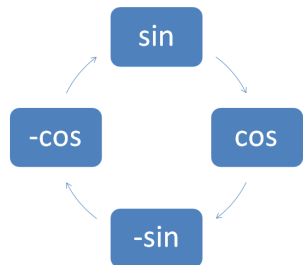


# Stammfunktion und unbestimmtes Integral

## Grundintegrale (+ c jeweils weggelassen)

e / ln	sin / cos / tan	allgemein
$\int e^x \cdot dx = e^x$	$\int \sin^2(x) \cdot dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$	$\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$
$\int e^{-2x} = \frac{e^{-2x}}{-2}$	$\int \cos^2(x) \cdot dx = \frac{1}{2}(x + \sin(x) \cdot \cos(x))$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{ a }$
$\int \frac{1}{e} = \frac{x}{e}$	$\int \tan^2(x) = \tan(x) - x$	$\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c, a > 0, a \neq 1$
$\int b e^{ax} \cdot dx = \frac{b}{a} e^{ax}$	$\int \frac{1}{\sin(x)} = \ln(\sin(\frac{x}{2})) - \ln(\cos(\frac{x}{2}))$	$\int e^{\ln(a) \cdot x} \cdot dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c, a > 0, a \neq 1$
$\int e^{-2x+1} = \frac{e^{-2x+1}}{-2}$	$\int \frac{1}{\cos(x)} = \ln(\sin(\frac{x}{2}) + \cos(\frac{x}{2})) - \ln(\cos(\frac{x}{2}) - \sin(\frac{x}{2}))$	$\int \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x}$
$\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln  x $	$\int \frac{1}{\tan(x)} = \ln(\sin(x))$	$\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln  x $
$\int \frac{1}{x-5} \cdot dx = \ln  x-5 $	$\int \frac{1}{\sin^2(x)} = -\cotan(x)$	$\int \frac{1}{x^2+a^2} \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot \arctan(\frac{x}{a})$
$\int \frac{1}{2x-5} \cdot dx = \ln  x-5 $	$\int \frac{1}{\cos^2(x)} = \tan(x)$	$\int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \tan^{-1}(x)$
$\int \frac{1}{e^x} = -e^{-x}$	$\int \frac{1}{\tan^2(x)} = -x - \cotan(x)$	$\int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \frac{1}{2}(\ln(x+1) - \ln(1-x))$
$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x$	$\int x \cdot \sin(x) \cdot dx = \sin(x) - x \cdot \cos(x)$	$\int \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$
$\int x \cdot \ln(x) dx = \frac{1}{4}x^2(2 \cdot \ln(x) - 1)$	$\int \sin(ax) \cdot dx = -\frac{\cos(ax)}{a}$	Tipps
	$\int x \cdot \cos(x) \cdot dx = x \cdot \sin(x) + \cos(x)$	$\tan = \frac{\sin}{\cos}$
	$\int 2x \cdot \cos(x) \cdot dx = 2x \cdot \sin(x) + 2\cos(x)$	$e^{\ln(x)} = x$
	$\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \int \tan(x) = -\ln(\cos(x))$	$\ln(e^x) = x$
$u = \frac{y}{x}$	$\int \sin^2(ax) \cdot dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a}$	$u^{\frac{3}{2}} = (u^{\frac{1}{2}})^3 = \sqrt{u}^3 = u \cdot \sqrt{u}$
	$\int \sin(x) \cdot \cos(x) \cdot dx = -\frac{1}{2}\cos^2(x)$	$\ln(x)' = \frac{1}{x}$
	$\int \tan(x) \cdot \cos(x) \cdot dx = \int \sin(x) \cdot dx = -\cos(x)$	$(e^x)' = e^x$

### Ableiten



## Elementare Rechenregeln

### Regel vom konstanten Faktor

$$\int k \cdot f(x) \cdot dx = k \cdot F(x) + c$$

- $\int 25e^x \cdot dx = 25 \cdot e^x + c$
- $\int -13x^3 \cdot dx = -13 \cdot \frac{x^4}{4} + c$

### Skalierungsregel

$$\int f(k \cdot x) \cdot dx = \frac{F(k \cdot x)}{k} + c$$

- $\int e^{\frac{3}{2}x} \cdot dx = \frac{e^{\frac{3}{2}x}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} \cdot e^{\frac{3}{2}x}$

### Translationsregel

$$\int f(x+k) \cdot dx = F(x+k) + c$$

- $\int \frac{1}{x-6} \cdot dx = \ln |x-6| + c$

### Summenregel

$$\int f(x) \pm g(x) \cdot dx = F(x) \pm G(x) + c$$

- $\int (8x^3 - 4x + 2) \cdot dx = 8 \cdot \frac{x^4}{4} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 2x + c = 2x^4 - 2x^2 + 2x + c$

## Produktregel / Partielle Integration

$$\int f(x) \cdot g(x) \cdot dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x) \cdot dx$$

$$\bullet \int x^2 \cdot e^x \cdot dx = e^x \cdot x^2 - \int e^x \cdot 2x \cdot dx = e^x \cdot x^2 - 2[x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x \cdot dx] = e^x \cdot x^2 - 2xe^x + 2e^x + c = e^x[x^2 - 2x + 2] + c$$

Bemerkung: Hier wurde  $x^2$  jeweils abgeleitet und  $e^x$  integriert.

$$\bullet \int x \cdot \cos(x) \cdot dx = \sin(x) \cdot x - \int 1 \cdot \sin(x) \cdot dx = \sin(x) \cdot x + \cos(x) + c$$

Bemerkung: Hier wurde  $x$  abgeleitet und  $\cos(x)$  integriert.

## Integration und Substitution

$$\bullet \int f(u(x)) \cdot u' \cdot dx = \int f(u) \cdot du$$

$$\bullet \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$$

$$\bullet \frac{dx}{du} = u'(x)$$

Trick: Zähler eines Bruches so korrigieren, dass es der Ableitung der Funktion entspricht. Anschliessend kann  $u' \cdot dx$  durch  $du$  ersetzt werden.

$$\bullet \int \frac{1}{(4x+5)^3} \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{4}{(4x+5)^3} \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{u'}{u^3} \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{du}{u^3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{u^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{8u^2} + c = -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(4x+5)^2} + c \text{ wobei } dx = \frac{du}{u'}$$

$$\bullet \int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}} \cdot dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{u'} = \int \frac{x \cdot du}{-2x \cdot \sqrt{u}} = -\int \frac{du}{2 \cdot \sqrt{u}} = -\frac{1}{2} \cdot u^{\frac{1}{2}} \cdot 2 + c = -\sqrt{u} + c = -\sqrt{a^2 - x^2} + c$$

Spezialfall:

$$\bullet \int \frac{u'(x) \cdot dx}{u(x)} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|u(x)| + c$$

$$\bullet \int \frac{x}{4+x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x}{4+x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \cdot \ln|u| + c = \frac{1}{2} \cdot \ln|4+x^2| + c$$

## Partialbruchzerlegung

Wird gebraucht um gebrochenrationale Funktionen zu integrieren:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} \cdot dx$$

Man unterscheidet:

- Grad Zähler  $\geq$  Grad Nenner = unechtgebrochen
- Grad Zähler  $<$  Grad Nenner = echtgebrochen

### Unechtgebrochen

Mit Hilfe der Polynomdivision lassen sich solche Quotienten zerlegen in ein Polynom und in einen echtgebrochenen Quotienten

### Echtgebrochen

Grundsätzlich muss man das Polynom in Faktoren zerlegen die höchstens quadratisch sind.

