Lineare Algebra

Vektorgeometrie

Berechnung des Skalarprodukts

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Berechnung des Zwischenwinkels zweier Vektoren

$$\cos \measuredangle(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} \Rightarrow \measuredangle(\vec{v}, \vec{w}) = \arccos \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$$

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot cos\measuredangle(\vec{v}, \vec{w})$$

Aussage des Skalarprodukts 0

$$\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \bullet \vec{w} = 0$$

Nullvektoren stehen senkrecht zu allen Vektoren

Berechnung der Länge eines Vektors

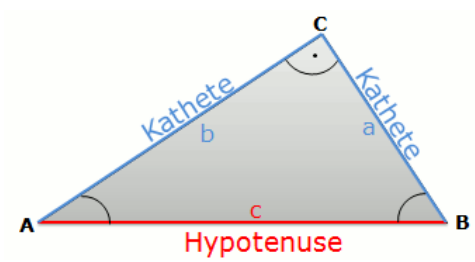
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}}$$

$$\vec{a} \bullet \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2$$

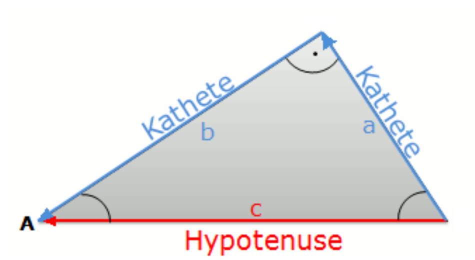
Satz des Pythagoras

Im Dreieck



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Mit Vektoren



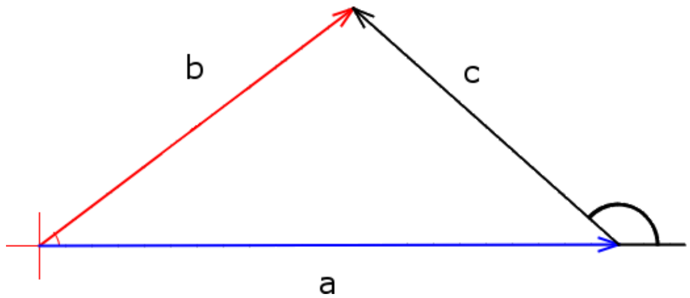
$$\vec{b} = \vec{c} - \vec{a}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + (\vec{c} - \vec{a})$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c} \bullet \vec{c}} = \sqrt{(\vec{a} + (\vec{c} - \vec{a}) \bullet (\vec{a} + (\vec{c} - \vec{a}))} = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b}) \bullet (\vec{a} + \vec{b})}$$

$$= \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a} + \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{c} \bullet \vec{b} + \vec{b} \bullet \vec{b}} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + 0 + 0 + \left|\vec{b}\right|^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2}$$

Cosinussatz



$$\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\left|\vec{b}\right|^2 = \vec{b} \bullet \vec{b} = (\vec{a} + \vec{c}) \bullet (\vec{a} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{a} + \vec{a} \bullet \vec{c} + \vec{c} \bullet \vec{a} + \vec{c} \bullet \vec{c}$$

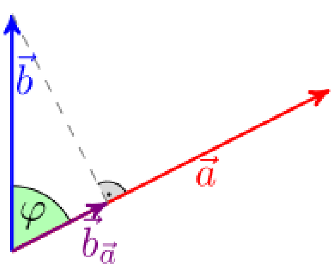
$$= |\vec{a}|^2 + 2\cos\measuredangle(\vec{a}, \vec{c}) \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| + |\vec{c}|^2$$

$$(= |\vec{a}|^2 - 2\cos(180^o - \measuredangle) \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| + |\vec{c}|^2)$$

Daraus folgt:

$$a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta) = b^2$$

Orthogonalprojektion



1. Einheitsvektor in $\vec{a}$-Richtung $= \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \vec{a_1} (= \vec{b_a})$
2. $\vec{b} \bullet \vec{a_1} = \left|\vec{b}\right| \cdot |\vec{a_1}| \cdot \cos\measuredangle(\vec{b}, \vec{a_1}) = \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\measuredangle(\vec{b}, \vec{a_1})$
3. $\left|\vec{b}\right| \cdot \cos\measuredangle(\vec{b}, \vec{a_1}) \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (\vec{b} \bullet \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}) \bullet \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (\vec{b} \bullet \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2}) \bullet \vec{a}$

Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Parameterdarstellung

Gerade = Aufpunkt + Faktor * Vektor

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ebene = Aufpunkt + 1.Faktor * 1.Vektor + 2.Faktor * 2. Vektor

$$E : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Koordinatengleichung der Ebene

Parameterdarstellung:

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

- Kreuzprodukt der Vektoren berechnen

  $$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -10 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- Gleichung aufstellen

  $3x + 5y + 4z = 0$

- Aufpunkt einsetzen

  $3 - 5 + 8 = 6$
  $\Rightarrow 3x + 5y + 4z = 6$
  $\Rightarrow 3x + 5y + 4z - 6 = 0$

Matrizen

Matrix-Vektor Multiplikation

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa_1 + yb_1 + zc_1 \\ xa_2 + yb_2 + zc_2 \\ xa_3 + yb_3 + zc_3 \end{pmatrix}$$

Matrix-Matrix Multiplikation

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q & r \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (aq + bs) & (ar + bt) \\ (cq + ds) & (cr + dt) \end{pmatrix}$$

Interpretion

Interpretation als lineare Operation auf die Spalten von A:

$$A \cdot B = \left(\left\{ \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} -5 \\ 3 \end{matrix} \right\} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \left(\left\{ \begin{matrix} 4 \\ -2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} -15 \\ 9 \end{matrix} \right\} \right)$$

Interpretation als lineare Operation auf die Zeilen von A:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \{2 & -5\} \\ \{-1 & 3\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{4 & -10\} \\ \{-3 & 9\} \end{pmatrix}$$

Das Inverse einer Matrix

Für das Inverse A^{-1} einer Matrix A gilt $A \cdot A^{-1} = I$.
Eine quadratische Matrix lässt sich genau dann invertieren, wenn Ihre Spalten linear unabhängig sind:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ist eine Matrix grösser (als quadr.) so lässt sich das Inverse mit dem Gausschen Eliminationsverfahren ermittelt.

Determinate einer Matrix

2x2 Matrizen

Die Determinate einer Matrix mit linear unabhängigen Zeilen und Spalten lässt sich wie folgt berechnen:

$$Det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Enthält die Matrix jedoch linear abhängige Zeilen oder Spalten oder eine Zeile oder Spalte besteht nur aus Nullen, so ist die Determinate 0.

3x3 Matrizen

$$Det(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Kern einer Matrix

Der Kern einer Matrix ist ein Vektor, welche

Bild einer Matrix

Basiswechsel

$$A_B = B^{-1} \cdot A \cdot B \Longleftrightarrow A = B \cdot A_B \cdot B^{-1}$$

Eigenwert & Eigenvektor

Es gilt:

$$A\vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}\,, \lambda \epsilon \mathbb{R}, \vec{v} \neq \vec{0}$$

Wobei es sich bei λ um den Eigenwert handelt und bei $\vec{v}$ um den Eigenvektor.
Daraus folgt:

$$(A - \lambda I) \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

Nun können mit Hilfe der Determinaten die Eigenwerte berechnet werden (ausmultiplizieren und in Mitternachtsformel einsetzen.

$$det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Um nun die Eigenvektoren zu erhalten, setzt man die möglichen λ ein und wendet auf diese Matrix den Gauss an und eine Zeile zu eliminieren.
Anschliessend können die erhaltenen Werte umgedreht werden, und einer der beiden negiert werden.
Beispiel:

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & |0 \\ 3 & 3 & |0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -1 & |0 \\ 0 & 0 & |0 \end{pmatrix} \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Beispiele

Schnittgerade zweier Ebenen

Gegeben:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Normalen der Ebenen bestimmen (Kreuzprodukt)

$$n_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$n_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Gleichungen für Normalen aufstellen und Aufpunkte einsetzen

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow -y + z = 0 \Rightarrow -1 + 2 = 1 \Rightarrow -x + z = 1$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow 8 = 8 \Rightarrow 2x = 8$$

- Normalen zu den Normalen bestimmen

$$r = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 0x + 2x + 2z = 0$$

- Aufpunkt bestimmen

  Aufpunkt so wählen, dass er beide Gleichungen erfüllt

  $0x - y - z = 1$

  $2x + 0y + 0z = 8$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Parameter Darstellung

$$r = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Normalstehende Ebene

Gegeben

$E: \ x + 2y + 2z - 4 = 0$

$A(-1/-2/0), \ B(1/1/2)$

Gesucht: Ebene die Normla zur gegeben Ebene liegt, und durch die Punkt A und B geht.

