

1 - NOÇÕES BÁSICAS

Última revisão: 21/3/2001

Conteúdo

[Definições básicas](#)

[Exemplo de aplicação \(Pontes de Königsberg\)](#)

[Grafo completo](#)

[Incidência e grau](#)

[Operações sobre grafos](#)

[Isomorfismo](#)

[Vetor de grau](#)

[Subgrafos](#)

[Caminho](#)

[Grafo conexo](#)

[Grafo bipartite](#)

[Grafo direcionado](#)

[Exercícios](#)

Definições básicas

Um grafo $G = (V, E)$ é um conjunto não-vazio V , cujos elementos são chamados *vértices*, e um conjunto E de *arestas*. Uma aresta é um par não-ordenado (v_i, v_j) , onde v_i e v_j são elementos de V . Normalmente, utiliza-se uma representação gráfica de um grafo. Eis um exemplo de grafo, com a sua representação gráfica:

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$$

onde $a_1 = (v_1, v_2)$, $a_2 = (v_1, v_3)$, $a_3 = (v_1, v_3)$, $a_4 = (v_2, v_3)$, $a_5 = (v_2, v_5)$, $a_6 = (v_5, v_5)$, $a_7 = (v_3, v_5)$, $a_8 = (v_3, v_4)$.

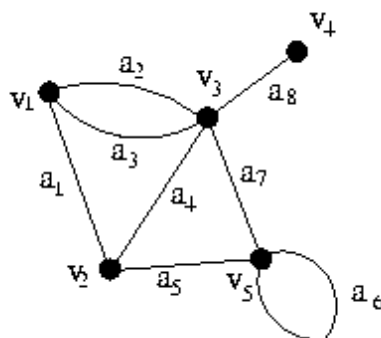


Figura 1

Note que nessa definição são permitidos *laços* (veja a aresta a_6) e *arestas paralelas* (as arestas a_2 e a_3 , por exemplo). Um grafo que não contém nenhum laço e nenhuma aresta paralela é chamado *grafo simples*. Essa definição não impede que um grafo seja infinito. Mas esse tipo de grafo não será estudado aqui. Um grafo que contém no mínimo um laço é um *pseudografo*. Um grafo que contém arestas paralelas é um *multigrafo*.

Exemplo de aplicação

As pontes de Königsberg.

O problema das pontes de Königsberg é um problema antigo que foi resolvido por Euler, com a criação da teoria dos grafos. O problema é o seguinte. Considerando um rio com duas ilhas e 7 pontes como ilustrado na figura 2, é possível identificar um caminho que atravessasse todas as pontes uma vez só e que retorne ao ponto de partida?

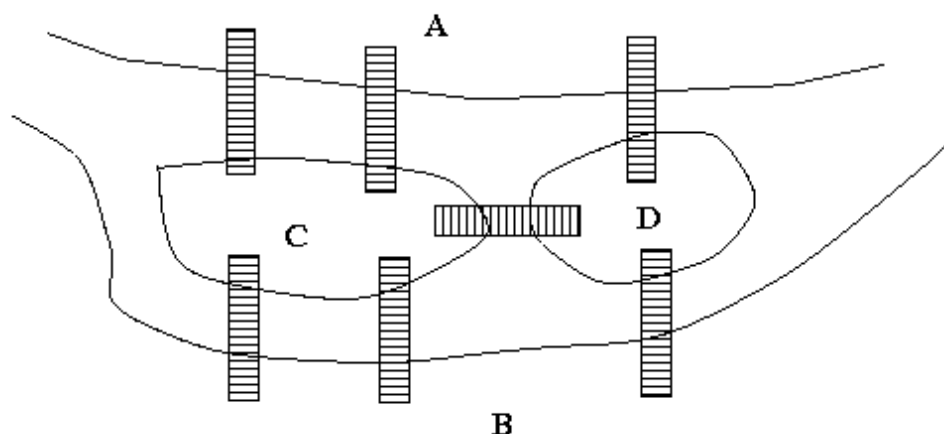


Figura 2

Para resolver esse problema, Euler o representou com o grafo ilustrado na figura 3. Com essa representação, e considerando as propriedades dos grafos que serão apresentadas mais tarde nesse curso, é possível resolver facilmente esse problema.

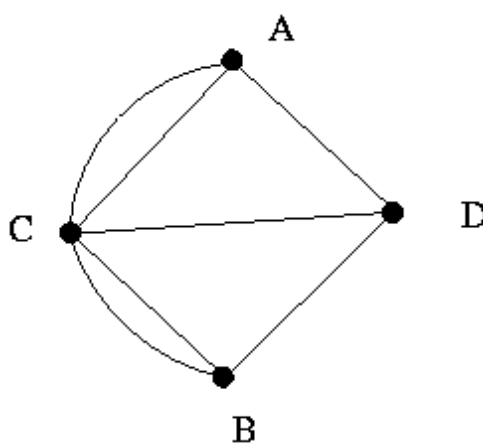


Figura 3

Grafo completo

Um grafo completo com v vértices, escrito K_v , é um grafo simples onde todo par de vértices é ligado por uma aresta. Em outras palavras, um grafo completo é um grafo simples que contém o número máximo de arestas.

Teorema 1-1: O número de arestas em um grafo completo é $n(n-1)/2$.

Prova: A prova é por indução matemática. Chamaremos G_n um grafo que contém n vértices.

Consideramos primeiro o caso trivial, o grafo G_1 . Nesse caso, como existe somente um vértice, é impossível definir uma aresta que não seja um laço. Então não pode existir nenhuma aresta, e verificamos que $n(n-1)/2 = 0$.

Suponhamos que a hipótese é verdadeira para G_n , onde $n \geq 1$. Seja agora o grafo G_{n+1} . Precisamos provar que o número de vértices nesse grafo é $n(n+1)/2$. Seja v_{n+1} o vértice adicional que se encontra em G_{n+1} e não em G_n . O número máximo de arestas no grafo G_{n+1} é igual ao número máximo no grafo G_n mais todas as ligações possíveis entre v_{n+1} e cada vértice de G_n . Como esse número de ligações é igual ao número de vértices em G_n , temos:

$$\text{Número máximo} = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n-1) + 2n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Uma outra maneira de chegar a esse resultado é considerar o fato que o número de arestas em um grafo completo de n vértices corresponde a todos os pares possíveis uv , onde u e v são vértices. Assim, o número de vértices é:

$$= \binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)! 2!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)! 2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Eis alguns exemplos de grafos completos:

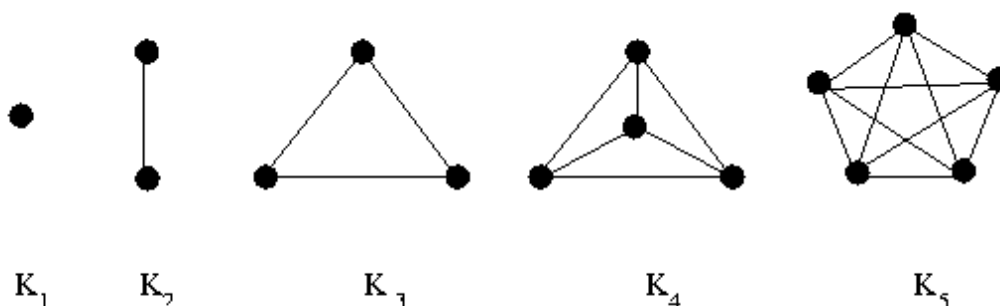


Figura 4

O grafo K_1 é chamado *grafo trivial*.

