Vetor no plano 2

Considerando esta modalidade de representação, a adição de dois vetores $\vec{u} = (a_1, b_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2)$ define-se como:

$$\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

A multiplicação de um vetor $\vec{u} = (a,b)$ por um escalar *c* define-se como:

$$c \cdot \vec{u} = (ca, cb)$$

Exemplo 4

Se $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ e $\vec{v} = 4\vec{i} - \vec{j}$, determine $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $2\vec{u}$, $2\vec{u} + 3\vec{v}$.

a) $\vec{u} + \vec{v}$

$\vec{u} + \vec{v} = (2,3) + (4,-1) = (6,2)$, ou seja, $\vec{u} + \vec{v} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$

b) $\vec{u} - \vec{v}$

$\vec{u} - \vec{v} = (2,3) - (4,-1) = (-2,4)$, ou seja, $\vec{u} - \vec{v} = -2\vec{i} + 4\vec{j}$

c) $2\vec{u}$

$2\vec{u} = 2 \cdot (2,3) = (4,6)$, ou seja, $2\vec{u} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$

d) $2\vec{u} + 3\vec{v} = 2 \cdot (2,3) + 3 \cdot (4,-1) = (4,6) + (12,-3) = (16,3)$, ou seja, $2\vec{u} + 3\vec{v} = 16\vec{i} + 3\vec{j}$

Observação: A representação gráfica de $\vec{u}+\vec{v}$ do exemplo 4 pode ser observada na figura 2.18.

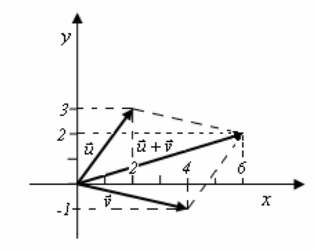


Figura 2.18: Soma de dois vetores

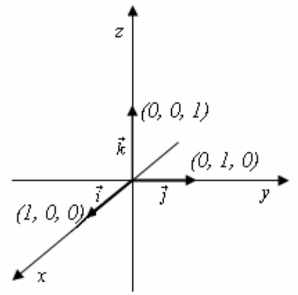
Exemplo 1:

Se $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}$ e $\vec{v}=2\vec{i}-4\vec{j}$, determine $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$, $2\vec{u}$, $2\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$.

Figura 2.21: Operações com vetores no GeoGebra

Vetores no espaço tridimensional (R^3)

Quando estivermos tratando com vetores no espaço tridimensional, vamos utilizar como base os vetores cujas origens são a origem do plano cartesiano *xyz* e extremidades os pontos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$, constituindo os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, denominada base canônica, representados na figura 2.22. Alguns autores utilizam simplesmente ***i***, ***j*** e ***k***.



Vetores da base ortogonal $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$

Assim como no plano, qualquer vetor $\vec{v}$ do espaço tridimensional pode ser decomposto segundo as direções de $\vec{i}$ e $\vec{j}$ e $\vec{k}$, ou seja, podemos determinar três vetores cujas direções sejam $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, e cuja soma seja $\vec{v}$. Considerando a multiplicação de um vetor por um escalar (número real), podemos indicar o vetor $\vec{v}$ como a soma dos vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ multiplicados pelos escalares *a*, *b* e *c* convenientes.

Similar aos vetores no plano, temos o vetor $\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$, que pode ser representado no sistema cartesiano *xyz* usando as projeções ortogonais das extremidades de $\vec{v}$ sobre os eixos coordenados *x*, *y* e *z*, determinando ali os componentes escalares *a*, *b* e *c*, da representação vetorial.
A figura 2.23 ilustra essa decomposição.

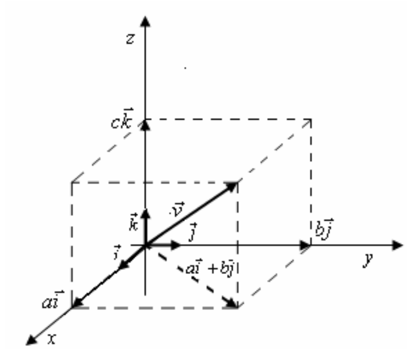


Figura 2.23: Componentes de um vetor $\vec{v}$ no espaço tridimensional (R^3)

Assim, qualquer vetor no espaço *xyz* pode ser expresso em função da base padrão $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$.
Um vetor tridimensional $\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ pode ser representado genericamente por uma tripla ordenada:

$$\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k} \text{ pode ser representado por } \vec{v}=(a,b,c) \text{ ou } \vec{v}=\langle a,b,c\rangle$$

As operações com vetores no (R^3) são realizadas tal como no plano.

Exemplo 5

Dados os vetores $\vec{s} = 2\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}$ e $\vec{w} = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$, determine $\vec{s} + \vec{w}$, $\vec{s} - \vec{w}$, $-\frac{1}{3}\vec{w}$.

a) $\vec{s} + \vec{w}$

$\vec{s} + \vec{w} = (2,-1,6) + (1,-2,-1) = (3,-3,5)$, ou seja, $\vec{s} + \vec{w} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$

b) $\vec{s} - \vec{w}$

$\vec{s} - \vec{w} = (2,-1,6) - (1,-2,-1) = (1,1,7)$, ou seja, $\vec{s} - \vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k}$

c) $-\frac{1}{3}\vec{w}$

$-\frac{1}{3}\vec{w} = -\frac{1}{3}\cdot(1,-2,-1) = (-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})$, ou seja, $-\frac{1}{3}\vec{w} = -\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$

Observação: Um vetor $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ do plano pode ser representado como um vetor $\vec{w} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ do espaço tridimensional considerando a componente *c* igual a zero. Afinal, o plano *xy* está contido no espaço *xyz*.

Exemplo 6

Determine $\vec{u} + \vec{w}$, $\vec{u} - 3\vec{w}$, sendo $\vec{u} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$ e $\vec{w} = -2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$

a) $\vec{u} + \vec{w}$

$\vec{u} + \vec{w} = (3,5,0) + (-2,1,4) = (1,6,4)$, ou seja, $\vec{u} + \vec{w} = \vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$

b) $\vec{u} - 3\vec{w}$

$\vec{u} - 3\vec{w} = (3,5,0) - 3\cdot(-2,1,4) = (3,5,0) - (-6,3,12) = (9,2,-12)$, ou seja, $\vec{u} - 3\vec{w} = 9\vec{i} + 2\vec{j} - 12\vec{k}$

No início desta seção, descrevíamos que um vetor $\vec{v}$ de origem *A* e extremidade *B* pode ser expresso como uma diferença: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$. Vamos analisar um exemplo.

