Lineare Algebra

Vektorgeometrie

Berechnung des Skalarprodukts

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Berechnung des Zwischenwinkels zweier Vektoren

$$\cos \angle(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} \Rightarrow \angle(\vec{v}, \vec{w}) = \arccos \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$$
$$\vec{v} \bullet \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos \angle(\vec{v}, \vec{w})$$

Aussage des Skalarprodukts 0

$$\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \bullet \vec{w} = 0$$

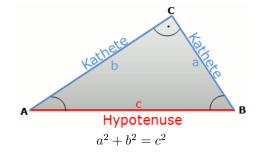
Nullvektoren stehen senkrecht zu allen Vektoren

Berechnung der Länge eines Vektors

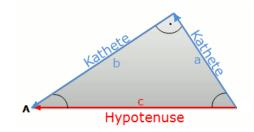
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$
$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2$$

Satz des Pythagoras

Im Dreieck



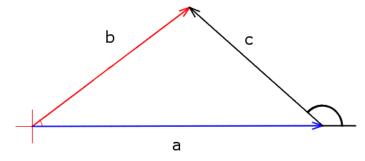
Mit Vektoren



$$\begin{split} \vec{b} &= \vec{c} - \vec{a} \\ \vec{c} &= \vec{a} + (\vec{c} - \vec{a}) \\ |\vec{c}| &= \sqrt{\vec{c} \bullet \vec{c}} = \sqrt{(\vec{a} + (\vec{c} - \vec{a}) \bullet (\vec{a} + (\vec{c} - \vec{a}))} = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b}) \bullet (\vec{a} + \vec{b})} \\ &= \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a} + \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{c} \bullet \vec{b} + \vec{b} \bullet \vec{b}} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + 0 + 0 + \left| \vec{b} \right|^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + \left| \vec{b} \right|^2} \end{split}$$

1

Cosinussatz



$$\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\left| \vec{b} \right|^2 = \vec{b} \bullet \vec{b} = (\vec{a} + \vec{c}) \bullet (\vec{a} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{a} + \vec{a} \bullet \vec{c} + \vec{c} \bullet \vec{a} + \vec{c} \bullet \vec{c}$$

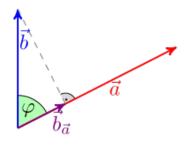
$$= |\vec{a}|^2 + 2\cos \angle (\vec{a}, \vec{c}) \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| + |\vec{c}|^2$$

$$(= |\vec{a}|^2 - 2\cos(180^\circ - \angle) \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| + |\vec{c}|^2)$$

Daraus folgt:

$$a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta) = b^2$$

Orthogonalprojektion



- 1. Einheitsvektor in \vec{a} -Richtung = $\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \vec{a_1} (= \vec{b_a})$
- 2. $\vec{b} \bullet \vec{a_1} = \left| \vec{b} \right| \cdot |\vec{a_1}| \cdot \cos \angle (\vec{b}, \vec{a_1}) = \left| \vec{b} \right| \cdot \cos \angle (\vec{b}, \vec{a_1})$
- 3. $\left| \vec{b} \right| \cdot \cos \angle (\vec{b}, \vec{a_1}) \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (\vec{b} \bullet \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}) \bullet \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (\vec{b} \bullet \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2}) \bullet \vec{a}$

${\bf Kreuzprodukt}$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Parameterdarstellung

Gerade = Aufpunkt + Faktor * Vektor

$$g: \left(\begin{array}{c} x\\y\\z \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 10\\3\\-12 \end{array}\right) + s \left(\begin{array}{c} -5\\1\\-3 \end{array}\right)$$

Ebene = Aufpunkt + 1.Faktor * 1.Vektor + 2.Faktor * 2. Vektor

2

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Koordinatengleichung der Ebene

Parameterdarstellung:

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

• Kreuzprodukt der Vektoren berechnen

$$\begin{pmatrix} -3\\1\\1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 2\\2\\-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6\\-10\\-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\\5\\4 \end{pmatrix}$$

• Gleichung aufstellen

$$3x + 5y + 4z = 0$$

• Aufpunkt einsetzen

$$3-5+8=6$$

$$\Rightarrow 3x+5y+4z=6$$

$$\Rightarrow 3x+5y+4z-6=0$$

Beispiele

Schnittgerade zweier Ebenen

Gegeben:

$$E_{1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• Normalen der Ebenen bestimmen (Kreuzprodukt)

$$n_{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$n_{1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• Gleichungen für Normalen aufstellen und Aufpunkte einsetzen

3

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow -y + z = 0 \Rightarrow -1 + 2 = 1 \Rightarrow -x + z = 1$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow 8 = 8 \Rightarrow 2x = 8$$

• Normalen zu den Normalen bestimmen

$$r = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow 0x + 2x + 2z = 0$$

• Aufpunkt bestimmen

Aufpunkt so wählen, dass er beide Gleichungen erfüllt

$$0x - y - z = 1$$

$$2x + 0y + 0z = 8$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

• Parameter Darstellung

$$r = \begin{pmatrix} 4\\1\\2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0\\2\\2 \end{pmatrix}$$

Normalstehende Ebene

Gegeben

$$E: \ x + 2y + 2z - 4 = 0$$

$$A(-1/-2/0), B(1/1/2)$$

Gesucht: Ebene die Normla zur gegeben Ebene liegt, und durch die Punkt A und B geht.

4

• u, v berechnen

$$u = n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} v = B - A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E: \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right) = A + s * u + t * v =$$

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

• Berechnen der Koordinatengleichung

$$n_2 = u \times v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$-2x + 2y - z = 0$$

• Aufpunkt einsetzen (A ist der Aufpunkt)

$$-2*(-1) + 2*(-2) - 0 = -2$$

$$\Rightarrow -2x + 2y - z + 2 = 0$$

Drehung (Drehmatrix)

$$A_{D(45^{\circ})} = \begin{pmatrix} \cos(45^{\circ}) & -\sin(45^{\circ}) \\ \sin(45^{\circ}) & \cos(45^{\circ}) \end{pmatrix}$$

Spiegelung

• An x-Achse
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

• An y-Achse
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

An Geraden 2x -5y = 0 (Wenn die Gerade nicht durch den Nullpunkt geht, gehts nicht, nicht linear)

1. Normale der Gerade bestimmen:

$$n = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$
, da $n \bullet r = 0$, ist der Vektor $r = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ (Vektor umdrehen und eine Zahl negieren)

2. Nun kann eine Gleichung aufgestellt werden:

$$A(n*r) = (-n*r)$$
, dies kann man schreiben als A*B =C

3. Nun kann auf beiden Seiten von rechts mit B^{-1} multipliziert werden und man erhält:

$$A = C * B^{-1} \operatorname{resp} A = (-n * r) * (n * r)^{-1},$$

4. Da wir n und r kennen, können wir nun die klammern durch Matrizen ersetzen

$$A = \left(\begin{array}{cc} -2 & 5\\ 5 & 2 \end{array}\right) * \left(\begin{array}{cc} 2 & 5\\ -5 & 5 \end{array}\right)^{-1}$$

5. Nun kann es ausgerechnet werden (-> Gausches Eliminationsverfahren für Invertierung)