Contents

Kinetik

Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfunktionen

Ortsfunktion

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeit

Die Geschwindigkeit ist die zeitliche Ableitung der Ortsfunktion:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{r'}(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{dz(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}$$

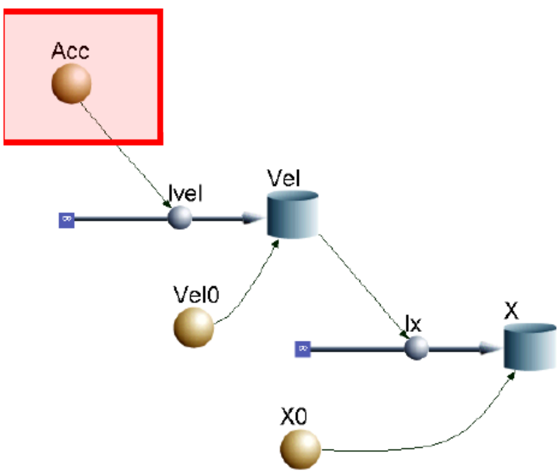
Geschwindigkeit ist ein Vektor, die Schnelligkeit ihr Betrag.

Beschleunigung

Die Beschleunigung ist die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeits resp. die zweite zeitliche Ableitung der Ortsfunktion.

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x(t)}{dt} \\ \frac{dv_y(t)}{dt} \\ \frac{dv_z(t)}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$



Kraft

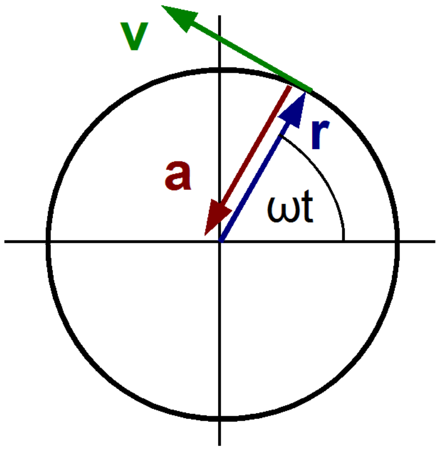
Die Kraft ist das Produkt von Masse und Beschleunigung:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$
$$\left[\vec{F}\right] = \left[\frac{kg \cdot m}{s^2}\right] = [N]$$

Schiefer Wurf

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \\ v_{z0} - gt \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} r_{x0} + v_{x0} \\ r_{y0} + v_{y0} \\ r_{z0} + v_{z0} - g\frac{t^2}{2} \end{pmatrix}$$

Kreisbewegung



ω = Winkel pro Sekunde

$T = \frac{2\Pi}{\omega}$ =Periode, Zeit für einen Umlauf ($360° = 2\Pi$)

Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r\,cos(\omega t) \\ r\,sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$|\vec{r}(t)| = r$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r\,cos(\omega(t+T)) \\ r\,sin(\omega(t+T)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,cos(\omega t + 2\Pi) \\ r\,sin(\omega t + 2\Pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,cos(\omega t) \\ r\,sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -r\omega sin(\omega t) \\ r\omega cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$|\vec{v}(t)| = r\omega$$

Beschleunigung

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -r\omega^2 cos(\omega t) \\ -r\omega^2 sind(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}(t)| = r\omega^2$$

Kräfte

Massepunkte

Massepunkte sind charakterisiert durch die Position $\vec{r}(t)$, durch die Masse M und durch die Ladung Q.

Beschleunigung

Die Beschleunigung einer Masser ergibt sich aus der Summe der internen und externen Kräfte:

$\vec{a} = \frac{1}{m} \cdot (\sum \vec{F}_{intern} + \sum \vec{F}_{extern})$

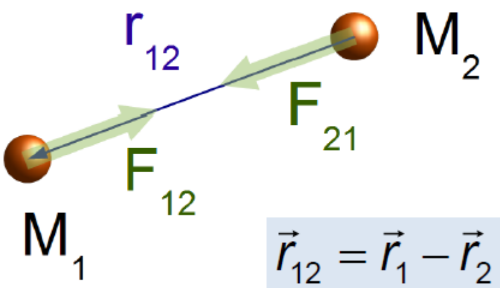
Gravitationskraft

$\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{M_1 M_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \vec{n}_{12}$ =Kraft auf Masse M1

