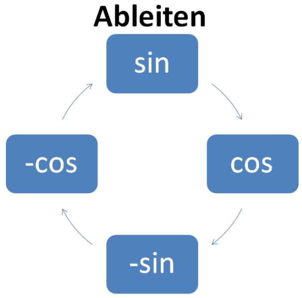
Stammfunktion und unbestimmtes Integral

Grundintegrale (+ c jeweils weggelassen)

e / ln	sin / cos / tan	allgemein
$\int e^x \cdot dx = e^x$	$\int sin^2(x) \cdot dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot sin(x) \cdot cos(x)$	$\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq 1$
$\int e^{-2x} = \frac{e^{-2x}}{-2}$	$\int cos^2(x) \cdot dx = \frac{1}{2}(x + sin(x) \cdot cos(x))$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin\frac{x}{\lvert a \rvert}$
$\int \frac{1}{e} = \frac{x}{e}$	$\int tan^2(x) = tan(x) - x$	$\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c, a > 0, a \neq 1$
$\int be^{ax} \cdot dx = \frac{b}{a}e^{ax}$	$\int \frac{1}{sin(x)} = ln(sin(\frac{x}{2})) - ln(cos(\frac{x}{2}))$	$\int e^{\ln(a) \cdot x} \cdot dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c, a > 0, a \neq 1$
$\int e^{-2x+1} = \frac{e^{-2x+1}}{-2}$	$\int \frac{1}{cos(x)} = ln(sin(\frac{x}{2}) + cos(\frac{x}{2})) - ln(cos(\frac{x}{2}) - sin(\frac{x}{2}))$	$\int \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x}$
$\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln \mid x \mid$	$\int \frac{1}{tan(x)} = ln(sin(x))$	$\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln \mid x \mid$
$\int \frac{1}{x-5} \cdot dx = \ln \mid x - 5 \mid$	$\int \frac{1}{sin^2(x)} = -cotan(x)$	$\int \frac{1}{x^2+a^2} \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot arctan(\frac{x}{a})$
$\int \frac{1}{2x-5} \cdot dx = \ln \mid x - 5 \mid$	$\int \frac{1}{cos^2(x)} = tan(x)$	$\int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = tan^{-1}(x)$
$\int \frac{1}{e^x} = -e^{-x}$	$\int \frac{1}{tan^2(x)} = -x - cotan(x)$	$\int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \frac{1}{2}(ln(x+1) - ln(1-x)$
$\int ln(x)dx = xln(x) - x$	$\int x \cdot sin(x) \cdot dx = sin(x) - x \cdot cos(x)$	$\int \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$
$\int x \cdot ln(x)dx = \frac{1}{4}x^2(2 \cdot ln(x) - 1)$	$\int sin(ax) \cdot dx = -\frac{cos(ax)}{a}$	Tipps
	$\int x \cdot cos(x) \cdot dx = x \cdot sin(x) + cos(x)$	$tan = \frac{sin}{cos}$
	$\int 2x \cdot cos(x) \cdot dx = 2x \cdot sin(x) + 2cos(x)$	$e^{ln(x)} = x$
	$\int \frac{sin(x)}{cos(x)} = \int tan(x) = -ln(cos(x))$	$ln(e^x) = x$
$u = \frac{y}{x}$	$\int sin^2(ax) \cdot dx = \frac{x}{2} - \frac{sin(2ax)}{4a}$	$u^{\frac{3}{2}} = (u^{\frac{1}{2}})^3 = \sqrt{u}^3 = u \cdot \sqrt{u}$
	$\int sin(x) \cdot cos(x) \cdot dx = -\frac{1}{2}cos^2(x)$	$ln(x)' = \frac{1}{x}$
	$\int tan(x) \cdot cos(x) \cdot dx = \int sin(x) \cdot dx = -cos(x)$	$(e^x)' = e^x$

Ableiten



Elementare Rechenregeln

Regel vom konstanten Faktor

$\int k \cdot f(x) \cdot dx = k \cdot F(x) + c$

- $\int 25e^x \cdot dx = 25 \cdot e^x + c$
- $\int -13x^3 \cdot dx = -13 \cdot \frac{x^4}{4} + c$

