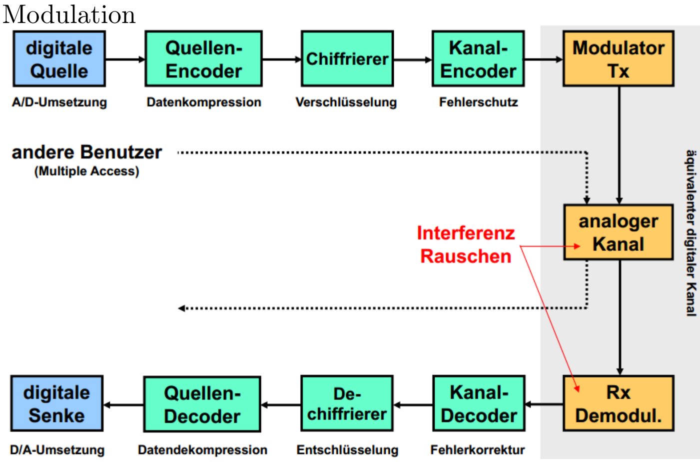
INFORMATIONSTHEORIE

Part 1. Kompression

1. Elemente im Übertragungssystem

- Quelle/Senke
- Quellencodierung
- Chiffrierung
- Kanalcodierung
- Modulation



Part 2. Entropie

2. Diskrete Informationsquellen

Symboldauer	T
Symbolrate	$R = 1/T$
Quellensymbol (Zufallsvariable)	$X[n]$
Alphabet	$A = \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$
Wahrscheinlichkeit	$P(X = x_m) = P_X(x_m), m = 1, \dots, M$
Wahrscheinlichkeitsverteilung von X	$\sum\limits_{m=1}^{M} P_X(x_m) = 1$

2.0.1. *gedächtnislose Quellen.*

- DMS (Discrete Memoryless Source), Die Symbole $X[n]$ sind unabhängig und haben identische Wahrscheinlichkeitsverteilung.
- BMS (Binary Memoryless Source), Die unabhängigen Symbole $X[n]$ sind 2-wertig, d.h. $P_X(x_1) = p$ und $P_X(x_2) = 1 - p$.
- BSS (Binary Symmetric Source), Die unabhängigen Symbole $X[n]$ sind 2-wertig und es gilt: $P_X(x_1) = 0.5$ und $P_X(x_2) = 0.5$.

3. Informationsgehalt

Der Informationsgehalt eines Ereignisses $X = x_m$ ist wie folgt definiert:

$$I_x(x_m) = \log_2\left(\frac{1}{P_X(x_m)}\right) \text{[bit]}$$

Für Ereignisse von 2 (oder mehreren) Zufallsvariablen X und Y gilt sinngemäss:

$$I_x(x_m) = \log_2\left(\frac{1}{P_{XY}(x_i, y_k)}\right) \text{[bit]}$$

Für 2 unabhängige Symbole X und Y gilt:

$$I_{XY}(x_i, y_k) = I_X(x_i) + I_Y(y_k)$$

4. Redundanz

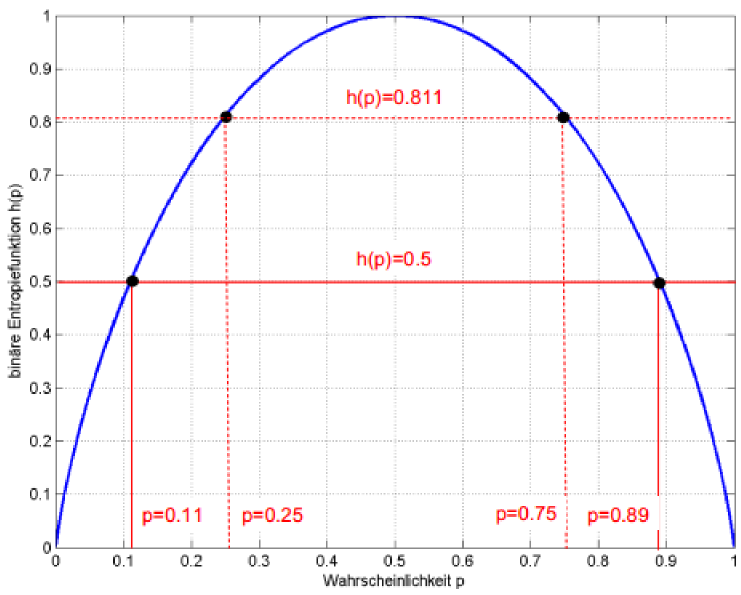
Differenz zwischen maximaler und mittlerer Entropie. Redundanz (M ist die Anzahl Symbole des Alphabets)
Entropie ist maximal $log_2(M)$, wenn X-Werte gleichverteilt.
Möglichst wenig Redundanz am Ausgang des Quellencoders.

