Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung

Ortsfunktion

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeit

Die Geschwindigkeit ist die zeitliche Ableitung der Ortsfunktion:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{dz(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeit ist ein Vektor, die Schnelligkeit ihr Betrag.

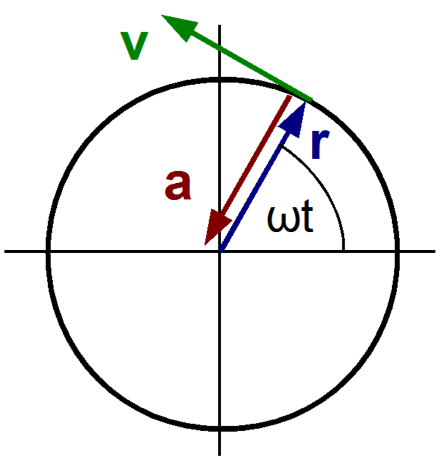
Beschleunigung

Die Beschleunigung ist die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeits resp. die zweite zeitliche Ableitung der Ortsfunktion.

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x(t)}{dt} \\ \frac{dv_y(t)}{dt} \\ \frac{dv_z(t)}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

Kreisbewegung



$\omega =$ Winkel pro Sekunde

$T = \frac{2\Pi}{\omega}$ =Periode, Zeit für einen Umlauf ($360° = 2\Pi$)

Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r\,cos(\omega t) \\ r\,sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$|\vec{r}(t)| = r$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r\,cos(\omega(t+T)) \\ r\,sin(\omega(t+T)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,cos(\omega t + 2\Pi) \\ r\,sin(\omega t + 2\Pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,cos(\omega t) \\ r\,sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -r\omega sin(\omega t) \\ r\omega cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$|\vec{v}(t)| = r\omega$$

Beschleunigung

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -r\omega^2 cos(\omega t) \\ -r\omega^2 sind(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}(t)| = r\omega^2$$

Beispiele

Zentrifuge

Eine Zentrifuge drehe sich mit einer Winkelgeschwindigkeit von 20 s-1. Die Zentrifugengläser (Proben) befinden sich in einem Abstand von 10 cm von der Drehachse.

1. Wie gross ist die Bahngeschwindigkeit in m/s und welcher Weg wird in einer Sekunde zurückgelegt?
2. Welche Zentrifugalbeschleunigung wirkt auf die Proben?

Gegeben: $w = 20s^{-1}$, $r = 10cm = 0,1m$

1. $v = r \cdot w = 0.1 \cdot 20s^{-1} = 2m/s$
   $s = 2m$
2. $a_z = r \cdot w^2 = 0.1 * 20^2 s^{-2} = 40m/s^2$

Schaufelrad

Das Schaufelrad einer Turbine (Flugzeugtriebwerk) drehe sich mit 30000 U/min. Die einzelnen Schaufeln haben eine Masse von 50 g und befinden sich im Abstand von 15 cm von der Drehachse entfernt.

- Welche Kraft muss mindestens aufgebracht werden, damit die Schaufeln nicht aus der Turbine fliegen?

Gegeben: $m = 0.05kg$,$r = 0.15m$

- $w = 2\Pi \cdot \frac{u/min}{60s} = 2\Pi\nu = 2\Pi \cdot \frac{3*10^3}{60} = 3.41 \cdot 10^3$
  $F_z = m \cdot w^2 \cdot r = 7.4 \cdot 10^4 N$

Waage im Lift

Eine Person mit einer Masse von 70 kg stehe auf einer Waage, welche sich in einem Lift befinde. Der Lift beschleunige mit $a_L = 1.7m/s^2$.

1. Was zeigt die Waage an beim aufwärts fahren?
2. Was zeit die Waage an beim abwärts fahren?

Gegeben: $m = 70kg$
Formel: $\widetilde{m} = \frac{\widetilde{F}}{g} = \frac{m\widetilde{g}}{g} = \frac{m(g \pm a)}{g}$

1. $m_1 = \frac{m(g+a)}{g} = \frac{70kg \cdot (9.81+1.7)m/s^2}{9.81m/s^2} = 82.1kg$
2. $m_2 = \frac{m(g+a)}{g} = \frac{70kg \cdot (9.8-1.7)m/s^2}{9.81m/s^2} = 57.9kg$

Fahrzeugkollision

Ein Fahrzeuglenker mit einer Masse von 80 kg kollidiere mit seinem Fahrzeug mit einer Mauer. Die Geschwindigkeiten vor der Kollision betrage 56 km/h. Das Fahrzeug komme innerhalb von 0.2 s zum Stehen.

- Welcher maximalen Belastung müsste ein Sicherheitsgurt standhalten?

Gegeben: $m = 80kg$, $v_{max} = 56km/h = 15.5m/s$ (km/h : 3.6 =m/s), $\Delta t = 0.2s$

- $a_{max} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{15.5m/s}{0.2s} = 77.5m/s^2$
  $F = m \cdot a = 77.5m/s^2 \cdot 80kg = 6200N = 6.2kN$

Computertomographie

Bei CT (Computertomogeaphie)-Scannern rotieren Detetktor und Strahlerteil in einem typischen Abstand von 60 cm von der Drehachse um den Patienten.

- Welche Masse darf der Strahlerteil haben, wenn eine Fleihkraft von 4737 N nicht überschritten werden kann und pro Sekunde eine Umdrehung "gescannt" wird.

Gegeben: $r = 0.6m$, $F_z = 4737N = 4737kg \cdot ms^{-2}$
Formel: $F_z = m \cdot \omega^2 \cdot r$

- $m = \frac{F_z}{\omega^2 \cdot r} = \frac{4737kg \cdot ms^{-2}}{4\Pi^2 s^{-2} \cdot 0.6m} \backsimeq 200kg$

Arbeit, Energie, Potential

Beispiele

Freier Fall

Auf der Erde

Gegeben: $m = 10kg$, $h = 20m$, EE: $E_{tot} = E_{kin} + E_{pot}$

- $E_{kin1} + E_{pot1} = E_{kin2} + E_{pot2} \Longrightarrow 0 + mgh = \frac{mv^2}{2} + 2$
- $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.81m/s^2 \cdot 20m} = 19.8m/s$

Auf dem Mond

Gegeben: $\gamma = 6.672 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$, $M = 7.349 \cdot 10^{22} kg$, $r_m = 1.738 \cdot 10^{16} m$, $F_{G,M} = m \cdot g_M = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r_M^2}$

- $F_{G,M} = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r_M^2} = 6.672 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2} \cdot \frac{1.738 \cdot 10^{16} \cdot 10kg}{1.738^2 \cdot 10^{12} \cdot m^2} = 1.62m/s^2$
- $v_M = \sqrt{2 g_M h} = \sqrt{2 \cdot 1.62m/s^2 \cdot 20m} = 8.05m/s \simeq 8.1m/s$

Energieerhaltung

$E_{tot} = E_{kin} + E_{pot} = const.$
$E_{kin\ Anfang} + E_{pot\ a} = E_{kin\ Ende} + E_{pot\ E}$
$\Delta W = E_{pot\ A} - E_{pot\ E}$
$E_{kin\ A} + \Delta W = E_{kin\ E}$
$\frac{m}{2} \cdot v_0^2 + \Delta W = \frac{m}{2} \cdot v_2^2 \mid \cdot \frac{2}{m}$
$v_0^2 + \frac{2\Delta W}{m} = v_2^2$
$v_2 = \sqrt{v_0^2 + \frac{2\Delta W}{m}} = \sqrt{\frac{m v_0^2 2\Delta W}{m}}$

Elementarladung

$1e = 1.6 \cdot 10^{-19}C$
$1C = 1As \Longrightarrow I = \frac{dQ}{dt} = \frac{C}{s} = A$
$E_0 = 8.88542 \cdot 10^{-12}As/Vm$

Elektrisches Feld

$E(r) = \frac{\varrho}{2\Pi E_0} \cdot \frac{1}{r}$
$\gamma(r) = -\int Edr = -\frac{\varrho}{2\Pi E_0} \cdot \int \frac{1}{r}dr = -\frac{\varrho}{2\Pi E_0} \cdot ln(r) + C$

Kraft auf eine Punktladung

$\vec{F_c} = q_0 \cdot \vec{E} \Longrightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F_c}}{q_0}$
$dE_{pot} = -\vec{F}d\vec{l}$
$dE_{pot} = -q_0 \cdot \vec{E} \cdot d\vec{l}$
$\int d\gamma = \frac{dE_{pot}}{q_0} = -\int \vec{E}d\vec{l}$
$\Delta\gamma = -\int_a^b \vec{E}d\vec{l} = \gamma(a) - \gamma(b)$
$\gamma(r) = \frac{1}{4\Pi E_0} \cdot (-\frac{q}{r} + \frac{q}{|\vec{r}-\vec{l}|})$

Potential eines Punktuellen-Ladungssystem

$\gamma(r) = \frac{1}{4\Pi E_0} \cdot \sum_i \cdot \frac{q_i}{r_i}$
$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\Pi E_0} \cdot (-\frac{q}{r^3} \cdot \vec{r} + \frac{q}{|\vec{r}-\vec{l}|^3} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{l}))$

Arbeit

Gegeben sind 2 positiv geladene Teilchen q,Q und Abstand r_1, r_2.

$\Delta W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F_c}d\vec{r} = \frac{q \cdot Q}{4\Pi E_0} \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2}dr = \frac{q \cdot Q}{4\Pi E_0} \cdot (\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$