Skalierungsregel

$\int f(k \cdot x) \cdot dx = \frac{F(k \cdot x)}{k} + c$

- $\int e^{\frac{3}{2}x} \cdot dx = \frac{e^{\frac{3}{2}x}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} \cdot e^{\frac{3}{2}x}$

Translationsregel

$\int f(x + k) \cdot dx = F(x + k) + c$

- $\int \frac{1}{x-6} \cdot dx = ln \mid x - 6 \mid + c$

Summenregel

$\int f(x) \pm g(x) \cdot dx = F(x) \pm G(x) + c$

- $\int (8x^3 - 4x + 2) \cdot dx = 8 \cdot \frac{x^4}{4} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 2x + c = 2x^4 - 2x^2 + 2x + c$

Produkteregel / Partielle Integration

$\int f(x) \cdot g(x) \cdot dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x) \cdot dx$

- $\int x^2 \cdot e^x \cdot dx = e^x \cdot x^2 - \int e^x \cdot 2x \cdot dx = e^x \cdot x^2 - 2[x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x \cdot dx] = e^x \cdot x^2 - 2xe^x + 2e^x + c = e^x[x^2 - 2x + 2] + c$

Bemerkung: Hier wurde x^2jeweils abgeleitet und e^xintegriert.

- $\int x \cdot cos(x) \cdot dx = sin(x) \cdot x - \int 1 \cdot sin(x) \cdot dx = sin(x) \cdot x + cos(x) + c$

Bemerkung: Hier wurde x abgeleitet und cos(x) integriert.

Integration und Substitution

- $\int f(u(x)) \cdot u' \cdot dx = \int f(u) \cdot du$
- $\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \int \frac{du}{u} = ln|u| + c$
- $\frac{dx}{du} = u'(x)$

Trick: Zähler eines Bruches so korrigieren, das es der Ableitung der Funktion entspricht. Anschliessend kann $u' \cdot dx$ durch du ersetzt werden.

- $\int \frac{1}{(4x+5)^3} \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{4}{(4x+5)^3} \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{u'}{u^3} \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{du}{u^3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{u^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{8u^2} + c = -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(4x+e)^2} + c$ wobei $dx = \frac{du}{u}$
- $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \cdot dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}} \cdot dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{u'} = \int \frac{x \cdot du}{-2x \cdot \sqrt{u}} = -\int \frac{du}{2 \cdot \sqrt{u}} = -\frac{1}{2} \cdot u^{\frac{1}{2}} \cdot 2 + c = -\sqrt{u} + c = -\sqrt{a^2 - x^2} + c$

Spezialfall:

- $\int \frac{u'(x) \cdot dx}{u(x)} = \int \frac{du}{u} = ln \mid u \mid +c = ln \mid u(x) \mid +c$
- $\int \frac{x}{4+x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x}{4+x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \cdot ln \mid u \mid +c = \frac{1}{2} \cdot ln \mid 4 + x^2 \mid +c$

Partialbruchzerlegung

Wird gebraucht um gebrochenrationale Funktionen zu integrieren:

$\int \frac{p(x)}{q(x)} \cdot dx$

Man unterscheidet:

- Grad Zähler$\geq$Grad Nenner = unechtgebrochen
- Grad Zähler $<$ Grad Nenner = echtgebrochen

Unechtgebrochen

Mit Hilfe der Polynomdivision lassen sich solche Quotienten zerlegen in ein Polynom und in einen echtgebrochenen Quotienten

Echtgebrochen

Grundsätzlich muss man das Polynom in Faktoren zerlegen die höchstens quadratisch sind.

1. Fall q(x) zerfällt in verschiedene lineare Faktoren (hat m einfache Nullstellen):

- $q(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$

Ansatz:

- $\int \frac{p(x)}{q(x)} = \int \frac{A_1}{(x-x_1)} \cdot dx + \int \frac{A_2}{(x-x_2)} \cdot dx + ... + \int \frac{A_m}{(x-x_m)} \cdot dx$
- $\int \frac{3x-5}{x^2+2x-8} \cdot dx = \int \frac{A}{(x-2)} \cdot dx + \int \frac{B}{(x+4)} \cdot dx$
- $\frac{3x-5}{x^2+2x-8} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+4)} \mid \cdot (x-2) \cdot (x+4)$
- $3x - 5 = A(x+4) + B(x-2)$ |x einsetzen und A, B ausrechnen (z.B. x=-4, x=2)
- $A = \frac{1}{6}; B = \frac{17}{6}$
- $\int \frac{3x-5}{x^2+2x-8} \cdot dx = \frac{1}{6} \cdot \int \frac{1}{(x-2)} \cdot dx + \frac{17}{6} \cdot \int \frac{1}{(x+4)} \cdot dx = \frac{1}{6} \cdot ln \mid x-2 \mid + \frac{17}{6} \cdot ln \mid x+4 \mid +C$

