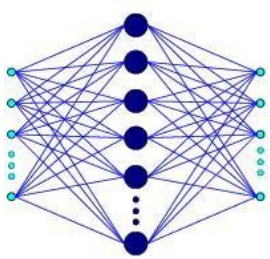
Ciência da Computação

REDE NEURAIS

Semestre: 2010/1

AULA 02



Max Pereira

http://paginas.unisul.br/max.pereira

UNISUL

Aqui seu futuro acontece

Conteúdo

- Breve revisão de Álgebra Linear
- Notações Importantes
- Neurônio de McCulloch-Pitts
- Elementos Básicos de um Neurônio

Revisão Álgebra Linear

Estrutura Matricial:

Uma matriz A, *m x n*, é uma tabela de *mn* números dispostos em *m* linhas e *n* colunas.

A notação A_{ij} é utilizada para referenciar o número da i-ésima linha e j-ésima coluna de A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

A notação $A = (a_{ij})_{mxn}$ também é utilizada. Dizemos que a_{ij} ou $[A]_{ij}$ é o elemento ou a entrada de posição *i, j* da matriz A.

Revisão Álgebra Linear

Se m=n, a matriz A é denominada de **matriz quadrada de ordem *n*** e os elementos a_{11} , a_{22} , … formam a diagonal principal de A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ e } F = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}.$$

As matrizes A e B são 2 x 2. A matriz C é 2 x 3, D é 1 x 3, E é 3 x 1 e

F é 1 x 1.

De acordo com a notação, temos alguns exemplos de elementos:

a_{12} =2, c_{23} =-2, e_{21} =4, $[A]_{22}$ =4, $[D]_{12}$ =3.

Revisão Álgebra Linear

Duas matrizes são consideradas iguais se elas têm o mesmo tamanho e os elementos correspondentes são iguais, ou seja, $A=(a_{ij})_{mxn}$ e $B=(b_{ij})_{pxq}$ são iguais se $m=p$, $n=q$ e $a_{ij} = b_{ij}$ para $i=1,\ldots,m$ e $j=1,\ldots,n$.

<u>OPERAÇÕES</u>

A soma de duas matrizes de mesmo tamanho $A=(a_{ij})_{mxn}$ e $B=(b_{ij})_{mxn}$ é definida como sendo a matriz

$$A + B = C=(c_{ij})_{mxn}$$

Obtida somando-se os elementos correspondentes de *A* e *B*

$c_{ij}=a_{ij} + b_{ij}$

Para $i=1,..,m$ e $j=1,\ldots,n$

A notação $[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ também é válida.

Revisão Álgebra Linear

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Se a matriz *C* for a soma das matrizes *A* e *B*, então temos:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1+(-2) & 2+1 & -3+5 \\ 3+0 & 4+3 & 0+(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

Revisão Álgebra Linear

A multiplicação de uma matriz $A = (a_{ij})_{mxn}$ por um **escalar** (número) α é definida pela matriz

$$\alpha A = B = (b_{ij})_{mxn}$$

Obtida multiplicando-se cada elemento da matriz A pelo escalar α

$$B_{ij} = \alpha \, a_{ij}, \text{ para } i=1,..,m \text{ e } j=1,..,n.$$

O produto da matriz *A* pelo escalar -3 é dado por:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \qquad -3\,A = \begin{bmatrix} (-3)(-2) & (-3)\,1 \\ (-3)\,0 & (-3)\,3 \\ (-3)\,5 & (-3)(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & -9 \\ -15 & 12 \end{bmatrix}$$

Revisão Álgebra Linear

O produto de duas matrizes, tais que o **número de colunas da primeira matriz seja igual ao número de linhas da segunda,** $A = (a_{ij})_{mxp}$ e $B = (b_{ij})_{pxn}$ é definido pela matriz

$$AB = C\ (c_{ij})_{mxn}$$

Obtida pela seguinte cáculo

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Para $i=1,\ldots,m$ e $j=1,\ldots,n$

