Physik

Jonas Gschwend

07.01.2014

Kinetik

Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfunktionen

Ortsfunktion

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeit

Die Geschwindigkeit ist die zeitliche Ableitung der Ortsfunktion:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{r'}(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{dz(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}$$

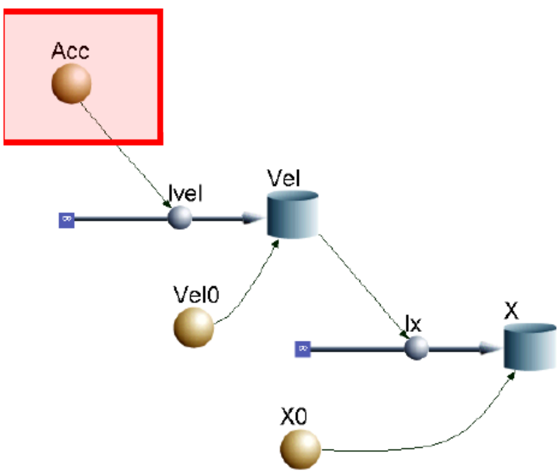
Geschwindigkeit ist ein Vektor, die Schnelligkeit ihr Betrag.

Beschleunigung

Die Beschleunigung ist die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeits resp. die zweite zeitliche Ableitung der Ortsfunktion.

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x(t)}{dt} \\ \frac{dv_y(t)}{dt} \\ \frac{dv_z(t)}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$



Kraft

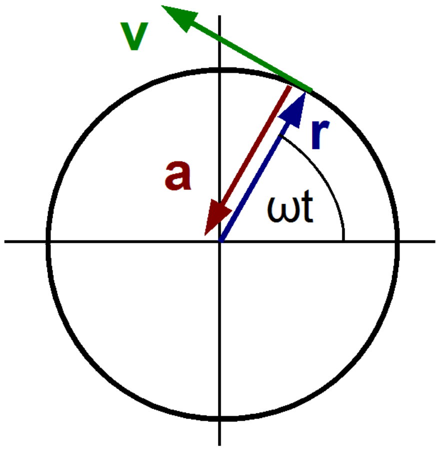
Die Kraft ist das Produkt von Masse und Beschleunigung:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$
$$\left[\vec{F}\right] = \left[\frac{kg \cdot m}{s^2}\right] = [N]$$

Schiefer Wurf

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \\ v_{z0} - gt \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} r_{x0} + v_{x0} \\ r_{y0} + v_{y0} \\ r_{z0} + v_{z0} - g\frac{t^2}{2} \end{pmatrix}$$

Kreisbewegung



ω = Winkel pro Sekunde

$T = \frac{2\Pi}{\omega}$ =Periode, Zeit für einen Umlauf ($360° = 2\Pi$)

Ortsvektor

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r\,cos(\omega t) \\ r\,sin(\omega t) \end{pmatrix}$

$|\vec{r}(t)| = r$

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r\,cos(\omega(t+T)) \\ r\,sin(\omega(t+T)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,cos(\omega t + 2\Pi) \\ r\,sin(\omega t + 2\Pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,cos(\omega t) \\ r\,sin(\omega t) \end{pmatrix}$

Geschwindigkeit

$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -r\omega sin(\omega t) \\ r\omega cos(\omega t) \end{pmatrix}$

$|\vec{v}(t)| = r\omega$

Beschleunigung

$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -r\omega^2 cos(\omega t) \\ -r\omega^2 sind(\omega t) \end{pmatrix}$

$|\vec{a}(t)| = r\omega^2$

Kräfte

Massepunkte

Massepunkte sind charakterisiert durch die Position $\vec{r}(t)$, durch die Masse M und durch die Ladung Q.

Beschleunigung

Die Beschleunigung einer Masser ergibt sich aus der Summe der internen und externen Kräfte:

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \cdot (\sum \vec{F}_{intern} + \sum \vec{F}_{extern})$$

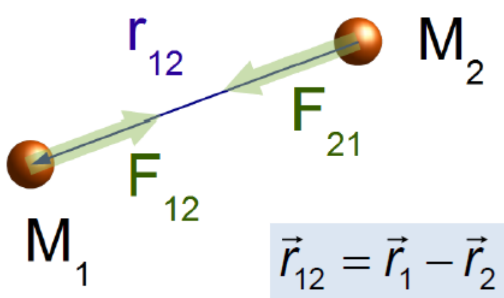
Gravitationskraft

$\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{M_1 M_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \vec{n}_{12}$ =Kraft auf Masse M1

