Beispiele

Teil 1

Schubfach

Stuhl-Gäste-Problem

Auf wieviele Arten können sich 5 Gäste auf 7 Stühlen verteilen?
$\rightarrow Verteilung: \ 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{7!}{(7-5)!}$

Mannschaftswahl

Auf wieviele Arten kann man aus 5 Frauen und 9 Männern eine Mannschaft aus 3 Frauen und 5 Männern zusammenstellen?
$\rightarrow Auswahl: \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$

Zahlenbildung

Wieviele 5-Stellige Zahlen mit geraden Ziffern gibt es?
$\rightarrow ger.Ziff.: \{2, 4, 6, 8, 0\} \rightarrow 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5$ (eigentlich sollte man Zahlen die mit 0 beginnen ignorieren!)

Glühbirnen

In einem Raum gibt es 9 Glühbirnen, die man unabhängig voneinander steuern kann. Wieviele Beleuchtungsarten gibt es, wenn mindestens 6 Lampen aktiv sein sollen?
$\rightarrow (Fall-9) + (Fall-8) + (Fall-7) + (Fall-6) = \frac{9!}{(9-0)!} + \frac{9!}{(8-1)!} + \frac{9!}{(7-2)!} + \frac{9!}{(6-3)!}$

Weg-Problem

Wieviele kürzeste Wege führen von (0,0) nach (10,9) über (4,5)?
$\rightarrow erste\,Etappe: \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}, \ zweite\,Etappe: \begin{pmatrix} (10-4)+(9-5) \\ (10-4) \end{pmatrix} \rightarrow (1.E) \cdot (2.E)$

Gleichungen

Löse die Gleichung: $\begin{pmatrix} 2x-3 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$
$\rightarrow \frac{(2x-3)(2x-4)}{2!} = 6 \rightarrow (2x-3)(2x-4) = 6 \cdot 2! = 12 \rightarrow 4n^2 - 14n + 12 = 12 \rightarrow 2n^2 - 7n = 0 \rightarrow 2n = 7$

Binomialkoeffizienten

Welcher Summand ist der Grösse von $(2a+b)^{11}$.
$\rightarrow TI: \ expand(...) \ oder: \ Binomische - Entwicklung$

Induktion 1

Beweise mit Vollständiger Induktion: $a_1 = 0$, $a_n = (n-1) \cdot 4^{n-1}$, $a_{n+1} = 4a_n + 4^n$
Induktionsanfang: $a_1 = (1-1) * 4^{1-1} = 0$
Induktionsschluss: $a_{n+1} = ((n+1)-1) \cdot 4^{(n+1)-1} = n \cdot 4^n$ (Behauptung)
$a_{n+1} = 4a_n + 4^n = 4(4a_{n-1} + 4^{n-1}) + 4^n = 4 \cdot 4a_{n-1} + 4 \cdot 4^{n-1} + 4^n \rightarrow 4 \cdot 4 \cdot .... \cdot 4 \cdot a_0 + 4^n + 4^n + ...4^n = 0 + n \cdot 4^n$

Induktion 2

Beweise mit Vollständiger Induktion, dass $x_n = n^3 + 6n^2 + 14n$ für jede Zahl n durch 3 teilbar ist.
Induktionsanfang: $x_1 = 1^3 + 6 \cdot 1^3 + 14 \cdot 1 = 21$, $mod(21, 3) = 0$
Induktionsschluss: $x_{n+1} = (n+1)^3 + 6(n+1)^2 + 14(n+1)$
$x_{n+1} = x_n + 3(...)$

Beispiele

Part 2

Diophantische Gleichung

Die lineare diophantische Gleichung ($ax + bx = n$) hat eine Lösung wenn n teilbar ist durch den ggT(a,b).

$$3740x + 2090y = 660$$

Berechnung ggT(3740,2090):

$$3740 = 1 \cdot 2090 + 1650$$
$$2090 = 1 \cdot 1650 + 440$$
$$1650 = 3 \cdot 440 + 330$$
$$440 = 1 \cdot 330 + 110$$
$$330 = 3 \cdot 110$$

Der ggT ist folglich 110.
Nun setzen wir Rückwärts ein:

$$110 = 440 - 1 \cdot 330$$
$$110 = 440 - 1 \cdot (1650 - 3 \cdot 440) = 4 \cdot 440 - 1650$$
$$110 = 4 \cdot (2090 - 1 \cdot 1650) - 1650 = 4 \cdot 2090 - 5 \cdot 1650$$
$$110 = 4 \cdot 2090 - 5 \cdot (3740 - 1 \cdot 2090) = 9 \cdot 2090 - 5 \cdot 3740$$