Incidência e grau

Seja dois vértices v_i e v_j , e uma aresta $a_k = (v_i, v_j)$. A aresta a_k é dita *incidente* a ambos vértices v_i e v_j . Duas arestas não paralelas que são incidentes a um mesmo vértice são ditas *adjacentes*. Dois vértices que são ligados por uma mesma aresta também são ditos adjacentes. O número de arestas incidentes a um vértice v_i (contando duas vezes os laços) é chamado o *grau* do vértice v_i : $d(v_i)$. Na figura 1, por exemplo, temos $d(v_1)=3$, $d(v_5)=4$ e $d(v_4)=1$.

Suponhamos agora um grafo G com a arestas e n vértices v_1, v_2, \dots, v_n . Como cada aresta contribui para dois graus, a soma dos graus de todas as arestas de G é duas vezes o número de arestas:

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2a$$

$$\sum_{i=1}^n$$


Teorema 1-2: O número de vértices de grau ímpar de um grafo é sempre par.

Prova: Separando os vértices de grau par e os de grau ímpar, a soma pode ser separada em duas somas:

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = \sum_{\text{par}} d(v_k) + \sum_{\text{ímpar}} d(v_l)$$

Como a soma na esquerda é par ($=2a$) e a primeira soma do lado de direita também é par, por ser uma soma de números pares, a segunda também tem que ser par:


$$\sum_{\text{ímpar}} d(v_l) = \text{um número par}$$

Como todo valor v_l é ímpar, a quantidade de itens na soma tem que ser par. 

Um vértice que possui grau zero é um vértice *isolado*. É possível que um grafo não contenha nenhuma aresta. Nesse caso todos os vértices são isolados e o grafo é chamado *grafo nulo*. Um grafo no qual todos os vértices têm o mesmo grau r é chamado *grafo regular de grau r* . Por exemplo, o grafo K_5 da figura 4 é um grafo regular de grau 4.

Operações sobre grafos

Eis algumas definições de operações sobre grafos que serão úteis mais para frente:

- A *união* de dois grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$, denotada $G_1 \cup G_2$, é um grafo $G_3 = (V_3, E_3)$, onde $V_3 = V_1 \cup V_2$ e $E_3 = E_1 \cup E_2$.
- Um grafo é dito *decomposto* em dois grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ se $G_1 \cup G_2 = G$ e se $E_1 \cap E_2$ é vazio. 
- *Remoção*: Seja v_i um vértice de G . O grafo $G - v_i$ é um subgrafo de G onde v_i é retirado, com todas as arestas incidentes a v_i .

Isomorfismo

Dois grafos $G_1(V_1, E_1)$ e $G_2(V_2, E_2)$ são ditos *isomorfos entre si* se existe uma correspondência entre os seus vértices e arestas de tal maneira que a relação de incidência seja preservada. Em outros termos, temos $|V_1| = |V_2|$ e existe uma função unívoca $f: V_1 \rightarrow V_2$, tal que (i, j) é elemento de E_1 se e somente se $(f(i), f(j))$ é elemento de E_2 . Eis alguns exemplos de grafos isomorfos:

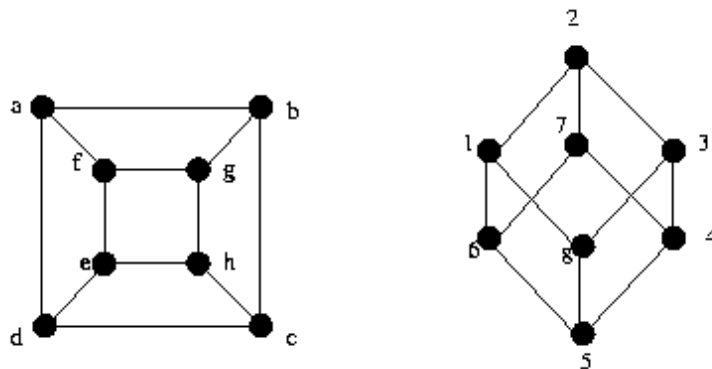


Figura 5

Para ver o isomorfismo dos grafos da figura 5, podemos utilizar a seguinte função:

$$f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 3, f(d) = 8, f(e) = 5, f(f) = 6, f(g) = 7, f(h) = 4.$$

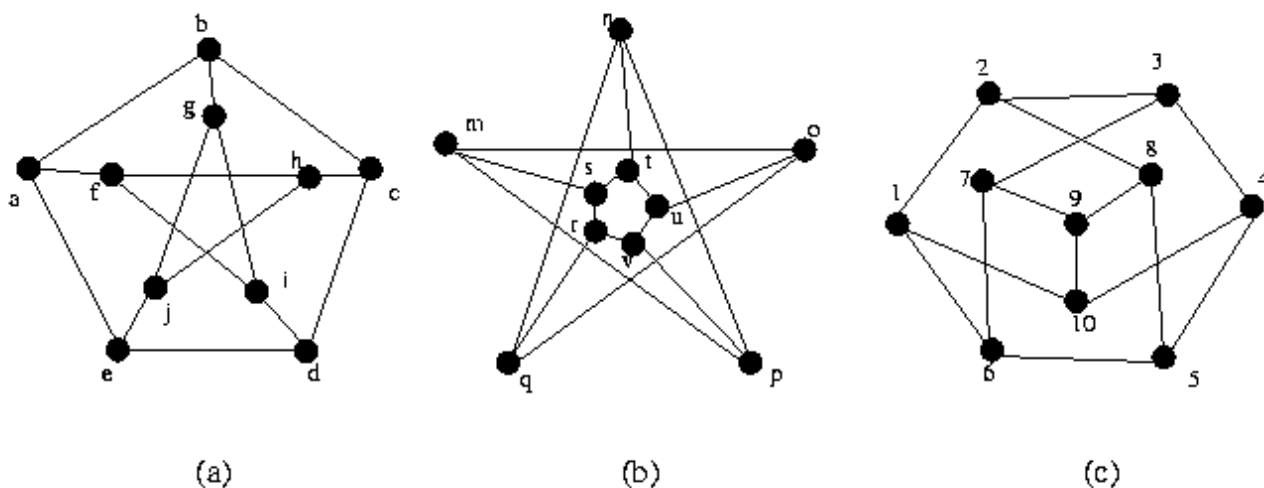


Figura 6

Para ver o isomorfismo dos grafos 6(a) e 6(b), utilize a seguinte função:

$$f(a) = s, f(b) = t, f(c) = u, f(d) = v, f(e) = r, f(f) = m, f(g) = n, f(h) = o, f(i) = p, f(j) = q$$

Para ver o isomorfismo dos grafos 6(a) e 6(c), utilize a seguinte função:

$$f(a) = 1, f(b) = 10, f(c) = 4, f(d) = 5, f(e) = 6, f(f) = 2, f(g) = 9, f(h) = 3, f(i) = 8, f(j) = 7.$$

Esses exemplos devem ser suficientes para mostrar que não é sempre fácil determinar se dois grafos são isomorfos. Não existe atualmente um algoritmo eficiente para resolver esse problema. Poderíamos tentar todas as permutações possível, mas isso daria um algoritmo de complexidade em $O(n!)$. Para que dois grafos sejam isomorfos, no mínimo essas condições tem que ser respeitadas:

1. Os dois têm o mesmo número de vértices.
2. Os dois têm o mesmo número de arestas.
3. Os dois têm o mesmo número de vértices de grau n , para qualquer valor n entre 0 e o número de vértices que o grafo contém.

Note que isso não é suficiente para que sejam isomorfos. Por exemplo, os grafos da figura 7 respeitam essas condições e não são isomorfos.

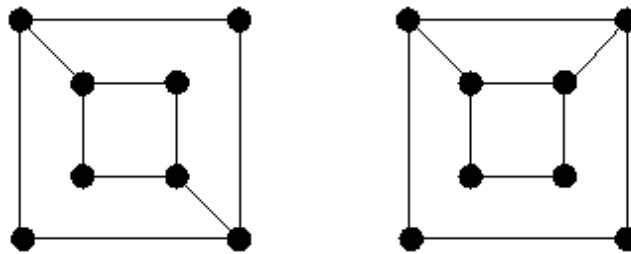


Figura 7

Mesmo se ambos grafos são regulares de grau k , as condições acima não são suficientes para concluir que eles são isomorfos. Veja o exemplo da figura 7'. É muito fácil ver que eles não são isomorfos apesar de que os dois são regulares de grau 3.

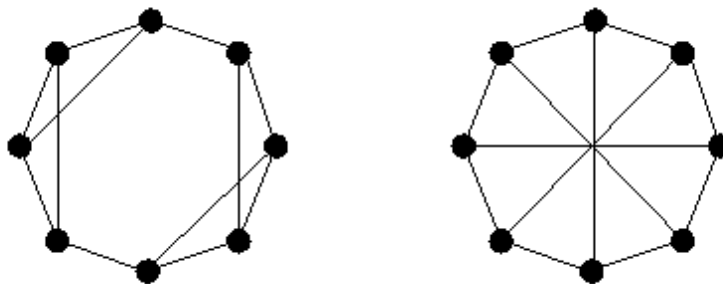


Figura 7'

Para determinar se um grafo é isomorfo, existe uma técnica (não fácil de implementar!) que consiste em modificar a maneira de desenhar um grafo para torná-lo igual ao outro, com a exceção dos rótulos dos vértices. Para explicar melhor isso, vamos ver como o grafo da figura 6a pode ser transformado em um grafo equivalente ao grafo da figura 6b. Como ilustrado na figura 8, começamos colocando fora os vértices f, g, h, i e j para obter o grafo 8b. Depois, colocamos os vértices a, b, c, d e j no meio, para obter o grafo isomorfo.

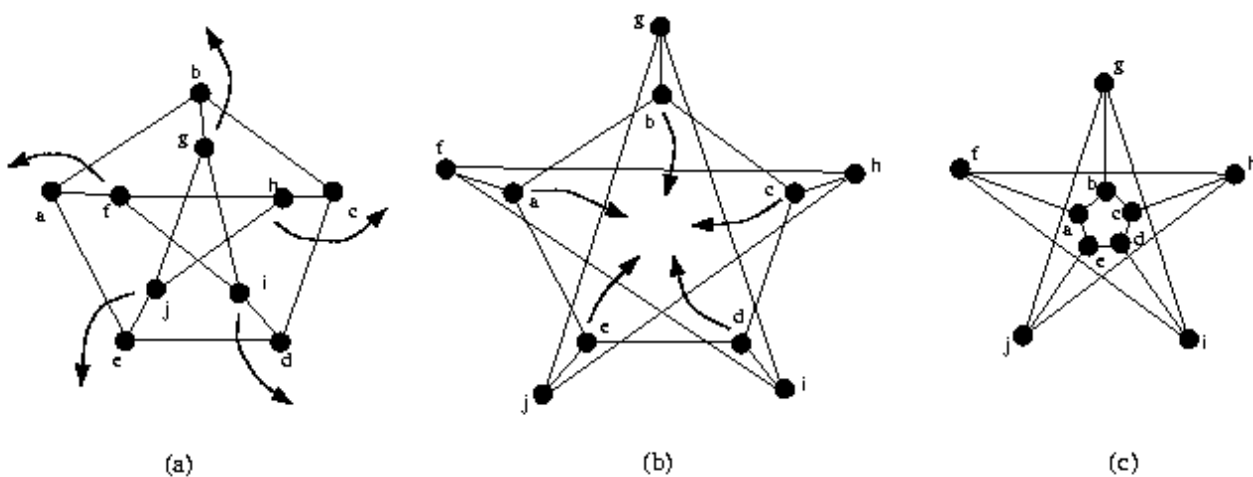


Figura 8

Vetor de grau

O vetor de grau $d(G)$ de um grafo G é a sequência dos graus dos vértices de G em ordem não crescente. Note que dois grafos não isomorfos podem ter o mesmo vetor de grau. Por exemplo, o vetor de grau dos grafos da figura 7 é o seguinte: $[3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2]$.

Uma questão interessante é saber se um dado vetor é um *vetor gráfico*, isto é, um vetor tal que é possível desenhar um grafo usando os valores que ele contém. Isso poderia ser útil, por exemplo, para testar se não houve erro na produção de uma representação interna de um grafo no computador.

Já podemos identificar algumas propriedades essenciais para que um vetor de grau represente um grafo. A soma dos valores deve ser par e o número de valores ímpares deve ser par. Se o grafo representado deve ser simples, cada valor não pode ultrapassar $n-1$, onde n é o número de valores contidos na sequência. Mas isso não é suficiente. Considere por exemplo a sequência $[3, 3, 1, 1]$. É fácil conferir que ela respeita todas as condições e entretanto não é um vetor gráfico. O Teorema 1-3 indique como determinar se um vetor de grau é gráfico:

Teorema 1-3: Um vetor de grau $S = [d_1, d_2, \dots, d_n]$ é gráfico se e somente se a sequência $S_1 = [d_2-1, d_3-1, \dots, d_{d_1+1}-1, d_{d_1+2}, \dots, d_n]$, após ordenação em ordem não crescente, é gráfica.

