UNIDADE 5

Funções polinomiais e racionais

5

Objetivos de aprendizagem

- Identificar funções polinomiais de grau maior do que 2.
- Identificar funções racionais.
- Analisar a representação algébrica e gráfica das funções polinomiais e racionais.
- Discutir aplicações das funções polinomiais e racionais.

Seções de estudo

- Seção 1 – Funções polinomiais
- Seção 2 – Funções racionais
- Seção 3 – Outros tipos de funções

Para início de conversa

Você já deve ter percebido que estamos alargando os horizontes no contexto do estudo das funções. Você pode visualizar as funções como alicerces básicos necessários para a resolução de problemas e para a construção de novos conceitos e objetos matemáticos.

Não esqueça de que é importante você ter uma certa habilidade com o uso de softwares auxiliares na construção gráfica das funções, pois as representações gráficas são recursos fantásticos para o processo ensino-aprendizagem da Matemática.

Como você costuma fazer a leitura de representações gráficas?

SEÇÃO 1

Funções polinomiais

Após estudar as funções de primeiro e segundo graus, você pode agora visualizar as características e propriedades das funções polinomiais de grau maior do que 2.

Mas como são estas funções?

Definição: A função polinomial é definida por

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

sendo a_0, a_1, ..., a_n números reais, com $a_0 \neq 0$, chamados de coeficientes e n um número inteiro não negativo que determina o grau da função.

A representação gráfica das funções polinomiais é uma curva que pode apresentar pontos de máximos ou mínimos. São gráficos que, para serem traçados com mais facilidade, necessitam de conceitos do cálculo diferencial (não estudados nesta disciplina) ou de *softwares* matemáticos como o Graph, já citado nas unidades anteriores.

Exemplos

Classificar as seguintes funções polinomiais quanto ao seu grau:

(a) $f(x) = 2x + 3$

É uma função polinomial de grau 1. Perceba que esta é a função do primeiro grau estudada na unidade 3.

(b) $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$

É uma função polinomial de grau 2. Perceba que esta é a função do segundo grau estudada na unidade 4.

Pare! Observe!

A partir da análise da representação algébrica da função polinomial é possível dizer que o domínio destas funções será sempre o conjunto dos números reais.

(c) $f(x) = x^3 + x^2 - 3$

É uma função polinomial de grau 3.

(d) $f(x) = 4x^7 + x^6 - 1$

É uma função polinomial de grau 7.

Para analisar as características e propriedades das funções polinomiais, neste momento, é importante que você visualize a representação gráfica da função.

Existem casos particulares das funções polinomiais que são interessantes de serem analisados. Por exemplo, as funções escritas como $f(x) = x^n$, sendo n um inteiro positivo. Para $n > 2$ a forma do gráfico depende de n ser par ou ímpar. Veja as Figuras 5.1 e 5.2.

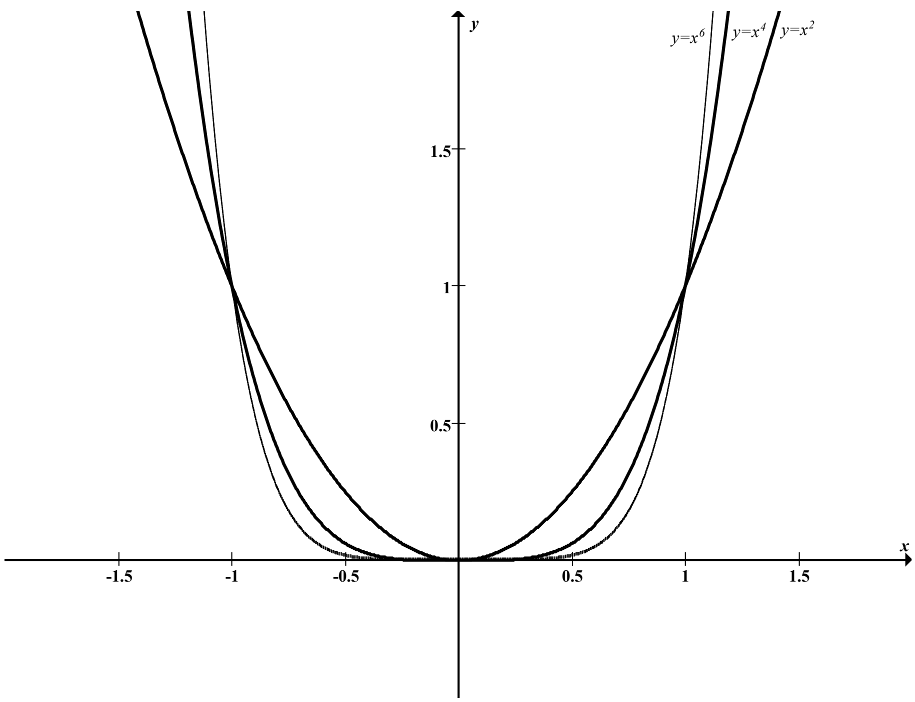


Figura 5.1 Gráfico de $y = x^n$ com n par

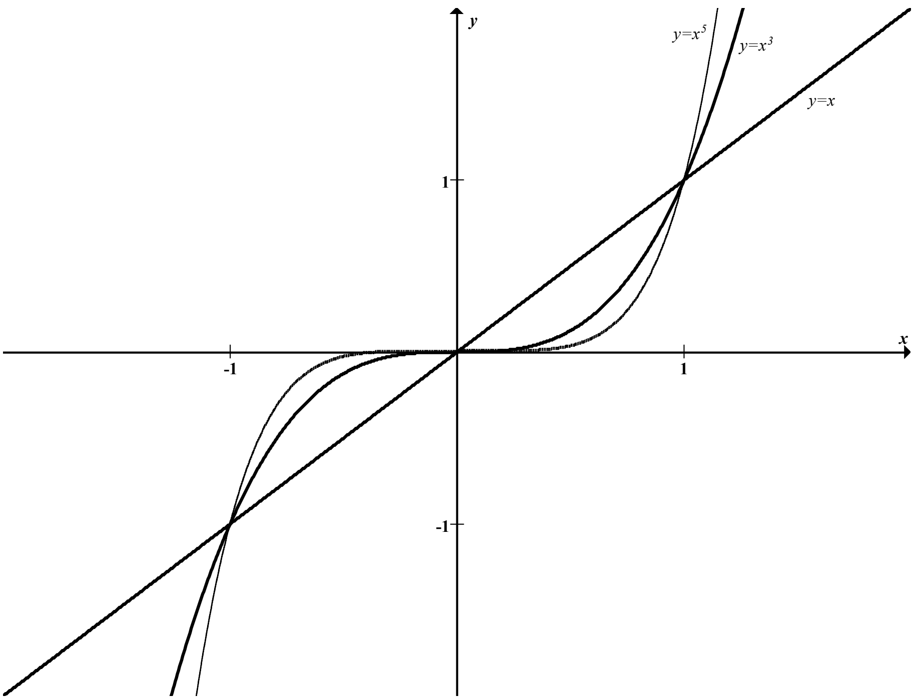


Figura 5.2 Gráfico de $y = x^n$ com n ímpar

As funções $y = x^n$ possuem aspectos comuns. Veja na tabela como ficam as propriedades e características destas funções.