Exemplo 7

Se $\vec{v}$ é um vetor com origem no ponto A(1, 4) e extremidade no ponto B(5, 6), determine o vetor $\vec{v}$ como a diferença $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$

$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$

$\vec{v} = (5,6) - (1,4) = (4,2)$, ou seja, $\vec{v} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$

Graficamente, podemos observar na figura 2.24 que o vetor $\overrightarrow{AB}$ é o mesmo que o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$, ou seja, corresponde a um vetor de origem zero. O vetor $\vec{v}$ é representante do vetor $\overrightarrow{AB}$.

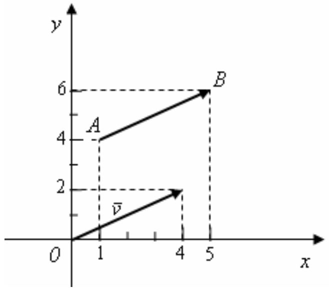


Figura 2.24: Vetor representante

O que podemos então concluir? Ë fácil: o vetor $\vec{v}$ é o representante na origem do sistema, de qualquer vetor que possui mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento de $\vec{v}$.

Se considerarmos um outro vetor $\overrightarrow{CD}$ com origem no ponto $C(5,3)$ e extremidade no ponto $D(9,5)$, temos $\overrightarrow{CD} = D - C = (9,5) - (5,3) = (4,2)$, portanto igual a $\vec{v}$, que é representante também do vetor $\overrightarrow{CD}$.

Módulo ou norma de um vetor

O módulo, ou magnitude, ou norma, ou comprimento de um vetor $\vec{v}$, representado por $|\vec{v}|$ é o comprimento de qualquer um dos seus representantes e é calculado pela fórmula da distância entre dois pontos no plano, ou seja, a distância entre a origem *0* e a extremidade do vetor.

Se $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} = (a,b)$ é um vetor bidimensional como na figura 2.25, e aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo *OAB* formado, temos que: $\vec{v}^2 = a^2 + b^2$, logo $|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Se $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = (a,b,c)$ é um vetor tridimensional, como na figura 2.26, temos dois triângulos retângulos: *OAB* e *OBC*. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *OAB*, obtemos que $(OB)^2 = a^2 + b^2$ e no triângulo OBC temos que $(\vec{v})^2 = (OB)^2 + c^2$.

Substituindo temos $(\vec{v})^2 = a^2 + b^2 + c^2$

E assim, $|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

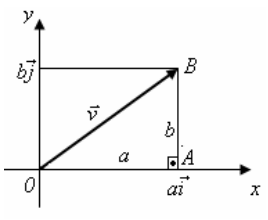


Figura 2.25: Vetor bidimensional.

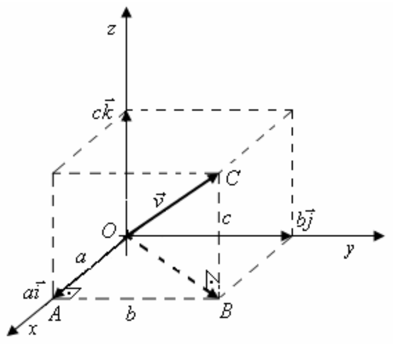


Figura 2.26: Vetor tridimensional

Exemplo 8

Se $\vec{w} = (1,4)$ e $\vec{m} = (2,-2,1)$, calcule $|\vec{w}|$ e $|\vec{m}|$.

$|\vec{w}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$

$|\vec{m}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$

Vetor unitário ou versor de um vetor

Se tomarmos qualquer vetor diferente do vetor nulo, e dividirmos pelo seu módulo, teremos um novo vetor de mesma direção e sentido, seu módulo será igual a 1. Este vetor representa a unidade do vetor considerado para o problema. Assim para o vetor $\vec{v}$, diferente do vetor nulo, o seu versor ou vetor unitário será $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$.

Exemplo 9:

Dado o vetor $\vec{v} = (-1,2,2)$, o seu versor $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ pode ser obtido calculando primeiro o módulo do vetor $\vec{v}$ *:*

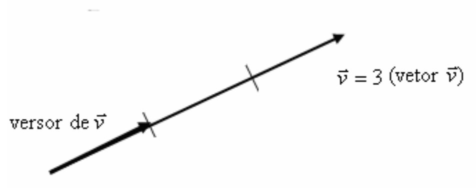
$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$

Logo: $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(-1,2,2)}{3} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Podemos verificar se o módulo do vetor obtido é realmente 1, calculando $|\vec{v}|$:

$|\vec{u}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{9}{9}} = \sqrt{1} = 1$

Graficamente temos:



Observação: Os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ são exemplos de versores ou vetores unitários.

Exemplo 10

Determine o versor $\vec{u}$ do vetor $\vec{w} = (1,4)$

a) O módulo do vetor $|\vec{w}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$

Sendo $\vec{u} = \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}$, temos que $\vec{u} = \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = \frac{(1,4)}{\sqrt{17}} = \left(\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}\right)$.

Se houver necessidade de conferir o módulo do vetor $\vec{u}$ obtido, fazemos:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{17} + \frac{16}{17}} = \sqrt{\frac{17}{17}} = \sqrt{1} = 1$$

Produto de Vetores

Produto escalar

Qual é o significado físico do produto escalar?

Segundo (Halliday, 2002) uma força $\vec{f}$ constante que atua sobre um corpo e este corpo sofre um deslocamento $\vec{d}$, o produto interno entre a força $\vec{f}$ e o deslocamento $\vec{d}$, e se representa por w, é o trabalho w realizado para mover o corpo.

O autor exemplifica com uma situação em que um corpo de massa m se move sob ação de uma força $\vec{f}$, que forma um ângulo α com a direção do movimento. O corpo parte da posição A para a posição B, conforme a figura 2.27. Usando conceitos da Física estabelece que o trabalho (w) da força $\vec{f}$ é dado por $w = |\vec{f}| \cdot |\vec{d}| \cos\alpha$, que é caracterizado por um produto de dois vetores, denominado produto escalar.

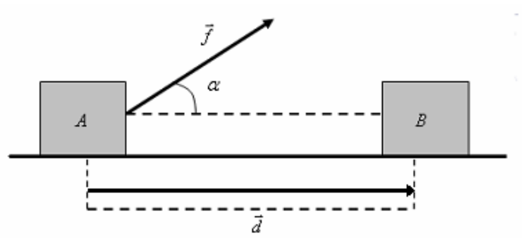


Figura 2.27: Trabalho de uma força

Matematicamente o produto escalar ou interno de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representa um número que é expresso por:

$\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$, onde α é a medida do ângulo formado entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e $0^0 \leq \alpha \leq 180^0$. Graficamente pode ser representado como na figura 2.28.