$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

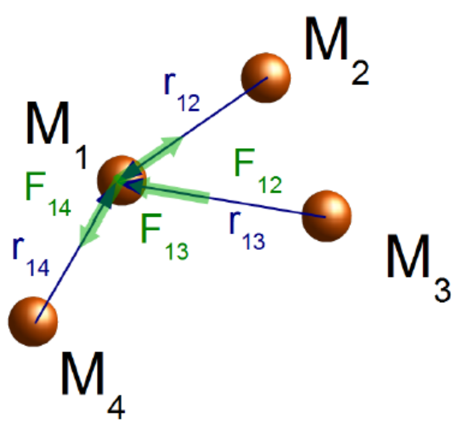
$\vec{n}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$ =Einheitsvektor von Masse M2 zu Masse M1

$\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \left[\frac{Nm^2}{kg^2}\right]$ =Gravitationskonstante



Superpositionsprinzip

Die Gesamtkraft einer Anzahl von Massen auf eine bestimmte Masse ist gleich der Summe der Kräfte der jeweiligen Einzelmassen.



Planetenbahnen

$\vec{F} = -\gamma \frac{mM_s}{|\vec{r}|^2} \vec{n} \Rightarrow ma = \gamma \frac{mM_s}{r^2}$

$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} -r\omega^2 cos(\omega t) \\ -r\omega^2 sin(\omega t) \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{a}(t)| = r\omega^2$

$\Rightarrow mr\omega^2 = \gamma \frac{mM_s}{r^2} \Rightarrow r^3\omega^2 = \gamma M_s$

m = Planetenmasse

M_s= Sonnenmasse

r = Radius der Kreisbahn

Keppler's third law

$\frac{r^3}{T^2} = \frac{\gamma M_s}{4\pi^2} = const.$

T = Periode = $\frac{2\pi}{\omega}$

Elektrische Ladung

Ein Elektron trägt eine Ladung von -e, wobei e die Elementarladung $e = 1.602189 \cdot 10^{-19}C$ beträgt.

Kräfte zwischen ruhenden Ladungen

Gleiche Ladungen stossen sich ab, ungleiche ziehen sich an.

$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_{12}|^2}\vec{n}_{12}$

$\varepsilon_0 = 8.859 \cdot 10^{-12} \left[\frac{C^2}{Jm}\right]$ =Influenzkonstante

Reibungskräfte

Bodenkraft

Die Gravitationskraft wird durch eine Kraft des Bodens, die "Bodenkraft" ausgeglichen.

Gleitreibung

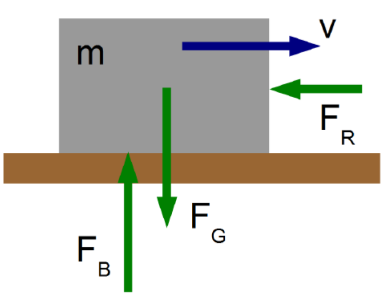
$\vec{F}_G = -\vec{F}_B$

$\vec{F}_R = -\mu \cdot m \cdot g \cdot \vec{n}_v$

$\vec{n}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

μ =Gleitreibungskoeff.

m =Masse



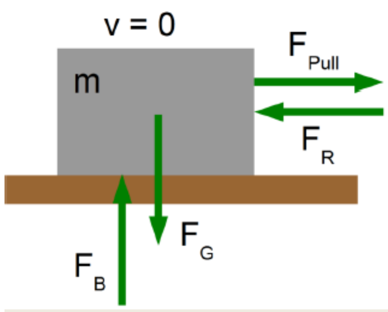
Haftreibung

$\vec{F}_C = \mu_H \cdot m \cdot g \cdot \vec{n}_{Fpull}$

$\vec{F}_R = -\vec{F}_{pull}$(solange $\vec{F}_{pull} \leq \vec{F}_C$ und $\vec{v} = 0$)

$\vec{n}_{Fpull} = \frac{\vec{F}_{pull}}{|\vec{F}_{pull}|}$

μ_H =Haftreibungskoeffizient


v = 0
m
F Pull
F R
F G
F B

Impuls

Luftwiderstand

Vertikaler Fall

Der Luftwiderstand ist proportional zum Quadrat der Schnelligkeit und der Geschwindigkeit entgegengesetzt:

$\vec{F}_w = -c_w \cdot \frac{\rho A}{2} \cdot |\vec{v}|^2 \cdot \vec{n}_v$

$c_w =$Widerstandszahl

$\rho =$Luftdichte $(1.293 kg/m^3)$

$A =$Querschnittsfläche $\perp$ zu $\vec{v}$

$\vec{n}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

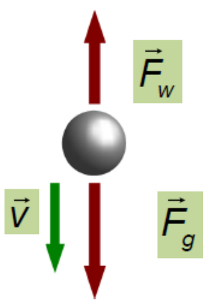
Die Widerstandszahl c_w hängt von der Geometrie des betrachteten Körpers ab.