2. Fall q(x) zerfällt in lineare Faktoren, es gibt mindestens einen Faktor, der mehrfach vorkommt:

- $q(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = (x+1)^2 \cdot (x-5)$

Ansatz:

- $\int \frac{p(x)}{q(x)} = \int \frac{A_1}{(x-x_i)} \cdot dx + \int \frac{A_2}{(x-x_i)^2} \cdot dx + ... + \int \frac{A_k}{(x-x_i)^k} \cdot dx$
- $\int \frac{x^2+15x+8}{x^3-3x^2-9x-5} \cdot dx = \int \frac{A}{(x+1)} \cdot dx + \int \frac{B}{(x+1)^2} \cdot dx + \int \frac{C}{(x-5)} \cdot dx$
- $\frac{x^2+15x+8}{x^3-3x^2-9x-5} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x-5)} \mid \cdot (x+1)^2 \cdot (x-5)$
- $x^2 + 15x + 8 = A(x+1)(x-5) + B(x-5) + C(x-5)(x+1)^2$ |x einsetzen und A, B, C ausrechnen (z.B. x=-1, x=5)
- $A = -2; B = 1; C = 3$
- $\int \frac{x^2+15x+8}{x^3-3x^2-9x-5} \cdot dx = -2\int \frac{1}{(x+1)} \cdot dx + 1\int \frac{1}{(x+1)^2} \cdot dx + 3\int \frac{1}{(x-5)} \cdot dx = -2 \cdot ln \mid x+1 \mid + \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + 3 \cdot ln \mid x-5 \mid +C$

3. Fall Der Nenner enthalte quadr. Faktoren die sich nicht zerlegen lassen:

- $q(x) = x^3 - 6x^2 + 10x = x \cdot (x^2 - 6x + 10)$

Ansatz:

- $\int \frac{p(x)}{q(x)} = \int \frac{B_1x+C_1}{Q(x)^1} \cdot dx + \int \frac{B_2x+C_2}{Q(x)^2} \cdot dx + ... + \int \frac{B_kx+C_k}{Q(x)^k} \cdot dx$
- $\int \frac{7x^2-19x+30}{x^3-6x^2+10x} \cdot dx = \int \frac{A}{x} \cdot dx + \int \frac{Bx+C}{x^2-6x+10} \cdot dx$
- $\frac{7x^2-19x+30}{x^3-6x^2+10x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-6x+10} \mid \cdot x \cdot (x^2 - 6x + 10)$
- $7x^2 - 19x + 30 = A(x^2 - 6x + 10) + x \cdot (Bx + C)$ |x einsetzen und A, B, C ausrechnen (z.B. x=0,x=1, x=-1)
- $A = 3; B = 4; C = -1$
- $\int \frac{7x^2-19x+30}{x^3-6x^2+10x} \cdot dx = 3 \cdot \int \frac{1}{x} \cdot dx + \int \frac{4x-1}{x^2-6x+10} \cdot dx = 3 \cdot ln \mid x \mid + (*)$
  - $(x^2 - 6x + 10)' = 2x - 6 \Rightarrow 4x - 1 = 2 \cdot (2x - 6) + 11$
- $(*) = \int \frac{2(2x-6)+11}{x^2-6x+10} \cdot dx = 2 \cdot \int \frac{2x-6}{x^2-6x+10} \cdot dx + \int \frac{11}{x^2-6x+10} \cdot dx$
  - $(1) = 2 \cdot \int \frac{2x-6}{x^2-6x+10} \cdot dx = 2 \cdot \int \frac{du}{u} \cdot dx = 2 \cdot ln \mid u \mid = 2 \cdot ln \mid x^2 - 6x + 10 \mid$
  - $(2) = 11 \cdot \int \frac{1}{x^2-6x+10} \cdot dx = 11 \cdot \int \frac{1}{(x-3)^2+1} \cdot dx$ ist von der Form $k \cdot \int \frac{1}{(x-C)^2+a^2} \cdot dx$
  - $= k \cdot \frac{1}{a} \cdot arctan(\frac{x-C}{a}) + C = 11 \cdot \frac{1}{1} \cdot arctan(\frac{x-3}{1}) + C$
- $\int f(x) \cdot dx = 3 \cdot ln \mid x \mid + 2 \cdot ln \mid x^2 - 6x + 10 \mid + 11 \cdot arctan(x-3) + C$