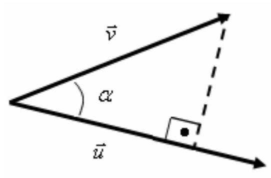


Figura 2.28: Produto escalar

Podemos observar na figura 2.25 que $|\vec{v}|\cos\alpha$ é exatamente o comprimento da projeção do vetor $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

Propriedades do produto escalar

Quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $m \in R$, temos:

I) $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$
II) $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$
III) $(m\vec{u}) \bullet \vec{v} = m(\vec{u} \bullet \vec{v}) = \vec{u} \bullet (m\vec{v})$

Para realizar o produto escalar de dois vetores consideramos suas componentes cartesianas e as propriedades já relacionadas, conforme apresentamos a seguir:

Expressão cartesiana do produto escalar

Sejam os vetores $\vec{u} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$ e $\vec{v} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$, temos que:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = (a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}) \bullet (a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k})$$

Aplicando a propriedade II, obtemos a expressão:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = (a_1\vec{i} \bullet a_2\vec{i} + a_1\vec{i} \bullet b_2\vec{j} + a_1\vec{i} \bullet c_2\vec{k}) + (b_1\vec{j} \bullet a_2\vec{i} + b_1\vec{j} \bullet b_2\vec{j} + b_1\vec{j} \bullet c_2\vec{k}) +$$
$$+ (c_1\vec{k} \bullet a_2\vec{i} + c_1\vec{k} \bullet b_2\vec{j} + c_1\vec{k} \bullet c_2\vec{k})$$

Considerando a propriedade III podemos organizar o produto agrupando escalar com escalar e vetor com vetor:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = a_1a_2\vec{i} \bullet \vec{i} + a_1b_2\vec{i} \bullet \vec{j} + a_1c_2\vec{i} \bullet \vec{k} + b_1a_2\vec{j} \bullet \vec{i} + b_1b_2\vec{j} \bullet \vec{j} + b_1c_2\vec{j} \bullet \vec{k} +$$
$$c_1a_2\vec{k} \bullet \vec{i} + c_1b_2\vec{k} \bullet \vec{j} + c_1c_2\vec{k} \bullet \vec{k} =$$

Resolvendo os produtos escalares com $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ sendo vetores unitários, obtemos:

$\vec{i} \bullet \vec{i} = |\vec{i}||\vec{i}|\cos 0^0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

$\vec{j} \bullet \vec{j} = |\vec{j}||\vec{j}|\cos 0^0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

$\vec{k} \bullet \vec{k} = |\vec{k}||\vec{k}|\cos 0^0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

e ainda

$\vec{i} \bullet \vec{j} = |\vec{i}||\vec{j}|\cos 90^0 = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$, consequentemente pela propriedade I, $\vec{j} \bullet \vec{i} = 0$

$\vec{j} \bullet \vec{k} = |\vec{j}||\vec{k}|\cos 90^0 = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$, consequentemente pela propriedade I, $\vec{k} \bullet \vec{j} = 0$

$\vec{i} \bullet \vec{k} = |\vec{i}||\vec{k}|\cos 90^0 = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$, consequentemente pela propriedade I, $\vec{i} \bullet \vec{k} = 0$

Concluímos que a expressão cartesiana do produto escalar é:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$

Exemplo 1:

Dados os vetores $\vec{a} = (2,-1,1)$ e $\vec{b} = (3,-2,4)$, calcule $\vec{a} \bullet \vec{b}$.

Para resolver basta utilizar a expressão cartesiana do produto escalar:

$\vec{a} \bullet \vec{b} = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot 4 = 6 + 2 + 4 = 12$

Exemplo 2:

Dados os vetores $\vec{u} = (2,3)$ e $\vec{v} = (6,1)$, calcule o produto escalar $\vec{u} \bullet \vec{v}$

Distância entre dois pontos

A distância entre os pontos $A(a_1, b_{1,}, c_1)$ e $B(a_2, b_2, c_2)$ do espaço pode ser definida como sendo o comprimento do vetor $\overrightarrow{AB}$ conforme figura 2.30:

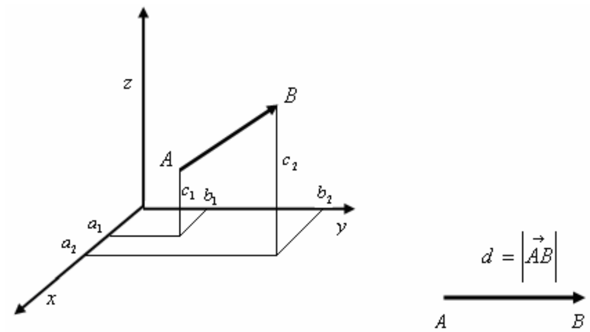


Figura 2.30: Distância entre dois pontos

O comprimento do vetor $\overrightarrow{AB}$ se obtém calculando o módulo da diferença entre os dois pontos:

$d = |\overrightarrow{AB}| = |B - A|$

$d = |(a_2 - a_1, b_2 - b_1, c_2 - c_1)|$

$d = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 + (c_2 - c_1)^2}$

Exemplo 2:

Calcule a distância entre os pontos $A(-1,2,-1)$ e $B(2,4,-2)$

$d = \sqrt{(2-(-1))^2 + (4-2)^2 + (-2-(-1))^2}$

$d = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$

Ângulo entre dois vetores

Da definição de produto escalar temos que $\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha$.

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são diferentes do vetor nulo podemos isolar a expressão $\cos\alpha$ e assim, $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$, que nos permite determinar o ângulo existente entre os dois vetores.

Exemplo 3:

Calcular o ângulo entre os vetores:
a) $\vec{m} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ e $\vec{n} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$
b) $\vec{u} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$.