Nun setzen wir ein in die Gleichung:

$$x = x_0 - t\frac{b}{ggT(a,b)},\ y = y_0 + t\frac{a}{ggT(a,b)}$$
$$x = -25 - t\frac{2090}{110} = -5 - 19t$$
$$y = 9 + t\frac{3740}{110} = 9 + 34t$$

Eulerische φ Funktion

Um φ von 9900 herauszufinden, verwenden wir die Primfaktorenzerlegung:

$$cFactor(9900) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11$$

Nun verwenden wir folgende Gleichung: (p seien die Primfaktoren)

$$\varphi(x) = (1 - \frac{1}{p_1}) \cdot (1 - \frac{1}{p_2}) \cdot ... \cdot (1 - \frac{1}{p_k}) \cdot x$$

Wir setzen jeden Primfaktor nur einmal ein:

$$\varphi(9900) = (1 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - \frac{1}{3}) \cdot (1 - \frac{1}{5}) \cdot (1 - \frac{1}{11}) \cdot 9900 = 2400$$

Gruppe

·	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	b	e	d	f	c
b	b	e	a	f	c	d
c	c	f	d	e	b	a
d	d	c	f	a	e	b
f	f	d	c	b	a	e

1. Berechne $(c^{-1} \cdot a) \cdot (b \cdot e)^{-1}$
   $= (c \cdot a) \cdot (b)^{-1} = f \cdot a = d$

2. u sei Unbekannt, bestimme u: $(b \cdot u^2) \cdot d = f$
   $(b \cdot u^2) \cdot d \cdot d^{-1} = f \cdot d^{-1} \rightarrow b^{-1} \cdot b \cdot u^2 \longrightarrow u^2 = b^{-1} \cdot f \cdot d^{-1} = a \cdot f \cdot d = b \longrightarrow u = a$

3. Ist die Gruppe zyklisch?
   Nein. Sie hat kein erzeugendes Element! $x^n\, für\, 1, n, 5\, erzeugt\, nicht: \{e, a, b, c, d, f\}$

4. Finde zyklische Untergruppen.

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

	e	c
e	e	c
c	c	e

	e	d
e	e	d
d	d	e

	e	f
e	e	f
f	f	e

Ordnung bestimmen

Sei $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_6$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 3 & 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 4 & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 3 & & & & \\ & \downarrow & & & & \\ & 3 & & & & \\ & 6 & & & & \\ & \downarrow & & & & \\ & 6 & & & & \\ & 1 & & & & \end{pmatrix}$
Bestimme die Ordnung von π.	Ordnung = kgV(2,4)=4

Ordnung eines Elements

Sei $(G, \bullet)$ eine zyklische Gruppe mit dem Erzeuger x der Ordnung 43.

- Welche Ordnung hat x^{31} ?
  $31n\%43 = 0$ $\Rightarrow$ausprobieren

- Weitere Erzeuger ?
  Alle Zahlen bei denen ggT(Zahl,Ordnung) = 1

Kartesisches Produkt zweier Gruppen

Gegeben:

- Zyklische Gruppe $(G, \triangle)$, $Ord(G) = 5$, $G =< x >$
- Zyklische Gruppe $(H, \diamond)$, $Ord(H) = 7$, $H =< y >$
- Kartesisches Produkt $G \times H$ mit folgender Operation:
  $(g_1, h_1) \bullet (g_2, h_2) = (g_1 \triangle g_2, h_1 \diamond h_2)$
  $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \,\epsilon\, G \times H$

Bestimmen neutrales Element:

$$x^5 = 1_G,\ y^7 = 1_H$$

Die Gruppen sehen also wie folgt aus:

$$G = \{x^0 = 1, x^1, x^2, x^3, x^4\}$$
$$G = \{y^0 = 1, y^1, y^2, y^3, y^4, y^5, y^6\}$$

Ordnung $(x^2, y) = n$ bestimmen:

$$(x^2, y)^n = (1_G, 1_H)$$
$$(x^{2n}, y^n) = (1_G, 1_H)$$
$$x^{2n} = 1_G$$
$$y^n = 1_H$$
$$n = kgV(5, 7) = 35$$

Die Gruppe $(G \times H, \bullet)$ mit $Ord(G) \cdot Ord(H) = 35$ ist zyklisch, weil:

$$G \times H =< (x^2, y) >$$

Weitere Erzeuger müssen folgende Kriterien erfüllen:

$$(x^2, y)^k,\ ggT(k, 35) = 1$$

Beispiele hierfür sind: 1,2,4,8,...,34
Anhand von diesem kann man weiterrechnen (für x gilt Mod 5, für y Mod 7):

$$(x^2, y)^{34} = (x^{68}, y^{34}) = (x^3, y^6)$$