Prefácio

Como membro do IME-USP por pouco mais de 40 anos o autor teve a oportunidade de ministrar (pelo menos 9 ou 10 vezes, talvez mais) a disciplina de pós-graduação MAT 5714 (Funções Analíticas). Desta forma, a ideia de escrever um livro sobre este assunto, embora não seja muito original é, num certo sentido,bastante natural. Ela surgiu quando comecei a deixar no xerox do Instituto, a pedido dos alunos,as minhas notas manuscritas de aula. Durante muitos anos me recusei a fazer isto tentando evitar que os alunos estudassem só neste material. A mudança aconteceu num determinado ano devido a uma desorganização nos períodos de exames resultante de uma greve prolongada e então as minhas notas foram parar no xerox para facilitar para os estudantes a preparação para as provas. Assim, mesmo sendo bem sabido que existem muitos bons livros sobre este belíssimo tópico da Matemática,trata-se de uma teoria tão rica de resultados e argumentos que deixa a impressão de que sempre existe uma apresentação da mesma diferente das anteriores e com alguns méritos próprios.

Este é um livro de caráter elementar no qual apenas se pretende apresentar alguns dos assuntos centrais de extensa teoria das funções holomorfas de uma variável, visando preparar o leitor do mesmo para a leitura de textos mais avançados. Assim, não se encontrará neste livro nenhuma referência a tópicos mais sofisticados desta teoria como, por exemplo, função P de Weierstrass, funções duplamente periódicas (funções elíticas), etc.

O propósito do autor foi escrever um texto rigoroso e legível, o que significou, em muitos casos, sacrificar a concisão em benefício da clareza. De modo mais preciso, entre uma exposição breve (às custas de omitir muitas passagens) de um determinado assunto e uma exposição (do mesmo assunto) que fosse clara por ser mais detalhada, a escolha do autor quase sempre recaiu no segundo tipo de exposição. Como foi sugerido no início deste prefácio, este livro teve sua origem nas muitas vezes que o autor ministrou esta disciplina para estudantes de mestrado do IME-USP, o que inclui muitas participações em bancas de exames de qualificação. Acrescente-se que o programa original desta disciplina era constituído, aproximadamente, dos capítulos de 1 a 9 deste livro e então é claro que não se deve esperar que o mesmo seja autocontido. Antes, pelo contário, se supõe que o estudante já tenha os conhecimentos básicos de números complexos e análise real, o que inclui o cáculo diferencial em várias variáveis, séries, integral definida, álgebra linear e alguns elementos de topologia no plano.

A teoria das funções holomorfas sendo tão rica coloca o autor de um texto sobre este assunto a questão de decidir o que incluir e o que excluir do conte údo do livro. Esta escolha, de início não foi muito difícil pois seguia o programa de MAT 714 (que foi elaborado com muito bom senso) complementado com material do livro [R2]. Mas, nas vezes subsequentes em que o autor ministrou esta disciplina houve um afastamento gradual do conteúdo original devido ao grande número de acréscimos que o autor considerou relevantes (exemplo óbvio: o logaritmo complexo, que em [R2] é completamente ignorado). A este respeito, é importante destacar que no Departamento Matemática do IME os docentes têm a total confiança da Instituição e, em consequência, tem um elevado grau de liberdade para organizar uma dada disciplina. Por fim, é quase desnecessário acrescentar que não há neste texto qualquer pretensão de originalidade. De fato, são tantos os livros já publicados sobre as funções holomorfas de uma variável que deve ser praticamente impossível escrever um livro nesta área que seja minimamente original.

Para terminar, umas poucas palavras a respeito dos exercícios. Estes estão agrupados no final de cada capítulo com níveis de dificuldades bastante variados, desde os mais simples aos bastante difíceis. Os mais simples são bem conhecidos e não nos deteremos neles. Os outros exercícios, cujo nível de dificuldade vai de médio a difícil, surgiram como já foi assinalado, das listas de exercíçios dos cursos regulares de funções holomorfas e, muito especialmente, dos examens de qualificação. Muitos destes exercícios, que são manifestamente difíceis, têm "sugestões"indicando um possível caminho para a solução. Nestes casos, o autor espera que o estudante tente fazer estes exercícios evitando, na medida do possível, olhar a sugestão, deixando esta como último recurso.

Agradecimentos: este livro não teria sido feito sem a colaboração de Oneyde, minha esposa, que digitou a quase totalidade do texto original (manuscrito). Também foi importante no final a colaboração de Amanda Yumi Ambriola Oku, Thaicia Stona e Fábio Hirano, estes dois últimos pelas ilustrações que aparecem no texto e por muitos melhoramentos na formatação do mesmo. Por fim, não poderia deixar de agradecer à colega e amiga Prof. Roseli Fernandes pela sua importante ajuda nas minhas dificuldades com a Informática.

Jorge Aragona

Sumário

Funções Analíticas

Notações

Começamos fixando algumas notações e conceitos que usaremos com bastante frequência.
$\mathbb{N}$ = conjunto dos números naturais ($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ ...\}$).
$\mathbb{Z}$ = anel dos números inteiros ($\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ ...\}$).
$\mathbb{Q}$ = corpo dos números racionais.
$\mathbb{R}$ = corpo dos números reais.
$\mathbb{C}$ = corpo dos números complexos.
$\mathbb{K}$ = denota indistintamente $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ e $\mathbb{R}_+^* := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.
Se X é um conjunto não vazio, *uma sequência de elementos de* X (ou simplesmente *uma sequência em* X) é uma função $x : m \in \mathbb{N} \longmapsto x_m \in X$ que denotamos por

$$(x_m)_{m \in \mathbb{N}} \text{ (ou brevemente por } (x_m)).$$

De modo mais geral, se Λ e X são dois conjuntos não vazios, *uma família de elementos de* X *indexada por* Λ, é uma função

$$x : \lambda \in \Lambda \longmapsto x_\lambda \in X$$

que denotamos por

$$(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \text{ (ou brevemente por } (x_\lambda)),$$

onde usamos o símbolo x_λ para indicar o valor $x(\lambda)$ da função x no elemento λ.
Um símbolo da forma

$$A := B$$

significa que A está sendo definido como igual a B.
Uma notação muito frequente é o "classificador ":

$$\{x \mid P(x)\}$$

que significa "o conjunto (ou classe) dos x tais que $P(x)$ ".
Por exemplo, se $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família de conjuntos, a *reunião da família* $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é definida por

$$\bigcup{}_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda := \{x \mid x \in A_\lambda \text{ para algum } \lambda \in \Lambda\}$$

e a *intersecção da família* $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é definida por

$$\bigcap{}_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda := \{x \mid x \in A_\lambda \text{ para cada } \lambda \in \Lambda\}\,.$$

Quando Λ tem dois elementos, por exemplo se $\Lambda = \{1,2\}$, então

$$\bigcup{}_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = A_1 \bigcup A_2 = \{x \mid x \in A_1 \text{ ou } x \in A_2\}$$

$$\bigcap{}_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = A_1 \bigcap A_2 = \{x \mid x \in A_1 \text{ e } x \in A_2\}\,;$$

isto é, encontramos as definições habituais de reunião e intersecção de dois conjuntos.
Se A é um conjunto, *o complementar de* A é definido por

$$\complement A := \{x \mid x \notin A\}$$

e é também denotado por A^c.
Se A e B são dois conjuntos a *diferença* A *menos* B (*ou complementar de* B *em* A) é

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}\,,$$

e é claro que $A \setminus B = A \cap \complement B$.
Se Γ indica um qualquer dos conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, definimos

$$\Gamma^* := \{x \in \Gamma \mid x \neq 0\}\,.$$

Se X é um conjunto qualquer, definimos $\wp(X) := \{Y \mid Y \subset X\}$. O conjunto $\wp(X)$ é denotado também por 2^X.
Se f é uma função, a sua imagem é denotada por

$$\mathcal{I}m(f).$$

Se $z \in \mathbb{C}$, as partes real e imaginária de z são indicadas por $\mathrm{Re}(z)$ e $\mathrm{Im}(z)$ respectivamente.

Se $a \in \mathbb{K}$ e $r \in \mathbb{R}_+^*$, os conjuntos
$D_r(a) := \{z \in \mathbb{K} \mid\ |z-a| < r\}$
$\overline{D}_r(a) := \{z \in \mathbb{K} \mid\ |z-a| \leq r\}$
$D_r^*(a) := \{z \in \mathbb{K} \mid 0 < |z-a| < r\}$
são chamados, respectivamente, disco aberto, fechado e reduzido de centro a e raio r.

O conjunto $S^1(0)$ é definido como o conjunto $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Se Ω é um aberto de $\mathbb{C}^2$ denotamos com $\mathcal{C}(\Omega;\mathbb{K})$ a $\mathbb{K}$-álgebra das funções contínuas de Ω em $\mathbb{K}$. No caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ frequentemente escrevemos $\mathcal{C}(\Omega)$

em vez de $\mathcal{C}(\Omega;\mathbb{C})$.

Se Ω é um aberto de $\mathbb{R}^2$ denotamos $\mathcal{H}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{A}(\Omega)$) a $\mathbb{C}$-álgebra das funções holomorfas (resp. analíticas) em Ω.

$Pol(\psi)$ denota o conjunto dos polos de ψ.

$Z(f)$ denota o conjunto de zeros de f.

Se Ω é um aberto de $\mathbb{R}^2$ e $k \in \mathbb{N}$ denotamos como $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{K})$ (respectivamente $\mathcal{C}^k_0(\Omega;\mathbb{K})$ o conjunto de todas as $f : \Omega \longmapsto \mathbb{K}$ que são de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. o conjunto de todas as $f \in \mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{K})$ tais que $\mathrm{supp}(f) \subset\subset \Omega$). Também introduzimos o conjunto $\mathcal{C}^\infty(\Omega;\mathbb{K}) := \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^k(\Omega,\mathbb{K})$. No caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ é frequente omitir $\mathbb{K}$ das notações.

Se $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $z \in \Omega$ denotamos como $w(f,z)$ a multiplicidade que f tem em z. Se $f(z) \neq 0$ definimos $w(f,z) := 0$.

Se Ω é um aberto de $\mathbb{C}$, denotamos como $\mathcal{M}(\Omega)$ o corpo de funções meromorfas em Ω.

Se $X \subset \mathbb{C}$ denotamos como $\mathring{X}$ (ou X° ou $int(X)$) o interior de X.

Seja (f_m) uma sequência em $X \subset \mathbb{C}$ e $f : X \to \mathbb{C}$ uma função. Diz-se que $f_m \overset{X}{\rightrightarrows} f$ (ou $f_m \rightrightarrows f$) se (f_m) converge uniformemente para f em X.

Capítulo 1

FUNÇÕES HOLOMORFAS

Definição 1.1 Sejam A uma parte de $\mathbb{C}$, $\zeta \in A$ e $f : A \to \mathbb{C}$ uma função. Diz-se que f *é derivável* (ou diferenciável) *no ponto* ζ se existe $r > 0$ tal que $D_r(\zeta) \subset A$ e existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que a condição seguinte está verificada:
Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta \in]0, r[$ tal que

$$h \in D^*_\delta(0) \implies \left| \frac{f(\zeta + h) - f(\zeta)}{h} - \alpha \right| < \varepsilon \ .$$

O número complexo α (que evidentemente independe de r, depende só de f e de ζ) é chamado *derivada de* f *em* ζ e é indicado pela notação $f'(\zeta)$. Escrevemos então

$$f'(\zeta) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\zeta + h) - f(\zeta)}{h} = \lim_{z \to \zeta} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} \ .$$

As funções holomorfas cujo estudo é o objetivo deste livro vão ser definidas daqui a pouco como funções

$$f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

que são diferenciáveis em cada ponto do seu domínio A, o que pela Def.1.1. exige que para cada $\zeta \in A$ deve existir $r > 0$ (que depende de ζ) tal que $D_r(\zeta) \subset A$, em outras palavras, *o domínio de* A *de* f *deve ser um conjunto aberto* (não vazio) *de* $\mathbb{C}$, por esta razão, *no que segue trabalharemos com funções definidas em abertos não vazios de* $\mathbb{C}$.

Notação No que segue, a letra Ω indicará sempre um subconjunto aberto não vazio de $\mathbb{C}$.

Definição 1.2 Uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é dita *holomorfa em* Ω se for derivável em cada ponto de Ω. O conjunto de todas as funções holomorfas em Ω será indicado pela notação $\mathcal{H}(\Omega)$ ou também por $\mathcal{O}(\Omega)$.

Observações (1) No Cap. 4 vamos definir o conceito de função analítica

$$f : \Omega \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$

onde Ω é um aberto de $\mathbb{K}$. Mostraremos que:

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: f é analítica em $\Omega \overset{(*)}{\iff} f$ é derivável em cada ponto Ω (i.e. $f \in \mathcal{H}(\Omega)$)

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: f é analítica em $\Omega \implies f$ é derivável em cada ponto de Ω, mas a implicação inversa ($\Longleftarrow$) é falsa.
Desta forma, aceitando a equivalência $(*)$ (que provaremos no Cap. 5) resulta que a Def. 1.2. é a nossa primeira definição de função analítica.
Como a "analiticidade" é, como veremos, uma propriedade muito forte, a equivalência $(*)$ mostra que em $\mathbb{C}$ a diferenciabilidade também é uma propriedade muito forte, ao passo que em $\mathbb{R}$ o fato de uma função ser derivável num aberto é uma propriedade muito mais fraca que a analiticidade. Isto mostra que no estudo da teoria de funções, a primeira diferença importante entre o caso das funções reais de variável real e as funções complexas de variável complexa, aparece nas consequências da diferenciabilidade.
(2) As vezes a Def. 1.2. se encontra formulada "pontualmente" isto é, da forma seguinte: "Uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é dita *holomorfa em* ζ *e* Ω se for derivável em ζ e f *é holomorfa em* Ω se f é holomorfa em cada ponto de Ω".

Lema 1.3 *Sejam A um subconjunto de $\mathbb{C}$, $\zeta \in A, f : A \to \mathbb{C}$ uma função, $\alpha \in \mathbb{C}$ e suponhamos que existe $r > 0$ tal que $D_r(\zeta) \subset A$. Então as condições seguintes são equivalentes:*
(i) $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta \in]0, r[$ *tal que*

$$h \in D^*_\delta(0) \implies \left| \frac{f(\zeta + h) - f(\zeta)}{h} - \alpha \right| < \varepsilon$$

(ii) *Existe uma função $\varphi : D_r(\zeta) \to \mathbb{C}$ que é contínua em ζ verificando as duas condições seguintes:*
(a) $\varphi(\zeta) = 0$

(b) $f(\zeta + h) = f(\zeta) + h\,[\alpha + \varphi(\zeta + h)] \quad \forall \ h \in D_r(0)$.

Prova (i) $\implies$ (ii): Definimos $\varphi : D_r(\zeta) \to \mathbb{C}$ da forma seguinte:

$$\varphi\ (z) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad z = \zeta \\ \\ \dfrac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} - \alpha, & \text{se} \quad z \in D^*_r(0) \end{cases}$$

A definição de φ implica a condição (a) de (ii) e como $z = \zeta + h \in D_r(\zeta)$ equivale a $h \in D_r(0)$, implica também a condição (b) de (ii). Resta então verificar que φ é contínua em ζ, para o que usamos a hipótese (i). Dado $\varepsilon > 0$, por (i) existe $\delta \in]0, r[$ tal que

$$h \in D^*_\delta(0) \implies |\varphi(\zeta + h)| = |\varphi(\zeta + h) - \varphi(\zeta)| = \left| \frac{f(\zeta + h) - f(\zeta)}{h} - \alpha \right| < \epsilon$$

donde resulta

$$h \in D_\delta(0) \implies |\varphi(\zeta+h)-\varphi(\zeta)| < \varepsilon$$
o que mostra que φ é contínua em ζ.

(ii) $\implies$ (i): A condição (b) acarreta

$\varphi(\zeta+h) = \dfrac{f(\zeta+h)-f(\zeta)}{h} - \alpha$, para cada $h \in D_r^*(\zeta)$ o que por (a) e pela continuidade de φ em ζ implica a condição (i). $\square$

O resultado seguinte expressa que $\mathcal{H}(\Omega)$ é uma sub-$\mathbb{C}$-álgebra de $\mathcal{C}(\Omega)$.

Proposição 1.4 (1º) *Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é holomorfa em Ω, então f é contínua em Ω.*
(2º) *Se $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então $f+g \in \mathcal{H}(\Omega)$, $fg \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $\lambda f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

Prova (1º) Seja $\zeta \in \Omega$ arbitrário então pelas Def. 1.1 e 1.2 e pela condição (ii) do Lema 1.3 podemos escrever
$|f(\zeta+h)-f(\zeta)| = |h| \cdot |f'(\zeta)+\varphi(\zeta+h)|$, para cada $h \in D_r(0)$ onde $D_r(\zeta) \subset \Omega$ e $\varphi : D_r(\zeta) \to \mathbb{C}$ é uma função contínua em ζ tal que $\varphi(\zeta) = 0$. Tomando limites na identidade acima para $h \to 0$, vem
$$\lim_{h\to 0} |f(\zeta+h)-f(\zeta)| = 0$$
o que mostra que f é contínua em ζ.
(2º) Fixado $\zeta \in \Omega$ arbitrário, pela definição de $f+g$ resulta:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(\zeta+h)-(f+g)(\zeta)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\zeta+h)-f(\zeta)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(\zeta+h)-(h)}{h} = f'(\zeta)+g'(\zeta),$$
o que mostra que $f+g$ é derivável em ζ e que $(f+g)'(\zeta) = f'(\zeta)+g'(\zeta)$. Por outro lado, pela definição de fg e por (1^o) vem:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(fg)(\zeta+h)-(fg)(\zeta)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\zeta+h)g(\zeta+h)-f(\zeta)g(\zeta)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(\zeta+h)g(\zeta+h)-f(\zeta+h)g(\zeta)+f(\zeta+h)g(\zeta)-f(\zeta)g(\zeta)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \left\{ f(\zeta+h)\frac{g(\zeta+h)-g(\zeta)}{h} + g(\zeta)\frac{f(\zeta+h)-f\zeta}{h} \right\} =$$

$= f(\zeta)g'(\zeta)+g(\zeta)f'(\zeta)$, o que mostra que fg é derivável em ζ e que

$(fg)'(\zeta) = f(\zeta)g'(\zeta) + g(\zeta)f'(\zeta)$. Finalmente, pela definição de λf temos

$$\lim_{h\to 0}\frac{(\lambda f)(\zeta+h)-(\lambda f)(\zeta)}{h} = \lambda \lim_{h\to 0}\frac{f(\zeta+h)-f(\zeta)}{h} = \lambda f'(\zeta),$$

portanto λf é derivável em ζ e $(\lambda f)'(\zeta) = \lambda f'(\zeta)$. $\square$

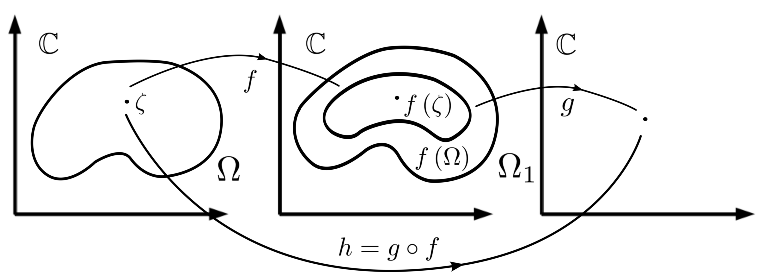
Se $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, então existe $f'(z)$ para cada $z \in \Omega$ o que mostra que f define uma nova função:

$$f' : z \in \Omega \longmapsto f'(z) \in \mathbb{C}$$

chamada *função derivada* de f. A Prop. 1.4 mostra que se $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então

$$(f+g)' = f' + g' \ , \qquad (fg)' = fg' + f'g \quad \text{e} \quad (\lambda f)' = \lambda \cdot f'.$$

Proposição 1.5 (regra da cadeia) *Sejam Ω e Ω_1, dois abertos não vazios de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $g \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ e suponhamos que $f(\Omega) \subset \Omega_1$. Então $h = g \circ f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $h'(\zeta) = g'[f(\zeta)] \cdot f'(\zeta)$, para cada $\zeta \in \Omega$.*



Prova Dado $\zeta \in \Omega$ temos $f(\zeta) \in \Omega_1$. Como g é diferenciável no ponto $f(\zeta)$, existe $r > 0$ tal que $D_r(f(\zeta)) \subset \Omega_1$ e pelo Lema 1.3, existe $\psi : D_r(f(\zeta)) \to \mathbb{C}$ tal que

(1.5.1.) $\quad g[f(\zeta)+k] = g[f(\zeta)] + k\{g'[f(\zeta)] + \psi[f(\zeta)+k]\}, \quad \forall \ k \in D_r(0)$

onde ψ é contínua em $f(\zeta)$ e $\psi[f(\zeta)] = 0$. Pela Prop.1.4 (1^o), f é contínua em ζ , em consequência existe $\delta > 0$ tal que $D_\delta(\zeta) \subset \Omega$ e $f(D_\delta(\zeta)) \subset D_r(f(\zeta))$, logo dado $h \in D_\delta(0)$ arbitrário, temos $\zeta + h \in D_\delta(\zeta)$ o que implica $f(\zeta+h) \in D_r(f(\zeta))$ e portanto $k := f(\zeta+h) - f(\zeta) \in D_r(0)$, o que por (1.5.1.) implica (observar que $f(\zeta+h) = f(\zeta) + k$) :

(1.5.2.) $\left| \begin{array}{l} g[f(\zeta+h)] = g[f(\zeta)] + [f(\zeta+h) - f(\zeta)]\{g'[f(\zeta)] + \psi[f(\zeta)+k]\} \ , \\ \text{para cada } \ h \in D_\delta(0) \end{array} \right.$

Como f é diferenciável em ζ, pelo Lema 1.3 (i) $\Longrightarrow$ (ii), existe[1] $\varphi : D_\delta(\zeta) \to \mathbb{C}$ tal que

$$(1.5.3.) \qquad f(\zeta+h) - f(\zeta) = h\,[f'(\zeta) + \varphi(\zeta+h)] \quad \forall\ h \in D_\delta(0)$$

onde φ é contínua em ζ e $\varphi(\zeta) = 0$. De (1.5.3.) e (1.5.2.) resulta

$$(1.5.4.) \qquad \left| \begin{array}{l} g\,[f(\zeta+h)] = g\,[f(\zeta)] + h\,\{g'\,[f(\zeta)] \cdot f'(\zeta) + \eta(\zeta+h)\}\,, \\ \forall\ h \in D_\delta(0) \end{array} \right.$$

onde para cada $h \in D_\delta(0)$ definimos
$\eta(\zeta+h) := f'(\zeta)\psi\,[f(\zeta+h)] + g'\,[f(\zeta)]\,\varphi(\zeta+h) + \varphi(\zeta+h)\psi[f(\zeta+h)]$.
É imediato verificar que a função $\eta : D_\delta(\zeta) \to \mathbb{C}$, que acabamos de definir, é contínua em ζ e que $\eta(\zeta) = 0$, portanto (1.5.4) e o Lema 1.3 (ii) $\Longrightarrow$ (i) demonstram o resultado. $\square$

Até agora nossa definição de função holomorfa como função complexa definida num aberto de $\mathbb{C}$ que é diferenciável em cada ponto do seu domínio nos permitiu apenas provar alguns resultados básicos que são formalmente idênticos a resultados conhecidos para funções reais de variável real. Como aplicação destas propriedades vamos exibir alguns exemplos simples de funções holomorfas e de funções não holomorfas.

Exemplo 1 Para cada $m \in \mathbb{N}^*$ seja $\pi_m : z \in \mathbb{C} \longmapsto z^m \in \mathbb{C}$ então π_m é holomorfa em $\mathbb{C}$, pois é imediato verificar (como no caso real) que se $\zeta \in \mathbb{C}$ é um ponto arbitário, então

$$\pi'_m(\zeta) = \lim_{z\to\zeta} \frac{z^m - \zeta^m}{z - \zeta} = m\zeta^{m-1}, \quad \text{se } m \in \mathbb{N}^*$$

Resulta do que precede e da Prop. 1.4. ($2^{\underline{o}}$) que se $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função polinomial com coeficientes complexos

$$p = \sum_{k=0}^{m} a_k \pi_k$$

onde $m \in \mathbb{N}$; $a_0, a_1, \ldots\ a_m \in \mathbb{C}$ e $\pi_0 : z \in \mathbb{C} \longmapsto 1 \in \mathbb{C}$
(isto é, $p(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k$ para cada $z \in \mathbb{C}$), então $p \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Exemplo 2 A função

$$g_0 : z \in \mathbb{C}^* \longmapsto \frac{1}{z} \in \mathbb{C}$$

é holomorfa no aberto $\mathbb{C}^*$. De modo mais geral, fixado $\zeta \in \mathbb{C}$ arbitrário, a função

[1] δ faz aqui o papel do r do Lema 1.3 e a única hipótese sobre $\delta(r)$ é que $D_\delta(\zeta) \subset \Omega$ o que é verdade por definição de δ.

$$g_\zeta : z \in \mathbb{C}\setminus\{\zeta\} \longmapsto \frac{1}{z-\zeta} \in \mathbb{C}$$
é holomorfa no aberto $\mathbb{C}\setminus\{\zeta\}$. De fato, se $z \in \mathbb{C}\setminus\{\zeta\}$ temos

$$g'_\zeta(z) = \lim_{h\to 0} \frac{g_\zeta(z+h) - g_\zeta(z)}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{1}{(z+h-\zeta)(z-\zeta)} = -\frac{1}{(z-\zeta)^2}.$$

Exemplo 3 Sejam Ω um aberto não vazio de $\mathbb{C}$, $f_1 \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f_2 \in \mathcal{H}(\Omega)$ e Ω_0 um subconjunto aberto de Ω no qual $f_2 \neq 0$ (isto é, $f_2(z) \neq 0$ para cada $z \in \Omega_0$). Então $f_1/f_2 \in \mathcal{H}(\Omega_0)$, onde $(f_1/f_2)(z) := f_1(z)/f_2(z)$ para cada $z \in \Omega_0$. De fato, basta aplicar a regra da cadeia (Prop. 1.5) substituindo as funções g e f daquele resultado pelas funções g_0 do Exemplo 2 e f_2 respectivamente. Então, para cada $z \in \Omega_0$ temos $f_2(z) \neq 0$, donde $f_2(\Omega_0) \subset \mathbb{C}^* =$ domínio de g_0 e
$$(\frac{1}{f_2})(z) = \frac{1}{f_2(z)} = (g_0 \circ f_2)(z) \ ,$$
para cada $z \in \Omega_0$. Pela Prop. 1.5 temos então, para $\zeta \in \Omega_0$ arbitrário fixado:

$$(\frac{1}{f_2})'(\zeta) = (g_0 \circ f_2)'(\zeta) = g'_0\left[f_2(\zeta)\right] \cdot f'_2(\zeta) = \frac{f'_2(\zeta)}{\left[f_2(\zeta)\right]^2}$$
o que mostra que $1/f_2 \in \mathcal{H}(\Omega_0)$. Em consequência, pela Prop. 1.4 ($2^{\underline{o}}$) obtemos:
$$f_1/f_2 = f_1 \cdot (1/f_2) \in \mathcal{H}(\Omega_0)$$

Observar que $\left[f_1(1/f_2)\right]'(\zeta) = f'_1(\zeta)\dfrac{1}{f_2(\zeta)} + f_1(\zeta)\left\{-\dfrac{f'_2(\zeta)}{\left[f_2(\zeta)\right]^2}\right\} =$

$= \dfrac{f'_1(\zeta)f_2(\zeta) - f_1(\zeta)f'_2(\zeta)}{\left[f_2(\zeta)\right]^2}$, isto é obtemos a regra formal usual de

derivação de um quociente: $(f_1/f_2)' = \dfrac{f'_1 f_2 - f_1 f'_2}{f_2^2}$.