Representação algébrica	$y = x^n$ n é par	$y = x^n$ n é ímpar
Representação gráfica	Figura 5.1	Figura 5.2
Domínio	conjunto dos reais	
Conjunto imagem	$[0,+\infty)$	conjunto dos reais
Zero ou raiz	$x = 0$	
Sinal da função	Positivo para qualquer $x \in \mathbb{R}$.	Positivo para $x > 0$ e negativo para $x < 0$
Crescimento	$x > 0$	A função é crescente para qualquer $x \in \mathbb{R}$.
Decrescimento	$x < 0$	Não possui intervalos de decrescimento

Pare! Observe!

Se você comparar o gráfico de $y = x^3$ (Figura 5.2) com o gráfico de $y = x^3 + 1$ (Figura 5.3), pode perceber que a curva foi deslocada 1 unidade para cima no eixo y. Isto acontecerá em vários casos, por exemplo, $y = x^3 + 2$ estará deslocado 2 unidades para cima, $y = x^3 + 3$, 3 unidades para cima e $y = x^3 - 4$, 4 unidades para baixo.

Exemplos

Analisar as características e propriedades das funções polinomiais.

(a) $y = x^3 + 1$

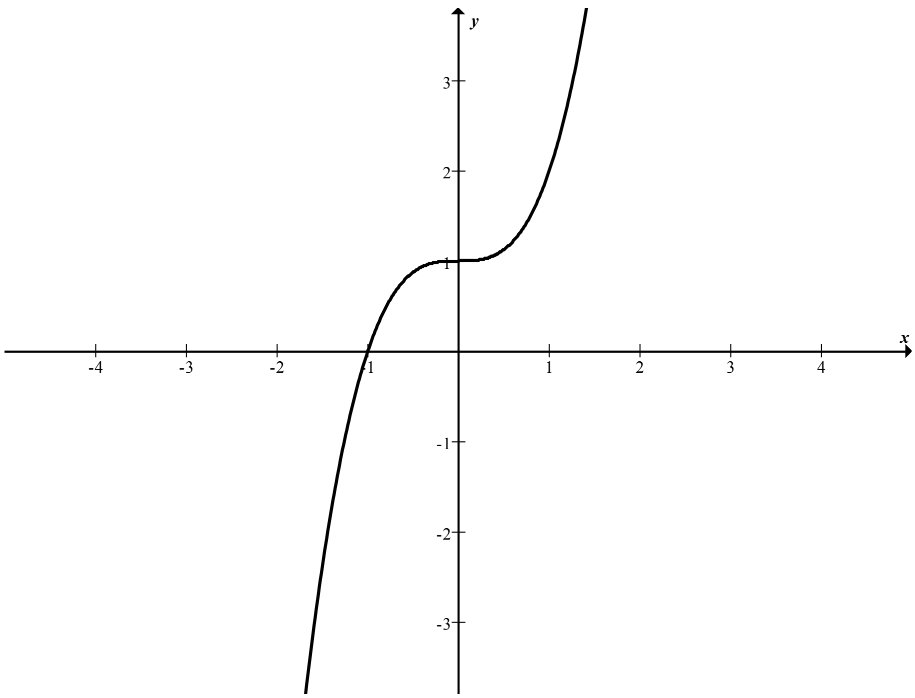


Figura 5.3 Gráfico de $y = x^3 + 1$

Representação algébrica	$y = x^3 + 1$
Representação gráfica	Figura 5.3
Domínio	conjunto dos reais
Conjunto imagem	conjunto dos reais
Zero ou raiz	$x = -1$
Sinal da função	Positivo para $x > -1$ e negativo para $x < -1$.
Crescimento/Decrescimento	A função é crescente para todos os valores de $x \in \mathbb{R}$.

(b) $y = x^4 - x^3 - 2x^2$

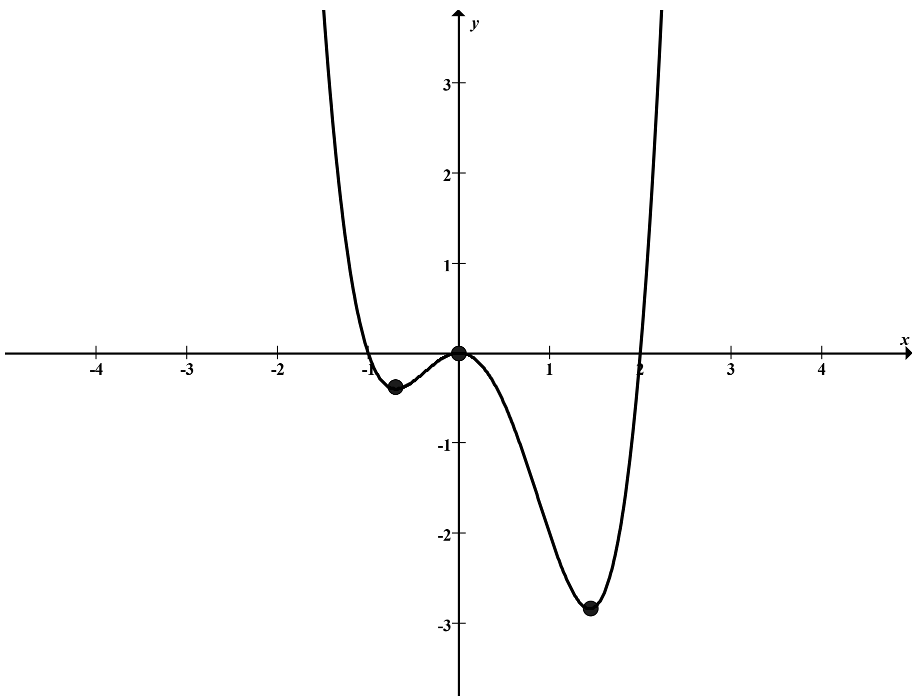


Figura 5.4 Gráfico de $y = x^4 - x^3 - 2x^2$

Pare! Observe!

Quando a função passa de decrescente para crescente, temos um ponto de mínimo. Quando passa de crescente para decrescente temos um ponto de máximo. Perceba que na Figura 5.4 estão assinalados dois pontos de mínimo e o ponto de máximo.

Representação algébrica	$y = x^4 - x^3 - 2x^2$
Representação gráfica	Figura 5.4
Domínio	conjunto dos reais
Conjunto imagem	$[-2{,}83;+\infty)$ Observando que o valor $-2{,}83$ é aproximado.
Zeros ou raízes	$x = -1$, $x = 0$, $x = 2$
Sinal da função	Positivo para $x \in (-\infty,-1) \cup (2,+\infty)$ e negativo para $x \in (-1,2)$.
Crescimento/Decrescimento	A função possui intervalos de crescimento e decrescimento.