$$R = log_2(M) - H(x)$$

5. Entropie

Datenübertragung: die maximale (verlustlose) Kompression = Entropie

$$H(X) = \sum_{i=1}^{M} P_x(x_i) \cdot \log_2\left(\frac{1}{P_X(x_i)}\right) \text{[bit]}$$



5.1. **Binäre Entropiekurve.**

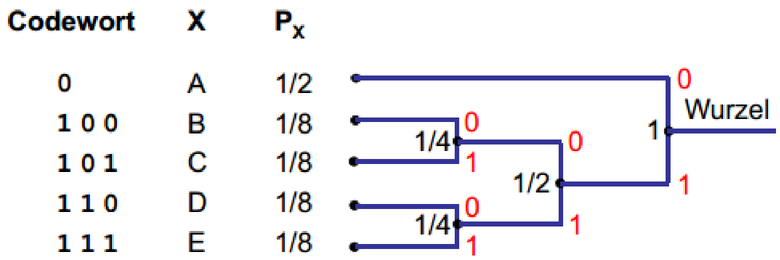
Part 3. Kompression

6. Huffman Code

Abhängig von der Quellenstatistik

Algorithmus.

(1) Symbole nach Wahrscheinlichkeiten ordnen und Knoten eines Baums zuweisen
(2) Zwei Symbole mit kleinster Wahrscheinlichkeit in neuem Symbol zusammenfassen, neuer Knoten hat Summe der Wahrscheinlichkeiten
(3) Erneutes Reduzieren des Wahrscheinlichkeitsfeldes gem. Schritt 1
(4) Schritte 2 und 3 wiederholen bis 2 Symbole bzw. Knoten übrig
(5) Von der Wurzel aus bei jeder Verzweigung nach oben eine „0“ und nach unten eine „1“ eintragen (auch umgekehrt möglich) //Konstruktion Codebuch



R = Warscheinlichkeit * Codelänge (bsp: 1 * 1/8 + (3 * 1/8) * 4 = 2)

7. Lempel-Ziv-Codierung

Unabhänging von der Quellenstatistik

7.1. Algorithmus.

(1) Eindeutige Unterteilung der Symbolfolge Strings variabler Länge, Unterscheidung nur in 1 Bit
(2) Encoding eines Strings: [Position des Präfix, neues Bit]

7.2. Beispiel.

Data: 0 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 ...

Wörterbuch-Nr.	Input	Output
1	0 -> neuer String; neues Bit = 0	[0000 0]
2	1 -> neuer String; neues Bit = 1	[0000 1]
3	00 -> 0 gleich wie 1. String; neues Bit = 0	[0001 0]
4	001 -> 00 gleich wie 3. String; neues Bit = 1	[0011 1]
5	10 -> 1 gleich wie 2. String; neues Bit = 0	[0010 0]
6	000 -> 00 gleich wie 3. String; neues Bit = 0	[0011 0]
7	101 -> 10 gleich wie 5. String; neues Bit = 1	[0101 1]
8	0000 -> 000 gleich wie 6. String; neues Bit = 0	[0110 0]
9	01 -> 0 gleich wie 1. String; neues Bit = 1	[0001 1]
10	010 -> 01 gleich wie 9. String; neues Bit = 0	[1001 0]
...	...	...

