Teoria de Grafos

Árvores de Cobertura

Prof. Ademar Schmitz, M.Sc.
http://paginas.unisul.br/ademar

Problema 01

- Temos um mapa modelado por um grafo: os vértices correspondem a cidades e os arcos representam estradas de terra batida entre as cidades adjacentes, com os rótulos indicando a respectiva distância. O governo do estado planeja asfaltar alguma estradas, tornando possível sair de qualquer cidade para outra em estrada asfaltada.
- Que estradas deveriam ser asfaltadas?
- Seria possível decidir como minimizar o total de asfalto a ser gasto?

Problema 02

- Em um sistema de abastecimento de água existem vários tanques para armazenamento e tratamento da água.
- Como definir a forma de interligar esses tanques sabendo que, em princípio, qualquer par de tanques pode ser interligado?
- A solução ideal é aquela em que todos os tanques serão abastecidos e que o custo das obras seja mínimo.

Árvore de Cobertura

- Os dois problemas acima são conhecidos como o problema de *conexão mínima.*
- Este problema, na teoria de grafos é conhecimento como o problema de encontrar a *árvore de cobertura mínima* do grafo.
- Árvores de cobertura são também conhecidas como *árvores geradoras* ou *árvores expandidas.*

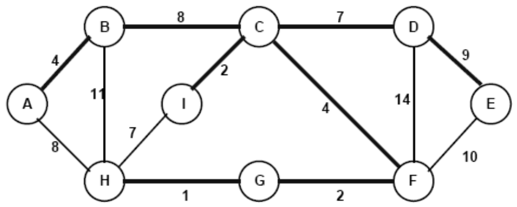
Árvore de Cobertura

- Algumas definições de árvore:
  - Grafo conexo sem ciclos;
  - Grafo no qual cada par de vértices é ligado por um e somente um caminho simples;
  - Grafo conexo, porém, se qualquer de suas arestas for retirada, a conexidade fica interrompida;
  - Outras....

Árvore de Cobertura

- Uma *árvore de cobertura* ou *árvore geradora* de uma grafo conectado G é um subgrafo que forma uma árvore e que inclui cada um dos vértices de G.
- Uma *árvore de cobertura mínima* para um grafo valorado é uma árvore de cobertura em que a soma dos pesos das arestas é mínima.

Árvore de Cobertura
Exemplo



Árvore de Cobertura

- O conceito de árvore de cobertura só existe para grafos conectados.
- Se o grafo tem n vértices, a árvore de cobertura tem n-1 vértices.

Árvore de Cobertura

- Para determinar uma árvore de cobertura:
  - Se o grafo G não tem ciclos, G é uma árvore de cobertura.
  - Se G tem ciclo, é necessário remover recursivamente arcos até achar uma árvore, mantendo o grafo conectado.

Árvore de Cobertura
Algoritmo

Entrada: Grafo G(V,E), conexo
Saída: Árvore de cobertura $T(V_1,E_1)$

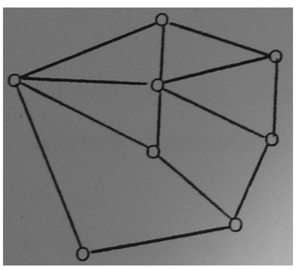
P1. Escolha um ciclo de G e remova uma aresta qualquer.

P2. Repita o passo P1 até não existir mais ciclo em G.

P3. O grafo resultante será uma árvore de cobertura.

Árvore de Cobertura
Exemplo de Aplicação do Algoritmo

- Encontre pelo menos duas árvores de cobertura para o grafo ao lado.



Geração das Árvores Expandidas do Grafo

- Existem situações em que é necessário conhecer a lista de todas as árvores expandidas de um grafo.
- O número de árvores expandidas de uma grafo completo não dirigido, foi primeiro calculado por Cayley, em 1889, como sendo igual a n^{n-2}.
- Existem vários métodos para a geração de todas as árvores de cobertura.

