Lineare Algebra

Vektorgeometrie

Berechnung des Skalarprodukts

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Berechnung des Zwischenwinkels zweier Vektoren

$$\cos \measuredangle(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} \Rightarrow \measuredangle(\vec{v}, \vec{w}) = \arccos \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$$

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot cos \measuredangle(\vec{v}, \vec{w})$$

Aussage des Skalarprodukts 0

$$\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \bullet \vec{w} = 0$$

Nullvektoren stehen senkrecht zu allen Vektoren

Berechnung der Länge eines Vektors

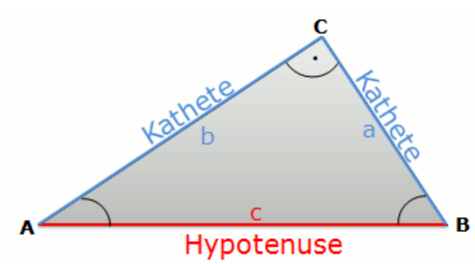
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}}$$

$$\vec{a} \bullet \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2$$

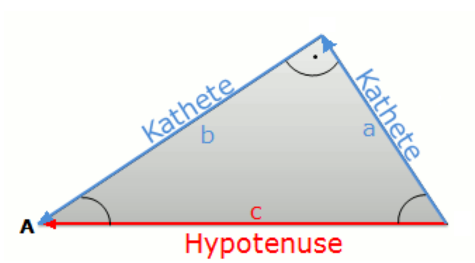
Satz des Pythagoras

Im Dreieck



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Mit Vektoren



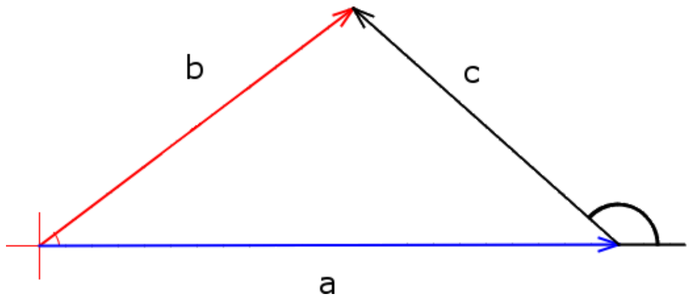
$$\vec{b} = \vec{c} - \vec{a}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + (\vec{c} - \vec{a})$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c} \bullet \vec{c}} = \sqrt{(\vec{a} + (\vec{c} - \vec{a}) \bullet (\vec{a} + (\vec{c} - \vec{a}))} = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b}) \bullet (\vec{a} + \vec{b})}$$

$$= \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a} + \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{c} \bullet \vec{b} + \vec{b} \bullet \vec{b}} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + 0 + 0 + \left|\vec{b}\right|^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2}$$

Cosinussatz



$\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$

$\left|\vec{b}\right|^2 = \vec{b} \bullet \vec{b} = (\vec{a} + \vec{c}) \bullet (\vec{a} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{a} + \vec{a} \bullet \vec{c} + \vec{c} \bullet \vec{a} + \vec{c} \bullet \vec{c}$

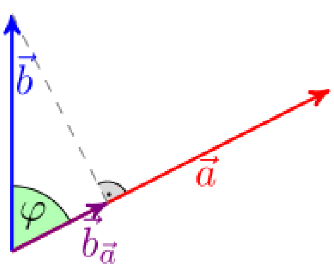
$= |\vec{a}|^2 + 2\cos\measuredangle(\vec{a}, \vec{c}) \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| + |\vec{c}|^2$

$(= |\vec{a}|^2 - 2\cos(180^o - \measuredangle) \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| + |\vec{c}|^2)$

Daraus folgt:

$$a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta) = b^2$$

Orthogonalprojektion



1. Bestimmen von Vektoren, von denen wir wissen wohin sie Abgebildet werden
   (In der Regel der Normal- und 1 oder 2 Richtungs-Vektoren)
2. Der Normal-Vektor lässt sich aus der Gleichung ablesen, die Richtungsvektoren müssen die Gleichung erfüllen.
3. Anschliessend lässt sich eine Gleichung aufstellen: $A \cdot (n|r) = \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}$
4. Und nach A auflösen: $A = \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix} \cdot (n|r)^{-1}$

Beispiel:

Gegeben sei im R^2 die Orthogonalprojektion P auf die Gerade g gegeben durch $2x + 3y = 0$.
Geben sie die vier Einträge der zu P gehörenden Projektionsmatrix A in der kanonischen Basis an.