Revisão Álgebra Linear

A multiplicação de matrizes também pode ser escrita da seguinte forma:

$$[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \boxed{c_{ij}} & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

Revisão Álgebra Linear

Considerando as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Se *C* é o produto das duas matrizes *A* e *B*, então

$$C = AB = \begin{bmatrix} 1(-2) + 2 \cdot 0 + (-3)5 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + (-3)(-4) & 0 \\ 3(-2) + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 5 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 0(-4) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 & 19 & 0 \\ -6 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

Revisão Álgebra Linear

<u>Importante</u>: O produto de matrizes **não é comutativo**

<u>*BA* pode não ser igual a *AB*</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -6 & 15 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

Revisão Álgebra Linear

A **transposta** da matriz $A = (a_{ij})_{mxn}$ é definida pela matriz

$$A^t = B = (b_{ij})_{mxn}$$

Obtida trocando-se as linhas com as colunas, ou seja,

$$b_{ij} = a_{ji}$$

Para $i=1,\ldots,m$ e $j=1,\ldots,n$.

A notação pode ser escrita também como

$$\left[A^t\right]_{ij} = a_{ji}$$

Revisão Álgebra Linear

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B^t = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Revisão Álgebra Linear

EXERCÍCIOS

1.1.1. Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -6 & 9 & -7 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 9 & -9 \\ -1 & 0 & -4 \\ -6 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Se for possível calcule:

(a) $AB - BA$,

(b) $2C - D$,

(c) $(2D^t - 3E^t)^t$,

(d) $D^2 - DE$.

1.1.2. Conhecendo-se somente os produtos AB e AC, como podemos calcular $A(B + C)$, B^tA^t, C^tA^t e $(ABA)C$?

Algumas notações úteis

Conjuntos de números ordenados - vetores

$$x=\left(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n\right) \qquad y=\left(y_1,y_2,y_3,\ldots,y_m\right)$$

Os componentes x_i podem ser somados para formar um escalar (número)

$$s=\left(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Dois vetores do mesmo tamanho podem ser somados para formar um outro vetor

$$z=x+y=\left(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3,\ldots,x_n+y_n\right)$$

Algumas notações úteis

Dois vetores do mesmo tamanho podem ser multiplicados para formar um escalar

$$p = x \, . \, y = \left(x_1 y_1 , x_2 y_2 , x_3 y_3 , \ldots , x_n y_n \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

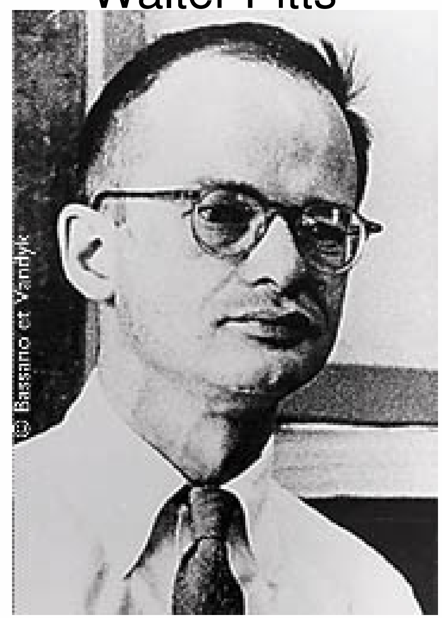
Neurônio Booleano de McCulloch-Pitts (Modelo MCP)

- Proposto em 1943 por Warren McCulloch (médico) e Walter Pitts (estatístico)
- Publicação no *Bulletin of Mathematical Biophysics*
- Título: "*A Logical Calculus of the Ideas Immanet in Nervous Activity*"
- Referência número 1 para a teoria das redes neurais artificiais.