$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

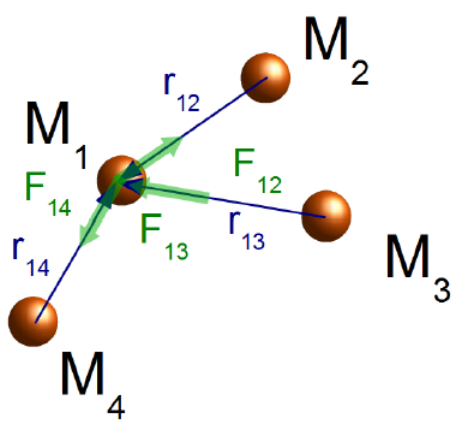
$\vec{n}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$ =Einheitsvektor von Masse M2 zu Masse M1

$\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \left[\frac{Nm^2}{kg^2}\right]$ =Gravitationskonstante



Superpositionsprinzip

Die Gesamtkraft einer Anzahl von Massen auf eine bestimmte Masse ist gleich der Summe der Kräfte der jeweiligen Einzelmassen.



Planetenbahnen

$\vec{F} = -\gamma \frac{mM_s}{|\vec{r}|^2} \vec{n} \Rightarrow ma = \gamma \frac{mM_s}{r^2}$

$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} -r\omega^2 cos(\omega t) \\ -r\omega^2 sin(\omega t) \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{a}(t)| = r\omega^2$

$\Rightarrow mr\omega^2 = \gamma \frac{mM_s}{r^2} \Rightarrow r^3\omega^2 = \gamma M_s$

m = Planetenmasse

M_s= Sonnenmasse

r = Radius der Kreisbahn

Keppler's third law

$\frac{r^3}{T^2} = \frac{\gamma M_s}{4\pi^2} = const.$

T = Periode = $\frac{2\pi}{\omega}$

Elektrische Ladung

Ein Elektron trägt eine Ladung von -e, wobei e die Elementarladung $e = 1.602189 \cdot 10^{-19} C$ beträgt.

Kräfte zwischen ruhenden Ladungen

Gleiche Ladungen stossen sich ab, ungleiche ziehen sich an.

$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \vec{n}_{12}$

$\varepsilon_0 = 8.859 \cdot 10^{-12} \left[\frac{C^2}{Jm}\right]$ =Influenzkonstante

Reibungskräfte

Bodenkraft

Die Gravitationskraft wird durch eine Kraft des Bodens, die "Bodenkraft" ausgeglichen.

Gleitreibung

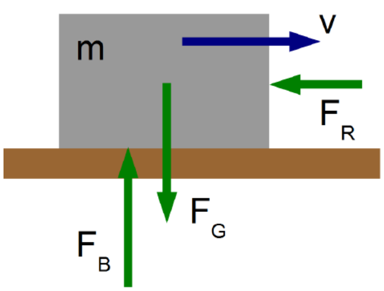
$\vec{F}_G = -\vec{F}_B$

$\vec{F}_R = -\mu \cdot m \cdot g \cdot \vec{n}_v$

$\vec{n}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

μ =Gleitreibungskoeff.

m =Masse



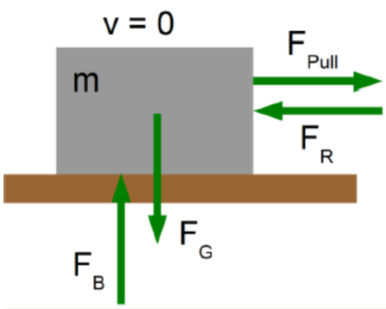
Haftreibung

$\vec{F}_C = \mu_H \cdot m \cdot g \cdot \vec{n}_{F pull}$

$\vec{F}_R = -\vec{F}_{pull}$(solange $\vec{F}_{pull} \leq \vec{F}_C$ und $\vec{v} = 0$)

$\vec{n}_{Fpull} = \frac{\vec{F}_{pull}}{|\vec{F}_{pull}|}$

μ_H =Haftreibungskoeffizient


v = 0
m
F Pull
F R
F G
F B

Impuls

Luftwiderstand

Vertikaler Fall

Der Luftwiderstand ist proportional zum Quadrat der Schnelligkeit und der Geschwindigkeit entgegengesetzt:

$\vec{F}_w = -c_w \cdot \frac{\rho A}{2} \cdot |\vec{v}|^2 \cdot \vec{n}_v$

$c_w =$Widerstandszahl

$\rho =$Luftdichte $(1.293 kg/m^3)$

$A =$Querschnittsfläche $\perp$ zu $\vec{v}$

$\vec{n}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

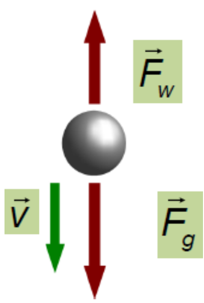
Die Widerstandszahl c_w hängt von der Geometrie des betrachteten Körpers ab.

Maximale Fallgeschwindigkeit

$m_s\vec{a} = \vec{F}_g + \vec{F}_w$

$m\dot{v}_z = -mg + c_w \cdot \frac{\rho_{Luft} A}{2} \cdot v_z^2$

$\Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} v_z(t) = \sqrt{\frac{g}{\gamma}} = \sqrt{\frac{2mg}{c_w \rho_{Luft} A}}$



Fallgeschwindgkeit Allgemein

Geschwindigkeit als Funktion der Zeit:

$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - kv^2$

$v = \frac{dx}{dt}$

$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2$

Ballistische Kurven

Generell geht es darum, die Bahn eines Geschosses vorherzusagen.

$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_G - k \cdot |\vec{v}|^2 \cdot \vec{n}_v$

$\vec{n}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

$k =$Konstante $\left[\frac{kg}{m}\right]$

Dieses Problem kann nur numerisch, in Koordinatenform angegangen werden:

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - k \cdot \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

$\dot{v}_x = -kv_x\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

$$\dot{v}_y = -kv_y\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$\dot{v}_z = -g - kv_z\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Impuls

Definition

Gegeben ist eine punktförmige Masse m mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}$.
Der Impuls dieser Masse ist definiert als:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Der Impuls ist also ein Vektor.

Impuls einer ausgedehnten Masse

$$\vec{p} = \int\limits_{Volume} \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r})dV$$

$\rho(\vec{r})$ =Dichte am Punkt $\vec{r}$

$v(\vec{r})$ =Geschwindigkeit am Punkt $\vec{r}$

dm(r) ist ein Stücklein Masse. Die Gesamtmasse ist aus vielen Massenstücklein zusammengesetzt, das Integral ist eine Summe über ganz kleine Stücklein:

$$dm(\vec{r}) = \rho(\vec{r})dV$$

Zusammenhang Impuls und Kraft

Es gilt:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \vec{p} = m\vec{v}$$

Weiter können wir sagen:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Falls die Masse zeitlich konstant ist ($\frac{dm}{dt} = 0$) gilt:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Die zeitliche Ableitung des Impulses eines Massenpunktes ist gleich der Kraft, die auf ihn wirkt!

Impulserhaltung

Für ein System miteinander wechselwirkender Massen aber ohne äussere Kräfte ist der Gesamtimpuls eine Konstante.

$$\vec{p}_{tot} = \sum_i m_i\vec{v}_i = const.$$

$$\frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i\vec{v}_i\right) = \sum_i m_i\vec{a}_i = \sum_i\sum_{j\neq i}\vec{F}_{ij}^{intern}$$

Masseschwerpunkt

Definition

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum\limits_i m_i\vec{r}_i}{\sum\limits_i m_i}$$

Schwerpunktgeschwindigkeit

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\vec{p}_{tot}}{\sum\limits_i m_i}$$

Schwerpunktbeschleunigung

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\sum\limits_i m_i \vec{a}_i}{\sum\limits_i m_i}$$

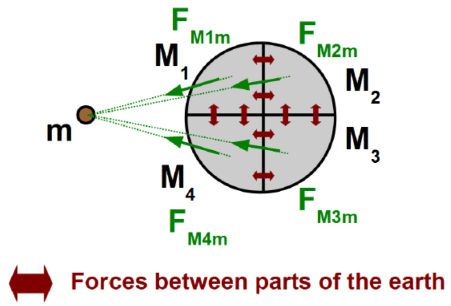
Schwerpunktsatz

Die Änderungsrate des Impulses der im Schwerpunkt konzentrierten Gesamtmasse der Teilchen ist gleich der Summe aller externen Kräfte.

