Teoria de Grafos

Definições e Conceitos Básicos

Prof. Ademar Schmitz, M.Sc.
http://paginas.unisul.br/ademar

Elaborado a partir do material de Jorge César Abrantes Figueiredo
(Teoria de Grafos, 2003-2, UFCG)

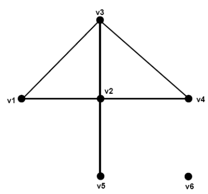
Definições

- Um *grafo simples G* é um par de conjuntos *(V, E)*.
  - *V* é um conjunto finito não-vazio de elementos chamados *vértices*.
  - *E* é um conjunto finito de *arestas*.

Definições

- Cada aresta é um subconjunto de elementos de *V* de tamanho 2.
  - Se *e* é uma aresta, então *e* é um conjunto da forma *e = {v, w}* ou *e = (v, w)*, em que *v* e *w* são elementos distintos de *V*.
  - É comum omitirmos as chaves ou parênteses na representação de uma aresta: *e = vw = wv*.
  - A aresta *e* é dita ser *incidente* a *v* e *w*.
  - Da mesma forma podemos dizer que *v* e *w* são *adjacentes* ou *vizinhos*.

Definições

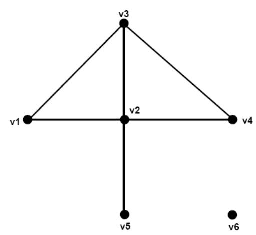


- Considerando *G = (V, E)*
- $V = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$
- $E = (v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_5, v_3v_4)$
- *G* é um grafo com 6 vértices e 6 arestas.
- v_1 é adjacente aos vértices v_2 e v_3.
- v_1 não é adjacente aos vértices v_4, v_5 e v_6.

Definições

- O *grau* de um vértice *v* é o número de arestas que incidem em *v*.
  - Se um vértice tem grau ímpar, ele é dito *vértice ímpar*.
  - Se um vértice tem grau par, ele é dito *vértice par*.
- Representação: *deg(v)*
  - Se *deg(v) = 0*, *v* é um *vértice isolado*.

Definições

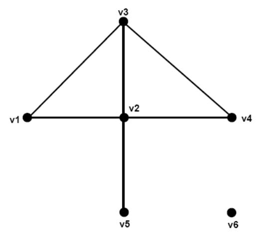


- v_1, v_2 e v_3 são vértices pares
- v_3 e v_5 são vértices ímpares
- v_6 é um vértice isolado
- $deg(v_1) = deg(v_4) = 2$
- $deg(v_3) = 3$

Definições

- Se todos os vértices de um grafo têm grau *k*, ele é chamado de *k-regular*.
- Uma *seqüência de graus* de um grafo consiste em escrever em ordem crescente os graus de seus vértices.

Definições

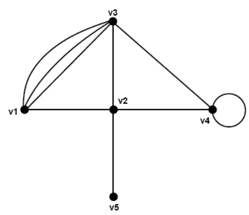


- A seqüência de graus do grafo é 0, 1, 2, 2, 3, 4.

Definições

- Nem todos os grafos são simples.
  - Existem grafos de permitem múltiplas arestas entre o mesmo par de vértices. Esse tipo de grafo é denominado *multi-grafo*.
  - É possível ainda encontrar grafos de possuem arestas que conectam um vértice a ele próprio. Esse tipo de aresta é chamado de *auto-laço*.
- Nesta disciplina vamos usar o termo *grafo* para representar grafos finitos, não dirigidos, com auto-laços e múltiplas arestas.

Definições



- Multigrafo: três arestas conectando v_1 a v_3.
- Auto-laço: vértice v_4.
- *deg(v4)* = 4
- Seqüência de graus do grafo: 1, 4, 4, 4 e 5.

Definições

- Existem duas propriedades de grafos, definidos a partir do conceito de adjacência e graus de vértices:
  - A soma dos graus de vértices de uma grafo é um número par, igual a duas vezes o número de arestas.
  - O número de vértices ímpares de uma grafo é par.

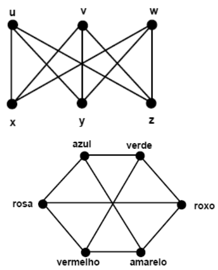
Isomorfismo de Grafos

- Quando dois grafos são essencialmente iguais, dizemos que eles são *isomórficos*.
- Dois grafos são isomórficos quando é possível fazer uma exata correspondência de seus vértices, garantindo que uma aresta entre dois vértices em um grafo corresponda a exatamente uma aresta entre os correspondentes vértices no outro grafo.

Isomorfismo de Grafos

- Considere dois grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$.
- Dizemos que G_1 é isomórfico a G_2 ($G_1 \equiv G_2$) se existir um bijeção *f* de V_1 em V_2 em que:
  - Se *vw* é uma aresta em E_1, então *f(v)f(w)* é uma aresta em E_2, e
  - Toda aresta em E_2 tem a forma *f(v)f(w)* para alguma aresta $vw \in E_1$.

