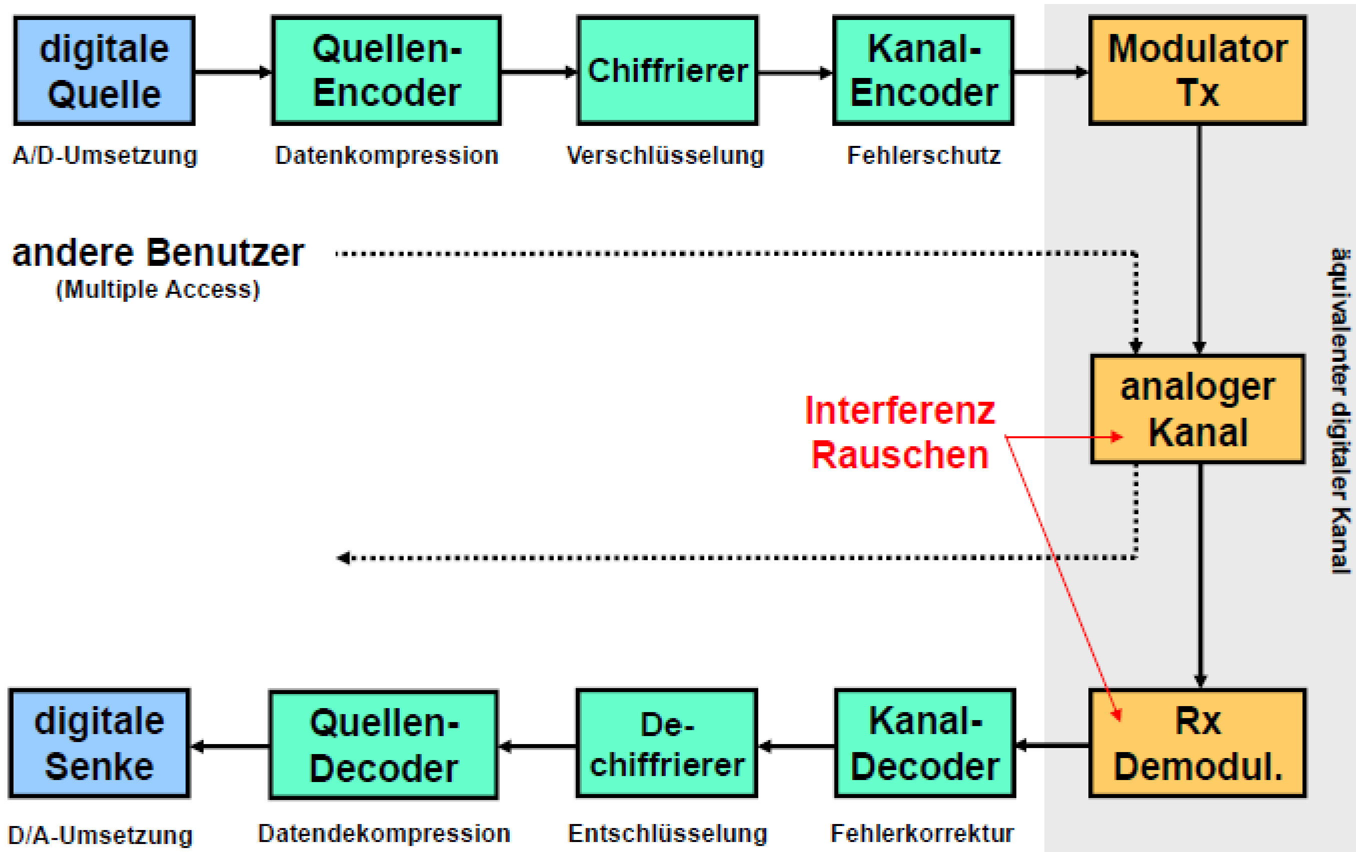
INT Zusammenfassung

Übertragungssysteme



Quellencodierung

- Reduktion der Menger digitaler Daten
- Entfernen überflüssiger Informationen
- Verlustfreie Codierung
- Verlustbehaftete Kompression (Bilder, Video, Audio)

Diskrete Informationsquellen

DMS (Discrete Memoryless Source)

X[n] unabhängig, besitzen identische Wahrscheinlichkeitsverteilung.