Resolvendo:
a) Como $\cos\alpha = \dfrac{\vec{m} \bullet \vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}$, precisamos calcular o produto escalar $\vec{m} \bullet \vec{n}$, como no exemplo 1, e o módulo de cada um dos vetores $\vec{m} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ e $\vec{n} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$:

$\vec{m} \bullet \vec{n} = 3 \cdot 4 + (-2) \cdot 2 = 12 - 4 = 8$
$|\vec{m}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$
$|\vec{n}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$

Se $\cos\alpha = \dfrac{\vec{m} \bullet \vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}$, então

$$\cos\alpha = \frac{8}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{20}}$$
$\cos\alpha \cong 0{,}4961$

Utilizando uma calculadora e calculando o inverso da função cosseno, temos:
$\alpha \cong arctg(0{,}4961)$
$\alpha \cong 60{,}25^0$

b) Como $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$, calculamos inicialmente o produto escalar $\vec{u} \bullet \vec{v}$ e o módulo de cada um dos vetores $\vec{u} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$.

$\vec{u} \bullet \vec{v} = 2 \cdot 1 + 5 \cdot (-2) + (-3) \cdot (-1) = 2 - 10 + 3 = -5$
$|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{38}$
$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$

Se $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$, então

$$\cos\alpha = \frac{-5}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{6}}$$
$\cos\alpha \cong -0{,}3311$

Utilizando uma calculadora e calculando o inverso da função cosseno, temos:
$\alpha \cong arctg(-0{,}3311)$
$\alpha \cong 109{,}33^0$

Observação: Se dois vetores forem ortogonais, seu produto escalar será igual a zero, pois $\cos 90^o = 0$.

Exemplo 4

Verifique se os vetores $\vec{a} = (-1,2,3)$ e $\vec{b} = (2,1,0)$, são ortogonais?
Resposta: Devemos verificar se $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$

$\vec{a} \bullet \vec{b} = -1.2 + 2.1 + 3.0 = -2 + 2 + 0 = 0$, logo os vetores são ortogonais.

Ângulos diretores

Um vetor forma ângulos com os eixos *x*, *y*, e *z*, chamados ângulos diretores, conforme a figura 2.31.

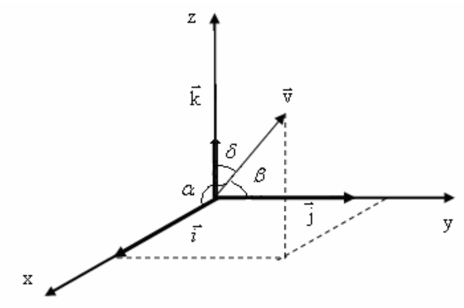


Figura 2.31: Ângulos diretores

Utilizando a formula do ângulo entre dois vetores, $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$ podemos deduzir que o ângulo formado pelo vetor $\vec{v} = (a,b,c)$ com o eixo *x*, é o mesmo que o ângulo formado entre o vetor $\vec{v}$ o vetor unitário $\vec{i}$, conforme figura 2.31.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v} \bullet \vec{i}}{|\vec{v}||\vec{i}|} = \frac{(a,b,c) \bullet (1,0,0)}{|\vec{v}| \cdot 1} = \frac{a}{|\vec{v}|}$$

O ângulo formado pelo vetor $\vec{v}$ com o eixo *y*, é o mesmo que o ângulo formado entre o vetor $\vec{v}$ o vetor unitário $\vec{j}$, conforme figura 2.31.

$$\cos\beta = \frac{\vec{v} \bullet \vec{j}}{|\vec{v}||\vec{j}|} = \frac{(a,b,c) \bullet (0,1,0)}{|\vec{v}| \cdot 1} = \frac{b}{|\vec{v}|}$$

O ângulo formado pelo vetor $\vec{v}$ com o eixo *z*, é o mesmo ângulo formado entre o vetor $\vec{v}$ o vetor unitário $\vec{k}$, conforme figura 2.31.

$$\cos\delta = \frac{\vec{v} \bullet \vec{k}}{|\vec{v}||\vec{k}|} = \frac{(a,b,c) \bullet (0,0,1)}{|\vec{v}| \cdot 1} = \frac{c}{|\vec{v}|}$$

Exemplo 5.

Calcular o ângulo que o vetor $\vec{m} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ forma com os eixos coordenados *x, y* e *z*.

Resolução: Devemos achar primeiramente o módulo do vetor $\vec{m}$, para depois calcular os cossenos dos ângulos α, β e δ e finalmente, os ângulos.

$$|\vec{m}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{29}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{m}|} = \frac{2}{\sqrt{29}} \Rightarrow \cos\alpha = 0{,}371 \Rightarrow \alpha = \arccos 0{,}371 \Rightarrow \alpha \cong 68{,}2^o$$

$$\cos\beta = \frac{y}{|\vec{m}|} = \frac{-3}{\sqrt{29}} \Rightarrow \cos\beta = -0{,}557 \Rightarrow \beta = \arccos(-0{,}557) \Rightarrow \beta \cong 123{,}8^o$$

$$\cos\delta = \frac{z}{|\vec{m}|} = \frac{4}{\sqrt{29}} \Rightarrow \cos\delta = 0{,}743 \Rightarrow \delta = \arccos 0{,}743 \Rightarrow \delta \cong 42{,}0^o$$

Produto vetorial

O que significa produto vetorial? Na física o produto vetorial representa o torque τ, para os engenheiros significa momento. Torque é uma palavra que vem do latim e significa torcer, pode ser identificada como a ação de girar ou de torcer de uma força.

Vamos partir da seguinte situação: Na hora que usamos o saca-rolha para abrir uma garrafa de vinho estamos aplicando uma força $\vec{f}$ sobre ele, fazendo-o girar para penetrar na rolha conforme figura 2.32. Na figura, o braço do saca-rolha, que vai do centro até a extremidade, é chamado de alavanca e corresponde a um vetor $\vec{r}$.

Definimos o vetor torque $|\vec{\tau}|$ como sendo o produto do vetor comprimento $\vec{r}$ e a intensidade da força $\vec{f}$ pelo seno do ângulo α formado entre $\vec{f}$ e $\vec{r}$, sendo que $\vec{f}$ e $\vec{r}$ estão no mesmo plano.

Assim sendo $|\vec{\tau}| = |\vec{r}||\vec{f}| sen\alpha$.

O vetor torque $\vec{\tau}$ é perpendicular a $\vec{f}$ e $\vec{r}$. É expresso pela equação $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{f}$, a qual define como produto vetorial.
Na situação inversa, de retirar o saca-rolha, a ação dos vetores se dá conforme a figura 2.33, ou seja, $\vec{\tau} = -\vec{r} \times \vec{f}$.

