Teoria de Grafos

Conexidade e Distância

Prof. Ademar Schmitz, M.Sc.

http://paginas.unisul.br/ademar

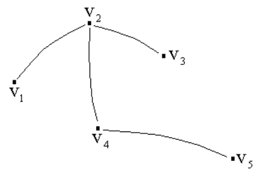
Conexidade

- Um grafo é dito *conexo* se for possível visitar qualquer vértice, partindo de um outro e passando por arestas.
- Esta visita sucessiva é denominada *caminho*.
- Um grafo G é *conexo* se existe pelo menos um caminho entre qualquer par de vértices em G. Em caso contrário, G é dito *não conexo*.

Conexidade

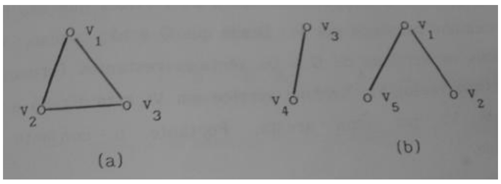
- Um caminho do vértice v_1 ao vértice v_k é uma seqüência de vértices $v_1...v_k$ tal que (v_j,v_{j+1}) pertence a E.
- Um caminho de *k-vértices* é formado por *k-1* arestas $(v_1,v_2), (v_2,v_3) ... (v_{k-1},v_k)$ e o valor *k-1* é o comprimento do caminho.

Conexidade



- v_1, v_2, v_4 e v_5 é um caminho.
- O comprimento do caminho (em passos) é 3.

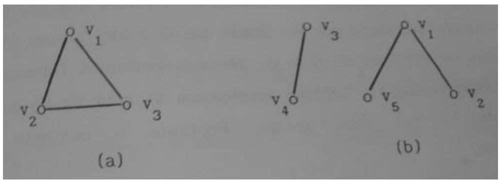
Conexidade



Conexidade

- Um grafo não conexo consiste de dois ou mais subgrafos conexos.
- Cada um destes subgrafos conexos é denominado *componente*.

Conexidade



Conexidade

- Teorema (1):
  - Um grafo G é não conexo, se e somente se seu conjunto de vértices V pode ser particionado em dois subconjuntos distintos, não vazios, V_1 e V_2, tais que nenhuma aresta exista em G ligando vértices de V_1 a vértices V_2.

Conexidade

- Teorema (2):
  - Se um grafo (conexo ou não) possui exatamente dois vértices de grau ímpar, então deve existir um caminho ligando estes dois vértices.

Conexidade

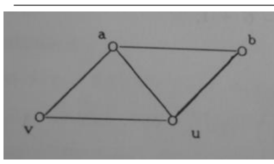
- Teorema (3):
  - Um grafo simples e conexo, com n vértices, tem o número de arestas m satisfazendo a

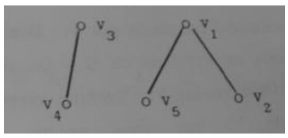
    $n - 1 <= m <= 1/2(n-1)n$

Conexidade

- Algoritmo para determinar se um grafo é conexo (Goodman):
  - Se o grafo não for conexo, resultará nos componentes.
  - Reduz cada componente a um ponto.
  - Escolhe um vértice inicial e faz a fusão deste com os vértices adjacentes a ele e aos que forem adjacentes ao seus adjacentes.

Conexidade

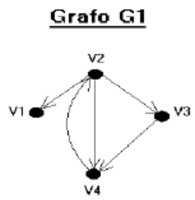


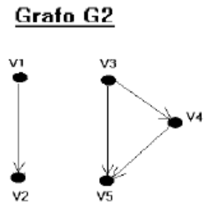


Conexidade

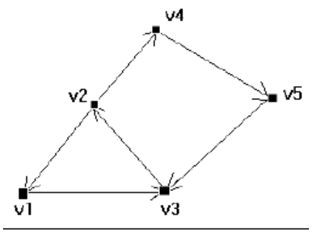
- O conceito de conexidade em grafos orientados não exige que haja um caminho ligando qualquer par de vértices.
- Se isto acontecer diz-se que o grafo é *fortemente conexo* o que significa dizer que dados dois vértices “v” e “w” quaisquer, cada um pode ser atingido a partir do outro, ou seja partindo de “v” pode-se chegar a “w” ou vice-versa.

Conexidade





Conexidade



Conexidade

- Como aplicação deste conceito podemos dizer que uma das características mais importante de uma rede de comunicação (telefonia, por exemplo) é sua conexidade.

Distância

- Dados dois vértices v e w pertencentes ao grafo G(V,E), denomina-se *distância d(v,w)*, entre v e w, ao comprimento do menor caminho entre esses dois vértices.
- No caso da não existência desse caminho, considera-se a *distância infinita*.

Distância

- Em um grafo conexo, para todo vértice u, v e w de G(V,E), tem-se que:
  - d(u,v) >= 0 com d(u,v) = 0 se e somente se u=v.
  - d(u,v) = d(v,u) ocorre apenas quanto o grafo é não dirigido.
  - d(u,v) + d(v,w) >= d(u,w).

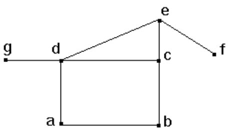
Distância

- A *excentricidade* de um vértice v, denotada por e(v), é a máxima das distâncias d(v,u), isto é, para todo u pertencente a G, e(v)=MAX (d(u,v)).
- Ou seja, denomina-se excentricidade de um vértice **v** pertencente a **V** ao valor da distância máxima entre **v** e **w**, para todo **w** pertencente a **V.**

Distância

- O *raio* de um grafo G, denotado por r(G) é o *MIN(e(v))*.
- O *centro* de um grafo G é denotado pelo conjunto de vértices v tais que *e(v) =r(G)*.

Distância

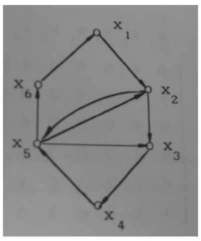


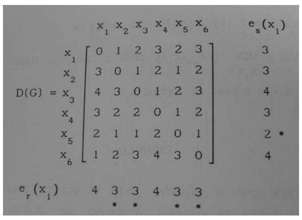
v	a	b	c	d	e	f	g	*e(v)*
a	0	1	2	1	2	3	2	**3**
b	1	0	1	2	2	3	3	**3**
c	2	1	0	1	1	2	2	**2**
d	1	2	1	0	1	2	1	**2**
e	2	2	1	1	0	1	2	**2**
f	3	3	2	2	1	0	3	**3**
g	2	3	2	1	2	3	0	**3**

- r(G) = 2.
- centro = {c,d}

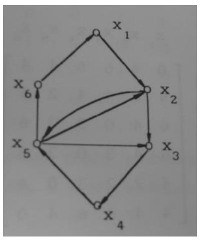
Distância

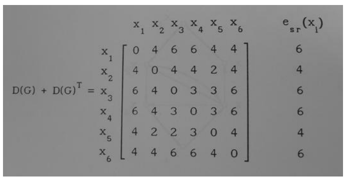
- Para grafos dirigidos, podemos calcular excentricidade, raio e centro de saída, de retorno ou ambos.





$$D(G) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \\ e_r(x_1) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccccc} 4 & 3^{\bullet} & 3^{\bullet} & 4 & 3^{\bullet} & 3^{\bullet} \end{array} \end{array} \begin{array}{c} e_s(x_1) \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \bullet \\ 4 \\ \\ \end{array}$$





$$D(G) + D(G)^T = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 & 6 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 4 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 0 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 6 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_{sr}(x_1) \\ 6 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \\ 4 \\ 6 \end{array}$$

Distância

- É interessante determinar o centro de um grafo de tal modo que o tempo de ida e volta seja mínimo.
- Localização de hospitais, polícia, bombeiros, etc.

Exercício

- Ache o centro do grafo G, considerando.
  - Grafo não dirigido e não valorado
  - Grafo não dirigido e valorado
  - Grafo dirigido e valorado