(c) $y = x^5 - x^3$

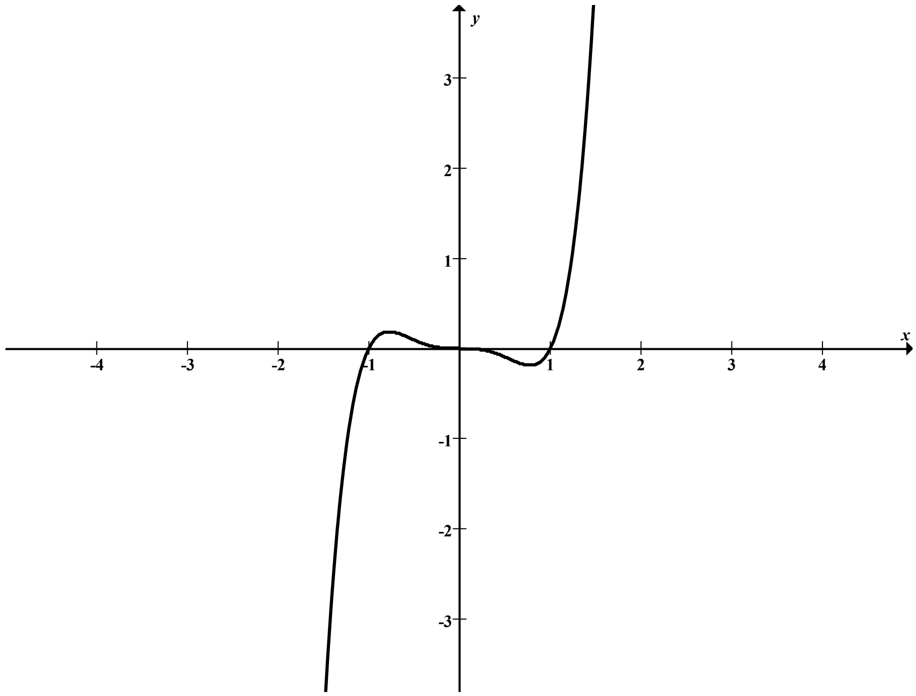


Figura 5.5 Gráfico de $y = x^5 - x^3$

Representação algébrica	$y = x^5 - x^3$
Representação gráfica	Figura 5.5
Domínio	$\mathbb{R}$
Conjunto imagem	$\mathbb{R}$
Zeros ou raízes	$x = -1$, $x = 0$, $x = 1$
Sinal da função	Positivo para $-1 < x < 0$ ou $x > 1$ e negativo para $x < -1$ ou $0 < x < 1$.
Crescimento/Decrescimento	A função possui intervalos de crescimento e decrescimento.

Olhando o presente!

Veja o seguinte problema:

P1 Suponha que a função C(q) = $q^3 - 20q^2 + 300q + 250$ expresse o custo total de fabricação de um produto. Como calcular o custo de cinco unidades? E o custo de fabricação da quinta unidade?

Se você já tem a função que expressa o custo total de fabricação de um determinado produto, pode facilmente responder as duas questões solicitadas.

Para facilitar você irá supor que a função seja:

$$C(q) = q^3 - 20q^2 + 300q + 250.$$

O custo de fabricação de cinco unidades é encontrado quando se calcula a imagem da função no ponto $q = 5$. Portanto,

$$\begin{aligned} C(5) &= 5^3 - 20\times 5^2 + 300\times 5 + 250 \\ &= 125 - 500 + 1500 + 250 \\ &= 1375 \end{aligned}$$

Se você trabalhar com unidades monetárias em reais, a resposta é R$ 1375,00.

Para saber o custo da quinta unidade, você precisa fazer a diferença entre o custo de cinco unidades e o custo de quatro unidades, ou seja,

$$\begin{aligned} C(5) - C(4) &= (5^3 - 20\times 5^2 + 300\times 5 + 250) - (4^3 - 20\times 4^2 + 300\times 4 + 250) \\ &= 1375 - 1194 \\ &= 181 \end{aligned}$$

Assim, o custo da quinta unidade é de R$ 181,00.

Observe que o gráfico desta função pode auxiliar na obtenção de outras análises (veja a Figura 5.6).

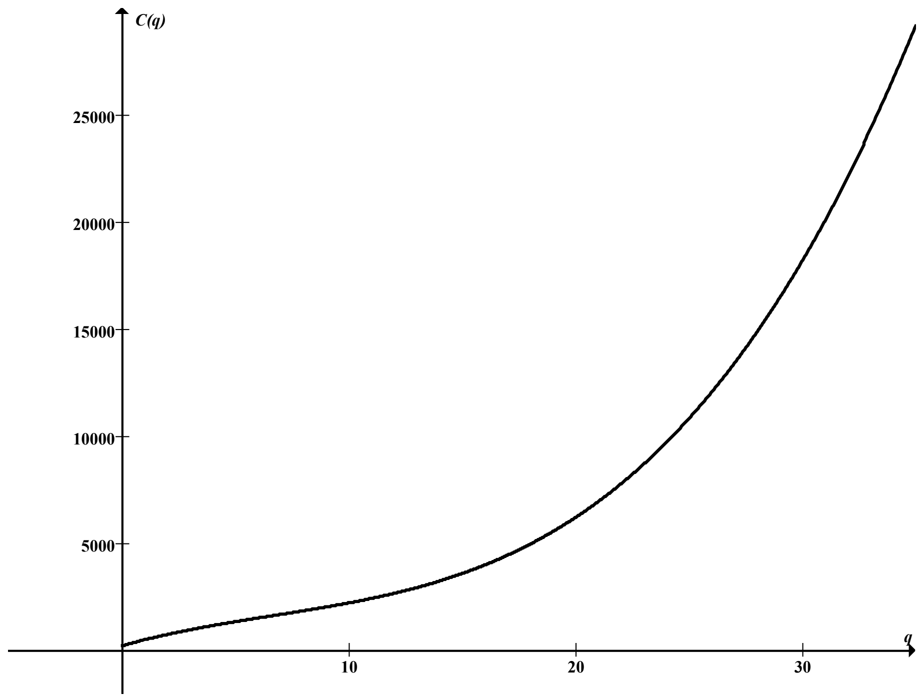


Figura 5.6 Gráfico da função custo total $C(q) = q^3 - 20q^2 + 300q + 250$

Por exemplo, é possível observar que o aumento do custo de produção cresce mais rapidamente a partir de, aproximadamente, 20 unidades.

SEÇÃO 2

Funções racionais

As funções racionais são bastante utilizadas em aplicações práticas relacionadas à situações reais. Perceba que são definidas como o quociente de duas funções polinomiais.

Definição: A função racional é definida por $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ sendo $P(x)$ e $Q(x)$ polinômios e $Q(x) \neq 0$.

São exemplos de funções racionais: $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$, $y = \frac{x}{x+3}$ e $h(x) = \frac{1}{x}$.

Diante da definição da função racional e a partir da análise de sua representação algébrica é fácil constatar que o domínio da função é dado pelo conjunto de números reais excluindo todos os valores de x tais que $Q(x) = 0$.

Exemplos

Analisar as características e propriedades das funções indicadas.

