

Physik

Fabio Germann & Jonas Gschwend

14.01.2014

Kinetik

Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfunktionen

Ortsfunktion

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeit

Die Geschwindigkeit ist die zeitliche Ableitung der Ortsfunktion:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{dz(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}$$

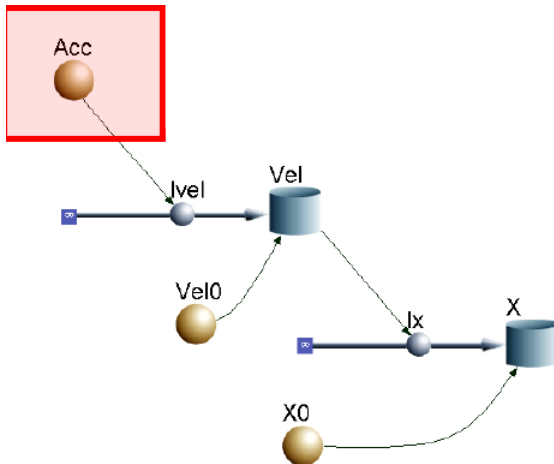
Geschwindigkeit ist ein Vektor, die Schnelligkeit ihr Betrag.

Beschleunigung

Die Beschleunigung ist die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeits resp. die zweite zeitliche Ableitung der Ortsfunktion.

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x(t)}{dt} \\ \frac{dv_y(t)}{dt} \\ \frac{dv_z(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$



Kraft

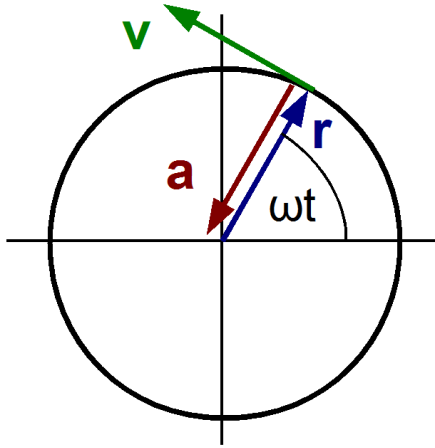
Die Kraft ist das Produkt von Masse und Beschleunigung:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = \left[\frac{kg \cdot m}{s^2} \right] = [N]$$

Schiefer Wurf

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \\ v_{z0} - gt \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} r_{x0} + v_{x0}t \\ r_{y0} + v_{y0}t \\ r_{z0} + v_{z0}t - g \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}$$

Kreisbewegung



ω = Winkel pro Sekunde

$T = \frac{2\Pi}{\omega}$ = Periode, Zeit für einen Umlauf ($360^\circ = 2\Pi$)

Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r \cos(\omega t) \\ r \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$|\vec{r}(t)| = r$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r \cos(\omega(t+T)) \\ r \sin(\omega(t+T)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\omega t + 2\Pi) \\ r \sin(\omega t + 2\Pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\omega t) \\ r \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -r\omega \sin(\omega t) \\ r\omega \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$|\vec{v}(t)| = r\omega$$

Beschleunigung

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -r\omega^2 \cos(\omega t) \\ -r\omega^2 \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}(t)| = r\omega^2$$

Nicht-konstante Beschleunigung

$$v = \int a(t) dt = v_0 + ct - \tau a(t) = v_0 + ct - c\tau(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \longrightarrow v_0 = v(0) \rightarrow c_1 - c_2 = v_0 - c\tau$$

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} c t^2 + \tau^2 a(t) - c\tau t \rightarrow s_0 + c\tau^2 = c_1 + c\tau c_2$$

$$a(t) = c(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Kräfte

Massepunkte

Massepunkte sind charakterisiert durch die Position $\vec{r}(t)$, durch die Masse M und durch die Ladung Q .

Beschleunigung

Die Beschleunigung einer Masse ergibt sich aus der Summe der internen und externen Kräfte:

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \cdot (\sum \vec{F}_{intern} + \sum \vec{F}_{extern})$$

Gravitationskraft

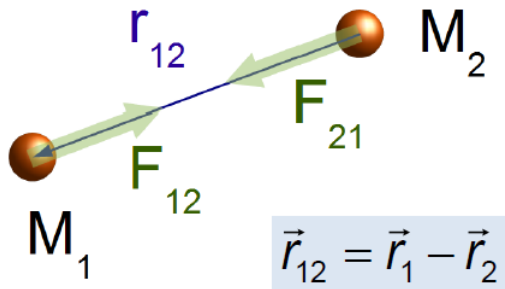
$$\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{M_1 M_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \vec{n}_{12} = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{|r_1 - r_2|^2} \cdot \frac{r_1 - r_2}{|r_1 - r_2|} = \text{Kraft auf Masse } M_1$$

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$\vec{n}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|} = \text{Einheitsvektor von Masse } M_2 \text{ zu Masse } M_1$$

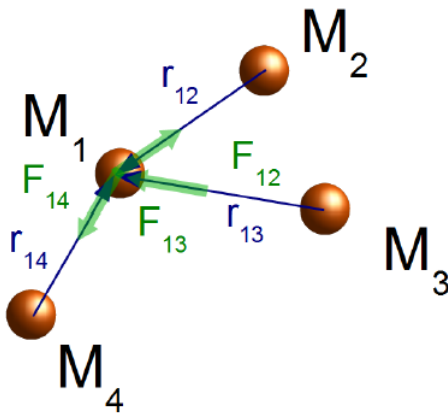
$$F_{m1m2} = |\vec{F}_{m1m2}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \left[\frac{Nm^2}{kg^2} \right] = \text{Gravitationskonstante}$$



Superpositionsprinzip

Die Gesamtkraft einer Anzahl von Massen auf eine bestimmte Masse ist gleich der Summe der Kräfte der jeweiligen Einzelmassen.



Zentripetalkraft

$$F_Z = mr\omega^2 = mr \frac{v^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

Kraft auf Fläche

$$F_A = \frac{dp}{dt} = \frac{v \cdot \Delta m}{\Delta t} = r \rho \frac{\Delta v}{\Delta t} = \rho \frac{\Delta V \cdot v}{\Delta t}$$

$$\Delta m = \rho \Delta v$$

$$\rho = \text{Dichte}$$

$$\Delta V = A \cdot \Delta s$$

Planetenbahnen

$$\vec{F} = -\gamma \frac{mM_s}{|\vec{r}|^2} \vec{n} \Rightarrow ma = \gamma \frac{mM_s}{r^2}$$

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} -r\omega^2 \cos(\omega t) \\ -r\omega^2 \sin(\omega t) \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{a}(t)| = r\omega^2$$

$$\Rightarrow mr\omega^2 = \gamma \frac{mM_s}{r^2} \Rightarrow r^3\omega^2 = \gamma M_s$$

$$m = \text{Planetenmasse}$$

$$M_s = \text{Sonnenmasse}$$

$$r = \text{Radius der Kreisbahn} = \text{z.B. Erdradius} + \text{Höhe über Erdboden}$$

Fluchtgeschwindigkeit

$$\frac{mv^2}{2} + E_{kin} = E_{pot} + \int_{\infty}^r F dr \implies F = -\gamma \frac{mM}{r^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r}}$$

Keppler's third law

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{\gamma M_s}{4\pi^2} = \text{const.}$$

$$T = \text{Periode} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Elektrische Ladung

Ein Elektron trägt eine Ladung von $-e$, wobei e die Elementarladung $e = 1.602189 \cdot 10^{-19} C$ beträgt.