**1. Fall**  $q(x)$  zerfällt in verschiedene lineare Faktoren (hat  $m$  einfache Nullstellen):

$$\bullet q(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$$

Ansatz:

$$\bullet \int \frac{p(x)}{q(x)} = \int \frac{A_1}{(x-x_1)} \cdot dx + \int \frac{A_2}{(x-x_2)} \cdot dx + \dots + \int \frac{A_m}{(x-x_m)} \cdot dx$$

$$\bullet \int \frac{3x-5}{x^2+2x-8} \cdot dx = \int \frac{A}{(x-2)} \cdot dx + \int \frac{B}{(x+4)} \cdot dx$$

$$\bullet \frac{3x-5}{x^2+2x-8} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+4)} \quad | \cdot (x-2) \cdot (x+4)$$

$$\bullet 3x-5 = A(x+4) + B(x-2) \quad | x \text{ einsetzen und } A, B \text{ ausrechnen (z.B. } x=-4, x=2)$$

$$\bullet A = \frac{1}{6}; B = \frac{17}{6}$$

$$\bullet \int \frac{3x-5}{x^2+2x-8} \cdot dx = \frac{1}{6} \cdot \int \frac{1}{(x-2)} \cdot dx + \frac{17}{6} \cdot \int \frac{1}{(x+4)} \cdot dx = \frac{1}{6} \cdot \ln|x-2| + \frac{17}{6} \cdot \ln|x+4| + C$$

**2. Fall**  $q(x)$  zerfällt in lineare Faktoren, es gibt mindestens einen Faktor, der mehrfach vorkommt:

- $q(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = (x+1)^2 \cdot (x-5)$

Ansatz:

- $\int \frac{p(x)}{q(x)} = \int \frac{A_1}{(x-x_i)} \cdot dx + \int \frac{A_2}{(x-x_i)^2} \cdot dx + \dots + \int \frac{A_k}{(x-x_i)^k} \cdot dx$
- $\int \frac{x^2+15x+8}{x^3-3x^2-9x-5} \cdot dx = \int \frac{A}{(x+1)} \cdot dx + \int \frac{B}{(x+1)^2} \cdot dx + \int \frac{C}{(x-5)} \cdot dx$
- $\frac{x^2+15x+8}{x^3-3x^2-9x-5} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x-5)} \mid \cdot (x+1)^2 \cdot (x-5)$
- $x^2 + 15x + 8 = A(x+1)(x-5) + B(x-5) + C(x-5)(x+1)^2 \mid x \text{ einsetzen und A, B, C ausrechnen (z.B. } x=-1, x=5)$
- $A = -2; B = 1; C = 3$
- $\int \frac{x^2+15x+8}{x^3-3x^2-9x-5} \cdot dx = -2 \int \frac{1}{(x+1)} \cdot dx + 1 \int \frac{1}{(x+1)^2} \cdot dx + 3 \int \frac{1}{(x-5)} \cdot dx = -2 \cdot \ln |x+1| + \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + 3 \cdot \ln |x-5| + C$

**3. Fall** Der Nenner enthalte quadr. Faktoren die sich nicht zerlegen lassen:

- $q(x) = x^3 - 6x^2 + 10x = x \cdot (x^2 - 6x + 10)$

Ansatz:

- $\int \frac{p(x)}{q(x)} = \int \frac{B_1x+C_1}{Q(x)^1} \cdot dx + \int \frac{B_2x+C_2}{Q(x)^2} \cdot dx + \dots + \int \frac{B_kx+C_k}{Q(x)^k} \cdot dx$
- $\int \frac{7x^2-19x+30}{x^3-6x^2+10x} \cdot dx = \int \frac{A}{x} \cdot dx + \int \frac{Bx+C}{x^2-6x+10} \cdot dx$
- $\frac{7x^2-19x+30}{x^3-6x^2+10x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-6x+10} \mid \cdot x \cdot (x^2 - 6x + 10)$
- $7x^2 - 19x + 30 = A(x^2 - 6x + 10) + x \cdot (Bx + C) \mid x \text{ einsetzen und A, B, C ausrechnen (z.B. } x=0, x=1, x=-1)$
- $A = 3; B = 4; C = -1$
- $\int \frac{7x^2-19x+30}{x^3-6x^2+10x} \cdot dx = 3 \cdot \int \frac{1}{x} \cdot dx + \int \frac{4x-1}{x^2-6x+10} \cdot dx = 3 \cdot \ln |x| + (*)$ 
  - $(x^2 - 6x + 10)' = 2x - 6 \Rightarrow 4x - 1 = 2 \cdot (2x - 6) + 11$
- $(*) = \int \frac{2(2x-6)+11}{x^2-6x+10} \cdot dx = 2 \cdot \int \frac{2x-6}{x^2-6x+10} \cdot dx + \int \frac{11}{x^2-6x+10} \cdot dx$ 
  - $(1) = 2 \cdot \int \frac{2x-6}{x^2-6x+10} \cdot dx = 2 \cdot \int \frac{du}{u} \cdot dx = 2 \cdot \ln |u| = 2 \cdot \ln |x^2 - 6x + 10|$
  - $(2) = 11 \cdot \int \frac{1}{x^2-6x+10} \cdot dx = 11 \cdot \int \frac{1}{(x-3)^2+1} \cdot dx$  ist von der Form  $k \cdot \int \frac{1}{(x-C)^2+a^2} \cdot dx$
  - $= k \cdot \frac{1}{a} \cdot \arctan\left(\frac{x-C}{a}\right) + C = 11 \cdot \frac{1}{1} \cdot \arctan\left(\frac{x-3}{1}\right) + C$
- $\int f(x) \cdot dx = 3 \cdot \ln |x| + 2 \cdot \ln |x^2 - 6x + 10| + 11 \cdot \arctan(x-3) + C$

## Das bestimmte Integral

### Das Flächenproblem

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = A$$

1. Zwischenwerte  $x_0, x_1, \dots, x_n$  setzen und somit Intervall  $[a, b]$  in Teilintervalle zerlegen.
2. Wähle in jedem Teilintervall eine Zwischenstelle  $\xi_i$

(a)  $A_1 = \Delta x \cdot f(\xi_1)$

(b)  $A_k = \Delta x \cdot f(\xi_k)$

3.  $S_n = A_1 + \dots + A_n = \sum_{k=1}^n A_k = \sum_{k=1}^n \Delta x \cdot f(\xi_k)$

4. Grenzübergang:  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = A \Rightarrow (\Delta x \rightarrow 0)$

**Riemannsche Summen**  $\int_a^b f(x)dx := \lim_{n \rightarrow \infty (\Delta x \rightarrow 0)} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \times \Delta x_i$

## Exakt mit Grenzübergang

$$f(x) = x^2$$

Teile Intervall [0,2] in n gleiche Teile:

Intervall	Breite		Höhe	Fläche
$I_1 = [0 \cdot \frac{2}{n}, 1 \cdot \frac{2}{n}]$	$\Delta x_1 = \frac{2}{n}$	$\xi_1 = 1 \cdot \frac{2}{n}$	$f(\xi_1) = (1 \cdot \frac{2}{n})^2$	$A_1 = \frac{2}{n} \cdot 1^2 \cdot \frac{4}{n^2}$
$I_2 = [1 \cdot \frac{2}{n}, 2 \cdot \frac{2}{n}]$	$\Delta x_2 = \frac{2}{n}$	$\xi_2 = 2 \cdot \frac{2}{n}$	$f(\xi_2) = (2 \cdot \frac{2}{n})^2$	$A_2 = \frac{2}{n} \cdot 2^2 \cdot \frac{4}{n^2}$
$I_k = [(k-1) \cdot \frac{2}{n}, k \cdot \frac{2}{n}]$	$\Delta x_k = \frac{2}{n}$	$\xi_k = k \cdot \frac{2}{n}$	$f(\xi_k) = (k \cdot \frac{2}{n})^2$	$A_n = \frac{2}{n} \cdot n^2 \cdot \frac{4}{n^2}$
$I_n = [(n-1) \cdot \frac{2}{n}, n \cdot \frac{2}{n}]$	$\Delta x_n = \frac{2}{n}$	$\xi_n = n \cdot \frac{2}{n}$	$f(\xi_n) = (n \cdot \frac{2}{n})^2$	$A_k = \frac{2}{n} \cdot k^2 \cdot \frac{4}{n^2}$

Vorgehen

- allgemeines Intervall
- Auswertungsstelle | Wert an AS
- Flächenformel
- $\sum$  bilden

$$S_n = \frac{2}{n} \cdot \frac{4}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{8}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

# Angewandte Integrale

## Fläche zwischen Funktionen

$f$ oberhalb $g$	$g$ und $f$ schneiden sich, $x_i$ Schnittpunkte	Mantelfläche
$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$	$A =  \int_a^{x_1} (f - g)(x)dx  +  \int_{x_1}^{x_2} (f - g)(x)dx  + \dots$	$M_x = 2\pi \times \int_a^b f(x) \times \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

Rotation um die X-Achse (Volumen)	Volumen bei Querfläche	Bogenlänge
$V_x = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$	$V = \int_a^b Q(x)dx$	$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

Schwerpunkt einer Fläche	Schw. e. Fl. zwischen $g(x)$ und $f(x)$ , $g(x) \leq f(x)$ in I	Schwerpunkt eines Rotationskörpers
$S_x = \frac{\int_a^b x \times f(x)dx}{A}$	$S_x = \frac{\int_a^b x \times (f(x) - g(x))dx}{F}$	$S_x = \frac{\pi \int_a^b x \times f^2(x)dx}{V}$
$S_y = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b f(x)^{2dx}}{A}$	$S_y = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b (f^2(x) - g^2(x))dx}{F}$	$S_y = 0, S_z = 0$
$A = \int_a^b f(x)dx$	$F = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$	$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$

# Potenz und Taylor Reihen

Taylor Koeffizient	Taylor Reihe	Konvergenzradius	Taylor Glied
$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, k = 0, 1, \dots$	$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$	$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left  \frac{a_k}{a_{k+1}} \right  = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{ a_k }}$	$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$

- Innerhalb des Konvergenzradius darf:
  - gliedweise abgeleitet werden
  - gliedweise integriert werden
  - gliedweise addiert, subtrahiert und multipliziert werden
- Fehlerabschätzung
  - alternierender Fall:  $Fehler \leq |1. \text{ weggelassenes Glied}|$
  - normaler Fall:  $TaylorReihe(k \text{ Stelle}) + Fehler \geq \text{effektiver Wert}$

## Beispiele Taylorreihen

$\arcsin(x),  x  < 1$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \dots$	$\cos(x), x \in R$	$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots$
$\tan(x),  x  < \frac{\pi}{2}$	$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!} B_{2k} x^{2k-1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots$	$\ln(1+x), -1 < x \leq 1$	$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots$
$(1+x)^a,  x  < 1$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots$	$e^x, x \in R$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$
$\sin(x), x \in R$	$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots$	$\arctan(x),  x  < 1$	$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \dots$
$\arccos(x),  x  < 1$	$= \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \frac{\pi}{2} - \left( x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \dots \right)$		

## Beispiel Herleitung Taylorreihe

$f(x) = \ln(x)$  bei  $x_0 = 1$

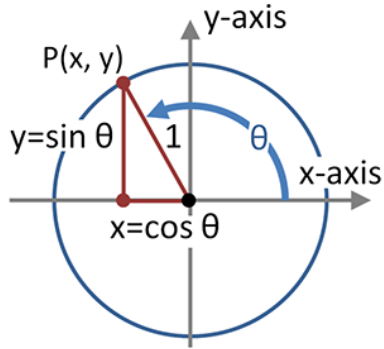
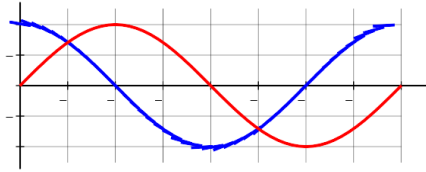
Ableitung	Koeffizient	Formel	Glied
$f = \ln(x)$	$a_0 = 0$	$\frac{f^{(1)}(1)}{0!} (x-1)^0$	0
$f' = \frac{1}{x}$	$a_1 = 1$	$\frac{f^{(1)}(1)}{1!} (x-1)^1$	$1(x-1)$
$f'' = -\frac{1}{x^2}$	$a_2 = -\frac{1}{2}$	$\frac{f^{(2)}(1)}{2!} (x-1)^2$	$-\frac{1}{2}(x-1)^2$
$f''' = \frac{2}{x^3}$	$a_3 = \frac{1}{3}$	$\frac{f^{(3)}(1)}{3!} (x-1)^3$	$\frac{1}{3}(x-1)^3$
$f'''' = -\frac{6}{x^4}$	$a_4 = -\frac{1}{4}$	$\frac{f^{(4)}(1)}{4!} (x-1)^4$	$-\frac{1}{4}(x-1)^4$
		$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$	

$$(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{1}{5}(x-1)^5 - \frac{1}{6}(x-1)^6 + O((x-1)^7)$$

(converges when  $|1-x| < 1$ )

## Diverses

# Trigonometrische Funktionen



## Polynome

Ein Polynom n-ter Ordnung:  $p(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, x \in R, a_n \neq 0$

Eigenschaften:

- Differenzen und Summen von Polynomen sind wieder Polynome.
- Produkte von Polynomen sind wieder Polynome. Bsp:  $p(2) \times p(3) = p(5)$
- Die Division von Polynomen ergibt wieder ein Polynom und ev. einen Rest.

Beispiel für Polynomdivision:

$$\begin{array}{rclcl}
 2x^3 & +5x^2 & +1x & \div (x-5) & = & 2x^2 - 5x \text{ Rest } -24x \\
 \hline
 -2x^3 & -10x^2 & & 2x^2 \times (x-5) & = & 2x^3 - 10x^2 \\
 \hline
 0 & -5x^2 & +1x & -5x \times (x-5) & = & -5x^2 + 25x \\
 & \hline
 & -(-5x^2) & -25x & & & \\
 & \hline
 & 0 & -24x & & & \text{Rest: } -24x
 \end{array}$$

## Horner'schema

Auswertung einer Funktion an einer bestimmten Stelle.

Sei die Funktion  $F(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = (x - 2)(x^2 - x - 12)$

Diese an  $x = 2$  ausgewertet:

x=2	$x^3$	$-3x^2$	$-10x$	24
	1	-3	-10	24
		2	-2	-24
	1	-1	-12	0
Rest:	$x^2$	$-x$	-12	

Hier wurde die Nullstelle  $x = 2$  abgespalten.

# Begriffe der Funktionen

## Extrema

$$f'(x) = 0 \text{ dann } f''(x_0) < 0 \rightarrow \text{Max}, f''(x_0) > 0 \rightarrow \text{Min}$$

## Wendestelle

$$f''(x) = 0 \text{ dann } f'''(x_0)! = 0$$

## Ganz-Rationale Funktion

Eine Ganz-Rationale Funktion lässt sich so schreiben:  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

## Gebrochen-Rationale Funktion

Eine Gebrochen-Rationale Funktion:  $f(x) = \frac{a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} = \frac{p(m)}{p(n)}$ , wobei der Grad der Polynome nicht gleich sein muss.

### Definitionslücken

Sie sind Stellen, an denen die Funktion nicht definiert ist. Z.B.: Nenner der gleich 0 ist. Man unterscheidet 2 Arten von Definitionslücken:

- Polstellen: Nach dem vollständigen Kürzen, besteht immernoch die Nullstelle des Nenners.
- hebbare Definitionslücken: Nach vollständigem Kürzen verschwindet die Nullstelle des Nenners.
- Stopfen der Def. Lücke: Wert der hebbaren Lücke in den gekürzten Bruch einsetzen.

Wichtig: Kommt eine Polstelle mehrmals vor:  $(x - a)^n$ , so ist dies eine n-fache Polstelle. Ist die Vielfachheit gerade, so findet kein Vorzeichenwechsel statt.

