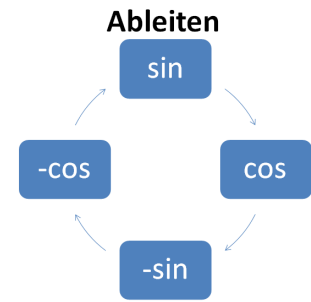


# Stammfunktion und unbestimmtes Integral

## Grundintegrale

$\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$	$\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln  x  + c$
$\int e^x \cdot dx = e^x + c$	$\int a^x \cdot dx = \int e^{\ln(a) \cdot x} \cdot dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c, a > 0, a \neq 1$
$\int \cos(x) \cdot dx = \sin(x) + c$	$\int \sin(x) \cdot dx = -\cos(x) + c$
$\int \frac{1}{x^2+a^2} \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$	$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x + c$
$\int \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{ a }$	



## Elementare Rechenregeln

### Regel vom konstanten Faktor

$$\int k \cdot f(x) \cdot dx = k \cdot F(x) + c$$

- $\int 25e^x \cdot dx = 25 \cdot e^x + c$
- $\int -13x^3 \cdot dx = -13 \cdot \frac{x^4}{4} + c$

### Skalierungsregel

$$\int f(k \cdot x) \cdot dx = \frac{F(k \cdot x)}{k} + c$$

- $\int e^{\frac{2}{3}x} \cdot dx = \frac{e^{\frac{2}{3}x}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{2}{3} \cdot e^{\frac{2}{3}x}$

### Translationsregel

$$\int f(x+k) \cdot dx = F(x+k) + c$$

- $\int \frac{1}{x-6} \cdot dx = \ln |x-6| + c$

### Summenregel

$$\int f(x) \pm g(x) \cdot dx = F(x) \pm G(x) + c$$

- $\int (8x^3 - 4x + 2) \cdot dx = 8 \cdot \frac{x^4}{4} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 2x + c = 2x^4 - 2x^2 + 2x + c$

### Produktregel / Partielle Integration

$$\int f(x) \cdot g(x) \cdot dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x) \cdot dx$$

- $\int x^2 \cdot e^x \cdot dx = e^x \cdot x^2 - \int e^x \cdot 2x \cdot dx = e^x \cdot x^2 - 2[x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x \cdot dx] = e^x \cdot x^2 - 2xe^x + 2e^x + c = e^x[x^2 - 2x + 2] + c$

Bemerkung: Hier wurde  $x^2$  jeweils abgeleitet und  $e^x$  integriert.

- $\int x \cdot \cos(x) \cdot dx = \sin(x) \cdot x - \int 1 \cdot \sin(x) \cdot dx = \sin(x) \cdot x + \cos(x) + c$

Bemerkung: Hier wurde  $x$  abgeleitet und  $\cos(x)$  integriert.

## Integration und Substitution

- $\int f(u(x)) \cdot u' \cdot dx = \int f(u) \cdot du$
- $\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$
- $\frac{dx}{du} = u'(x)$

Trick: Zähler eines Bruches so korrigieren, dass es der Ableitung der Funktion entspricht. Anschliessend kann  $u' \cdot dx$  durch  $du$  ersetzt werden.

- $\int \frac{1}{(4x+5)^3} \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{4}{(4x+5)^3} \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{u'}{u^3} \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{du}{u^3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{u^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{8u^2} + c = -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(4x+5)^2} + c$  wobei  $dx = \frac{du}{u'}$

- $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \cdot dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}} \cdot dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{u'} = \int \frac{x \cdot du}{-2x \cdot \sqrt{u}} = - \int \frac{du}{2 \cdot \sqrt{u}} = -\frac{1}{2} \cdot u^{\frac{1}{2}} \cdot 2 + c = -\sqrt{u} + c = -\sqrt{a^2-x^2} + c$

Spezialfall:

- $\int \frac{u'(x) \cdot dx}{u(x)} = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + c = \ln |u(x)| + c$
- $\int \frac{x}{4+x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x}{4+x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \cdot \ln |u| + c = \frac{1}{2} \cdot \ln |4+x^2| + c$

## Partialbruchzerlegung

Wird gebraucht um gebrochenrationale Funktionen zu integrieren:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} \cdot dx$$

Man unterscheidet:

- Grad Zähler  $\geq$  Grad Nenner = unechtgebrochen
- Grad Zähler < Grad Nenner = echtgebrochen

### Unechtgebrochen

Mit Hilfe der Polynomdivision lassen sich solche Quotienten zerlegen in ein Polynom und in einen echtgebrochenen Quotienten

### Echtgebrochen

Grundsätzlich muss man das Polynom in Faktoren zerlegen die höchstens quadratisch sind.