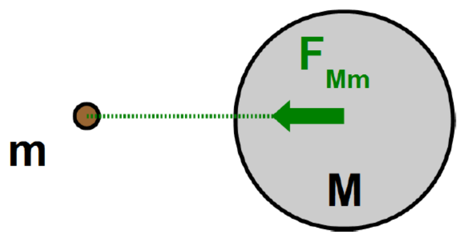
$$M_{tot} = \sum_i m_i$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\sum\limits_i^N \sum\limits_k^K \vec{F}_{ik}^{extern}}{\sum\limits_i m_i} \Longleftrightarrow M_{tot}\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{p}_{CM}}{dt} = \sum_i^N \sum_k^N \vec{F}_{ik}^{extern}$$

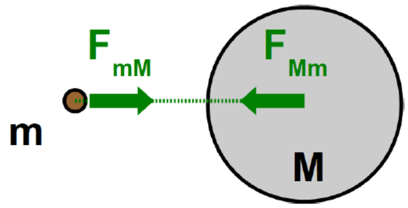
Eine Masse m übt gravitative Kräfte auf jeden Einzelteil einer Masse M aus. Zwischen den Teilen von M wirken Kräfte, die M zusammenhalten:



Aufgrund des Schewrpunktsatzes dürfen Sie so tun, als ob die von m ausgeübte Kraft im Schwerpunkt von M auf ganz M wirken würde:



Wegen Newtons drittem Gesetz dürfen Sie jetzt schliessen, dass M eine entsprechende Gegenkraft auf m ausübt:



Energie, Leistung und Potentiale

Energie

Mechanische Energie

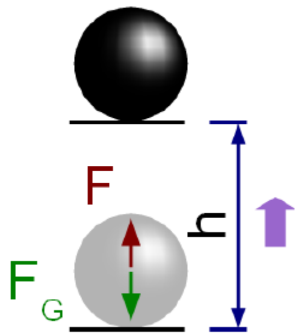
Wir definieren jetzt eine physikalische Grösse, die mechanische Energie:

$$E_{mech} = \vec{F} \cdot \vec{s} = [Kraft \cdot Weg] = [J] = \left[\frac{kgm^2}{s^2}\right]$$

Potentielle Energie

$$E_{mech} = \vec{F} \cdot \vec{s} = [Kraft \cdot Weg] = \int_0^h F \cdot dh = \int_0^h mg \cdot dh = mgh$$

Um die Kugel zu heben, müssen Sie die mechanische Energie mgh investieren. Die potentielle oder Lageenergie der Kugel wird dadurch um mgh erhöht.
Potentielle Energie im Gravitationsfeld = mgh



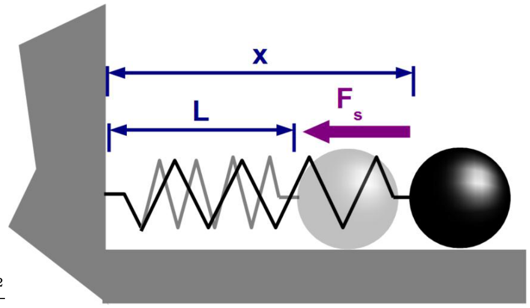
Kinetische Energie

$$E_{mech} = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs$$
$F = ma$ (a = Beschleunigung)
$s = \frac{a}{2}t^2$ (Zusammenhang Strecke-Beschleunigung)
$v = at$
$$\Rightarrow Fs = ma \cdot s = ma \cdot \frac{a}{2}t^2 = m \cdot \frac{v^2}{2}$$
$$\Rightarrow E_{kin} = m \cdot \frac{v^2}{2}$$

Gilt allgemein, die gegebene Herleitung funktioniert allerdings nur für konstante Kräfte.

Federenergie

$\vec{F}_s = -k(x-L)\vec{e}_x$
$\vec{e}_x$ =Einheitsvektor in x-Richtung
L = Ruhelänge
$$E_{Feder} = \int_L^x F dx = \int_L^x k(x-L)dx = \frac{k(x-L)^2}{2}$$



$\Rightarrow E_{kin} = m \cdot \frac{v^2}{2}$

Arbeit

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$$

Dabei ist $\vec{F}$ eine Kraft und $\Delta \vec{r}$ ein Stück Weg. Der Punkt bezeichnet das Skalarprodukt.

