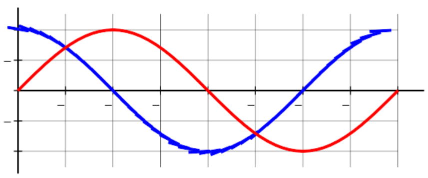
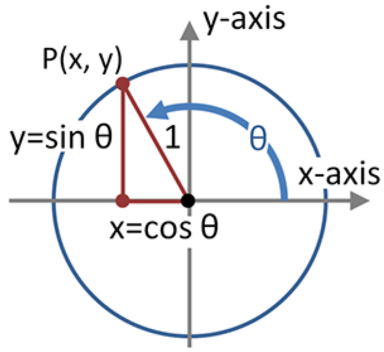
Diverses

Trigonometrische Funktionen





Polynome

Ein Polynom n-ter Ordnung: $p(x) = a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_{0,} x \in R, a_n \neq 0$

Eigenschaften:

- Differenzen und Summen von Polynomen sind wieder Polynome.
- Produkte von Polynomen sind wieder Polynome. Bsp: $p(2) \times p(3) = p(5)$
- Die Division von Polynomen ergiebt wieder ein Polynom und ev. einen Rest.

Beispiel für Polynomdivision:

$2x^3$	$+5x^2$	$+1x$	$\div(x-5)$	$=$	$2x^2 - 5x$ Rest $-24x$
$-2x^3$	$-10x^2$		$2x^2 \times (x-5)$	$=$	$2x^3 - 10x^2$
0	$-5x^2$	$+1x$	$-5x \times (x-5)$	$=$	$-5x^2 + 25x$
	$-(-5x^2)$	$-25x$			
	0	$-24x$			Rest: $-24x$

Hornerschema

Auswertung einer Funktion an einer bestimmten Stelle.

Sei die Funktion $F(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = (x-2)(x^2 - x - 12)$

Diese an $x = 2$ ausgewertet:

x=2	x^3	$-3x^2$	$-10x$	24
	1	-3	-10	24
		2	-2	-24
	1	-1	-12	0
Rest:	x^2	$-x$	-12	

Hier wurde die Nullstelle $x = 2$ abgespalten.

Begriffe der Funktionen

Extrema

$f'(x) = 0 \, dann \, f''(x_0) < 0 \rightarrow Max, \; f''(x_0) > 0 \rightarrow Min$

Wendestelle

$f''(x) = 0 \, dann \, f'''(x_0)! = 0$

Ganz-Rationale Funktion

Eine Ganz-Rationale Funktion lässt sich so schreiben: $f(x) = a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Gebrochen-Rationale Funktion

Eine Gebrochen-Rationale Funktion: $f(x) = \frac{a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} = \frac{p(m)}{p(n)}$, wobei der Grad der Polynome nicht gleich sein muss.

Definitionslücken

Sie sind Stellen, an denen die Funktion nicht definiert ist. Z.B.: Nenner der gleich 0 ist. Man unterscheidet 2 Arten von Definitionslücken:

- Polstellen: Nach dem vollständigen Kürzen, besteht immernoch die Nullstelle des Nenners.
- hebbare Definitionslücken: Nach vollständigem Kürzen verschwindet die Nullstelle des Nenners.
- Stopfen der Def. Lücke: Wert der hebbaren Lücke in den gekürzten Bruch einsetzen.

Wichtig: Kommt eine Polstelle mehrmals vor: $(x-a)^n$, so ist dies eine n-fache Polstelle. Ist die Vielfachheit gerade, so findet kein Vorzeichenwechsel statt.

Nullstellen

Man kann die Nullstellen bestimmen, indem man:

- bei einer "Ganz-Rationalen Funktion" diese gleich NULL setzt.
- bei einer "Gebrochen-Rationalen Funktion" den Zähler gleich NULL setzt.