Prova:

Ida: Primeiro, devemos entender a idéia atrás desse teorema. Retirando o primeiro valor do vetor, o que de fato é equivalente a retirar o vértice do grafo que tem o maior grau, devemos subtrair 1 a d_1 vértices do grafo resultante. O Teorema diz que se fizermos isso para os d_1 vértices de maior grau (representados pelos d_1 próximos valores da sequência), o resultado é um vetor gráfico.

Seja um grafo G que corresponde ao vetor S . Tem dois casos a considerar. Se o vértice v que corresponde a d_1 é efetivamente ligado aos vértices que correspondem aos d_1 próximos valores da sequência, não tem nada a provar, pois é evidente que nesse caso o grafo resultante depois de remoção de v corresponde ao vetor S_1 . Suponhamos agora que v é ligado a um vértice u que não corresponde a um dos valores modificados da sequência. Isso significa que existe um vértice w não ligado a v que corresponde a um dos valores de maior grau. Vamos mostrar que é possível modificar G de tal maneira que w seja ligado com v e u não ligado com v , conservando o mesmo vetor de grau. Fazendo assim com todos os vértices ligados a v que não são na lista dos vértices de maior grau, voltaremos ao outro caso que já foi considerado.

Considere a figura 8'a, onde a é a aresta que liga v e u e b é a aresta que liga w com um de seus vértices adjacentes. Para transformar o grafo, é só usar a outra extremidade de b para ligar w com v . Ao mesmo tempo, deslocamos a extremidade da aresta a de v para o vértice que foi desligado de w . Podemos conferir facilmente que nada muda na sequência de valores, todos os vértices envolvidos nessa mudança conservam o mesmo grau.

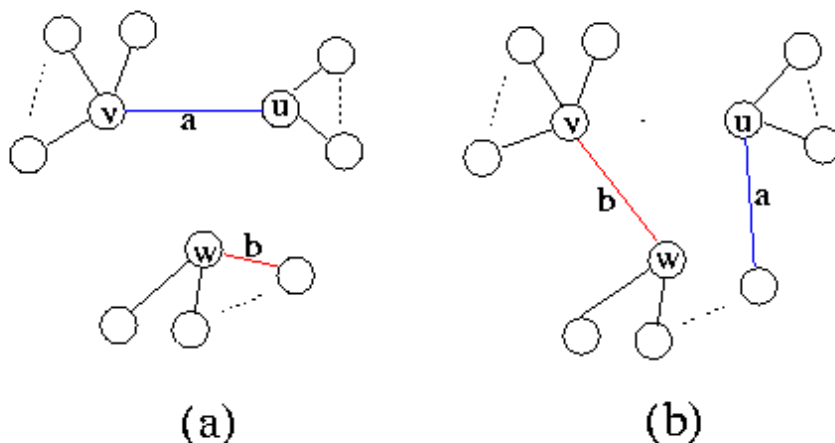


Figura 8'

Volta: Deixamos essa prova como exercício.

Subgrafos

Um grafo $G_2(V_2, E_2)$ é um subgrafo de um grafo $G_1(V_1, E_1)$ se $V_2 \subseteq V_1$ e $E_2 \subseteq E_1$. Podemos verificar facilmente os seguintes enunciados:

1. Todo grafo é subgrafo dele mesmo.
2. O subgrafo de um subgrafo de G é um subgrafo de G .
3. Um vértice de G é um subgrafo de G .
4. Um aresta de G com os dois vértices que ele liga é um subgrafos de G .

Eis alguns subgrafos interessantes:

- **Clique:** Uma clique é um subgrafo que é completo.
- **Subgrafo induzido:** Seja $H(W, F)$ um subgrafo de $G = (V, E)$. Se uma aresta entre dois vértices de W existe se e somente se essa aresta existe em V , digamos que H é um subgrafo induzido por W .
- **Conjunto independente de vértices:** Um subgrafo induzido de G que não contém nenhuma aresta.

Considere agora o grafo ilustrado na figura 9. Na figura 10 são ilustrados quatro subgrafos desse grafo. Em 11a temos um subgrafo que não tem nada de especial. O grafo ilustrado em 11b é uma clique, o subgrafo 10c é um grafo induzido pelos vértices c, d, e e f , e o último é um conjunto independentes de vértices.

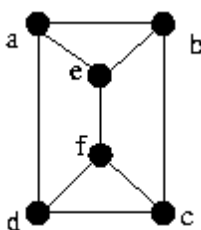


Figura 9

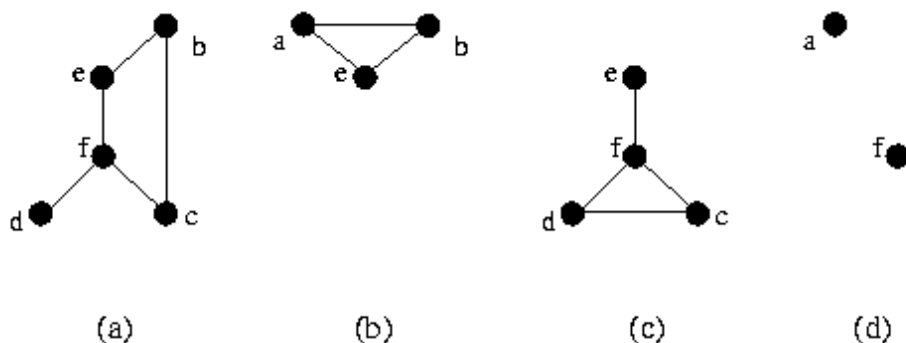


Figura 10

Caminho

Um caminho em um grafo $G = (V, E)$ é uma seqüência de vértices v_1, \dots, v_n , tal que (v_i, v_{i+1}) é um elemento

de E , para $1 \leq i < n-1$. Essa sequência é dita um *caminho de v_1 a v_n* . Um caminho que não passa duas vezes pelo mesmo vértice é um *caminho simples (ou elementar)*. Um caminho que não contém duas vezes a mesma aresta é um *trajeto*. Note que essa definição de caminho funciona realmente somente com grafo simples.

No grafo ilustrado na figura 9, a sequência $[a, e, f, c]$ é um caminho simples e também um trajeto. A sequência $[a, e, b, a, d]$ é um trajeto mas não um caminho simples.