8. LZ77

(1) Erstes Symbol des Vorschau-Buffers im Such-Buffer suchen
    (a) rückwärts von rechts nach links
(2) Token der längsten (letzten) Übereinstimmung ausgeben

(a) Token = (Offset, Länge, nächstes Symbol)
(b) Token-Länge: log2(S+1) + log2(L+1) + 8 typisch : 11 + 5 + 8 = 24 Bit
(c) wenn keine Übereinstimmung: (0,0, nächstes Symbol)

(3) 3. Schiebefenster um Länge +1 nach rechts verschieben

9. LZ78

10. LZW

- Initialisierung I=[]
  (1) neues Symbol x zu String I hinzufügen => I = Ix setzen
    (a) Ix im Wörterbuch verzeichnet? Wenn ja, dann zu step 1. sonst zu step 3.
  (2) -
    (a) Output = Wörterbuch-Pointer von I
    (b) Neuer Wörterbucheintrag mit Phrase Ix
    (c) I = "x" setzen

Beispiel Encoding. Text: ABBABABAC
Anfangswörterbuch: 1 : A, 2 : B, 3 : C

Momentane Buchstaben	String I	verzeichnet	WB-Eintrag	Output
A	A	$\checkmark$		
A	AB	$\times$	4 : AB	1
B	B	$\checkmark$		
B	BB	$\times$	5 : BB	2
B	B	$\checkmark$		
B	BA	$\times$	6 : BA	2
A	A	$\checkmark$		
AB	AB	$\checkmark$		
AB	ABA	$\times$	7 : ABA	4
A	A	$\checkmark$		
AB	AB	$\checkmark$		
ABA	ABA	$\checkmark$		
ABA	ABAC	$\times$	8 : ABAC	7
C	C	$\checkmark$		
C	C,eof			3

Bsp Decoding (Lösung ist in String J).

68	68	82	99	77	65	82	256	82
D	E	R		M	A	R		R

Input	String I	String J	WB
68	D		
69	D	E	256: DE
82	E	R	257: ER
95	R	_	258: R_
77	_	M	259: _M
65	M	A	260: MA
82	A	R	261: AR
256	R	DE	262: RD
82	DE	R	263: DER

11. JPG

statt Redundanzreduktion vorallem Irrelevanzreduktion (Qualitätsverlust, häufig jedoch nicht bemerkbar)

RLE.

11.1. **PN-Sequenzen.** Pseude Noise Sequenzen

LSFR. Für (Pseudo-)Randomgenerator

$$a_0 = (a_{18} + a_5 + a_2 + a_1) modulo 2$$

11.1.1. *Zufallseigenschaften der m-Sequenzen.*

- m-Sequenzen sind fast ausgeglichen in Bezug auf die Anzahl Einsen und Nullen
- Die relative Häufigkeit von runs der Länge k beträgt $(1/2)^k$ für $k \leq (n-1)$ und $1/2^{(k-1)}$ für $k = n$. Ein „run“ ist das Aufeinanderfolgen mehrere Nullen oder Einsen. So weist zum Beispiel die Bitfolge ... 00110101000111001101... folgende runs auf: Run 1 kommt 6x vor, run 2 kommt 4x vor und run 3 kommt 2x vor.
- Die m-Sequenz der Länge P und die zyklisch verschobene Kopie haben fast 50 % überein- stimmende Bits und 50 % verschiedene Bits

Beispiel.

11.2. **Binäre Block-Codes.**

11.2.1. *Hamming-Gewicht $w_H(x)$.* entspricht der Anzahl “1” im Codewort x

11.2.2. *Hamming-Distanz $d_H(x_i, x_j)$.* entspricht der Anzahl unterschiedlicher Positionen in x_i und x_j

11.2.3. *Minimaldistanz d_{min}.* $d_{min} = min_{ij} d_H(x_i, x_j) = min_{ij} w_H(x_i + x_j) = min_k w_H(x_k) = w_{min} (i \neq j)$
Für linearen (N,K) Block-Codes

11.2.4. *Beispiel: (3,2)-Blockcode.* $K = 2$, $N = 3$
$2^K = 4$ Infoworte
$A = \{[00], [01], [10], [11]\}$
even Parity
$C = \{[000], [101], [110], [011]\}$(vorderstes Bit ist hier Paritybit)