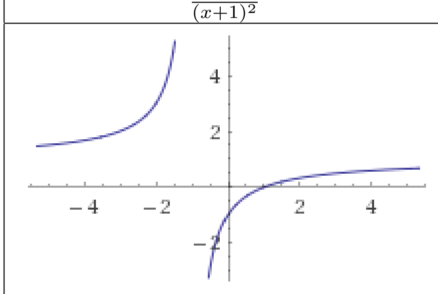
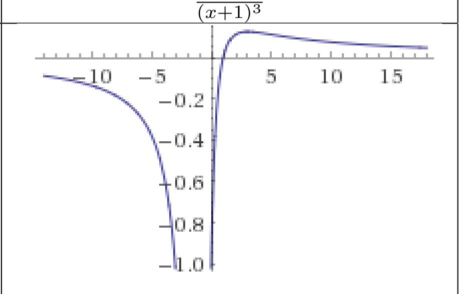
Asymptoten

Sind Geraden, denen sich eine Kurve beliebig nahe annähert. (Limes!) Wir unterscheiden 2 Arten:

- bei Polstellen (nicht hebb. Deflücke): Die Kurve einer gebrochen-rationalen Funktion schmiegt sich der Gerade bei x=Polstelle an. Es bildet sich eine senkrechte Asymptote.
- für grosse x: $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ im Falle:
  - $grad(g) < grad(h)$: x-Achse als wagrechte Asymptote
  - $grad(g) = grad(h)$: Gerade mit der Gleichung: $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$
  - $grad(g) = 1 + grad(h)$: schiefe Asymptote, durch Polynomdivision

Man beachte beim Zeichnen die Vielfachheit der Polstelle:

- Gerade Anzahl: Vorzeichenwechsel
- Ungerade Anzahl: Kein Vorzeichenwechsel

Gerade	Ungerade
$\frac{x^2-1}{(x+1)^2}$	$\frac{x^2-1}{(x+1)^3}$
	

Beispiele:

Funktion	Definitionslücke	Nullstelle
$f(x) = \frac{(x+2)^2}{(x+4)^3 x^2}$	P:-4(x3), 0(x2), H: keine	N:-2(x2)

Betrachten wir die Funktion: $f(x) = \frac{2x^2+x^2+x}{1-x^2}$
Nullstelle: $x = 0$
Definitionslücken: x =1 (Polstelle, 1fach), $x = -1$ (Polstelle, 1fach)
Asymptoten: $x = 1$, $x = -1$, $x = -2x - 1$ (durch Poly.division)

Sätze

- $sin(\alpha + \beta) = sin(\alpha) \cdot cos(\beta) + cos(\alpha) \cdot sin(\beta)$
- $sin(\alpha - \beta) = sin(\alpha) \cdot cos(\beta) - cos(\alpha) \cdot sin(\beta)$
- $cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha) \cdot cos(\beta) + sin(\alpha) \cdot sin(\beta)$
- $sin(\alpha - \beta) = cos(\alpha) \cdot cos(\beta) - sin(\alpha) \cdot sin(\beta)$

Logarithmusfunktion

Rechenregeln:

$log_a(u \cdot v) = log_a(u) + log_a(v)$
$log_a(\frac{u}{v}) = log_a(u) - log_a(v)$
$log_a(u^k) = k \cdot log_a(u)$
$log_a(\sqrt[n]{u}) = \frac{1}{n} \cdot log_a(u)$

Allgemein:

$$\boxed{y = a^x \Rightarrow ln(y) = x \cdot ln(a) \Rightarrow x = \frac{ln(y)}{ln(a)}}$$

$$\boxed{y = a^x \Rightarrow log_a(y) = x \cdot log_a(a) \Rightarrow x = log_a(y)}$$

Umkehrfunktion:

$$\boxed{y = log_a(x)}$$

Basiswechsel:

$$\boxed{log_a(x) = \frac{log_{10}(x)}{log_{10}(a)} = \frac{ln(x)}{ln(a)}}$$

Umformungsbeispiele:

$log_{10}(x) = -4.0404$	$\Rightarrow$	$x = 10^{-4.0404} = \frac{1}{10^{4.0404}}$
$ln(x) = -9.0907$	$\Rightarrow$	$x = e^{-9.0907} = \frac{1}{e^{9.0907}}$
$log_3(x) = 5$	$\Rightarrow$	$x = 3^5 = 243$