Árvore de Cobertura para Dígrafos

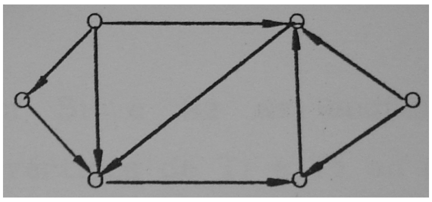
- *Árvore dirigida*, também chamada de *arborescência*, é um dígrafo acíclico, onde o grau de entrada de cada vértice é 1, exceto o da raiz, que possui grau de entrada zero.
- Um vértice é dito terminal ou folha, se o grau de saída for zero.

Árvore de Cobertura para Dígrafos

- Um conjunto de vértices de uma árvore está no mesmo nível i, se e somente se a distância da raiz até esses vértices for a mesma.
- Importante: Nem todo dígrafo possui uma árvore de cobertura.

Árvore de Cobertura para Dígrafos
Exemplo

- Encontre uma árvore de cobertura para o dígrafo abaixo.



Árvore de Cobertura de Custo Mínimo

- Seja G(V,E) um grafo conexo com uma função de custo mapeando as arestas aos números reais.
- O custo de uma árvore de cobertura é a soma dos custos de suas arestas.
- A meta é achar uma árvore expandida de custo mínimo para G.

Algoritmo de Kruskal

- Este algoritmo usa três conjuntos E, T e VS.
  - E é o conjunto das arestas de G.
  - O conjunto T é usado para guardar as arestas da árvore expandida.
  - O conjunto VS contém os conjuntos das árvores.

Algoritmo de Kruskal

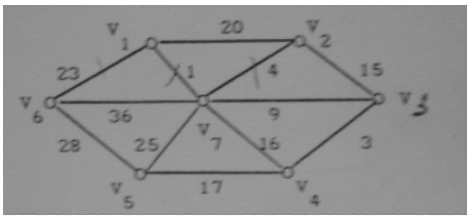
Entrada: Grafo G(V,E) com uma função de custo C associada as arestas.

Saída: Árvore de Cobertura S(V,T) de custo mínimo de G.

Algoritmo de Kruskal

```
INICIO
  T ← 0, VS ← 0
  construa Q, uma fila de prioridade contendo todas as
   arestas de E.
  para cada vértice v Є V faça
    adicione {v} em VS
  enquanto |VS| > 1 faça
    escolha (v,w), aresta em Q de menor custo
    apague (v,w) de Q
    se v e w estão em conjuntos diferentes W1 e W2
   pertencente a VS, então
      substitua W1 e W2 em VS por W1 U W2
      adicione (v,w) a T
FIM
```


Algoritmo de Kruskal
Exemplo



Algoritmo de Dijkstra

- Fornece uma árvore expandida de custo mínimo, trabalhando por inclusão de vértices, onde cada vértice leva apenas uma aresta à árvore.
- Logo, não há preocupação com a formação de ciclos.

Algoritmo de Dijkstra

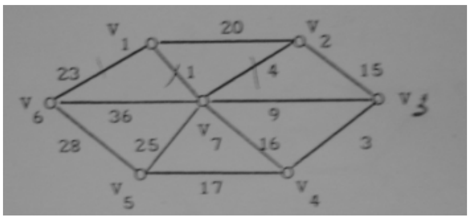
Entrada: Grafo G(V,E), representando pela lista de arestas e seus custos.

Saída: Árvore de Cobertura T(V1,E1) de custo mínimo.

Algoritmo de Dijkstra

P1. T ← 0
P2. Construa uma fila de prioridade Q contendo todas as arestas de E.
P3. Escolha (v, w), uma aresta de menor custo.
P4. Enquanto |V| > 0
    retire (v, w) de Q
    adicione (v, w) a T
    apague v, w de V
    escolha (v, w), a aresta em Q de menor custo, tal que v Є V e w Є V1.

Algoritmo de Dijkstra
Exemplo



Exercícios

- Para os grafos dado, encontre:
  1. Pelo menos duas árvores de cobertura.
  2. A árvore de cobertura mínima definida pelo algoritmo de Kruskal.
  3. A árvore de cobertura mínima definida pelo algoritmo de Dijkstra.