BMS (Binary Memoryless Source)

M = 2, d.h. $P_x(x_1)$ = p und $P_x(x_2)$ = 1-p

BSS (Binary Symmetric Source)

$P_x(x_1) = P_x(x_2) = 0.5$ "coin-flipping"

Quellencodierungstheorem (Shannon, 1948)

Die Quelle kann verlustlos codiert werden, solange die Coderate (Durchschnitt. Codelänge) R $\geq$ H.
Umgekehrt, wenn R $<$ H, kann die Quelle auf keinen Fall verlustlos codiert werden.

Optimale Codierung

Mittlere Codewortlänge = Entropie

BSC - Binary Symmetric Channel

Kapazität $C = maxp(x)[H(Y) - H(Y|X)]$, $C_{BSC} = 1 - h(\varepsilon)^{(Bit/Kanalbenützung)}$

Kanaleigenschaften

- Rauschen im Kanal beschränkt nicht die Zuverlässigkeit der Übertragung, nur die Übertragungsrate
- Verschiedene Kanäle mit einer Zahl vergleichbar
- Je grösser die Blocklänge N, desto komplexer der decoder

AWGN-Kanal

(Additive White Gaussian Noise)
Coderate

$$R = \frac{\#Infobits}{\#Codebits}$$

Kapazität:

$$C_{AWGN} = B \bullet log2(1 + \frac{Signalleistung}{Bandbreite[Hz] \bullet Rauschleistungsdichte[W/Hz]}$$

Entropie

Symboldauer	T
Symbolrate	$R = 1/T$
Quellensymbol (Zufallsvariable)	$X[n]$
Alphabet	$A = (x_1,x_2,..,x_M)$
Wahrscheinlichkeit	$P(X = x_m) = P_X(x_m), m = 1, \ldots, M$
Wahrscheinlichkeitsverteilung von X	$\sum_{m=1}^{M} P_X(x_m) = 1$

Informationsgehalt

Der Informationsgehalt eines Ereignisses $X = x_m$ ist wie folgt definiert:

$$I_x(x_m) = \log_2\left(\frac{1}{P_X(x_m)}\right) [\text{bit}]$$

Für Ereignisse von 2 (oder mehreren) Zufallsvariablen X und Y gilt sinngemäss:

$$I_x(x_m) = \log_2\left(\frac{1}{P_{XY}(x_i, y_k)}\right) [\text{bit}]$$

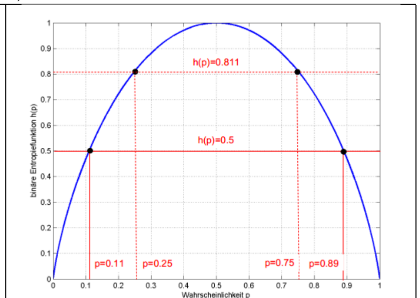
Für 2 unabhängige Symbole X und Y gilt:

$$I_{XY}(x_i, y_k) = I_X(x_i) + I_Y(y_k)$$

Entropie

Datenübertragung: die maximale (verlustlose) Kompression = Entropie

$H(X) = \sum_1^M P_x(x_i) \bullet log2(\frac{1}{P_x(x_i)})[bit]$



Huffman Code

Eigenschaften

- Prefixfreier Code
- Huffman-Codes sind optimal
- Minimale mittlere Codewortlänge

Nachteile

- Huffman-Codes hängen stark von der Quellenstatistik ab
- Quellenstatistik muss im voraus bekannt sein (ev. zuerst „messen“)
- Komplexität wächst exponentiell mit der Blocklänge n

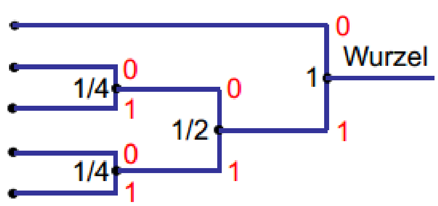
Codierung von n Symbolen eine DMS:

$H(X) \leq R \leq H(X) + \frac{1}{n}$

Algorithmus

1. nach Wahrscheinlichkeiten ordnen
2. Zwei Symbole mit kleinster Wahrscheinlichkeit zusammenfassen, neuer Knoten hat Summe der Wahrscheinlichkeiten
3. -> Loop Schritt 1
4. Von der Wurzel aus bei jeder Verzweigung nach oben eine „0“ und nach unten eine „1“ eintragen (auch umgekehrt möglich) //Konstruktion Codebuch

Codewort	X	P_X
0	A	1/2
1 0 0	B	1/8
1 0 1	C	1/8
1 1 0	D	1/8
1 1 1	E	1/8



mittlere Codewortlänge $E[L]$, respektive Rate R

R = Warscheinlichkeit * Codelänge (bsp: 1 * 1/8 + (3 * 1/8) * 4 = 2)

$R = E[L] = \sum_{m=1}^{M} P_X(x_m) \cdot L(x_m)$ mit der Wahrscheindlichkeit $P_X(x_m)$ und der Länge $L(x_m)$ für ein Zeichen

Lempel-Ziv

Vorteile

- Unabhängig von der Quellenstatistik
- Universelle Anwendung
- Asymptotisch optimal, d.h. Codewortlänge R -> H(X) (von oben)

Nachteile

- Anzahl Strings / Grösse des Wörterbuchs beschränkt
- Schlechte Kompression bei kleinen Eingangsbitfolgen

Algorithmus

1. Eindeutige Unterteilung der Symbolfolge Strings variabler Länge, Unterscheidung nur in 1 Bit
2. Encoding eines Strings: [Position des Präfix, neues Bit]

Beispiel

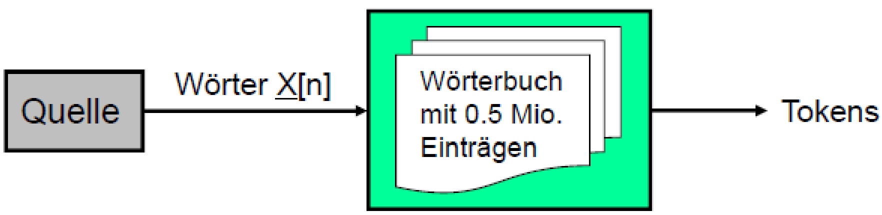
Data: 0 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 . . .

Wörterbuch-Nr.	Input	Output
1	0 -> neuer String; neues Bit = 0	[0000 0]
2	1 -> neuer String; neues Bit = 1	[0000 1]
3	00 -> 0 gleich wie 1. String; neues Bit = 0	[0001 0]
4	001 -> 00 gleich wie 3. String; neues Bit = 1	[0011 1]
5	10 -> 1 gleich wie 2. String; neues Bit = 0	[0010 0]
6	000 -> 00 gleich wie 3. String; neues Bit = 0	[0011 0]
7	101 -> 10 gleich wie 5. String; neues Bit = 1	[0101 1]
8	0000 -> 000 gleich wie 6. String; neues Bit = 0	[0110 0]
9	01 -> 0 gleich wie 1. String; neues Bit = 1	[0001 1]
10	010 -> 01 gleich wie 9. String; neues Bit = 0	[1001 0]
. . .	. . .	. . .

Statisches Wörterbuch

Wie oft muss ein Wort im Wörterbuch sein, damit Kompressionsrate R<1?

- Anzahl der Wörter = N
- P sei die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wort im Buch gefunden wird
- Mittlere Wortgrösse: 5 Bytes bzw. 40 Bit



$N \cdot 40\ Bit$ $\quad\quad$ $N \cdot P \cdot 20\ Bit + N \cdot (1-P) \cdot 48\ Bit$

LZ77

1. Erstes Symbol des Vorschau-Buffers im Such-Buffer suchen
   (a) rückwärts von rechts nach links
2. Token der längsten (letzten) Übereinstimmung ausgeben
   (a) Token = (Offset, Anzahl Zeichen, "Nächstes Zeichen")
   (b) Token-Länge: $\log_2(S+1) + \log_2(L+1) + 8$ typisch : 11 + 5 + 8 = 24 Bit
   (c) wenn keine Übereinstimmung: (0,0, nächstes Symbol)
3. 3. Schiebefenster um Länge +1 nach rechts verschieben

LZ78

LZW

Initialisierung I=[]

1. neues Symbol x zu String I hinzufügen => I = Ix setzen
   (a) Ix im Wörterbuch verzeichnet? Wenn ja, dann zu step 1. sonst zu step 3.
2. -
   (a) Output = Wörterbuch-Pointer von I
   (b) Neuer Wörterbucheintrag mit Phrase Ix
   (c) I = "x" setzen

Beispiel Encoding

Text: ABBABABAC

Anfangswörterbuch: $1:$ A, $2:$ B, $3:$ C

Momentane Buchstaben	String I	verzeichnet	WB-Eintrag	Output
A	A	✓		
A	AB	×	4 : AB	1
B	B	✓		
B	BB	×	5 : BB	2
B	B	✓		
B	BA	×	6 : BA	2
A	A	✓		
AB	AB	✓		
AB	ABA	×	7 : ABA	4
A	A	✓		
AB	AB	✓		
ABA	ABA	✓		
ABA	ABAC	×	8 : ABAC	7
C	C	✓		
C	C,eof			3

Bsp Decoding (Lösung ist in String J)

68	68	82	99	77	65	82	256	82
D	E	R		M	A	R		R

Input	String I	String J	WB
68	D	D	
69	D	E	256: DE
82	E	R	257: ER
95	R	_	258: R_
77	_	M	259: _M
65	M	A	260: MA
82	A	R	261: AR
256	R	DE	262: RD
82	DE	R	263: DER

RLE (Run-Length-Encoding)

- 333333333 →(@,9,3)
- @ →(@,1,@)

Wird nur gebraucht wenn Token nicht länger als Orginaltext.

PN-Sequenzen

Pseude Noise Sequenzen

LSFR

- Periode $P \leq 2^n - 1$
- Pseudozufall
- Feedbackpolynom →prim. Polynom zB:(3,1,0)

Für (Pseudo-)Randomgenerator

$$a_0 = (a_{18} + a_5 + a_2 + a_1) modulo 2$$

Zufallseigenschaften der m-Sequenzen

- m-Sequenzen sind fast ausgeglichen in der Anzahl "0" und "1"
- Häufigkeit von runs der Länge k beträgt $(1/2)^k$ für $k \leq (n-1)$ und $12^{(k-1)}$ für $k = n$. Ein „run“ ist das Aufeinanderfolgen mehrere Nullen oder Einsen.
  - So weist zum Beispiel die Bitfolge ... 00110101000111001101... folgende runs auf: Run 1 kommt 6x vor, run 2 kommt 4x vor und run 3 kommt 2x vor.
- Die m-Sequenz der Länge P und die zyklisch verschobene Kopie haben fast 50 % übereinstimmende Bits und 50 % verschiedene Bits
- Maximallängensequenz →PN-Sequenz
- PN-Sequenz ↛Maximallängensequenz

PrimitivePolynome

BlockCodes

- N: Anzahl Bits in einem Wort nach dem Encoding i.e [1,1,1,0,1,1] -> 6
- K: 2^K = Anzahl Infoworte, i.e {[1,1,1],[1,0,1]} -> 2 oder Anzahl Bits in einem Wort vor dem Encoding
- Coderate $R = \frac{K}{N}$
- Minimum Distance Encoding
  - wenige Fehler sind warscheinlicher als viele
  - Zuweisung and "nächstgelegenes" Codewort

Hamming-Gewicht $w_H(x)$

entspricht der Anzahl "1" im Codewort x

Hamming-Distanz $d_H(x_i, x_j)$

entspricht der Anzahl unterschiedlicher Positionen in x_i und x_j

Minimaldistanz d_{min}

$d_{min} = min_{ij} d_H(x_i, x_j) = min_{ij} w_H(x_i + x_j) = min_k w_H(x_k) = w_{min} (i \neq j)$
Für linearen (N,K) Block-Codes

Beispiel: (3,2)-Blockcode

Anzahl Informationsbits (Infowort u) = $K = 2$, Länge eines Codewortes (x) = $N = 3$

$2^K = 4$ Infoworte

Coderate = $R = \frac{K}{N}$

$A = \{[00], [01], [10], [11]\}$

even Parity

$C = \{[000], [101], [110], [011]\}$(vorderstes Bit ist hier Paritybit)

Begriff ‚systematischer Block-Code ’

Infowort “enblock” in Codewort. Cw = Parity+Iw

Begriff ‚linearer (N,K) Block-Code C’

Falls die modulo-2 Summe zweier Codewörter wieder ein Codewort ergibt, dann ist der Block Code linear.

Begriff ‚linearer, zyklischer (N,K) Block-Code C’

Falls die zyklische Verschiebung eines Codeworts wieder ein Codewort ergibt, ist der Code ausser- dem zyklisch. Aufgrund dieser Eigenschaft sind die verschiedenen Codeworte sehr einfach mit Hilfe eines LFSR (Linear Feedback Shift Register) realisierbar.

Generator-Matrix

Für jeden linearen (N, K) Code gibt es eine $K \times N$ Generator-Matrix G

$$[x_0, \ldots, x_{N-1}] = [u_0, \ldots, u_{K-1}] \cdot G$$

Die Generator-Matrix hat die Form $G = [PI_K]$, I_K:$K \times K$-Einheitsmatrix

Parity-Check-Matrix

Jeder lineare (N, K) Code hat eine $(N - K) \times N$ Parity-Check-Matrix H

$$[x_0, \ldots, x_{N-1}] \cdot H^T = [0, \ldots, 0]$$

Wenn $G = [PI_K]$ in systematischer Form, dann $H = [I_{N-K}P^T]$

Syndrom

$\vec{s} = [s_0, \ldots, s_{N-K-1}] = \vec{y} \cdot H^T = (\vec{x} + \vec{e}) \cdot H^T = \vec{e} \cdot H^T$

Wobei $\vec{e}$ der Fehler ist und $\vec{y}$ das neue Codewort mit dem Fehler addiert (also ein potenziell falsches Wort, falls $\vec{e} \neq \vec{0}$

Das Syndrom ist nur vom Fehler abhängig. Falls keine Fehler übertragen wurden ist $\vec{s} = \vec{0}$.

Fehlererkennung

alle Muster mit $\leq (d_{min} - 1)$ Fehler sind erkennbar

Fehlerkorrektur

$t \leq \lfloor (d_{min} - 1)/2 \rfloor$

(N,K,t)BC = NK-BC der t Fehler korrigieren Kann

$$P = \sum_0^t \left(\begin{matrix} N \\ i \end{matrix} \right) \bullet \varepsilon^i \bullet (1 - \varepsilon)^{N-i} = \sum_0^t \left(\frac{N!}{i! \bullet (N - i)!}\right) \bullet \varepsilon^i \bullet (1 - \varepsilon)^{N-i}$$

Wahrscheinlichkeit für i Fehler pro Code Wort

$$\left(\begin{matrix} N \\ i \end{matrix} \right) \bullet \varepsilon^i \bullet (1 - \varepsilon)^{N-i} = \frac{N!}{i! \bullet (N-i)!} \bullet \varepsilon^i \bullet (1 - \varepsilon)^{N-i}$$