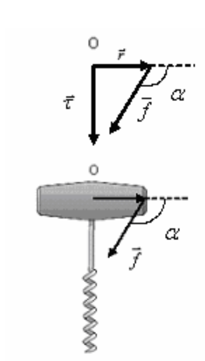


Figura 2.32: Forças num saca-rolha1

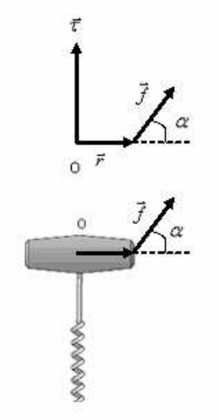


Figura 2.33: Forças num saca-rolha 2

A partir desta idéia, podemos definir produto vetorial ou externo.

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, não paralelos entre si, o produto vetorial ou externo, é um terceiro vetor que apresenta as seguintes características:

1- A direção do vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é perpendicular aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$;
2- Os sentidos dos vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$ nesta ordem formam um triedro positivo; ou seja, se observado a partir de $\vec{u} \times \vec{v}$, conforme figura 2.34, $\vec{u}$ está situado a direta e $\vec{v}$ a esquerda.
3- Seu módulo é $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen}\alpha$, onde α é a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

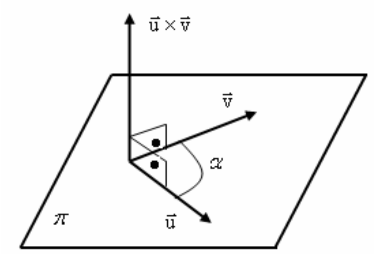


Figura 2.34: Produto vetorial

Produto vetorial nulo

O produto vetorial é nulo, $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$, quando um dos vetores for nulo ou quando os dois vetores forem paralelos, isto é $sen\alpha = 0$, ou seja, $\alpha = 0^0$ ou 180^0.

Vetores paralelos

Podemos tratar da condição de paralelismo de dois vetores

Sejam $\vec{u}\neq\vec{0}$ e $\vec{v}\neq\vec{0}$. Os vetores $\vec{u}=(a_1,b_1,c_1)$ e $\vec{v}=(a_2,b_2,c_2)$ são paralelos, se acontecer a condição $\vec{u}=m\vec{v}$, isto é, $(a_1,b_1,c_1)=m(a_2,b_2,c_2)$, ou $(a_1,b_1,c_1)=(ma_2,mb_2,mc_2)$.

Donde vem que: $a_1 = ma_2$, $b_1 = mb_2$ e $c_1 = mc_2$, consequentemente, $m=\frac{a_1}{a_2}$; $m=\frac{b_1}{b_2}$ e $m=\frac{c_1}{c_2}$, logo $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ é uma condição de paralelismo.

Observação: Se uma das componentes do vetor for zero então para que os vetores sejam paralelos a componente correspondente também terá que ser igual a zero.

Exemplo 1

Verificar se os vetores $\vec{u}=(2,-1,4)$ e $\vec{v}=(-6,3,-12)$ são paralelos?

Aplicando a condição $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$, obtemos $\frac{2}{-6}=\frac{-1}{3}=\frac{4}{-12}$.

Simplificando, resulta em $\frac{1}{3}=\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

Verificada a igualdade, concluímos que os vetores são paralelos.

Exemplo 2

Qual dever ser o valor de *x* para que os vetores $\vec{a}=(x,-2,0)$ e $\vec{b}=(4,-3,0)$ sejam paralelos?

Aplicando a condição $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$, obtemos $\frac{x}{4}=\frac{-2}{-3}$.

Não consideramos a terceira componente dos dois vetores pelo fato de ambas serem iguais a zero.

Da igualdade obtida, podemos escrever:

$$\frac{x}{4}=\frac{-2}{-3}$$
$$(-3)\cdot x=(-2)\cdot 4$$
$$-3x=-8$$
$$3x=8$$
$$x=\frac{8}{3}$$

Propriedades do Produto Vetorial

I) $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$ (figura 2.35)
II) $m(\vec{u}\times\vec{v})=(m\vec{u})\times\vec{v}=\vec{u}\times(m\vec{v})$
III) $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$

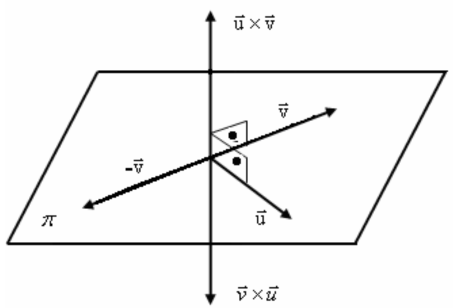
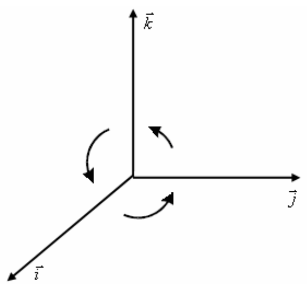


Figura 2.35: Representação geométrica de $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$

Produto vetorial dos versores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$

Em particular os versores $\vec{i}$**,** $\vec{j}$ e $\vec{k}$ **,** nesta ordem, formam um triedro positivo, representado na figura 2.36.

E como você pode identificar um triedro positivo?
Digamos que fosse possível ficar em pé na posição do versor $\vec{k}$, a sua direita estaria o versor $\vec{i}$ e a sua esquerda o vetor $\vec{j}$.



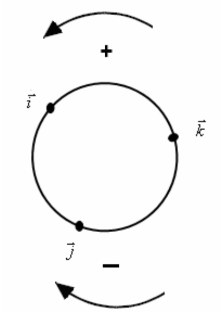


Figura 2.36: Triedro positivo   Figura 2.37: Circunferência do produto vetorial

Na prática, podemos utilizar a circunferência ou a regra da mão direita para efetuar o produto externo de dois desses versores.

Na circunferência, figura 2.37, o resultado é o versor faltante, de sinal positivo se no sentido anti horário, negativo se no sentido horário.

Exemplo 3:

a) $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$
b) $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$
c) $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$
d) $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

Exemplo 4:

Casos particulares
Por serem paralelos $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}$, $\vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}$ e $\vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$.