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$A \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A \cdot (\vec{n}|\vec{r}) = A \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Parameterdarstellung

Gerade = Aufpunkt + Faktor * Vektor

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ebene = Aufpunkt + 1.Faktor * 1.Vektor + 2.Faktor * 2. Vektor

$$E : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Koordinatengleichung der Ebene

Parameterdarstellung:

$$E : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

- Kreuzprodukt der Vektoren berechnen

  $$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -10 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- Gleichung aufstellen

  $3x + 5y + 4z = 0$

- Aufpunkt einsetzen

  $3 - 5 + 8 = 6$

  $\Rightarrow 3x + 5y + 4z = 6$

  $\Rightarrow 3x + 5y + 4z - 6 = 0$

Matrizen

Matrix-Vektor Multiplikation

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa_1 + yb_1 + zc_1 \\ xa_2 + yb_2 + zc_2 \\ xa_3 + yb_3 + zc_3 \end{pmatrix}$$

Matrix-Matrix Multiplikation

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q & r \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (aq + bs) & (ar + bt) \\ (cq + ds) & (cr + dt) \end{pmatrix}$$

Interpretion

Interpretation als lineare Operation auf die Spalten von A:

$$A \cdot B = \left(\left\{ \begin{array}{c} 2 \\ -1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} -5 \\ 3 \end{array} \right\} \right) \cdot \left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{array} \right) = \left(\left\{ \begin{array}{c} 4 \\ -2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} -15 \\ 9 \end{array} \right\} \right)$$

Interpretation als lineare Operation auf die Zeilen von A:

$$B \cdot A = \left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cc} \{2 & -5\} \\ \{-1 & 3\} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} \{4 & -10\} \\ \{-3 & 9\} \end{array} \right)$$

Das Inverse einer Matrix

Für das Inverse A^{-1} einer Matrix A gilt $A \cdot A^{-1} = I$.
Eine quadratische Matrix lässt sich genau dann invertieren, wenn Ihre Spalten linear unabhängig sind:

$$A = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \left(\begin{array}{cc} d & -b \\ -c & a \end{array} \right)$$

Ist eine Matrix grösser (als quadr.) so lässt sich das Inverse mit dem Gausschen Eliminationsverfahren ermittelt.

Kern einer Matrix

Der Kern einer Matrix sind diejenigen Vektoren die durch die Matrix auf den Nullpunkt abgebildet werden.
Sie müssen folgende Gleichung erfüllen:

$$A \cdot v = 0$$

Bei der Matrix $A = \left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{array} \right)$ lässt sich der Kern mit dem Gauss wie folgt berechnen:

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow Kern(A) = \{\alpha \cdot \left(\begin{array}{c} -3 \\ 1 \end{array} \right), \alpha \varepsilon \mathbb{R}\} = \{\alpha \cdot \left(\begin{array}{c} 3 \\ -1 \end{array} \right), \alpha \varepsilon \mathbb{R}\}$$

Bild einer Matrix

Das Bild einer Matrix sind diejenigen Vektoren die mit der Matrix abgebildet werden können.
Das Bild für die Matrix $A = \left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{array} \right)$ wird wie folgt berechnet:

$$Bild(A) = \{\alpha \cdot \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right) + \beta \cdot \left(\begin{array}{c} 3 \\ 6 \end{array} \right), \alpha\beta\varepsilon\mathbb{R}\}$$

Basen

Kanonische Basisvektoren

Sind die Vektoren $l_1 = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right)$ und $l_2 = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right)$.
Mit ihnen lassen sich beliebige Vektoren Darstellen:

$$\left(\begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} \right) = 3 \cdot \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) + 4 \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right)$$

Neue Basis verwenden

Es können auch andere Basen verwendet werden, zb. $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Wobei es sich bei der Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ nun um die neue Basis handelt.

