Stammfunktion und unbestimmtes Integral

Grundintegrale

- $\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq 1$
- $\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln \mid x \mid + c$
- $\int e^x \cdot dx = e^x + c$
- $\int a^x \cdot dx = \int e^{\ln(a) \cdot x} \cdot dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c, a > 0, a \neq 1$
- $\int cos(x) \cdot dx = sin(x) + c$
- $\int sin(x) \cdot dx = -cos(x) + c$
- $\int \frac{1}{x^2+a^2} \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot arctan(\frac{x}{a}) + c$

Elementare Rechenregeln

Regel vom konstanten Faktor

$\int k \cdot f(x) \cdot dx = k \cdot F(x) + c$

- $\int 25e^x \cdot dx = 25 \cdot e^x + c$
- $\int -13x^3 \cdot dx = -13 \cdot \frac{x^4}{4} + c$

Skalierungsregel

$\int f(k \cdot x) \cdot dx = \frac{F(k \cdot x)}{k} + c$

- $\int e^{\frac{3}{2}x} \cdot dx = \frac{e^{\frac{3}{2}x}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} \cdot e^{\frac{3}{2}x}$

Translationsregel

$\int f(x + k) \cdot dx = F(x + k) + c$

- $\int \frac{1}{x-6} \cdot dx = ln \mid x - 6 \mid + c$

Summenregel

$\int f(x) \pm g(x) \cdot dx = F(x) \pm G(x) + c$

- $\int (8x^3 - 4x + 2) \cdot dx = 8 \cdot \frac{x^4}{4} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 2x + c = 2x^4 - 2x^2 + 2x + c$

Produkteregel

$\int f(x) \cdot g(x) \cdot dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x) \cdot dx$

- $\int x^2 \cdot e^x \cdot dx = e^x \cdot x^2 - \int e^x \cdot 2x \cdot dx = e^x \cdot x^2 - 2[x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x \cdot dx] = e^x \cdot x^2 - 2xe^x + 2e^x + c = e^x[x^2 - 2x + 2] + c$

Bemerkung: Hier wurde x^2jeweils abgeleitet und e^xintegriert.

- $\int x \cdot cos(x) \cdot dx = sin(x) \cdot x - \int 1 \cdot sin(x) \cdot dx = sin(x) \cdot x + cos(x) + c$

Bemerkung: Hier wurde x abgeleitet und cos(x) integriert.

Integration und Substitution

- $\int f(u(x)) \cdot u' \cdot dx = \int f(u) \cdot du$
- $\frac{dx}{du} = u'(x)$

Trick: Zähler eines Bruches so korrigieren, das es der Ableitung der Funktion entspricht. Anschliessend kann $u' \cdot dx$ durch du ersetzt werden.

- $\int \frac{1}{(4x+5)^3} \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{4}{(4x+5)^3} \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{u'}{u^3} \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{du}{u^3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{u^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{8u^2} + c = -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(4x+e)^2} + c$
- $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \cdot dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}} \cdot dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{u'} = \int \frac{x \cdot du}{-2x \cdot \sqrt{u}} = -\int \frac{du}{2 \cdot \sqrt{u}} = -\frac{1}{2} \cdot u^{\frac{1}{2}} \cdot 2 + c = -\sqrt{u} + c = -\sqrt{a^2 - x^2} + c$

Spezialfall:

- $\int \frac{u'(x) \cdot dx}{u(x)} = \int \frac{du}{u} = ln \mid u \mid + c = ln \mid u(x) \mid + c$
- $\int \frac{x}{4+x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x}{4+x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \cdot ln \mid u \mid + c = \frac{1}{2} \cdot ln \mid 4 + x^2 \mid + c$

Partialbruchzerlegung

Wird gebraucht um gebrochenrationale Funktionen zu integrieren:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} \cdot dx$$

Man unterscheidet:

- Grad Zähler$\geq$Grad Nenner = unechtgebrochen
- Grad Zähler $<$ Grad Nenner = echtgebrochen

Unechtgebrochen

Mit Hilfe der Polynomdivision lassen sich solche Quotienten zerlegen in ein Polynom und in einen echtgebrochenen Quotienten

Echtgebrochen

Grundsätzlich muss man das Polynom in Faktoren zerlegen die höchstens quadratisch sind.