Um caminho onde o primeiro vértice da sequência é igual ao último é um *circuito*, se todas as arestas são distintas. Se além disso, não há vértice repetido no circuito, digamos que ele é um *ciclo*. Na figura 9, a sequência $[a, b, c, f, e, a]$ é um ciclo: nenhum vértice se repete, com a exceção dos primeiro e último. Um exemplo de circuito que não é um ciclo é a sequência $[a, b, d, a, c, e, a]$ do grafo completo da figura 11.

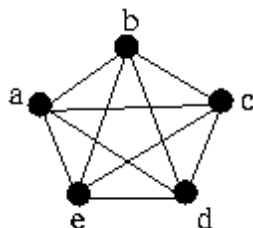


Figura 11

Grafo conexo

Um grafo $G = (V, E)$ é conexo quando existe um caminho entre cada par de V . Caso contrário o grafo é *desconexo*. Um grafo é *totalmente desconexo* quando não existe nenhuma aresta. A representação gráfica dum grafo desconexo contém no mínimo dois "pedaços". A figura 12 ilustra um grafo desconexo. Cada "pedaço" de um grafo é chamado *componente conexo*. O grafo da figura 12 tem 2 componentes conexos.

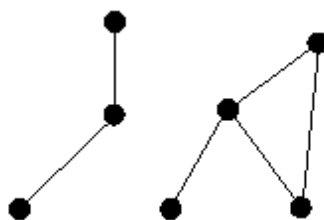


Figura 12

Teorema 1-4: *Se um grafo (conexo ou desconexo) contém exatamente dois vértices de grau ímpar, existe um caminho ligando esses dois vértices.*

Prova: Seja G um grafo onde todos os vértices são de grau par, exceto os vértices v_1 e v_2 . Segundo o teorema 1-2, não existe um grafo (ou um componente) que tem um número ímpar de vértices que possuem grau ímpar. Então v_1 e v_2 devem pertencer ao mesmo componente, e deve existir um caminho entre eles.

Grafo bipartite

Um grafo bipartite é um grafo $G = (V, E)$ cujo conjunto de vértices V pode ser separado em dois conjuntos X e Y , tal que toda aresta de E liga somente vértices de X com vértices de Y .

A figura 13a ilustra um grafo bipartite. Isso fica evidente se consideramos o grafo 13b que é isomorfo.

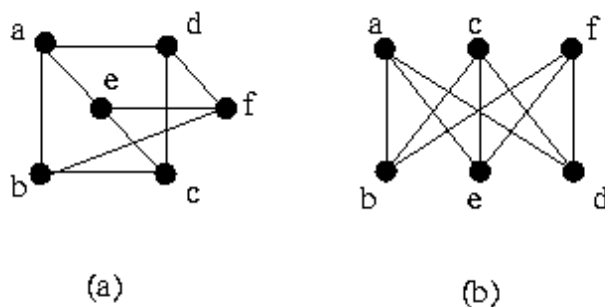


Figura 13

Existe um teorema interessante em relação ao grafo bipartite:

Teorema 1-5: *Um grafo G é bipartite se e somente se todo ciclo de G possuir comprimento par.*

Prova:

Ida: Seja X e Y as duas partições de G . Todo caminho em G alterna um vértice de X com um vertice de Y . Isso é a consequência da definição de grafo bipartite. Supondo que um ciclo contém um vértice v_i em uma das duas partições. Para voltar a esse vértice, é preciso ir na outra partição e voltar um número par de vezes.

Volta: Seja G um grafo onde todo ciclo é de comprimento par. Seja um vértice v_i de G . Colocamos num conjunto X o vértice v_i e todos os outros que são a uma distância par de v_i . Os outros vértices formam o conjunto Y . Se não tivesse nenhuma aresta ligando dois vértices de X ou dois vértices de Y , respeitariamos as condições para que o grafo seja bipartite. Suponhamos agora que existe uma outra aresta entre dois vértices a e b de X (ou Y). Já temos um caminho par entre a e b . Acrescentando a nova aresta, obteríamos um ciclo de comprimento ímpar, o que contradiz a hipótese. Portanto, não pode existir outra aresta entre qualquer par de vértice que já está em X (igualmente par Y) e o grafo é bipartite.

Note que essa prova indica de maneira direta qual seria o algoritmo par determinar se um grafo é bipartite ou não.

A noção de grafo completo pode ser estendido aos grafos bipartites. Um **grafo bipartite completo** é um grafo onde todos os vértices da partição X é ligado por uma aresta a todos os vértices da partição Y . Seja m e n o número de vértices em X e Y , respectivamente, o grafo completo bipartite sera denotado $K_{m,n}$. Por exemplo, o grafo da figura 13b é $K_{3,3}$.

Grafo direcionado

Um grafo $G = (V, E)$ é um conjunto não-vazio V , cujos elementos são chamados *vértices*, e um conjunto E de *arestas*. Uma aresta é um par ordenado (v_j, v_k) . Diz-se que cada aresta (v_j, v_k) possui uma única direção de v_j para v_k . Também a aresta (v_j, v_k) é dita *divergente* de v_j e *convergente* a v_k . O número de arestas divergentes e convergentes de um vértice são chamados *grau de saída* e *grau de entrada*, respectivamente. A figura 14 ilustra um exemplo de grafo direcionado.

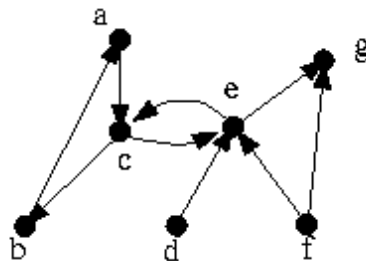


Figura 14

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

$$E = \{(a, c), (c, b), (b, a), (c, e), (e, c), (d, e), (e, g), (f, g), (f, e)\}$$

Teorema 1-6: *A soma dos graus de saída (de entrada) de um grafo direcionado é igual ao número de arestas no grafo.*

É muito fácil se convencer do teorema 1-6, considerando que cada aresta contribui exatamente para um grau de entrada e um grau de saída.

O grafo obtido substituindo cada aresta de um grafo direcionado G por uma aresta não direcionada é chamado **grafo subjacente** de G . a figura 14' ilustra o grafo subjacente do grafo da figura 14.

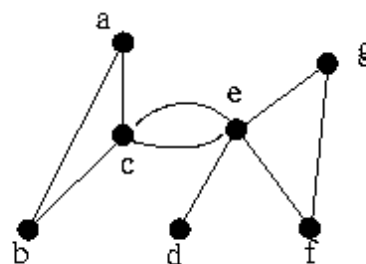


Figura 14'

A noção de isomorfismo pode ser estendida aos grafos direcionados. Nesse caso, devemos tomar cuidado para considerar também a orientação das arestas. Por exemplo, o grafo (a) da figura 14" é isomorfo ao grafo (b) mas não ao grafo (c).

