

Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung

Ortsfunktion

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeit

Die Geschwindigkeit ist die zeitliche Ableitung der Ortsfunktion:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{dz(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}$$

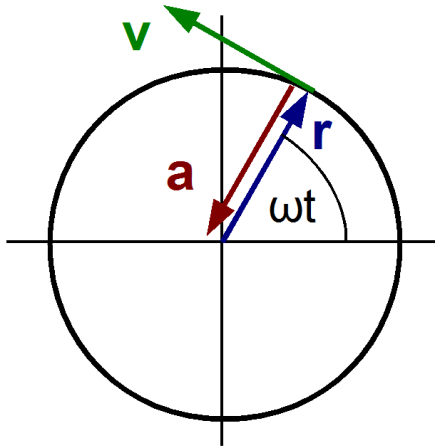
Geschwindigkeit ist ein Vektor, die Schnelligkeit ihr Betrag.

Beschleunigung

Die Beschleunigung ist die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeits resp. die zweite zeitliche Ableitung der Ortsfunktion.

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x(t)}{dt} \\ \frac{dv_y(t)}{dt} \\ \frac{dv_z(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix}$$
$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

Kreisbewegung



ω = Winkel pro Sekunde

$T = \frac{2\Pi}{\omega}$ = Periode, Zeit für einen Umlauf ($360^\circ = 2\Pi$)

Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r \cos(\omega t) \\ r \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$|\vec{r}(t)| = r$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r \cos(\omega(t+T)) \\ r \sin(\omega(t+T)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\omega t + 2\Pi) \\ r \sin(\omega t + 2\Pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\omega t) \\ r \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -r\omega \sin(\omega t) \\ r\omega \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$|\vec{v}(t)| = r\omega$$

Beschleunigung

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -r\omega^2 \cos(\omega t) \\ -r\omega^2 \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}(t)| = r\omega^2$$

Beispiele

Zentrifuge

Eine Zentrifuge drehe sich mit einer Winkelgeschwindigkeit von 20 s^{-1} . Die Zentrifugengläser (Proben) befinden sich in einem Abstand von 10 cm von der Drehachse.

1. Wie gross ist die Bahngeschwindigkeit in m/s und welcher Weg wird in einer Sekunde zurückgelegt?
2. Welche Zentrifugalbeschleunigung wirkt auf die Proben?

Gegeben: $w = 20 \text{ s}^{-1}$, $r = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$

1. $v = r \cdot w = 0,1 \cdot 20 \text{ s}^{-1} = 2 \text{ m/s}$
 $s = 2 \text{ m}$
2. $a_z = r \cdot w^2 = 0,1 \cdot 20^2 \text{ s}^{-2} = 40 \text{ m/s}^2$

Schaufelrad

Das Schaufelrad einer Turbine (Flugzeugtriebwerk) drehe sich mit 30000 U/min . Die einzelnen Schaufeln haben eine Masse von 50 g und befinden sich im Abstand von 15 cm von der Drehachse entfernt.

- Welche Kraft muss mindestens aufgebracht werden, damit die Schaufeln nicht aus der Turbine fliegen?

Gegeben: $m = 0,05 \text{ kg}$, $r = 0,15 \text{ m}$

- $w = 2\pi \cdot \frac{u/\text{min}}{60 \text{ s}} = 2\pi\nu = 2\pi \cdot \frac{3 \cdot 10^3}{60} = 3,41 \cdot 10^3$
 $F_z = m \cdot w^2 \cdot r = 7,4 \cdot 10^4 \text{ N}$

Waage im Lift

Eine Person mit einer Masse von 70 kg stehe auf einer Waage, welche sich in einem Lift befinde. Der Lift beschleunige mit $a_L = 1,7 \text{ m/s}^2$.

1. Was zeigt die Waage an beim aufwärts fahren?
2. Was zeigt die Waage an beim abwärts fahren?

Gegeben: $m = 70 \text{ kg}$

Formel: $\tilde{m} = \frac{\vec{F}}{g} = \frac{m\vec{g}}{g} = \frac{m(g \pm a)}{g}$

1. $m_1 = \frac{m(g+a)}{g} = \frac{70 \text{ kg} \cdot (9,81 + 1,7) \text{ m/s}^2}{9,81 \text{ m/s}^2} = 82,1 \text{ kg}$
2. $m_2 = \frac{m(g-a)}{g} = \frac{70 \text{ kg} \cdot (9,81 - 1,7) \text{ m/s}^2}{9,81 \text{ m/s}^2} = 57,9 \text{ kg}$

Fahrzeugkollision

Ein Fahrzeuglenker mit einer Masse von 80 kg kollidiert mit seinem Fahrzeug mit einer Mauer. Die Geschwindigkeiten vor der Kollision betrage 56 km/h. Das Fahrzeug komme innerhalb von 0.2 s zum Stehen.

- Welcher maximalen Belastung müsste ein Sicherheitsgurt standhalten?

Gegeben: $m = 80\text{kg}$, $v_{max} = 56\text{km/h} = 15.5\text{m/s}$ (km/h : 3.6 = m/s), $\Delta t = 0.2\text{s}$

- $a_{max} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{15.5\text{m/s}}{0.2\text{s}} = 77.5\text{m/s}^2$
 $F = m \cdot a = 77.5\text{m/s}^2 \cdot 80\text{kg} = 6200\text{N} = 6.2\text{kN}$

Computertomographie

Bei CT (Computertomographie)-Scannern rotieren Detektor und Strahlerteil in einem typischen Abstand von 60 cm von der Drehachse um den Patienten.

- Welche Masse darf der Strahlerteil haben, wenn eine Flehkraft von 4737 N nicht überschritten werden kann und pro Sekunde eine Umdrehung "gescannt" wird.

Gegeben: $r = 0.6\text{m}$, $F_z = 4737\text{N} = 4737\text{kg} \cdot \text{ms}^{-2}$

Formel: $F_z = m \cdot \omega^2 \cdot r$

- $m = \frac{F_z}{\omega^2 \cdot r} = \frac{4737\text{kg} \cdot \text{ms}^{-2}}{4\pi^2 \text{s}^{-2} \cdot 0.6\text{m}} \simeq 200\text{kg}$

Arbeit, Energie, Potential

Beispiele

Freier Fall

Auf der Erde

Gegeben: $m = 10\text{kg}$, $h = 20\text{m}$, EE: $E_{tot} = E_{kin} + E_{pot}$

- $E_{kin1} + E_{pot1} = E_{kin2} + E_{pot2} \implies 0 + mgh = \frac{mv^2}{2} + 0$
- $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.81\text{m/s}^2 \cdot 20\text{m}} = 19.8\text{m/s}$

Auf dem Mond

Gegeben: $\gamma = 6.672 \cdot 10^{-11}\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$, $M = 7.349 \cdot 10^{22}\text{kg}$, $r_m = 1.738 \cdot 10^{16}\text{m}$, $F_{G,M} = m \cdot g_M = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r_M^2}$

- $F_{G,M} = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r_M^2} = 6.672 \cdot 10^{-11}\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2} \cdot \frac{1.738 \cdot 10^{16} \cdot 10\text{kg}}{1.738^2 \cdot 10^{12} \cdot \text{m}^2} = 1.62\text{m/s}^2$
- $v_M = \sqrt{2g_M h} = \sqrt{2 \cdot 1.62\text{m/s}^2 \cdot 20\text{m}} = 8.05\text{m/s} \simeq 8.1\text{m/s}$