(a) $y = \dfrac{1}{x-1}$

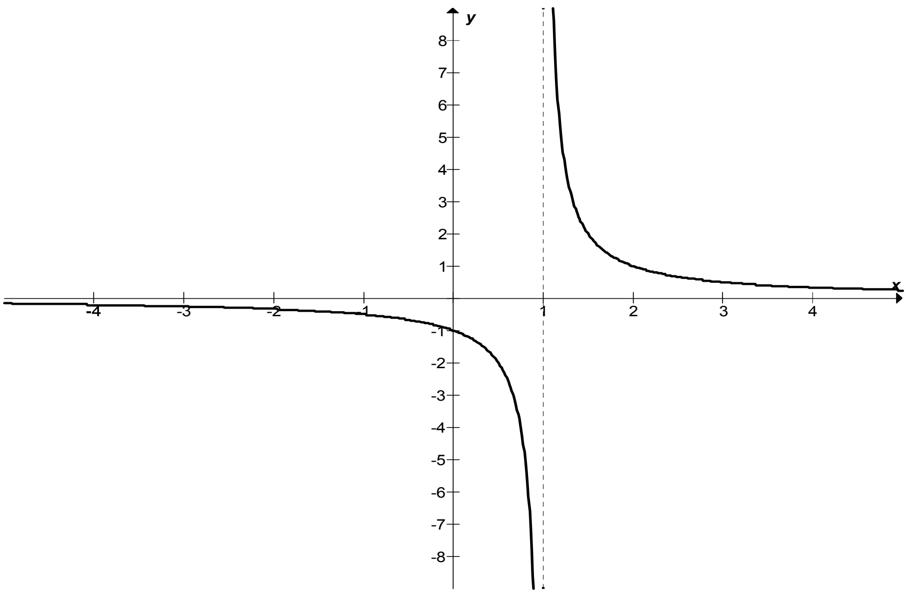


Figura 5.7 Gráfico da função $y = \dfrac{1}{x-1}$

Representação algébrica	$y = \dfrac{1}{x-1}$
Representação gráfica	Figura 5.7
Domínio	$\mathbb{R} - \{1\}$
Conjunto imagem	$\mathbb{R} - \{0\}$
Zero ou raiz	Não possui zero ou raiz.
Sinal da função	Positivo para $x > 1$ e negativo para $x < 1$.
Crescimento/Decrescimento	A função é toda decrescente.

(b) $y = \dfrac{x+7}{x-9}$

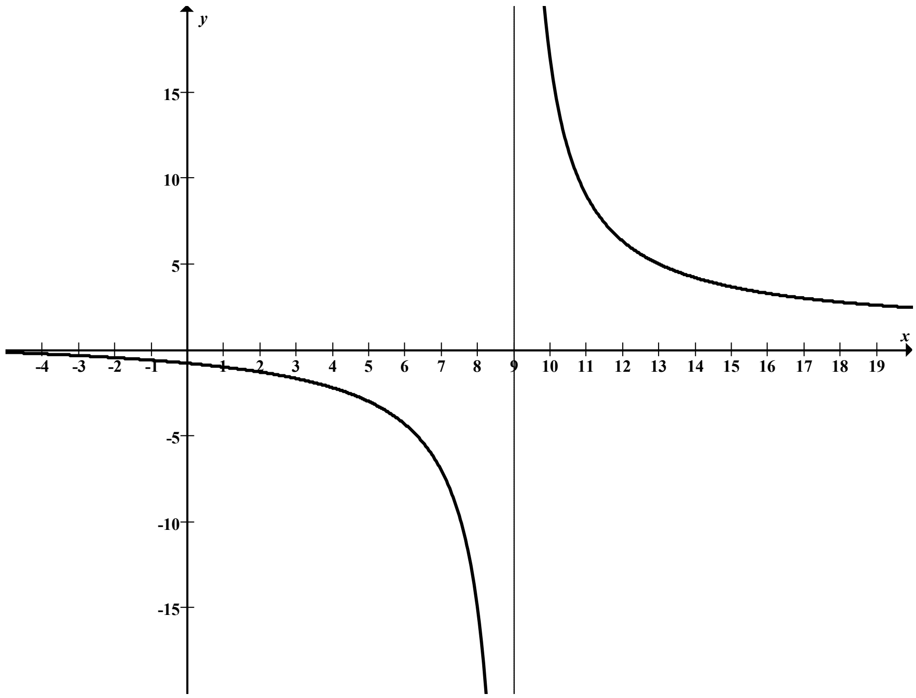


Figura 5.8 Gráfico da função $y = \dfrac{x+7}{x-9}$

Representação algébrica	$y = \dfrac{x+7}{x-9}$
Representação gráfica	Figura 5.8
Domínio	$\mathbb{R} - \{9\}$
Conjunto imagem	$\mathbb{R} - \{0\}$
Zero ou raiz	Não possui zero ou raiz.
Sinal da função	Positivo para $x > 9$ e negativo para $x < 9$.
Crescimento/Decrescimento	A função é toda decrescente.

(c) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

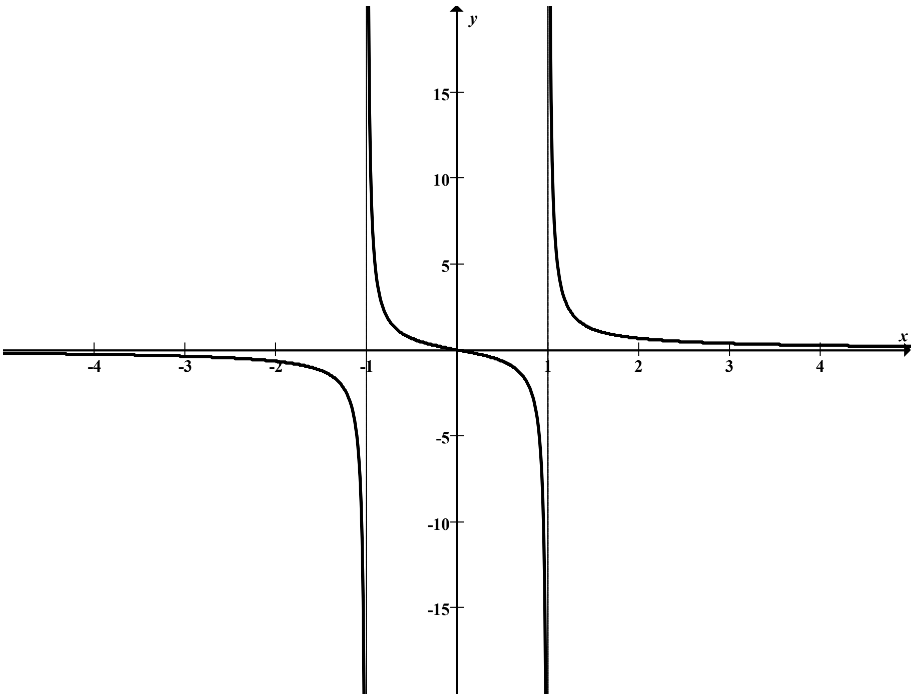


Figura 5.9 Gráfico da função $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Representação algébrica	$y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$
Representação gráfica	Figura 5.9
Domínio	$\mathbb{R} - \{-1,1\}$
Conjunto imagem	$\mathbb{R}$
Zeros ou raízes	$x = 0$
Sinal da função	Positivo para $-1 < x < 0$ ou $x > 1$. Negativo para $x < -1$ ou $0 < x < 1$.
Crescimento/Decrescimento	A função é toda decrescente.

