Kombinatorik

Einführung

Zu beachten:

- Unterscheidbare oder nicht unterscheidbare Objekte
- Mit oder ohne Beachtung der Reihenfolge

Quotienten für die Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{\textit{günstige Fälle}}{\textit{mögliche Fälle}}$$

Probleme beim Bestimmen dieser günstigen und möglichen Fälle:

- Permutationen mit und ohne Wiederholungen
- Auswahlprobleme mit und ohne Wiederholungen

	Permutationen		Ungeordnete Stichprobe	Geordnete Stichprobe
mit Widh	$N = \frac{n!}{p_1! \cdot p_2! \cdot ...}$ *	mit Z.legen	$N = \frac{(s+n-1)!}{s! \cdot (n-1)!} = \binom{s+n-1}{s}$	$N = n^k$
ohne Widh	$N = n!$	ohne Z.legen	$N = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (...) \cdot (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$	$N = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot ... \cdot (n-k+1)$

*: Multinomialskoeffizient: $\binom{n}{n_1,\, n_2,\, n_3} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!}$

Unterscheidbare Objekte

$$N = n!$$

Nicht unterscheidbare Objekte

Möglichkeiten aabbac anzuordnen:

$$N = \frac{6!}{3! \cdot 2!}$$

Wobei 3! die möglichen Permutionen der drei “a” und 2! der zwei “b” sind.

Geordnete Stichproben mit Zurücklegen

$$N = n^k$$

Geordnete Stichproben ohne Zurücklegen

$$N = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Binomische Formel

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}, k = 0 \cdots n, 0! = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \Longleftrightarrow \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Binominalkoeffizient

Die Binominalkoeffizienten λ_k in der Entwicklung $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k a^{n-k} b^k$ sind:

$$\lambda_k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

TR Eingaben

Berechne: $(a + \frac{1}{a})^4$: expand($(a + \frac{1}{a})^4$)

Berechne: $\binom{10}{2} - \binom{9}{2}$: nCr(10,2) - nCr(9,2)

Berechne: $\binom{x}{2} = 595$: solve(nCr(x,2)=595,x)

Schubfachprinzip: Einfache Form

Falls man n Objekte auf m Mengen verteilt, und n grösser als m ist, dann gibt es mindestens eine Menge, in der mehr als ein Objekt landet.

Schubfachprinzip: Starke Form

Seien $q_1, q_2, ..., q_n$ natürliche Zahlen. Verteilt man

$q_1 + q_2 + ... + q_n - n + 1$

Objekte auf n Mengen, dann enthält entweder die erste Menge mindestens q1 Objekte oder die zweite Menge enthält mindestens q2 Objekte, . . . , oder die n-te Menge enthält mindestens qn Objekte.

$\Rightarrow (q_1 - 1) + (q_2 - 1) + ... + (q_n - 1) = q_1 + q_2 + ... + q_n - n$

Hier setzt dann das einfache Schubfachprinzip an.

Induktion

Aufbau:

- Induktionsverankerung - $A(1)$
- Induktionsschluss - $A(n) \to A(n+1)$

Genauer:

- Induktionsanfang: $A(1)$
- Induktionsschritt:
  - Induktionsbehauptung $A(n+1)$
  - Induktionsvoraussetzung $A(n)$