Kräfte zwischen ruhenden Ladungen

Gleiche Ladungen stoßen sich ab, ungleiche ziehen sich an.

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \vec{n}_{12}$$

$$\epsilon_0 = 8.859 \cdot 10^{-12} \left[\frac{C^2}{Jm} \right] = \text{Influenzkonstante}$$

Reibungskräfte

Bodenkraft

Die Gravitationskraft wird durch eine Kraft des Bodens, die "Bodenkraft" ausgeglichen.

Gleitreibung

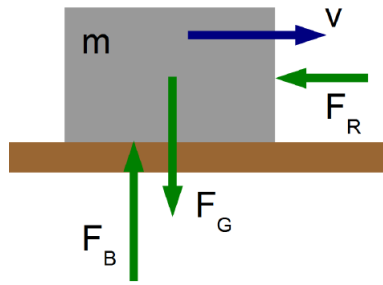
$$\vec{F}_G = -\vec{F}_B$$

$$\vec{F}_R = -\mu \cdot m \cdot g \cdot \vec{n}_v \text{ (n kann weggelassen werden falls nicht mit Vektoren gerechnet wird)}$$

$$\vec{n}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$\mu = \text{Gleitreibungskoeff.}$$

$$m = \text{Masse}$$



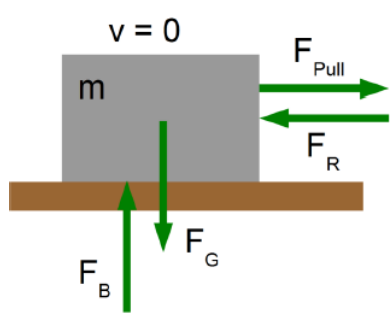
Haftreibung

$$\vec{F}_C = \mu_H \cdot m \cdot g \cdot \vec{n}_{F_{pull}}$$

$$\vec{F}_R = -\vec{F}_{pull} \text{ (solange } \vec{F}_{pull} \leq \vec{F}_C \text{ und } \vec{v} = 0 \text{)}$$

$$\vec{n}_{F_{pull}} = \frac{\vec{F}_{pull}}{|\vec{F}_{pull}|}$$

μ_H = Haftreibungskoeffizient



Impuls

Luftwiderstand

Vertikaler Fall

Der Luftwiderstand ist proportional zum Quadrat der Schnelligkeit und der Geschwindigkeit entgegengesetzt:

$$\vec{F}_w = -c_w \cdot \frac{\rho A}{2} \cdot |\vec{v}|^2 \cdot \vec{n}_v$$

c_w = Widerstandszahl

ρ = Luftdichte (1.293 kg/m^3)

A = Querschnittsfläche \perp zu \vec{v}

$$\vec{n}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

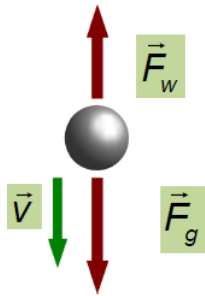
Die Widerstandszahl c_w hängt von der Geometrie des betrachteten Körpers ab.

Maximale Fallgeschwindigkeit

$$m_s \vec{a} = \vec{F}_g + \vec{F}_w$$

$$m \dot{v}_z = -mg + c_w \cdot \frac{\rho_{Luft} A}{2} \cdot v_z^2$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} v_z(t) = \sqrt{\frac{g}{\gamma}} = \sqrt{\frac{2mg}{c_w \rho_{Luft} A}}$$



Fallgeschwindigkeit Allgemein

Geschwindigkeit als Funktion der Zeit:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - kv^2$$

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m} v^2$$

Ballistische Kurven

Generell geht es darum, die Bahn eines Geschosses vorherzusagen.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_G - k \cdot |\vec{v}|^2 \cdot \vec{n}_v$$

$$\vec{n}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$k = \text{Konstante} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}} \right]$$

Dieses Problem kann nur numerisch, in Koordinatenform angegangen werden:

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - k \cdot \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$\dot{v}_x = -kv_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$\dot{v}_y = -kv_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$\dot{v}_z = -g - kv_z \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Impuls

Definition

Gegeben ist eine punktförmige Masse m mit einer Geschwindigkeit \vec{v} .
Der Impuls dieser Masse ist definiert als:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Der Impuls ist also ein Vektor.

Impuls einer ausgedehnten Masse

$$\vec{p} = \int_{Volume} \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r})dV$$

$\rho(\vec{r})$ = Dichte am Punkt \vec{r}

$v(\vec{r})$ = Geschwindigkeit am Punkt \vec{r}

$dm(r)$ ist ein Stücklein Masse. Die Gesamtmasse ist aus vielen Massenstücklein zusammengesetzt, das Integral ist eine Summe über ganz kleine Stücklein:

$$dm(\vec{r}) = \rho(\vec{r})dV$$

Zusammenhang Impuls und Kraft

Es gilt:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \vec{p} = m\vec{v}$$

Weiter können wir sagen:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Falls die Masse zeitlich konstant ist ($\frac{dm}{dt} = 0$) gilt:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Die zeitliche Ableitung des Impulses eines Massenpunktes ist gleich der Kraft, die auf ihn wirkt!

Abprallen

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \rightarrow \Delta p = 2mv$$

Impulserhaltung

Für ein System miteinander wechselwirkender Massen aber ohne äussere Kräfte ist der Gesamtimpuls eine Konstante.

$$\vec{p}_{tot} = \sum_i m_i \vec{v}_i = const.$$

$$\frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \vec{v}_i \right) = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}^{intern}$$

Masseschwerpunkt

Definition

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

Schwerpunktgeschwindigkeit

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\vec{p}_{tot}}{\sum_i m_i}$$

Schwerpunktbeschleunigung

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{\sum_i m_i}$$

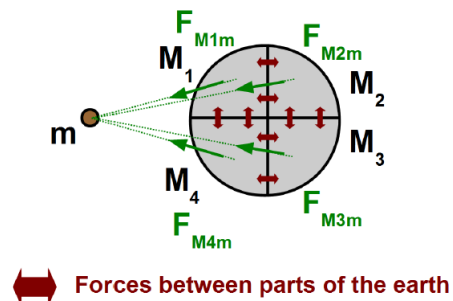
Schwerpunktsatz

Die Änderungsrate des Impulses der im Schwerpunkt konzentrierten Gesamtmasse der Teilchen ist gleich der Summe aller externen Kräfte.