**1. Fall**  $q(x)$  zerfällt in verschiedene lineare Faktoren (hat m einfache Nullstellen):

- $q(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$

Ansatz:

- $\int \frac{p(x)}{q(x)} = \int \frac{A_1}{(x-x_1)} \cdot dx + \int \frac{A_2}{(x-x_2)} \cdot dx + \dots + \int \frac{A_m}{(x-x_m)} \cdot dx$
- $\int \frac{3x-5}{x^2+2x-8} \cdot dx = \int \frac{A}{(x-2)} \cdot dx + \int \frac{B}{(x+4)} \cdot dx$
- $\frac{3x-5}{x^2+2x-8} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+4)} \quad | \cdot (x-2) \cdot (x+4)$
- $3x-5 = A(x+4) + B(x-2) \quad | x \text{ einsetzen und } A, B \text{ ausrechnen (z.B. } x=-4, x=2)$
- $A = \frac{1}{6}; B = \frac{17}{6}$
- $\int \frac{3x-5}{x^2+2x-8} \cdot dx = \frac{1}{6} \cdot \int \frac{1}{(x-2)} \cdot dx + \frac{17}{6} \cdot \int \frac{1}{(x+4)} \cdot dx = \frac{1}{6} \cdot \ln |x-2| + \frac{17}{6} \cdot \ln |x+4| + C$

**2. Fall**  $q(x)$  zerfällt in lineare Faktoren, es gibt mindestens einen Faktor, der mehrfach vorkommt:

- $q(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = (x+1)^2 \cdot (x-5)$

Ansatz:

- $\int \frac{p(x)}{q(x)} = \int \frac{A_1}{(x-x_i)} \cdot dx + \int \frac{A_2}{(x-x_i)^2} \cdot dx + \dots + \int \frac{A_k}{(x-x_i)^k} \cdot dx$
- $\int \frac{x^2+15x+8}{x^3-3x^2-9x-5} \cdot dx = \int \frac{A}{(x+1)} \cdot dx + \int \frac{B}{(x+1)^2} \cdot dx + \int \frac{C}{(x-5)} \cdot dx$
- $\frac{x^2+15x+8}{x^3-3x^2-9x-5} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x-5)} \quad | \cdot (x+1)^2 \cdot (x-5)$
- $x^2+15x+8 = A(x+1)(x-5) + B(x-5) + C(x-5)(x+1)^2 \quad | x \text{ einsetzen und } A, B, C \text{ ausrechnen (z.B. } x=-1, x=5)$
- $A = -2; B = 1; C = 3$
- $\int \frac{x^2+15x+8}{x^3-3x^2-9x-5} \cdot dx = -2 \int \frac{1}{(x+1)} \cdot dx + 1 \int \frac{1}{(x+1)^2} \cdot dx + 3 \int \frac{1}{(x-5)} \cdot dx = -2 \cdot \ln |x+1| + \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + 3 \cdot \ln |x-5| + C$

**3. Fall** Der Nenner enthalte quadr. Faktoren die sich nicht zerlegen lassen:

- $q(x) = x^3 - 6x^2 + 10x = x \cdot (x^2 - 6x + 10)$

Ansatz:

- $\int \frac{p(x)}{q(x)} = \int \frac{B_1x+C_1}{Q(x)^1} \cdot dx + \int \frac{B_2x+C_2}{Q(x)^2} \cdot dx + \dots + \int \frac{B_kx+C_k}{Q(x)^k} \cdot dx$
- $\int \frac{7x^2-19x+30}{x^3-6x^2+10x} \cdot dx = \int \frac{A}{x} \cdot dx + \int \frac{Bx+C}{x^2-6x+10} \cdot dx$
- $\frac{7x^2-19x+30}{x^3-6x^2+10x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-6x+10} \mid \cdot x \cdot (x^2 - 6x + 10)$
- $7x^2 - 19x + 30 = A(x^2 - 6x + 10) + x \cdot (Bx + C) \mid x \text{ einsetzen und } A, B, C \text{ ausrechnen (z.B. } x=0, x=1, x=-1)$
- $A = 3; B = 4; C = -1$
- $\int \frac{7x^2-19x+30}{x^3-6x^2+10x} \cdot dx = 3 \cdot \int \frac{1}{x} \cdot dx + \int \frac{4x-1}{x^2-6x+10} \cdot dx = 3 \cdot \ln |x| + (*)$   
 $-(x^2 - 6x + 10)' = 2x - 6 \Rightarrow 4x - 1 = 2 \cdot (2x - 6) + 11$
- $(*) = \int \frac{2(2x-6)+11}{x^2-6x+10} \cdot dx = 2 \cdot \int \frac{2x-6}{x^2-6x+10} \cdot dx + \int \frac{11}{x^2-6x+10} \cdot dx$   
 $-(1) = 2 \cdot \int \frac{2x-6}{x^2-6x+10} \cdot dx = 2 \cdot \int \frac{du}{u} \cdot dx = 2 \cdot \ln |u| = 2 \cdot \ln |x^2 - 6x + 10|$   
 $-(2) = 11 \cdot \int \frac{1}{x^2-6x+10} \cdot dx = 11 \cdot \int \frac{1}{(x-3)^2+1} \cdot dx$  ist von der Form  $k \cdot \int \frac{1}{(x-C)^2+a^2} \cdot dx$   
 $= k \cdot \frac{1}{a} \cdot \arctan(\frac{x-C}{a}) + C = 11 \cdot \frac{1}{1} \cdot \arctan(\frac{x-3}{1}) + C$
- $\int f(x) \cdot dx = 3 \cdot \ln |x| + 2 \cdot \ln |x^2 - 6x + 10| + 11 \cdot \arctan(x - 3) + C$

## Das bestimmte Integral

### Das Flächenproblem

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = A$$

1. Zwischenwerte  $x_0, x_1, \dots, x_n$  setzen und somit Intervall  $[a, b]$  in Teilintervalle zerlegen.

2. Wähle in jedem Teilintervall eine Zwischenstelle  $\xi_i$

(a)  $A_1 = \Delta x \cdot f(\xi_1)$

(b)  $A_k = \Delta x \cdot f(\xi_k)$

3.  $S_n = A_1 + \dots + A_n = \sum_{k=1}^n A_k = \sum_{k=1}^n \Delta x \cdot f(\xi_k)$

4. Grenzübergang:  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = A \Rightarrow (\Delta x \rightarrow 0)$

**Riemannsche Summen**  $\int_a^b f(x) dx := \lim_{n \rightarrow \infty} (\Delta x \rightarrow 0) \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \times \Delta x_i$

### Exakt mit Grenzübergang

$$f(x) = x^2$$

Teile Intervall  $[0, 2]$  in  $n$  gleiche Teile:

Intervall	Breite		Höhe	Fläche
$I_1 = [0 \cdot \frac{2}{n}, 1 \cdot \frac{2}{n}]$	$\Delta x_1 = \frac{2}{n}$	$\xi_1 = 1 \cdot \frac{2}{n}$	$f(\xi_1) = (1 \cdot \frac{2}{n})^2$	$A_1 = \frac{2}{n} \cdot 1^2 \cdot \frac{4}{n^2}$
$I_2 = [1 \cdot \frac{2}{n}, 2 \cdot \frac{2}{n}]$	$\Delta x_2 = \frac{2}{n}$	$\xi_2 = 2 \cdot \frac{2}{n}$	$f(\xi_2) = (2 \cdot \frac{2}{n})^2$	$A_2 = \frac{2}{n} \cdot 2^2 \cdot \frac{4}{n^2}$
$I_k = [(k-1) \cdot \frac{2}{n}, k \cdot \frac{2}{n}]$	$\Delta x_k = \frac{2}{n}$	$\xi_k = k \cdot \frac{2}{n}$	$f(\xi_k) = (k \cdot \frac{2}{n})^2$	$A_n = \frac{2}{n} \cdot n^2 \cdot \frac{4}{n^2}$
$I_n = [(n-1) \cdot \frac{2}{n}, n \cdot \frac{2}{n}]$	$\Delta x_n = \frac{2}{n}$	$\xi_n = n \cdot \frac{2}{n}$	$f(\xi_n) = (n \cdot \frac{2}{n})^2$	$A_k = \frac{2}{n} \cdot k^2 \cdot \frac{4}{n^2}$

Vorgehen

- allgemeines Intervall
- Auswertungsstelle ] Wert an AS
- Flächenformel
- $\sum$  bilden

$$S_n = \frac{2}{n} \cdot \frac{4}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{8}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$