

Lineare Algebra

Vektorgeometrie

Berechnung des Skalarprodukts

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Berechnung des Zwischenwinkels zweier Vektoren

$$\cos \angle(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} \Rightarrow \angle(\vec{v}, \vec{w}) = \arccos \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$$

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos \angle(\vec{v}, \vec{w})$$

Aussage des Skalarprodukts 0

$$\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \bullet \vec{w} = 0$$

Nullvektoren stehen senkrecht zu allen Vektoren

Berechnung der Länge eines Vektors

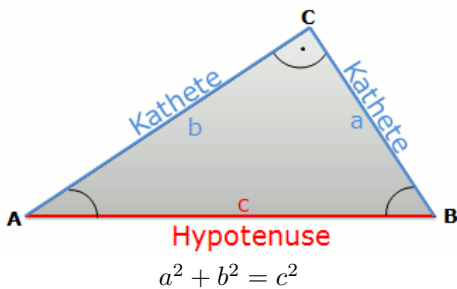
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}}$$

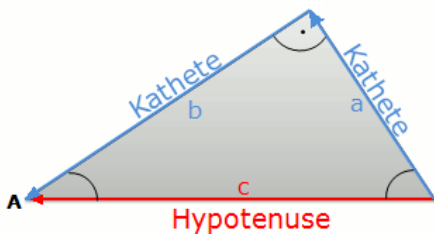
$$\vec{a} \bullet \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2$$

Satz des Pythagoras

Im Dreieck



Mit Vektoren



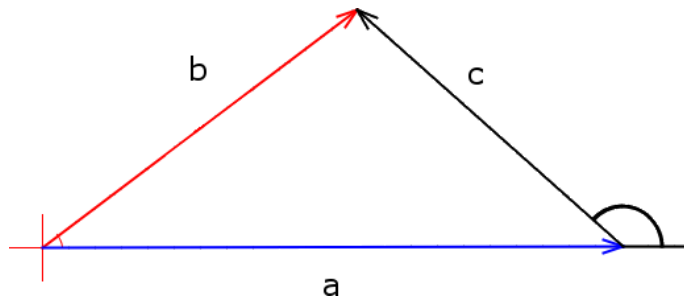
$$\vec{b} = \vec{c} - \vec{a}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + (\vec{c} - \vec{a})$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c} \bullet \vec{c}} = \sqrt{(\vec{a} + (\vec{c} - \vec{a})) \bullet (\vec{a} + (\vec{c} - \vec{a}))} = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b}) \bullet (\vec{a} + \vec{b})}$$

$$= \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a} + \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{c} \bullet \vec{b} + \vec{b} \bullet \vec{b}} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + 0 + 0 + |\vec{b}|^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2}$$

Cosinussatz

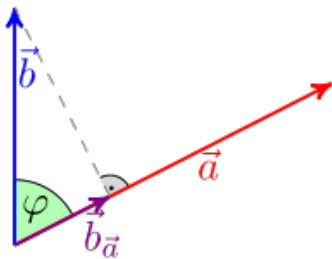


$$\begin{aligned}\vec{c} &= \vec{b} - \vec{a} \\ |\vec{b}|^2 &= \vec{b} \bullet \vec{b} = (\vec{a} + \vec{c}) \bullet (\vec{a} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{a} + \vec{a} \bullet \vec{c} + \vec{c} \bullet \vec{a} + \vec{c} \bullet \vec{c} \\ &= |\vec{a}|^2 + 2 \cos \angle(\vec{a}, \vec{c}) \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| + |\vec{c}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 - 2 \cos(180^\circ - \angle) \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| + |\vec{c}|^2\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta) = b^2$$

Orthogonalprojektion



1. Einheitsvektor in \vec{a} -Richtung $= \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \vec{a}_1 (= \vec{b}_a)$
2. $\vec{b} \bullet \vec{a}_1 = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}_1| \cdot \cos \angle(\vec{b}, \vec{a}_1) = |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{b}, \vec{a}_1)$
3. $|\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{b}, \vec{a}_1) \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (\vec{b} \bullet \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}) \bullet \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (\vec{b} \bullet \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2}) \bullet \vec{a}$

Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Parameterdarstellung

Gerade = Aufpunkt + Faktor * Vektor

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ebene = Aufpunkt + 1.Faktor * 1.Vektor + 2.Faktor * 2. Vektor

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Koordinatengleichung der Ebene

Parameterdarstellung:

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

- Kreuzprodukt der Vektoren berechnen

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -10 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- Gleichung aufstellen

$$3x + 5y + 4z = 0$$

- Aufpunkt einsetzen

$$3 - 5 + 8 = 6$$

$$\Rightarrow 3x + 5y + 4z = 6$$

$$\Rightarrow 3x + 5y + 4z - 6 = 0$$

Matrizen

Matrix-Vektor Multiplikation

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa_1 + yb_1 + zc_1 \\ xa_2 + yb_2 + zc_2 \\ xa_3 + yb_3 + zc_3 \end{pmatrix}$$

Matrix-Matrix Multiplikation

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q & r \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (aq + bs) & (ar + bt) \\ (cq + ds) & (cr + dt) \end{pmatrix}$$

Interpretation

Interpretation als lineare Operation auf die Spalten von A:

$$A \cdot B = \left(\begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -5 \\ 3 \end{Bmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \left(\begin{Bmatrix} 4 \\ -2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -15 \\ 9 \end{Bmatrix} \right)$$

Interpretation als lineare Operation auf die Zeilen von A:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \{2 & -5\} \\ \{-1 & 3\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{4 & -10\} \\ \{-3 & 9\} \end{pmatrix}$$

Das Inverse einer Matrix

Für das Inverse A^{-1} einer Matrix A gilt $A \cdot A^{-1} = I$.

Eine quadratische Matrix lässt sich genau dann invertieren, wenn Ihre Spalten linear unabhängig sind:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ist eine Matrix grösser (als quadr.) so lässt sich das Inverse mit dem Gausschen Eliminationsverfahren ermittelt.

Ermitteln einer unbekannten Matrix

Man wisse von der Matrix A folgendes:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix}, A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Dies lässt sich nun interpretieren als:

$$A \cdot v_1 = w_1$$

$$A \cdot v_2 = w_2$$

Und lässt sich zusammenfassen als:

$$A(v_1|v_2) = (w_1|w_2) \Rightarrow A \cdot v = w$$

Durch umformung erhält man:

$$A = w \cdot v^{-1}$$

Beispiele

Schnittgerade zweier Ebenen

Gegeben:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Normalen der Ebenen bestimmen (Kreuzprodukt)

$$n_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$n_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Gleichungen für Normalen aufstellen und Aufpunkte einsetzen

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow -y + z = 0 \Rightarrow -1 + 2 = 1 \Rightarrow -x + z = 1$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow 8 = 8 \Rightarrow 2x = 8$$

- Normalen zu den Normalen bestimmen

$$r = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 0x + 2x + 2z = 0$$

- Aufpunkt bestimmen

Aufpunkt so wählen, dass er beide Gleichungen erfüllt

$$0x - y - z = 1$$

$$2x + 0y + 0z = 8$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Parameter Darstellung

$$r = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Normalstehende Ebene

Gegeben

$$E: x + 2y + 2z - 4 = 0$$

$$A(-1/-2/0), B(1/1/2)$$

Gesucht: Ebene die Normla zur gegeben Ebene liegt, und durch die Punkt A und B geht.