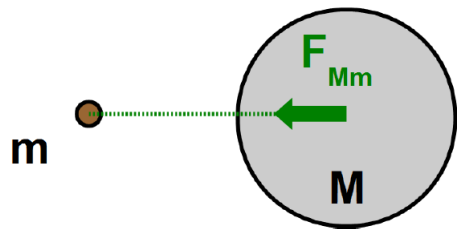
$$M_{tot} = \sum_i m_i$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\sum_i \sum_k^K \vec{F}_{ik}^{extern}}{\sum_i m_i} \iff M_{tot} \vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{p}_{CM}}{dt} = \sum_i \sum_k^K \vec{F}_{ik}^{extern}$$

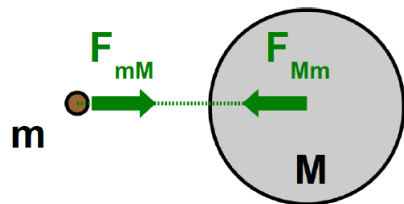
Eine Masse m übt gravitative Kräfte auf jeden Einzelteil einer Masse M aus. Zwischen den Teilen von M wirken Kräfte, die M zusammenhalten:



Aufgrund des Schwerpunktsatzes dürfen Sie so tun, als ob die von m ausgeübte Kraft im Schwerpunkt von M auf ganz M wirken würde:



Wegen Newtons drittem Gesetz dürfen Sie jetzt schliessen, dass M eine entsprechende Gegenkraft auf m ausübt:



Energie, Leistung und Potentiale

Energie

Mechanische Energie

Wir definieren jetzt eine physikalische Grösse, die mechanische Energie:

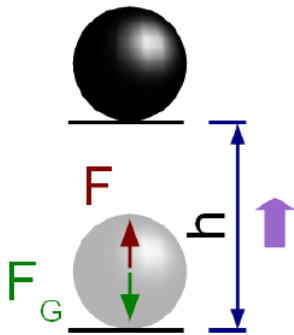
$$E_{mech} = \vec{F} \cdot \vec{s} = [Kraft \cdot Weg] = [J] = \left[\frac{kgm^2}{s^2} \right]$$

Potentielle Energie

$$E_{mech} = \vec{F} \cdot \vec{s} = [Kraft \cdot Weg] = \int_0^h F \cdot dh = \int_0^h mg \cdot dh = mgh$$

Um die Kugel zu heben, müssen Sie die mechanische Energie mgh investieren. Die potentielle oder Lageenergie der Kugel wird dadurch um mgh erhöht.

Potentielle Energie im Gravitationsfeld = mgh



Kinetische Energie

$$E_{mech} = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs$$

$$F = ma \text{ (a = Beschleunigung)}$$

$$s = \frac{a}{2}t^2 \text{ (Zusammenhang Strecke-Beschleunigung)}$$

$$v = at$$

$$\Rightarrow Fs = ma \cdot s = ma \cdot \frac{a}{2}t^2 = m \cdot \frac{v^2}{2}$$

$$\Rightarrow E_{kin} = m \cdot \frac{v^2}{2}$$

Gilt allgemein, die gegebene Herleitung funktioniert allerdings nur für konstante Kräfte.

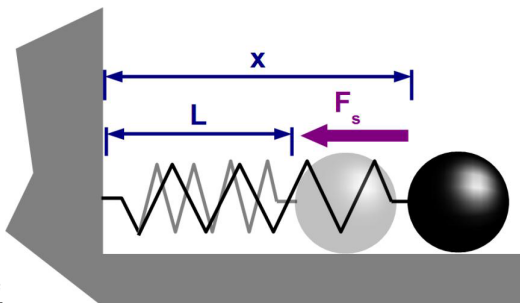
Federenergie

$$\vec{F}_s = -k(x - L)\vec{e}_x$$

\vec{e}_x = Einheitsvektor in x-Richtung

L = Ruhelänge

$$E_{Feder} = \int_L^x F dx = \int_L^x k(x - L) dx = \frac{k(x-L)^2}{2}$$



$$\Rightarrow E_{kin} = m \cdot \frac{v^2}{2}$$

Arbeit

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$$

Dabei ist \vec{F} eine Kraft und $\Delta \vec{r}$ ein Stück Weg. Der Punkt bezeichnet das Skalarprodukt.

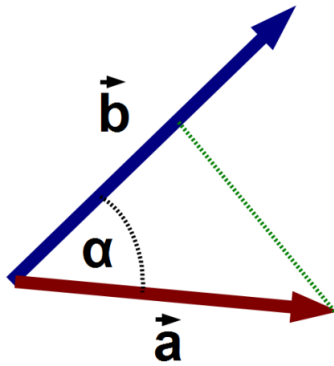
Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Geometrische Interpretation:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right) = \arccos\left(\frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}\right)$$



$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Für das Produkt eines Vektors mit sich selber gilt:
(Zwischenwinkel ist null)

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(0) = |\vec{a}|^2$$

$$\Rightarrow E_{kin} = m \cdot \frac{\vec{v}^2}{2} = m \cdot \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} = m \cdot \frac{|\vec{v}|^2}{2}$$

Energieerhaltung

Energieerhaltungssatz

Die Gesamtmenge der Energie in einem Prozess bleibt immer exakt erhalten.

Anwendung der Energieerhaltung

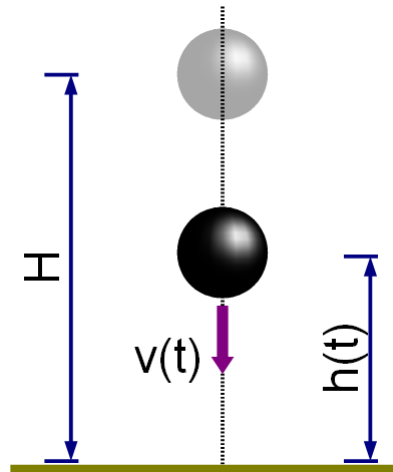
Ansatz: Wenn die Kugel fällt, sinkt ihre potentielle Energie. Wegen der Energieerhaltung steigt die kinetische Energie um einen entsprechenden Betrag.