### Nullstellen

Man kann die Nullstellen bestimmen, indem man:

- bei einer "Ganz-Rationalen Funktion" diese gleich NULL setzt.
- bei einer "Gebrochen-Rationalen Funktion" den Zähler gleich NULL setzt.

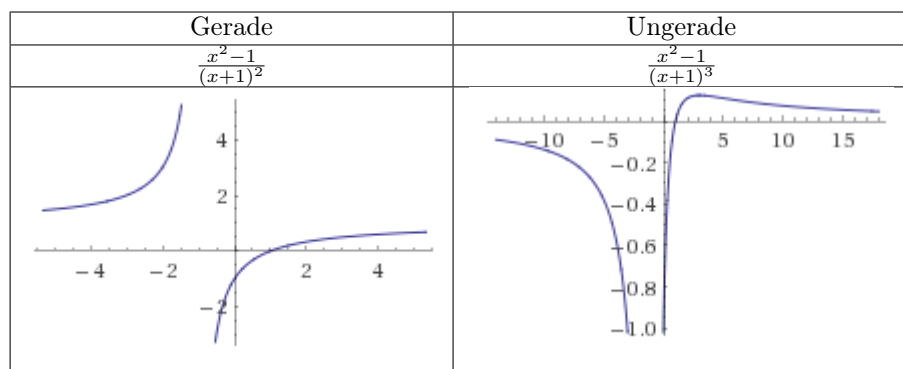
### Asymptoten

Sind Geraden, denen sich eine Kurve beliebig nahe annähert. (Limes!) Wir unterscheiden 2 Arten:

- bei Polstellen (nicht hebb. Deflücke): Die Kurve einer gebrochen-rationalen Funktion schmiegt sich der Gerade bei  $x$ =Polstelle an. Es bildet sich eine senkrechte Asymptote.
- für grosse  $x$ :  $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$  im Falle:
  - $\text{grad}(g) < \text{grad}(h)$ : x-Achse als wagrechte Asymptote
  - $\text{grad}(g) = \text{grad}(h)$ : Gerade mit der Gleichung:  $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$
  - $\text{grad}(g) = 1 + \text{grad}(h)$ : schiefe Asymptote, durch Polynomdivision

Man beachte beim Zeichnen die Vielfachheit der Polstelle:

- Gerade Anzahl: Vorzeichenwechsel
- Ungerade Anzahl: Kein Vorzeichenwechsel



### Beispiele:

Funktion	Definitionslücke	Nullstelle
$f(x) = \frac{(x+2)^2}{(x+4)^3 x^2}$	P:-4(x3), 0(x2), H: keine	N:-2(x2)

Betrachten wir die Funktion:  $f(x) = \frac{2x^2 + x^2 + x}{1 - x^2}$

Nullstelle:  $x = 0$

Definitionslücken:  $x = 1$  (Polstelle, 1fach),  $x = -1$  (Polstelle, 1fach)

Asymptoten:  $x = 1$ ,  $x = -1$ ,  $x = -2x - 1$  (durch Poly.division)



## Sätze

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

## Logarithmusfunktion

Rechenregeln:

$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$
$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$
$\log_a(u^k) = k \cdot \log_a(u)$
$\log_a(\sqrt[n]{u}) = \frac{1}{n} \cdot \log_a(u)$

Allgemein:

$$y = a^x \Rightarrow \ln(y) = x \cdot \ln(a) \Rightarrow x = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$$

$$y = a^x \Rightarrow \log_a(y) = x \cdot \log_a(a) \Rightarrow x = \log_a(y)$$

Umkehrfunktion:

$$y = \log_a(x)$$

Basiswechsel:

$$\log_a(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Umformungsbeispiele:

$\log_{10}(x) = -4.0404$	$\Rightarrow$	$x = 10^{-4.0404} = \frac{1}{10^{4.0404}}$
$\ln(x) = -9.0907$	$\Rightarrow$	$x = e^{-9.0907} = \frac{1}{e^{9.0907}}$
$\log_3(x) = 5$	$\Rightarrow$	$x = 3^5 = 243$