Programação Funcional
7ª Aula — Listas infinitas

Sandra Alves
DCC/FCUP

2019/20

Listas infinitas

Podemos usar listas para *sequências finitas*, por ex.:

```
[1,2,3,4] = 1:2:3:4:[]
```

Nesta aula vamos ver que podemos também usar listas para representar *sequências infinitas*, e.g.

```
[1..] =  1:2:3:4:5:...
```

Não podemos descrever uma lista infinita em extensão; usamos listas em compreensão ou definições recursivas.

Exemplos

```haskell
-- todos os números naturais
nats :: [Int]
nats = [0..]

-- todos os pares não-negativos
pares :: [Int]
pares = [0,2..]

-- a lista infinita 1, 1, 1,...
uns :: [Int]
uns = 1 : uns

-- todos os inteiros apartir de n
ints :: Int -> [Int]
ints n = n : ints (n+1)
```

Processamento de listas infinitas I

Por causa da *lazy evaluation* as listas são calculadas à medida da necessidade e apenas até onde for necessário.

```
  head (uns)
=
  head (1:uns)
=
  1
```

Processamento de listas infinitas II

Uma computação que necessite de percorrer toda a lista infinita não termina.

```
  length uns
=
  length (1:uns)
=
  1 + length uns
=
  1 + length (1:uns)
=
  1 + (1 + length uns)
=
  ⋮
```

não termina

Produzir listas infinitas I

Muitas funções do prelúdio-padrão produzem listas infinitas quando os argumentos são listas infinitas:

```
> map (2*) [1..]
[2, 4, 6, 8, 10, ...

> filter odd [1..]
[1, 3, 5, 7, 9, ...
```

Também podemos usar notação em compreensão:

Produzir listas infinitas II

```
> [2*x | x<-[1..]]
[2, 4, 6, 8, 10 ...

> [x | x<-[1..], odd x]
[1, 3, 5, 7, 9 ...
```

Produzir listas infinitas III

Algumas funções do prelúdio-padrão produzem especificamente listas infinitas:

```
repeat :: a -> [a]
-- repeat x = [x,x,x,...]

cycle :: [a] -> [a]
-- cycle xs = xs++xs++xs++...

iterate :: (a -> a) -> a -> [a]
-- iterate f x = [x, f x, f(f x), f(f(f x))...]
```

Note que `iterate é de ordem-superior---o 1º argumento é uma função.`

Produzir listas infinitas IV

Podemos testar no interpretador pedindo prefixos finitos:

```
> take 10 (repeat 1)
[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]

> take 10 (repeat 'a')
"aaaaaaaaaa"

> take 10 (cycle [1,-1])
[1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1]

> take 10 (iterate (2*) 1)
[1,2,4,8,16,32,64,128,256,512]
```

Produzir listas infinitas V

As funções repeat, cycle e iterate estão definidas no prelúdio-padrão usando recursão:

```
repeat :: a -> [a]
repeat x = xs where xs = x:xs

cycle :: [a] -> [a]
cycle [] = error "empty list"
cycle xs = xs' where xs' = xs++xs'

iterate :: (a->a) -> a -> [a]
iterate f x = x : iterate f (f x)
```

Porquê usar listas infinitas?

- Permite simplificar o processamento de listas finitas combinando-as com listas infinitas (por ex.: evita especificar comprimento).
- Permite separar a geração e o consumo de sequências (por ex.: aproximações numéricas).
- Permite maior modularidade na decomposição dos programas em funções independentes.

Prenchimento de texto I

Um exemplo simples: escrever uma função

```
preencher :: Int -> String -> String
```

que preenche uma cadeia com espaços de forma a perfazer *n* caracteres.

Se a cadeia já tiver comprimento *n* ou maior, deve ser truncada a *n* caracteres.

Prenchimento de texto II

Exemplos:

```
> preencher 10 "Haskell"
"Haskell   "

> preencher 10 "Haskell B. Curry"
"Haskell B."
```

Prenchimento de texto III

Solução usando `take e uma lista infinita:`

```
preencher n xs = take n (xs++repeat ' ')
```

Aproximação da raiz quadrada I

Calcular uma aproximação de $\sqrt{q}$ pelo método babilónico:

1. Começamos com $x_0 = q$
2. Em cada passo, melhoramos a aproximação tomando

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{q}{x_n}\right)$$

3. Critérios de paragem:

   número de iterações

   erro absoluto $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$

   erro relativo $|(x_{n+1} - x_n)/x_n| < \epsilon$

Aproximação da raiz quadrada II

```
-- sucessão infinita de aproximações à raiz quadrada
raiz :: Double -> [Double]
raiz q = iterate (\x->0.5*(x+q/x)) q

-- critérios de paragem
absolute :: [Double] -> Double -> Double
absolute xs eps = head [x | (x,x')<-zip xs (tail xs),
                            abs(x-x')<eps]

relative :: [Double] -> Double -> Double
relative xs eps = head [x | (x,x')<-zip xs (tail xs),
                            abs((x-x')/x')<eps]
```

Aproximação da raiz quadrada III

Exemplos de uso:

```
> take 5 (raiz 2)
[2.0,1.5,1.4166667,1.4142157,1.4142135]

> absolute (raiz 2) 0.01
1.4166667

> relative (raiz 2) 0.001
1.4142157
```

A sucessão de Fibonacci I

Terceiro exemplo: a sucessão de Fibonacci

- começa com 0, 1;
- cada valor seguinte é a *soma dos dois anteriores*.

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots, n, m, n+m, \ldots$$

A sucessão de Fibonacci II

Solução em Haskell: uma lista infinita definida recursivamente.

```
fibs :: [Integer]
fibs = 0 : 1 : [n+m | (n,m)<-zip fibs (tail fibs)]
```

A sucessão de Fibonacci III

Os primeiros dez números de Fibonacci:

```
> take 10 fibs
[0,1,1,2,3,5,8,13,21,34]
```

O *n*-ésimo Fibonacci (índices começam em 0):

```
> fibs!!8
21
```

O primeiro Fibonacci superior a 100:

A sucessão de Fibonacci IV

```
> head (dropWhile (<100) fibs)
144
```

O crivo de Eratóstenes I

Gerar *todos* os números usando o *crivo de Eratóstenes*.

1. Começar com a lista $[2, 3, 4, \ldots]$;
2. Marcar o primeiro número p na lista como primo;
3. Remover da lista p e todos os seus múltiplos;
4. Repetir o passo 2.

Observar que o passo 3 envolve processar uma lista infinita.

O crivo de Eratóstenes II

Em Haskell:

```
primos :: [Integer]
primos = crivo [2..]

crivo :: [Integer] -> [Integer]
crivo (p:xs) = p : crivo [x | x<-xs, x`mod`p/=0]
```

O crivo de Eratóstenes III

Os primeiros 10 primos:

```
> take 10 primos
[2,3,5,7,11,13,17,19,23,29]
```

Quantos primos são inferiores a 100?

```
> length (takeWhile (<100) primos)
25
```