Neurônio Booleano de McCulloch-Pitts (Modelo MCP)

Warren McCulloch

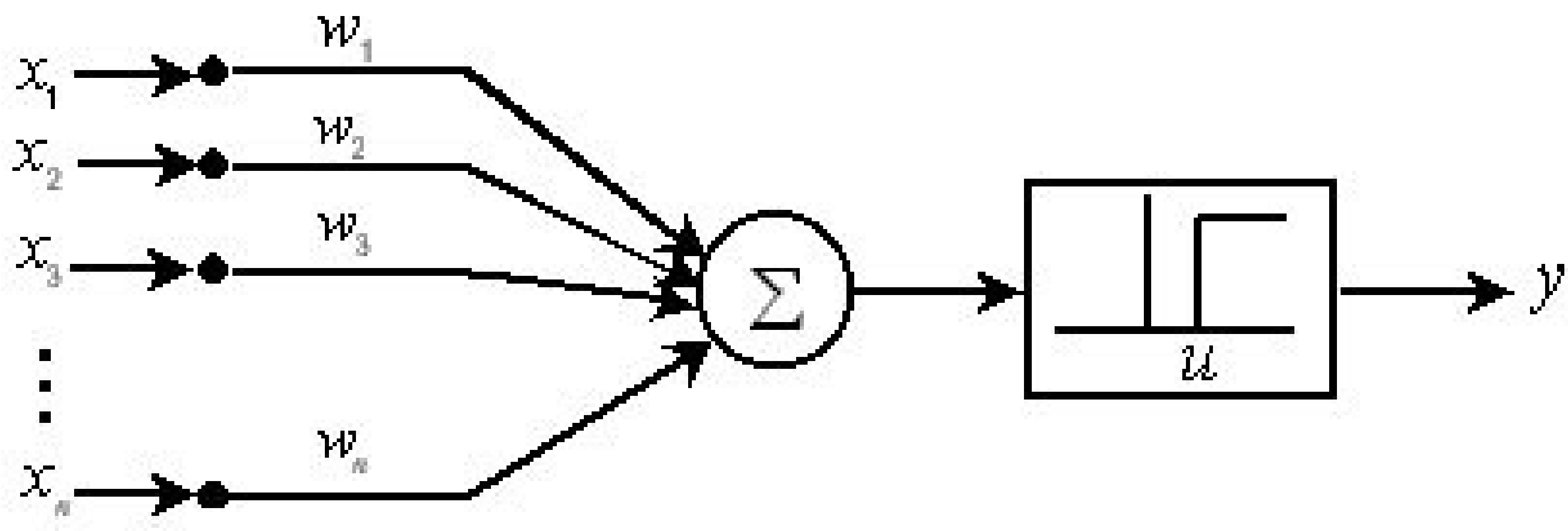
Walter Pitts



Neurônio Booleano de McCulloch-Pitts (Modelo MCP)

- *n* terminais de entrada $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (dendritos)
- Apenas um terminal de saída *y* (axônio)
- Terminais de entradas com pesos associados $w_1, w_2, \ldots, w_n$ cujos valores podem ser positivos ou negativos (sinapses)
- O efeito de uma sinapse particular *i* no neurônio pós-sináptico é dado por $x_i w_i$.

Neurônio Booleano de McCulloch-Pitts (Modelo MCP)



Neurônio Booleano de McCulloch-Pitts (Modelo MCP)

- Neurônio biológico dispara quando a soma dos impulsos ultrapassa o seu limiar de excitação (*threshold*).
- Modelo MCP faz a soma dos valores $x_i w_i$ (soma ponderada) e decide se o neurônio deve ou não disparar (0 ou 1).
- A ativação do neurônio é obtida pela “função de ativação”.

Neurônio Booleano de McCulloch-Pitts (Modelo MCP)

- No modelo MCP a função de ativação é dada pela função de limiar

$$\sum_{i=1}^{n} x_i w_i \geq \theta$$

- Onde n é o número de entradas, w_i é o peso associado à entrada x_i e o θ é o limiar (*threshold*) do neurônio.

