Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung

Ortsfunktion

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeit

Die Geschwindigkeit ist die zeitliche Ableitung der Ortsfunktion:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{dz(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeit ist ein Vektor, die Schnelligkeit ihr Betrag.

Beschleunigung

Die Beschleunigung ist die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeits resp. die zweite zeitliche Ableitung der Ortsfunktion.

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x(t)}{dt} \\ \frac{dv_y(t)}{dt} \\ \frac{dv_z(t)}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

Kraft

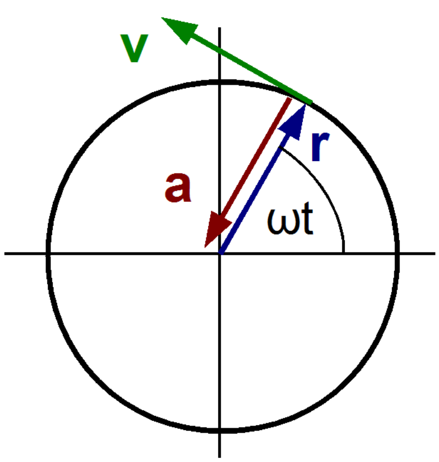
Die Kraft ist das Produkt von Masse und Beschleunigung:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Schiefer Wurf

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \\ v_{z0} - gt \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} r_{x0} + v_{x0} \\ r_{y0} + v_{y0} \\ r_{z0} + v_{z0} - g\frac{t^2}{2} \end{pmatrix}$$

Kreisbewegung



ω = Winkel pro Sekunde

$T = \frac{2\Pi}{\omega}$ =Periode, Zeit für einen Umlauf ($360° = 2\Pi$)

Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r\,cos(\omega t) \\ r\,sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$|\vec{r}(t)| = r$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r\,cos(\omega(t+T)) \\ r\,sin(\omega(t+T)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,cos(\omega t + 2\Pi) \\ r\,sin(\omega t + 2\Pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,cos(\omega t) \\ r\,sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -r\omega sin(\omega t) \\ r\omega cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

$|\vec{v}(t)| = r\omega$

Beschleunigung

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -r\omega^2 cos(\omega t) \\ -r\omega^2 sind(\omega t) \end{pmatrix}$$

$|\vec{a}(t)| = r\omega^2$

Arbeit, Energie, Potential

Beispiele

Freier Fall

Auf der Erde

Gegeben: $m = 10kg$, $h = 20m$, EE: $E_{tot} = E_{kin} + E_{pot}$

- $E_{kin1} + E_{pot1} = E_{kin2} + E_{pot2} \Longrightarrow 0 + mgh = \frac{mv^2}{2} + 2$
- $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.81 m/s^2 \cdot 20m} = 19.8 m/s$

Auf dem Mond

Gegeben: $\gamma = 6.672 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$, $M = 7.349 \cdot 10^{22} kg$, $r_m = 1.738 \cdot 10^{16} m$, $F_{G,M} = m \cdot g_M = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r_M^2}$

- $F_{G,M} = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r_M^2} = 6.672 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2} \cdot \frac{1.738 \cdot 10^{16} \cdot 10kg}{1.738^2 \cdot 10^{12} \cdot m^2} = 1.62 m/s^2$
- $v_M = \sqrt{2 g_M h} = \sqrt{2 \cdot 1.62 m/s^2 \cdot 20m} = 8.05 m/s \simeq 8.1 m/s$

Energieerhaltung

$E_{tot} = E_{kin} + E_{pot} = const.$

$E_{kin\ Anfang} + E_{pot\ a} = E_{kin\ Ende} + E_{pot\ E}$

$\Delta W = E_{pot\ A} - E_{pot\ E}$

$E_{kin\ A} + \Delta W = E_{kin\ E}$

$\frac{m}{2} \cdot v_0^2 + \Delta W = \frac{m}{2} \cdot v_2^2 \mid \cdot \frac{2}{m}$

$v_0^2 + \frac{2\Delta W}{m} = v_2^2$

$v_2 = \sqrt{v_0^2 + \frac{2\Delta W}{m}} = \sqrt{\frac{m v_0^2 2\Delta W}{m}}$

Elementarladung

$1e = 1.6 \cdot 10^{-19} C$
$1C = 1As \Longrightarrow I = \frac{dQ}{dt} = \frac{C}{s} = A$
$E_0 = 8.88542 \cdot 10^{-12} As/Vm$

Elektrisches Feld

$E(r) = \frac{\varrho}{2\Pi E_0} \cdot \frac{1}{r}$
$\gamma(r) = -\int Edr = -\frac{\varrho}{2\Pi E_0} \cdot \int \frac{1}{r} dr = -\frac{\varrho}{2\Pi E_0} \cdot ln(r) + C$

Kraft auf eine Punktladung

$\vec{F}_c = q_0 \cdot \vec{E} \Longrightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}_c}{q_0}$
$dE_{pot} = -\vec{F} d\vec{l}$
$dE_{pot} = -q_0 \cdot \vec{E} \cdot d\vec{l}$
$\int d\gamma = \frac{dE_{pot}}{q_0} = -\int \vec{E} d\vec{l}$
$\Delta\gamma = -\int_a^b \vec{E} d\vec{l} = \gamma(a) - \gamma(b)$
$\gamma(r) = \frac{1}{4\Pi E_0} \cdot (-\frac{q}{r} + \frac{q}{|\vec{r} - \vec{l}|})$

Potential eines Punktuellen-Ladungssystem

$\gamma(r) = \frac{1}{4\Pi E_0} \cdot \sum_i \cdot \frac{q_i}{r_i}$
$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\Pi E_0} \cdot (-\frac{q}{r^3} \cdot \vec{r} + \frac{q}{|\vec{r} - \vec{l}|^3} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{l}))$

Arbeit

Gegeben sind 2 positiv geladene Teilchen q,Q und Abstand r_1, r_2.

$\Delta W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_c d\vec{r} = \frac{q \cdot Q}{4\Pi E_0} \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{q \cdot Q}{4\Pi E_0} \cdot (\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$