Exemplo 4 Sejam p e q duas funções polinomiais a coeficientes complexos
$$p(z) = \sum_{j=0}^{m} a_j z^j \qquad \text{e} \qquad q(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k \quad , \quad q \neq 0$$
Como q tem n raízes complexas contadas com sua multiplicidade, resulta que o conjunto F das raízes de q tem, no máximo, n elementos, isto é, é finito e portanto fechado, donde resulta que $\Omega_0 = \mathbb{C}\setminus F$ é aberto.
Então a função racional R definida por

$$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \qquad \text{para dada } z \in \Omega_0 = \mathbb{C} \diagdown F$$

é holomorfa em Ω_0. De fato, esta asserção é um caso particular do Exemplo 3 precedente com $\Omega = \mathbb{C}$, $f_1 = p$ e $f_2 = q$.

Exemplo 5 A função conjugação $J : z \in \mathbb{C} \longmapsto \overline{z} \in \mathbb{C}$ que é um isomorfismo involutivo de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$, é uma aplicação contínua e aberta, não é diferenciável em nenhum ponto de $\mathbb{C}$ e portanto $J \notin \mathcal{H}(\mathbb{C})$ e, de modo mais geral, qualquer que seja o aberto não vazio Ω de $\mathbb{C}$ temos

$$J \mid \Omega \notin \mathcal{H}(\Omega).$$

Com efeito, seja $\zeta \in \mathbb{C}$ um ponto arbitrário e mostremos que não existe o limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{J(\zeta + h) - J(\zeta)}{h}.$$

Como $\dfrac{J(\zeta + h) - J(\zeta)}{h} = \dfrac{\overline{h}}{h}$, basta ver que não existe $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\overline{h}}{h}$ o que é imediato pois se $h \in \mathbb{R}^*$ então $\overline{h}/h = 1$ e se $h \in \mathbb{R}^* i = \{ai \mid a \in \mathbb{R}^*\}$ então $\overline{h}/h = -1$, o que mostra que não existe $\lim\limits_{h \to 0} \overline{h}/h$.

Exemplo 6 A função "módulo"

$$f = |\cdot| : z \in \mathbb{C} \mapsto |z| \in \mathbb{R}$$

não é derivável em nenhum ponto de $\mathbb{C}$ e portanto

$$f \notin \mathcal{H}(\mathbb{C}).$$

De fato, se $\zeta \in \mathbb{C}, \zeta \neq 0$ então $f = |\cdot|$ não é derivável em ζ pois se o fosse então f^2 também seria derivável em ζ e como $f^2(z) = |z|^2 = z \cdot \overline{z}$ para

cada $z \in \mathbb{C}$, isto é,

$$f^2 = id \cdot J$$

(onde $id : z \in \mathbb{C} \mapsto z \in \mathbb{C}$ e $J : z \in \mathbb{C} \mapsto \overline{z} \in \mathbb{C}$) resultaria (ver Exemplo 3) que

$$J = \frac{f^2}{id}$$

é derivável em ζ (pois como $\zeta \neq 0$ temos $id(\zeta) = \zeta \neq 0$) o que é absurdo como vimos no Exemplo 5. A função $f = |\cdot|$ não é derivável em $\zeta = 0$ pois o mesmo tipo de raciocínio do Exemplo 5 mostra que não existe limite da expressão

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}$$

para $h \to 0$.

Observação Mais adiante será demonstrado de forma bastante simples que uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ verificando as condições:

$$[*] \qquad \begin{cases} f \text{ é contínua} \\ f \text{ não é constante} \\ \mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R} \end{cases}$$

não é derivável em nenhum ponto de $\mathbb{C}$ e em consequência, qualquer que seja Ω temos $f \mid \Omega \notin \mathcal{H}(\Omega)$. Alguns exemplos simples de funções verificando as condições $[*]$ são os seguintes:
$f(z) = |z|$, $f(z) = \mathrm{Re}(z)$, $f(z) = \mathrm{Im}(z)$, $f(z) = e^{\mathrm{Re}(z)}$, etc. De modo mais geral, se $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função contínua não constante, então a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \Phi(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)) \quad \text{para cada } z \in \mathbb{C}$$

satisfaz as condições $[*]$ e portanto não é derivável em nenhum ponto de $\mathbb{C}$. Aqui é pertinente o seguinte comentário: Não é trivial construir uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que seja contínua em $\mathbb{R}$ e que não seja derivável em nenhum ponto de $\mathbb{R}$, ver por exemplo, [R1], Cap. 7, Teor. 7.18, ao passo que o Exemplo 5 e o Exemplo 6, assim como as considerações acima mostram que é bastante fácil obter funções contínuas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que não são deriváveis em nenhum ponto de $\mathbb{C}$. Este tipo de fenômeno confirma o fato assinalado na (Obs.1) que segue à Def.1.2 **,** a saber que a hipótese de diferenciabilidade é uma exigência muito mais forte no caso das funções complexas de variável complexa que no caso das funções reais de variável real.

Exercícios

(1.1) (caráter local da holomorfia) Dada uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ provar as duas asserções seguintes:
(a) Se $(\Omega_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família de abertos não vazios cuja reunião é Ω e $f \mid \Omega_\lambda \in \mathcal{H}(\Omega_\lambda)$ para cada $\lambda \in \Lambda$, então $f \in \mathcal{H}(\Omega)$;
(b) Se Ω_0 é uma parte aberta não vazia de Ω, então $f \mid \Omega_0 \in \mathcal{H}(\Omega_0)$ desde que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

(1.2) Seja $A = ([0,1] \times [0,1]) \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \subset \mathbb{C}$ e $f : A \to \mathbb{C}$ a função identidade (i.e. $f(z) = z \quad \forall \quad z \in A$). Verificar que $\lim\limits_{z \to \zeta} \dfrac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} = 1$ para cada $\zeta \in A$ e porém f não é derivável em nenhum ponto de A.

(1.3) Seja Ω um aberto não vazio de $\mathbb{C}$ tal que Ω é simétrico em relação ao eixo real (i.e. $z \in \Omega \implies \overline{z} \in \Omega$). Mostrar que se $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, então a função $g : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$, para cada $z \in \Omega$ é holomorfa.

(1.4) (sobre a topologia do plano) Dado um subconjunto X de $\mathbb{C}$ chama-se *fronteira* de X o conjunto:

$$\partial X = \overline{X} \cap \overline{(\mathbb{C} \backslash X)}$$

(a) Prove que $\xi \in \partial X$ se e só se $D_\varepsilon(\xi) \cap X \neq \varnothing$ e $D_\varepsilon(\xi) \cap (\mathbb{C} \backslash X) \neq \varnothing$ para cada $\varepsilon > 0$;
(b) Mostre que $\partial X = \partial(\mathbb{C} \backslash X)$;
(c) Verifique que para cada $X \subset \mathbb{C}$, ∂X é um conjunto fechado;
(d) Prove que se X é limitado então ∂X é compacto e mostre com um exemplo que a recíproca desta asserção é falsa;
(e) Verifique que se $\xi \in \mathbb{C}$ e $r > 0$ então

$$\partial D_r(\xi) = \partial \overline{D}_r(\xi) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \xi| = r\};$$

(f) Prove que se $\partial \varnothing = \varnothing$, $\partial \mathbb{C} = \varnothing$ e que $\partial(\mathbb{Q}[i]) = \mathbb{C}$, onde $\mathbb{Q}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

(1.5) Sejam Ω e Σ dois abertos não vazios de $\mathbb{C}$ tais que $\partial\Omega \cap \Sigma \neq \varnothing$.
(a) Mostre que $W = \Omega \cap \Sigma \neq \varnothing$;
(b) Sejam $g \in \mathcal{C}(\Sigma)$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função e suponha que $f \mid W = g \mid W$, mostre que para cada $\zeta \in \partial\Omega \cap \Sigma$, existe $\lim\limits_{z \to \zeta} f(z)$ e que $\lim\limits_{z \to \zeta} f(z) = \lim\limits_{z \to \zeta} g(z) = g(\zeta)$;
(c) Ache uma função $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $h \mid W \neq g \mid W$ para cada $g \in \mathcal{C}(\Sigma)$.

[*Sugestão:* Tomar $\zeta \in \partial\Omega \cap \Sigma$ e definir $h(z) = \dfrac{1}{z - \zeta} \quad \forall \quad z \in \Omega$].

(1.6) Sejam Ω um aberto não vazio de $\mathbb{C}$ e $\zeta \in \Omega$. Prove que o conjunto $\mathcal{M}_\zeta = \{f \in \mathcal{H}(\Omega) \mid f(\zeta) = 0\}$ é um ideal maximal do anel $\mathcal{H}(\Omega)$
[*Sugestão:* Verifique que a aplicação $f \in \mathcal{H}(\Omega) \longmapsto f(\zeta) \in \mathbb{C}$ é um homomorfismo sobrejetor de anéis.]

(1.7) **Seja** Ω um aberto conexo simétrico em relação ao eixo real, tendo intersecção não vazia I com este. Prove que toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ se escreve de maneira única na forma

$$f = g + ih$$

onde $g, h \in \mathcal{H}(\Omega)$ são tais que $g(z)$ e $h(z)$ são reais para cada $z \in \mathrm{I}$.
Verifique que se tem

$$\overline{g(\overline{z})} = g(z) \quad , \quad h(\overline{z}) = \overline{h(z)} \quad \text{e} \quad \overline{f(\overline{z})} = g(z) - ih(z) \quad \forall \quad z \in \Omega.$$

Capítulo 2

AS EQUAÇÕES DE CAUCHY-RIEMANN

Dada $f : \Omega \to \mathbb{C}$ podemos pensar em f como uma aplicação de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Se escrevemos f em termos de parte real e parte imaginária

$$f(z) = f(x+iy) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$$

sendo $u(x,y) \in \mathbb{R}$ e $v(x,y) \in \mathbb{R}$ para cada $z = x+iy \in \Omega$, é razoável perguntar o que significa a condição de diferenciabilidade sobre f em termos de derivabilidade das funções reais u e v. A fim de tornar clara a relação que há entre diferenciabilidade de funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ (i.e. $\mathbb{R}$-diferenciabilidade) e diferenciabilidade de funções de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ no sentido da Def. 1.1 (i.e. $\mathbb{C}$-diferenciabilidade) vamos começar provando um resultado muito simples de álgebra linear em dimensão 2. O conjunto $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ é de modo natural um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão 2, por outro lado, como $\mathbb{C}$ é um corpo resulta que $\mathbb{C}$ é um $\mathbb{C}$-espaço vetorial de dimensão 1. Lembremos que uma aplicação $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é $\mathbb{R}$-*linear* se satisfaz as duas condições seguintes:

(A) u é aditiva (i.e. $u(z_1 + z_2) = u(z_1) + u(z_2) \quad \forall \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$)

($\mathbb{R}$H) u é $\mathbb{R}$-homogênea (i.e. $u(az) = a \cdot u(z) \quad \forall \quad a \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$)

Por outro lado $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é dita $\mathbb{C}$-*linear* se satisfaz as duas condições seguintes:

(A) u é aditiva

($\mathbb{C}$H) u é $\mathbb{C}$-homogênea (i.e. $u(\lambda z) = \lambda \cdot u(z) \quad \forall \quad \lambda \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}$)

É claro que toda aplicação $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que é $\mathbb{C}$-linear é também $\mathbb{R}$-linear pois ($\mathbb{C}$H) $\implies$ ($\mathbb{R}$H). O resultado seguinte mostra as relações existentes entre aplicações $\mathbb{R}$-lineares e $\mathbb{C}$-lineares de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$.

Lema 2.1 *Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ arbitrários, consideremos a aplicação*

$$L_{\alpha,\beta} : (x,y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \longmapsto \alpha x + \beta y \in \mathbb{C},$$

então temos as asserções seguintes:

(1º) *A aplicação $L_{\alpha,\beta}$ é $\mathbb{R}$-linear. Reciprocamente, se $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é $\mathbb{R}$-linear, então existem $\alpha \in \mathbb{C}$ e $\beta \in \mathbb{C}$ (únicos) tais que $L = L_{\alpha,\beta}$.*

(2º) *As três condições seguintes são equivalentes:*

(i) $L_{\alpha,\beta}[i(x,y)] = i \cdot L_{\alpha,\beta}(x,y)$, *para cada* $(x,y) \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

(ii) $L_{\alpha,\beta}$ *é* $\mathbb{C}$*-linear.*
(iii) $\beta = \alpha i$.

Prova (1º) É óbvio que $L_{\alpha,\beta}$ é $\mathbb{R}$-linear. Reciprocamente, se $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é $\mathbb{R}$-linear, então dado

$$(x, y) = x + iy = x(1, 0) + y(0, 1) \in \mathbb{C}$$

temos: $L(x, y) = xL(1, 0) + yL(0, 1) = L_{\alpha,\beta}(x, y)$, onde $\alpha = L(1, 0)$ e $\beta = L(0, 1)$.

(2º) (i) $\Longrightarrow$ (ii): Por (a), $L_{\alpha,\beta}$ é $\mathbb{R}$-linear e portanto aditiva, em consequência basta verificar que $L_{\alpha,\beta}$ é $\mathbb{C}$-homogênea. Dados $\lambda = (u, v) = u + iv \in \mathbb{C}$ e $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ temos: $L_{\alpha,\beta}(\lambda z) = L_{\alpha,\beta}\left[(u + iv)z\right] = L_{\alpha,\beta}(uz + ivz) = L_{\alpha,\beta}(uz) + L_{\alpha,\beta}(ivz) = uL_{\alpha,\beta}(z) + ivL_{\alpha,\beta}(z) = \lambda \cdot L_{\alpha,\beta}(z)$

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Claro

(i) $\Longleftrightarrow$ (iii) Como $L_{\alpha,\beta}\left[i(x, y)\right] = L_{\alpha,\beta}(-y, x) = -\alpha y + \beta x$ e $iL_{\alpha,\beta}(x, y) = i(\alpha x + \beta y) = \alpha i x + \beta i y$, é claro que (i) equivale a

$$-\alpha y + \beta x = \alpha i x + \beta i y, \quad \forall \ (x, y) \in \mathbb{C}$$

ou seja

$$(\alpha i - \beta)x + (\alpha + i\beta)y = 0 \quad \forall \ (x, y) \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$$

o que é equivalente a $\alpha i - \beta = 0$ e $\alpha + i\beta = 0$ ou seja $\beta = \alpha i$. $\square$

Se identificamos $\mathbb{R}$ com sua imagem em $\mathbb{R}^2$ pela imersão canônica $J : x \in \mathbb{R} \longmapsto (x, 0) \in \mathbb{R}^2$ podemos escrever $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ e então é claro que

$$\mathbb{R}^{2*} = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2).$$

Por outro lado, como toda $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ é em particular $\mathbb{R}$-homogênea resulta

$$\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}; \mathbb{C}) \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2).$$

Se indicamos com $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{C}}}(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ o espaço vetorial real de todas as aplicações $\mathbb{C}$-semilineares de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ (isto é, $u \in \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{C}}}(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ se e só se u é uma aplicação $\mathbb{R}$-linear de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ tal que $u(\lambda z) = \overline{\lambda} u(z) \quad \forall \ \lambda \in \mathbb{C} \quad \forall \ z \in \mathbb{C}$) então é claro que

$$\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{C}}}(\mathbb{C}; \mathbb{C}) \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}_2).$$

O resultado seguinte reune uma série de fatos triviais porém úteis para a compreensão do que se segue.

Lema 2.2 (1º) $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}; \mathbb{C}) = \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}; \mathbb{C}) \oplus \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{C}}}(\mathbb{C}; \mathbb{C})$

(2º) *Para cada* $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{K})$ *e para cada* $\lambda \in \mathbb{C}$, *a aplicação*

$$\lambda A : z \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \lambda.A(z) \in \mathbb{R}^2$$

pertence a $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$. *Em particular, para cada* $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2; \mathbb{K})$ *temos* $iA \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ *e se* $\lambda = r + si$, $r, s \in \mathbb{R}$, *então* $\lambda A = r.A + s.i.A$.
A aplicação

$$m : (\lambda, A) \in \mathbb{C} \times \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2; \mathbb{K}) \longmapsto \lambda A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$$

tem as propriedades seguintes:

(a) $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A \quad \forall \ \lambda, \mu \in \mathbb{C} \ \ e \ \ \forall \ \ A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{K})$
(b) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B \quad \forall \ \lambda \in \mathbb{C} \ \ e \ \ \forall \ \ A, B \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{K})$
(c) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A \quad \forall \ \lambda, \mu \in \mathbb{C} \ \ e \ \ \forall \ \ A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{K})$
(d) *Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}^2$, então m define uma estrutura de $\mathbb{C}$-espaço vetorial sobre $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ que por restrição de escalares a $\mathbb{R}$ define a estrutura canônica de $\mathbb{R}$-espaço vetorial de $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$.*
(e) *Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ então a restrição $m|\mathbb{R} \times \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ tem sua imagem contida em $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ e coincide com a multiplicação de escalar com vetor neste espaço.*
(f) *Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}^2$, então a restrição $m|\mathbb{C} \times \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C};\mathbb{C})$ tem sua imagem contida em $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C};\mathbb{C})$ e coincide com a multiplicação de escalar com vetor neste espaço.*

($3^{\underline{o}}$) *Sejam $\alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tais que $\delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \lambda & \mu \end{vmatrix} \neq 0$. Se $X, Y, A, B \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, então:*

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha X + \beta Y = A \\ \lambda X + \mu Y = B \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} X = \mu\delta^{-1}A - \beta\delta^{-1}B \\ Y = -\lambda\delta^{-1}A + \alpha\delta^{-1}B \end{array} \right\}.$$

Prova ($1^{\underline{o}}$) Dada $L \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ definir $L_1 \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C};\mathbb{C})$ e $L_2 \in \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{C}}}(\mathbb{C};\mathbb{C})$ por $L_1(z) := \frac{1}{2}\left[L(z) - iL(iz)\right]$ e $L_2(z) := \frac{1}{2}\left[L(z) + iL(iz)\right] \quad \forall \ \ z \in \mathbb{C}$.
($2^{\underline{o}}$) Imediato.
($3^{\underline{o}}$) ($\Longrightarrow$) Basta observar que as passagens, formalmente idênticas às do caso numérico, são legítimas pelas propriedades da multiplicação m definida em ($2^{\underline{o}}$).
($\Longleftarrow$) Basta substituir os valores dados de X e Y no "sistema"e obter identidades, de novo usando as propriedades da multiplicação m definida em ($2^{\underline{o}}$). $\square$

Sejam $f : \Omega \to \mathbb{K}$ uma função e $\zeta = (a,b) \in \Omega$. Lembremos que

$$D_1 f(\zeta) = \frac{\partial f}{\partial x}(\zeta) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

e

$$D_2 f(\zeta) = \frac{\partial f}{\partial y}(\zeta) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k}$$

são as derivadas de f em relação a x e y respectivamente. Lembremos também que f é dita $\mathbb{R}$-*diferenciável em* ζ se existe uma aplicação $\mathbb{R}$-linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{K}$

$$\sigma = (h,k) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \alpha h + \beta k \in \mathbb{K}$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, existe $r > 0$ tal que $D_r(\zeta) \subset \Omega$ e existe $\psi : D_r(\zeta) \to \mathbb{K}$ que é contínua em ζ e tal que $\psi(\zeta) = 0$ de modo que:

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = \alpha h + \beta k + |\sigma|\,\psi(\zeta + \sigma),$$

para cada $\sigma = h + ki \in D_r(0)$.
É imediato verificar a partir desta definição que se f é $\mathbb{R}$-diferenciável

em ζ, então as constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ estão determinadas de forma única:

$$\alpha = D_1 f(\zeta) = \frac{\partial f}{\partial x}(\zeta) \qquad \text{e} \qquad \beta = D_2 f(\zeta) = \frac{\partial f}{\partial y}(\zeta).$$

Neste caso, a aplicação $\mathbb{R}$-linear $(h,k) \longmapsto \alpha h + \beta k$ de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{K}$ é chamada $\mathbb{R}$-*diferencial de* f *em* ζ e é indicada pela notação $df(\zeta)$, isto é, para cada $\sigma = h + ik \in \mathbb{C}$ temos

$$[2.1] \qquad df(\zeta)\sigma = D_1 f(\zeta)h + D_2 f(\zeta)k = \frac{\partial f}{\partial x}(\zeta)h + \frac{\partial f}{\partial y}(\zeta)k$$

Por outro lado, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $u = \mathrm{Re}(f)$ e $v = \mathrm{Im}(f)$, isto é, $f = u + iv = (u,v)$, então é claro que f é diferenciável (resp. possui derivadas parciais) em ζ se e só se cada uma das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ e $v : \Omega \to \mathbb{R}$ é diferenciável (resp.possui derivadas parciais) em ζ, e neste caso temos

$$[2.2] \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\zeta) = \frac{\partial u}{\partial x}(\zeta) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\zeta) \ \text{ e } \ \frac{\partial f}{\partial y}(\zeta) = \frac{\partial u}{\partial y}(\zeta) + i\frac{\partial v}{\partial y}(\zeta)$$

donde resulta, substituíndo em [2.1], a relação

$$df(\zeta)\sigma = \left[\frac{\partial u}{\partial x}(\zeta) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\zeta)\right]h + \left[\frac{\partial u}{\partial y}(\zeta) + i\frac{\partial v}{\partial y}(\zeta)\right]k =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(\zeta)h + \frac{\partial u}{\partial y}(\zeta)k + i\left[\frac{\partial v}{\partial x}(\zeta)h + \frac{\partial v}{\partial y}(\zeta)k\right] = du(\zeta)\sigma + idv(\zeta)\sigma =$$

$[du(\zeta) + idv(\zeta)](\sigma)$, para cada $\sigma = h + ki \in \mathbb{C}$, ou seja

$$df(\zeta) = du(\zeta) + idv(\zeta).$$

Observar que a aplicação $idv(\zeta)$ está definida no Lema 2.2. (2º).
A função $f : \Omega \to \mathbb{K}$ é dita $\mathbb{R}$-*diferenciável em* Ω se f é $\mathbb{R}$-diferenciável em cada ponto de Ω.

Note que [2.2] também se escreve assim: (aqui estamos supondo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$!)

$$[2.2'] \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\zeta) = (\frac{\partial u}{\partial x}(\zeta), \frac{\partial v}{\partial x}(\zeta)) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\zeta) = (\frac{\partial u}{\partial y}(\zeta), \frac{\partial v}{\partial y}(\zeta))$$

portanto

$$df(\zeta)\cdot\sigma = \frac{\partial f}{\partial x}(\zeta)h + \frac{\partial f}{\partial y}(\zeta)k = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\zeta), \frac{\partial v}{\partial x}(\zeta)\right)h +$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}(\zeta), \frac{\partial v}{\partial y}(\zeta)\right) k = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\zeta)h + \frac{\partial u}{\partial y}(\zeta)k, \frac{\partial v}{\partial x}(\zeta)h + \frac{\partial v}{\partial y}(\zeta)k\right) =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(\zeta)h + \frac{\partial u}{\partial y}(\zeta)k \\ \\ \frac{\partial v}{\partial x}(\zeta)h + \frac{\partial v}{\partial y}(\zeta)k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(\zeta) & \frac{\partial u}{\partial y}(\zeta) \\ \\ \frac{\partial v}{\partial x}(\zeta) & \frac{\partial v}{\partial y}(\zeta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ \\ k \end{pmatrix}.$$

O resultado seguinte relaciona os conceitos de $\mathbb{C}$-diferenciabilidade e $\mathbb{R}$-diferenciabilidade atravez de relações entre as derivadas parciais das partes real e imaginária de uma função $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$.

Teorema 2.3. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função e indiquemos com u (resp. v) a parte real (resp. imaginária) de f. Então as condições seguintes são equivalentes:*
(i) f é holomorfa em Ω (isto é, f é $\mathbb{C}$-diferenciável em Ω);
(ii) f é $\mathbb{R}$-diferenciável em Ω e $df(\zeta)$ é uma aplicação $\mathbb{C}$-linear de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$, para cada $\zeta \in \Omega$;
(iii) f é $\mathbb{R}$-diferenciável em Ω e $D_2 f(\zeta) = iD_1 f(\zeta)$ para cada $\zeta \in \Omega$;
(iv) f é $\mathbb{R}$-diferenciável em Ω e se verificam as relações

$$D_2 u(\zeta) = -D_1 v(\zeta) \quad \text{e} \quad D_1 u(\zeta) = D_2 v(\zeta) \tag{2.3.1}$$

para cada $\zeta \in \Omega$.