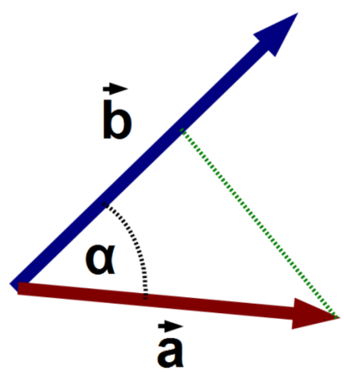
Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Geometrische Interpretation:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos(\alpha)$$

$$\alpha = arccos(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}) = arccos(\frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}})$$



$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Für das Produkt eines Verktors mit sich selber gilt:
(Zwischenwinkel ist null)

$$\vec{a} \bullet \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot cos(0) = |\vec{a}|^2$$

$$\Rightarrow E_{kin} = m \cdot \frac{\vec{v}^2}{2} = m \cdot \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} = m \cdot \frac{|\vec{v}|^2}{2}$$

Energieerhaltung

Energieerhaltungssatz

Die Gesamtmenge der Energie in einem Prozess bleibt immer exakt erhalten.

Anwendung der Energieerhaltung

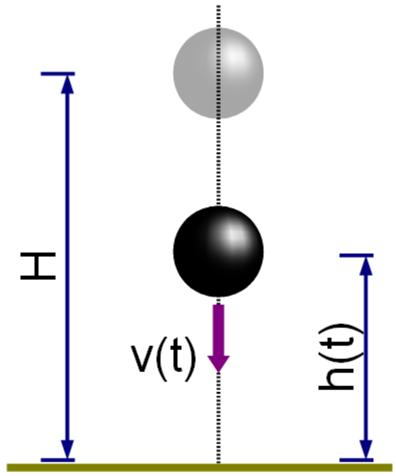
Ansatz: Wenn die Kugel fällt, sinkt ihre potentielle Energie. Wegen der Energieerhaltung steigt die kinetische Energie um einen entsprechenden Betrag.

$$E_{pot}(t) = mgh(t)$$

$$E_{kin}(t) = m\frac{v^2(t)}{2}$$

$$E_{pot}(t) + E_{kin}(t) = const.$$

$$E_{pot}(0) + E_{kin}(0) = mgH + 0 = mgH$$



$mgH = mgh(t) + m\frac{v^2(t)}{2}$
$\Rightarrow v(t) = \sqrt{2g(H - h(t))}$

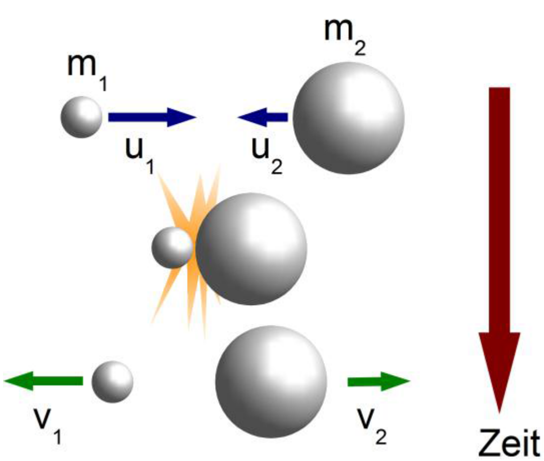
Energie- und Impulserhaltung

Impulserhaltung

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2 = P$$

Energierhaltung

$$m_1\frac{u_1^2}{2} + m_2\frac{u_2^2}{2} = m_1\frac{v_1^2}{2} + m_2\frac{v_2^2}{2} = E$$
$$v_1 = \frac{(m_1-m_2)\cdot u_1+2m_2u_2}{m_1+m_2}$$
$$v_2 = \frac{(m_2-m_1)\cdot u_2+2m_1u_1}{m_1+m_2}$$



Potentiale

Dissipative und Konservative Systeme

- Ein System heisst konservativ, wenn die Summe der Energien seiner Komponenten erhalten bleibt.
- Ein System heisst dissipativ, wenn es Energie in die Umwelt abgibt (z.B. durch Wärmestrahlung oder Reibung)

Potentielle Energie

Definition: Differenz der potentiellen Energien zwischen zwei Punkten = Arbeit, die es braucht, eine Masse vom ersten zum zweiten Punkt zu bringen.
Falls wir die potentielle Energie eines Objekts als Funktion der Lage angeben können (und nicht weiter sagen müssen, wie wir vom Anfangs- zum Endpunkt eines Pfads gelangen), haben wir es mit einem Potential zu tun.

