

# Potenzen

## Gesetze

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$a^n : a^m = a^{n-m}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$	$-a^n = -(a^n)$	$(-a)^n = (-1)^n \cdot a^n$

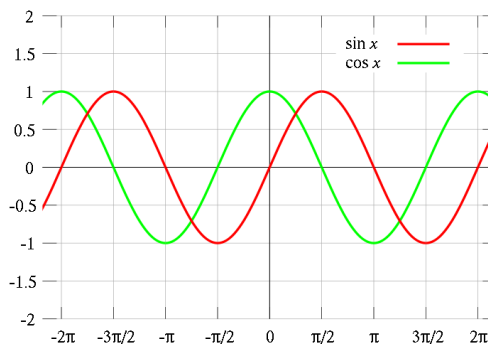
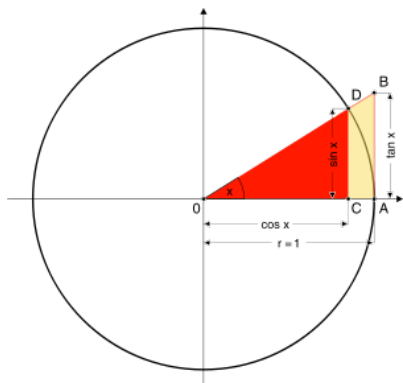
# Additionstheoreme

## Sätze

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

# Trigonometrische Funktionen

## Definition

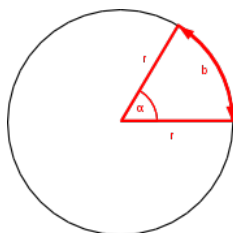


$\sin(x) = \cos(x) \cdot \tan(x)$	$\cos(x) = \frac{\sin(x)}{\tan(x)}$	$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
-----------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------

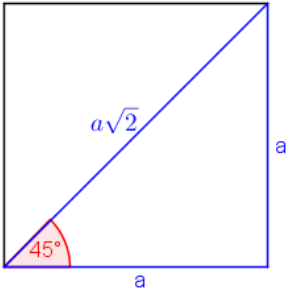
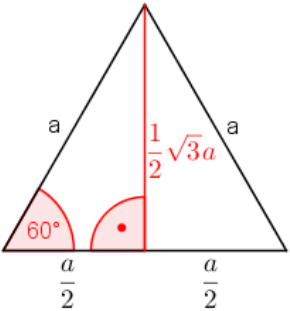
## Bogenmass eines Winkels

Länge des zugehörigen Bogens im Einheitskreis.

$$\alpha = 90^\circ \leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$



## Dreiecke

Gleichschenkelig & Rechtwinklig	Gleichseitig
	

## Anwendung in der Schwingungslehre

A = Amplitude    w = Kreisfrequenz     $\varphi$  = Phase der Schwingung

Periode  $p = \frac{\text{alte Periode}}{w}$ , also bei sin/cos z.B.:  $\frac{2\pi}{w}$

$$y = A \cdot \sin[w \cdot t + \varphi] = A \cdot \sin[w \cdot (t + \frac{\varphi}{w})]$$

Allgemein:

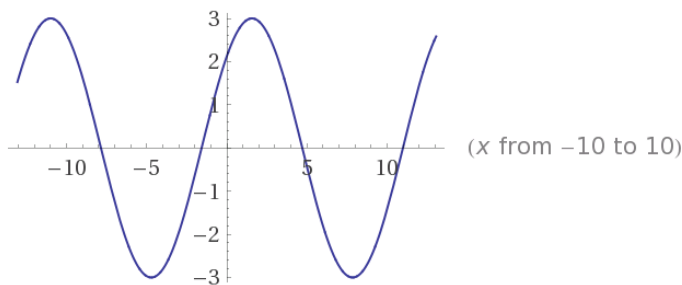
1. Streckung in y-Richtung mit Faktor a  $\Rightarrow$  Wertebereich [-a,a]
2. Streckung in x-Richtung mit Faktor  $\frac{1}{b} \Rightarrow$  neue Periode  $\frac{\text{alte Periode}}{b}$ , also bei sin/cos z.B.:  $\frac{2\pi}{b}$
3. Verschiebung in x-Richtung um  $-\frac{\varphi}{b}$

$$y = a \cdot f[b \cdot (x - c)] + d$$

Beispiel:

$$y = 3 \cdot \sin[\frac{1}{2} \cdot x + \frac{\pi}{4}] = 3 \cdot \sin[\frac{1}{2} \cdot (x + \frac{\pi}{2})]$$

Amplitude = 3    Kreisfrequenz =  $\frac{1}{2}$      $\Rightarrow$  Neue Periode =  $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$     Verschiebung in x-Richtung =  $-\frac{\pi}{2}$



Computed by Wolfram|Alpha

## Exponential- und Logarithmusfunktion

Jede Exponentielle Funktion lässt sich mit der Basis e schreiben:

$$y = b^x = (e^{\ln(b)})^x$$

# Wachstums- und Zerfallfunktion

Allgemein:

$a$  = Wert für  $t^0$ , "Startwert"     $b$  = Wachstumsfaktor pro Zeiteinheit  
 $t$  = Zeiteinheit     $\Delta t$  = Zeitdifferenz z.B.  $t^2 - t^1$

$$y = a \cdot b^t$$

**Wachstumsfunktion:  $b > 1$ ,    Zerfallsfunktion:  $0 < b < 1$**

Umformungen:

$$b^{\Delta t} = \frac{f(t_2)}{f(t_1)} \Rightarrow b = \sqrt[\Delta t]{\frac{f(t_2)}{f(t_1)}}$$

Halbwertszeit:

$$b^{\Delta t} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta t \cdot \ln(b) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \Delta t = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(b)}$$

Verdoppelungszeit:

$$b^{\Delta t} = 2 \Rightarrow \Delta t \cdot \ln(b) = \ln(2) \Rightarrow \Delta t = \frac{\ln(2)}{\ln(b)}$$

## Logarithmusfunktion

Rechenregeln:

$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$
$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$
$\log_a(u^k) = k \cdot \log_a(u)$
$\log_a(\sqrt[n]{u}) = \frac{1}{n} \cdot \log_a(u)$

Allgemein:

$$y = a^x \Rightarrow \ln(y) = x \cdot \ln(a) \Rightarrow x = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$$

$$y = a^x \Rightarrow \log_a(y) = x \cdot \log_a(a) \Rightarrow x = \log_a(y)$$

Umkehrfunktion:

$$y = \log_a(x)$$

Basiswechsel:

$$\log_a(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Umformungsbeispiele:

$\log_{10}(x) = -4.0404$	$\Rightarrow$	$x = 10^{-4.0404} = \frac{1}{10^{4.0404}}$
$\ln(x) = -9.0907$	$\Rightarrow$	$x = e^{-9.0907} = \frac{1}{e^{9.0907}}$
$\log_3(x) = 5$	$\Rightarrow$	$x = 3^5 = 243$