Prova (i) $\Longrightarrow$ (ii). Dado $\zeta = (a, b) \in \Omega$ arbitrário, pela condição (ii) do Lema 1.3 existe $r > 0$ tal que $D_r(\zeta) \subset \Omega$ e existe uma função $\varphi : D_r(\zeta) \to \mathbb{C}$ contínua em ζ tal que $\varphi(\zeta) = 0$ e

$$f(\zeta + \sigma) - f(\zeta) = f'(\zeta)\sigma + \sigma \cdot \varphi(\zeta + \sigma) \quad \forall \;\; \sigma \in D_r(0)$$

Se $\sigma = (h, k)$, a identidade acima se escreve na forma

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = f'(\zeta)h + if'(\zeta)k + |\sigma|\, \psi(\zeta + \sigma) \quad \forall \;\; \sigma \in D_r(0)$$

onde

$$\psi(\zeta + \sigma) := \begin{cases} 0 \text{ se } \sigma = 0 \\ \\ \dfrac{\sigma}{|\sigma|}\varphi(\zeta + \sigma) \qquad \forall \;\; \sigma \in D_r^*(0) \end{cases},$$

isto é, ψ é uma função de $D_r(\zeta)$ em $\mathbb{C}$, $\psi(\zeta) = 0$ e ψ é contínua em ζ pois φ o é e $|\psi(\zeta + \sigma)| = |\varphi(\zeta + \sigma)|$ para cada $\sigma \in D_r^*(0)$ e portanto

$$|\psi(\zeta + \sigma) - \psi(\zeta)| = |\psi(\zeta + \sigma)| = |\varphi(\zeta + \sigma)| \to 0 \quad \text{se} \quad \sigma \to 0.$$

Em consequência, pela definição de $\mathbb{R}$-diferenciabilidade (logo após a prova do Lema 2.2), resulta que f é $\mathbb{R}$-diferenciável em ζ. Por outro lado, é claro que a aplicação $\mathbb{R}$-linear

$$df(\zeta) : \sigma = (h,k) \longmapsto f'(\zeta)h + if'(\zeta)k = f'(\zeta)\sigma$$
é na realidade $\mathbb{C}$-linear (por verificação direta ou aplicando o Lema 2.1, ($2^{\underline{o}}$) (ii) $\iff$ (iii) ou ainda pelo exerc. 2.1 (i) $\iff$ (iii) ou ainda porque $df(\zeta)$ é a homotetia de razão $f'(\zeta)$.)

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Seja $\zeta = (a,b) \in \Omega$ arbitrário. Como por hipótese f é $\mathbb{R}$-diferenciável em ζ, pela definição logo após a prova do Lema 2.2 existe $r > 0$ tal que $D_r(\zeta) \subset \Omega$ e existe $\psi : D_r(\zeta) \to \mathbb{C}$ contínua em ζ tal que $\psi(\zeta) = 0$ e
$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = D_1 f(\zeta)h + D_2 f(\zeta)k + |\sigma|\,\psi(\zeta+\sigma)$$
para cada $\sigma = (h,k) \in D_r(0)$. Como por hipótese a aplicação
$$df(\zeta) : \sigma = (h,k) \longmapsto D_1 f(\zeta)h + D_2 f(\zeta)k$$
é $\mathbb{C}$-linear, pelo Lema 2.1 ($2^{\underline{o}}$), (ii) $\iff$ (iii), resulta $D_2 f(\zeta) = iD_1 f(\zeta)$, portanto a identidade acima se escreve na forma
$$f(\zeta+\sigma) - f(\zeta) = D_1 f(\zeta)\cdot\sigma + \sigma\varphi(\zeta+\sigma) \quad \forall \;\; \sigma \in D_r(0)$$
onde
$$\varphi(\zeta+\sigma) := \begin{cases} 0 \text{ se } \sigma = 0 \\[2ex] \dfrac{|\sigma|}{\sigma}\psi(\zeta+\sigma) \qquad \text{se } \;\sigma \in D_r^*(0)\ , \end{cases}$$

isto é, φ é uma função de $D_r(\zeta)$ em $\mathbb{C}$, $\varphi(\zeta) = 0$ e φ é contínua em ζ pois ψ o é e $|\varphi(\zeta+\sigma)| = |\psi(\zeta+\sigma)|$ para cada $\sigma \in D_r^*(0)$. Em consequência, pelo Lema 1.3, f é derivável em ζ (no sentido da Def.1.1), logo f é holomorfa em Ω.

(ii) $\iff$ (iii). Dado $\zeta \in \Omega$ arbitrário, $df(\zeta)$ é por definição a aplicação $\mathbb{R}$-linear de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ definida por $(h,k) \longmapsto D_1 f(\zeta)h + D_2 f(\zeta)k$. Ora, pelo Lema 2.1 ($2^{\underline{o}}$), (ii) $\iff$ (iii), sabemos que $df(\zeta)$ é $\mathbb{C}$-linear se e só se $D_2 f(\zeta) = iD_1 f(\zeta)$, o que prova a equivalência.
(iii) $\iff$ (iv). Para cada $\zeta \in \Omega$ valem as relações (ver [2.2]):
$$D_1 f(\zeta) = D_1 u(\zeta) + iD_1 v(\zeta) \quad \text{e} \quad D_2 f(\zeta) = D_2 u(\zeta) + iD_2 v(\zeta)$$

portanto a relação $D_2 f(\zeta) = iD_1 f(\zeta)$ para cada $\zeta \in \Omega$, equivale a
$$D_2 u(\zeta) + iD_2 v(\zeta) = -D_1 v(\zeta) + iD_1 u(\zeta) \quad \forall \;\; \zeta \in \Omega$$

que é equivalente às relações (2.3.1) para cada $\zeta \in \Omega$. $\square$

As relações (2.3.1), que escritas na notação clássica têm o seguinte aspecto
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ em cada } \Omega \text{ (ou } u_y = -v_x \;\text{ e }\; u_x = v_y)$$
são chamadas *equações de Cauchy-Riemann.*

Observação A partir da prova da implicação (ii) $\Longrightarrow$ (i) do Teor. 2.3 e das equações de Cauchy-Riemann, resulta que se $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, então $f'(\zeta) = D_1 f(\zeta) = u_x(\zeta) + iv_x(\zeta) = -iD_2 f(\zeta) = v_y(\zeta) - iu_y(\zeta) =$

$u_x(\zeta) - iu_y(\zeta) = v_y(\zeta) + iv_x(\zeta)$, para cada $\zeta \in \Omega$.

Os operadores ∂ e $\overline{\partial}$. Funções harmônicas.

Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é uma função $\mathbb{R}$-diferenciável em Ω, para cada $\zeta \in \Omega$ temos $df(\Omega) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ e em consequência, pelo Lema 2.2 (1º) existem $A_\zeta \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C};\mathbb{C})$ e $B_\zeta \in \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{C}}}(\mathbb{C};\mathbb{C})$ (únicas) tais que $df(\zeta) = A_\zeta + B_\zeta$; vamos determinar estas aplicações A_ζ e B_ζ.
Se indicamos como se faz habitualmente por x e y as projeções de $\mathbb{R}^2$:

$$x : (h,k) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto h \in \mathbb{R} \quad ; \quad y : (h,k) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto k \in \mathbb{R}$$

então aplicando a definição de $\mathbb{R}-$diferencial às funções x e y vem:

$$[2.3] \qquad dx(\zeta) = x \qquad \text{e} \qquad dy(\zeta) = y \quad \forall \quad \zeta \in \mathbb{R}^2.$$

Pelo Lema 2.2. (2º) estão definidas as aplicações $\mathbb{R}$-lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ do tipo $\lambda dx(\zeta)$, $\mu dy(\zeta)$ para cada $\lambda, \mu, \zeta \in \mathbb{C}$, logo pela identidade [2.1], para cada $\zeta \in \Omega$ e cada $\sigma = (h,k) \in \mathbb{R}^2$ podemos escrever

$$df(\zeta)\sigma = D_1f(\zeta)h + D_2f(\zeta)k = D_1f(\zeta)\,[dx(\zeta)\sigma] + D_2f(\zeta)\,[dy(\zeta)\sigma] =$$

$$[D_1f(\zeta)dx(\zeta)]\,(\sigma) + [D_2f(\zeta)dy(\zeta)]\,(\sigma) = [D_1f(\zeta)dx(\zeta) + D_2f(\zeta)dy(\zeta)]\,(\sigma)$$

donde resulta a expressão da diferencial de f em ζ seguinte

$$[2.4] \qquad df(\zeta) = D_1f(\zeta)dx(\zeta) + D_2f(\zeta)dy(\zeta) \qquad \forall \ \ \zeta \in \Omega.$$

Como as identidades [2.3] mostram que $dx(\zeta)$ e $dy(\zeta)$ independem de ζ, não há maior inconveniente em simplificar [2.4] escrevendo (abusivamente):

$$[2.4'] \qquad df(\zeta) = D_1f(\zeta)dx + D_2f(\zeta)dy \qquad \forall \ \ \zeta \in \Omega$$

Para simplificar a notação é frequente escrever [2.4] ,omitindo toda menção ao ponto $\zeta \in \Omega$ da forma seguinte:

$$[2.5] \qquad df = D_1f dx + D_2f dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Observar que df é a aplicação

$$df : \zeta \in \Omega \longmapsto df(\zeta) = D_1f(\zeta) \cdot dx(\zeta) + D_2f(\zeta) \cdot dy(\zeta) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$$

e então [2.5] é apenas uma *expressão formal* no sentido de que as "operações" que aparecem no segundo membro de [2.5] não foram definidas como

leis de composição.
Indiquemos agora com z a função identidade de $\mathbb{C}$

$$z = id : (h,k) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (h,k) \in \mathbb{R}^2$$

e indiquemos com $\overline{z}$ a conjugação

$$\overline{z} : (h,k) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (h,-k) \in \mathbb{R}^2.$$

É imediato verificar que z e $\overline{z}$ são funções $\mathbb{R}$-diferenciáveis de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ (atenção: $\overline{z}$ não é $\mathbb{C}$-diferenciável, isto é, não é diferenciável no sentido da Def.1.1, em nenhum ponto de $\mathbb{R}^2$ como vimos no exemplo 5 no final do Cap.1) e que as derivadas parciais são constantes:

$$D_1 z = 1 \quad , \quad D_2 z = i \quad , \quad D_1 \overline{z} = 1 \quad \text{e} \quad D_2 \overline{z} = -i$$

em consequência, a identidade [2.5] implica

$$[2.6] \qquad dz = dx + idy \qquad , \qquad d\overline{z} = dx - idy$$

cujo significado é (assim como [2.4] é o significado de [2.5]) :

$$[2.7] \qquad dz(\zeta) = dx(\zeta) + idy(\zeta) \quad , \quad d\overline{z}(\zeta) = dx(\zeta) - idy(\zeta) \quad \forall \ \zeta \in \mathbb{R}^2$$

Pelo Lema 2.2 ($3^{\underline{o}}$) as relações [2.7] implicam

$$[2.8] \quad dx(\zeta) = \tfrac{1}{2}\left[dz(\zeta) + d\overline{z}(\zeta)\right], \ dy(\zeta) = \tfrac{1}{2i}\left[dz(\zeta) - d\overline{z}(\zeta)\right] \ \forall \ \zeta \in \mathbb{R}^2$$

e então substituindo em [2.4.] os valores de $dx(\zeta)$ e $dy(\zeta)$ dados por [2.8] e fazendo operações (legítimas pelo Lema 2.2 ($2^{\underline{o}}$)) obtemos:

[2.9]

$$\left| \begin{array}{l} df(\zeta) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(\zeta) - i\dfrac{\partial f}{\partial y}(\zeta)\right] dz(\zeta) + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(\zeta) + i\dfrac{\partial f}{\partial y}(\zeta)\right] d\overline{z}(\zeta) \\ \\ \text{para cada} \ \ \zeta \in \Omega \end{array} \right.$$

o que se escreve frequentemente omitindo o ponto ζ :

$$[2.10] \qquad df = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y})dz + \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial x})d\overline{z}$$

ou também (notação análoga a [2.4$'$]):

$$[2.9'] \left| \begin{array}{l} df(\zeta) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(\zeta) - i\dfrac{\partial f}{\partial y}(\zeta)\right] dz + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(\zeta) + i\dfrac{\partial f}{\partial y}(\zeta)\right] d\overline{z} \\ \\ \text{para cada} \ \zeta \in \Omega. \end{array} \right.$$

A identidade [2.10] sugere definir os seguintes operadores diferenciais

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$$

com os quais a identidade [2.10] se escreve na forma

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z} \qquad \text{(comparar com [2.5])}$$

cujo significado preciso é [2.9], isto é

$$[2.11] \qquad df(\zeta) = \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta)dz(\zeta) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(\zeta)d\overline{z}(\zeta) \quad \forall \ \zeta \in \Omega.$$

A partir das identidades [2.7] é fácil verificar que $dz(\zeta) = z = id_{\mathbb{C}}$ e $d\overline{z}(\zeta) = \overline{z}$ =conjugação, para cada $\zeta \in \mathbb{C}$ e portanto

$$dz(\zeta) \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C};\mathbb{C}) \quad \text{e} \quad d\overline{z}(\zeta) \in \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{C}}}(\mathbb{C};\mathbb{C}) \quad \forall \ \zeta \in \mathbb{C}$$

donde para cada $\zeta \in \mathbb{C}$:

$$\partial f(\zeta) := \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta)dz(\zeta) \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C};\mathbb{C}) \ , \ \overline{\partial} f(\zeta) := \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(\zeta)d\overline{z}(\zeta) \in \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{C}}}(\mathbb{C};\mathbb{C})$$

É usual omitir o ponto ζ nestas notações, como em $[2.9']$ e [2.10] , e escrever abusivamente (comparar também com $[2.4']$ e [2.5]):

$$\partial f(\zeta) = \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta)dz \ \text{ ou simplesmente } \ \partial f = \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$$\overline{\partial} f(\zeta) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(\zeta)d\overline{z} \ \text{ ou simplesmente } \overline{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}.$$

Podemos resumir a discussão precedente no resultado seguinte, que resolve o problema proposto no início desta secção de expressar $df(\zeta)$ como soma de $A_\zeta \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C};\mathbb{C})$ e $B_\zeta \in \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{C}}}(\mathbb{C};\mathbb{C})$:

Proposição 2.4 *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função $\mathbb{R}$-diferenciável. Então, para cada $\zeta \in \Omega$ temos $\partial f(\zeta) \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C};\mathbb{C})$, $\overline{\partial} f(\zeta) \in \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{C}}}(\mathbb{C};\mathbb{C})$ e*

$$(2.4.1) \qquad df(\zeta) = \partial f(\zeta) + \overline{\partial} f(\zeta). \ \square$$

A condição $\overline{\partial} f = 0$ em Ω ou equivalentemente

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \tfrac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}) = 0 \quad \text{em} \ \ \Omega$$

expressada em termos de partes real e imaginária u e v de f significa que

$$\frac{\partial(u+iv)}{\partial x} + i\frac{\partial(u+iv)}{\partial y} = 0 \ \text{ em } \ \Omega$$

que equivale as equações de Cauchy-Riemann (2.3.1) :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ \text{ em } \ \Omega.$$

Por esta razão, a equação $\overline{\partial} f = 0$ em Ω ou equivalentemente

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \;\text{ em }\; \Omega$$

é chamada *equação de Cauchy-Riemann*. Desta forma podemos dar a seguinte formulação, em termos do operador $\overline{\partial}$, da equivalência entre as condições (i) e (iv) do Teor. 2.3 :

Proposição 2.5 *Uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é holomorfa em Ω se e só se f é $\mathbb{R}$-diferenciável e $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ em Ω* (isto é, $\overline{\partial} f = 0$ em Ω) $\square$

Em vista das Props. 2.4 e 2.5 concluímos que as funções $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ são as $f : \Omega \to \mathbb{C}$ que são $\mathbb{R}$-diferenciáveis em Ω tais que $df(\zeta)$ tem sua componente $\overline{\mathbb{C}}$-linear nula para cada $\zeta \in \Omega$ e, por (2.4.1), $df(\zeta)$ é $\mathbb{C}$-linear para cada $\zeta \in \Omega$.

Proposição 2.6 *Sejam Ω um aberto conexo não vazio de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e suponhamos que* $\mathrm{Re}(f)$ *é constante em Ω. Então f é constante em Ω.*

Prova Por hipótese temos $f(z) = c + iv(z)$ para cada $z \in \Omega$, sendo $c := \mathrm{Re}(f)(z) \in \mathbb{C}$ para todo $z \in \Omega$. Como $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, pela Prop.2.5 temos

$$0 = 2\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = i\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \;\text{ em }\; \Omega$$

donde:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \;\text{ em }\; \Omega,$$

como Ω é conexo, as relações acima implicam que v é constante. $\square$

Corolário 2.7 *Sejam Ω um aberto conexo, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e suponhamos que* $\mathrm{Im}(f)$ *é constante em Ω.Então f é constante em Ω.*

Prova Basta aplicar a Prop. 2.6 à função $g = if$. $\square$

Corolário 2.8 *Sejam Ω um aberto conexo, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e suponhamos que $f'(z) = 0$ para cada $z \in \Omega$. Então f é constante em Ω.*

Prova Pela Observação que segue a prova do Teor. 2.3 temos $f' = u_x - iu_y$ portanto $u_x = u_y = 0$ em Ω, donde $u = \mathrm{Re}(f) = $ cte. em Ω.
Usar a Prop. 2.6. $\square$

Encerramos este capítulo com a definição de função harmônica e mostrando (de maneira incompleta) que toda função holomorfa é harmônica. Seja $f : \Omega \to \mathbb{K}$ uma função possuíndo derivadas parciais de segunda ordem contínuas em Ω, portanto

$$D_{1,2}f = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = D_{2,1}f, \;\text{ em }\Omega$$

e em consequência

$$4\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial \overline{z}} := 4\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}) = (\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}) =$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} =: \Delta f$$

O operador

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = D_{1,1} + D_{2,2}$$

é chamado *Laplaciano* e as soluções da equação diferencial parcial

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

recebem um nome especial:

Definição 2.9 Uma função $f \in \mathcal{C}(\Omega; \mathbb{K})$ tal que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ existem em Ω é dita *harmônica em* Ω se

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Resulta imediatamente da definição que o Laplaciano de uma função real é real. Em consequência, *uma função* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é *harmônica em* Ω *se e só se a parte real e a parte imaginária de* f *são harmônicas em* Ω (ver exerc. 2.12 (a)).

Proposição 2.10 *Se* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, *então* f *é harmônica em* Ω.

Prova (incompleta)
Mais adiante demonstraremos que se $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, então f possui derivadas parciais contínuas de todas as ordens, isto é, $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ e em particular resultará

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} \quad \text{em} \quad \Omega$$

o que implica $\Delta f = 4\dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial \overline{z}}$. Como a Prop. 2.5 implica $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$,

resulta então $\Delta f = 0$. $\square$

Exercícios

(2.1) Provar que se $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função então as três condições

seguintes são equivalentes:
(i) h é $\mathbb{C}$-homogênea; (ii) h é $\mathbb{C}$-linear;
(iii) h é uma homotetia de $\mathbb{C}$, isto é, existe um único $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $h(z) = \lambda z$ para cada $z \in \mathbb{C}$.

(2.2) Dada uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ provar que as condições seguintes são equivalentes:
(i) f é holomorfa em Ω;
(ii) Para cada $\zeta \in \Omega$ existe uma aplicacão $\mathbb{C}$-linear $h_\zeta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que
$$\lim_{\sigma \to 0} \frac{f(\zeta + \sigma) - f(\zeta) - h_\zeta(\sigma)}{\sigma} = 0$$
(As vezes nos referimos à condição (ii) acima dizendo que f é $\mathbb{C}$-*diferenciável em* Ω).

(2.3) Dada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, mostre que o determinante da matriz jacobiana de f calculado em $\zeta \in \Omega$ é igual a $|f'(\zeta)|^2$.

(2.4) Se $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ então $f'(\zeta) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(\zeta) \quad \forall \ \zeta \in \Omega$.

(2.5) Verifique que ∂ e $\overline{\partial}$ têm as propriedades habituais dos operadores de derivação:
$$\partial(f+g) = \partial f + \partial g \quad ; \quad \partial(fg) = f\partial g + g\partial f \quad ; \quad \partial(f/g) = \frac{g\partial f - f\partial g}{g^2}$$
$$\overline{\partial}(f+g) = \overline{\partial} f + \overline{\partial} g \quad ; \quad \overline{\partial}(fg) = f\overline{\partial} g + g\overline{\partial} f \quad ; \quad \overline{\partial}(f/g) = \frac{g\overline{\partial} f - f\overline{\partial g}}{g^2}$$

(2.6) Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ para as funções seguintes:
(a) $f(z) = z$; (b) $f(z) = \overline{z}$; (c) $f(z) = |z|^2$; (d) $f(z) = \mathrm{Re}(z)$;
(e) $f(z) = |z|$; (f) $f(z) = \dfrac{z}{|z|}$; (g) $f(z) = Log\ |z|$;
(h) $f(z) = Log\ |z| + iArc\ tg\ y/x$, definida para $\mathrm{Re}(z) > 0$, sendo $x = \mathrm{Re}(z)$ e $y = \mathrm{Im}(z)$.

(2.7) Uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é dita *antiholomorfa no ponto* $\zeta \in \Omega$ se a aplicação composta $z \in \Omega \longmapsto \overline{f(z)} \in \mathbb{C}$ é holomorfa em ζ (ver Observações (2) logo após a Def. 1.2); f é dita antiholomorfa em Ω se é antiholomorfa em cada ponto de Ω †.
(a) Prove que as condições seguintes são equivalentes:
(i) f é antiholomorfa em ζ,
(ii) $\displaystyle\lim_{z \to \zeta} \frac{f(z) - f(\zeta)}{\overline{z} - \overline{\zeta}}$ existe,
(iii) f é $\mathbb{R}$-diferenciável em ζ e $df(\zeta)$ é $\mathbb{C}$-semilinear,
(iv) f é $\mathbb{R}$-diferenciável em ζ e $\dfrac{\partial f}{\partial z}(\zeta) = 0$.

(b) Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função não constante e suponha Ω conexo. Provar que se $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ então f não é antiholomorfa em Ω e que se f é antiholomorfa em Ω, então $f \notin \mathcal{H}(\Omega)$ (*Sugestão: se* f é holomorfa e antiholomorfa em Ω, então $\partial f = \partial \overline{f} = 0$ o que implica $v = \mathrm{Im}(f) = 0$).

(c) Se $f = u + iv \in \mathcal{H}(\Omega)$, sendo $u = \mathrm{Re}(f)$ e $v = \mathrm{Im}(f)$ é verdade que $g = v + iu \in \mathcal{H}(\Omega)$? (*Sugestão*: $g(z) = i\overline{f(z)}$ para cada $z \in \Omega$)

(d) Se U e V são dois abertos de $\mathbb{C}$, $f : U \to V$ e $g : V \to \mathbb{C}$ são funções, f é antiholomorfa em $\zeta \in U$ e g é antiholomorfa em $f(\zeta)$, é verdade que $g \circ f$ é antiholomorfa em ζ? (Observar que se $f(z) = g(z) = \overline{z}$ $\forall$ $z \in \mathbb{C} = U = V$, então $g \circ f = id$).

(2.8) Sejam E e F dois $\mathbb{C}$-espaços vetoriais e indiquemos com $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E; F)$ o $\mathbb{K}$-espaço vetorial das aplicações $\mathbb{K}$-lineares de E em F e com $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{C}}}(E; F)$ o $\mathbb{R}$-espaço vetorial das aplicações $\mathbb{C}$-semi-lineares de E em F (isto é, $u \in \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{C}}}(E; F)$ se e só se u é aditiva e $u(\lambda x) = \overline{\lambda} u(x)$ $\forall$ $x \in E$ e $\lambda \in \mathbb{C}$). Mostre que $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; F)$ e $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{C}}}(E; F)$ são sub-$\mathbb{R}$-espaços vetoriais de $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; F)$ e prove que $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; F) = \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; F) \oplus \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{C}}}(E; F)$.

(2.9) Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ($z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, $u = \mathrm{Re}(f)$ e $v = \mathrm{Im}(f)$) uma função holomorfa num aberto conexo Ω e sejam a, b, c três números reais tais que a e b não são simultâneamente nulos. Provar que se $a.u(x, y) + bv(x, y) = c$ para cada $(x, y) \in \Omega$, então f é constante em Ω. [*Sugestão:* derivando em relação a x, y a relação $a.u + bv = c$, obtemos, supondo $a \neq 0$, as relações seguintes $v_x = \dfrac{b}{a} v_y$ e $v_y = \dfrac{b}{a} v_x$, que substituídas uma na outra fornecem $v_y = -\dfrac{b^2}{a^2} v_y$ e $v_x = \dfrac{b^2}{a^2} v_x$, o que implica $v_x = v_y = 0$ e portanto $v =$cte. Aplicar o Corol. 2.7].

(2.10) Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função.
($1^{\underline{o}}$) Prove que as condições seguintes são equivalentes:
(i) f é harmônica em Ω
(ii) $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ é holomorfa em Ω
(iii) $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ é antiholomorfa em Ω (ver exerc. (2.8))

($2^{\underline{o}}$) Deduzir que se f é harmônica em Ω, e se g é holomorfa ou antiholomorfa sobre um aberto Ω_1, e $g(\Omega_1) \subset \Omega$, então $f \circ g$ é harmônica em Ω_1 (Admitir que a derivada g' de uma função holomorfa g é também uma função holomorfa).

(2.11) (a) Dados $a, b \in \mathbb{C}$, prove que a aplicação $adz + bd\overline{z}$ é nula se e só se $a = b = 0$;
(b) Dados $a, b, \in \mathbb{C}$, prove que a aplicaçào $adx + bdy$ é nula se só se

$a = b = 0$;
(c) Provar que se $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $|f|$ é constante em Ω, então f é constante em Ω, se Ω for conexo. [*Sugestão:* para (a) e (b) usar as definições de $dz, d\overline{z}$, dx e dy; (c) $|f|^2 = f\overline{f} = c$ implica $d(f\overline{f}) = 0$ ou seja $\overline{f}((\partial f)dz + (\overline{\partial} f)d\overline{z}) + f((\partial \overline{f})dz + (\overline{\partial}\, \overline{f})d\overline{z}) = 0$. Como f (resp. $\overline{f}$) é holomorfa (resp. anti-holomorfa) temos $\overline{\partial} f = \partial \overline{f} = 0$ e portanto $f(\partial f)dz + \overline{f}(\overline{\partial}\, \overline{f})d\overline{z} = 0$ logo por (a) temos (se $f \neq 0$) $\partial f = 0$ em Ω, donde (ver exerc. (2.8) (a)) resulta que f é antiholomorfa em Ω e sendo $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, o exerc. (2.8) (b) mostra que f é constante].