Das bestimmte Integral

Das Flächenproblem

$$\int\limits_a^b f(x) \cdot dx = A$$

1. Zwischenwerte $x_0, x_1, ..., x_n$setzen und somit Intervall [a,b] in Teilintervalle zerlegen.
2. Wähle in jedem Teilintervall eine Zwischenstelle ξ_i
   (a) $A_1 = \Delta x \cdot f(\xi_1)$
   (b) $A_k = \Delta x \cdot f(\xi_k)$
3. $S_n = A_1 + ... + A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta x \cdot f(\xi_k)$
4. Grenzübergang: $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = A \Rightarrow (\Delta x \to 0)$

Riemannsche Summen $\int_a^b f(x)dx := lim_{n\to\infty(\triangle x \to 0)} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \times \Delta x_i$

Exakt mit Grenzübergang

$$f(x) = x^2$$

Teile Intervall [0,2] in n gleiche Teile:

Intervall	Breite		Höhe	Fläche
$I_1 = [0 \cdot \frac{2}{n}, 1 \cdot \frac{2}{n}]$	$\Delta x_1 = \frac{2}{n}$	$\xi_1 = 1 \cdot \frac{2}{n}$	$f(\xi_1) = (1 \cdot \frac{2}{n})^2$	$A_1 = \frac{2}{n} \cdot 1^2 \cdot \frac{4}{n^2}$
$I_2 = [1 \cdot \frac{2}{n}, 2 \cdot \frac{2}{n}]$	$\Delta x_2 = \frac{2}{n}$	$\xi_2 = 2 \cdot \frac{2}{n}$	$f(\xi_2) = (2 \cdot \frac{2}{n})^2$	$A_2 = \frac{2}{n} \cdot 2^2 \cdot \frac{4}{n^2}$
$I_k = [(k-1) \cdot \frac{2}{n}, k \cdot \frac{2}{n}]$	$\Delta x_k = \frac{2}{n}$	$\xi_k = k \cdot \frac{2}{n}$	$f(\xi_k) = (k \cdot \frac{2}{n})^2$	$A_n = \frac{2}{n} \cdot n^2 \cdot \frac{4}{n^2}$
$I_n = [(n-1) \cdot \frac{2}{n}, n \cdot \frac{2}{n}]$	$\Delta x_n = \frac{2}{n}$	$\xi_n = n \cdot \frac{2}{n}$	$f(\xi_n) = (n \cdot \frac{2}{n})^2$	$A_k = \frac{2}{n} \cdot k^2 \cdot \frac{4}{n^2}$

Vorgehen

- allgemeines Intervall
- Auswertungsstelle] Wert an AS
- Flächenformel
- $\sum$ bilden

$$S_n = \frac{2}{n} \cdot \frac{4}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{8}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

Angewandte Integrale

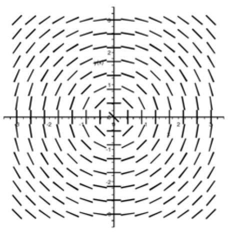
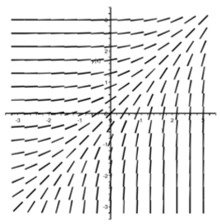
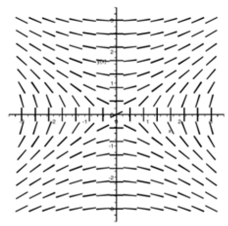
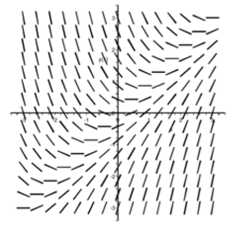
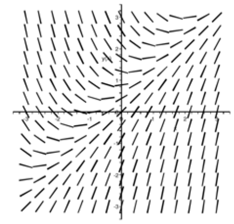
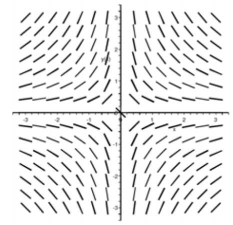
Fläche zwischen Funktionen