Daraus folgt:

$$v = B \cdot v_B = C \cdot v_C$$

Basiswechsel

$$A_B = B^{-1} \cdot A \cdot B \Longleftrightarrow A = B \cdot A_B \cdot B^{-1}$$

Bei Potenzen:

$$A^{10} = (B \cdot A_B \cdot B^{-1})^{10} = B \cdot A_B^{10} \cdot B^{-1}$$

Determinate einer Matrix

2x2 Matrizen

Die Determinate einer Matrix mit linear unabhängigen Zeilen und Spalten lässt sich wie folgt berechnen:

$$Det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Enthält die Matrix jedoch linear abhängige Zeilen oder Spalten oder eine Zeile oder Spalte besteht nur aus Nullen, so ist die Determinate 0.

3x3 Matrizen

$$Det(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$\begin{pmatrix} \\ + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Eigenwert & Eigenvektor

Es gilt:

$$A\vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}\,, \lambda \epsilon \mathbb{R}, \vec{v} \neq \vec{0}$$

Wobei es sich bei λ um den Eigenwert handelt und bei $\vec{v}$ um den Eigenvektor.
Daraus folgt:

$$(A - \lambda I) \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

Nun können mit Hilfe der Determinaten die Eigenwerte berechnet werden (ausmultiplizieren und in Mitternachtsformel einsetzen.

$$det(A-\lambda I) = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix}$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Um nun die Eigenvektoren zu erhalten, setzt man die möglichen λ ein und wendet auf diese Matrix den Gauss an und eine Zeile zu eliminieren.
Anschliessend können die erhaltenen Werte umgedreht werden, und einer der beiden negiert werden.
Beispiel:

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & |0 \\ 3 & 3 & |0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -1 & |0 \\ 0 & 0 & |0 \end{pmatrix} \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen bestehen aus einem rellen Teil a und einem imaginärem Teil $i \cdot b$ und sehen wie folgt aus:

$$z = a + i \cdot b$$

Wobei i folgendermassen definiert ist:

$$i = \sqrt{-1} \Leftrightarrow i^2 = -1$$

Komplex konjugiert

Komplex konjugiert nennt man eine komplexe Zahl, wenn das Vorzeichen des imaginären Teiles geändert wird:

$$z = a + i \cdot b \Rightarrow \bar{z} = a - i \cdot b$$

Addition

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i \cdot (b_1 + b_2)$$

Subtraktion

$$z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i \cdot (b_1 - b_2)$$

Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ib_1a_2 + a_1ib_2 + ib_1ib_2 = a_1a_2 + ib_1a_2 + a_1ib_2 - b_1 \cdot b_2$$
$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = (a + i \cdot b)(a - i \cdot b) = a^2 + b^2 \Leftrightarrow |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{(a + i \cdot b)(a - i \cdot b)} = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$(a + i \cdot b)^2 = a2 + 2iab - b^2$$
$$(a - i \cdot b)^2 = a2 - 2iab - b^2$$
$$i^0 = i^4 = i^8 = 1$$
$$i^1 = i^5 = i^9 = i$$
$$i^2 = i^6 = i^{10} = -1$$
$$i^3 = i^7 = i^{11} = -i$$

Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$
$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

Nullstellen

$$x^4 = 1 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = i,\ x_4 = -i$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Sollte $b^2 - 4ac$ eine negative Zahl ergeben, so kann -1 mit i^2 ersetzt werden.

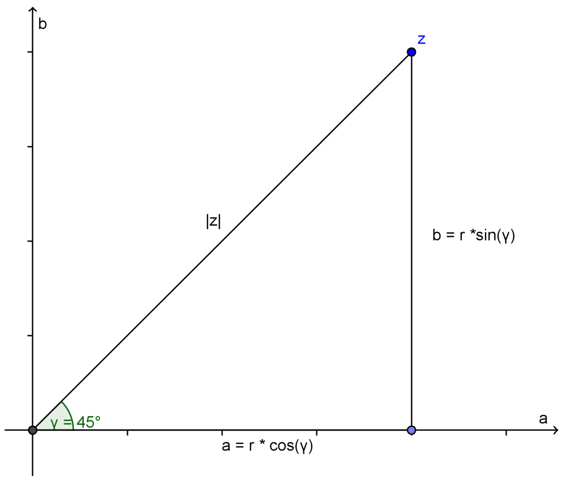
Polarkoordinaten

$$r = |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{(a + i \cdot b)(a - i \cdot b)} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = r \cdot cos(\gamma) \Rightarrow cos(\gamma) = \frac{a}{r}$$