$$E_{pot}(t) = mgh(t)$$

$$E_{kin}(t) = m \frac{v^2(t)}{2}$$

$$E_{pot}(t) + E_{kin}(t) = const.$$

$$E_{pot}(0) + E_{kin}(0) = mgH + 0 = mgH$$



$$mgH = mgh(t) + m \frac{v^2(t)}{2}$$

$$\Rightarrow v(t) = \sqrt{2g(H - h(t))}$$

Energie- und Impulserhaltung

Impulserhaltung

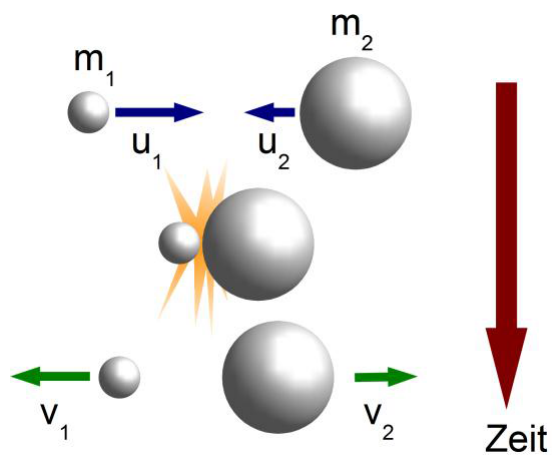
$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = P$$

Energierhaltung

$$m_1 \frac{u_1^2}{2} + m_2 \frac{u_2^2}{2} = m_1 \frac{v_1^2}{2} + m_2 \frac{v_2^2}{2} = E$$

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2) \cdot u_1 + 2m_2 u_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_2 = \frac{(m_2 - m_1) \cdot u_2 + 2m_1 u_1}{m_1 + m_2}$$



Potentiale

Dissipative und Konservative Systeme

- Ein System heisst konservativ, wenn die Summe der Energien seiner Komponenten erhalten bleibt.
- Ein System heisst dissipativ, wenn es Energie in die Umwelt abgibt (z.B. durch Wärmestrahlung oder Reibung)

Potentielle Energie

Definition: Differenz der potentiellen Energien zwischen zwei Punkten = Arbeit, die es braucht, eine Masse vom ersten zum zweiten Punkt zu bringen.

Falls wir die potentielle Energie eines Objekts als Funktion der Lage angeben können (und nicht weiter sagen müssen, wie wir vom Anfangs- zum Endpunkt eines Pfads gelangen), haben wir es mit einem Potential zu tun.

Leistung

- Leistung ist Energie pro Zeit = $[W] = \left[\frac{J}{s}\right]$
- $1kWh = 3.6 \cdot 10^6Ws = 3.6 \cdot 10^6J$

Bilanzmodelle

Ausgleich zwischen Energiespeichern findet über Ströme von „Energieträgern“ statt:

$$Strom = \frac{Energieträger}{Zeit}$$

Damit Sie mit einem Energieträgerstrom eine Leistung berechnen können, müssen Sie wissen, wieviel Energie in einem Energieträger steckt:

$$\frac{Energie}{Zeit} = \frac{Energie}{Energieträger} \cdot \frac{Energieträger}{Zeit} = Potentialdifferenz \cdot Strom$$

Stoffe, Potential, Energie

| Gebiet | Stoffmenge | Potential | Energie | Leistung |
|--------------|------------|-----------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| Elektrizität | Ladung Q | Spannung U | $E = U \cdot Q = \int_a^b P(t)dt$ | $P = U \cdot I_q = \frac{dE}{dt}$ |
| Hydraulik | Volumen V | Druck p | $E = p \cdot V$ | $P = \Delta p \cdot I_v$ |
| Gravitation | Masse m | $E = g \cdot h$ | $E = m \cdot g \cdot h$ | $P = g \cdot \Delta h \cdot I_m$ |

Allgemeine Zusammenhänge

| | |
|---|---|
| $\phi_{el}(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} d\vec{r}$ | $\vec{E}(\vec{r}_A) = -\nabla \phi_{el}(\vec{r}_A)$ |
| $\phi_{grav}(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{G} d\vec{r}$ | $\vec{G}(\vec{r}_A) = -\nabla \phi_{grav}(\vec{r}_A)$ |
| $E_{pot}(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F} d\vec{r}$ | $\vec{F}(\vec{r}_A) = -\nabla E_{pot}(\vec{r}_A)$ |

Elektrische Felder

$$\vec{F}_1 = \sum_{i=2}^4 \vec{F}_{1i} = \sum_{i=2}^4 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_i}{|\vec{r}_{1i}|^2} \vec{n}_{1i} = Q_1 \sum_{i=2}^4 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{|\vec{r}_{1i}|^2} \vec{n}_{1i} = Q_1 \vec{E}(r)$$

Kugel

$$\vec{E}_{Kugel} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |r|^2} \vec{n}$$

Zylinder

$$\vec{E}_{Zylinder} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 |r|} \vec{n}, \text{ wobei } \vec{n} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (\text{senkrecht zur Zylinderachse})$$

Platte

$$\vec{E}_{Platte} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$$

Allgemein

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{Q} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Ladung}}$$

Elektrische Spannung

$$U = \phi_{el}(\vec{r}_1) - \phi_{el}(\vec{r}_2)$$

wobei:

$$\phi_{el}(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} d\vec{s} = \int_r^{\infty} \vec{E} d\vec{s} = \frac{\text{Energie}}{\text{Ladung}}, \text{ und } \text{Energie}_{pot} = - \int_{\infty}^r \vec{Q} \vec{E} d\vec{s}$$

das **ELEKTRISCHE POTENTIAL** ist.

Daraus folgt:

$$U = - \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} d\vec{s}$$

Elektrizitätslehre

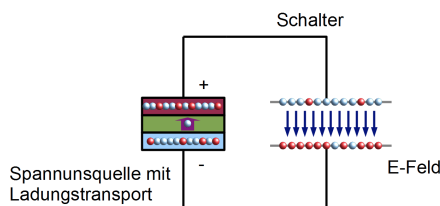
$$I = \frac{dQ}{dt}$$

$$Q = \int_V \rho_{el} dV$$

$$\frac{dE_{pot}}{dt} = \frac{d}{dt}(UQ) = U \frac{dQ}{dt} = UI = P$$

$$\rho_{el} = \text{Ladungsdichte } [C/m^3]$$

Kondensatoren



| | | | | |
|----------------|---|--------------|---------------------|-----------|
| Spannung [V] | $U = - \int_{\text{Unterseite-Kondensator}}^{\text{Oberseite-Kondensator}} \vec{E} d\vec{r} = \frac{QL}{A\epsilon_0}$ | Q= | Ladung | Coulomb C |
| Kapazität [F] | $C = \frac{A\epsilon_0}{L} = \frac{Q}{U}$ | L= | Distanz der Platten | |
| E-Feld | $\vec{E}_{platte} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n} = \frac{Q}{2A\epsilon_0} \vec{n}$ | ϵ_0 | | |
| Energie des K. | $E_{elek} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}$ | A= | Fläche der Platte | |
| | $E_{pot} = \frac{\epsilon_0 AL^2 E^2}{2L} = V \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$, falls E-Feld konst. | \vec{n} | | |
| Energiedichte | $W_E = \frac{E_{pot}}{V} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$ | | | |