Isomorfismo de Grafos



- Bijeção:
  - *f(u) = azul*
  - *f(v) = roxo*
  - *f(w) = vermelho*
  - *f(x) = verde*
  - *f(y) = amarelo*
  - *f(z) = rosa*
- E as arestas?

Isomorfismo de Grafos

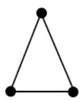
- A definição de isomorfismo é simétrica, reflexiva e transitiva.
  - $G_1 \cong G_2 \iff G_2 \cong G_1$.
  - $G \cong G$ para qualquer grafo.
  - $G_1 \cong G_2$ e $G_2 \cong G_3 \implies G_1 \cong G_3$.

  Se $G_1 \cong G_2$, as seguintes proposições são válidas:
  - G_1 e G_2 têm o mesmo número de vértices.
  - G_1 e G_2 têm a mesma seqüência de graus.
  - G_1 e G_2 têm o mesmo número de arestas.

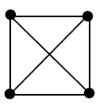
Grafos Completos e Grafos Nulos

- Um grafo cujo conjunto de arestas é vazio é dito *grafo nulo*.
- Um grafo simples é *completo* se qualquer par de vértices distintos é adjacente.
- Um grafo completo de *n* vértices é referenciado como K_n.

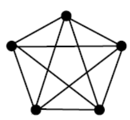
Grafos Completos e Grafos Nulos



K3



K4

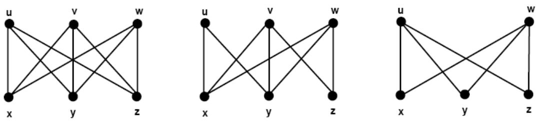


K5

Subgrafos

- Um grafo G_1 é um subgrafo de um grafo G_2 se e somente se os conjuntos de vértices e arestas de G_1, são, respectivamente subconjuntos dos conjuntos de vértices e arestas de G_2.
- É possível obter subgrafos a partir da remoção de vértices e arestas.

Subgrafos



- G_2 é subgrafo de G_1 obtido através da remoção de G_1 da aresta *uz*.
- G_3 é subgrafo de G_1 obtido através da remoção do vértice *v*.

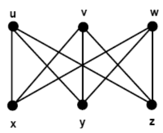
Grafos Bipartidos

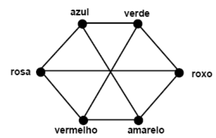
- Um *grafo bipartido* é aquele cujo conjunto de vértices pode ser dividido em dois conjuntos distintos não vazios V_1 e V_2.
- Os conjuntos de bipartição V_1 e V_2 deve garantir que cada aresta conecta um vértice do conjunto V_1 e um vértice do conjunto V_2.

Grafos Bipartidos

- Um *grafo bipartido completo* é aquele em que cada um dos elementos de V_1 é adjacente a cada um dos elementos de V_2.
- Um grafo bipartido completo é identificado por $K_{m,n}$ onde *m* é a aridade de V_1 e *n* a aridade de V_2.

Grafos Bipartidos



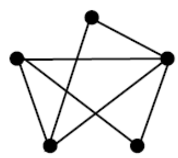


- Os dois grafos acima são $K_{3,3}$.
  - No primeiro: $V_1 = \{u, v, w\}$ e $V_2 = \{x, y, z\}$
  - No segundo: $V_1 = \{azul, roxo, vermelho\}$ e $V_2 = \{verde, amarelo, rosa\}$

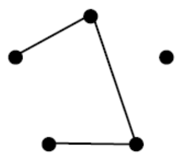
Complemento de um Grafo

- Seja *G* um grafo simples. Seu *complemento* $\overline{G}$ é o grafo simples com vértice *V* em que dois vértices são adjacentes se e somente se eles não são adjacentes em *G*.

Complemento de um Grafo



G



$\overline{G}$

Exercícios

1. Desenhe
   a) Um grafo simples.
   b) Um grafo que não é simples e não possui auto-laços.
   c) Um grafo que não é simples e que não possui múltiplas arestas.
   d) Um grafo com a seqüência de vértices 3, 3, 5, 5, 5, 5.
   e) K_6.
   f) $K_{4,4}$.

Exercícios

2. Classifique as seguintes afirmações abaixo em verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta.
   a) Dois grafos isomórficos quaisquer têm a mesma seqüência de graus.
   b) Dois grafos quaisquer com a mesma seqüência de graus são isomórficos.

Exercícios

3. Seja um grafo com 5 vértices e 6 arestas. Desenhe-o e mostre pelo menos dois de seus subgrafos.
4. Seja um grafo com 4 vértices e 7 arestas. Desenhe-o e mostre o seu complemento.
5. Quantas arestas tem um grafo completo de n vértices?
6. Quantas arestas tem um grafo k-regular com n vértices?