f oberhalb g	$g$und f schneiden sich, x_i Schnittpunkte	Mantelfläche
$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$	$A = \mid \int_a^{x_1} (f-g)(x)dx \mid + \mid \int_{x_1}^{x_2} (f-g)(x)dx \mid + ...$	$M_x = 2\pi \times \int_a^b f(x) \times \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

Rotation um die X-Achse (Volumen)	Volumen bei Querfläche	Bogenlänge
$V_x = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$	$V = \int_a^b Q(x)dx$	$S = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

Schwerpunkt einer Fläche	Schw. e. Fl. zwischen $g(x)$ und $f(x)$, $g(x) \leq f(x)$ in I	Schwerpunkt eines Rotationskörpers
$S_x = \frac{\int_a^b x \times f(x)dx}{A}$	$S_x = \frac{\int_a^b x \times (f(x)-g(x))dx}{F}$	$S_x = \frac{\pi \int_a^b x \times f^2(x)dx}{V}$
$S_y = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f(x)^{2dx}}{A}$	$S_y = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b (f^2(x)-g^2(x))dx}{F}$	$S_y = 0$, $S_z = 0$
$A = \int_a^b f(x)dx$	$F = \int_a^b (f(x)-g(x))dx$	$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$

Differentialgleichungen

					
$yy' + x = 0$	$y' = e^{x-y}$	$2yy' = x$	$y' = x - y$	$y' = x - y + 1$	$y'x + y = 0$

1.Ordnung

$y' = f(x, y) = \frac{dy}{dx}$
$n'(t) = -\lambda \times n(t)$, allgemein löst $n(t) = C \times e^{-\lambda t}$ die DG

Trennen der Variablen

$y' = f(x) \times g(y) = \frac{dy}{dx}$ jede Variable auf eine Seite, dann getrennt Integrieren: $\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + c$

Kurvenschaar-Problem

Idee

1. Kurvenschaar $y = f(x, c)$, nach Konstante auflösen, dann in DG einsetzen um C zu eliminieren
2. Zugehörige DG $y' = g(x, y)$
3. Zugehörige DG der orth. KS $y' = \frac{-1}{g(x,y)}$
4. Kurvenschaar bestimmen $y = f(x, c)$

Beispiel

Bestimmen Sie alle Kurven, die die Geraden durch den Nullpunkt rechtwinklig schneiden.

1. Kurvenschar: $y = k \cdot x \Rightarrow k = \frac{y}{x}$
2. DG: $y' = k \Rightarrow y' = \frac{y}{x}$
3. Orth. Kurvenschar: $y' = -\frac{x}{y}$
4. Umformen: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow \int y \cdot dy = \int -x \cdot dx$
5. Integral Lösen und nach y auflösen

Normalformen

f(x) = Rechnung in x, g(y) = Rechnung in y

- $y' = f(x) + g(y)$ 1. Fall
- $y' = f(x) \cdot g(y)$ 2. Fall

Integration durch Substitution

1. Fall

- $y' = f(ax + by + c)$
- $u = ax + by(x) + c => y' = f(u)$, $u' = a + by'(x)$
- in u' für y' die ursprüngliche Gleichung $y' = f(u)$ einsetzen

Beispiel

- $y' = x + y$
- $u = x + y$
- $u' = 1 + y' = 1 + u$

- $\frac{du}{dx} = 1 + u$
- $\int \frac{1}{1+u} \cdot du = \int dx \Rightarrow ln(1+u) = x + c \Rightarrow 1 + u = k \cdot e^x$
- $1 + x + y = k \cdot e^x \Rightarrow y = k \cdot e^x - x - 1$

2. Fall

- $y' = f(\frac{y}{x})$ => $y' = f(u)$
- $u = \frac{y}{x}$, $u(x) \times x = y$ => $u'(x) \times x + u(x) = y'$
- $y' = u'x + u$ in $y' = f(u)$ eingesetzt und aufgelöst ergibt: $u' = \frac{1}{x}(f(u) - u)$ (anschliessend trennen der Variablen)