Schaltungen

Allgemein

Formeln

$$U = E \cdot d = \frac{\varrho \cdot d}{\epsilon_0} = \frac{Q \cdot d}{\epsilon_0 \cdot F} \quad (d = \text{Abstand})$$

$$C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \cdot \frac{F}{d} \quad (\text{Kapazität eines Kondensators})$$

$$Q = C \cdot U$$

$$U = R \cdot I \Rightarrow R = \frac{U}{I} \Rightarrow R = \varrho \cdot \frac{l}{A}, \quad \varrho = \text{spezifischer Widerstand}$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q} = \frac{U}{R}$$

Einheiten

$$1T = 1 \frac{N \cdot s}{C \cdot m} = 1 \frac{N \cdot m \cdot s}{C \cdot s^2} = 1 \frac{V \cdot s}{m^2}$$

$$1A = 1 \frac{C}{s}$$

$$1N = 1 \frac{kg \cdot m}{s^2}$$

$$1F = 1 \frac{C}{V} = 1 \frac{A \cdot s}{V} = 1 \frac{A^2 \cdot s^4}{kg \cdot m^2}$$

$$\frac{V}{m} = \frac{N}{C}$$

Kirchhoffschen Gesetze

Maschenregel

Die Maschenregel betrachtet die Teilspannungen in einer Masche eines Stromkreises. Geht man in einem Stromkreis einmal rund herum, bis wieder der gleiche Punkt erreicht wird, so muss die Spannungsdifferenz null sein:

$$\sum_k U_k = 0$$

Wäre dies nicht so, würde der Energieerhaltungssatz verletzt. Eine Ladung könnte sich immer in der gleichen Richtung im Stromkreis bewegen und würde dabei ein immer höheres Potential erreichen.

Knotenregel

Die Knotenregel besagt, dass an einen Knoten im Stromkreis die Summe aller Ströme null sein muss. Dafür muss den Strömen ein Vorzeichen zugeordnet werden:

$$\sum_k I_k = 0$$

Ladungen die pro Zeiteinheit zufließen, müssen auch wieder abfließen, wenn die Schaltung nur aus leitenden Drähten und Widerständen besteht.

Widerstände

Serienschaltung

$$R = \varrho \cdot \frac{l_1 + l_2}{A} = R_1 + R_2$$

$$R = R_1 + R_2$$

Parallelschaltung

$$R = \frac{1}{\varrho \cdot \frac{A_1}{l} + \varrho \cdot \frac{A_2}{l}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1}$$

Wechselspannung

$$Z = R$$

Kondensatoren

$$E_{pot} = \frac{Q^2}{2C} = C \frac{U^2}{2}$$

Serienschaltung

$$C = E \cdot \frac{A}{d_1 + d_2} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

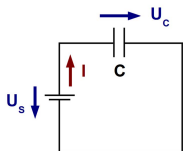
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1}$$

Parallelschaltung

$$C = E \cdot \frac{A_1 + A_2}{d} = C_1 + C_2$$

$$C = C_1 + C_2$$

Wechselspannung



$$U_S(t) = U_S \cos(\omega t) \text{ (Wechselspannungsquelle)}$$

$$U_c(t) = U_S e^{i\omega t} = U_S \cos(\omega t)$$

$$Q(t) = C U_S e^{i\omega t} = C U_S \cos(\omega t)$$

$$I(t) = i\omega C U_S e^{i\omega t} = -\omega C U_S \sin(\omega t)$$

$$\frac{U_c(t)}{I(t)} = \frac{1}{i\omega C} \Rightarrow Z = \frac{1}{i\omega C}$$

Spulen

Allgemein

- B = Elektromagnetisches Feld
- N = Anzahl Windungen einer Spule
- l = Länge einer Spule (nicht Drahtlänge)
- L = Induktivität einer Spule [H]
- A = Fläche der Spule
- $1 \frac{Vs}{A} = 1H = 1Henry$

Elektromagnetisches Feld

$$B = \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot I = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot I = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \frac{N \cdot U}{l \cdot R} = \frac{\phi}{A}$$
$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} Vs/Am \text{ (Permeabilität)}$$

Induzierte Spannung

Faraday's Gesetz (vgl. ACDC) für Spulen (für Schlaufe $N=1$)

$$U_{ind} = -N \cdot B \cdot \frac{dA}{dt} = N \cdot B \cdot A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)$$
$$U_{ind} = -L \cdot \frac{dI}{dt} = -\frac{d\phi}{dt} = -L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} \text{ (Achtung: hier muss die Stromrichtung beachtet werden - Vorzeichen!)}$$
$$\phi = N \cdot B \cdot A$$
$$L = \frac{\mu N^2 A}{l}, \mu = \mu_0 \mu_r$$

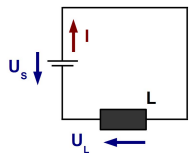
Gespeicherte Energie in einer Spule

$$E(I) = L \cdot \frac{I^2}{2}$$

Selbstinduktion

$$L \simeq N^2 \iff N \simeq \sqrt{L}$$
$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{\sqrt{L_1}}{\sqrt{L_2}}$$

Wechselspannung



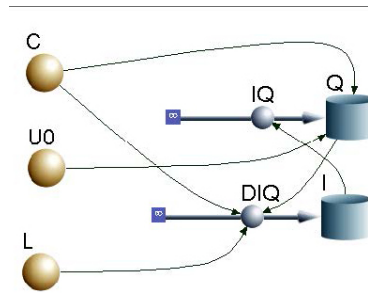
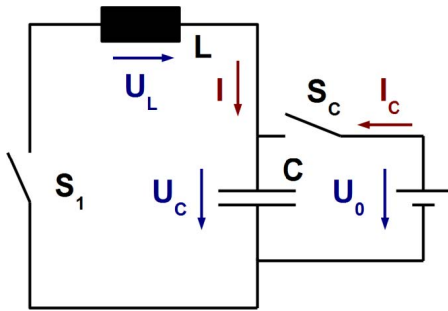
$$U_S(t) = U_S \cos(\omega t) \text{ (Wechselspannungsquelle)}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{U_S}{L} \cos(\omega t) = \frac{U_S}{L} e^{i\omega t}$$

$$I(t) = \frac{U_S}{L\omega} \sin(\omega t) = \frac{U_S}{i\omega L} e^{i\omega t}$$