- u, v berechnen

$$u = n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v = B - A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A + s * u + t * v =$$

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Berechnen der Koordinatengleichung

$$n_2 = u \times v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

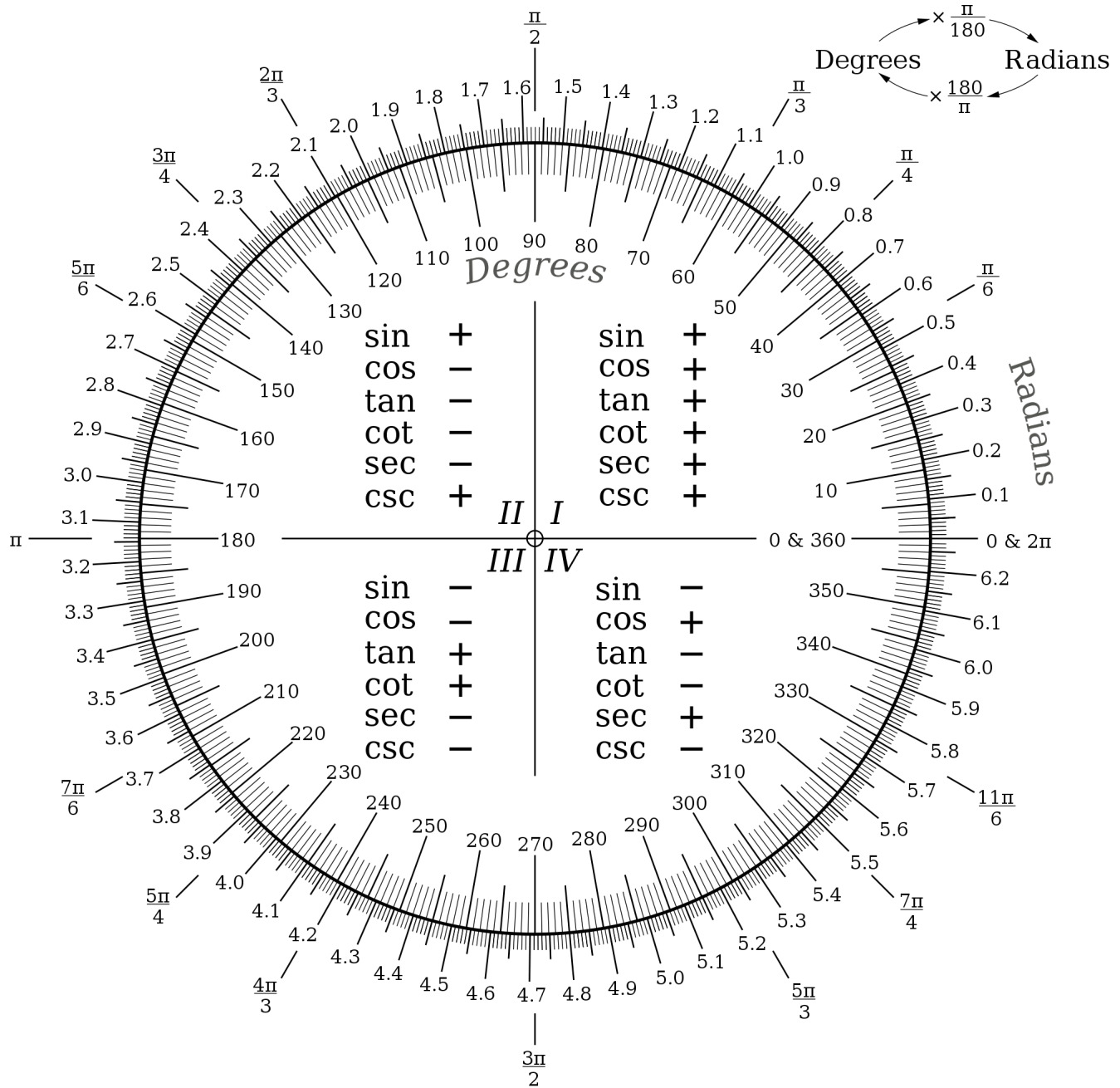
$$-2x + 2y - z = 0$$

- Aufpunkt einsetzen (A ist der Aufpunkt)

$$-2 * (-1) + 2 * (-2) - 0 = -2$$

$$\Rightarrow -2x + 2y - z + 2 = 0$$

Hilfsmittel



Cos-Table

Grad	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Wert	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1