- u, v berechnen

$$u = n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \ v = B - A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A + s * u + t * v =$$

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Berechnen der Koordinatengleichung

$$n_2 = u \times v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

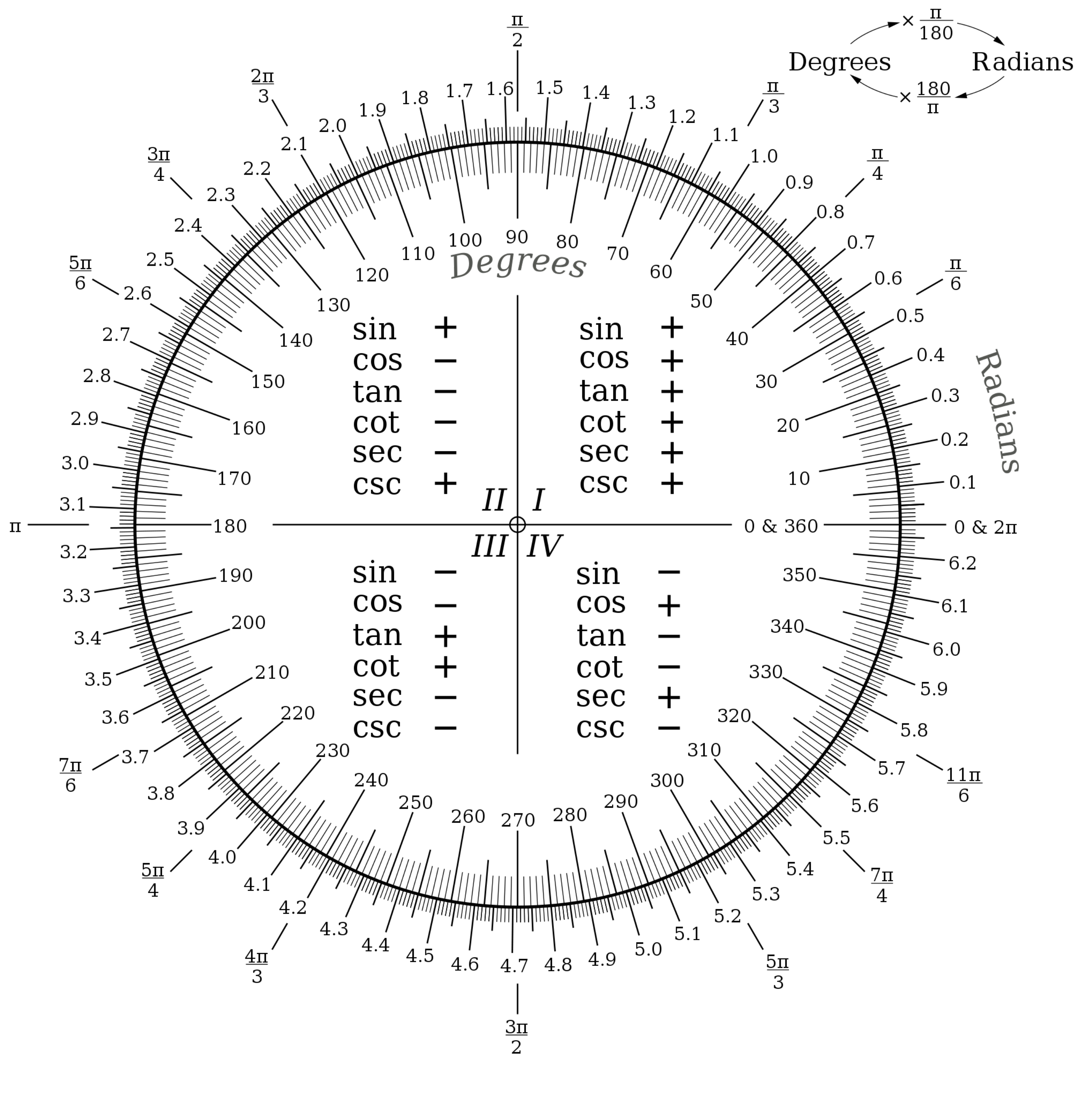
$-2x + 2y - z = 0$

- Aufpunkt einsetzen (A ist der Aufpunkt)

$-2 * (-1) + 2 * (-2) - 0 = -2$

$\Rightarrow -2x + 2y - z + 2 = 0$

Hilfsmittel



Cos-Table

Grad	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
Radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Wert	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	1