Regra da mão direita

Podemos também aplicar a regra da mão direita para determinar o sentido do produto vetorial de dois vetores não nulos: colocamos a mão sobre o primeiro vetor $\vec{u}$ fechamos para cima do vetor $\vec{v}$, o polegar indica o sentido do vetor resultante do produto de $\vec{u} \times \vec{v}$. Conforme a figura 2.38:

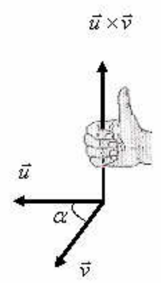


Figura 2.38: Regra da mão direita

Expressão cartesiana do produto vetorial

Sejam os vetores $\vec{u} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$ e $\vec{v} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$, então:
$\vec{u} \times \vec{v} = (a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}) \times (a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k})$

Pela propriedade III, do produto vetorial, temos:
$\vec{u} \times \vec{v} = a_1\vec{i} \times a_2\vec{i} + a_1\vec{i} \times b_2\vec{j} + a_1\vec{i} \times c_2\vec{k} + b_1\vec{j} \times a_2\vec{i} + b_1\vec{j} \times b_2\vec{j} + b_1\vec{j} \times c_2\vec{k} +$
$+ c_1\vec{k} \times a_2\vec{i} + c_1\vec{k} \times b_2\vec{j} + c_1\vec{k} \times c_2\vec{k}$

Usando a propriedade II agrupamos escalar com escalar e vetor com vetor:
$\vec{u} \times \vec{v} = a_1a_2\vec{i} \times \vec{i} + a_1b_2\vec{i} \times \vec{j} + a_1c_2\vec{i} \times \vec{k} + +b_1a_2\vec{j} \times \vec{i} + b_1b_2\vec{j} \times \vec{j} + b_1c_2\vec{j} \times \vec{k} +$
$+ c_1a_2\vec{k} \times \vec{i} + c_1b_2\vec{k} \times \vec{j} + c_1c_2\vec{k} \times \vec{k} =$

Resolvendo os produtos escalares conforme os exemplos 3 e 4 desta seção:
$\vec{u} \times \vec{v} = a_1b_2\vec{k} - a_1c_2\vec{j} - b_1a_2\vec{k} + b_1c_2\vec{i} + c_1a_2\vec{j} - c_1b_2\vec{i} =$

Fatorando obtemos:
$\vec{u} \times \vec{v} = (b_1c_2 - c_1b_2)\vec{i} + (c_1a_2 - a_1c_2)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$

A expressão obtida corresponde ao determinante de uma matriz formada pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}$$

Exemplo 5:

Sendo dados os vetores $\vec{u}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ e $\vec{v}=2\vec{i}-4\vec{j}-2\vec{k}$, calcule $\vec{u}\times\vec{v}$.

Inicialmente calculamos o determinante de $\vec{u}\times\vec{v}$.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 2 & -1\\ 2 & -4 & -2\end{vmatrix}=-4\vec{i}-2\vec{j}-12\vec{k}-4\vec{k}+6\vec{j}-4\vec{i}=-8\vec{i}+4\vec{j}-16\vec{k}=(-8,4,-16)$$

Exemplo 6:

Determinar um vetor simultaneamente ortogonal aos vetores $2\vec{a}$ e $\vec{a}-\vec{b}$, sendo dados os vetores $\vec{a}=(-1,2,3)$ e $\vec{b}=(2,0,-1)$.

Iniciamos a resolução calculando os vetores $2\vec{a}$ e $\vec{a}-\vec{b}$:

$$2\vec{a}=2(-1,2,3)=(-2,4,6)$$
$$\vec{a}-\vec{b}=(-1,2,3)-(2,0,-1)=(-3,2,4)$$

Como o produto vetorial é um vetor simultaneamente ortogonal aos vetores que compõe o produto, conforme a definição, podemos escrever:

$$(2\vec{a})\times(\vec{a}-\vec{b})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 4 & 6\\ -3 & 2 & 4\end{vmatrix}.$$

Resolvendo o determinante

$$(2\vec{a})\times(\vec{a}-\vec{b})=16\vec{i}-18\vec{j}-4\vec{k}+12\vec{k}-12\vec{i}+8\vec{j}$$
$$(2\vec{a})\times(\vec{a}-\vec{b})=4\vec{i}-10\vec{j}+8\vec{k}=(4,-10,8)$$

Assim, o vetor simultaneamente ortogonal aos vetores $2\vec{a}$ e $\vec{a}-\vec{b}$ é $4\vec{i}-10\vec{j}+8\vec{k}$.

Produto misto

Dados os vetores $\vec{u},\vec{v}$ e $\vec{w}$, tomados nesta ordem, chama-se produto misto dos vetores $\vec{u},\vec{v}$ e $\vec{w}$ ao número real $\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w})$ ou $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

Podemos escrever que : $\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w})=|\vec{u}||\vec{v}\times\vec{w}|\cdot\cos\alpha$ onde $0\le\alpha\le180^o$.

Note que, se o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}\times\vec{w}$ for de 90^0, já que $\vec{v}\times\vec{w}$ é perpendicular a $\vec{v}$ e $\vec{w}$, os três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ serão coplanares (vetores no mesmo plano). Podemos então deduzir que para três vetores serem coplanares o produto misto $\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w})=0$.

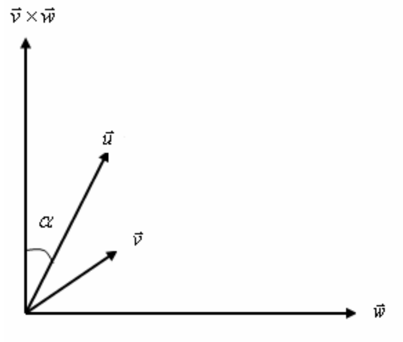


Figura 2.39: Produto misto

Expressão cartesiana do produto misto

Sejam os vetores $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$, $\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ e $\vec{w}=x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k}$, então:

Para determinar $\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w})$, determinamos por etapas o produto.

1ª etapa: Calculamos o produto vetorial

$$\vec{v}\times\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=b_2c_3\vec{i}+c_2a_3\vec{j}+a_2b_3\vec{k}-b_2a_3\vec{k}-c_2b_3\vec{i}-a_2c_3\vec{j}=$$

$$\vec{v}\times\vec{w}=(b_2c_3-c_2b_3)\vec{i}+(c_2a_3-a_2c_3)\vec{j}+(a_2b_3-b_2a_3)\vec{k}$$

2ª etapa: Calculamos o produto escalar

$$\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w})=(a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k})\bullet\left[(b_2c_3-c_2b_3)\vec{i}+(c_2a_3-a_2c_3)\vec{j}+(a_2b_3-b_2a_3)\vec{k}\right]$$
$$\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w})=a_1(b_2c_3-c_2b_3)+b_1(c_2a_3-a_2c_3)+c_1(a_2b_3-b_2a_3)$$
$$\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w})=a_1b_2c_3-a_1c_2b_3+b_1c_2a_3-b_1a_2c_3+c_1a_2b_3-c_1b_2a_3$$

Que é equivalente ao determinante da matriz composta pelos componentes dos três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ envolvidos:

$$\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

Exemplo 1

Dados os vetores $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ e $\vec{c}=\vec{i}-3\vec{k}$, calcule:

a) $\vec{a}\bullet(\vec{b}\times\vec{c})$

b) $(\vec{a}+\vec{b})\bullet(\vec{b}\times\vec{c})$

Resolvendo:

a) Devemos calcular o determinante conforme a definição $\vec{a}\bullet(\vec{b}\times\vec{c})$.