Maximale Fallgeschwindigkeit

$m_s \vec{a} = \vec{F}_g + \vec{F}_w$

$m\dot{v}_z = -mg + c_w \cdot \frac{\rho_{Luft} A}{2} \cdot v_z^2$

$\Rightarrow \lim_{t \to \infty} v_z(t) = \sqrt{\frac{g}{\gamma}} = \sqrt{\frac{2mg}{c_w \rho_{Luft} A}}$



Fallgeschwindgkeit Allgemein

Geschwindigkeit als Funktion der Zeit:

$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - kv^2$

$v = \frac{dx}{dt}$

$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2$

Ballistische Kurven

Generell geht es darum, die Bahn eines Geschosses vorherzusagen.

$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_G - k \cdot |\vec{v}|^2 \cdot \vec{n}_v$

$\vec{n}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

$k =$Konstante $\left[\frac{kg}{m}\right]$

Dieses Problem kann nur numerisch, in Koordinatenform angegangen werden:

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - k \cdot \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

$\dot{v}_x = -kv_x\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

$$\dot{v}_y = -kv_y\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$

$$\dot{v}_z = -g - kv_z\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$

Impuls

Definition

Gegeben ist eine punktförmige Masse m mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}$.
Der Impuls dieser Masse ist definiert als:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Der Impuls ist also ein Vektor.

Impuls einer ausgedehnten Masse

$$\vec{p} = \int\limits_{Volume} \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r})dV$$

$\rho(\vec{r})$ =Dichte am Punkt $\vec{r}$

$v(\vec{r})$ =Geschwindigkeit am Punkt $\vec{r}$

dm(r) ist ein Stücklein Masse. Die Gesamtmasse ist aus vielen Massenstücklein zusammengesetzt, das Integral ist eine Summe über ganz kleine Stücklein:

$$dm(\vec{r}) = \rho(\vec{r})dV$$

Zusammenhang Impuls und Kraft

Es gilt:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \; \vec{p} = m\vec{v}$$

Weiter können wir sagen:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Falls die Masse zeitlich konstant ist ($\frac{dm}{dt} = 0$) gilt:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Die zeitliche Ableitung des Impulses eines Massenpunktes ist gleich der Kraft, die auf ihn wirkt!

Impulserhaltung

Für ein System miteinander wechselwirkender Massen aber ohne äussere Kräfte ist der Gesamtimpuls eine Konstante.

$$\vec{p}_{tot} = \sum_i m_i\vec{v}_i = const.$$

$$\frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i\vec{v}_i\right) = \sum_i m_i\vec{a}_i = \sum_i\sum_{j\neq i}\vec{F}_{ij}^{intern}$$

Masseschwerpunkt

Definition

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum\limits_i m_i\vec{r}_i}{\sum\limits_i m_i}$$

Schwerpunktgeschwindigkeit

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\vec{p}_{tot}}{\sum\limits_i m_i}$$

Schwerpunktbeschleunigung

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\sum\limits_i m_i \vec{a}_i}{\sum\limits_i m_i}$$

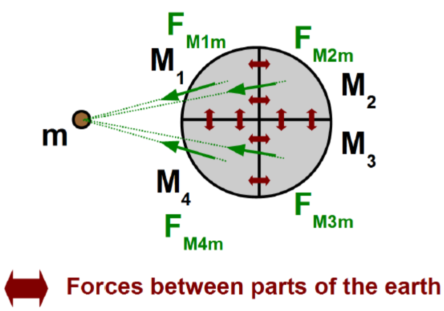
Schwerpunktsatz

Die Änderungsrate des Impulses der im Schwerpunkt konzentrierten Gesamtmasse der Teilchen ist gleich der Summe aller externen Kräfte.

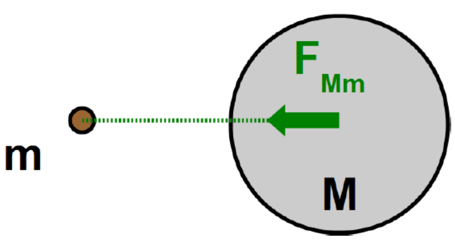
$$M_{tot} = \sum_i m_i$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\sum\limits_i^N \sum\limits_k^K \vec{F}_{ik}^{extern}}{\sum\limits_i m_i} \Longleftrightarrow M_{tot}\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{p}_{CM}}{dt} = \sum_i^N \sum_k^N \vec{F}_{ik}^{extern}$$

Eine Masse m übt gravitative Kräfte auf jeden Einzelteil einer Masse M aus. Zwischen den Teilen von M wirken Kräfte, die M zusammenhalten:



Aufgrund des Schewrpunktsatzes dürfen Sie so tun, als ob die von m ausgeübte Kraft im Schwerpunkt von M auf ganz M wirken würde:



Wegen Newtons drittem Gesetz dürfen Sie jetzt schliessen, dass M eine entsprechende Gegenkraft auf m ausübt: