Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung

Ortsfunktion

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeit

Die Geschwindigkeit ist die zeitliche Ableitung der Ortsfunktion:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{dz(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeit ist ein Vektor, die Schnelligkeit ihr Betrag.

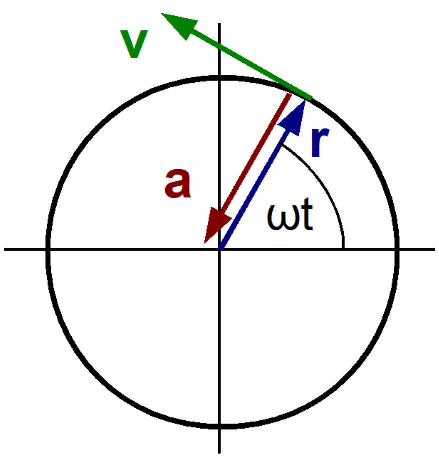
Beschleunigung

Die Beschleunigung ist die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeits resp. die zweite zeitliche Ableitung der Ortsfunktion.

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x(t)}{dt} \\ \frac{dv_y(t)}{dt} \\ \frac{dv_z(t)}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

Kreisbewegung



ω = Winkel pro Sekunde

$T = \frac{2\Pi}{\omega}$ =Periode, Zeit für einen Umlauf ($360° = 2\Pi$)

Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r\,cos(\omega t) \\ r\,sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$|\vec{r}(t)| = r$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r\,cos(\omega(t+T)) \\ r\,sin(\omega(t+T)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,cos(\omega t + 2\Pi) \\ r\,sin(\omega t + 2\Pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,cos(\omega t) \\ r\,sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -r\omega sin(\omega t) \\ r\omega cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$|\vec{v}(t)| = r\omega$$

Beschleunigung

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -r\omega^2 cos(\omega t) \\ -r\omega^2 sind(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}(t)| = r\omega^2$$

Beispiele

Zentrifuge

Eine Zentrifuge drehe sich mit einer Winkelgeschwindigkeit von 20 s-1. Die Zentrifugengläser (Proben) befinden sich in einem Abstand von 10 cm von der Drehachse.

1. Wie gross ist die Bahngeschwindigkeit in m/s und welcher Weg wird in einer Sekunde zurückgelegt?
2. Welche Zentrifugalbeschleunigung wirkt auf die Proben?

Gegeben: $w = 20s^{-1}$, $r = 10cm = 0,1m$

1. $v = r \cdot w = 0.1 \cdot 20s^{-1} = 2m/s$
   $s = 2m$
2. $a_z = r \cdot w^2 = 0.1 * 20^2 s^{-2} = 40m/s^2$

Schaufelrad

Das Schaufelrad einer Turbine (Flugzeugtriebwerk) drehe sich mit 30000 U/min. Die einzelnen Schaufeln haben eine Masse von 50 g und befinden sich im Abstand von 15 cm von der Drehachse entfernt.

- Welche Kraft muss mindestens aufgebracht werden, damit die Schaufeln nicht aus der Turbine fliegen?

Gegeben: $m = 0.05kg$,$r = 0.15m$

- $w = 2\Pi \cdot \frac{u/min}{60s} = 2\Pi\nu = 2\Pi \cdot \frac{3*10^3}{60} = 3.41 \cdot 10^3$
  $F_z = m \cdot w^2 \cdot r = 7.4 \cdot 10^4 N$

Waage im Lift

Eine Person mit einer Masse von 70 kg stehe auf einer Waage, welche sich in einem Lift befinde. Der Lift beschleunige mit $a_L = 1.7m/s^2$.