(d) $y = \dfrac{3}{x^2 + 1}$

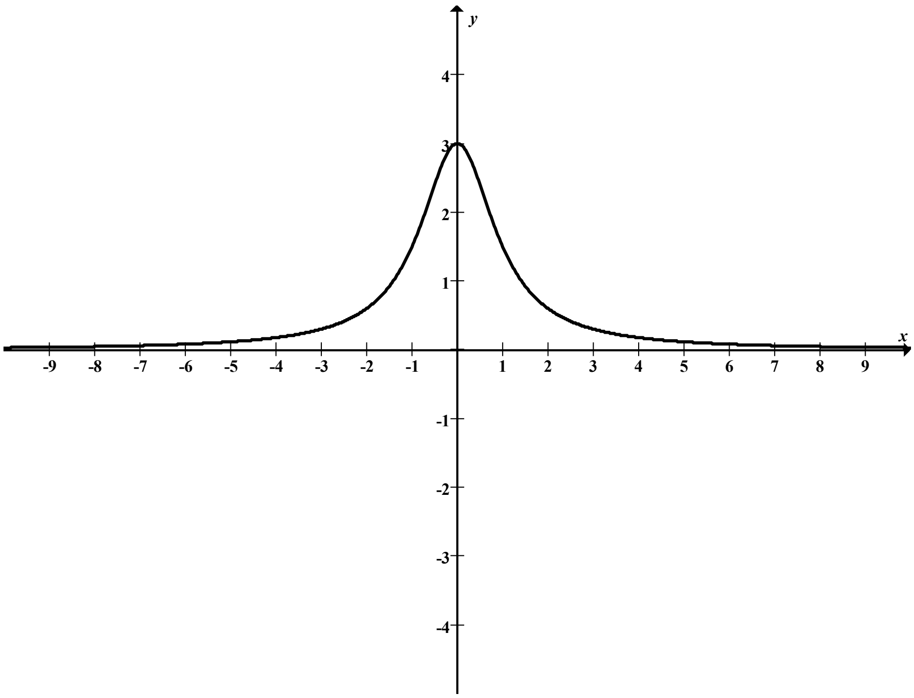


Figura 5.10 Gráfico da função $y = \dfrac{3}{x^2 + 1}$

Representação algébrica	$y = \dfrac{3}{x^2 + 1}$
Representação gráfica	Figura 5.10
Domínio	$\mathbb{R}$
Conjunto imagem	$0 < y \leq 3$
Zero ou raiz	Não possui zero ou raiz.
Sinal da função	A função é toda positiva.
Crescimento/Decrescimento	A função é crescente quando $x < 0$ e decrescente quando $x > 0$

Olhando o presente!

Veja o seguinte problema:

P2 A função preço de um determinado bem é dada por $P = \dfrac{400}{x+4}$ **.**

Analise o gráfico da função de demanda, escrita como $x = f(P)$**.**

Para fazer o gráfico da função de demanda, escrita como $x = f(P)$, num primeiro momento, isola-se a variável x da função preço:

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{400}{x+4} \\
P \times (x+4) &= 400 \\
x+4 &= \frac{400}{P} \\
x &= \frac{400}{P} - 4
\end{aligned}
$$

O gráfico da função de demanda é mostrado na Figura 5.11.

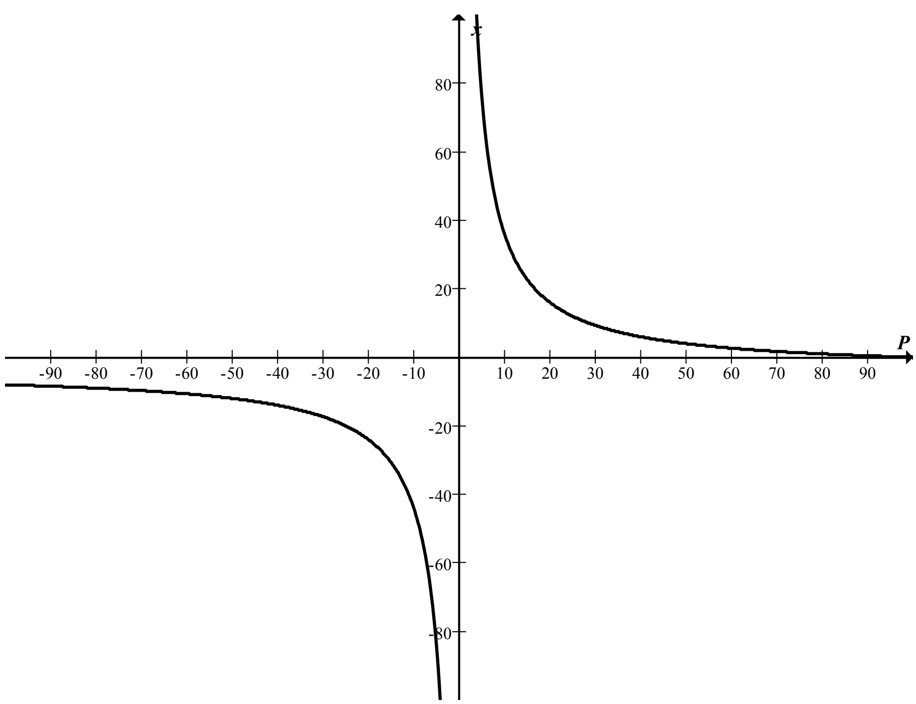


Figura 5.11 Gráfico da função de demanda $x = \dfrac{400}{P} - 4$

Perceba que para analisar o gráfico da função de demanda, basta considerar os valores em que o preço é maior do que zero, já que não faz sentido falar em preço negativo. Portanto, veja na Figura 5.12 este mesmo gráfico considerando apenas este intervalo.

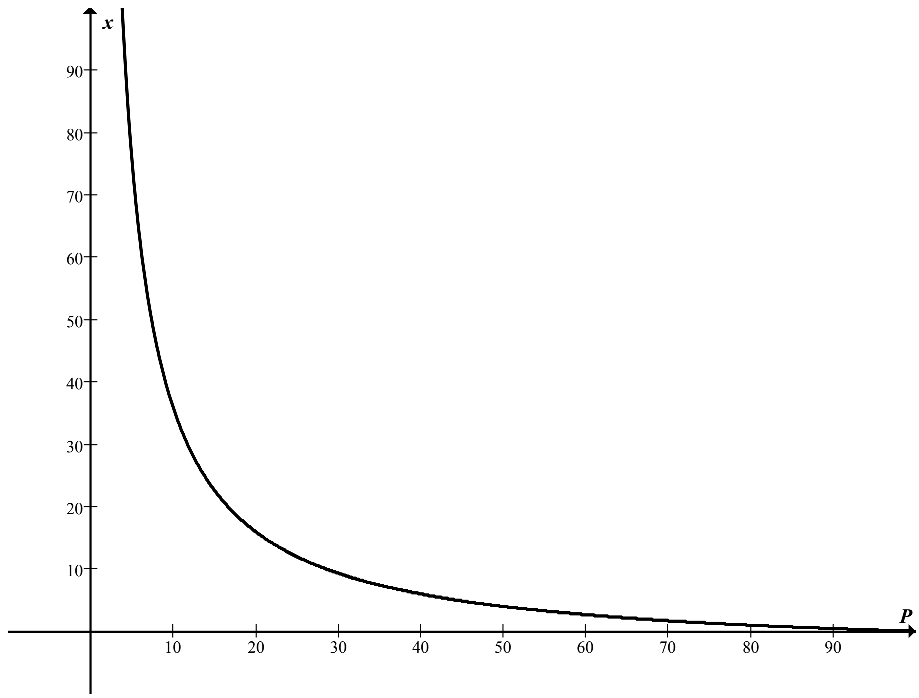


Figura 5.12 Gráfico da função $x = \frac{400}{P} - 4$ para valores de $P > 0$

Ao analisar a representação gráfica da Figura 5.12 é possível perceber que o preço aumenta a medida que a demanda diminui. Portanto, a função de demanda é decrescente. Em valores próximos de $P = 0$ a demanda é bem alta, isto significa que, com um preço baixo, a demanda tende a um valor alto.

SEÇÃO 3

Outros tipos de funções

Nesta seção você poderá visualizar representações gráficas de outros tipos de funções, como por exemplo, as funções irracionais, as que envolvem expressões polinomiais, as que possuem raízes quadradas, dentre outras.

A idéia é que você visualize graficamente estes tipos de funções, deixando claro que uma ferramenta computacional é imprescindível, neste momento, para que você consiga traçar estes gráficos.

Exemplos

Traçar o gráfico das funções indicadas.

(a) $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$

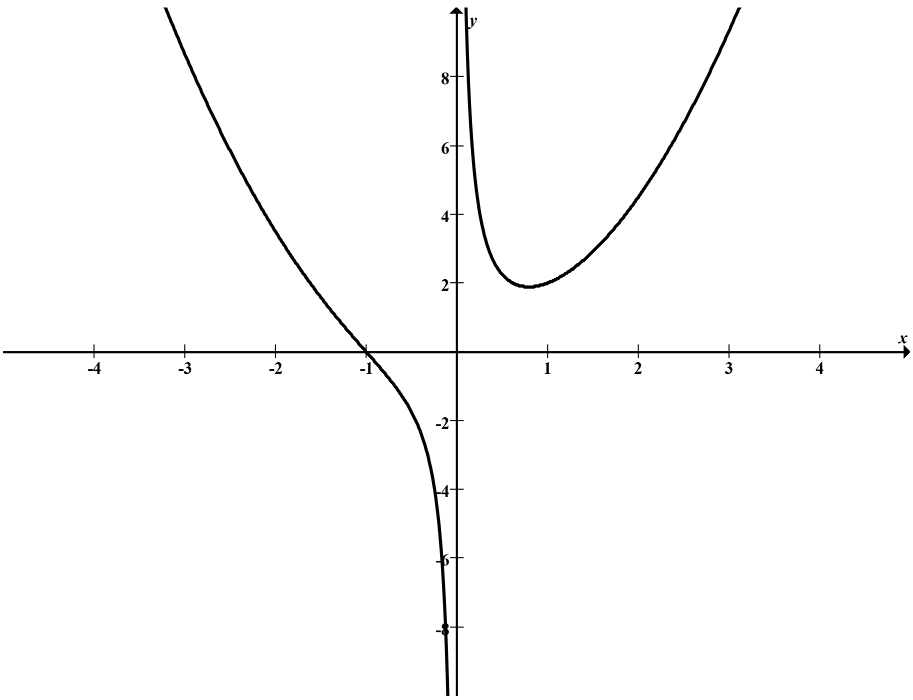


Figura 5.13 Gráfico da função $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$

Ao analisar o gráfico da Figura 5.13 é possível dizer que o domínio desta função é dado pelos números reais exceto $x = 0$ e o conjunto imagem é formado pelos números reais. A função possui intervalos de crescimento e decrescimento e um zero no valor de $x = -1$.

(b) $y = \sqrt{x}$

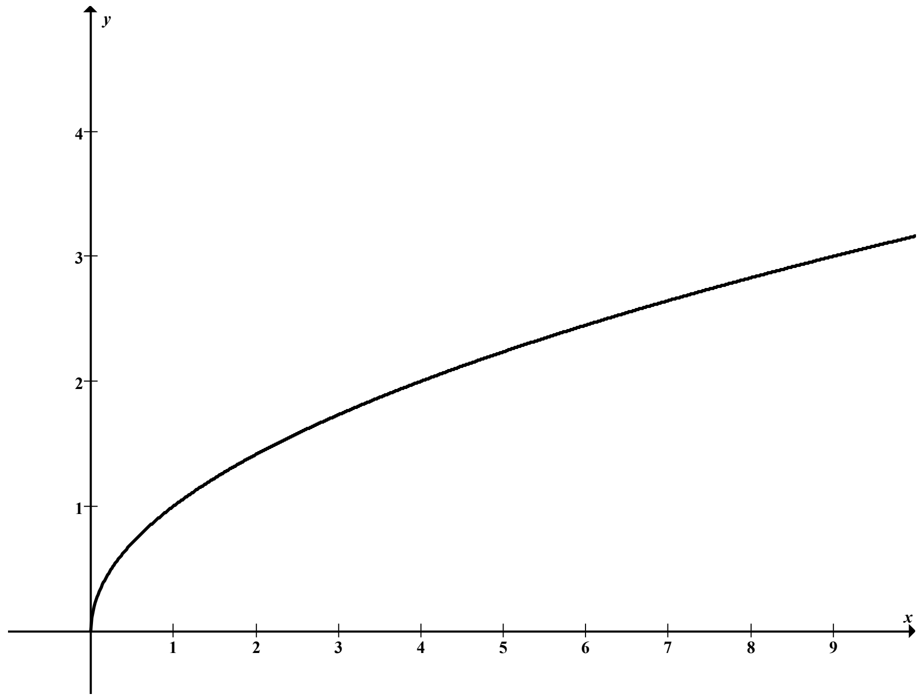


Figura 5.14 Gráfico da função $y = \sqrt{x}$

Já que a raiz quadrada de um número é sempre um valor positivo, então esta função possui como imagens apenas números positivos tendo como sinal apenas valores positivos. O domínio são todos os reais não negativos incluindo-se o zero, ou seja, os valores em que $x \geq 0$ e o conjunto imagem são todos os valores reais tais que $y \geq 0$. A função é toda crescente e possui como zero o valor de $x = 0$.