Beispiel:

- DG: $y' = \frac{3y^2+xy}{x^2} = 3(\frac{y}{x})^2 + \frac{y}{x}$
- $u = \frac{y}{x} \Rightarrow f(u) = 3u^2 + u$
- $u' = \frac{1}{x} \cdot (f(u) - u) = \frac{1}{x} \cdot (3u^2 + u - u) = \frac{1}{x} \cdot u^2$
- $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \cdot u^2$
- $\int \frac{1}{u2} = \int \frac{1}{x}$
- Integral lösen, nach u auflösen und u einsetzen, danach nach y auflösen

2.Ordnung

$x''(t) = -g$

- $x'(t) = -gt + v_0$
- $x(t) = -gt^2 \frac{1}{2} + v_0 t + s_0$ => allgemeine Lösung
- $v(0) = 0, s(0) = 0$ => $x(t) = -gt^2 \frac{1}{2}$

Linerare DG (1.O)

Normalformen

- $y' + f(x) \times y = g(x)$ -> inhomohene DG 1.O
- $y' + f(x) \times y = 0$ -> homogene DG 1.O

Allgemeine lösung mit freiem Parameter einer **Homogenen DG** (durch trennen der Variabeln)

- $y_h(x) = K \times e^{-\int f(x)dx}$

Lösung einder **Inhomogenen DG**

1. LDG als homogene lösen -> y_h
2. $y_p = K(x) \times e^{-\int f(x)dx}$
   (a) $K'(x) = \frac{g(x)}{y_h(x)_{K=1}}$ bestimmen, danach Integrieren
3. Allgemeine Lösung: $y_a(x) = y_h(x) + y_p(x)$
4. Falls Anfangsbedingungen vorhanden, einsetzen und partikuläre Lösung bestimmen

Potenz und Taylor Reihen

Taylor Koeffizient	Taylor Reihe	Konvergenzradius	Taylor Glied
$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, $k = 0, 1, ...$	$t_f(x) = \sum_{k=0}^{inf} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$	$\rho = lim_{k\to\infty} \lvert \frac{a_k}{a_{k+1}} \rvert = lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{\lvert a_k \rvert}}$	$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$

- Innerhalb des Konvergenzradius darf:
  - gliedweise abgeleitet werden
  - gliedweise integriert werden
  - gliedweise addiert, subtrahiert und multipliziert werden
- Fehlerabschätzung
  - alternierender Fall: $Fehler \leq \lvert 1.\, weggelassenes\, Glied \rvert$
  - normaler Fall: $TaylorReihe(k\, Stelle) + Fehler \geq effektiver\, Wert$

Beispiele Taylorreihen

$arcsin(x), \lvert x \rvert < 1$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots$	$cos(x), x \in R$	$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \cdots$
$tan(x), \lvert x \rvert < \frac{\pi}{2}$	$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!} B_{2k} x^{2k-1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots$	$ln(1+x), -1 < x \leq 1$	$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \cdots$
$(1+x)^a, \lvert x \rvert < 1$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots$	$e^x, x \in R$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$
$sin(x), x \in R$	$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots$	$arctan(x), \lvert x \rvert < 1$	$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \cdots$
$arccos(x), \lvert x \rvert < 1$	$= \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots\right)$		

Beispiel Herleitung Taylorreihe

$f(x) = ln(x)\, bei\, x_0 = 1$

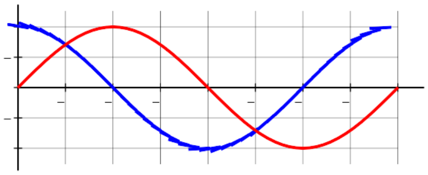
Ableitung	Koeffizient	Formel	Glied
$f = ln(x)$	$a_0 = 0$	$\frac{f(1)}{0!}(x-1)^0$	0
$f' = \frac{1}{x}$	$a_1 = 1$	$\frac{f'(1)}{1!}(x-1)^1$	$1(x-1)$
$f'' = \frac{-1}{x^2}$	$a_2 = \frac{-1}{2}$	$\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2$	$\frac{-1}{2}(x-1)^2$
$f''' = \frac{2}{x^3}$	$a_3 = \frac{1}{3}$	$\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$	$\frac{1}{3}(x-1)^3$
$f'''' = -\frac{6}{x^4}$	$a_4 = \frac{-1}{4}$	$\frac{f''''(1)}{4!}(x-1)^4$	$\frac{-1}{4}(x-1)^4$
		$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$	

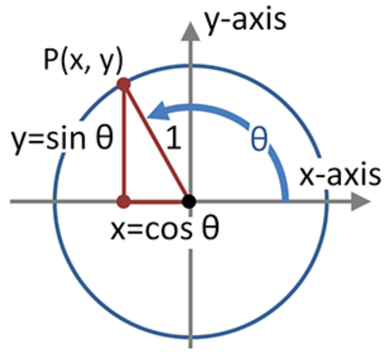
$(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{1}{5}(x-1)^5 - \frac{1}{6}(x-1)^6 + O((x-1)^7)$

(converges when $\lvert 1 - x \rvert < 1$)

Diverses

Trigonometrische Funktionen





Polynome

Ein Polynom n-ter Ordnung: $p(x) = a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, x \in R, a_n \neq 0$

Eigenschaften:

- Differenzen und Summen von Polynomen sind wieder Polynome.
- Produkte von Polynomen sind wieder Polynome. Bsp: $p(2) \times p(3) = p(5)$
- Die Division von Polynomen ergiebt wieder ein Polynom und ev. einen Rest.

Beispiel für Polynomdivision:

$2x^3$	$+5x^2$	$+1x$	$\div(x-5)$	$=$	$2x^2 - 5x$ Rest $-24x$
$-2x^3$	$-10x^2$		$2x^2 \times (x-5)$	$=$	$2x^3 - 10x^2$
0	$-5x^2$	$+1x$	$-5x \times (x-5)$	$=$	$-5x^2 + 25x$
	$-(-5x^2)$	$-25x$			
	0	$-24x$			Rest: $-24x$

Hornerschema

Auswertung einer Funktion an einer bestimmten Stelle.

Sei die Funktion $F(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = (x-2)(x^2 - x - 12)$

Diese an $x = 2$ ausgewertet:

x=2	x^3	$-3x^2$	$-10x$	24
	1	-3	-10	24
		2	-2	-24
	1	-1	-12	0
Rest:	x^2	$-x$	-12	

Hier wurde die Nullstelle $x = 2$ abgespalten.

Begriffe der Funktionen

Extrema

$f'(x) = 0 \, dann \, f''(x_0) < 0 \rightarrow Max, \; f''(x_0) > 0 \rightarrow Min$

Wendestelle

$f''(x) = 0 \, dann \, f'''(x_0)! = 0$

Ganz-Rationale Funktion

Eine Ganz-Rationale Funktion lässt sich so schreiben: $f(x) = a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Gebrochen-Rationale Funktion

Eine Gebrochen-Rationale Funktion: $f(x) = \frac{a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_n x^n + ... + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} = \frac{p(m)}{p(n)}$, wobei der Grad der Polynome nicht gleich sein muss.

Definitionslücken

Sie sind Stellen, an denen die Funktion nicht definiert ist. Z.B.: Nenner der gleich 0 ist. Man unterscheidet 2 Arten von Definitionslücken:

- Polstellen: Nach dem vollständigen Kürzen, besteht immernoch die Nullstelle des Nenners.
- hebbare Definitionslücken: Nach vollständigem Kürzen verschwindet die Nullstelle des Nenners.
- Stopfen der Def. Lücke: Wert der hebbaren Lücke in den gekürzten Bruch einsetzen.

Wichtig: Kommt eine Polstelle mehrmals vor: $(x-a)^n$, so ist dies eine n-fache Polstelle. Ist die Vielfachheit gerade, so findet kein Vorzeichenwechsel statt.

Nullstellen

Man kann die Nullstellen bestimmen, indem man:

- bei einer "Ganz-Rationalen Funktion" diese gleich NULL setzt.
- bei einer "Gebrochen-Rationalen Funktion" den Zähler gleich NULL setzt.

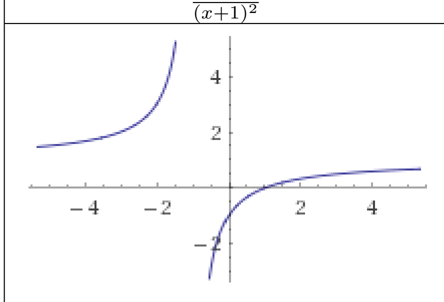
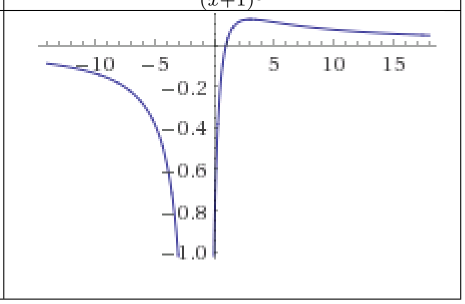
Asymptoten

Sind Geraden, denen sich eine Kurve beliebig nahe annähert. (Limes!) Wir unterscheiden 2 Arten:

- bei Polstellen (nicht hebb. Deflücke): Die Kurve einer gebrochen-rationalen Funktion schmiegt sich der Gerade bei x=Polstelle an. Es bildet sich eine senkrechte Asymptote.
- für grosse x: $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ im Falle:
  - $grad(g) < grad(h)$: x-Achse als wagrechte Asymptote
  - $grad(g) = grad(h)$: Gerade mit der Gleichung: $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$
  - $grad(g) = 1 + grad(h)$: schiefe Asymptote, durch Polynomdivision

Man beachte beim Zeichnen die Vielfachheit der Polstelle:

- Gerade Anzahl: Vorzeichenwechsel
- Ungerade Anzahl: Kein Vorzeichenwechsel

<table>
<tr><td>Gerade</td><td>Ungerade</td></tr>
<tr><td>$\frac{x^2-1}{(x+1)^2}$</td><td>$\frac{x^2-1}{(x+1)^3}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Beispiele:

Funktion	Definitionslücke	Nullstelle
$f(x) = \frac{(x+2)^2}{(x+4)^3 x^2}$	P:-4(x3), 0(x2), H: keine	N:-2(x2)

Betrachten wir die Funktion: $f(x) = \frac{2x^2+x^2+x}{1-x^2}$
Nullstelle: $x = 0$
Definitionslücken: x =1 (Polstelle, 1fach), $x = -1$ (Polstelle, 1fach)
Asymptoten: $x = 1$, $x = -1$, $x = -2x - 1$ (durch Poly.division)

Sätze

- $sin(\alpha + \beta) = sin(\alpha) \cdot cos(\beta) + cos(\alpha) \cdot sin(\beta)$
- $sin(\alpha - \beta) = sin(\alpha) \cdot cos(\beta) - cos(\alpha) \cdot sin(\beta)$
- $cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha) \cdot cos(\beta) + sin(\alpha) \cdot sin(\beta)$
- $sin(\alpha - \beta) = cos(\alpha) \cdot cos(\beta) - sin(\alpha) \cdot sin(\beta)$

Logarithmusfunktion

Rechenregeln:

$log_a(u \cdot v) = log_a(u) + log_a(v)$
$log_a(\frac{u}{v}) = log_a(u) - log_a(v)$
$log_a(u^k) = k \cdot log_a(u)$
$log_a(\sqrt[n]{u}) = \frac{1}{n} \cdot log_a(u)$

Allgemein:

$$\boxed{y = a^x \Rightarrow ln(y) = x \cdot ln(a) \Rightarrow x = \frac{ln(y)}{ln(a)}}$$

$$\boxed{y = a^x \Rightarrow log_a(y) = x \cdot log_a(a) \Rightarrow x = log_a(y)}$$

Umkehrfunktion:

$$\boxed{y = log_a(x)}$$

Basiswechsel:

$$\boxed{log_a(x) = \frac{log_{10}(x)}{log_{10}(a)} = \frac{ln(x)}{ln(a)}}$$

Umformungsbeispiele:

$log_{10}(x) = -4.0404$	$\Rightarrow$	$x = 10^{-4.0404} = \frac{1}{10^{4.0404}}$
$ln(x) = -9.0907$	$\Rightarrow$	$x = e^{-9.0907} = \frac{1}{e^{9.0907}}$
$log_3(x) = 5$	$\Rightarrow$	$x = 3^5 = 243$