Assim sendo, $\vec{a}\bullet(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}2 & 3 & -2\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & -3\end{vmatrix}$

Calculando o determinante:

$$\vec{a}\bullet(\vec{b}\times\vec{c})=2.2.(-3)+3.(-1).1+(-2).1.0-1.2.(-2)-0.(-1).3-(-3).1.3=$$
$$\vec{a}\bullet(\vec{b}\times\vec{c})=-12-3+0+4-0+9=13-15=-3$$

b) $(\vec{a}+\vec{b})\bullet(\vec{b}\times\vec{c})$

Primeiramente calculamos
$\vec{a}+\vec{b}=(2,3,-2)+(1,2,-1)=(3,5,-3)$

Calculamos o produto misto $(\vec{a}+\vec{b})\bullet(\vec{b}\times\vec{c})$ usando o determinante da expressão cartesiana do produto misto.

$$(\vec{a}+\vec{b})\bullet(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}3 & 5 & -3\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & -3\end{vmatrix}$$

Calculando:
$$(\vec{a}+\vec{b})\bullet(\vec{b}\times\vec{c})=3\cdot 2\cdot(-3)+5.(-1).1+(-3).1.0-1.2.(-3)-0.(-1).3-(-3).1.5=$$
$$(\vec{a}+\vec{b})\bullet(\vec{b}\times\vec{c})=-18-5+0+6+0+15$$
$$(\vec{a}+\vec{b})\bullet(\vec{b}\times\vec{c})=-2$$

2) Verificar se os vetores $\vec{u}=(-2,-1,1)$, $\vec{v}=(-1,1,0)$ e $\vec{w}=(2,3,-2)$ são coplanares.

Devemos mostrar que o produto misto $\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w})=0$

$$\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix}-2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=-2.1.(-2)+(-1).0.2+1.(-1).3-2.1.1-3.0.(-2)-(-2).(-1).(-1)=$$
$$=4+0-3-2-0+2=6-5=1$$

Logo, como $\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w})=1\neq 0$, os vetores **não** são coplanares.

3) Determine o valor do componente x do vetor $\vec{a}$ para que vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ sejam coplanares, sendo dados $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}-x\vec{k}$, $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ e $\vec{c}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

Se os três vetores são coplanares o produto misto $\vec{a}\bullet(\vec{b}\times\vec{c})=0$. Podemos escrever:

$$\vec{a}\bullet(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}-2 & 3 & -x\\ -1 & 2 & -3\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix}-2 & 3 & -x\\ -1 & 2 & -3\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=0$$
$$-2\cdot 2\cdot(-1)+3\cdot(-3)\cdot 2+(-x)\cdot(-1)\cdot 1-2\cdot 2\cdot(-x)-1\cdot(-3)\cdot(-2)-(-1)\cdot(-1)\cdot 3=0$$
$$4-18+x+4x-6-3=0$$
$$5x-23=0$$
$$5x=23$$
$$x=\frac{23}{5}$$

Interpretação Geométrica do módulo do produto vetorial

A interpretação geométrica do módulo do produto vetorial pode ser entendida a partir de um paralelogramo construído sobre dois vetores, conforme a figura 2.40.

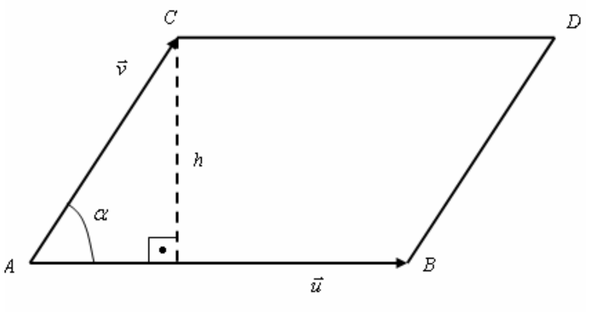


Figura 2.40: Interpretação do módulo do produto vetorial

O paralelogramo da figura 2.40, tem a área definida como o produto da medida da base b pela sua altura h, o seja $A_p = b \times h$.

A base b do paralelogramo corresponde ao módulo do vetor $\vec{u}$, ou seja, $b = |\vec{u}|$, assim, a área pode ser:

$$Área_{ABCD} = |\vec{u}|h \text{, onde } sen\alpha = \frac{h}{|\vec{v}|} \Rightarrow h = |\vec{v}| sen\alpha$$

Substituindo, temos:

$$Área_{ABCD} = |\vec{u}||\vec{v}| sen\alpha$$

A expressão obtida corresponde ao produto vetorial de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, definido anteriormente, $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| sen\alpha$.

Concluímos que o módulo do produto vetorial de dois vetores corresponde área do paralelogramo obtido pelas projeções paralelas aos vetores a partir dos seus vértices conforme a figura 2.40.

Logo: $Área_{ABCD} = |\vec{u} \times \vec{v}|$

Exemplo 1:

Calcule a área do paralelogramo cujos lados são construídos com os vetores $3\vec{a}$ e $\vec{a} + \vec{b}$, onde $\vec{a} = (-1,2,-3)$ e $\vec{b} = (0,-1,-4)$.

Como o módulo do produto vetorial de dois vetores corresponde a área do paralelogramo construído sobre estes vetores, podemos considerar que:

$$A_P = \left|(3\vec{a}) \times (\vec{a} + \vec{b})\right|$$

Inicialmente determinamos os vetores $3\vec{a}$ e $\vec{a} + \vec{b}$.

$$3\vec{a} = 3 \cdot (-1,2,-3) = (-3,6,-9)$$
$$\vec{a} + \vec{b} = (-1,2,-3) + (0,-1,-4) = (-1,1,-7)$$

$$(3\vec{a}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 6 & -9 \\ -1 & 1 & -7 \end{vmatrix} = -42\vec{i} + 9\vec{j} + -3\vec{k} + 6\vec{k} + 9\vec{i} + 21\vec{j} =$$
$$= -33\vec{i} + 30\vec{j} + 3\vec{k} = (-33,30,3)$$

Como $A_P = \left|(3\vec{a}) \times (\vec{a} + \vec{b})\right|$, precisamos ainda calcular o módulo do vetor obtido:

$$A_P = \left|(3\vec{a}) \times (\vec{a} + \vec{b})\right| = |(-33,30,3)| = \sqrt{(-33)^2 + 30^2 + 3^2} = \sqrt{1998} = 3\sqrt{222}$$

Logo, $A_P = 3\sqrt{222}$ unidades quadradas

Exemplo 2:

Calcule a área do triangulo de vértices $A(-1,2,0),\ B(1,-4,1)\ e\ C(0,-2,-3)$.