1. Fall q(x) zerfällt in verschiedene lineare Faktoren (hat m einfache Nullstellen):

- $q(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$

Ansatz:

- $\int \frac{p(x)}{q(x)} = \int \frac{A_1}{(x-x_1)} \cdot dx + \int \frac{A_2}{(x-x_2)} \cdot dx + ... + \int \frac{A_m}{(x-x_m)} \cdot dx$
- $\int \frac{3x-5}{x^2+2x-8} \cdot dx = \int \frac{A}{(x-2)} \cdot dx + \int \frac{B}{(x+4)} \cdot dx$
- $\frac{3x-5}{x^2+2x-8} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+4)} \mid \cdot (x - 2) \cdot (x + 4)$
- $3x - 5 = A(x + 4) + B(x - 2)$ |x einsetzen und A, B ausrechnen (z.B. x=-4, x=2)
- $A = \frac{1}{6}; B = \frac{17}{6}$
- $\int \frac{3x-5}{x^2+2x-8} \cdot dx = \frac{1}{6} \cdot \int \frac{1}{(x-2)} \cdot dx + \frac{17}{6} \cdot \int \frac{1}{(x+4)} \cdot dx = \frac{1}{6} \cdot ln \mid x - 2 \mid + \frac{17}{6} \cdot ln \mid x + 4 \mid + C$

2. Fall q(x) zerfällt in lineare Faktoren, es gibt mindestens einen Faktor, der mehrfach vorkommt:

- $q(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = (x+1)^2 \cdot (x-5)$

Ansatz:

- $\int \frac{p(x)}{q(x)} = \int \frac{A_1}{(x-x_i)} \cdot dx + \int \frac{A_2}{(x-x_i)^2} \cdot dx + ... + \int \frac{A_k}{(x-x_i)^k} \cdot dx$
- $\int \frac{x^2+15x+8}{x^3-3x^2-9x-5} \cdot dx = \int \frac{A}{(x+1)} \cdot dx + \int \frac{B}{(x+1)^2} \cdot dx + \int \frac{C}{(x-5)} \cdot dx$
- $\frac{x^2+15x+8}{x^3-3x^2-9x-5} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x-5)} \mid \cdot(x+1)^2 \cdot (x-5)$
- $x^2 + 15x + 8 = A(x+1)(x-5) + B(x-5) + C(x-5)(x+1)^2$ |x einsetzen und A, B, C ausrechnen (z.B. x=-1, x=5)
- $A = -2; B = 1; C = 3$
- $\int \frac{x^2+15x+8}{x^3-3x^2-9x-5} \cdot dx = -2\int \frac{1}{(x+1)} \cdot dx + 1\int \frac{1}{(x+1)^2} \cdot dx + 3\int \frac{1}{(x-5)} \cdot dx = -2 \cdot ln \mid x+1 \mid + \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + 3 \cdot ln \mid x-5 \mid +C$

3. Fall Der Nenner enthalte quadr. Faktoren die sich nicht zerlegen lassen:

- $q(x) = x^3 - 6x^2 + 10x = x \cdot (x^2 - 6x + 10)$

Ansatz:

- $\int \frac{p(x)}{q(x)} = \int \frac{B_1x+C_1}{Q(x)^1} \cdot dx + \int \frac{B_2x+C_2}{Q(x)^2} \cdot dx + ... + \int \frac{B_kx+C_k}{Q(x)^k} \cdot dx$
- $\int \frac{7x^2-19x+30}{x^3-6x^2+10x} \cdot dx = \int \frac{A}{x} \cdot dx + \int \frac{Bx+C}{x^2-6x+10} \cdot dx$
- $\frac{7x^2-19x+30}{x^3-6x^2+10x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-6x+10} \mid \cdot x \cdot (x^2-6x+10)$
- $7x^2 - 19x + 30 = A(x^2 - 6x + 10) + x \cdot (Bx + C)$ |x einsetzen und A, B, C ausrechnen (z.B. x=0,x=1, x=-1)
- $A = 3; B = 4; C = -1$
- $\int \frac{7x^2-19x+30}{x^3-6x^2+10x} \cdot dx = 3 \cdot \int \frac{1}{x} \cdot dx + \int \frac{4x-1}{x^2-6x+10} \cdot dx = 3 \cdot ln \mid x \mid +(*)$
  - $(x^2 - 6x + 10)' = 2x - 6 \Rightarrow 4x - 1 = 2 \cdot (2x - 6) + 11$
- $(*) = \int \frac{2(2x-6)+11}{x^2-6x+10} \cdot dx = 2 \cdot \int \frac{2x-6}{x^2-6x+10} \cdot dx + \int \frac{11}{x^2-6x+10} \cdot dx$
  - $(1) = 2 \cdot \int \frac{2x-6}{x^2-6x+10} \cdot dx = 2 \cdot \int \frac{du}{u} \cdot dx = 2 \cdot ln \mid u \mid = 2 \cdot ln \mid x^2 - 6x + 10 \mid$
  - $(2) = 11 \cdot \int \frac{1}{x^2-6x+10} \cdot dx = 11 \cdot \int \frac{1}{(x-3)^2+1} \cdot dx$ ist von der Form $k \cdot \int \frac{1}{(x-C)^2+a^2} \cdot dx$
  - $= k \cdot \frac{1}{a} \cdot arctan(\frac{x-C}{a}) + C = 11 \cdot \frac{1}{1} \cdot arctan(\frac{x-3}{1}) + C$
- $\int f(x) \cdot dx = 3 \cdot ln \mid x \mid +2 \cdot ln \mid x^2 - 6x + 10 \mid +11 \cdot arctan(x-3) + C$

Das bestimmte Integral

Das Flächenproblem

$\int\limits_a^b f(x) \cdot dx = A$

1. Zwischenwerte $x_0, x_1, ..., x_n$setzen und somit Intervall [a,b] in Teilintervalle zerlegen.
2. Wähle in jedem Teilintervall eine Zwischenstelle ξ_i
   (a) $A_1 = \Delta x \cdot f(\xi_1)$
   (b) $A_k = \Delta x \cdot f(\xi_k)$
3. $S_n = A_1 + ... + A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta x \cdot f(\xi_k)$
4. Grenzübergang: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = A \Rightarrow (\Delta x \to 0)$

Exakt mit Grenzübergang

$$f(x) = x^2$$

Teile Intervall [0,2] in n gleiche Teile:

Intervall	Breite		Höhe	Fläche
$I_1 = [0 \cdot \frac{2}{n}, 1 \cdot \frac{2}{n}]$	$\Delta x_1 = \frac{2}{n}$	$\xi_1 = 1 \cdot \frac{2}{n}$	$f(\xi_1) = (1 \cdot \frac{2}{n})^2$	$A_1 = \frac{2}{n} \cdot 1^2 \cdot \frac{4}{n^2}$
$I_2 = [1 \cdot \frac{2}{n}, 2 \cdot \frac{2}{n}]$	$\Delta x_2 = \frac{2}{n}$	$\xi_2 = 2 \cdot \frac{2}{n}$	$f(\xi_2) = (2 \cdot \frac{2}{n})^2$	$A_2 = \frac{2}{n} \cdot 2^2 \cdot \frac{4}{n^2}$
$I_k = [(k-1) \cdot \frac{2}{n}, k \cdot \frac{2}{n}]$	$\Delta x_k = \frac{2}{n}$	$\xi_k = k \cdot \frac{2}{n}$	$f(\xi_k) = (k \cdot \frac{2}{n})^2$	$A_n = \frac{2}{n} \cdot n^2 \cdot \frac{4}{n^2}$
$I_n = [(n-1) \cdot \frac{2}{n}, n \cdot \frac{2}{n}]$	$\Delta x_n = \frac{2}{n}$	$\xi_n = n \cdot \frac{2}{n}$	$f(\xi_n) = (n \cdot \frac{2}{n})^2$	$A_k = \frac{2}{n} \cdot k^2 \cdot \frac{4}{n^2}$

$S_n = \frac{2}{n} \cdot \frac{4}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{8}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$