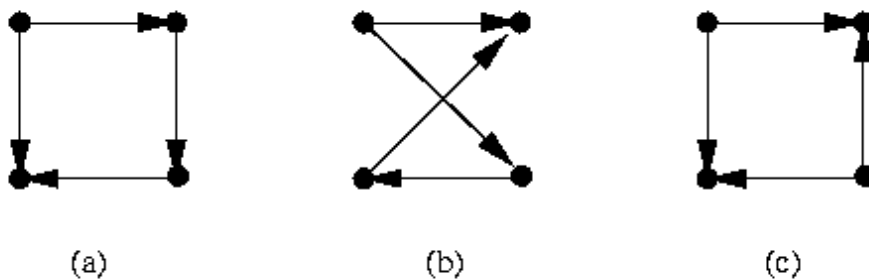


Figura 14"

Um grafo é **conexo** se o seu grafo subjacente é conexo. Intuitivamente isso corresponde à característica do grafo constituir um pedaço só. Um grafo direcionado onde existe um caminho entre qualquer par de vértices é dito **fortemente conexo**.

Um problema interessante é saber se um grafo não direcionado pode ser transformado em grafo fortemente conexo, trocando cada aresta por uma aresta orientada. Sabendo que uma *ponte* é uma aresta que torna um grafo desconexo se ela for retirada, temos um teorema interessante nesse respeito:

Teorema 1-7: *É possível orientar as arestas de um grafo conexo não direcionado de tal maneira a obter um grafo direcionado fortemente conexo se e somente se o seu grafo subjacente não contém nenhuma ponte.*

Prova:

Ida: Suponhamos um grafo fortemente conexo que contém no mínimo uma ponte. Deve existir no grafo no mínimo dois vértices cuja ligação exige passar por essa ponte. Necessariamente essa ponte permite caminhar em uma direção, por exemplo de um vértice v_i para outro vértice v_k , mas não permite o retorno de v_k para v_i .

Volta: Como o grafo não contém nenhuma ponte, toda aresta faz parte de um ciclo. Suponhamos tal ciclo, que chamaremos C_1 , e orientemos as arestas de tal maneira que seja possível percorrer o ciclo e voltar à origem. É claro que em C_1 todo vértice é acessível a partir de qualquer outro. Consideremos agora um outro ciclo C_2 do grafo que tem no mínimo um vértice em comum com C_1 . Orientamos as arestas da mesma maneira, mas sem mudar a orientação das arestas de C_2 que já existem em C_1 . É evidente que qualquer vértice do grafo obtido combinando C_1 e C_2 é alcançável a partir de qualquer outro, pois existe um caminho fechado que passa por todos os vértices. Por exemplo, na figura 15, temos o caminho fechado a, b, c, d, e, k, j, i, h, g, c, d, e, f, a. Continuando assim até que todos os vértices do grafo sejam considerados, obteremos um grafo que contém um caminho fechado passando por todos os vértices, pois ele é conexo. As arestas que sobram, depois desse processo, podem ter qualquer orientação.

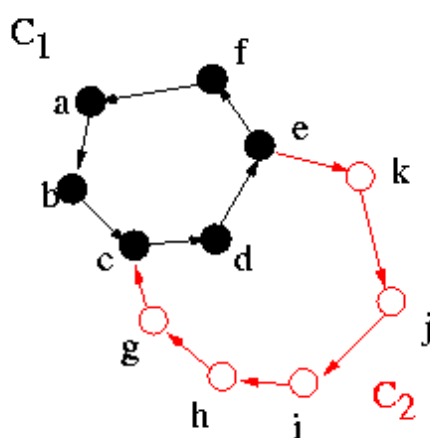


Figura 15

A prova do teorema 1-7 pode ser aproveitada para identificar o algoritmo que transforma um grafo não direcionado em um grafo direcionado fortemente conexo. Considere por exemplo o grafo da figura 5. Como ele não contém nenhuma ponte, ele pode ser transformado em grafo direcionado fortemente conexo. Primeiro podemos orientar o ciclo a-b-c-d-a, como ilustrado na figura 16a. Depois podemos acrescentar o ciclo c-h-g-b-c (veja o resultado na figura 16b). Depois dessa etapa sobram os dois vértices e e f. Na figura 16c, podemos ver que o acréscimo do ciclo g-f-e-h-g termina o processo. Agora todos os vértices fazem parte de um caminho fechado: a-b-c-h-g-f-e-h-g-b-c-d-a. As arestas que sobram podem ter qualquer orientação. A figura 17 ilustra um resultado final possível.

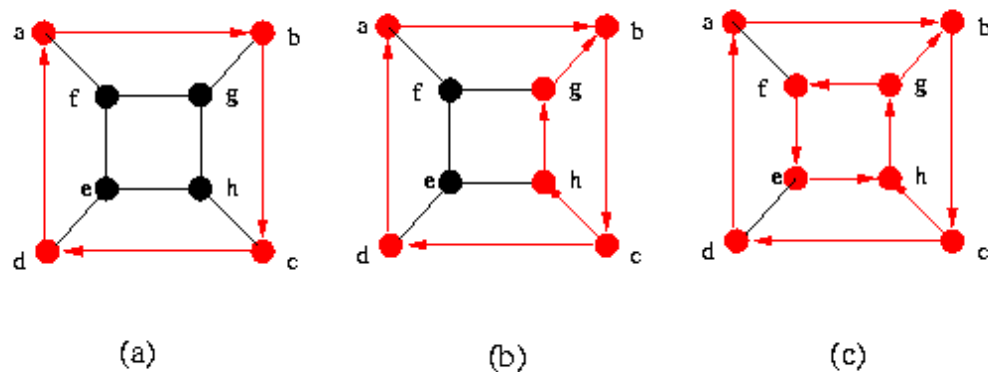


Figura 16

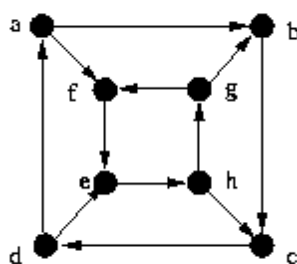


Figura 17

Uma consequência importante do teorema 1-7 é o seguinte teorema:

Teorema 1-8: *O grafo subjacente de um grafo fortemente conexo não pode conter uma ponte.*

A demonstração do teorema 1-7 sugere também um outro teorema:

Teorema 1-9: *Um grafo é fortemente conexo se e somente se existe um caminho fechado que passa por todos os vértices do grafo.*

Ida: Suponhamos G um grafo fortemente conexo, e u, v dois vértices desse grafo. Existe um caminho de u para v e de v para u . Então, existe um caminho fechado que contém u e v . Suponhamos agora um outro vértice w . Existe um caminho de u para w e de w para u . Isso implica que existe também um caminho fechado que contém os três vértices u, v e w (veja figura 18). Continuando assim com os outros vértices do grafos, obteremos um caminho fechado que passa por todos os vértices do grafo.

