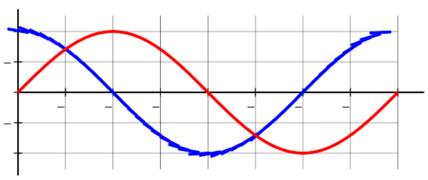
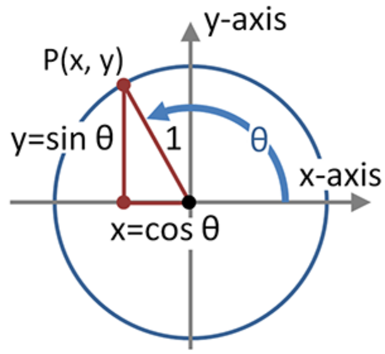
Funktionen

Funktionen (Grundlagen)

Trigonometrische Funktionen





Polynome

Ein Polynom n-ter Ordnung: $p(x) = a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_{0,} x \in R, a_n \neq 0$

Eigenschaften:

- Differenzen und Summen von Polynomen sind wieder Polynome.
- Produkte von Polynomen sind wieder Polynome. Bsp: $p(2) \times p(3) = p(5)$
- Die Division von Polynomen ergiebt wieder ein Polynom und ev. einen Rest.

Beispiel für Polynomdivision:

$2x^3$	$+5x^2$	$+1x$	$\div(x-5)$	$=$	$2x^2 - 5x$ Rest $-24x$
$-2x^3$	$-10x^2$		$2x^2 \times (x-5)$	$=$	$2x^3 - 10x^2$
0	$-5x^2$	$+1x$	$-5x \times (x-5)$	$=$	$-5x^2 + 25x$
	$-(-5x^2)$	$-25x$			
	0	$-24x$			Rest: $-24x$

Hornerschema

Auswertung einer Funktion an einer bestimmten Stelle.

Sei die Funktion $F(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = (x-2)(x^2 - x - 12)$

Diese an $x = 2$ ausgewertet:

x=2	x^3	$-3x^2$	$-10x$	24
	1	-3	-10	24
		2	-2	-24
	1	-1	-12	0
Rest:	x^2	$-x$	-12	

Hier wurde die Nullstelle $x = 2$ abgespalten.

Begriffe der Funktionen

Ganz-Rationale Funktion

Eine Ganz-Rationale Funktion lässt sich so schreiben: $f(x) = a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Gebrochen-Rationale Funktion

Eine Gebrochen-Rationale Funktion: $f(x) = \frac{a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} = \frac{p(m)}{p(n)}$, wobei der Grad der Polynome nicht gleich sein muss.

Definitionslücken

Sie sind Stellen, an denen die Funktion nicht definiert ist. Z.B.: Nenner der gleich 0 ist. Man unterscheidet 2 Arten von Definitionslücken:

- Polstellen: Nach dem vollständigen Kürzen, besteht immernoch die Nullstelle des Nenners.
- hebbare Definitionslücken: Nach vollständigem Kürzen verschwindet die Nullstelle des Nenners.
- Stopfen der Def. Lücke: Wert der hebbaren Lücke in den gekürzten Bruch einsetzen.

Wichtig: Kommt eine Polstelle mehrmals vor: $(x-a)^n$, so ist dies eine n-fache Polstelle. Ist die Vielfachheit gerade, so findet kein Vorzeichenwechsel statt.

Nullstellen

Man kann die Nullstellen bestimmen, indem man:

- bei einer “Ganz-Rationalen Funktion” diese gleich NULL setzt.
- bei einer “Gebrochen-Rationalen Funktion” den Zähler gleich NULL setzt.

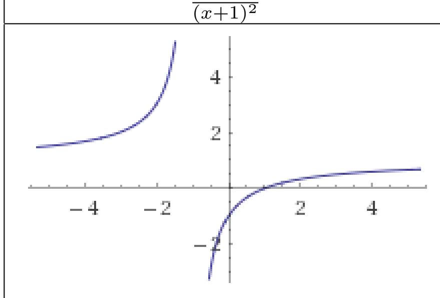
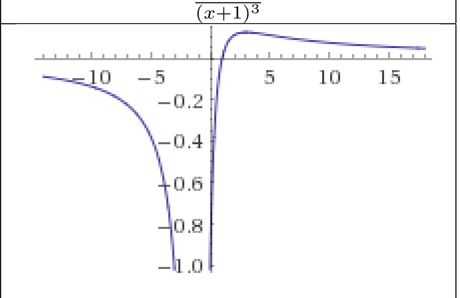
Asymptoten

Sind Geraden, denen sich eine Kurve beliebig nahe annähert. Wir unterscheiden 2 Arten:

- bei Polstellen: Die Kurve einer gebrochen-rationalen Funktion schmiegt sich der Gerade bei x=Polstelle an. Es bildet sich eine senkrechte Asymptote.
- für grosse x: $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ im Falle:
  - $grad(g) < grad(h)$: x-Achse als wagrechte Asymptote
  - $grad(g) = grad(h)$: Gerade mit der Gleichung: $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$
  - $grad(g) = 1 + grad(h)$: schiefe Asymptote, durch Polynomdivision

Man beachte beim Zeichnen die Vielfachheit der Polstelle:

- Gerade Anzahl: Vorzeichenwechsel
- Ungerade Anzahl: Kein Vorzeichenwechsel

Gerade	Ungerade
$\frac{x^2-1}{(x+1)^2}$	$\frac{x^2-1}{(x+1)^3}$
	

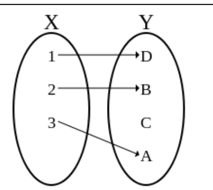
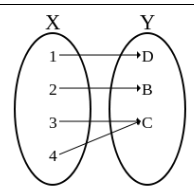
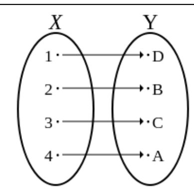
Beispiele:

Funktion	Definitionslücke	Nullstelle
$f(x) = \frac{(x+2)^2}{(x+4)^3 x^2}$	P:-4(x3), 0(x2), H: keine	N:-2(x2)

Betrachten wir die Funktion: $f(x) = \frac{2x^2+x^2+x}{1-x^2}$
Nullstelle: $x = 0$
Definitionslücken: x =1 (Polstelle, 1fach), $x = -1$ (Polstelle, 1fach)
Asymptoten: $x = 1$, $x = -1$, $x = -2x - 1$ (durch Poly.division)

Umkehrfunktionen

Begriffe

injektive Funktion	surjektive Funktion	bijektive funktion
		

Monotonie

Die Funktion $f(x)$ ist im Intervall $[a, b]$ injektiv, falls sie:

- streng monoton wachsend: auf $x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2 : f(x_1) < f(x_2)$ ist oder
- streng monoton fallend: auf $x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2 : f(x_1) > f(x_2)$ ist.

Bestimmung der Umkehrung

- Definitionsbereich so festlegen, dass f auf D injektiv ist
- Funktionsgleichung nach x auflösen: $x = f^{-1}(y)$
- Variabeln x und y vertauschen: $y = f^{-1}(x)$

Grundsätzlich kann man sagen, dass f^{-1} die Spiegelung von f an der Geraden $x = y$ ist. Dabei werden auch der Definitionsbereich und Wertebereich getauscht.