Leistung

- Leistung ist Energie pro Zeit = $[W] = \left[\frac{J}{s}\right]$
- $1kwH = 3.6 \cdot 10^6 Ws = 3.6 \cdot 10^6 J$

Bilanzmodelle

Ausgleich zwischen Energiespeichern findet über Ströme von „Energieträgern" statt:

$$Strom = \frac{Energieträger}{Zeit}$$

Damit Sie mit einem Energieträgerstrom eine Leistung berechnen können, müssen Sie wissen, wieviel Energie in einem Energieträger steckt:

$$\frac{Energie}{Zeit} = \frac{Energie}{Energieträger} \cdot \frac{Energieträger}{Zeit} = Potentialdifferenz \cdot Strom$$

Stoffe, Potential, Energie

Gebiet	Stoffmenge	Potential	Energie	Leistung
Elektrizität	Ladung Q	Spannung U	$E = U \cdot Q$	$P = U \cdot I_q$
Hydraulik	Volumen V	Druck p	$E = p \cdot V$	$P = \Delta p \cdot I_v$
Gravitation	Masse m	$E = g \cdot h$	$E = m \cdot g \cdot h$	$P = g \cdot \Delta h \cdot I_m$

Elektrische Felder

$$\vec{F}_1 = \sum_{i=2}^{4} \vec{F}_{1i} = \sum_{i=2}^{4} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_i}{|\vec{r}_{1i}|^2} \vec{n}_{1i} = Q_1 \sum_{i=2}^{4} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i}{|\vec{r}_{1i}|^2} \vec{n}_{1i} = Q_1 \vec{E}(r)$$

Kugel

$$\vec{E}_{Kugle} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 |r|^2} \vec{n}$$

Zylinder

$$\vec{E}_{Zylinder = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 |r|} \vec{n},\ wobei\ \vec{n} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}}$$ (senkrecht zur Zylinderachse)

Platte

$$\vec{E}_{Platte} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{n}$$

Allgemein

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{Q} = \frac{Kraft}{Ladung}$$

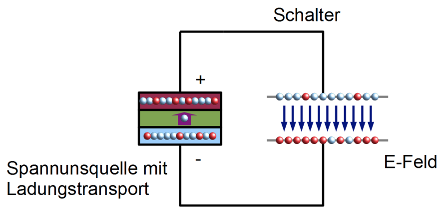
Elektrische Spannung

$U = \phi_{el}(\vec{r}_1) - \phi_{el}(\vec{r}_2)$

wobei: $\phi_{el}(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} d\vec{s} = \int_{r}^{\infty} \vec{E} d\vec{s} = \frac{Energie}{Ladung},\ und\, Energie_{pot} = -\int_{\infty}^{r} Q\vec{E} d\vec{s}$

daraus folgt: $U = -\int_{r1}^{r2} \vec{E} d\vec{s}$

Kondensatoren



Spannung	$U = -\int_{Unterseite-Kondensator}^{Oberseite-Kondensator} \vec{E} d\vec{r} = \frac{QL}{A\varepsilon_0}$	Q= Ladung L= Distanz der Platten

Magnetismus

Gesamtkraft auf eine Ladung:

$$\vec{F}_{elmag} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Lorentzkraft

$\vec{F}_L = Q\vec{v} \times \vec{B}$ (Kreuzprodukt)

$\vec{v} = Geschwindigkeit$

$\vec{B} = Magnetfeld$

Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Zyklotronradius

$|\vec{F}_{Zentrifugal}| = |\vec{F}_{Lorentz}|$

$\frac{mv^2}{r} = qvB$

$r = \frac{mv}{qB}$

Zentrifugalkraft:

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} -r\omega^2 cos(\omega t) \\ -r\omega^2 sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\vec{a}(t)| = r\omega^2 = \frac{|\vec{v}(t)|}{r} = \frac{v^2}{r}$$

Motoren und Generatoren

Kraft auf Ströme

- Ströme "bestehen" aus fliessenden Elektronen
- Die "technische Stromrichtung" ist der Flussrichtung der negativ geladenen Elektronen entgegengesetzt.
- Steht ein stromdurchflossener Draht senkrecht zu einem Magnetfeld wirkt eine Kraft auf den Draht.