Lineare Algebra

Vektorgeometrie

Berechnung des Skalarprodukts

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Berechnung des Zwischenwinkels zweier Vektoren

$$\cos \measuredangle(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} \Rightarrow \measuredangle(\vec{v}, \vec{w}) = \arccos \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$$

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot cos\measuredangle(\vec{v}, \vec{w})$$

Aussage des Skalarprodukts 0

$$\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \bullet \vec{w} = 0$$

Nullvektoren stehen senkrecht zu allen Vektoren

Berechnung der Länge eines Vektors

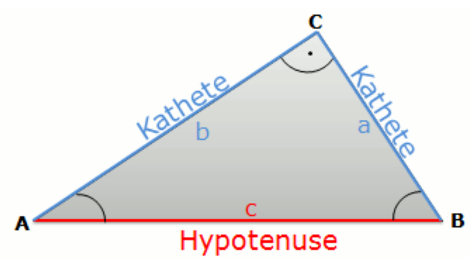
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}}$$

$$\vec{a} \bullet \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2$$

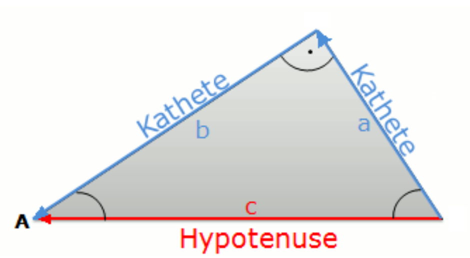
Satz des Pythagoras

Im Dreieck



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Mit Vektoren



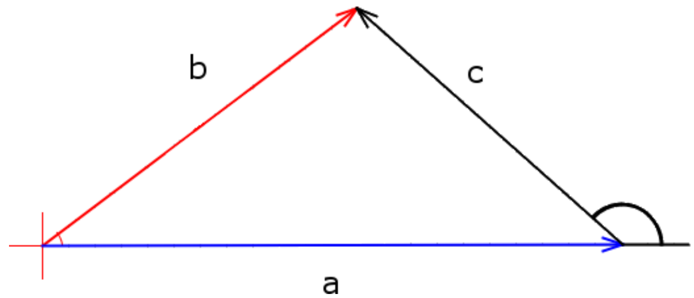
$$\vec{b} = \vec{c} - \vec{a}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + (\vec{c} - \vec{a})$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c} \bullet \vec{c}} = \sqrt{(\vec{a} + (\vec{c} - \vec{a}) \bullet (\vec{a} + (\vec{c} - \vec{a}))} = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b}) \bullet (\vec{a} + \vec{b})}$$

$$= \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a} + \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{c} \bullet \vec{b} + \vec{b} \bullet \vec{b}} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + 0 + 0 + \left|\vec{b}\right|^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2}$$

Cosinussatz



$$\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\left|\vec{b}\right|^2 = \vec{b} \bullet \vec{b} = (\vec{a} + \vec{c}) \bullet (\vec{a} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{a} + \vec{a} \bullet \vec{c} + \vec{c} \bullet \vec{a} + \vec{c} \bullet \vec{c}$$

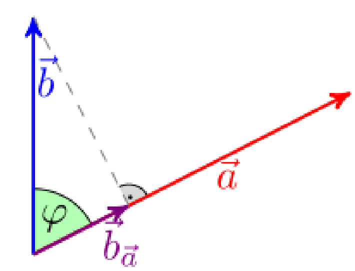
$$= |\vec{a}|^2 + 2\cos\measuredangle(\vec{a}, \vec{c}) \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| + |\vec{c}|^2$$

$$(= |\vec{a}|^2 - 2\cos(180^o - \measuredangle) \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| + |\vec{c}|^2)$$

Daraus folgt:

$$a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta) = b^2$$

Orthogonalprojektion



1. Einheitsvektor in $\vec{a}$-Richtung $= \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \vec{a_1} (= \vec{b_a})$

2. $\vec{b} \bullet \vec{a_1} = \left|\vec{b}\right| \cdot |\vec{a_1}| \cdot \cos\measuredangle(\vec{b}, \vec{a_1}) = \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\measuredangle(\vec{b}, \vec{a_1})$

3. $\left|\vec{b}\right| \cdot \cos\measuredangle(\vec{b}, \vec{a_1}) \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (\vec{b} \bullet \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}) \bullet \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (\vec{b} \bullet \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2}) \bullet \vec{a}$

Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Parameterdarstellung

Gerade = Aufpunkt + Faktor * Vektor

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ebene = Aufpunkt + 1.Faktor * 1.Vektor + 2.Faktor * 2. Vektor

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Koordinatengleichung der Ebene

Parameterdarstellung:

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

- Kreuzprodukt der Vektoren berechnen

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -10 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- Gleichung aufstellen

$3x + 5y + 4z = 0$

- Aufpunkt einsetzen

$3 - 5 + 8 = 6$
$\Rightarrow 3x + 5y + 4z = 6$
$\Rightarrow 3x + 5y + 4z - 6 = 0$

Beispiele

Schnittgerade zweier Ebenen

Gegeben:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Normalen der Ebenen bestimmen (Kreuzprodukt)

$$n_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$n_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Gleichungen für Normalen aufstellen und Aufpunkte einsetzen

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow -y + z = 0 \Rightarrow -1 + 2 = 1 \Rightarrow -x + z = 1$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow 8 = 8 \Rightarrow 2x = 8$$

- Normalen zu den Normalen bestimmen

$$r = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow 0x + 2x + 2z = 0$

- Aufpunkt bestimmen

  Aufpunkt so wählen, dass er beide Gleichungen erfüllt

  $0x - y - z = 1$

  $2x + 0y + 0z = 8$

  $\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

- Parameter Darstellung

  $r = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Normalstehende Ebene

Gegeben

$E: \ x + 2y + 2z - 4 = 0$

$A(-1/-2/0), \ B(1/1/2)$

Gesucht: Ebene die Normla zur gegeben Ebene liegt, und durch die Punkt A und B geht.

- u, v berechnen

  $u = n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \ v = B - A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

  $E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A + s * u + t * v =$

  $E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

- Berechnen der Koordinatengleichung

  $n_2 = u \times v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

  $-2x + 2y - z = 0$

- Aufpunkt einsetzen (A ist der Aufpunkt)

  $-2 * (-1) + 2 * (-2) - 0 = -2$

  $\Rightarrow -2x + 2y - z + 2 = 0$

Drehung (Drehmatrix)

$A_{D(45ř)} = \begin{pmatrix} cos(45ř) & -sin(45ř) \\ sin(45ř) & cos(45ř) \end{pmatrix}$

Spiegelung

- An x-Achse $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- An y-Achse $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

An Geraden 2x -5y = 0 (Wenn die Gerade nicht durch den Nullpunkt geht, gehts nicht, nicht linear)

1. Normale der Gerade bestimmen:

   $n = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, da $n \bullet r = 0$, ist der Vektor $r = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$(Vektor umdrehen und eine Zahl negieren)

2. Nun kann eine Gleichung aufgestellt werden:

   $A(n * r) = (-n * r)$, dies kann man schreiben als A*B =C

3. Nun kann auf beiden Seiten von rechts mit B^{-1}multipliziert werden und man erhält:

   $A = C * B^{-1}$resp $A = (-n * r) * (n * r)^{-1}$,

4. Da wir n und r kennen, können wir nun die klammern durch Matrizen ersetzen

   $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$

5. Nun kann es ausgerechnet werden (−> Gausches Eliminationsverfahren für Invertierung)