$$Z = i\omega L = \frac{U_L(t)}{I(t)}$$

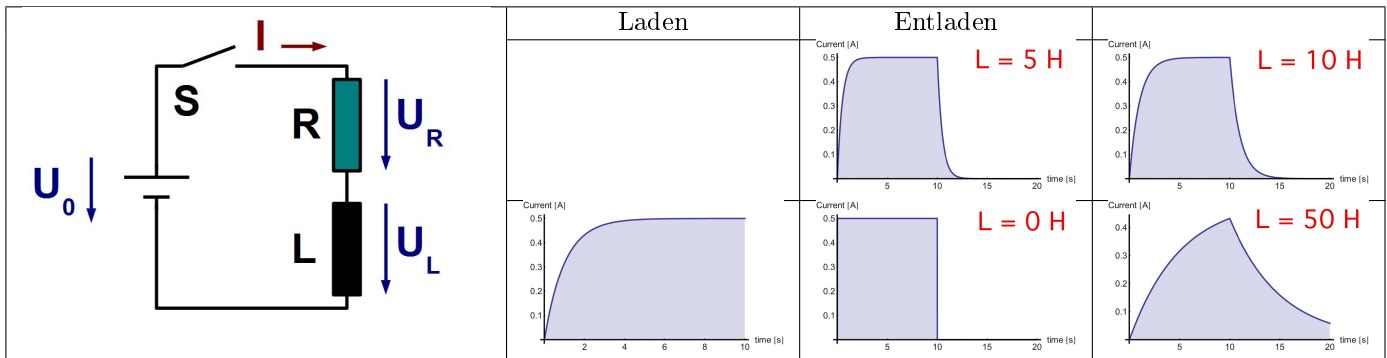
LC-Schaltung



$$U_C = \frac{Q}{C} \quad I = \frac{dQ}{dt} \quad Q(0) = CU_0$$

$$U_L = L \frac{dI}{dt} \quad \frac{dI}{dt} = \frac{Q}{LC} \quad I(0) = 0$$

LR-Schaltung



Laden/Entladen:

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{U_0}{L}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{L}(U_0 - RI(t))$$

$$\frac{dI(0)}{dt} = \frac{U_0}{L} \text{ (Laden)}$$

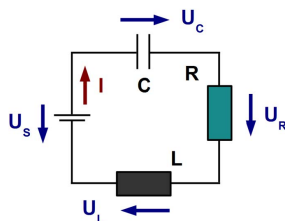
$$I(\infty) = \frac{U_0}{R} \text{ (Laden)}$$

Induktive Zeitkonstante

$$\tau_L = \frac{L}{R}$$

LRC-Schaltung

Wechselspannung



$$U_S(t) = U_S \cos(\omega t) \text{ (Wechselspannungsquelle)}$$

$$U_S(t) - U_R(t) - U_C(t) - U_L(t) = 0$$

$$U_S \cos(\omega t) - RI(t) - \frac{Q(t)}{C} - L \frac{dI(t)}{dt} = 0$$

$$U_S \cos(\omega t) - R \frac{dQ(t)}{dt} - \frac{Q(t)}{C} - L \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} = 0$$

für eine Komplexe Lösung können wir: $Q(t) = Q_0 e^{i\omega t} = Q_0 e^{i(\omega t + \delta)}$ setzen.

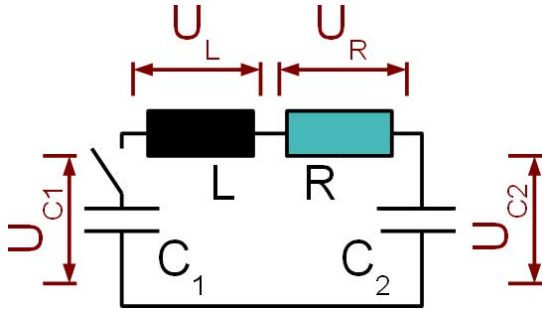
Für die Amplitude der Ladung im Kondensator gilt:

$$Q_0 = \frac{U_0}{\sqrt{L^2(\frac{1}{C^2L} - \omega^2)^2 + R\omega^2}}$$

Kritische Komposition:

$$R = 0, \omega = \frac{1}{\sqrt{CL}}$$

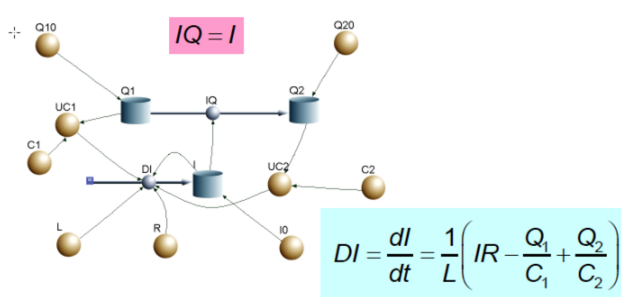
Schwingkreis



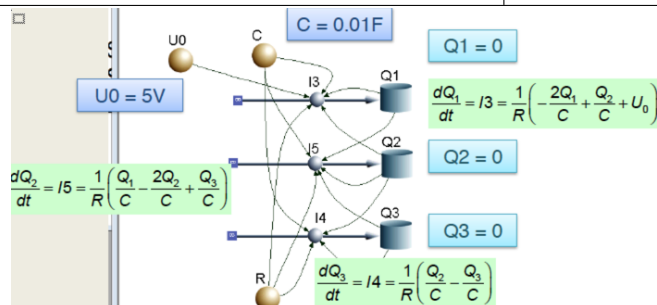
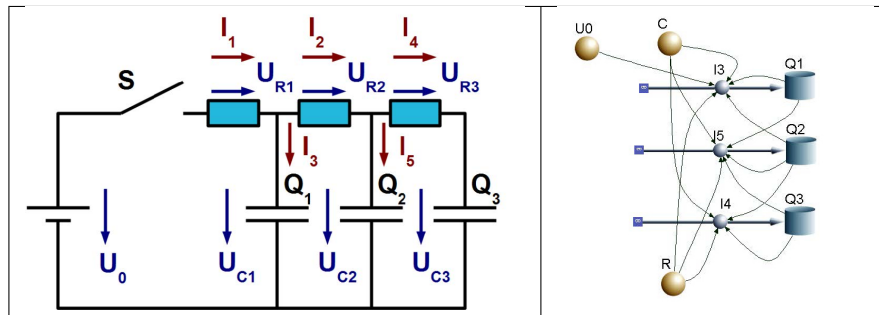
$$U_{C1} - U_L - U_R - U_{C2} = 0$$

$$\frac{Q_1}{C_1} - L \frac{dI}{dt} - RI - \frac{Q_2}{C_2} = 0$$

$$\frac{dQ_1}{dt} = -I, \frac{dQ_2}{dt} = I$$



RC-Schaltung



Magnetismus

Gesamtkraft auf eine Ladung:

$$\vec{F}_{elmag} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Lorentzkraft

$$\vec{F}_L = Q\vec{v} \times \vec{B} \text{ (Kreuzprodukt)}$$

\vec{v} = Geschwindigkeit

\vec{B} = Magnetfeld

Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Zyklotronradius

$$|\vec{F}_{Zentrifugal}| = |\vec{F}_{Lorentz}|$$

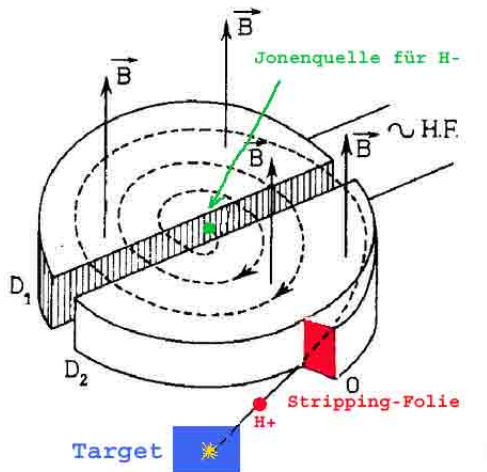
$$\frac{mv^2}{r} = qvB$$

$$r = \frac{mv}{qB}$$

Zentrifugalkraft:

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} -r\omega^2 \cos(\omega t) \\ -r\omega^2 \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

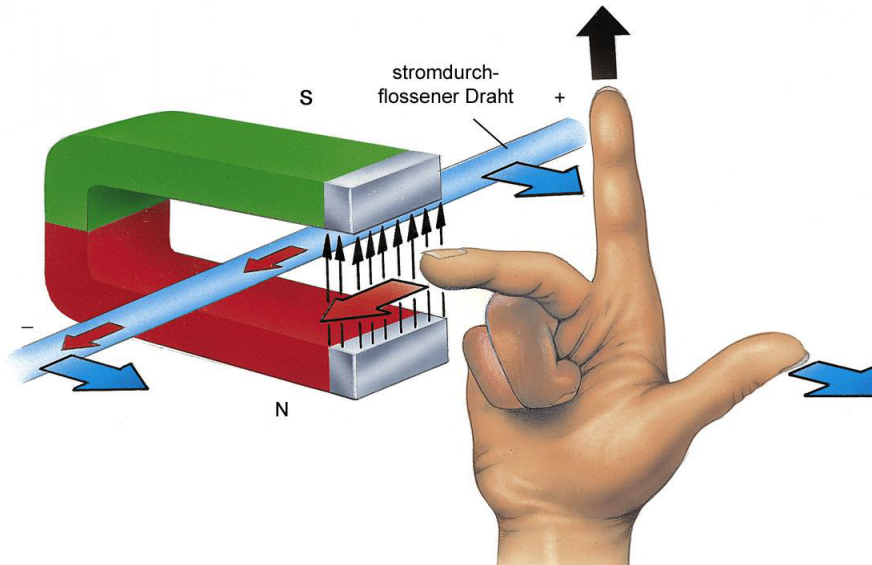
$$\Rightarrow |\vec{a}(t)| = r\omega^2 = \frac{|\vec{v}(t)|}{r} = \frac{v^2}{r}$$



Motoren und Generatoren

Kraft auf Ströme

- Ströme "bestehen" aus fließenden Elektronen
- Die "technische Stromrichtung" ist der Flussrichtung der negativ geladenen Elektronen entgegengesetzt.
- Steht ein stromdurchflossener Draht senkrecht zu einem Magnetfeld wirkt eine Kraft auf den Draht.



Generatoren

Die Drehung einer Schleife im Magnetfeld führt zu einem Strom wechselnder Richtung, Wechselstrom. Bei einer gleichförmig drehenden Schlaufe im Magnetfeld entsteht eine Spannung der Form:

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t + \phi_0)$$

Spulen

Permeabilität

Magnetische Felder in Spulen können mithilfe eines Eisenkerns verstärkt werden. Für eine Spule mit N Windungen, einem Strom I und Länge L gilt:

$$B = \mu_r \mu_0 \frac{N}{L} I$$

μ_r = Permeabilitätszahl der Spulenfüllung

Induktionsgesetze

Flusses eines Feldes durch eine Fläche

Die Fläche A steht in einem Winkel θ zur einer senkrechten Fläche A_{\perp} zum Fluss. Der Fluss durch A ist gegeben durch

$$\phi = A \cdot B \cdot \cos(\theta)$$



Der Vektor \vec{A} repräsentiert die Fläche A.

Der Vektor \vec{A} wird so gewählt dass:

- Der Vektor \vec{A} steht senkrecht auf der Fläche A.
- Die Länge von \vec{A} entspricht dem Flächeninhalt von A.

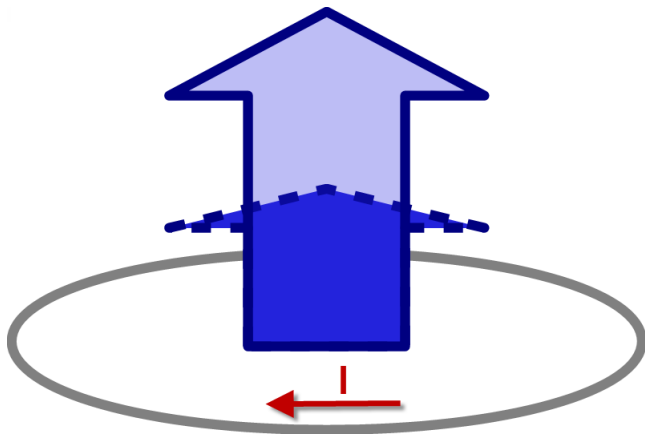
Dann gilt:

$$\phi = \vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos(\theta)$$

Faraday'sches Induktionsgesetz

Induktion

$$U_{ind} = -\frac{d}{dt}\phi = -\frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = -\left(\frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt}\right)$$



Durch ein Magnetfeld induzierte Ströme erzeugen immer ein Magnetfeld in die entgegengesetzte Richtung.