(2.12) Seja Ω um aberto de $\mathbb{C}$.
(a) Prove que o conjunto de todas as funções harmônicas sobre Ω com valores em $\mathbb{K}$ munido das operações pontuais é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, que indicaremos no que segue por

$$Har(\Omega; \mathbb{K}).$$

(b) Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $u = \mathrm{Re}(f)$ e $v = \mathrm{Im}(f)$, provar que $\Delta f = \Delta u + \Delta v$.
Deduzir que as condições seguintes são equivalentes:
(i) $f \in Har(\Omega; \mathbb{C})$;
(ii) $u, v \in Har(\Omega; \mathbb{R})$;
(iii) $\overline{f} \in Har(\Omega; \mathbb{C})$. - Concluir que $\mathcal{H}(\Omega) \neq Har(\Omega; \mathbb{C})$ (Observar que $\mathcal{H}(\Omega) \subset Har(\Omega; \mathbb{C})$ pela Prop. 2.9 e se $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $f \neq$ cte., então $\overline{f}$ é antiholomorfa e pelo exerc. (2.8) (b), temos $\overline{f} \notin \mathcal{H}(\Omega)$, porém $\overline{f} \in Har(\Omega; \mathbb{C})$)
(c) Dados $u, v \in Har(\Omega; \mathbb{K})$ verificar que $uv \in Har(\Omega; \mathbb{K})$ se e só se $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$ em Ω.
(d) Deduzir de (c) que se Ω é conexo e $u, u^2 \in Har(\Omega; \mathbb{R})$ então u é constante em Ω.
(e) Deduzir de (c) que se Ω é conexo, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $|f|^2 \in Har(\Omega; \mathbb{R})$ então f é constante em Ω (*Sugestão:* aplicar (c) ao produto $|f|^2 = f\overline{f}$ mostrando que se $f = u + iv$, então $\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial y} = (\dfrac{\partial u}{\partial x})^2 + (\dfrac{\partial v}{\partial y})^2 + (\dfrac{\partial u}{\partial y})^2 + (\dfrac{\partial v}{\partial y})^2)$.
(f) Se Ω é conexo $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e f não é constante, prove que $|f| \notin Har(\Omega; \mathbb{R})$ [*Sugestão:* (f$_1$) Verificar que $\Delta |f| = \left|f^{-3}\right| . \left[(uv_x - vu_x)^2 + (uv_y - vu_y)^2\right]$. O conjunto $\Omega_0 = \{z \in \Omega \mid v(z) \neq 0\}$ é aberto e é não vazio pelo Corol. 2.7. Se $\Delta |f| = 0$ então $u_x = \dfrac{u}{v}v_x$ e $u_y = \dfrac{u}{v}v_y$ em Ω_0; destas identidades e das equações de Cauchy-Riemann resulta $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ em Ω_0 portanto $f =$ cte. em cada componente de Ω_0 e como Ω é conexo, pelo PPA(= Princípio do Prolongamento Analítico, Cap. 4) resulta que $f =$ cte. em Ω].
(g) Se $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e f não se anula em nenhum ponto de Ω, prove que $Log\,|f| \in Har(\Omega; \mathbb{R})$.

(2.13) Determinar as constantes $a, b, c \in \mathbb{C}$ para as quais as seguintes funções f são holomorfas:
(a) $f(z) = x + ay + i(bx + cy), \quad \forall \;\; z = x + iy \in \mathbb{C}$
(b) $f(z) = \cos x(chy + ashy) + isenx(chy + bshy), \quad \forall \;\; z = x + iy \in \mathbb{C}.$

(2.14) Se Ω é conexo, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, f não é constante em Ω, $u := \mathrm{Re}(f)$ e $v := \mathrm{Im}(f)$, prove que não pode existir $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $v = \lambda u$.

(2.15) Seja $u \in Har(\Omega; \mathbb{R})$ tal que u tem derivadas parciais contínuas até 2^a ordem (é possível demonstrar que esta hipótese é supérflua, de modo preciso que $Har(\Omega; \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^\infty(\Omega; \mathbb{R})$). Prove que $f = u_x - iu_y \in \mathcal{H}(\Omega)$.

(2.16) Para uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ as condições seguintes são equivalentes se $\zeta \in \Omega$:
(i) f é holomorfa em ζ;
(ii) f é $\mathbb{R}$-diferenciável em ζ e $df(\zeta)$ é $\mathbb{C}$-linear de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$;
(iii) f é $\mathbb{R}$-diferenciável em ζ e $D_2 f(\zeta) = iD_1 f(\zeta)$;
(iv) f é $\mathbb{R}$-diferenciável em ζ e se verificam as relações

$$u_x(\zeta) = v_y(\zeta) \quad \text{e} \quad u_y(\zeta) = -v_x(\zeta)$$

(este é o enunciado "pontual"do Teor. 2.3 e é análogo ao exerc. 2.7, observar que não há o que provar pois a prova do Teor. 2.3 é "pontual").

(2.17) Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \begin{cases} x^5 \, |z|^{-4}, & \text{se } z \neq 0 \\ \\ 0, & \text{se } \; z = 0 \end{cases}$$

Mostre que as equações de Cauchy-Riemann são verificadas no ponto $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$. E nos demais pontos?

Capítulo 3

SÉRIES DE POTÊNCIAS

Neste capítulo vamos estabelecer as bases da definição de função analítica que veremos no capítulo 4. Começamos definindo os limites de oscilação de uma sequência que serão necessários para enunciar o teorema de Hadamard.

Definição 3.1 Chamaremos *conjunto dos números reais ampliado* e o indicamos com $\overline{\mathbb{R}}$ à reunião de $\mathbb{R}$ com dois símbolos $+\infty$ e $-\infty$ sujeito à verificação das condições seguintes:
(a) Para todo $x \in \mathbb{R}$ se tem:

$$-\infty < x < +\infty,\ x + (+\infty) = +\infty,\ x + (-\infty) = -\infty,\ \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0,$$

(b) Se $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ então $x \cdot (+\infty) = +\infty$ e $x(-\infty) = -\infty$,
(c) Se $x \in \mathbb{R}$, $x < 0$ então $x \cdot (+\infty) = -\infty$ e $x(-\infty) = +\infty$.

Se $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ e X não é limitado superiormente (isto é, se $\forall\ y \in \mathbb{R}$ existe $x \in X$ tal que $x > y$) dizemos que

$$\sup X = +\infty\ .$$

Análogamente, se X não é limitado inferiormente, dizemos que

$$\inf X = -\infty\ .$$

Pela Def. 3.1 (a), qualquer parte não vazia de $\overline{\mathbb{R}}$ (e portanto de $\mathbb{R}$) possui supremo e ínfimo, o que é a principal razão de termos introduzido os símbolos $+\infty$ e $-\infty$.
Seja $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência arbitária em $\mathbb{R}$ e para cada $\nu \in \mathbb{N}$ seja

$$X_\nu := \{x_m \mid m \geq \nu\}\,.$$

Como $X_\nu \subset \mathbb{R}$ para cada $\nu \in \mathbb{N}$, as considerações anteriores implicam que para cada $\nu \in \mathbb{N}$ existe

$$y_\nu = \sup X_\nu = \sup_{m\geq\nu} x_m$$

e como $X_\nu \supset X_{\nu+1}$ para cada $\nu \in \mathbb{N}$ resulta $y_\nu \geq y_{\nu+1}$ para cada $\nu \in \mathbb{N}$ portanto *sempre existe* (desde que $y_0 \in \mathbb{R}$, ou seja $y_\nu \in \mathbb{R}\quad \forall\ \ \nu \in \mathbb{N}$)

$$x^* := \inf_{\nu\in\mathbb{N}} y_\nu = \lim_{\nu\to\infty} y_\nu.$$

Este elemento $x^* \in \overline{\mathbb{R}}$ assim constituído a partir da sequência $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é chamado *limite superior da sequência* $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ e é indicado pela notação

$$x^* = \limsup_{m\to\infty}\ \ x_m = \overline{\lim_{m\to\infty}} x_m$$

portanto

$$\limsup_{m\to\infty}\ \ x_m = \inf_{\nu\in\mathbb{N}}(\sup_{m\geq\nu} x_m) = \lim_{\nu\to\infty}(\sup_{\nu\to\infty} x_m).$$

De maneira análoga podemos definir o *limite inferior da sequência* (x_m) por

$$x_* = \liminf_{m\to\infty} \ x_m = \sup_{\nu\in\mathbb{N}}(\inf_{m\geq\nu} x_m) = \lim_{\nu\to\infty}(\inf_{m\geq\nu} x_m).$$

Com as notações anteriores, se $z_\nu = \inf X_\nu = \inf\limits_{m\geq\nu} x_m$, a relação $X_\nu \supset X_{\nu+1}$ implica $z_\nu \leq z_{\nu+1}$ donde resulta $z_\nu \leq z_{\nu+1} \leq y_{\nu+1} \leq y_\nu$ para cada $\nu \in \mathbb{N}$ donde $\liminf\limits_{m\to\infty} \ x_m = x_* = \sup\limits_{\nu\in\mathbb{N}} z_\nu \leq \inf\limits_{\nu\in\mathbb{N}} y_\nu = x^* = \limsup\limits_{m\to\infty} \ x_m$. Em consequência vemos que, convenientemente,

$$x_* = \liminf_{m\to\infty} x_m \leq \limsup_{m\to\infty} x_m = x^*.$$

Observar que

$$((*)) \qquad \liminf_{m\to\infty} x_m = -\limsup_{m\to\infty}(-x_m).$$

Exemplos (1) Consideremos a sequência (x_m) definida por

$$(1, 1/2, 2, 1/3, 3, 1/4, 4, \ldots, 1/m, m, \ldots)$$

então é claro que

$$\limsup_{m\to\infty} x_m = +\infty \quad \text{e} \quad \liminf_{m\to\infty} x_m = 0.$$

(2) Seja (x_m) a sequência: $(1, -1, 2, -2, \ldots, m, -m, \ldots)$ neste caso é claro que $\limsup\limits_{m\to\infty} \ x_m = +\infty$ e $\liminf\limits_{m\to\infty} \ x_m = -\infty$.

(3) Se (x_m) é a sequência definida por $x_m = -m$ para cada $m \in \mathbb{N}$, então $\limsup\limits_{m\to\infty} \ x_m = \liminf\limits_{m\to\infty} \ x_m = -\infty$.

(4) Se (x_m) é a sequência definida por $x_m = m$ para cada $m \in \mathbb{N}$, então $\limsup\limits_{m\to\infty} \ x_m = \liminf\limits_{m\to\infty} \ x_m = +\infty$.

(5) Seja $x_m := (-1)^m(1 + 1/m)$, então $\limsup\limits_{m\to\infty} \ x_m = 1$ e $\liminf\limits_{m\to\infty} \ x_m = -1$

(6) Se

$$x_m := \left\{ \begin{array}{l} 1 + 1/m, \text{ se } m \text{ é par e } > 0 \\ \\ -m, \text{ se } m \text{ é ímpar} \end{array} \right\}, \text{ então } \limsup_{m\to\infty} \ x_m = 1$$

e $\liminf\limits_{m\to\infty} \ x_m = -\infty$. Se $x'_m := -x_m$ então $\limsup\limits_{m\to\infty} \ x'_m = +\infty$ e $\liminf\limits_{m\to\infty} \ x'_m = -1$.

Observação O limite superior e o limite inferior de uma sequência (x_m) de números reais são chamados *limites de oscilação* de (x_m). A razão de se introduzirem conceitos aparentemente tão pouco manejáveis como os limites de oscilação é devido a que *estes sempre existem.*

Séries de funções

Seja X uma parte não vazia de $\mathbb{C}$ e $f : X \to \mathbb{C}$ uma função então definimos o símbolo $\|f\|_X$ por

$$\|f\|_X := \sup_{z\in X} |f(z)|\,.$$

Definição 3.2 Seja $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções definidas numa parte não vazia X de $\mathbb{C}$ com valores complexos.
(a) Diz-se que (f_m) é *pontualmente convergente em* X se para cada $z \in X$, a sequência $(f_m(z))_{m\in\mathbb{N}}$ é convergente em $\mathbb{C}$.
(b) Diz-se que (f_m) é *uniformemente convergente em* X se existe $f : X \to \mathbb{C}$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq \nu$ implica $\|f_m - f\|_X \leq \varepsilon$. Nestas condições dizemos que (f_m) *converge uniformemente para* f *em* X e o indicamos com a notação $f_m \overset{X}{\rightrightarrows} f$ $(m \to \infty)$.
(c) Diz-se que (f_m) *é uma sequência de Cauchy em* X se para cada $\varepsilon > 0$ existe $\nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq n \geq \nu$ implica $\|f_m - f_n\|_X \leq \varepsilon$.

Se (f_m) é pontualmente convergente em X então para cada $z \in X$ existe $f(z) = \lim\limits_{m\to\infty} f_m(z)$ o que define uma função $f : z \in X \to \lim\limits_{m\to\infty} f_m(z) \in \mathbb{C}$, neste caso dizemos que (f_m) *converge pontualmente para* f *em* X e o indicamos com as notações

$$f_m \overset{X}{\to} f \quad (m \to \infty) \qquad \text{ou} \qquad \lim_{m\to\infty} f_m = f.$$

Proposição 3.3 *Sejam* X *uma parte não vazia de* $\mathbb{C}$ *e* (f_m) *uma sequência de funções definidas em* X *com valores em* $\mathbb{C}$, *então:*
(a) *Se* (f_m) *converge uniformemente para* f *em* X, *então* (f_m) *converge pontualmente para* f *em* X.
(b) *Se* (f_m) *converge uniformemente para* f *em* X *e* $f_m \in \mathcal{C}(X)$ *para cada* $m \in \mathbb{N}$, *então* $f \in \mathcal{C}(X)$.
(c) (f_m) *é de Cauchy em* X *se e só se* (f_m) *é uniformemente convergente em* X.

Prova (a) Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, por hipótese existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que

(3.3.1) $$m \geq \nu \implies \|f_m - f\|_X \leq \varepsilon$$

portanto, se $z \in X$ é um ponto arbitrário temos

$$m \geq \nu \implies |f_m(z) - f(z)| \leq \|f_m - f\|_X \leq \varepsilon$$

donde $\lim\limits_{m\to\infty} f_m(z) = f(z)$.

(b) Fixados $\zeta \in X$ e $\varepsilon > 0$ arbitrários, por hipótese existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que (3.3.1) está verificada. Por outro lado, como $f_\nu \in \mathcal{C}(X)$ por hipótese, existe $\delta > 0$ tal que

(3.3.2) $$z \in D_\delta(\zeta) \cap X \implies |f_\nu(z) - f_\nu(\zeta)| \leq \varepsilon$$

e em consequência, para cada $z \in D_\delta(\zeta) \cap X$ temos:

$$|f(z)-f(\zeta)| \le |f(z)-f_\nu(z)|+|f_\nu(z)-f_\nu(\zeta)|+|f_\nu(\zeta)-f(\zeta)| \le 3\varepsilon,$$

pois a 1^a e a 3^a parcela do termo central das desigualdades acima estão limitadas por $\|f_\nu - f\|_X \le \varepsilon$ (ver (3.3.1)) e a 2^a parcela está limitada por ε, por (3.3.2).
(c) Suponhamos que (f_m) é de Cauchy em X, então dado $\varepsilon > 0$ arbitário existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que

(3.3.3) $$m, n \ge \nu \implies \|f_m - f_n\|_X \le \varepsilon$$

e então, se $z \in X$ é um ponto arbitrário, para $m \ge n \ge \nu$ temos $|f_m(z) - f_n(z)| \le \|f_m - f_n\|_X \le \varepsilon$, o que mostra que $(f_m(z))_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{C}$ e como $\mathbb{C}$ é completo resulta que existe

$$f(z) = \lim_{m\to\infty} f_m(z) \quad \forall \;\; z \in X\ .$$

Fixemos $\zeta \in X$ e $n \ge \nu$. Por definição de $f(\zeta)$ existe $m \in \mathbb{N}$, $m \ge \nu$ tal que

$$|f(\zeta) - f_m(\zeta)| \le \varepsilon \qquad (m \text{ depende de } \zeta)$$

Então, como $m, n \ge \nu$, por (3.3.3) resulta

$$|f(\zeta)-f_n(\zeta)| \le |f(\zeta)-f_m(\zeta)|+|f_m(\zeta)-f_n(\zeta)| \le \varepsilon + \|f_m - f_n\|_X \le 2\varepsilon,$$

o que prova, sendo $\zeta \in X$ e $n \ge \nu$ arbitrários, que

$$n \ge \nu \implies \|f - f_n\|_X \le 2\varepsilon,$$

isto é, $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f \quad (m \to \infty)$.

Reciprocamente, suponhamos que $f_m \overset{X}{\rightrightarrows} f, m \to \infty$ então, dado $\varepsilon > 0$ existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que (3.3.1) está verificada, portanto

$$m, n \ge \nu \implies \|f_m - f_n\|_X \le \|f_m - f\|_X + \|f - f_n\|_X \le 2\varepsilon. \ \square$$

Observações (1) A recíproca da asserção (a) da Prop. 3.3 é falsa como mostra o exemplo clássico seguinte: se $X = \overline{D}_1(0)$ e $f_m(z) := |z|^m$ para cada $z \in \overline{D}_1(0)$ e $m \in \mathbb{N}$, então é claro que $f_m \overset{\overline{D}_1(0)}{\longrightarrow} f$ onde

$$f(z) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad |z| < 1 \\ 1, & \text{se} \quad |z| = 1 \end{cases}$$

Como $f_m \in \mathcal{C}(\overline{D}_1(0))$ para cada $m \in \mathbb{N}$ e $f \notin \mathcal{C}(\overline{D}_1(0))$, a asserção (b) da Prop. 3.3 acarreta que é falsa a afirmação $f_m \rightrightarrows f$ em $\overline{D}_1(0)$. O mesmo exemplo mostra que a asserção (b) da Prop. 3.3 é falsa se a convergência de (f_m) para f não fôr uniforme.

(2) A importância do critério de Cauchy (Prop. 3.3 (c)) é que se pode assegurar a existência do limite uniforme de uma sequência de funções sem necessidade do conhecimento prévio deste limite e então este resultado serve para provar a existência de funções (i.e. serve como ferramenta para definir novas funções).

Definição 3.4 Seja X uma parte não vazia de $\mathbb{C}$ e (f_m) uma sequência de funções definidas em X com valores complexos.
(a) Chama-se *série (de funções) de termo geral* f_m a sequência $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$ definida por $S_m = \sum\limits_{k=0}^{m} f_k$ para cada $m \in \mathbb{N}$. A série (S_m) será indicada pela notação

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_m \quad \text{ou} \quad \sum f_m$$

Na prática, quando cada f_m estiver dado por uma fórmula explícita, indicaremos a série $\sum\limits_{m=0}^{\infty} f_m$ pela notação (abusiva) $\sum\limits_{m=0}^{\infty} f_m(z)$.

(b) Diz-se que a série de termo geral f_m é *uniformemente convergente em* X se a sequência (S_m) definida em (a) é uniformemente convergente em X. Neste caso, se $S_m \overset{X}{\rightrightarrows} f$ dizemos que f é a soma da série $\sum f_m$ e escrevemos

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} f_m = \sum f_m$$

(c) Diz-se que a série de termo geral f_m *converge* (resp. *diverge*) *no ponto* $\zeta \in X$ se a série numérica $\sum\limits_{m=0}^{\infty} f_m(\zeta)$ é convergente (resp.divergente = não convergente). Diz-se que a série de termo geral f_m é *pontualmente convergente em* X se esta série converge em cada ponto X.

(d) A série de termo geral f_m é *absolutamente convergente no ponto* $\zeta \in X$ se a série numérica $\sum\limits_{m=0}^{\infty} |f_m(\zeta)|$ é convergente. A série de termo geral f_m é *absolutamente convergente em* X se esta série é absolutamente convergente em cada ponto de X.

Proposição 3.5 *(Weierstrass) Sejam X uma parte não vazia de $\mathbb{C}$, (f_m) uma sequência de funções definidas em X com valores em $\mathbb{C}$ e (b_m) uma sequência de números reais positivos. Se a série numérica $\sum b_m$ é convergente e*

$$\|f_m\|_X \leq b_m \quad \textit{para cada } m \in \mathbb{N},$$

então a série de funções de termo geral f_m

$$\sum f_m$$

é uniformemente e absolutamente convergente em X.

Prova Seja $S_m = \sum\limits_{k=0}^{m} f_k$ para cada $m \in \mathbb{N}$ então se $m, n \in \mathbb{N}$ e $m > n$ temos

$$\|S_m - S_n\|_X \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|f_k\|_X \leq \sum_{k=n+1}^{m} b_k$$

o que mostra, pela Prop. 3.3.(c) que (S_m) (isto é $\sum f_m$) é uniformemente convergente em X. Por outro lado, para cada $z \in X$ temos

$$\sum_{k=n+1}^{m} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|f_k\|_X \leq \sum_{k=n+1}^{m} b_k$$

o que mostra que $\sum f_m$ é absolutamente convergente em X. $\square$

Observação Pelo critério de Cauchy para séries numéricas é claro que toda série de funções absolutamente convergente em X é pontualmente convergente em X. (pois $|\sum f_k(z)| \leq \sum |f_k(z)|$).

Exemplo Sejam $\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| \dfrac{z}{z+1} \right| < 1 \right\}$ e consideremos a série de funções de termo geral $f_m(z) = (\dfrac{z}{z+1})^m$, isto é

$$\sum_{m=0}^{\infty} (\frac{z}{z+1})^m$$

Vamos provar que esta série é absolutamente convergente em Ω e uniformemente sobre cada compacto Ω. De fato, por definição de Ω é claro que $\forall \ z \in \Omega$ temos $\left| \dfrac{z}{z+1} \right| < 1$ e portanto

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{z}{z+1} \right|^m = \frac{1}{1 - \left| \dfrac{z}{z+1} \right|} < \infty$$

Em particular, a série é pontualmente convergente em Ω e define uma função f

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (\frac{z}{z+1})^m \qquad \forall \ z \in \Omega$$

Pondo $z = x + iy$ a condição $\left| \dfrac{z}{z+1} \right| < 1$ equivale a $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{(x+1)^2+y^2}} < 1$ ou seja $1 + 2x > 0$, isto é $x > -\frac{1}{2}$ donde $\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > -\frac{1}{2} \right\}$.

Seja K um compacto arbitrário de Ω. Consideremos a função

$$\varphi : z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\} \longmapsto \frac{z}{z+1} \in \mathbb{C}$$

então verificamos que $\varphi^{-1}(D_1(0)) = \Omega$, e, como φ é injetora, podemos escrever

$$\varphi(\Omega) = D_1(0)$$

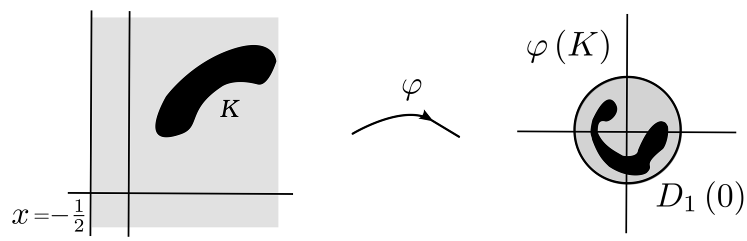
e portanto $\varphi(K)$ é um compacto de $D_1(0)$, e então existe $r \in]0,1[$ tal que $\varphi(K) \subset \overline{D}_r(0)$, isto é,

$$z \in K \implies \left|\frac{z}{z+1}\right| \leq r$$

donde

$$\|f_m\|_K = \sup_{z\in K}\left|\frac{z}{z+1}\right|^m \leq r^m \quad \forall\ m \in \mathbb{N}$$

o que, pela Prop. 3.5, implica na convergência uniforme da série $\sum(\dfrac{z}{z+1})^m$ em K.



Definição 3.6 Sejam $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números complexos e $\zeta \in \mathbb{C}$. Chama-se ***série de potências*** (de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$) ***com coeficientes*** c_m ***em volta de*** ζ à série de funções de termo geral f_m sendo

$$f_m(z) = c_m(z-\zeta)^m \quad \forall\ \ m \in \mathbb{N}, \quad \forall\ \ z \in \mathbb{C}.$$

Indicamos esta série pela notação

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m(z-\zeta)^m \qquad \text{ou} \qquad \sum c_m(z-\zeta)^m.$$

Dada uma série de potências

$$((*)) \qquad \sum_{m=0}^{\infty} c_m(z-\zeta)^m$$

vamos estudar o conjunto X dos $z \in \mathbb{C}$ tais que $((*))$ é convergente em z e se f é a soma da série $((*))$ vamos estudar as propriedades da função f. Vamos ver que a natureza deste conjunto X é muito simples, essencialmenrte X é um "disco". Em primeiro lugar, para simplificar e unificar a linguagem, vamos ampliar o nosso conceito de disco, admitindo discos de raio nulo e de raio $+\infty$.

$$\overline{D}_0(\zeta) = \{\zeta\} \quad , \quad \overline{D}_\infty(\zeta) = D_\infty(\zeta) = \mathbb{C} \quad , \quad D_0(\zeta) = \varnothing$$

A afirmação acima segundo a qual X é essencialmente um disco significa que

$$D_r(\zeta) \subset X \subset \overline{D}_r(\zeta)$$

para algum r tal que $0 \leq r \leq +\infty$, isto é, X pode ser igual a $\mathbb{C}$ ou $\{\zeta\}$ ou X é a reunião de um disco aberto (de raio positivo) com parte de sua fronteira que eventualmente pode ser a fronteira toda, e, neste caso, X é um disco fechado de raio positivo. Observar que sempre $X \neq \varnothing$ pois $\zeta \in X$.

Dada a série de potências

$$((*)) \qquad \sum_{m=0}^{\infty} c_m (z-\zeta)^m$$

consideremos o seguinte conjunto:

I$= \{r \in \mathbb{R}_+ \mid$ a série de termos não negativos $\sum_{m=0}^{\infty} |c_m|\, r^m$ é convergente$\}$.

É claro que I é não vazio pois $0 \in$ I , além disso se $r \in$I e $r > 0$, então $[0, r] \subset$I, o que mostra que I é um intervalo contido em $\mathbb{R}_+$. Este intervalo é fechado à esquerda pois $0 \in$I e pode ser aberto ou fechado à direita, pode ser limitado ou não e pode ser reduzido a $\{0\}$. Em qualquer caso seja

$$\rho := \sup \text{I},$$

então ρ é um elemento de $\overline{\mathbb{R}}_+ := [0, +\infty]$, finito ou infinito, eventualmente nulo; é chamado *raio de convergência da série de potências* $((*))$ e, quando $\rho > 0$, o disco $D_\rho(\zeta)$ é chamado *disco de convergência da série de potências* $((*))$.

Lema 3.7 (Abel) *Sejam r e s dois números reais tais que $0 < r < s$ e seja*

$$((*)) \qquad \sum_{m=0}^{\infty} c_m (z-\zeta)^m$$

uma série de potências. Se existe $M > 0$ tal que

$$|c_m|\, s^m \leq M \quad \textit{para cada} \quad m \in \mathbb{N},$$

então a série $((*))$ converge uniformemente e absolutamente em $\overline{D}_r(\zeta)$.

Prova De fato, para cada $z \in \overline{D}_r(\zeta)$ temos $|z-\zeta| \leq r$, donde resulta

$$|c_m|\, |z-\zeta|^m \leq |c_m|\, r^m = |c_m|\, s^m (\tfrac{r}{s})^m \leq M(\tfrac{r}{s})^m, \text{ para cada } m \in \mathbb{N}$$

portanto aplicando a Prop. 3.5 (com $b_m := M(\frac{r}{s})^m$) resulta que $((*))$ é uniformemente e absolutamente convergente em $\overline{D}_r(\zeta)$ pois

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m = \sum_{m=0}^{\infty} M(\tfrac{r}{s})^m = \frac{Ms}{s-r} < \infty. \ \square$$

O resultado seguinte mostra duas propriedades do raio de convergência que o caracterizam quando é um número real positivo.

Proposição 3.8 Seja $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ *o raio de convergência de uma série de potências*

$$((*)) \qquad \sum_{m=0}^{\infty} c_m (z-\zeta)^m$$

então:

(a) *Para todo* $r \in]0, \rho[$, *a série* $((*))$ *é uniformemente e absolutamente convergente em* $\overline{D}_r(\zeta)$.

(b) *Para todo* $z_0 \in \mathbb{C}$ *tal que* $|z_0 - \zeta| > \rho$, *a série* $((*))$ *é divergente em* z_0.

Reciprocamente, se $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ *satisfaz* (a) *e* (b) *então* ρ *é o raio de convergência de* $((*))$.

Prova (a) Fixado $r \in]0, \rho[$, seja s tal que $r < s < \rho$, então por definição de raio de convergência, a série

$$\sum_{n \geq 0} |c_n| \, s^n$$

é convergente, donde para cada $m \in \mathbb{N}$, resulta

$$|c_m| \, s^m \leq \sum_{n \geq 0} |c_n| \, s^n =: M < +\infty$$

o que pelo Lema 3.7 prova a asserção.

(b) Fixado $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $|z_0 - \zeta| > \rho$ arbitrário, vamos provar que:

(3.8.1) Para cada $\nu \in \mathbb{N}$ existe $m_\nu \in \mathbb{N}$ tal que $|c_{m_\nu}| \, |z - \zeta|^{m_\nu} > \nu$

De fato, suponhamos por absurdo que (3.8.1) é falsa, então existe $\nu_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$(3.8.2) \qquad |c_m| \, |z_0 - \zeta|^m \leq \nu_0 \quad \text{para cada } m \in \mathbb{N}.$$

Escolhendo um número real t tal que $\rho < t < |z_0 - \zeta|$, pelo Lema 3.7 (os reais r e s daquele Lema substituídos por t e $|z_0 - \zeta|$ respectivamente), de (3.8.2) resultaria que $((*))$ seria absolutamente convergente em $\overline{D}_t(\zeta)$ e como $\xi = \zeta + t \in \overline{D}_t(\zeta)$, em particular a série numérica $\sum c_m (\xi - \zeta)^m$ seia absolutamente convergente, isto é

$$\sum_{m \geq 0} |c_m| \, |\xi - \zeta|^m = \sum_{m \geq 0} |c_m| \, t^m \quad \text{é convergente,}$$

o que é absurdo pois $t > \rho =$ raio de convergência de $((*))$. Desta forma fica provada a asserção (3.8.1).

Observemos finalmente que

$$(3.8.3) \qquad \lim_{m \to \infty} |c_m| \, |z_o - \zeta|^m = 0 \iff \lim_{m \to \infty} c_m (z_0 - \zeta)^m = 0$$

e (3.8.1) prova que a primeira das asserções (3.8.3) é falsa, portanto a segunda também é falsa, o que mostra que a série *numérica* $\sum c_m(z_0-\zeta)^m$ não é convergente e portanto é divergente.
Inversamente, vamos mostrar que se $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ satisfaz (a) e (b) então ρ é o raio de convergência de $((*))$, isto é, $\rho = \sup \mathrm{I}$. De fato, seja $\rho_* = \sup \mathrm{I}$ então é claro que $\rho_* < \rho$ é falso [pois de $\rho_* < r < \rho$ resulta (ρ verifica (a) por hipótese!) que $\sum |c_m|\, r^m < +\infty$ portanto $r \in \mathrm{I}$ logo $\rho_* = \sup \mathrm{I} < r \in \mathrm{I}$, o que seria ridículo], logo $\rho \le \rho_*$. Por outro lado, se fosse $\rho < \rho_*$, como ρ_* é raio de convergência de $((*))$ por hipótese, o argumento que usamos na prova de (a) [aplicado agora ao par (ρ, ρ^*) que substitui o par (r, ρ)] mostraria que se $\rho < s < \rho^*$ então $\sum |c_m|\, s^m < +\infty$. Portanto, $\forall\ z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $|z_0 - \zeta| = 1$, a série $\sum c_m(z_0-\zeta)^m$seria absolutamente convergente (i.e. $((*))$ seria A.C. em z_0), o que é absurdo pois por hipótese ρ satisfaz (b). $\square$

Corolário 3.9 *Seja $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ o raio de convergência de uma série de potências*

$$((*)) \qquad \sum_{m\ge 0} c_m(z-\zeta)^m$$

Se a série $((*))$ converge em $z_0 \in \mathbb{C}$, então $\sigma := |z_0-\zeta| \le \rho$, em consequência, a série $((*))$ é uniformemente e absolutamente convergente em $\overline{D}_s(\zeta)$, para cada $s \in \,]0, \sigma[$.

Prova Suponhamos por absurdo que $\sigma = |z_0 - \zeta| > \rho$, então pela Prop. 3.8.(b) a série $\sum c_m(z_0-\zeta)^m$ seria divergente contra o suposto, logo $\sigma \le \rho$. Se $s \in \,]0,\sigma[$, como $\sigma \le \rho$ resulta $s \in \,]0,\rho[$ e então pela Prop. 3.8. (a) resulta que $((*))$ é uniformemente e absolutamente convergente em $\overline{D}_s(\zeta)$. $\square$

Completamos a informação sobre o disco de convergência de uma série de potências com um resultdo que expressa seu raio em função dos coeficientes.

Proposição 3.10 (Hadamard) *O raio de convergência ρ de uma série potências*

$$\sum c_m(z-\zeta)^m$$

é dado pela expressão

$$\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{m\to\infty} |c_m|^{1/m}} \qquad \text{(com as convenções: } \frac{1}{+\infty} = 0 \text{ e } \frac{1}{0} = +\infty\text{)}.$$

Prova Sejam $\Lambda := \limsup\limits_{m\to\infty} |c_m|^{1/m}$ e $\lambda = 1/\Lambda$, vamos mostrar que

$$(3.10.1) \qquad \lambda = \rho$$

Caso 1: $\quad 0 < \Lambda < +\infty$

Se $r \in \mathbb{R}_+^*$ então

$$r < \lambda = \frac{1}{\Lambda} \iff r\Lambda = r\limsup_{m\to\infty} |c_m|^{1/m} = \limsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{|c_m|\, r^m} < 1$$

e esta última desigualdade implica, pelo teste da raiz, que $\sum |c_m|\, r^m$ converge e então por definição de ρ resulta $r \leq \rho$, portanto provamos que

$$r \in \mathbb{R}_+^* \qquad \text{e} \qquad r < \lambda \qquad \Longrightarrow \qquad r \leq \rho$$

o que é equivalente a

$$\lambda \leq \rho. \tag{3.10.2}$$

Por outro lado, se $r \in \mathbb{R}_+^*$ temos:

$$r > \lambda = \frac{1}{\Lambda} \iff r\Lambda = \limsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{|c_m|\, r^m} > 1$$

e esta última desigualdade, de novo pelo teste da raiz, implica que $\sum |c_m|\, r^m$ é divergente e então por definição de ρ resulta $r \geq \rho$, portanto provamos que

$$r \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{e} \quad r > \lambda \Longrightarrow r \geq \rho$$

o que é equivalente a

$$\lambda \geq \rho. \tag{3.10.3}$$

De (3.10.2) e (3.10.3) resulta (3.10.1)

Caso 2: $\Lambda = 0$

Se $\Lambda = \limsup_{m\to\infty} |c_m|^{1/m} = 0$ então é claro que

$$\limsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{|c_m|\, r^m} = r \cdot \Lambda = 0 < 1 \quad \forall \; r > 0$$

o que pelo teste das raíz implica que $\sum |c_m|\, r^m$ converge para cada $r > 0$, donde $\rho = +\infty = \frac{1}{0} = \frac{1}{\Lambda} = \lambda$.

Caso 3: $\Lambda = +\infty$

Se $\Lambda = \limsup_{m\to\infty} |c_m|^{1/m} = +\infty$, então é claro que

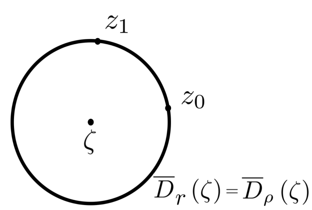
$$\limsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{|c_m|\, r^m} = r \cdot \Lambda = r(+\infty) = +\infty > 1 \quad \forall \; r > 0$$

donde pelo teste da raíz resulta que $\sum |c_m|\, r^m$ é divergente para cada

$r > 0$ e em consequência $\rho = 0 = \frac{1}{+\infty} = \frac{1}{\Lambda} = \lambda$. $\square$

Observação Até agora não fizemos nenhuma referência ao comportamento de uma série de potências na fronteira (circunferência) do seu disco de convergência e a razão disto é que este comportamento é muito variado e não pode ser descrito de forma simples. Este fato torna a questão difícil e como é completamente irrelevante para os nossos

propósitos é natural deixa-la de lado num texto introdutório como este. Vamos ilustrar com um exemplo simples o comportamento difícil de uma série de potências na fronteira do seu disco de convergência.
Nas hipóteses do Corol. 3.9 isto é, se $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ e a série $\sum c_m(z-\zeta)^m$ *converge no ponto* $z_0 \in \mathbb{C}$, já vimos que $r = |z_0 - \zeta| \leq \rho$. No caso $r = |z_0 - \zeta| = \rho$, não pertinentes as observações seguintes:
(1^o) A série $\sum c_m(z-\zeta)^m$ não é necessáriamente absolutamente convergente em z_0 (i.e. $\sum |c_m|\,|z_0-\zeta|^m$ pode ser divergente).
(2^o) Se $|z_1 - \zeta| = r = \rho$ e $z_1 \neq z_0$, a série $\sum c_m(z-\zeta)^m$ não é necessária mente convergente em z_1 (isto é, pode existir um ponto $z_1 \in \partial \overline{D}_\rho(\zeta)$ tal que não existe o limite $\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{m} c_k(z_1-\zeta)^k$).



Para provar estas duas asserções vamos considerar o exemplo seguinte

$$\text{(S)} \qquad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} z^m$$

e o resultado seguinte ([R1], Teor. 3.44]): *Suponhamos que o raio de convergência da série* $\sum c_m z^m$ *seja* 1, *que* $c_0 \geq c_1 \geq \ldots \geq c_m \geq c_{m+1} \ldots$ *e que* $\lim\limits_{m\to\infty} c_m = 0$. *Então* $\sum c_m z^m$ *converge em todos os pontos* z *tais que* $|z| = 1$, *com a possível exceção de* $z = 1$.
Pela fórmula de Hadarmard (Prop. 3.10), o raio de convergência da série (S) é

$$\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{1/m}} = \frac{1}{\lim\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{1/m}} = 1$$

o que mostra que a série (S) verifica as hipóteses do resultado acima e portanto (S) converge em todos os pontos $z \in \mathbb{C}$ tais que $|z| = 1$ salvo em $z = 1$, onde evidentemente (S) não converge. Resulta então que para cada $z \in \mathbb{C}, |z| = 1$ e $z \neq 1$, (S) converge em z porém (S) não é absolutamente convergente em z (pois $\sum \frac{1}{m}|z|^m = \sum \frac{1}{m} = +\infty$), o que prova a asserção (1^o). Por outro lado, tomando $z_0 = i$ e $z_1 = 1$ na série (S), o resultado acima prova a asserção (2^o).

O resultado seguinte constitui a parte essencial da prova de que toda função analítica é holomorfa, o que será demonstrado no capítulo 4.

Lema 3.11 *Se* $\rho \in \overline{\mathbb{R}}_+^*$ *é o raio de convergência de uma série de po-*

tências

$$\text{(S)} \qquad \sum_{m=0}^{\infty} c_m(z-\zeta)^m,$$

então a série de potências derivada:

$$\text{(S}'\text{)} \qquad \sum_{m=1}^{\infty} mc_m(z-\zeta)^{m-1}$$

também tem raio de convergência ρ.

Prova Segue diretamente da Proposição 3.10. □

Como aplicação importante do breve resumo precedente sobre séries de potências, encerramos este capítulo com a definição e algumas das propriedades mais importantes da função exponencial.

Proposição 3.12 *A série de potências*

$$\exp(z) = \sum_{m\geq 0} \frac{1}{m!} z^m$$

é absolutamente convergente em $\mathbb{C}$ e uniformemente convergente em $\overline{D}_r(0)$ para cada $r \in \mathbb{R}_+^*$.

Prova Dado $z_0 \in \mathbb{C}$ arbitrário, a série $\sum_{m\geq 0} \frac{1}{m!} |z_0|^m$ converge pelo teste da razão pois

$$\limsup_{m\to\infty} \left[\frac{|z_0|^{m+1}}{(m+1)!} \cdot \frac{m!}{|z_0|^m} \right] = \lim_{m\to\infty} \frac{|z_0|}{m+1} = 0 < 1$$

o que prova que $\sum_{m\geq 0} \frac{1}{m!} z^m$ é absolutamente convergente em $\mathbb{C}$. Dado $r \in \mathbb{R}_+^*$ arbitrário, para cada $z \in \overline{D}_r(0)$ temos $|z| \leq r$, donde

$$\text{(3.12.1)} \qquad \frac{1}{m!} |z|^m \leq \frac{1}{m!} r^m \quad \forall \;\; z \in \overline{D}_r(0) \;\; \text{e} \;\; \forall \;\; m \in \mathbb{N}$$

Como $\sum \frac{1}{m!} z^m$ é absolutamente convergente em $\mathbb{C}$, resulta que a série numérica $\sum \frac{1}{m!} r^m$ é convergente e então, de (3.12.1) e do teste M de Weierstrass (Prop. 3.5), resulta que $\sum \frac{1}{m!} z^m$ é uniformemente convergente em $\overline{D}_r(0)$. □

Definição 3.13 A função

$$\exp : z \in \mathbb{C} \longmapsto \exp(z) = \sum_{m\geq 0} \frac{1}{m!} z^m \in \mathbb{C}$$

é chamada *função exponencial.* O número real $\exp(1)$ é indicado pela letra e, isto é:

$$e := \exp(1) = \sum_{m\geq 0} \frac{1}{m!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{m!} + \ldots$$

É frequente indicar $\exp(z)$ por $e^z \quad (z \in \mathbb{C})$.

O resultado seguinte reune as propriedades básicas da função exponencial.

Teorema 3.14 *São válidas as asserções seguintes:*
(a) $\exp \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$;
(b) $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$, *para cada* $z, w \in \mathbb{C}$;
(c) $\exp(z) \neq 0$ *para cada* $z \in \mathbb{C}$;
(d) $\lim_{z\to 0} \dfrac{\exp(z) - 1}{z} = 1$;
(e) $\exp \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ *e* $\exp'(z) = \exp(z)$ *para cada* $z \in \mathbb{C}$;
(f) $\exp|\mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^x \in \mathbb{R}$ *é uma função positiva estritamente crescente tal que* $\lim_{x\to\infty} e^x = +\infty$ *e* $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$;
(g) *Existe um número real positivo* π *tal que* $\exp(\dfrac{\pi i}{2}) = i$ *e tal que* $\exp(z) = 1$ *se e só se* $\dfrac{z}{2\pi i} \in \mathbb{Z}$;
(h) $\exp$ *é uma função periódica de período* $2\pi i$;
(i) *A função* $t \longmapsto \exp(it)$ *aplica* $\mathbb{R}$ *sobre*
$$S^1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$
(j) *Para cada* $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ *existe* $z \in \mathbb{C}$ *tal que* $w = \exp(z)$.

Na realidade vamos provar apenas as asserções (a), (b), (c), (d) e (e) do Teor. 3.14, *a demonstração completa deste teorema está no* [R2], Prologue]. Antes de dar a prova (parcial) do teorema acima vamos fazer algumas observações de caráter geral que devem ajudar numa melhor compreensão deste resultado.

Observações [1] As asserções (b), (c), e (j) do Teor. 3.14 implicam que exp é um homomorfismo do grupo aditivo $(\mathbb{C}; +)$ sobre o grupo multiplicativo $(\mathbb{C}^*; \cdot)$ (onde $\mathbb{C}^* := \mathbb{C}\setminus\{0\}$)
[2] Existem muitas formas de definir dois dos números mais importantes da Matemática:
$$e = 2,718281828459045\ldots$$
$$\pi = 3,14159\ldots$$
A Def. 3.13 (para e) e o Teor. 3.14 (g) (para π) são uma das várias formas de fazê-lo. Além disso, de (b) e (g) segue que
$$\exp(\pi i) = \exp(\frac{\pi i}{2} + \frac{\pi i}{2}) \overset{(b)}{=} \exp(\frac{\pi i}{2})\exp(\frac{\pi i}{2}) \overset{(g)}{=} i^2 = -1$$
ou seja (ver convenção de notação na Def. 3.13)
$$e^{\pi i} = -1 \quad \text{ou} \quad e^{\pi i} + 1 = 0.$$
De maneira análoga:
$$\exp(2\pi i) = \exp(\pi i + \pi i) = \exp(\pi i)\exp(\pi i) = (-1)^2 = 1$$
ou seja

$$e^{2\pi i} = 1.$$

[3] A asserção (i) do Teor. 3.14 é enunciada às vezes numa linguagem imprecisa porém sugestiva, da forma seguinte: *a função* $t \longmapsto \exp(it)$ *"enrola"a reta na circunferência* $S^1(0)$. Da prova desta asseção (i) resulta como consequência uma definição formal das funções "sen" e "cos"da seguinte forma: como $e^{it} \in S^1(0)$ para cada $t \in \mathbb{R}$, resulta $\left|e^{it}\right| = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e então definimos:

$$\cos t := \mathrm{Re}(e^{it}) \quad \text{e} \quad \mathrm{sen}\ t := \mathrm{Im}(e^{it}) \quad \forall \ \ t \in \mathbb{R}\ .$$

Também resulta que $\cos' = -\mathrm{sen}$ e $\mathrm{sen}' = \cos$, que sen e cos têm período 2π e é fácil de obter o desenvolvimento em séries de potências destas duas funções; em outras palavras, obtemos toda a trigonometria real (ver [R2], Prologue).

Prova (parcial) do Teor. 3.14 (a) Para cada $m \in \mathbb{N}$ seja

$$f_m(z) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} z^k \qquad \text{para cada } z \in \mathbb{C},$$

então é claro que $f_m \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$ para cada $m \in \mathbb{N}$, portanto, para cada $r \in \mathbb{R}_+^*$ temos

$$g_m = f_m | \overline{D}_r(0) \in \mathcal{C}(\overline{D}_r(0)) \quad \forall \ \ m \in \mathbb{N}.$$

Pela Prop. 3.12, a sequência (g_m) de elementos de $\mathcal{C}(\overline{D}_r(0))$ converge uniformemente para $\exp|\overline{D}_r(0)$ e portanto, pela Prop. 3.3 (b) resulta

$$\exp|\overline{D}_r(0) \in \mathcal{C}(\overline{D}_r(0))$$

e como esta relação vale para cada $r \in \mathbb{R}_+^*$, se segue que $\exp \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$.

(b) Dados $z, w \in \mathbb{C}$ arbitrários, sejam $a_m = \dfrac{1}{m!} z^m$ e $b_m = \dfrac{1}{m!} w^m$ para cada $m \in \mathbb{N}$ e seja

$$c_m = \sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k}, \qquad \text{para cada } m \in \mathbb{N}.$$

Pela Prop. 3.12, as séries $\sum a_m = \sum \dfrac{1}{m!} z^m = \exp(z)$ e $\sum b_m =$ $= \sum \dfrac{1}{m!} w^m = \exp(w)$ são absolutamente convergentes e portanto podemos aplicar o Teorema do Produto de Séries (ver [R1]) (no qual é necessária a convergência absoluta de apenas uma das séries bastando a outra ser convergente) obtendo

$$\exp(z)\exp(w) = (\sum_{m \geq 0} a_m)(\sum_{m \geq 0} b_m) = \sum_{m \geq 0} c_m \tag{3.14.1}$$

Por outro lado, pela definição de a_m e b_m temos

$$c_m = \sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k} = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} z^k \frac{1}{(m-k)!} w^{m-k} = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!(m-k)!} z^k w^{m-k},$$

donde resulta

$$m!c_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} z^k w^{m-k} = (z+w)^m$$

ou seja

$$c_m = \frac{1}{m!}(z+w)^m \quad \forall \ \ m \in \mathbb{N}$$

o que implica

$$\sum_{m \geq 0} c_m = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!}(z+w)^m = \exp(z+w),$$

que junto com (3.14.1) prova (b).

(c) Dado $z \in \mathbb{C}$ arbitrário, por (b) temos:

$$\exp(z)\exp(-z) = \exp(z+(-z)) = \exp 0 = 1$$

donde $\exp(z) \neq 0$.

(d) Aqui vai ser mais cômoda a notação e^z que $\exp(z)$.

$$e^z - 1 = z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = z(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \ \ldots) \quad \forall \ \ z \in \mathbb{C}$$

donde

$$\frac{e^z-1}{z} = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \ldots \quad \forall \ \ z \in \mathbb{C}, \ \ z \neq 0$$

e em consequência

$$\left|\frac{e^z-1}{z} - 1\right| = \left|\frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \ \ldots\right| \quad \forall \ \ z \in \mathbb{C}, \ \ z \neq 0. \tag{3.14.2}$$

A série $\frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \ldots = \sum_{m \geq 2} \frac{1}{m!} z^{m-1}$ é absolutamente convergente em $\mathbb{C}$ (por exemplo, pelo teste da razão) e então, pelo exerc. 3.4 ou 3.6 vem :

$$\left|\frac{e^z-1}{z} - 1\right| = \left|\sum_{m \geq 2} \frac{1}{m!} z^{m-1}\right| \leq \sum_{m \geq 2} \frac{1}{m!} |z|^{m-1}. \tag{3.14.3}$$

Vamos provar agora que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |z| < \delta \implies \left|\frac{e^z-1}{z} - 1\right| < \varepsilon \ .$$

Suponhamos que $\varepsilon < 1$ e tomemos $\delta = \varepsilon/_2$, então para cada $z \in \mathbb{C}$ tal que $0 < |z| < \delta = \varepsilon/_2$, por (3.14.3) resulta

$$\left|\frac{e^z-1}{z} - 1\right| \leq \sum_{m \geq 2} \frac{1}{m!} |z|^{m-1} \leq \sum_{m \geq 2} \frac{1}{m!} (\frac{\varepsilon}{2})^{m-1} = \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2-1} = \varepsilon$$

(e) Seja $z \in \mathbb{C}$ arbitrário, então por (b) e (d) vem:

$$\exp'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{\exp(z+h) - \exp(z)}{h} = \exp(z) \lim_{h \to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(z). \square$$

Exercícios

(3.1) Sejam (x_m) uma sequência em $\mathbb{R}$ e $x^* \in \overline{\mathbb{R}}$.
Prove que as condições seguintes são equivalentes:
(i) $x^* = \limsup\limits_{m\to\infty} x_m$,
(ii) $x^* = \max\left\{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid \exists \text{ uma subsequência de } (x_m) \text{ convirgindo para } x\right\}$.
Prove que se $x^* \in \mathbb{R}$, então as condições acima são equivalentes à condição seguinte:
(iii) $\forall\ \varepsilon > 0$, o conjunto $F_\varepsilon = \{m \in \mathbb{N} \mid x_m \geq x^* + \varepsilon\}$ é finito e o conjunto $\mathrm{I}_\varepsilon = \{m \in \mathbb{N} \mid x_m \geq x^* - \varepsilon\}$ é infinito.

(3.2) Enunciar e demosntrar o resultado análogo ao exerc. 3.1 para $\liminf\limits_{m\to\infty} x_m$.(*Sugestão:* usar $((*))$, que precede os Exemplos de limites de oscilação).

(3.3) Se (x_m) é uma sequência em $\mathbb{R}$, então $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = \xi$ (onde $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$) se e só se $\limsup\limits_{m\to\infty} x_m = \liminf\limits_{m\to\infty} x = \xi$.

(3.4) Sejam X uma parte não vazia de $\mathbb{C}$ e (f_m) uma sequência de funções definidas em X com valores em $\mathbb{K}$. Prove que se $\sum f_m$ é absolutamente convergente em X, então $\sum f_m$ é pontualmente convergente em X e $\left|\sum\limits_{m\geq 0} f_m(z)\right| \leq \sum\limits_{m\geq 0} |f_m(z)|$ para cada $z \in X$.

(3.5) Sejam $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma família de números complexos e δ um número real positivo. Se a série
$$\sum c_m z^m$$
converge e tem soma igual a 0 para cada $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq \delta$ prove que $c_m = 0$ para cada $m \in \mathbb{N}$.