Volta: Trivial. Eu deixo como exercício.

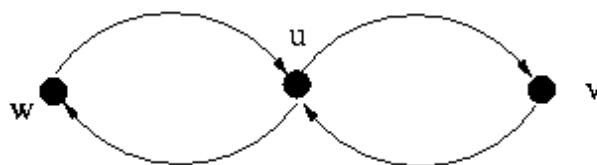


Figura 18

Exercícios

Exercício 1-1: Desenhe todos os grafos simples que é possível construir com 1, 2, 3, e 4 vértices.

Exercício 1-2: O complemento de um grafo simples $G = (V, E)$ é o grafo simples $G^c = (V, F)$, no qual existe uma aresta entre dois vértices se e somente se não existe uma aresta entre os mesmos vértices em G . Desenhe o complemento dos seguintes grafos:

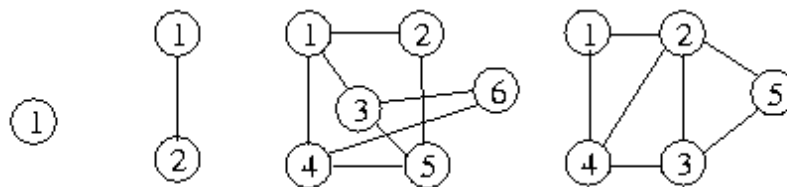


Figura 19

Exercício 1-3: Mostre que o complemento de um grafo bipartite não é necessariamente um grafo bipartite.

Exercício 1-4: Mostre que $G \cup G^c$ é um grafo completo.

Exercício 1-5: Utilize o teorema 1-1 para provar que $1 + 2 + \dots + (n-1) = n(n-1)/2$.

Exercício 1-6: Seja G um grafo com v vértices e a arestas. Quantas arestas contém o grafo G^c ?

***Exercício 1-7:** Provar: se G é um grafo que contém 6 vértices, G ou G^c (possivelmente ambos) deve conter um grafo isomorfo a K_3 .

Exercício 1-8: Provar que se G é um grafo cíclico de 5 vértices (ver figura 20), ele é isomorfo a G^c .

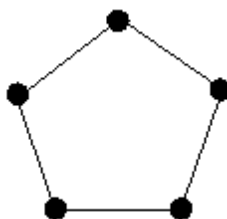


Figura 20

Exercício 1-9: Seja v o número de vértices em um grafo G . Provar que se G é isomorfo a G^c , um dos dois valores v e $v-1$ é múltiplo de 4.

Exercício 1-10: Mostre que não existe um grafo simples que contém 12 vértices e 28 arestas e no qual:

- O grau de cada vértice é 3 ou 4.
- O grau de cada vértice é 3 ou 6.

Exercício 1-11: Mostre que o número de vértices em um grafo regular de grau k é par se k é ímpar.

Exercício 1-12: Mostre que não é possível ter um grupo de 7 pessoas, no qual cada um conhece exatamente 3 outras pessoas.

Exercício 1-13: Mostre que se um grafo bipartite é regular, os dois subgrafos X e Y que o compõem têm o mesmo número de arestas e o mesmo número de vértices.

Exercício 1-14: Um grafo cúbico é um grafo simples regular de grau 3. Construa 2 grafos cúbicos não-isomorfos.

Exercício 1-15: Qual é o número máximo de arestas em um grafo bipartite?

Exercício 1-16: Mostre que o grafo da figura 7a é isomorfo ao grafo da figura 7c, redesenhando-o passo a passo.

Exercício 1-17: Mostre que os grafos da figura 21 são isomorfos.

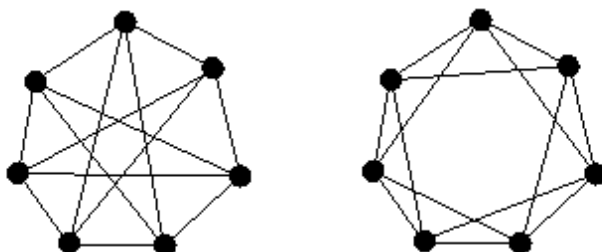


Figura 21

Exercício 1-18: Prove que quaisquer dois grafos conexos com n vértices, todos de grau 2, são isomorfos.

***Exercício 1-19:** Prove que um grafo simples que contém n vértices é necessariamente conexo se ele tem mais de $(n-1)(n-2)/2$ arestas.

Exercício 1-20: Desenhe um grafo conexo que fica desconexo quando qualquer uma das suas arestas é retirada.

Exercício 1-21: Prove que um grafo de n vértices satisfazendo a condição do exercício 1-20

- a) é simples;
- b) contém exatamente $n-1$ arestas.

Exercício 1-22: Mostre que dois grafos simples são isomorfos se e somente se o seus complementos são isomorfos.

Exercício 1-23: Quais dos grafos da figura 22 são isomorfos? (Tente com cada uma das técnicas explicada nessa apostila)

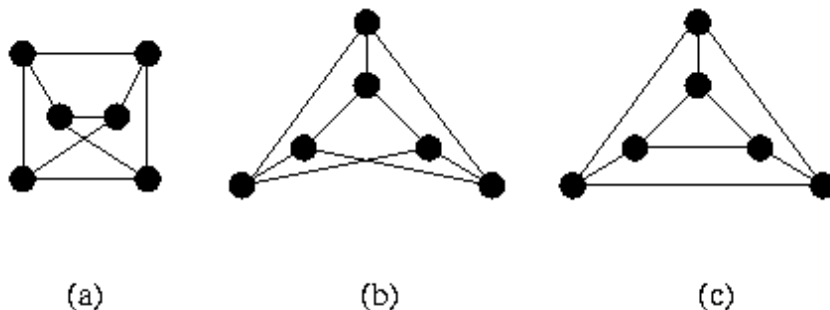


Figura 22

Exercício 1-24: Mostre que se num grupo de pessoas, existem no mínimo duas pessoas que não se conhecem, é possível formar um subgrupo desse grupo tal que nele não existem duas pessoas que se conhecem e que toda pessoa não incluída nesse subgrupo conhece no mínimo uma pessoa do subgrupo.

Exercício 1-25: Prove que um grafo conexo continua conexo depois da remoção de uma aresta a_i se e

somente se a_i faz parte de um ciclo.

Exercício 1-26: Para cada grafo da figura 23, indique se ele é bipartite. Caso ele é, redesenhe o grafo de maneira a distinguir os dois subconjuntos de vértices.