(c) $y = \sqrt{x^2 - 4}$

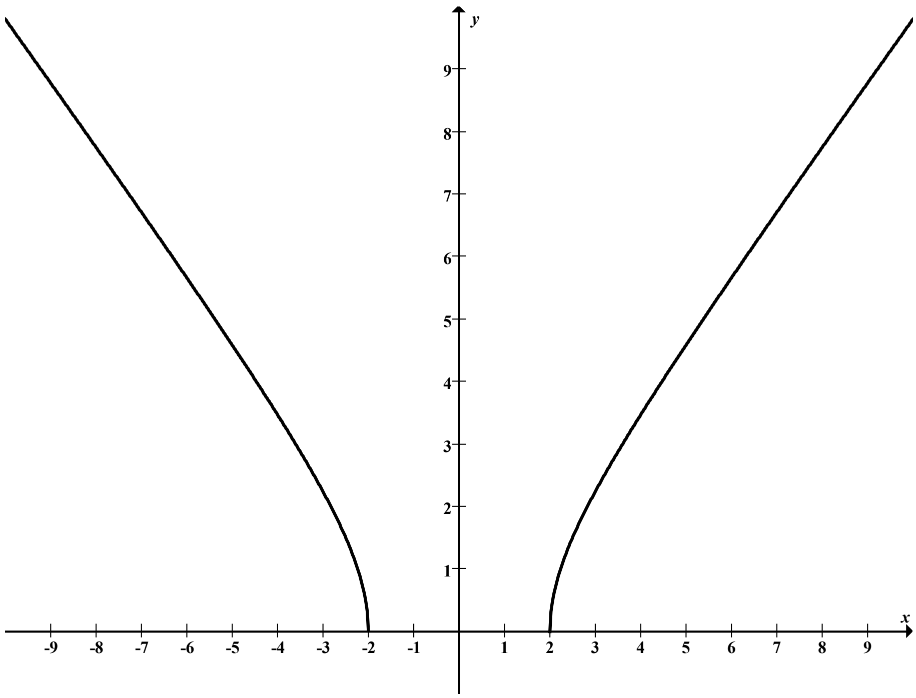


Figura 5.15 Gráfico da função $y = \sqrt{x^2 - 4}$

Esta função, assim como a do exemplo anterior, tem como imagem o conjunto dos números reais positivos, incluindo o zero. O domínio é dado pelos valores de $x \leq -2$ e $x \geq 2$. Veja que no gráfico da função não há imagens entre os valores -2 e 2. A função decresce para $x \leq -2$ e cresce para $x \geq 2$. O sinal é sempre positivo e os zeros da função são -2 e 2.

Olhando o presente!

Veja o seguinte problema:

P3 Seja a função de demanda, representada na Figura 5.16, sendo x a quantidade demandada e y o preço expresso em reais. Determine as quantidades demandadas se o preço for igual a R$10,00 e R$100,00.

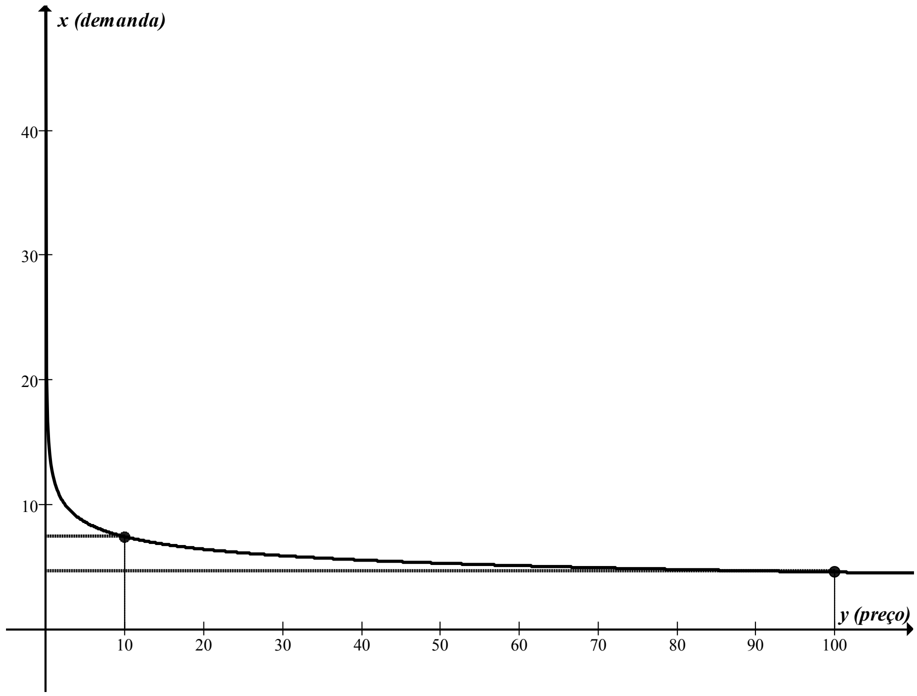


Figura 5.16 Gráfico da função de demanda $x = \dfrac{12,03}{y^{0,21}}$

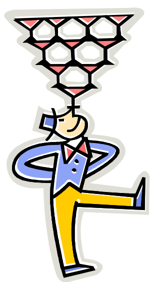
A função de demanda apresentada é decrescente de forma que, a medida em que o preço aumenta, a demanda diminui. Perceba que a quantidade demandada fica próxima a um valor abaixo de 10 e acima de 0, aproximadamente 5. Assim, mesmo que o preço seja muito alto, a quantidade demandada fica praticamente estável neste intervalo.

Para determinar as quantidades demandadas para os preços indicados no problema, basta localizar no gráfico os pontos indicados. Quando o preço é igual a R$100,00 a quantidade demandada fica entre 0 e 10, próximo de 5. Quando o preço é igual a R$10,00 esta quantidade está próxima do valor 10, mas ainda abaixo dele.

Para encontrar estes valores, é possível substituir a variável *y* na forma algébrica da função de demanda. Assim temos:

$y = 10$	$y = 100$
$x = \dfrac{12{,}03}{(10)^{0{,}21}} \cong 7{,}41763$	$x = \dfrac{12{,}03}{(100)^{0{,}21}} \cong 4{,}57367$

Os valores foram calculados com a ajuda de uma calculadora.



Parada Recreativa

Dois amigos preparam uma lista de convidados para uma festa.

— Ah Ted, acho que precisamos inicialmente definir o quanto queremos gastar.

— É verdade, a diversão é boa, mas também não adianta entrar no negativo. As coisas estão muito caras hoje em dia.

— Talvez um churrasco vá bem, apesar da carne estar cara. Mas aí podemos pedir para que cada um traga a sua bebida.

— Tudo bem, então vamos fazer a lista de convidados. Começamos pelos amigos em comum: Flávio, Marta, Junior, Ricardo, Sil...

— Ah, não, o Ricardo não. Ele é muito **chato**. Eu não quero ele aqui...

— Mas fica chato convidar a Marta e não chamar o Ricardo. A Marta é uma pessoa muito **interessante**.

— Mas se é namorada do Ricardo já considero tão **chata** quanto ele. Por favor!

— Mas eu não abro mão da Marta. Será que não há uma forma de conciliarmos isto?

Vamos ajudar os amigos a resolverem o problema da lista de convidados?

Você percebeu que eles falaram sobre pessoas **chatas** e **interessantes?**

Não há quem não pense dessa forma: algumas pessoas são interessantes. Outras são chatas.

Faça uma lista das pessoas que você considera chatas e outra de pessoas interessantes.

Depois analise a lista das chatas. Identifique a mais chata das chatas.

Mas veja: se ela é a mais chata das chatas, passa a ser extremamente interessante e muda de lista.

Agora, outra pessoa será a mais chata das chatas, o que a torna interessante também.

Assim, a certa altura, todas as pessoas serão interessantes.

Será assim??!

Pense nisso...