(3.6) Determinar (usando a fórmula de Hadamard) o raio de convergência das seguintes séries de potências:

(a) $\sum\limits_{m\geq 0} a^{m^2} z^m$, onde $0 < |a| < 1$; (b) $\sum\limits_{m\geq 0} m^k z^m$, onde $k \in \mathbb{N}^*$;

(c) $\sum\limits_{m\geq 0} m^3 x^m$; (d) $\sum\limits_{m\geq 0} \dfrac{2^m}{m!} z^m$; (e) $\sum\limits_{m\geq 1} \dfrac{2^m}{m^2} z^m$; (f) $\sum\limits_{m\geq 0} \dfrac{m^3}{3^m} z^m$;

(g) $\sum\limits_{m\geq 0} c_m z^m$, onde $0 < a, b < 1$ e a sequência $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é definida por $c_{2k+1} = a^{2k+1}$ e $c_{2k} = b^{2k}$ $(k \in \mathbb{N})$.

(3.7) Provar as seguintes desigualdades:

$$|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z|\, e^{|z|} \quad \forall \;\; z \in \mathbb{C}.$$

(3.8) Provar que para cada $z \in \mathbb{C}$ e para cada $m \in \mathbb{N}^*$ se tem

$$(1 + \frac{z}{m})^m = 1 + z + \sum_{2 \leq p \leq m} (1 - \frac{1}{m}) \; \ldots \; (1 - \frac{p-1}{m}) \frac{z^p}{p!}$$

e deduzir que $\;\; e^z = \lim\limits_{m \to \infty} (1 + \dfrac{z}{m})^m \;$ para cada $z \in \mathbb{C}$.

(3.9) (Funções trigonométricas complexas) Definimos as funções $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $\mathrm{sen} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ da forma seguinte:

$$\cos z = \tfrac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \qquad \text{e} \qquad \mathrm{sen}\; z = \tfrac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \qquad \forall \;\; z \in \mathbb{C}$$

(a) Provar que as restrições a $\mathbb{R}$ das funções cos e sen são as funções cos e sen habituais da trigonometria real (ver Teor. 3.14. (i) e **Observação** [3] que segue o enunciado do Teor. 3.14).

(b) Verificar as identidades seguintes:
$\cos^2 z + \mathrm{sen}^2 z = 1$, $\quad \cos(z \pm w) = \cos z \, \cos w \mp \mathrm{sen}\; z \; \mathrm{sen}\; w$ e
$\mathrm{sen}\; (z \pm w) = \mathrm{sen}\; z \, \cos w \pm \mathrm{sen}\; w \, \cos z$, para cada $z, w \in \mathbb{C}$.

Capítulo 4

FUNÇÕES ANALÍTICAS

O breve resumo das propridades básicas das séries de potências feito no capítulo 3 teve por finalidade servir como ponto de partida para a definição de função analítica.

Definição 4.1 Sejam Ω um aberto não vazio de $\mathbb{C}$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função. Diz-se que f é *analítica em* Ω (ou que "f é representável por séries de potências em Ω") se, para cada disco aberto $D_r(\zeta) \subset \Omega$ $(r > 0)$ existe uma série de potências em volta de ζ,

$$\sum c_m(z-\zeta)^m$$

que converge pontualmente para f em $D_r(\zeta)$. O conjunto de todas as funções analíticas em Ω será indicado pela notação

$$\mathcal{A}(\Omega).$$

Observações [1] Seja $f \in \mathcal{A}(\Omega)$. Para cada $\zeta \in \Omega$ e para cada $r > 0$ tal que $D_r(\zeta) \subset \Omega$, a série de potências $\sum c_m(z-\zeta)^m$ tal que

$$f(z) = \sum c_m(z-\zeta)^m \quad \forall \ z \in D_r(\zeta) \qquad \text{(conv. pontual)}$$

depende do ponto ζ (mas não do raio r, como resulta imediatamente do exerc. (4.1)) no sentido de que a sequência (c_m) dos coeficientes varia com o ponto ζ. Demonstraremos este fato de forma precisa daqui a pouco num teorema que dá a expressão (muito simples) dos coeficientes c_m em função de f, ζ e m.

[2] *Se uma série de potências*

(S) $$\sum c_m(z-\zeta)^m$$

converge pontualmente num disco aberto $D_r(\zeta)$ *e indicamos com* ρ *o raio de convergência de* (S), *então*

(I) $r \leq \rho$,

(II) (S) *é uniformemente e absolutamente convergente em* $D_s(\zeta)$ *sempre que* $s \in \,]0, r[\,$.

A asserção (I) é fácil pois dado $z \in D_r(\zeta)$ arbitrário, a hipótese implica que (S) converge em z, logo pelo Corol. 3.9 resulta $|z-\zeta| \leq \rho$, portanto temos:

$$z \in D_r(\zeta) \implies |z-\zeta| \leq \rho$$

donde

$$r = \sup_{z \in D_r(\zeta)} |z - \zeta| \leq \rho.$$

A asserção (II) também é trivial. Fixado $s \in \,]0, r[\,$, como por (I) temos $r \leq \rho$ resulta $s \in \,]0, \rho[$ e então a convergência uniforme e absoluta de (S) em $\overline{D}_s(\zeta)$ é consequência da Prop. 3.8 (a).

[3] Na Def. 4.1 exigimos apenas a convergência *pontual* da série $\sum c_m(z - \zeta)^n$ para a função f no disco $D_r(\zeta)$, o que implica (ver Obs. [2] precedente) que o raio de convergência ρ da série $\sum c_m(z - \zeta)^m$ é maior ou igual a r e que a série $\sum c_m(z - \zeta)^m$ converge uniformemente para f em $\overline{D}_s(\zeta)$ sempre que $0 < s < r$. Resulta então que se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *é analítica, enão para cada disco fechado* $\overline{D}_s(\zeta) \subset \Omega \ \ (s > 0)$ *existe uma série de potências em volta de* ζ,

$$\sum c_m(z - \zeta)^m$$

que converge uniformemente para f *em* $\overline{D}_s(\zeta)$.

[4] Se na Def. 4.1 substituímos $\mathbb{C}$ por $\mathbb{R}$, isto é Ω é um aberto não vazio de $\mathbb{R}$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função e consideramos séries de potências de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, se diz que f é uma *função analítica real.* Estas não serão estudadas neste livro.

[5] Assim como fizemos na definição de holomorfia, aqui também podemos apresentar o conceito de função analítica localmente (i.e. em cada ponto). De modo preciso, dados $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e $\zeta \in \Omega$, dizemos que f é *analítica em* ζ (ou que f é representável por séries de potências em ζ) se existe $r > 0$ tal que $D_r(\zeta) \subset \Omega$ e existe uma série de potências

$$\sum c_m(z - \zeta)^m$$

em volta de ζ tal que a série $\sum c_m(z - \zeta)^m$ converge pontualmente para f em $D_r(\zeta)$. Dizemos então que f *é analítica em* Ω se f é analítica em cada ponto de Ω. Demonstra-se que esta definição e a Def. 4.1 são equivalentes e a razão pela qual adotamos esta definição global é que *a analiticidade de uma função* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *num ponto* $\zeta \in \mathbb{C}$ *não pode acontecer de forma isolada* (como pode acontecer com a continuidade, ver exerc. 1.1) isto é, veremos daqui a pouco que se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é anaítica em $\zeta \in \Omega$, então existe um disco aberto $D_r(\zeta) \subset \Omega$ tal que f é analítica em cada ponto de $D_r(\zeta)$. Neste sentido, o conceito de analiticidade é bastante diferente do conceito de continuidade: $g : \Omega \to \mathbb{C}$ pode ser contínua em $\zeta \in \Omega$ e não existir nenhum disco $D_r(\zeta) \subset \Omega$ tal que g é contínua em cada ponto de $D_r(\zeta)$, como mostra o exerc. (4.1).

Definição 4.2 Chama-se *função inteira* a todo elemento de $\mathcal{A}(\mathbb{C})$.

Exemplo 1 Toda função polinomial de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ é uma função inteira. De fato, se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função polinomial existe uma sequência $(a_j)_{0 \leq j \leq m}$ em $\mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = \sum_{j=0}^{m} a_j z^j \quad \forall \ z \in \mathbb{C}$$

o que é a representação por uma série de potência (finita) de f em volta da origem. Dado $\zeta \in \mathbb{C}$ arbitrário, é fácil ver (por exemplo usando o método dos coeficientes a determinar) que f pode ser escrita como série de potências (finita) em volta de ζ :

$$f(z) = \sum_{j=0}^{m} b_j (z - \zeta)^j \ , \qquad \forall \ z \in \mathbb{C} \ ,$$

portanto $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$.

Exemplo 2 A função exp da Def. 3.13

$$\exp(z) = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} z^m \quad \forall \ z \in \mathbb{C}$$

é também uma função inteira. De fato, pelo Teor. 3.14 (b) e (c) dado $\zeta \in \mathbb{C}$ arbitrário temos

$$[1] \qquad \frac{\exp(z)}{\exp(\zeta)} = \exp(z - \zeta) \quad \forall \ z \in \mathbb{C}$$

Aplicando a definição de "exp" ao 2^o membro de [1] e eliminando denominadores em [1] obtemos

$$[2] \qquad \exp(z) = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \exp(\zeta)(z - \zeta)^m \quad \forall \ z \in \mathbb{C}$$

o que prova que exp é representável por série de potências em volta de $\zeta \in \mathbb{C}$ e como este era um ponto arbitrário resulta $\exp \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$. Observar ainda que pelo Teor. 3.14 (e), temos $\exp' = \exp$, donde segue imediatamente por indução que $\exp^{(m)} = \exp$ para cada $m \in \mathbb{N}$ e então a identidade [2] pode ser escrita assim (ver Corol. 4.9):

$$\exp(z) = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \exp^{(m)}(\zeta)(z - \zeta)^m \quad \forall \ z \in \mathbb{C}.$$

O nosso próximo exemplo de função analítica é na realidade um resultado que descreve um método de construir funções analíticas e que será muito importante em tudo o que se segue e especialmente no capítulo 5. (comparar com [R2], Th. 10.7)

Teorema 4.3 *Sejam Ω um aberto não vazio de $\mathbb{C}$, $[a,b]$ um intervalo fechado de $\mathbb{R}$, $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ e $\psi : [a,b] \to \mathbb{C}$ duas funções tais que:*
(1^o) φ e ψ são Riemann-integráveis em $[a,b]$,
(2^o) $\varphi(t) \notin \Omega$ para cada $t \in [a,b]$
(3^o) $\|\frac{\psi}{\varphi}\| := \sup_{t\in I} |\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}| < +\infty$
Então, a função

$$f : z \in \Omega \longmapsto \int_a^b \frac{\psi(t)dt}{\varphi(t) - z} \in \mathbb{C}$$

é analítica em Ω. (uma função $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ é Riemann-integrável se $g_1 :=$ Re(g) e $g_2 :=$Im(g) são Riemann-integráveis e neste caso definimos $\int_a^b g := \int_a^b g_1 + i\int_a^b g_2$.)

Prova Fixemos $\zeta \in \Omega$ arbitrário e mostremos que f é representável por uma série de potências em volta de ζ. Seja $r > 0$ tal que $D_r(\zeta) \subset \Omega$, então a hipótese ($2^o$) implica que

(4.3.1) $$|\varphi(t) - \zeta| \geq r \quad \text{para cada } t \in [a,b]$$
e em consequência, *fixado* $z \in D_r(\zeta)$ arbitrário, vem:

$$\left|\frac{z-\zeta}{\varphi(t)-\zeta}\right| \leq \frac{|z-\zeta|}{r} < 1 \quad , \qquad \forall \;\; t \in [a,b] \; ,$$

donde

(4.3.2) $$\left|(\frac{z-\zeta}{\varphi(t)-\zeta})^m\right| \leq M_m := (\frac{|z-\zeta|}{r})^m \quad , \;\; t \in [a,b] \, , \;\; m \in \mathbb{N}$$

Como $\frac{|z-\zeta|}{r} < 1$ e portanto a série geométrica

$$\sum_{m\geq 0} M_m = \sum_{m\geq 0} (\frac{|z-\zeta|}{r})^m$$

é convergente , portanto de (4.3.2) e do teste M de Weiertrass (Prop. 3.5) resulta a convergência uniforme em $[a,b]$ da série geométrica

(4.3.3) $$\sum_{m\geq 0} (\frac{z-\zeta}{\varphi(t)-\zeta})^m = \frac{\varphi(t)-\zeta}{\varphi(t)-z} \; , \qquad \text{uniformemente em } [a,b]$$
($z \in D_r(\zeta)$ fixado).

A relação (4.3.1) implica $\sup\limits_{a\leq t\leq b} \frac{1}{|\varphi(t)-\zeta|} \leq \frac{1}{r}$ e como ψ é limitada em $[a,b]$ por ser Riemann-integrável, se $||\psi||_{[a,b]} =: M$ é claro que

$$\sup_{a\leq t\leq b} \frac{|\psi(t)|}{|\varphi(t)-\zeta|} \leq \frac{M}{r}$$

e em consequência (ver exerc. (4.2)) podemos multiplicar os 2 membros de (4.3.3) por $\dfrac{\psi(t)}{\varphi(t)-\zeta}$ sem alterar a convergência uniforme da série, isto é

$$\sum_{m\geq 0}\frac{\psi(t)(z-\zeta)^m}{[\varphi(t)-\zeta]^{m+1}}=\frac{\psi(t)}{\varphi(t)-z},\ \text{ uniformemente em } [a,b] \quad (z\in D_r(\zeta)\ \text{ fixo}). \tag{4.3.4}$$

Em consequência (ver [R1], Corol. do Teor. 7.14), e admitindo por um momento que as funções

$$t\in[a,b]\longmapsto\frac{\psi(t)(z-\zeta)^m}{[\varphi(t)-\zeta]^{m+1}}\in\mathbb{C} \tag{4.3.5}$$

são Riemann-integráveis ($\forall m\geq 0$), podemos integrar termo a termo a série (4.3.4) obtendo:

$$f(z)=\int_a^b\frac{\psi(t)dt}{\varphi(t)-z}=\int_a^b\left\{\sum_{m\geq 0}\frac{\psi(t)(z-\zeta)^m}{[\varphi(t)-\zeta]^{m+1}}\right\}dt=\sum_{m\geq 0}\int_a^b\frac{\psi(t)(z-\zeta)^m}{[\varphi(t)-\zeta]^{m+1}}dt$$

$$=\sum_{m\geq 0}\left[\int_a^b\frac{\psi(t)dt}{[\varphi(t)-\zeta]^{m+1}}\right](z-\zeta)^m,\quad \text{para cada } z\in\Omega(\zeta),$$

o que prova que o resultado a menos da Rieman integrabilidade de (4.3.5) e a do enunciado (isto é, $\frac{\psi(t)}{\varphi(t)-z}$), o que faremos a seguir.
Em vista de [R1], Teor. 7.14. a Riemann integrabilidade das funções (4.3.5) em I implica (pela convergência uniforme em (4.3.4)) que $\frac{\psi(t)}{\varphi(t)-z}$ é Riemann-integrável em I. Vamos provar finalmente que (4.3.5) é Riemann-integável $\forall m\geq 0$. O argumento que segue se apóia no Teor. 10.33 de [R1]. Aqui vai ser cômodo introduzir a notação I para denotar $[a,b]$, isto é, $I:=[a,b]$ e abreviar a expressão "f é Rieman-integrável em I" por "$f\in\mathcal{R}[I]$" ou também "f é $\mathcal{R}$-integrávl em I".
Como φ e ψ são $\mathcal{R}$-integráveis em I (hipótese (1^o)) resulta que ambas são limitadasem I e, portanto, $\chi:t\in I\longmapsto[\varphi(t)-\zeta]^{m+1}$ também é limitada em I. Além disso, é claro que ψ (resp. φ) é contínua em $I\setminus D_\psi$ (resp. $I\setminus D_\varphi$), onde D_ψ e D_φ são subconjuntos de I que têm medida (de Lebesgue) nula (com efeito, D_ψ contém o conjunto finito das descontinuidades de ψ), mesma coisa para φ e também para D_χ pois $D_\varphi=D_\chi$ (onde D_χ é definida a partir de χ da mesma forma que D_ψ e D_φ foram definidas a partir de ψ e φ, respectivamente). A hipótese (2^o) mostra que $\chi(t)\neq 0$ para cada $t\in I$, donde se segue que a função

$$\tfrac{\psi}{\varphi}:t\in I\to\tfrac{\psi(t)}{\varphi(t)}\in\mathbb{C}$$

está bem definida e, visivelmente, $\frac{\psi}{\chi}$ é contínua em $(I \setminus D_\psi) \cap (I \setminus D_\varphi)$. Ora, como $(I \setminus D_\psi) \cap (I \setminus D_\varphi) = I \setminus D_\chi \cup D_\psi$ e $D_\psi \cup D_\chi$ tem medida nula, concluimos que $\frac{\psi}{\chi}$ é contínua em quase todo I (isto é, em $I \setminus D_\chi \cup D_{psi}$). Por fim, vamos usar a hipótese (3^o) para mostrar que $\frac{\psi}{\chi}$ é limitada em I. De fato, por (4.3.1), tem-se

$$|\varphi(t) - \zeta|^{m+1} \geq r^{m+1}, \forall t \in I$$

donde

$$\left|\frac{\psi(t)}{\chi(t)}\right| = \frac{|\psi(t)|}{|\varphi(t) - \zeta|^{m+1}} \leq \frac{|\psi(t)|}{r^{m+1}} \leq +\infty, \forall t \in I$$

pois $|\psi|$ é limitada em I. Em vista do Teor. 10.33(b) de [R1] resulta que $\frac{\psi}{\chi}$ é $\mathcal{R}$-integrável em I. $\square$

Antes de dar novos exemplos de funções analíticas vamos mostrar que $\mathcal{A}(\Omega)$ é uma $\mathbb{C}$-álgebra para o qual precisamos do seguinte resultado sobre soma e multiplicação de séries de potências

Lema 4.4 *Sejam*

(1) $\displaystyle\sum_{m \geq o} a_m (z-\zeta)^m$ *e* (2) $\displaystyle\sum_{m \geq 0} b_m (z-\zeta)^m$

duas séries de potências em volta de ζ de raio de convergência maior ou igual a ρ, onde $\rho > 0$. Então:

(a) *As séries de potências em volta de ζ :*

(3) $\displaystyle\sum_{m \geq 0} (a_m + b_m)(z-\zeta)^m$ *e* (4) $\displaystyle\sum_{m \geq 0} (\sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k})(z-\zeta)^m$

têm raio de convergência maior ou igual a ρ.

(b) *Para cada $z_0 \in D_\rho(\zeta)$ temos:*

$$\sum_{m \geq 0} a_m (z_0-\zeta)^m + \sum_{m \geq 0} b_m (z_0-\zeta)^m = \sum_{m \geq 0} (a_m + b_m)(z_0-\zeta)^m$$

$$\left[\sum_{m \geq 0} a_m (z_0-\zeta)^m\right]\left[\sum_{m \geq 0} b_m (z_0-\zeta)^m\right] = \sum_{m \geq 0} (\sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k})(z_0-\zeta)^m.$$

Prova (a) Sejam ρ_1, ρ_2, ρ_3 e ρ_4 os respectivos raios de convergência das séries (1), (2), (3) e (4). Por hipótese temos:

(4.4.1) $\qquad \rho \leq \rho_1 \quad$ e $\quad \rho \leq \rho_2$

Para cada $m \in \mathbb{N}$ sejam

$$\gamma_m = |a_m| + |b_m| \quad , \quad \delta_m = \sum_{k=0}^{m} |a_k|\,|b_{m-k}|$$

$$c_m = a_m + b_m \quad , \quad d_m = \sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k} \quad ,$$

então é claro que

$$|c_m| \le \gamma_m \quad \text{e} \quad |d_m| \le \delta_m \qquad \forall \; m \in \mathbb{N}.$$

Seja r tal que $0 < r < \rho$, então as relações (4.4.1) e a definição de raio de convergência implicam

$$\sum_{m\ge 0} |a_m|\, r^m < +\infty \quad \text{e} \quad \sum_{m\ge 0} |b_m|\, r^m < +\infty$$

donde

(4.4.2) $$\sum_{m\ge 0} |c_m|\, r^m \le \sum_{m\ge 0} \gamma_m r^m = \sum_{m\ge 0} |a_m|\, r^m + \sum_{m\ge 0} |b_m|\, r^m < +\infty$$

(4.4.3) $$\sum_{m\ge 0} |d_m|\, r^m \le \sum_{m\ge 0} \delta_m r^m = \left[\sum_{p\ge 0} |a_p|\, r^p\right]\left[\sum_{q\ge 0} |b_q|\, r^q\right] < +\infty$$

De (4.4.2), da definição de c_m e da definição de ρ_3, segue $r \le \rho_3$.
De (4.4.3), da definição de d_m e da definição de ρ_4, segue $r \le \rho_4$.
Em consequência provamos as implicações seguintes:

$$0 < r < \rho \implies r \le \rho_3, \text{ isto é, } \rho_3 \ge \rho$$
$$0 < r < \rho \implies r \le \rho_4, \text{ isto é, } \rho_4 \ge \rho\,,$$

o que prova (a).

(b) A primeira relaçào segue trivialmente da identidade:

$$\sum_{k=0}^{m} a_k(z_0-\zeta)^k + \sum_{k=0}^{m} b_k(z_0-\zeta)^k = \sum_{k=0}^{m} (a_k+b_k)(z_0-\zeta)^k \quad \forall \; m \in \mathbb{N}$$

Mostremos a segunda identidade. Como $\sigma = |z_0-\zeta| < \rho \le \rho_1$, pela Prop. 3.8 (a) resulta que a série (1) é absolutamente convergente em $\overline{D}_\sigma(\zeta)$ e em particular (1) é absolutamente convergente em z_0. O mesmo racíocinio mostra que a série (2) é absolutamente convergente em z_0 (pois $\sigma = |z_0-\zeta| < \rho \le \rho_2$) e portanto a segunda identidade resulta de um conhecido resultado sobre produto de séries (ver [R2], Th. 3.50). $\square$

Proposição 4.5 *Para cada aberto não vazio Ω de $\mathbb{C}$, o conjunto $\mathcal{A}(\Omega)$ munido das operações pontuais é uma $\mathbb{C}$-álgebra unitária e comutativa.*

Prova É claro que basta provar que $\mathcal{A}(\Omega)$ é fechada para as três operações envolvidas, isto é, basta verificar que

$$f, g \in \mathcal{A}(\Omega) \;\text{ e }\; \lambda \in \mathbb{C} \implies f+g \in \mathcal{A}(\Omega), \quad fg \in \mathcal{A}(\Omega) \quad \text{e} \quad \lambda f \in \mathcal{A}(\Omega)$$

Dado $\zeta \in \Omega$ arbitrário e $r > 0$ tal que $D_r(\zeta) \subset \Omega$, como $f, g \in \mathcal{A}(\Omega)$, pela Def. 4.1 temos:

(4.5.1) $$f(z) = \sum_{m\ge 0} a_m(z-\zeta)^m, \text{ para cada } z \in D_r(\zeta)$$

(4.5.2) $$g(z) = \sum_{m\ge 0} b_m(z-\zeta)^m, \text{ para cada } z \in D_r(\zeta)$$

Pela **Obs** [2] logo após a Def. 4.1, resulta que as séries de potências

$$\sum_{m\ge 0} a_m(z-\zeta)^m \quad \text{e} \quad \sum_{m\ge 0} b_m(z-\zeta)^m$$

têm raio de convergência $\geq r$ [donde, pelo Lema 4.4. (a) resulta que as séries de potências

$$\sum_{m\geq 0} (a_m + b_m)(z-\zeta)^m \quad \text{e} \quad \sum_{m\geq 0} (\sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k})(z-\zeta)^m$$

têm raio de convergência $\geq r$.] Em consequência, pelos Lema 4.4. (b), as relações (4.5.1) e (4.5.2) acarretam:

$$(f+g)(z) = f(z) + g(z) = \sum_{m\geq 0} (a_m + b_m)(z-\zeta)^m, \quad \forall \ z \in D_r(\zeta)$$

$$(fg)(z) = f(z)g(z) = \sum_{m\geq 0} (\sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k})(z-\zeta)^m, \quad \forall \ z \in D_r(\zeta),$$

o que demonstra que $f + g \in \mathcal{A}(\Omega)$ e $fg \in \mathcal{A}(\Omega)$. É imediato que $\lambda f \in \mathcal{A}(\Omega)$ pois por (4.5.1) se tem $(\lambda f)(z) = \lambda f(z) = \sum_{m\geq 0} \lambda a_m (z-\zeta)^m$, $\forall \ z \in D_r(\zeta)$. $\square$

A prova da equivalência entre os conceitos de holomorfia e analiticidade vai ser feita em duas etapas e a primeira destas é o seguinte:

Teorema 4.6 *Sejam Ω um aberto não vazio de $\mathbb{C}$. Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é analítica em Ω, então f* é holomorfa em Ω (isto é $\mathcal{A}(\Omega) \subset \mathcal{H}(\Omega)$ e f' *também é analítica em Ω. De modo mais preciso, se $\zeta \in \Omega$ é um ponto arbitrário, $D_r(\zeta) \subset \Omega$ e*

$$f(z) = \sum_{m\geq 0} c_m (z-\zeta)^m, \quad \textit{para cada} \ \ z \in D_r(\zeta),$$

então

$$f'(z) = \sum_{m\geq 1} m c_m (z-\zeta)^{m-1}, \ \ \textit{para cada} \ \ z \in D_r(\zeta).$$

Prova Pelo Lema 3.11 as duas séries $\sum_{m\geq 0} c_m (z-\zeta)^m$ e $\sum_{m\geq 1} m c_m (z-\zeta)^{m-1}$ têm o mesmo raio de convergência, portanto a série $\sum_{m\geq 1} m c_m (z-\zeta)^{m-1}$ converge em $D_r(\zeta)$. Indiquemos com $g(z)$ a soma desta série em $D_r(\zeta)$, isto é

$$g(z) = \sum_{m\geq 1} m c_m (z-\zeta)^{m-1} \quad \forall \ \ z \in D_r(\zeta)$$

e mostremos que $f'(z) = g(z) \quad \forall \ \ z \in D_r(\zeta)$. Poderiamos fazer os cálculos diretamente porém é mais fácil observar que (pela regra da cadeia, Prop. 1.5) não há perda de generalidade supondo $\zeta = 0$, o que simplifica bastante os cálculos, isto é vamos supor