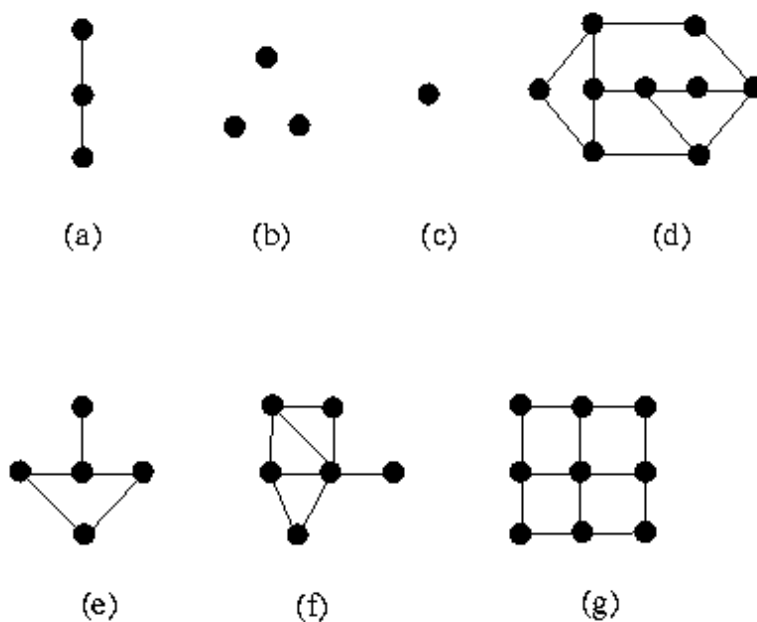


Figura 23

Exercício 1-27: Mostre que não existe um conjunto independente de 3 vértices no grafo ilustrado na figura 9.

Exercício 1-28: Considere o grafo da figura 6a. É possível transformá-lo em grafo fortemente conexo? Se for, inspire-se da prova do teorema 1-7 para transformá-lo em grafo fortemente conexo.

Exercício 1-29: Um **torneio** é um grafo direcionado cujo grafo subjacente é um grafo completo. Prove que nesse tipo de grafo não pode existir mais de um vértice de grau de entrada nulo e mais de um vértice de grau de saída nulo.

Exercício 1-30: Considere a figura 24. Quais desses grafos são isomorfos.

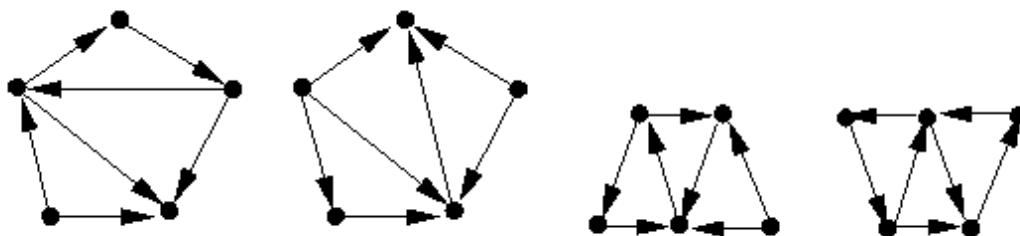


Figura 24

Exercício 1-31: Seja G um grafo direcionado simples de n vértices e a arestas.

- Prove que, se G é conexo, $n - 1 \leq a \leq n(n - 1)$.
- Quais são os limites inferior e superior para a se G é fortemente conexo?

Exercício 1-31: Prove a volta do Teorema 1-3.

Exercício 1-32: Sejam G_1 e G_2 dois grafos simples de n vértices. Suponha também que nesses grafos nenhum vértice possui grau superior a 2. Proponha um algoritmo em $O(n)$ para determinar se esses grafos são isomorfos.

Exercício 1-33: Prove que se um grafo conexo G é decomposto em dois subgrafos g_1 e g_2 , existe necessariamente um vértice comum entre g_1 e g_2 .

Exercício 1-34: Mostre que a união de dois caminhos disjuntos (que não tem aresta em comum) entre dois vértices resulta em um circuito.

Exercício 1-35: Seja um grafo simples de n vértices tal que por qualquer par de vertices distintos v_j e v_k , temos: $d(v_j) + d(v_k) \geq n-1$. Prove que esse grafo é necessariamente conexo.

Exercício 1-36: Desenhe $G_1 \cup G_2$ nos três casos ilustrados na figura 25.

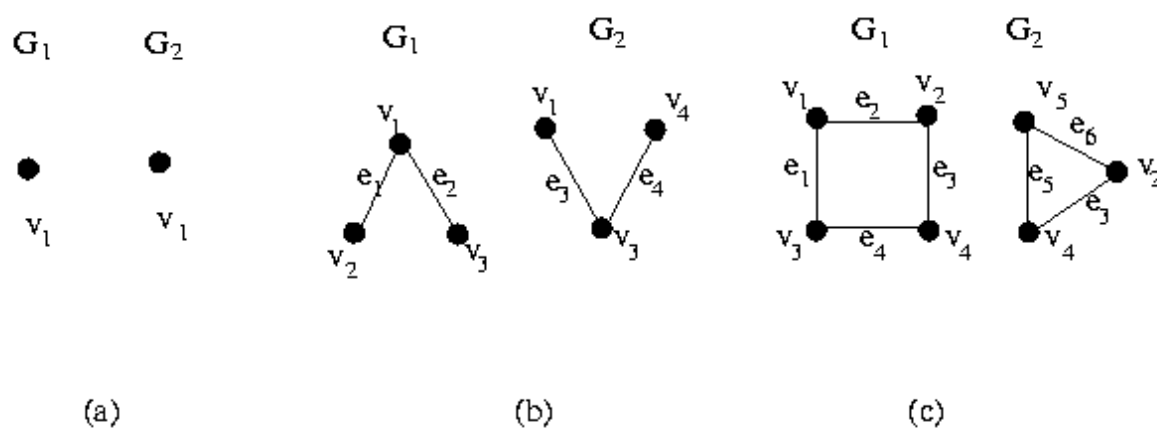


Figura 25

Exercício 1-37: Determine quais desses vetores de grau são gráficos:

1. $[5, 5, 5, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2]$
2. $[7, 6, 5, 5, 4, 3, 2, 2, 2]$
3. $[4, 4, 3, 2, 1, 0]$

Exercício 1-38: Oriente as arestas dos grafos das figuras 6a, 7, 13, 23d e 23g para obter um grafmo fortemente conexo.

Exercício 1-39: Mostre que qualquer vetor de grau deve conter no mínimo dois valores iguais.

Exercício 1-40: Mostre que um vetor de grau corresponde a um multigrafo se e somente se a soma dos valores desse vetor é par.

Exercício 1-41: Suponhamos que ninguém tem mais de 2.000.000 de cabelos. Utilize a teoria dos grafos para mostrar que deve existir na cidade de São Paulo no mínimo duas pessoas que tem exatamente o mesmo número de cabelos.

Exercício 1-42: Moste que qualquer subgrafo de um grafo bipartite é um grafo bipartite.