Gleichförmig drehende Schleife

$$\phi(t) = \vec{A}(t) \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow U_{ind}(t) = -\frac{d}{dt} \cdot |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos(\omega t) = A \cdot B \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)$$

A = Fläche der Schleife

B = Stärke des Magnetfeldes \vec{B}

Es entsteht eine Wechselspannung U_{ind} mit Amplitude U_0 und Frequenz ν :

$$U_0 = \omega \cdot |\vec{A}| \cdot |\vec{B}|$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\Rightarrow U_{ind}(t) = U_0 \cdot \sin(2\pi\nu t)$$

Frequenz

Gibt an wie oft sich eine periodische Funktion pro Sekunde wiederholt.
Sie hat zur Periode folgende Beziehung:

$$T = \frac{1}{\nu}$$

Kreisfrequenz

Gibt die Winkelgeschwindigkeit einer Sinus- oder Cosinusfunktion an.
Sie hat zu Periode folgende Beziehung:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Wechselstrom (AC)

Spannung: $U(t) = U_0 \sin(2\pi ft + \phi_0)$

Stromstärke: $I(t) = \frac{U_0}{L\omega} \cos(\omega t)$

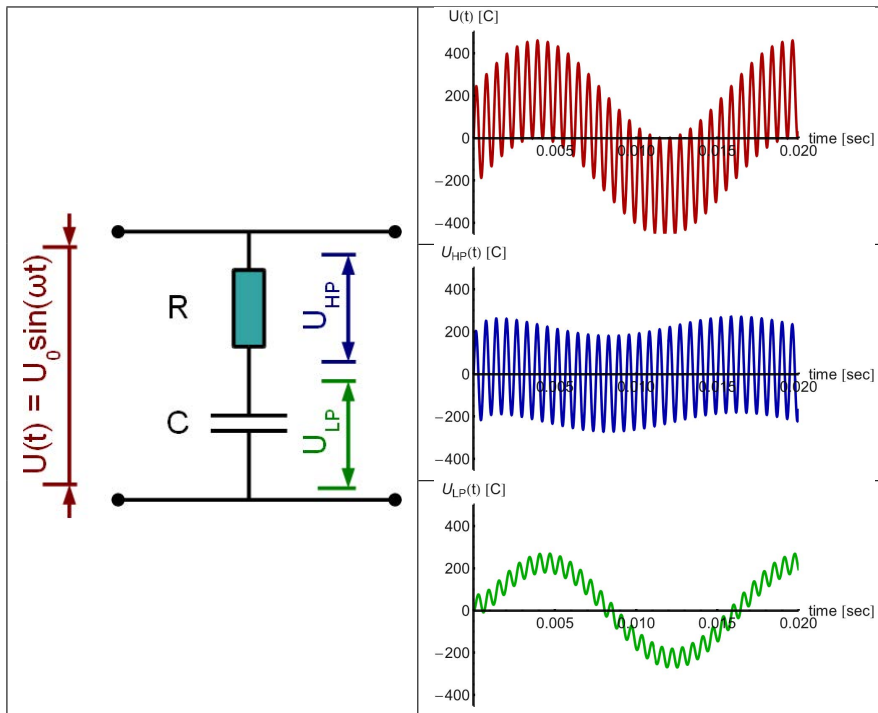
Impedanz (Z) für Spule: $|Z| = \omega L$

Nennspannung

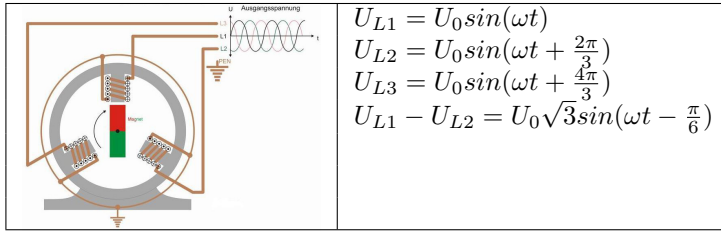
In einem Netz mit 230V-AC spricht man bei 230V von der Nennspannung. Die Maximalspannung ist höher (da die Nennspannung im Durchschnitt erreicht werden muss).

$$U_{Nenn} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U(t)^2 dt} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

In RC Schaltkreisen



Drehstromgenerator

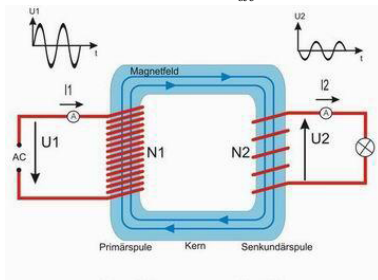


Transformatoren

Faraday's Gesetz

Schleife: $U_{ind}(t) = -\frac{d}{dt} | \vec{A} || \vec{B} | \cos(\omega t) = AB\omega \sin(\omega t)$ wobei A = Fläche der Schleife und B = Stärke des Magnetfeldes

Spule: $U_{ind}(t) = -N \frac{d}{dt} | \vec{A} || \vec{B} | \cos(\omega t) = NAB\omega \sin(\omega t)$ wobei N = Anzahl Windungen



$$\begin{aligned}
 \frac{U_1}{U_2} &= \frac{N_1}{N_2} \\
 U_1(t) &= -N_1 \frac{d\Phi}{dt} \\
 \frac{N_1}{N_2} &= \frac{I_2}{I_1}
 \end{aligned}$$

Schwingungen

Allgemein

- Je grösser die Federkonstante k, umso kleiner die Auslenkung bei gleicher Kraft (resp. umso steifer die Feder)
- Je steifer die Feder, desto grösser/höher ist die Schwingfrequenz ω .
- Je grösser die Masse m, umso kleiner/tiefer ist die Schwingfrequenz ω .

Formelherleitung:

- $m\ddot{x} = -k(x - x_{Ruhe}) - \gamma \cdot \dot{x} \iff \ddot{x} + \frac{\gamma}{m} \cdot \dot{x} + \frac{k}{m}(x - x_{Ruhe}) = 0$
- $m\ddot{x} = \sum F_i = F_G + F_k + F_r \implies \ddot{x} = acc = \frac{1}{m} \cdot (F_G + F_k + F_r)$

Ungedämpfte Schwingung

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad k = \text{Federkonstante}, \quad m = \text{Masse}$$

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + B), \quad A = \text{Amplitude}, \quad B = \text{Phase}$$

Schwach gedämpfte Schwingung

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \delta^2}, \quad \delta = \frac{\gamma}{2m} \quad k = \text{Federkonstante}, \quad m = \text{Masse}, \quad \delta = \text{Dämpfung}$$

$$\frac{k}{m} - \delta^2 > 0$$

$$x(t) = A e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega t + B), \quad A = \text{Amplitude}, \quad B = \text{Phase}$$

Starke (überkritisch) gedämpfte Schwingung

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \delta^2}, \delta = \frac{\gamma}{2m} \quad k = \text{Federkonstante, } m = \text{Masse, } \delta = \text{Dämpfung}$$

$$\frac{k}{m} - \delta^2 < 0$$

$$x(t) = Ae^{-(\delta + \sqrt{(\frac{\gamma}{2m})^2 - \frac{k}{m}})t} + Be^{-(\delta - \sqrt{(\frac{\gamma}{2m})^2 - \frac{k}{m}})t}$$