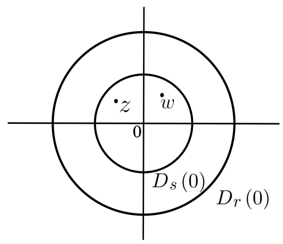
$$f(z) = \sum_{m\geq 0} c_m z^m \quad \text{e} \quad g(z) = \sum_{m\geq 1} m c_m z^{m-1} \quad \forall \ \ z \in D_r(0)$$

Vamos fixar um ponto arbitrário $w \in D_r(0)$ e provar que

$$f'(w) = g(w).$$

Seja $s \in \mathbb{R}$ tal que $|w| < s < r$, então para cada $z \neq w$ temos

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) = \sum_{m \geq 1} c_m \left[\frac{z^m - w^m}{z - w} - m w^{m-1} \right]. \tag{4.6.1}$$



É imediato verificar que

$$\frac{z^m - w^m}{z - w} - m w^{m-1} = \begin{cases} 0, & \text{se } m = 1 \\ (z - w) \displaystyle\sum_{k=1}^{m-1} k w^{k-1} z^{m-k-1}, & \text{se } m \geq 2 \end{cases}$$

(De fato, no caso $m \geq 2$, basta desenvolver o 2^o membro obtendo $\sum_{k=1}^{m-1} z^{m-k} w^{k-1} - (m-1) w^{m-1}$. Nesta expressão basta agora somar e subtrair w^{m-1}, o resultado é precisamente o 1^o membro)
em consequência, se $z \neq w$ e $|z| < s$, para todo $m \geq 2$ temos:

$$\begin{aligned} &\left| \frac{z^m - w^m}{z - w} - m w^{m-1} \right| = |z - w| \left| \sum_{k=1}^{m-1} k w^{k-1} z^{m-k-1} \right| \leq \\ &|z - w| \cdot \sum_{k=1}^{m-1} k \, |w|^{k-1} \cdot |z|^{m-k-1} < |z - w| \sum_{k=1}^{m-1} k s^{m-2} = \\ &|z - w| \, \frac{m(m-1)}{2} s^{m-2} < |z - w| \, m^2 s^{m-2}, \end{aligned}$$

e então por (4.6.1) temos

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) \right| \leq |z - w| \sum_{m \geq 2} |c_m| \, m^2 s^{m-2} \quad \forall \ z \in D_s(0), \tag{4.6.2}$$

$z \neq w$
Vamos mostrar, com um raciocínio análogo ao Lema 3.11 que a série

$$\sum_{m \geq 2} |c_m| \, m^2 s^{m-2}$$

é convergente. De fato, como $\sum c_m z^m$ converge em $D_r(0)$ (para $f(z)$), o raio de convergência ρ desta série é $\geq r$ (ver Obs [2] logo após a Def. 4.1) e então escolhendo um número real t tal que $s < t < r$, resulta $t < \rho$ e em consequência a série $\sum |c_m| \, t^m$ é convergente, isto é

$$M = \sum |c_m|\, t^m < +\infty$$
donde $|c_m|\, t^m \leq M$ para cada $m \in \mathbb{N}$, o que implica

$$m^2\, |c_m|\, s^{m-2} = \frac{1}{t^2}(|c_m|\, t^m) m^2 (\frac{s}{t})^{m-2} \leq \frac{1}{t^2} M m^2 (\frac{s}{t})^{m-2},\ \ \forall\ \ m \geq 2$$
e portanto
$$L := \sum_{m\geq 2} m^2\, |c_m|\, s^{m-2} \leq \frac{1}{t^2} M \sum_{m\geq 2} m^2 (\frac{s}{t})^{m-2} < +\infty,$$
pois pelo teste da razão temos

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{(m+1)^2(\frac{s}{t})^{m-1}}{m^2(\frac{s}{t})^{m-2}} = \lim_{m\to\infty} (\frac{m+1}{m})^2 (\frac{s}{t}) = \frac{s}{t} < 1.$$

Por (4.6.2) podemos escrever então:

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) \right| \leq |z - w|\, L \quad \forall\ \ z \in D_s(0),\ \ z \neq w$$

o que prova que $\lim\limits_{z\to w} \dfrac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) = 0$, isto é

$f'(w) = \lim\limits_{z\to w} \dfrac{f(z) - f(w)}{z - w} = g(w)$, o que pela definição de g implica
$$f'(z) = \sum m c_m z^{m-1} \quad \forall\ \ z \in D_r(0),$$

portanto $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $f' \in \mathcal{A}(\Omega)$. $\square$

Corolário 4.7 *Seja $\sum c_m (z - \zeta)^m$ uma série de potências em volta de ζ de raio de convergência $\rho > 0$ e seja f sua soma, isto é*

(4.7.1) $\qquad f(z) = \sum\limits_{m\geq 0} c_m (z - \zeta)^m \quad \forall\ \ z \in D_\rho(\zeta)$

Então $f \in \mathcal{H}(D_\rho(\zeta))$.

Prova Seja $g(z) = \sum\limits_{m\geq 1} m c_m (z - \zeta)^{m-1} \ \ \forall\ \ z \in D_\rho(\zeta)$, então basta observar que na prova feita no Teor. 4.6 de que para cada $w \in D_\rho(\zeta)$ se tem $\lim\limits_{z\to w} \dfrac{f(z) - f(w)}{z - w} = g(w)$, não foi usado o fato de f ser analítica, apenas foi usada (4.7.1). $\square$

Dada uma função $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ está associada a ela uma função $f' : \Omega \to \mathbb{C}$ chamada *derivada primeira de* f (ou simplesmente derivada de f). Por uniformidade de notação indicaremos f por $f^{(0)}$ e f' por $f^{(1)}$; com estas notações definimos para cada $k \in \mathbb{N}$ uma aplicação $f^{(k+1)} : \Omega \to \mathbb{C}$ por
$$f^{(k+1)} = (f^{(k)})' = (f^{(k)})^{(1)}$$

que é chamada *derivada* $(k+1)$-*ésima* de f em Ω (ou também *derivada de ordem* $k+1$ *de* f *em* Ω) isto é

$$f^{(2)} = (f')' = (f^{(1)})^{(1)}; \qquad f^{(3)} = (f^{(2)})', \qquad \text{etc.}$$

Observemos que em princípio $f^{(k)}$ poderia não ser holomorfa em Ω e

portanto $(f^{(k)})' = f^{(k+1)}$ não existir, porém não é o que acontece para o subconjunto $\mathcal{A}(\Omega)$ de $\mathcal{H}(\Omega)$, como resulta de modo quase evidente do Teor. 4.6 e fica estabelecido de modo preciso no resultado seguinte:

Corolário 4.8 *Seja* $f \in \mathcal{A}(\Omega)$. *Então, para cada* $k \in \mathbb{N}$ *existe* $f^{(k)} : \Omega \to \mathbb{C}$ (isto é, f possui derivadas de todas as ordens em Ω) *e* $f^{(k)} \in \mathcal{A}(\Omega)$. *De modo mais preciso, se* $D_r(\zeta) \subset \Omega$ *e*

(4.8.1) $$f(z) = \sum_{m \geq 0} c_m (z-\zeta)^m \quad \textit{para cada} \quad z \in D_r(\zeta)$$

então, para cada $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ *temos:*

(4.8.2) $$f^{(k)}(z) = \sum_{m \geq k} m(m-1) \dots (m-k+1) c_m (z-\zeta)^{m-k}$$

para todo $z \in D_r(\zeta)$.

Prova A prova é por indução porém é tão simples que vamos nos limitar a mostrar informalmente este processo indutivo. Dada $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, pelo Teor. 4.6, existe $f' = f^{(1)} : \Omega \to \mathbb{C}$ e $f^{(1)} \in \mathcal{A}(\Omega)$ e portanto podemos aplicar o Teor. 4.6 a $f^{(1)}$. Resulta que existe $f^{(2)} : \Omega \to \mathbb{C}$ e que $f^{(2)} \in \mathcal{A}(\Omega)$, etc. A prova de (4.8.2) também é feita por indução sobre k. A expressão de $f' = f^{(1)}$ em $D_r(\zeta)$ dada pelo Teor. 4.6 prova que (4.8.2) é verdadeira para $k = 1$. Supondo (4.8.2) verdadeira, devemos provar

(4.8.3) $$f^{(k+1)}(z) = \sum_{m \geq k+1} m(m-1) \dots (m-k+1)(m-k)(z-\zeta)^{m-(k+1)} \quad \forall \ z \in D_r(\zeta)$$

o que é imediato pois como $f^{(k)} \in \mathcal{A}(\Omega)$ e $f^{(k)}$ é representada em $D_r(\zeta)$ pelo segundo membro de (4.8.2) (hipótese de indução), aplicando o Teor. 4.6 a $f^{(k)}$ obtemos precisamente (4.8.3). $\square$

Corolário 4.9 *Seja* $f \in \mathcal{A}(\Omega)$. *Então, para cada* $\zeta \in \Omega$ *e para cada* $r > 0$ *tal que* $D_r(\zeta) \subset \Omega$ *temos:*

$$f(z) = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} f^{(m)}(\zeta)(z-\zeta)^m, \quad \textit{para cada} \quad z \in D_r(\zeta).$$

Prova Fixados $\zeta \in \Omega$ e $r > 0$ tal que $D_r(\zeta) \subset \Omega$, pela Def. 4.1 existe uma série de potências $\sum c_m (z-\zeta)^m$ que representa f em $D_r(\zeta)$, isto é

(4.9.1) $$f(z) = \sum_{m \geq 0} c_m (z-\zeta)^m \quad \forall \ z \in D_r(\zeta)$$

e em consequência, pelo Corol. 4.8, para cada $k \in \mathbb{N}^*$:

(4.9.2) $f^{(k)}(z) = \sum m(m-1)\ldots(m-k+1)c_m(z-\zeta)^{m-k}, \ \forall \ z \in D_r(\zeta)$

Fazendo $z=\zeta$ em (4.9.1) obtemos $c_0 = f(\zeta) = \dfrac{1}{0!}f^{(0)}(\zeta)$.
Para $k \in \mathbb{N}^*$, fazendo $z = \zeta$ em (4.9.2) obtemos (lembrar que trabalhando com séries de potências sempre é feita a convenção $0^0 = 1$)
$f^{(k)}(\zeta) = \sum\limits_{m \geq k} m(m-1)\ \ldots (m-k+1)c_m 0^{m-k} = k(k-1)\ \ldots (k-k+1)c_k$
$= k! c_k$ o que implica $c_k = \dfrac{1}{k!}f^{(k)}(\zeta)$. Provamos assim que

$$c_m = \frac{1}{m!}f^{(m)}(\zeta) \quad \forall \ m \in \mathbb{N}$$

o que substituído em (4.9.1) demonstra o resultado. $\square$

Observação O Corol. 4.9 mostra dois fatos importantes sobre a série de potências

$$\sum c_m \ (z-\zeta)^m$$

que, com a notação da Def. 4.1, representa f em $D_r(\zeta)$:

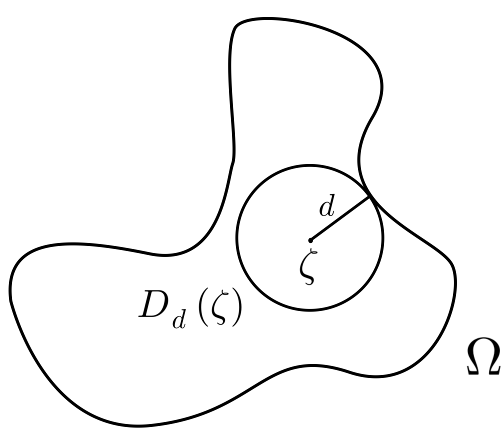
[1] Esta série é única já que $c_m = \dfrac{1}{m!}f^{(m)}(\zeta) \ \ \forall \ \ m \in \mathbb{N}$

[2] Esta série depende apenas do ponto ζ e não do $r > 0$ tal que $D_r(\zeta) \subset \Omega$ (como aparentemente deveria ocorrer de acordo com a Def. 4.1).

Definição 4.10 Sejam $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, $\zeta \in \Omega$ e $r > 0$ tal que $D_r(\zeta) \subset \Omega$. A série de potências em volta de ζ :

$$\sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} f^{(m)}(\zeta)(z-\zeta)^m$$

(única que converge pontualmente para f em $D_r(\zeta)$) é chamada *série de Taylor de f no ponto ζ.*



A **Obs** [2] acima pode ser enunciada de forma muito mais precisa dizendo que *a série de Taylor de f em ζ converge pontualmente para f no maior disco aberto de centro ζ contido em Ω*, este é o significado do resultado seguinte:

Corolário 4.11 *Sejam $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, $\zeta \in \Omega$* e

$$d = dist(\zeta, \mathbb{C}\backslash\Omega) = \begin{cases} \inf\{|z-\zeta| \mid z \in \mathbb{C}\backslash\Omega\}, & se \quad \Omega \neq \mathbb{C} \\ +\infty, \quad se \ \Omega = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Então

(4.11.1) $$f(z) = \sum_{m\geq 0} \frac{1}{m!} f^m(\zeta)(z-\zeta)^m \quad \forall \ z \in D_d(\zeta)$$

e em consequência, o raio de convergência da série de Taylor de f no ponto ζ é $\geq d$.

Prova Pelo Corol. 4.9 temos

$$f(z) = \sum_{m\geq 0} \frac{1}{m!} f^{(m)}(\zeta)(z-\zeta)^m, \quad \forall \ z \in D_r(\zeta)$$

e para cada $r > 0$ tal que $D_r(\zeta) \subset \Omega$. Se $\Omega = \mathbb{C}$ é evidente, se $\Omega \neq \mathbb{C}$ procedemos assim: seja $z \in D_d(\zeta)$ e suponhamos por absurdo que $z \notin \Omega$, então por definição de " inf " temos $d \leq |z-\zeta|$ o que está em contradição com a relação $z \in D_d(\zeta)$. A asserção relativa ao raio de convergência da série de Taylor segue então (4.11.1) e da **Obs** [2] após a Def. 4.1. $\square$

Observação Seja $\sum c_m(z-\zeta)^m$ uma série de potências em volta de ζ de raio de convergência $\rho > 0$, então fica definida uma função

$$\varphi : z \in D_\rho(\zeta) \longmapsto \sum_{m\geq 0} c_m(z-\zeta)^m \in \mathbb{C}$$

que é (ver **Obs** [5] , após a Def. 4.1) analítica em ζ e então, uma pergunta que surge naturalmente é a seguinte:

φ é analítica em cada ponto de $D_\rho(\zeta)$? isto é: $\varphi \in \mathcal{A}(D_\rho(\zeta))$?

A resposta a esta questão é afirmativa (porém não é um resultado evidente) e, do ponto de vista da Def. 4.1, este é o exemplo mais natural não trivial de função analítica (os polinômios são exemplos naturais porém triviais de funções analíticas). A prova de que $\varphi \in \mathcal{A}(\Omega)$ pode ser feita diretamente a partir da Def. 4.1 e de alguns cálculos um tanto elaborados com séries (ver por exemplo, [Ca, "Theorie elementaire des fonctions analytiques d'une et plusieurs variables, "Ch I, §4, n^o 2, Prop. 2.1, Prop. 2.2]). Nós vamos obter este resultado no §5 quando, usando a integração complexa, vamos provar a recíproca do Teor. 4.6, isto é: $\mathcal{A}(\Omega) = \mathcal{H}(\Omega)$, o que junto com o Corl. 4.7, implica a asserção $\varphi \in \mathcal{A}(D_\rho(\zeta))$.

Teorema 4.12 *Sejam Ω um aberto conexo não vazio de $\mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{A}(\Omega)$. As condições seguintes são equivalentes:*

(i) *Existe $\zeta \in \Omega$ tal que $f^{(m)}(\zeta) = 0$ para cada $m \in \mathbb{N}$;*

(ii) *Existe $\zeta \in \Omega$ e existe $r > 0$ tais que $D_r(\zeta) \subset \Omega$ e*

$f \mid D_r(\zeta) = 0$;

(iii) *Existe um subconjunto aberto não vazio* W *de* Ω *tal que* $f \mid W = 0$;

(iv) $f = 0$ (isto é, $f(z) = 0$ para cada $z \in \Omega$).

Prova Vamos demonstrar as seguintes implicações

$$\text{(iv)} \implies \text{(i)} \implies \text{(ii)} \implies \text{(iv)} \quad \text{e} \quad \text{(ii)} \iff \text{(iii)}$$

A implicação (iv) $\implies$ (i) é evidente e a implicação (i) $\implies$ (ii) resulta do Corol. 4.9 (ou do Corol. 4.11); ambas independem da hipótese de conexão sobre Ω. A equivalência entre (ii) e (iii) também é trivial, portanto só resta verificar (ii) $\implies$ (iv).

Sejam $\Omega_1 = \{z \in \Omega \mid \exists\ \rho > 0 \text{ tal que } D_\rho(z) \subset \Omega \text{ e } f \mid D_\rho(z) = 0\}$ e $\Omega_2 = \Omega \backslash \Omega_1$.

É claro que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ e $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$. A idéia da prova consiste em verificar que Ω_1 e Ω_2 são abertos e que $\Omega_1 \neq \varnothing$. Como Ω é conexo resultará que $\Omega_2 = \varnothing$, donde $\Omega = \Omega_1$ e como $f \mid \Omega_1 = 0$ obtemos $f = f \mid \Omega = 0$, isto é (iv).

Pela definição de Ω_1 é claro que Ω_1 é aberto e $f \mid \Omega_1 = 0$. Por outro lado, $\Omega_1 \neq \varnothing$ pois por (ii) temos $\zeta \in \Omega_1$ (este é o único lugar onde a hipótese (ii) é utilizada). Mostremos finalmente que Ω_2 é aberto. Seja $z_0 \in \Omega_2$ um ponto arbitrário e mostremos que $z_0 \in \overset{\circ}{\Omega}_2$, isto é:

$$\exists\ s > 0 \text{ tal que } D_s(z_0) \subset \Omega_2$$

ou, o que é equivalente:

(4.12.1) $\qquad \exists\ s > 0 \text{ tal que } D_s(z_0) \cap \Omega_1 = \varnothing$

Suponhamos por absurdo que (4.12.1) é falsa, então

(4.12.2) $\qquad D_s(z_0) \cap \Omega_1 \neq \varnothing$ para cada $s > 0$

Fixemos um $\delta > 0$ tal que $D_\delta(z_0) \subset \Omega$, então por (4.12.2) vem

$$V = D_\delta(z_0) \cap \Omega_1 \neq \varnothing$$

Como $f \mid \Omega_1 = 0$, resulta $f \mid V = 0$ e em consequência

(4.12.3) $\qquad (f \mid V)^m = f^{(m)} \mid V = 0$ para cada $m \in \mathbb{N}$

Vamos verificar a seguir que

(4.12.4) $\qquad f^{(m)}(z_0) = 0$ para cada $m \in \mathbb{N}$

De fato, suponhamos por absurdo que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, então existe $\sigma > 0$ tal que

$$0 \notin D_\sigma(f^{(m)}(z_0))$$

e como $f^{(m)}$ é contínua em z_0, existe $s \in]0, \delta[$ tal que $f^{(m)}(D_s(z_0)) \subset D_\sigma(f^{(m)}(z_0))$, o que é absurdo pois, por (4.12.2) temos $D_s(z_0) \cap V = D_s(z_0) \cap D_\delta(z_0) \cap \Omega_1 = D_s(z_0) \cap \Omega_1 \neq \varnothing$ e então para cada $w \in D_s(z_0) \cap V$, por (4.12.3) e pela definição de s teríamos:

$$0 = f^{(m)}(w) \in D_\sigma(f^{(m)}(z_0))$$

o que está em contradição com a definição de σ, o que prova (4.12.4).

Ora é claro que (4.12.4) implica [mesmo raciocínio da prova de (i) $\implies$

(ii)] que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f \mid D_\varepsilon(z_0) = 0$$

o que por definição implica $z_0 \in \Omega_1$ e em consequência $z_0 \in \Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$, o que é absurdo. Desta forma, provamos (4.12.1) isto é Ω_2 é aberto. $\square$

Observação: Na verificação acima da asserção (4.12.4) usamos a continuidade de $f^{(m)}$, o que resulta dos Corol. 4.8, Teor. 4.6 e Prop. 1.4 (1^o) que implicam $f^{(m)} \in \mathcal{A}(\Omega) \subset \mathcal{H}(\Omega) \subset \mathcal{C}(\Omega)$.

Corolário 4.13 (Princípio do prolongamento analítico) *Sejam Ω um aberto conexo não vazio de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ e $g \in \mathcal{A}(\Omega)$. Se existe um subconjunto aberto não vazio W de Ω tal que*

(4.13.1) $$f \mid W = g \mid W,$$

então $f = g$.

Prova Como $\mathcal{A}(\Omega)$ é uma $\mathbb{C}$-álgebra, $h := f - g \in \mathcal{A}(\Omega)$ e a hipótese (4.13.1) expressa que h satisfaz a condição (iii) do Teor. 4.12. Como Ω é conexo, h satisfaz também a condição (iv) do Teor. 4.12, logo $h = 0$, ou seja $f = g$. $\square$

Corolário 4.14 *Se Ω é um aberto conexo não vazio de $\mathbb{C}$, então $A(\Omega)$ é um anel de integridade.*

Prova do Corol. 4.14 usando o Teor. 4.12 Sejam $f, g \in \mathcal{A}(\Omega)$ verificando $fg = 0$. Suponhamos $f \neq 0$ e mostremos que $g = 0$. Como $f \neq 0$ $\exists$ $\zeta \in \Omega$ tal que $f(\zeta) \neq 0$ e como f é contínua $\exists\, r > 0$ tal que $D_r(\zeta) \subset \Omega$ e

(4.14.1) $$f(z) \neq 0 \quad \forall \ z \in D_r(\zeta)$$

Como por hipótese $fg = 0$, em particular:

$$0 = (fg)(z) = f(z)g(z) \quad \forall \ z \in D_r(\zeta)$$

e portanto por (4.14.1) resulta $g(z) = 0 \quad \forall \ z \in D_r(\zeta)$ logo $g = 0$ pelo Teor. 4.12. $\square$

Teorema 4.15 (Princípio dos zeros isolados) *Sejam Ω um aberto conexo não vazio de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ e suponhamos que $f \neq 0$. Então, para cada $\zeta \in \Omega$, existe $r > 0$ tal que $D_r(\zeta) \subset \Omega$ e $f(z) \neq 0$ para cada $z \in D_r^*(\zeta)$.*

Prova Dado $\zeta \in \Omega$ arbitrário, seja $d = dist(\zeta, \complement\Omega)$, então pelo Corol. 4.11 temos

$$f(z) = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} f^{(m)}(\zeta)(z - \zeta)^m \quad \forall \ z \in D_d(\zeta)$$

Se fosse $f^{(m)}(z) = 0$ para cada $m \in \mathbb{N}$, como Ω é conexo resultaria (pelo Teor. 4.12 (i) $\Longrightarrow$ (iv)) $f = 0$ o que é falso por hipótese. Em consequência, o conjunto dos $m \in \mathbb{N}$ tais que $f^{(m)}(\zeta) \neq 0$ é não vazio e portanto possui um mínimo, seja

$$\nu = \min\left\{m \in \mathbb{N} \mid f^{(m)}(\zeta) \neq 0\right\}.$$

Podemos escrever então

$$f(z) = (z-\zeta)^{\nu} \cdot g(z) \quad \forall \ z \in D_d(\zeta) \tag{4.15.1}$$

onde

$$g(z) = \sum_{m \geq \nu} \frac{1}{m!} f^{(m)}(\zeta)(z-\zeta)^{m-\nu} \quad \forall \ z \in D_d(\zeta)$$

Pelo Corol. 4.7 temos $g \in \mathcal{H}(D_d(\zeta))$ e portanto $g \in \mathcal{C}(D_d(\zeta))$ e como por definição de ν temos

$$g(\zeta) = \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(\zeta) \neq 0,$$

existe $r > 0$ tal que $D_r(\zeta) \subset D_d(\zeta) \subset \Omega$ e

$$g(z) \neq 0 \qquad \forall \ z \in D_r(\zeta) \tag{4.15.2}$$

O resultado segue então de (4.15.1) e (4.15.2). $\square$

Lembremos que um subconjunto de X de $\mathbb{C}$ é dito *discreto* se $X = \varnothing$ ou se cada ponto de X é isolado, isto é, para cada $\zeta \in X$ existe $r > 0$ tal que $D_r^*(\zeta) \cap X = \varnothing$.

Corolário 4.16 *Sejam Ω um aberto conexo não vazio de $\mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ tal que $f \neq 0$. Então o conjunto*

$$Z(f) := \{z \in \Omega \mid f(z) = 0\}$$

é um conjunto discreto e fechado em Ω.

Prova Se $Z(f) = \varnothing$ o resultado é óbvio. Se $Z(f) \neq \varnothing$, seja $\zeta \in Z(f)$, então pelo Teor. 4.15 (mais precisamente por (4.15.1) e (4.15.2)), existe $r > 0$, existe $\nu \in \mathbb{N}$ e existe $g \in \mathcal{H}(D_r(\zeta))$ tais que $D_r(\zeta) \subset \Omega$, $g(z) \neq 0$ para cada $z \in D_r(\zeta)$ e

$$f(z) = (z-\zeta)^{\nu} \cdot g(z), \text{ para cada } z \in D_r(\zeta).$$

Em consequência temos

$$f(z) = (z-\zeta)^{\nu} g(z) \neq 0 \ \text{ para cada } \ z \in D_r^*(\zeta),$$

o que mostra que $Z(f)$ é discreto. O conjunto $Z(f)$ é fechado em Ω pela continuidade de f. (ver exerc.4.9 (c)). $\square$

Sejam Ω um aberto conexo não vazio de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, $f \neq 0$ e $\zeta \in \Omega$. Na prova do Teor. 4.15 vimos que existem $r > 0$, $\nu \in \mathbb{N}$ e $g \in \mathcal{H}(D_r(\zeta))$ tais que $D_r(\zeta) \subset \Omega$, $g(z) \neq 0$ para cada $z \in D_r(\zeta)$ e

$$f(z) = (z-\zeta)^{\nu} . g(z) \quad \forall \ z \in D_r(\zeta)$$

como resulta imediatamente de (4.15.1) e (4.15.2). Se $\nu = 0$ tem-se $f(\zeta) = g(\zeta) \neq 0$. Com esta terminologia introduzimos o conceito fundamental de multiplicidade (ou ordem) de um zero:

Definição 4.17 Com as notações acima, se $\nu \geq 1$ diz-se que ζ é um *zero de f de multiplicidade (ou ordem) ν* (ou que ν é a multiplicidade do zero que f tem em ζ).