1. Was zeigt die Waage an beim aufwärts fahren?
2. Was zeit die Waage an beim abwärts fahren?

Gegeben: $m = 70kg$
Formel: $\widetilde{m} = \frac{\widetilde{F}}{g} = \frac{m\widetilde{g}}{g} = \frac{m(g \pm a)}{g}$

1. $m_1 = \frac{m(g+a)}{g} = \frac{70kg \cdot (9.81+1.7)m/s^2}{9.81m/s^2} = 82.1kg$
2. $m_2 = \frac{m(g+a)}{g} = \frac{70kg \cdot (9.8-1.7)m/s^2}{9.81m/s^2} = 57.9kg$

Fahrzeugkollision

Ein Fahrzeuglenker mit einer Masse von 80 kg kollidiere mit seinem Fahrzeug mit einer Mauer. Die Geschwindigkeiten vor der Kollision betrage 56 km/h. Das Fahrzeug komme innerhalb von 0.2 s zum Stehen.

- Welcher maximalen Belastung müsste ein Sicherheitsgurt standhalten?

Gegeben: $m = 80kg$, $v_{max} = 56km/h = 15.5m/s$ (km/h : 3.6 =m/s), $\Delta t = 0.2s$

- $a_{max} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{15.5m/s}{0.2s} = 77.5m/s^2$
  $F = m \cdot a = 77.5m/s^2 \cdot 80kg = 6200N = 6.2kN$

Computertomographie

Bei CT (Computertomogeaphie)-Scannern rotieren Detetktor und Strahlerteil in einem typischen Abstand von 60 cm von der Drehachse um den Patienten.

- Welche Masse darf der Strahlerteil haben, wenn eine Fleihkraft von 4737 N nicht überschritten werden kann und pro Sekunde eine Umdrehung "gescannt" wird.

Gegeben: $r = 0.6m$, $F_z = 4737N = 4737kg \cdot ms^{-2}$
Formel: $F_z = m \cdot \omega^2 \cdot r$

- $m = \frac{F_z}{\omega^2 \cdot r} = \frac{4737kg \cdot ms^{-2}}{4\Pi^2 s^{-2} \cdot 0.6m} \backsimeq 200kg$

Arbeit, Energie, Potential

Beispiele

Freier Fall

Auf der Erde

Gegeben: $m = 10kg$, $h = 20m$, EE: $E_{tot} = E_{kin} + E_{pot}$

- $E_{kin1} + E_{pot1} = E_{kin2} + E_{pot2} \Longrightarrow 0 + mgh = \frac{mv^2}{2} + 2$
- $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.81m/s^2 \cdot 20m} = 19.8m/s$

Auf dem Mond

Gegeben: $\gamma = 6.672 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$, $M = 7.349 \cdot 10^{22} kg$, $r_m = 1.738 \cdot 10^{16} m$, $F_{G,M} = m \cdot g_M = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r_M^2}$

- $F_{G,M} = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r_M^2} = 6.672 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2} \cdot \frac{1.738 \cdot 10^{16} \cdot 10kg}{1.738^2 \cdot 10^{12} \cdot m^2} = 1.62m/s^2$
- $v_M = \sqrt{2 g_M h} = \sqrt{2 \cdot 1.62m/s^2 \cdot 20m} = 8.05m/s \simeq 8.1m/s$

Energieerhaltung

$E_{tot} = E_{kin} + E_{pot} = const.$
$E_{kin\ Anfang} + E_{pot\ a} = E_{kin\ Ende} + E_{pot\ E}$
$\Delta W = E_{pot\ A} - E_{pot\ E}$
$E_{kin\ A} + \Delta W = E_{kin\ E}$
$\frac{m}{2} \cdot v_0^2 + \Delta W = \frac{m}{2} \cdot v_2^2 \mid \cdot \frac{2}{m}$
$v_0^2 + \frac{2\Delta W}{m} = v_2^2$
$v_2 = \sqrt{v_0^2 + \frac{2\Delta W}{m}} = \sqrt{\frac{mv_0^2 2\Delta W}{m}}$

Elementarladung

$1e = 1.6 \cdot 10^{-19}C$
$1C = 1As \Longrightarrow I = \frac{dQ}{dt} = \frac{C}{s} = A$
$E_0 = 8.88542 \cdot 10^{-12}As/Vm$

Elektrisches Feld

$E(r) = \frac{\varrho}{2\Pi E_0} \cdot \frac{1}{r}$
$\gamma(r) = -\int Edr = -\frac{\varrho}{2\Pi E_0} \cdot \int \frac{1}{r}dr = -\frac{\varrho}{2\Pi E_0} \cdot ln(r) + C$

Kraft auf eine Punktladung

$\vec{F_c} = q_0 \cdot \vec{E} \Longrightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F_c}}{q_0}$
$dE_{pot} = -\vec{F}d\vec{l}$
$dE_{pot} = -q_0 \cdot \vec{E} \cdot d\vec{l}$
$\int d\gamma = \frac{dE_{pot}}{q_0} = -\int \vec{E}d\vec{l}$
$\Delta\gamma = -\int\limits_a^b \vec{E}d\vec{l} = \gamma(a) - \gamma(b)$
$\gamma(r) = \frac{1}{4\Pi E_0} \cdot (-\frac{q}{r} + \frac{q}{|\vec{r}-\vec{l}|})$

Potential eines Punktuellen-Ladungssystem

$\gamma(r) = \frac{1}{4\Pi E_0} \cdot \sum\limits_i \cdot \frac{q_i}{r_i}$
$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\Pi E_0} \cdot (-\frac{q}{r^3} \cdot \vec{r} + \frac{q}{|\vec{r}-\vec{l}|^3} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{l}))$

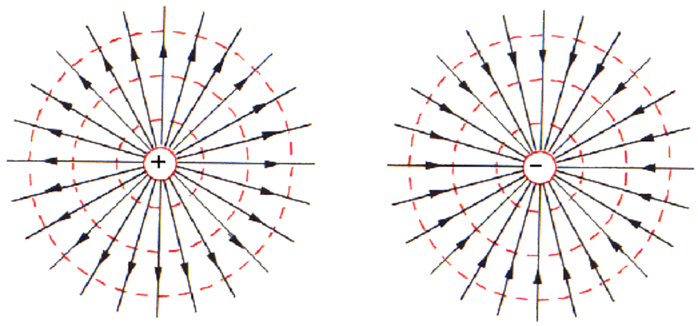
Arbeit

Gegeben sind 2 positiv geladene Teilchen q,Q und Abstand r_1, r_2.

$\Delta W = \int\limits_{r_1}^{r_2} \vec{F_c}d\vec{r} = \frac{q \cdot Q}{4\Pi E_0} \cdot \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2}dr = \frac{q \cdot Q}{4\Pi E_0} \cdot (\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$

Ladungen

- Positive Ladungen: Quellen
- Negative Ladungen: Senken



Kraft auf eine Punktladung: $dE_{pol} = -\vec{F}d\vec{l} \Longrightarrow F_c = \vec{q}_0 \cdot \vec{E}$

Schaltungen

1 Allgemein

1.1 Formeln

$U = E \cdot d = \frac{\varrho \cdot d}{E_0} = \frac{Q \cdot d}{E_0 \cdot F}$
$C = \frac{Q}{U} = E_0 \cdot \frac{F}{d}$

$Q = C \cdot U$

$U = R \cdot I \ \Rightarrow R = \frac{U}{I} \ \Rightarrow R = \varrho \cdot \frac{l}{A}$, ϱ= spezifischer Widerstand

$I = \frac{dQ}{dt}$

1.2 Einheiten

$1T = 1\frac{N \cdot s}{C \cdot m} = 1\frac{N \cdot m \cdot s}{C \cdot s^2} = 1\frac{V \cdot s}{m^2}$

$1A = 1\frac{C}{s}$

$1N = 1\frac{kg \cdot m}{s^2}$

$1F = 1\frac{C}{V} = 1\frac{A \cdot s}{V} = 1\frac{A^2 \cdot s^4}{kg \cdot m^2}$

$\frac{V}{m} = \frac{N}{C}$

2 Kirchhoffschen Gesetze

2.1 Maschenregel

Die Maschenregel betrachtet die Teilspannungen in einer Masche eines Stromkreises. Geht man in einem Stromkreis einmal rund herum, bis wieder der gleiche Punkt erreicht wird, so muss die Spannungsdifferenz null sein:

$$\sum_k U_k = 0$$

Wäre dies nicht so, würde der Energieerhaltungssatz verletzt. Eine Ladung könnte sich immer in der gleichen Richtung im Stromkreis bewegen und würde dabei ein immer höheres Potential erreichen.

2.2 Knotenregel

Die Knotenregel besagt, dass an eine Knoten im Stromkreis die Summe aller Ströme null sein muss. Dafür muss den Strömen ein Vorzeichen zugeordnet werden:

$$\sum_k I_k = 0$$

Ladungen die pro Zeiteinheit zufliessen, müssen auch wieder abfliessen, wenn die Schaltung nur aus leitenden Drähten und Widerständen besteht.

3 Kondensatoren

3.1 Serienschaltung

$C = E \cdot \frac{A}{d_1 + d_2} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$

$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Longrightarrow C = (\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2})^{-1}$

3.2 Parallelschaltung

$C = E \cdot \frac{A_1 + A_2}{d} = C_1 + C_2$

$C = C_1 + C_2$

4 Widerstände

4.1 Serienschaltung

$R = \varrho \cdot \frac{l_1+l_2}{A} = R_1 + R_2$

$R = R_1 + R_2$

4.2 Parallelschaltung

$R = \frac{1}{\varrho \cdot \frac{A_1}{l} + \varrho \cdot \frac{A_2}{l}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1}} + \frac{1}{\frac{1}{R_2}}$

$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \implies R = (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})^{-1}$

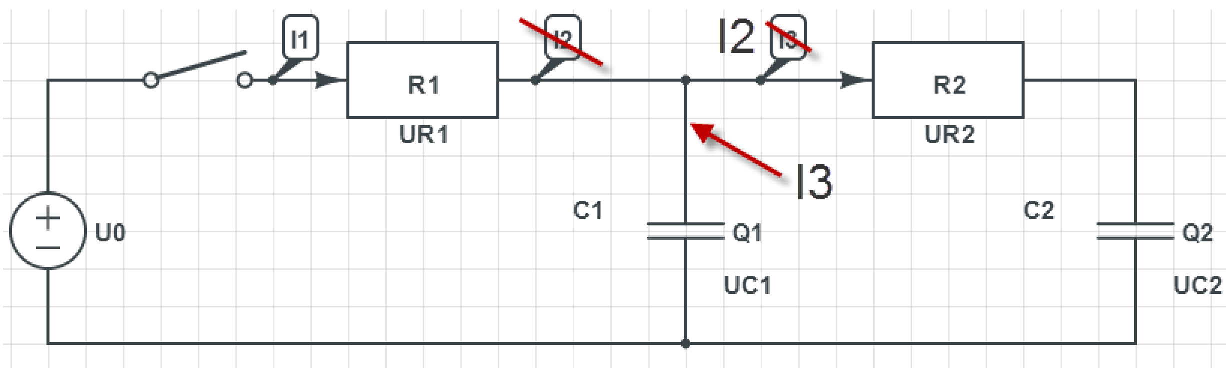
5 Lorentz-Kraft

$\vec{F_B} = q(\vec{v} \times \vec{B})$

Lorentz-Kraft = Zentripetal-Kraft:

$evB = \frac{mv^2}{r}$

6 Beispiele



6.1 Maschenregel

$U_{R1} + U_{C1} - U_0 = 0$

$\Rightarrow R_1 \cdot (I_2 + I_3) + \frac{Q_1}{C_1} - U_0 = 0$

$U_{R1} + U_{R2} + U_{C2} - U_0 = 0$

$\Rightarrow R_1 \cdot (I_2 + I_3) + R_2 \cdot I_2 + \frac{Q_2}{C_2} - U_0 = 0$

6.2 Knotenregel

$I_1 - I_2 - I_3 = 0$

$\Rightarrow I_1 - \frac{dQ_2}{dt} - \frac{dQ_1}{dt} = 0$

BM-Beispiel

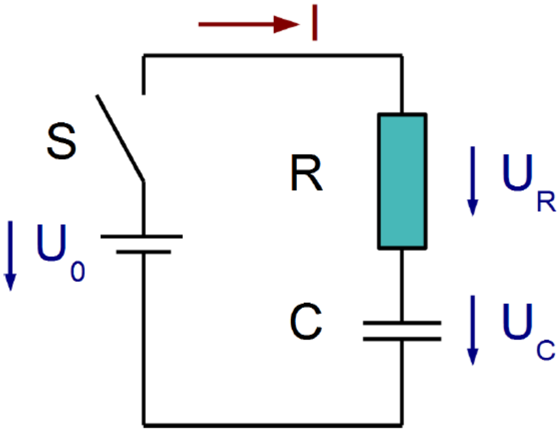


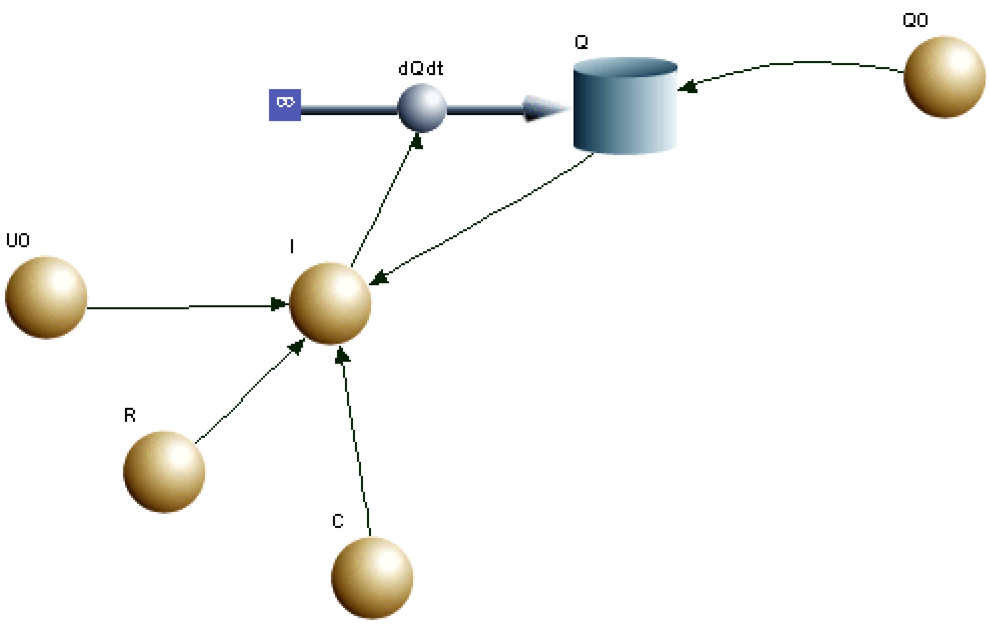
Figure 1.1: RC - Schaltung

Gegeben:

$R = 1000\Omega$, $U_0 = 5V$, $C = 0.001F$

Formeln:

$U_0 = U_R + U_C = I \cdot R + \frac{Q}{C}$
$I = \frac{U_R}{R} = \frac{1}{R} \cdot (U_0 - \frac{Q}{C})$
$U_R = U_0 - U_C$



Spulen

Allgemein

- B = Elektromagnetisches Feld
- N = Anzahl Windungen einer Spule
- L = Länge einer Spule
- A = Fläche der Spule
- $1\frac{Vs}{A} = 1H = 1Henry$

Elektromagnetisches Feld

$B = \mu_0 \cdot \frac{N}{L} \cdot I = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \frac{N}{L} \cdot I = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \frac{N \cdot U}{L \cdot R} = \frac{\phi}{A}$
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} Vs/Am$

Induzierte Spannung

$U_{ind} = -N \cdot B \cdot \frac{dA}{dt} = N \cdot B \cdot A \cdot \omega \cdot sin(\omega t)$
$U_{ind} = -L \cdot \frac{dI}{dt} = -\frac{d\phi}{dt} = -L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}$
$\phi = N \cdot B \cdot A$

Gespeicherte Energie in einer Spule

$E(I) = L \cdot \frac{I^2}{2}$

Transformatorengleichung

$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} \Longrightarrow N_2 = N_1 \cdot \frac{U_2}{U_1}$

Selbstinduktion

$L \simeq N^2 \Longleftrightarrow N \simeq \sqrt{L}$
$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{\sqrt{L_1}}{\sqrt{L_2}}$

Schwingungen

Allgemein

- Je grösser die Federkonstante k, umso kleiner die Auslenkung bei gleicher Kraft (resp. umso steifer die Feder)
- Je steifer die Feder, desto grösser/höher ist die Schwingfrequenz ω.
- Je grösser die Masse m, umso kleiner/tiefer ist die Schwingfrequenz ω.

Formelherleitung:

- $m\ddot{x} = -k(x - x_{Ruhe}) - \gamma \cdot \dot{x} \iff \ddot{x} + \frac{\gamma}{m} \cdot \dot{x} + \frac{k}{m}(x - x_{Ruhe}) = 0$
- $m\ddot{x} = \sum F_i = F_G + F_k + F_r \implies \ddot{x} = acc = \frac{1}{m} \cdot (F_G + F_k + F_r)$

Ungedämpfte Schwingung

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, k = Federkonstante, m = Masse
$x(t) = A \cdot cos(\omega t + B)$, A=Amplitude, B=Phase

Schwach gedämpfte Schwingung

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \delta^2}$, $\delta = \frac{\gamma}{2m}$ k = Federkonstante, m = Masse, δ=Dämpfung
$\frac{k}{m} - \delta^2 > 0$
$x(t) = Ae^{-\delta t} \cdot cos(\omega t + B)$, A=Amplitude, B=Phase

