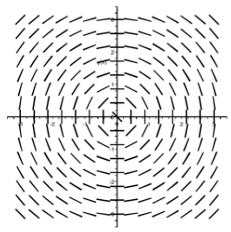
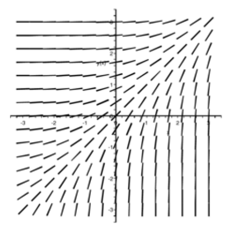
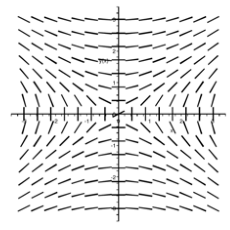
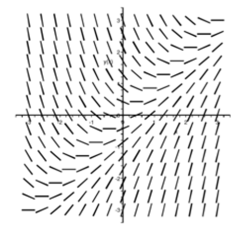
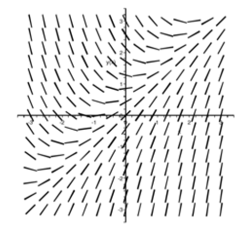
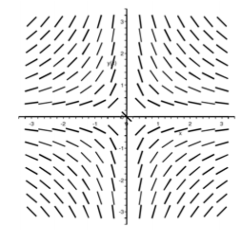
Differentialgleichungen

					
$yy' + x = 0$	$y' = e^{x-y}$	$2yy' = x$	$y' = x{-}y$	$y' = x{-}y + 1$	$y'x + y = 0$

1.Ordnung

$y' = f(x, y) = \frac{dy}{dx}$
$n'(t) = -\lambda \times n(t)$, allgemein löst $n(t) = C \times e^{-\lambda t}$ die DG

Trennen der Variablen

$y' = f(x) \times g(y) = \frac{dy}{dx}$ jede Variable auf eine Seite, dann getrennt Integrieren: $\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x)dx + c$

Kurvenschaar-Problem

Idee

1. Kurvenschaar $y = f(x, c)$, nach Konstante auflösen, dann in DG einsetzen um C zu eliminieren
2. Zugehörige DG $y' = g(x, y)$
3. Zugehörige DG der orth. KS $y' = \frac{-1}{g(x,y)}$
4. Kurvenschaar bestimmen $y = f(x, c)$

Beispiel

Bestimmen Sie alle Kurven, die die Geraden durch den Nullpunkt rechtwinklig schneiden.

1. Kurvenschar: $y = k \cdot x \Rightarrow k = \frac{y}{x}$
2. DG: $y' = k \Rightarrow y' = \frac{y}{x}$
3. Orth. Kurvenschar: $y' = -\frac{x}{y}$
4. Umformen: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow \int y \cdot dy = \int -x \cdot dx$
5. Integral Lösen und nach y auflösen

Normalformen

f(x) = Rechnung in x, g(y) = Rechnung in y

- $y' = f(x) + g(y)$ 1. Fall
- $y' = f(x) \cdot g(y)$ 2. Fall

Integration durch Substitution

1. Fall

- $y' = f(ax + by + c)$
- $u = ax + by(x) + c => y' = f(u)$, $u' = a + by'(x)$
- in u' für y' die ursprüngliche Gleichung $y' = f(u)$ einsetzen

Beispiel

- $y' = x + y$

- $u = x + y$
- $u' = 1 + y' = 1 + u$
- $\frac{du}{dx} = 1 + u$
- $\int \frac{1}{1+u} \cdot du = \int dx \Rightarrow ln(1+u) = x + c \Rightarrow 1 + u = k \cdot e^x$
- $1 + x + y = k \cdot e^x \Rightarrow y = k \cdot e^x - x - 1$

2. Fall

- $y' = f(\frac{y}{x}) => y' = f(u)$
- $u = \frac{y}{x}$, $u(x) \times x = y => u'(x) \times x + u(x) = y'$
- $y' = u'x + u$ in $y' = f(u)$ eingesetzt und aufgelöst ergibt: $u' = \frac{1}{x}(f(u) - u)$ (anschliessend trennen der Variablen)

Beispiel:

- DG: $y' = \frac{3y^2+xy}{x^2} = 3(\frac{y}{x})^2 + \frac{y}{x}$
- $u = \frac{y}{x} \Rightarrow f(u) = 3u^2 + u$
- $u' = \frac{1}{x} \cdot (f(u) - u) = \frac{1}{x} \cdot (3u^2 + u - u) = \frac{1}{x} \cdot u^2$
- $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \cdot u^2$
- $\int \frac{1}{u2} = \int \frac{1}{x}$
- Integral lösen, nach u auflösen und u einsetzen, danach nach y auflösen

2.Ordnung

$x''(t) = -g$

- $x'(t) = -gt + v_0$
- $x(t) = -gt^2\frac{1}{2} + v_0t + s_0 =>$ allgemeine Lösung
- $v(0) = 0, s(0) = 0 => x(t) = -gt^2\frac{1}{2}$

Linerare DG (1.O)

Normalformen

- $y' + f(x) \times y = g(x)$ -> inhomohene DG 1.O
- $y' + f(x) \times y = 0$ -> homogene DG 1.O

Allgemeine lösung mit freiem Parameter einer **Homogenen DG** (durch trennen der Variabeln)

- $y_h(x) = K \times e^{-\int f(x)dx}$

Lösung einder **Inhomogenen DG**

1. LDG als homogene lösen -> y_h
2. $y_p = K(x) \times e^{-\int f(x)dx}$
   (a) $K'(x) = \frac{g(x)}{y_h(x)_{K=1}}$ bestimmen, danach Integrieren
3. Allgemeine Lösung: $y_a(x) = y_h(x) + y_p(x)$
4. Falls Anfangsbedingungen vorhanden, einsetzen und partikuläre Lösung bestimmen