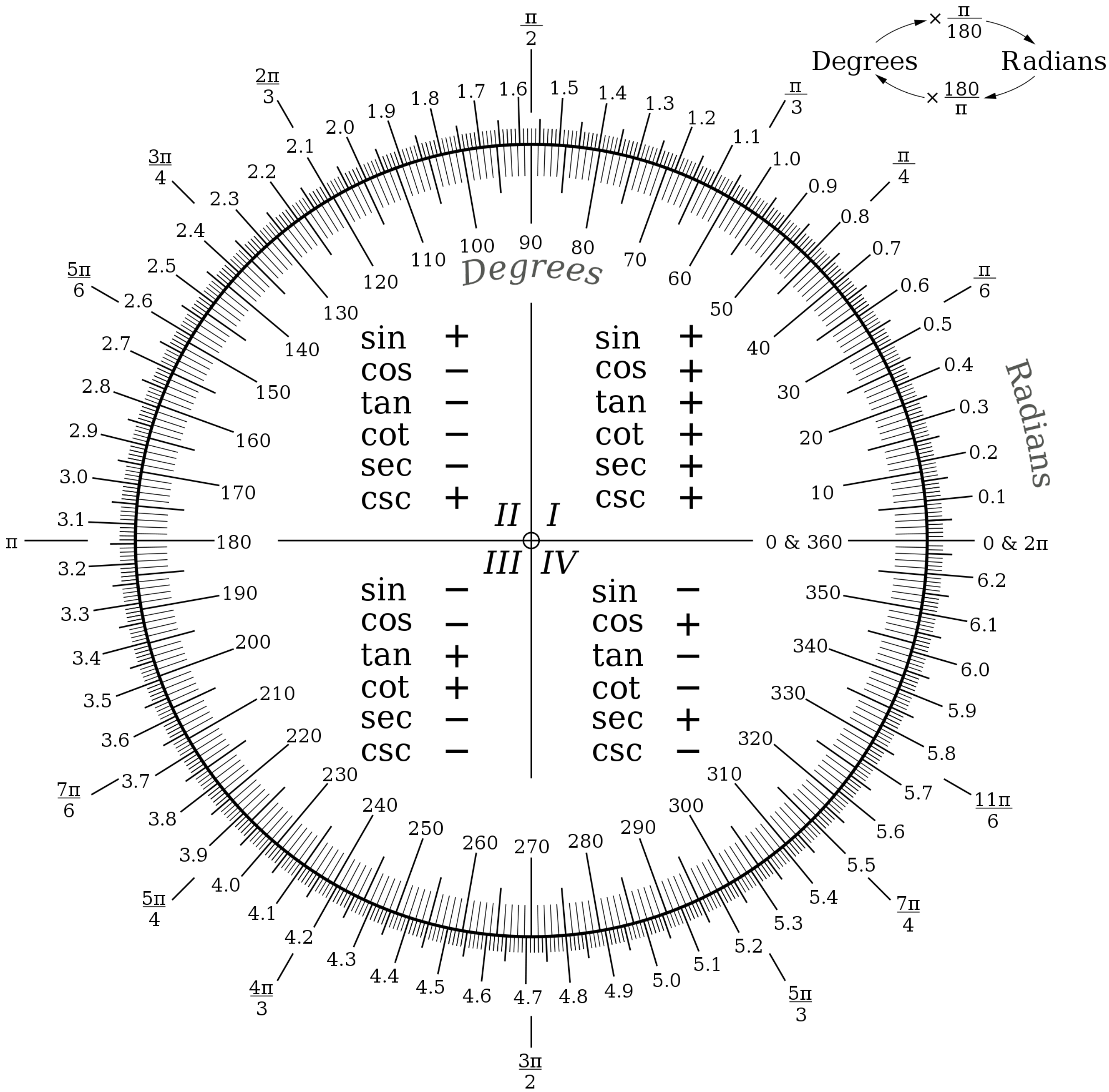
$$b = r \cdot sin(\gamma) \Rightarrow sin(\gamma) = \frac{b}{r}$$

$$tan(\gamma) = \frac{b}{a} = \frac{r \cdot sin(\gamma)}{r \cdot cos(\gamma)} = \frac{sin(\gamma)}{cos(\gamma)}$$



$$r \cdot e^{i\gamma} = a + i \cdot b = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot e^{i \cdot arctan(\frac{b}{a})}$$

Hilfsmittel



Cos-Table

Grad	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Wert	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	1