Starke (überkritisch) gedämpfte Schwingung

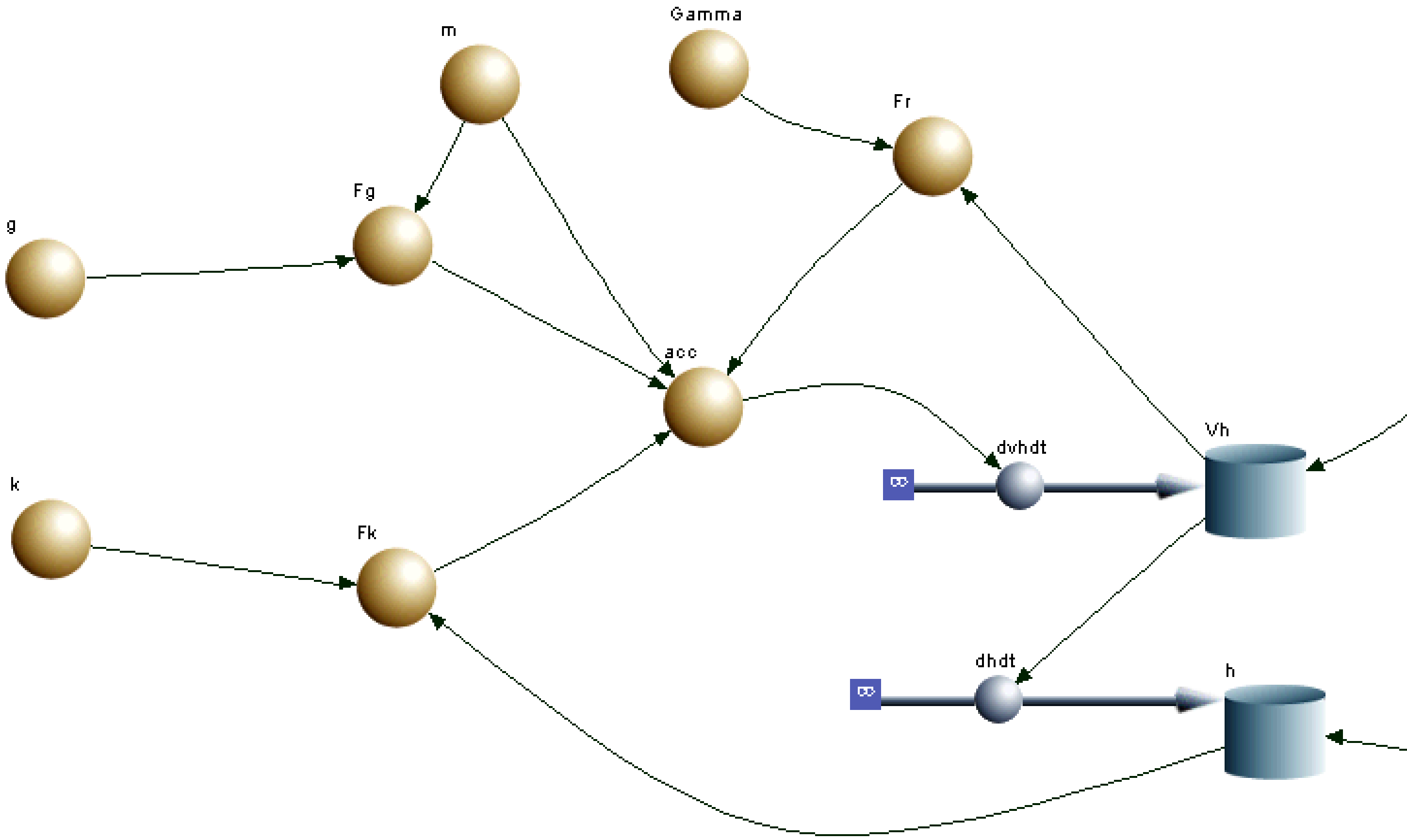
$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \delta^2}$, $\delta = \frac{\gamma}{2m}$ k = Federkonstante, m = Masse, δ=Dämpfung

$\frac{k}{m} - \delta^2 < 0$

$x(t) = Ae^{-(\delta + \sqrt{(\frac{\gamma}{2m})^2 - \frac{k}{m}})} + Be^{-(\delta - \sqrt{(\frac{\gamma}{2m})^2 - \frac{k}{m}})}$

BM-Beispiel (Hydrodynamisch)

Gegeben: $k = 1kg/s^2$, $h_0 = 0$, Gravitationskraft $F_G = -mg$, Federkraft $F_k = -kh$, Dämpfungskraft $F_r = -\gamma h$ mit $\gamma = 0.03kg/s$



Formeln:

- $F_r = -\gamma \cdot v_h$
- $F_G = -m \cdot g$
- $F_k = -k \cdot h$
- $Acc = \frac{1}{m} \cdot (F_G + F_k + F_r)$

Bei Gleitreibung gilt:

- $F_r = -\mu \cdot m \cdot g \cdot \frac{v_h}{|v_h|}$
- - mu * m * g * (IF Abs(vh) < 0.00001 THEN 0 ELSE vh / Abs(vh))

Bei aerodynamischer Reibung gilt:

- $F_r = -K_{air} \cdot \frac{v_h^3}{|v_h|}$
- - Kair * (IF Abs(vh) < 0.00001 THEN 0 ELSE vh^3 / Abs(vh))