O triângulo está situado no espaço tridimensional e pode ser representado de modo simplificado pela figura 2.41.

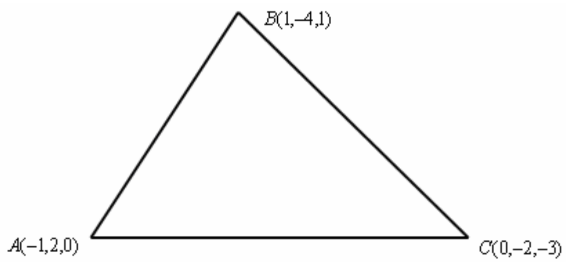


Figura 2.41: Triângulo de vértices ABC

Da geometria elementar sabemos que a área de um triangulo é igual a medida da área de um paralelogramo dividido por dois, conforme a figura 2.42. Assim podemos propor que a área do triângulo ABC corresponde à metade do módulo do produto vetorial dos dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ que determinam o paralelogramo.

Logo, $A_{ABC} = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2}$

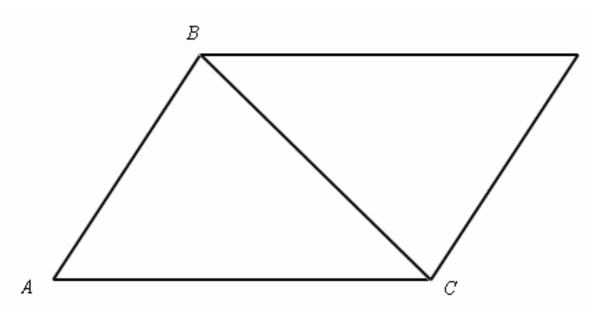


Figura 2.42: Paralelogramo e triângulo

Como não temos os vetores, temos que determiná-los a partir dos pontos que determinam os vértices, ou seja, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1,-4,1) - (-1,2,0) = (2,-6,1) = 2\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k}$$
$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0,-2,-3) - (-1,2,0) = (1,-4,-3) = \vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}$$

Como $A_{ABC} = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2}$, calculamos inicialmente o produto vetorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -6 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-3)\cdot(-6)\cdot\vec{i} + 1\cdot 1\cdot\vec{j} + 2\cdot(-4)\cdot\vec{k} - 1\cdot(-6)\vec{k} - (-4)\cdot 1\cdot\vec{i} - (-3)\cdot 2\cdot\vec{j} =$$
$$= 18\vec{i} + \vec{j} - 8\vec{k} + 4\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k} = 22\vec{i} + 7\vec{j} - 2\vec{k} = (22,7,-2)$$

Calculando o módulo do produto vetorial:

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{22^2 + 7^2 + (-2)^2} = \sqrt{533}$$

Finalizando temos que a área do triângulo é

$$A_{ABC} = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{\sqrt{533}}{2} \text{ u.a (unidades de área).}$$

Interpretação geométrica do módulo do produto misto

A interpretação geométrica do módulo de um produto misto é desenvolvida a partir do cálculo do volume de um paralelepípedo construído sobre os três vetores que o compõem, conforme a figura 2.43.

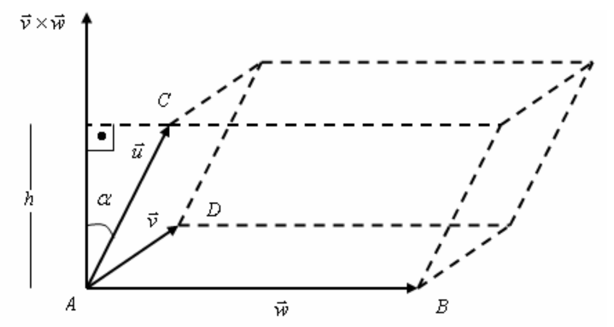


Figura 2.43: Interpretação do módulo do produto misto.

Para calcular o volume do paralelepípedo (V_{PP}) utilizamos, da geometria espacial, que $V_{PP} = Ab \cdot h$

Vimos anteriormente que a área da base do paralelepípedo, que é um paralelogramo, é dado pelo módulo do produto vetorial dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$, ou seja, $Ab = |\vec{v} \times \vec{w}|$.

Na figura 2.43 observamos que $\cos\alpha = \dfrac{h}{|\vec{u}|} \Rightarrow h = |\vec{u}| \cdot |\cos\alpha|$

Como $V_{PP} = Ab \cdot h$, podemos escrever que $V_{PP} = |\vec{v} \times \vec{w}| \cdot |\vec{u}| \cdot |\cos\alpha|$ ou $V_{PP} = \left|\,|\vec{u}|\,|\vec{v} \times \vec{w}| \cos\alpha\right|$.

A expressão obtida é igual ao produto misto de três vetores, $\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}) = |\vec{u}|\,|\vec{v} \times \vec{w}| \cos\alpha$, logo:

$V_{PP} = |\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w})|$, que corresponde ao volume do paralelepípedo.

Exemplo 1:

Calcular o volume do paralelepípedo construído sobre os vetores $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ e $\vec{c} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

O volume do paralelepípedo de dado pelo módulo do produto misto dos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, ou seja, $V_{PP} = \left|\vec{a} \bullet (\vec{b} \times \vec{c})\right|$.

Inicialmente calculamos o produto misto $\vec{a} \bullet (\vec{b} \times \vec{c})$.

$$\vec{a} \bullet (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2.(-2).1 + 1.2.4 + 3.1.(-2) - 4.(-2).3 - (-2).2.2 - 1.1.1 =$$

$$\vec{a} \bullet (\vec{b} \times \vec{c}) = -4 + 8 - 6 + 24 + 8 - 1$$

$$\vec{a} \bullet (\vec{b} \times \vec{c}) = 29$$

Como $V_{PP} = \left|\vec{a} \bullet (\vec{b} \times \vec{c})\right|$

$V_{PP} = |29| = 29$ u.v (unidades de volume)