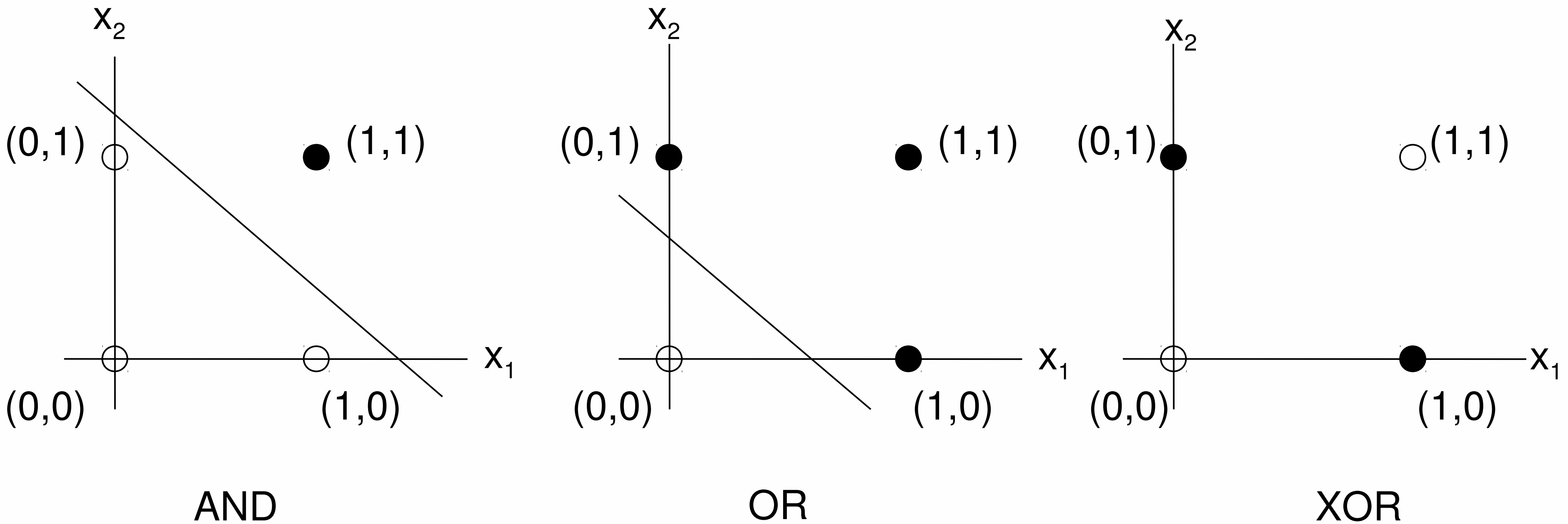
Neurônio Booleano de McCulloch-Pitts (Modelo MCP)

- Modelo simplificado. Considera que os nodos em cada camada disparam sincronamente.
- Redes MCP com apenas uma camada só conseguem implementar funções linearmente separáveis.
- Pesos negativos são mais adequados para representar disparos inibidores.
- Modelo proposto com pesos fixos, não-ajustáveis.