Síntese

Nesta unidade você teve contato com funções polinomiais, racionais, irracionais e outros tipos de funções que usualmente aparecem em aplicações práticas. É importante que, ao finalizar esta unidade, você tenha percebido a importância da representação gráfica para que possamos fazer análises inerentes aos problemas de aplicações.

O gráfico da função auxilia e, em muitos casos, mostra claramente todas as propriedades e características de uma função. Portanto, tenha em mente que a leitura correta das representações gráficas é muito importante para o entendimento de situações modeladas por funções.

No AVA você deve ter observado os recursos tecnológicos que se dispõe para a confecção de representações gráficas.

Antes de seguir em frente, confira se todas as suas atividades propostas no AVA e neste livro já foram desenvolvidas. Se necessário, solicite a ajuda do seu tutor.

Na próxima unidade você vai estudar as funções exponenciais e logarítmicas que possuem um campo vasto de aplicações nos famosos problemas de crescimento populacional e na economia.

Até mais!

Atividades de auto-avaliação

1) Seja a função $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{16}{3}$, representada graficamente na Figura 5.17. Determine o que se pede:

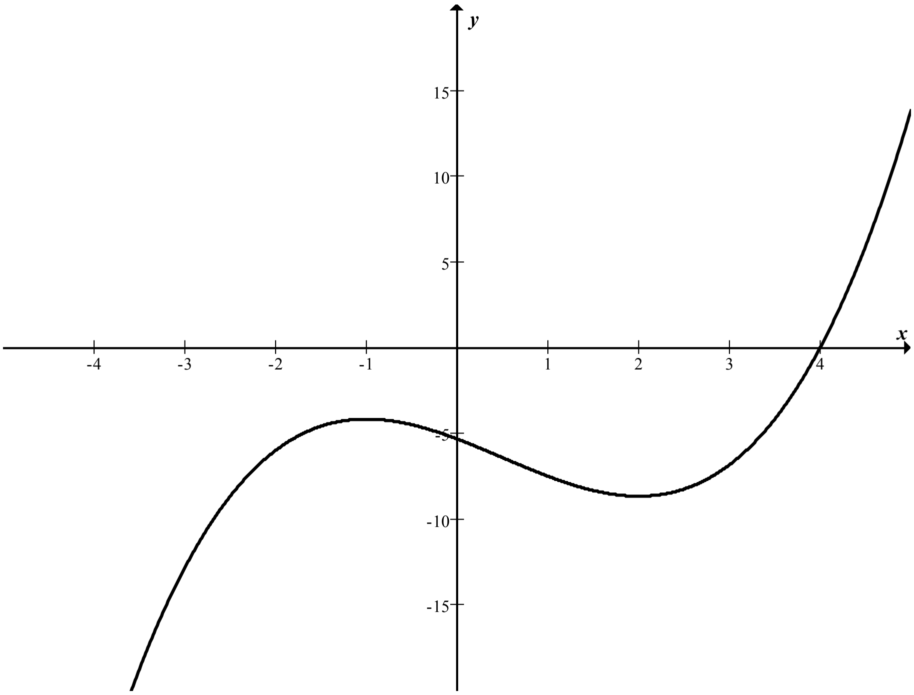


Figura 5.17 Gráfico da função $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{16}{3}$

(a) Grau da função polinomial.

(b) Domínio da função.

(c) Raiz da função.

(d) Intervalos de crescimento.

(e) Intervalos de decrescimento.

(f) Análise do sinal da função.

2) Um estudo sobre eficiência de trabalhadores do turno da manhã de uma certa fábrica indica que o operário que chega ao trabalho às 8 horas da manhã, terá montado, x horas após, $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x$ peças do produto.

(a) Quantas peças o operário terá montado às 11 horas da manhã?

(b) Quantas peças terá montado entre 10 e 11 horas da manhã?

3) Usando um software gráfico (por exemplo o Graph) faça o gráfico da função $y = \frac{x+1}{x-1}$ e analise suas propriedades e características.

4) Analise as características e propriedades das funções representadas graficamente nas Figuras 5.18 e 5.19.

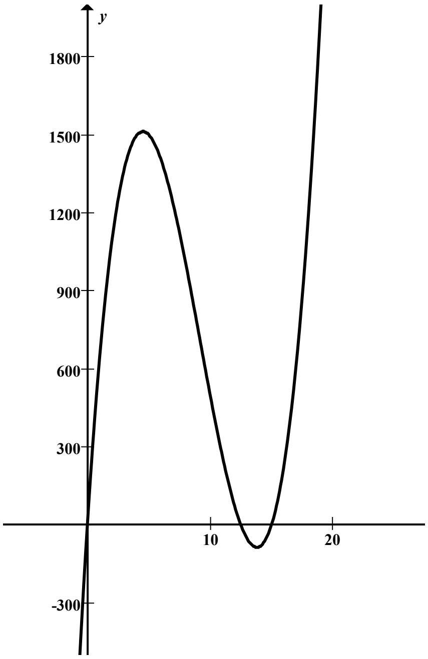


Figura 5.18
Gráfico da função $y = x(30 - 2x)(25 - 2x)$

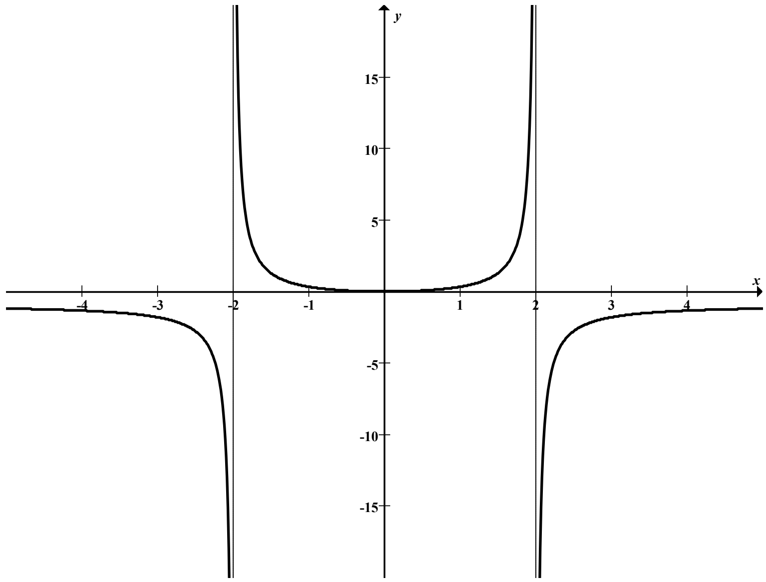


Figura 5.19 Gráfico da função $y = \dfrac{x^2}{4 - x^2}$

Representação algébrica	$y = x(30 - 2x)(25 - 2x)$	$y = \dfrac{x^2}{4 - x^2}$
Domínio		
Conjunto imagem		
Zero ou raiz		
Sinal da função		

Saiba mais

Caso você queira ampliar e aprofundar detalhes das funções polinomiais e racionais, recomendamos o primeiro capítulo do volume 1 do livro Cálculo: um novo horizonte, de autoria de Howard Anton. Neste texto você vai encontrar outras aplicações contextualizadas, bem como a análise de outras representações gráficas deste tipo de funções.

Procure o seu professor tutor para esclarecer suas dúvidas.

Bom trabalho!