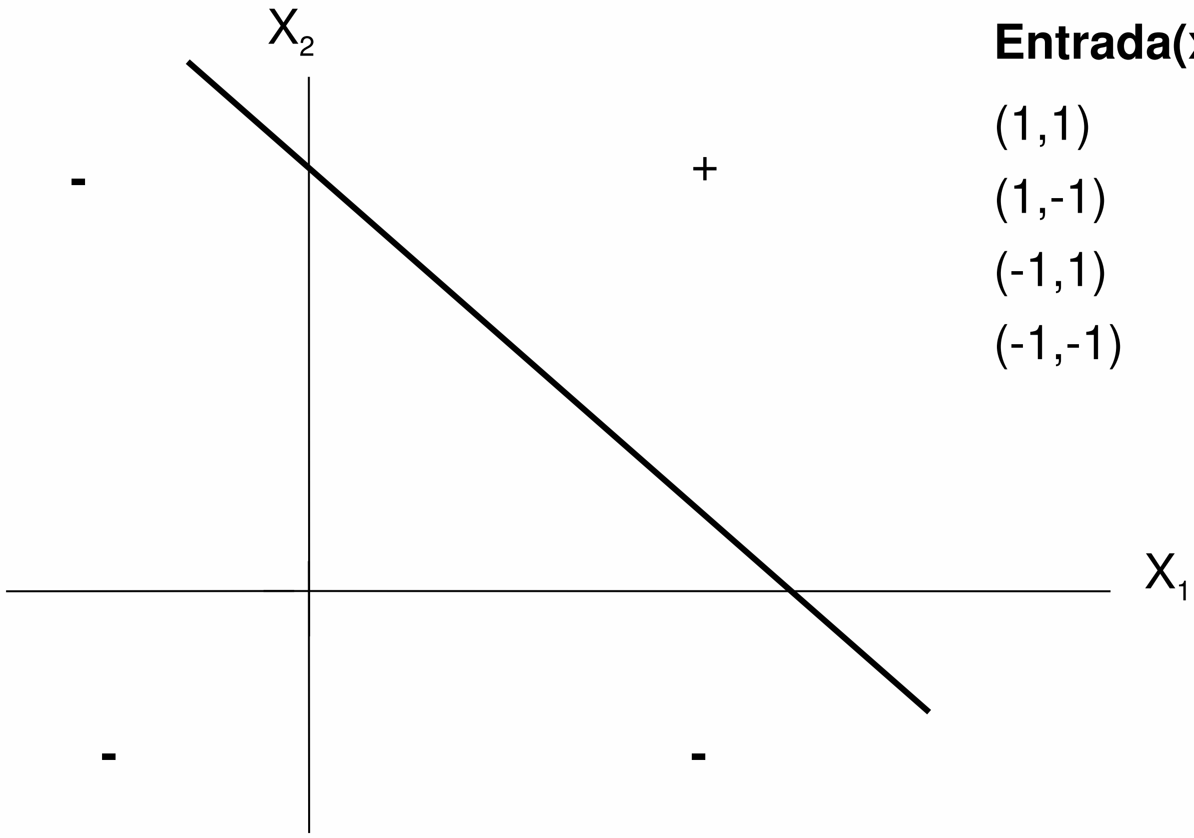
Neurônio Booleano de McCulloch-Pitts (Modelo MCP)

- O Modelo MCP é um discriminador linear que pode ser usado, em certos casos, como *classificador de padrões*.
- As funções lógicas **E** e **OU** são linearmente separáveis (implementáveis com o modelo MCP)
- A função **XOR** ou **ou-exclusivo** não é linearmente separável.

Funções Booleanas representadas no plano binário



Função E (And) com valores bipolares



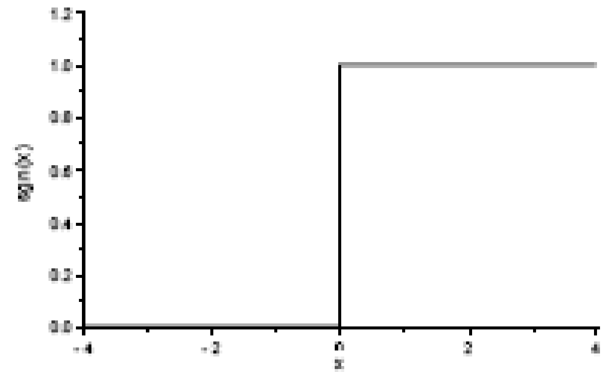
Entrada(x_1,x_2)	Saída(y)
(1,1)	+1
(1,-1)	-1
(-1,1)	-1
(-1,-1)	-1

Funções de Ativação

Uma função ***y=f(x)*** descreve uma relação (mapeamento entrada-saída) de *x* para *y*.

Exemplo 1: O limiar (*threshold*) ou função sinal *sgn(x)* é definida como:

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 & \text{if } x\geq 0\\ 0 & \text{if } x<0\end{cases}$$



Funções de Ativação

Exemplo 2: A função **logística** ou ***sigmóide*** *Sigmoid(x)* é definida como:

$$\mathrm{Sigmoid}(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$