O resultado abaixo dá uma informação mais precisa a respeito de $Z(f)$:

Proposição 4.18 *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f \neq 0$ e suponha que $Z(f)$ é um conjunto infinito, então:*
(a) *$Z(f)$ é enumerável,*
(b) *$Z(f)$ não tem ponto de acumulação em Ω.*

Prova (a) De fato, seja $(K_n)_{n\geq 1}$ uma sequência exaustiva de compactos para Ω então é claro que $Z(f) \cap K_n$ é finito para cada $n \geq 1$ (ver [R1], Teor. 2.37]) donde resulta

$$\bigcup_{n\geq 1} (Z(f) \cap K_n) = Z(f) \cap \bigcup_{n\geq 1} K_n = Z(f)$$

o que prova a nossa afirmação pois

$$Card(Z(f)) = Card(\bigcup_{n\geq 1} (Z(f) \cap K_n)) \leq Card(\mathbb{N}).$$

(b) Suponha por absurdo que $p \in \Omega$ é um ponto de acumulação de $Z(f)$ então existe uma sequência $(a_m)_{m\geq 1}$ em $Z(f)$ tal que $a_m \to p$ se $m \to \infty$ o que implica pela continuidade de f que $f(a_m) \to f(p)$ e como $f(a_m) = 0$ para cada $m \geq 1$ resulta $f(p) = 0$, isto é, p seria um zero não isolado de f, o que é absurdo pois $f \neq 0$. $\square$

Exercícios

(4.1) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida da seguinte forma:

$$g(p/q) := 1/q, \text{ se } p/q \neq 0 \text{ é uma fração irredutível, } q > 0,$$
$$g(x) := 0 \text{ se } x = 0 \text{ ou } x \text{ é irracional.}$$

Prove que g é contínua em $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ e descontínua em $\mathbb{Q}$.

(4.2) Sejam X uma parte não vazia de $\mathbb{C}$, (f_m) uma sequência de funções definidas em X com valores em $\mathbb{C}$ e $g : X \to \mathbb{C}$ uma função. Prove que se a série $\sum f_m$ converge uniformemente em X, f é a soma de $\sum f_m$ e $\|g\|_X < \infty$ então a série $\sum g f_m$ converge uniformemente em X e sua soma é gf.

(4.3) Sejam $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ a função definida por

$$f(z) = \int_0^1 \frac{e^{it} dt}{t - z}, \text{ para cada } z \in \Omega.$$

Prove que $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ e ache a série de potências que representa f em volta de um ponto $\zeta \in \Omega$ dado.

(4.4) Sejam $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \neq 1\}$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ função definida por

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{t dt}{e^{it} - z} \text{ para cada } z \in \Omega$$

Prove que $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ e ache a série de potências que representa f em volta de um ponto $\zeta \in \Omega$ dado.

(4.5) Sejam $\mathrm{I} = [0,1]$ e $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 1\}$. Seja $\varphi : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ a função definida por

$$\varphi(t) = g(t) + it \text{ para cada } t \in \mathrm{I},$$

onde g é a restrição a I da função do exerc. (4.1) . Prove que a função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \int_0^1 \frac{dt}{\varphi(t) - z} \text{ para cada } z \in \Omega$$

é analítica em Ω [*Sugestão:* O conjunto dos pontos de descontinuidade de g é enumerável e portanto tem medida (de Lebesgue) nula]. Escrever a série de potências que representa f em volta de um ponto $\zeta \in \Omega$ dado.

(4.6) Determinar o maior aberto Ω de $\mathbb{C}$ no qual está definida e é analítica a função

$$f(z) = \int_1^2 \frac{dt}{1 + tz} \qquad (z \in \Omega)$$

e escrever a série de potências que representa f em volta de um ponto dado $\zeta \in \Omega$.

(4.7) Seja $f \in \mathcal{A}(D_1(0)) \cap \mathcal{C}(\overline{D}_1(0))$. Prove que f pode ser aproximada uniformemente por polinômios sobre $\overline{D}_1(0)$ [*Sugestão:* para cada r tal que $0 < r < 1$ considerar a função $f_r(z) = f(rz)$, mostrar que $f_r \in \mathcal{A}(D_{1/r}(0))$ (aqui se pode admitir que a composta de funções analíticas é anlítica), aproximar f por f_r em $\overline{D}_1(0)$ e como $D_{1/r}(0) \supset \overline{D}_1(0)$,aproximar f_r por polinômios de Taylor].

(4.8) Sejam Ω e W dois abertos não vazios de $\mathbb{C}$ tais que $W \subset \Omega$.
(a) Provar que $f|W \in \mathcal{A}(W)$ para cada $f \in \mathcal{A}(\Omega)$;
(b) Supondo Ω conexo, provar que a aplicação $\mathbb{C}$-linear

$$\varphi : f \in \mathcal{A}(\Omega) \longmapsto f|W \in \mathcal{A}(W)$$

é injetora.

(4.9) Seja Ω um aberto não vazio de $\mathbb{C}$.
(a) Prove que para um subconjunto F_0 de Ω as condições seguintes são equivalentes:
(i) Existe um subconjunto fechado F de $\mathbb{C}$ tal que $F_0 = F \cap \Omega$;
(ii) Para cada $z \in \Omega \backslash F_0$ existe $r > 0$ tal que $D_r(z) \subset \Omega \backslash F_0$ (isto é, $\Omega \backslash F_0$ é aberto).
[*Sugestão:* (i) $\Longrightarrow$ (ii) é trivial por absurdo; (ii) $\Longrightarrow$ (i): considerar $F = \overline{F}_0$]
Diz-se que um subconjunto F_0 de Ω *é fechado em* Ω se F_0 satisfaz as condições equivalentes (i) e (ii).
(b) Verificar que se $F_0 \subset \Omega$ e F_0 é fechado (em $\mathbb{C}$), então F_0 é fechado em Ω. Mostrar com um exemplo que um subconjunto F_0 que é fechado em Ω não é necessariamante fechado em $\mathbb{C}$; [*Sugestão:* $\Omega := D_1(0)$, $F_0 := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$]
(c) Sejam $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ e $Z(f) := \{z \in \Omega \mid f(z) = 0\}$. Prove que $Z(f)$ é fechado em Ω.

(4.10) Seja X um subconjunto de $\mathbb{C}$. Um ponto $\zeta \in \mathbb{C}$ se denomina *ponto de acumulação de* X (ou *ponto limite de* X) se $D_r^*(\zeta) \cap X \neq \varnothing \quad \forall \ r > 0$. O conjunto de todos os pontos de acumulação de X é chamado *derivado de* X e é indicado por X'.
(a) Prove que $X' \subset \overline{X}$. Mostre com um exemplo que em geral $\overline{X} \subset X'$ é falso;
(b) Prove que $\overline{X} = X \cup X'$. Deduzir que X é fechado se e só se $X' \subset X$.
[*Sugestão:* (a) De $\overline{X} = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid D_r(\zeta) \cap X \neq \varnothing \ \forall \ r > 0\}$ resulta $X' \subset \overline{X}$. Se $\zeta \in X$ é um ponto isolado de X, é claro que $\zeta \in \overline{X}$ e $\zeta \notin X'$ portanto a inclusão $\overline{X} \subset X'$ é falsa;
(b) claro].

(4.11) (a) Prove que toda família disjunta de abertos não vazios de $\mathbb{C}$ é no máximo enumerável;

(b) Sejam Ω um aberto não vazio de $\mathbb{C}$ e Z um subconjunto de Ω. Prove que se Z é discreto, então Z é no máximo enumerável;
(c) Sejam Ω um aberto não vazio de $\mathbb{C}$ e Z um subconjunto de Ω. Prove que as condições seguintes são equivalentes:
(i) Z é discreto e fechado em Ω;
(ii) Z não tem ponto de acumulação em Ω.

(4.12) Seja Ω um aberto conexo não vazio de $\mathbb{C}$.
Se $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, $g \in \mathcal{A}(\Omega)$ e existe um subconjunto X de Ω tal que $X' \cap X \neq \varnothing$ de modo que $f|X = g|X$, então $f = g$.

(4.13) Sejam $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $Z = \left\{\frac{1}{m} \mid m \in \mathbb{N}^*\right\}$ e $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ tal que $Z(f) = Z$. Existe $\varphi \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ tal que $\varphi \mid \Omega = f$?

(4.14) Sejam Ω um aberto conexo não vazio de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, $\zeta \in \Omega$ tal que $f(\zeta) = 0$ e $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq 2$. Provar que as condições seguintes são equivalentes:
(i) ζ é um zero de f de ordem m;
(ii) ζ é um zero de f' de ordem $m-1$.
Deduzir que ζ é um zero simples de f (isto é, de ordem 1) se e só se $f'(\zeta) \neq 0$.

(4.15) Determine as ordens de todos os zeros das seguintes funções:
(a) $f(z) = z^2 + 9$; (b) $f(z) = (1 - e^z)(z^2 - 4)^3$
(c) $f(z) = (z^2 - \pi^2)^2 \operatorname{sen} z$.

(4.16) Determine a ordem do zero $\zeta = 0$ para as seguintes funções:
(a) $f(z) = z^2(e^{z^2} - 1)$;
(b) $f(z) = 6 \operatorname{sen}^3 z + z^3(z^6 - 6)$ [*Sugestão:* Usar o exerc. 4.14.]

(4.17) Provar que é legítima a redução ao caso $\zeta = 0$ feita na prova do Teor. 4.6, isto é: sabendo que a derivada da função
$$\varphi : z \in D_r(0) \longmapsto \sum_{m \geq 0} c_m z^m \in \mathbb{C}$$
é a função
$$z \in D_r(0) \longmapsto \sum_{m \geq 1} m c_m z^{m-1} \in \mathbb{C}\ ,$$
demonstrar que a derivada da função
$$f : z \in D_r(\zeta) \longmapsto \sum_{m \geq 0} c_m (z - \zeta)^m \in \mathbb{C}$$
é a função
$$z \in D_r(\zeta) \longmapsto \sum_{m \geq 1} m c_m (z - \zeta)^{m-1} \in \mathbb{C}$$
[*Sugestão:* Como $\varphi \in \mathcal{H}(D_r(0))$ e $T_{-\zeta} : z \longmapsto z - \zeta$ é holomorfa em $\mathbb{C}$, resulta pela Prop. 1.5 que $f = \varphi \circ (T_{-\zeta} \mid D_r(\zeta)) \in \mathcal{H}(D_r(\zeta))$; calcular a seguir $f'(z)$ usando a regra da cadeia].

(4.18) Sejam $I := [a,b] \subset\subset \mathbb{R}$ e $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$. Se h é $\mathcal{R}$-integrável no intervalo I, indicamos esse fato com a notação $h \in \mathcal{R}[I]$. Seja G a função indicada por g no exercício (4.1) e definamos

$$g := G|I \text{ e } \varphi := g + 1$$

Prove as seguintes asserções:
(a) $g \in \mathcal{R}[I]$ (aqui você pode usar o Teorema 10.33(b) de [R1])
(b) $\varphi \in \mathcal{R}[I]$
(c) $\varphi(t) \notin \Omega, \forall t \in I$
(d) $\varphi(t) > 0, \forall t \in I$
(e) A função $f : z \in \Omega \to \int_a^b \frac{dt}{\varphi(t)-z} \in \mathbb{C}$ é analítica.
Observação: No enunciado do Teorema 4.3, a hipótese (3^o) pode ser substituída por:
$(\widetilde{3^o})$ φ é contínua em I.
De fato sabemos que existe $\xi \in I$ tal que $\varphi(\xi) \leq \varphi(t), \forall t \in I$ (Weierstrass), donde

$$\frac{\psi(t)}{\varphi(t)} \leq \frac{\|\psi\|}{\varphi(\xi)} \Rightarrow \|\frac{\psi}{\varphi}\| \leq \frac{\|\psi\|}{\varphi(\xi)}$$

,
o que prova que $\frac{\psi}{\varphi}$ é limitada.
É interessante notar que se ψ e φ verificam as hipóteses do Teorema 4.3, não é em geral verdade que $|\frac{\varphi}{\psi}|$ é limitada em I, sendo esta a razão que nos levou a acrescentar a hipótese (3^o) no enunciado do Teorema 4.3. O contra-exemplo que prova a nossa afirmação é o seguinte (observe que basta trabalhar com funções reais): Seja $I := [-1,1]$, e considere as funções
$\varphi : I \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(t) := \begin{cases} t^2, & \text{se } t \neq 0 \\ 1, & \text{se } t = 0 \end{cases}$
$\psi : I \to \mathbb{R}$ definida por $\psi(t) := \begin{cases} |t|, & \text{se } t \neq 0 \\ 1, & \text{se } t = 0 \end{cases}$.
Então a função $\frac{\psi}{\varphi} : I \to \mathbb{R}$ não é $\mathcal{R}$ integrável pois

$$\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)(t) = \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} = \frac{|t|}{t^2} = \frac{1}{|t|} \text{ se } t \neq 0 \text{ e } \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} = 1 \text{ se } t = 0$$

, donde
$\sup_{t\in I} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} = +\infty$. Porém, φ e ψ são $\mathcal{R}$-integráveis.
Outra hipótese mais fraca que a $(\widetilde{3^o})$ é a seguinte
$(\widehat{3^o})$ $\exists \alpha > 0$ tal que $\varphi(t) \geq \alpha, \forall t \in I$.
(4.18) Sejam $f(z) := \sum\limits_{m\geq 0} a_m z^m$ uma série de potências de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ em volta da origem, $\rho \in]0, +\infty[$ seu raio de convergência e $D := D_\rho(0)$ seu disco de convergência. Prove que existe pelo menos um ponto singular de f sobre

∂D isto é, um ponto $a \in \partial D$ tal que não existe nenhum par (g_a, D_a), sendo D_a um disco aberto de centro a e $g_a \in \mathcal{H}(D_a)$, tal que $g_a|D_a \cap D = f|D_a \cap D)$.

Capítulo 5

INTEGRAÇÃO COMPLEXA

Um dos objetivos centrais deste capítulo é o teorema de Goursat, isto é, a prova de que $\mathcal{H}(\Omega) \subset \mathcal{A}(\Omega)$. A única forma conhecida de obter este resultado é usando a integração complexa com a qual podemos provar o teorema de Cauchy, que tem como consequência uma importante fórmula de representação integral para funções holomorfas, que por sua vez tem muitas consequências relevantes.
Começamos introduzindo as definições básicas sobre integração complexa.
Um intervalo compacto de $\mathbb{R}$ é um intervalo fechado e limitado de $\mathbb{R}$, isto é um conjunto do tipo $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, onde $-\infty < a \leq b < +\infty$.
Quando $a = b$, o intervalo se reduz ao conjunto singular $\{a\}$.
No que segue, *vamos nos interessar apenas por intervalos compactos não reduzidos a um ponto,* de modo que a expressão *"intervalo compacto"* deve ser entendido como *intervalo compacto não reduzido a um ponto.*

Definição 5.1 Uma *curva em* $\mathbb{C}$ é uma aplicação contínua γ de um intervalo compacto $\mathrm{I}= [a,b] \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$. A imagem de I por γ será indicada por γ^*, isto é,

$$\gamma^* := \gamma(\mathrm{I}) = \{\gamma(t) \mid a \leq t \leq b\}.$$

Se X é uma parte não vazia de $\mathbb{C}$ e $\gamma^* \subset X$, diz-se que γ é uma *curva em* X. O ponto $\gamma(a)$ (resp. $\gamma(b)$) é chamado *origem* (resp. *extremidade*) de γ. Se $\gamma(a) = \gamma(b)$, γ é dita uma *curva fechada.* Se γ é constante em I, diz-se que γ *é reduzida a um ponto.* A aplicação

$$\overset{\circ}{\gamma} : t \in \mathrm{I}= [a,b] \longmapsto \gamma(a+b-t) \in \mathbb{C}$$

é uma curva em $\mathbb{C}$ chamada *curva oposta de* γ (é claro que quando t percorre I de a até b, $s := a+b-t$ percorre I de b até a, donde $\overset{\circ}{\gamma}{}^* = \gamma^*$). Uma *curva seccionalmente diferenciável* (que abreviaremos no que segue por *CSD*) é uma curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ com a propriedade seguinte: existe uma divisão $(s_0, s_1, \ldots, s_m)$ de $[a,b]$ (isto é, $a = s_0 < s_1 < \ldots s_{m-1} < s_m = b$) tal que $\gamma_j = \gamma \mid [s_{j-1}, s_j]$ é continuamente diferenciável (observar que as derivadas laterais $\gamma'(s_j^-)$ e $\gamma'(s_j^+)$ podem ser diferentes) para cada j, $1 \leq j \leq m-1$.(Uma função $\varphi : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$, onde I é um intervalo compacto de $\mathbb{R}$, é dita continuamente diferenciável se existir um intervalo aberto $J =]c,d[\supset \mathrm{I}$ e existe uma função continuamente diferenciável $\Phi : J \to \mathbb{K}$ tal que $\Phi| \mathrm{I}=\varphi$.) Uma *curva seccionalmente diferenciável fechada* (que abreviaremos no que segue por *CSDF*) é uma *CSD que é também uma curva fechada.*
Seja agora $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ uma *CSD e* $f \in \mathcal{C}(\gamma^*; \mathbb{C})$. Chama-se *integral de*

f *sobre* γ ao número complexo

(5.1.1) $$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f\left[\gamma(t)\right]\gamma'(t)dt\ .$$
e é imediato verificar que, para cada $c \in \mathbb{C}$ vale:

(5.1.2) $$c\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma cf(z)dz$$

Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ é uma CSD e $f \in \mathcal{C}(\gamma^*;\mathbb{C})$, então

$$-\int_{\overset{\circ}{\gamma}} f = -\int_a^b f\left[\overset{\circ}{\gamma}(t)\right]\overset{\circ}{\gamma}\prime(t)dt = -\int_a^b f\left[\gamma(a+b-t)\right]\left[-\gamma'(a+b-t)\right]dt =$$

$$= -\int_a^b f\left[\gamma(s)\right]\left[-\gamma'(s)\right]ds = \int_a^b f\left[\gamma(s)\right]\gamma'(s)ds = \int_\gamma f\ ,\ \text{ isto é}$$

(5.1.3) $$\int_\gamma f = -\int_{\overset{\circ}{\gamma}} f$$

isto é, se "invertemos o sentido em que $\gamma^* = \overset{\circ}{\gamma}{}^*$ é percorrida, muda o sinal da integral ".

Seja $\varphi : [a_1,b_1] \to [a,b]$ uma bijeção continuamente diferenciável entre os intervalos compactos $[a_1,b_1]$ e $[a,b]$ tal que $\varphi(a_1) = a$ e $\varphi(b_1) = b$, seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ uma *CSD* e seja $\gamma_1 := \gamma \circ \varphi$, então é claro que $\gamma_1 : [a_1,b_1] \to \mathbb{C}$ é uma *CSD*, $\gamma^* = \gamma_1^*$ e se $f \in \mathcal{C}(\gamma^*;\mathbb{C})$ temos:

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{a_1}^{b_1} f[\gamma_1(t)]\gamma_1'(t)dt = \int_{a_1}^{b_1} f\left[\gamma(\varphi(t))\right]\gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)dt =$$
$$= \int_a^b f\left[\gamma(s)\right]\gamma'(s)ds = \int_\gamma f\ ,$$
o que mostra que a "reparametrização"não mudou o valor da integral, em outras palavras,

$$\int_\gamma f$$
depende apenas de f, do conjunto γ^* onde f é contínua (observar que $\gamma^* = \gamma_1^*$) e do "sentido em que γ^* é percorrida"(como vimos em (5.1.3)).
Dizemos que duas *CSD* γ e γ_1 são *equivalentes* se verificam as duas condições seguintes:
(I) $\gamma^* = \gamma_1^*$
(II) $\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f$, para cada $f \in \mathcal{C}(\gamma^*;\mathbb{C})$.

Sejam $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ duas curvas tais que $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$

e consideremos a função $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ definida por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1\left[2(b-a)t + a\right], \text{ para cada } t \in [0,1/2] \\ \\ \gamma_2\left[2(d-c)t + 2c - d\right], \text{ para cada } t \in [1/2,1] \end{cases} .$$

É claro que γ é uma curva (i.e. contínua) e que $\gamma^* = \gamma_1^* \cup \gamma_2^*$. Por outro lado, se γ_1 e γ_2 são *CSD então* γ também é uma *CSD e, neste caso, se* $f \in \mathcal{C}(\gamma_1^* \cup \gamma_2^*; \mathbb{C})$ temos:

$$\int_\gamma f = \int_0^1 f\left[\gamma(t)\right]\gamma'(t)dt =$$

$$\int_0^{1/2} f\left[\gamma_1\left[2(b-a)t+a\right]\right]\gamma_1'\left[2(b-a)t+a\right]2(b-a)dt +$$

$$\int_{1/2}^1 f\left[\gamma_2\left[2(d-c)t+2c-d\right]\right]\gamma_2'\left[2(d-c)t+2c-d\right]2(d-c)dt =$$

$$= \int_a^b f\left[\gamma_1(s)\right]\gamma_1'(s)ds + \int_c^d f\left[\gamma_2(s)\right]\gamma_2'(s)ds = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f, \quad \text{donde}$$

(5.1.4) $$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f \quad , \quad \forall \ f \in \mathcal{C}(\gamma_1^* \cup \gamma_2^*; \mathbb{C})$$

Chamaremos *justaposição das CSD* γ_1 *e* γ_2 (tais que a origem de γ_2 coincide com a extremidade de γ_1) e a indicaremos com a notação $\gamma_1 \vee \gamma_2$ a toda *CSD* $\widetilde{\gamma}$ equivalente a γ. Por definição de equivalência temos $\widetilde{\gamma}^* = \gamma^*$ e

$$\int_{\gamma_1 \vee \gamma_2} f = \int_{\widetilde{\gamma}} f = \int_\gamma f \quad \forall \ f \in \mathcal{C}(\gamma^*; \mathbb{C})$$

em consequência resulta por (5.1.4)

(5.1.5) $$\int_{\gamma_1 \vee \gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f \quad \forall \quad f \in \mathcal{C}(\gamma_1^* \cup \gamma_2^*; \mathbb{C})$$

Nas condições de (5.1.1) indicamos a integral $\int_a^b |f[\gamma(t)]\gamma'(t)|\, dt$ pela notação

$$\int_\gamma |f(z)|\, |dz| \quad ,$$

em particular, se $f(z) = 1$ para cada $z \in \gamma^*$, a integral precedente define um número real que depende apenas de γ :

$$|\gamma| = \int_\gamma |dz| = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

que é chamado *comprimento* de γ. De (5.1.1) e (5.1.2) resulta

(5.1.6) $$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)|\, |dz| \leq \|f\|_{\gamma^*} \cdot |\gamma| \, .$$

De fato,
$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f\left[\gamma(t)\right]\gamma' dt\right| \leq \int_a^b \left|f\left[\gamma(t)\right]\right| \left|\gamma'(t)\right| dt \leq \int_a^b \|f\|_{\gamma^*} \left|\gamma'(t)\right| dt =$$
$$\|f\|_{\gamma^*}\left|\gamma\right|.$$

Casos Especiais

(a) Se $\zeta \in \mathbb{C}$ e $r \in \mathbb{R}, r > 0$, a *CSD* definida por
$$\gamma : t \in [0, 2\pi] \longmapsto \zeta + re^{it} \in \mathbb{C}$$
é chamado *círculo orientado positivamente de centro ζ e raio r*. Para cada $f \in \mathcal{C}(\gamma^*, \mathbb{C})$ temos
$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz = ir\int_0^{2\pi} f(\zeta + re^{it})e^{it}dt$$
e neste caso é frequente o uso da notação
$$\int_{|z-\zeta|=r} f(z)dz$$
para indicar $\int_\gamma f$. É claro que $|\gamma| = 2\pi r$.

(b) Se $u \in \mathbb{C}$ e $v \in \mathbb{C}$; a *CSD* definida por
$$\gamma : t \in [0, 1] \longmapsto u + (v - u)t \in \mathbb{C}$$
é chamada *intervalo orientdo de origem u e extremo v*, e o indicaremos pela notação
$$[u, v].$$

Para cada $f \in \mathcal{C}(\gamma^*; \mathbb{C})$ temos
$$\int_\gamma f(z)dz = (v - u)\int_0^1 f\left[u + (v - u)t\right] dt$$
e neste caso usaremos a notação
$$\int_{[u,v]} f = \int_{[u,v]} f(z)dz$$
para indicar $\int_\gamma f$. Se $[a, b]$ é um intervalo compacto de $\mathbb{R}$, então a *CSD* γ_1 definida por
$$\gamma_1 : t \in [a, b] \longmapsto \frac{u(b - t) + v(t - a)}{b - a} \in \mathbb{C}$$
é evidentemente equivalente a $\gamma = [u, v]$ e a indicaremos ainda por $[u, v]$. É claro que $|\gamma| = |u - v|$ e que $\mathring{\gamma} = [v, u]$.

(c) A cada terna ordenada $\Delta = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{C}^3$ associamos uma curva seccionalmente diferenciável fechada $\partial\Delta$ definida por:

$$(c.1) \qquad \partial\Delta = [u_1,u_2] \vee [u_2,u_3] \vee [u_3,u_1]$$

Sejam $\Delta' = (u_2,u_3,u_1)$ e $\Delta'' = (u_3,u_1,u_2)$ as ternas obtidas por permutação circular a partir de Δ e sejam $\widetilde{\Delta} = (u_1,u_3,u_2), \widetilde{\Delta}' = (u_3,u_2,u_1)$ e $\widetilde{\Delta}'' = (u_2,u_1,u_3)$ as três ternas obtidas por permutação não circular a partir de Δ, então é fácil verificar que:

$$(c.2) \qquad \partial\Delta^\circ = \partial\widetilde{\Delta}\ , \quad \partial\Delta'^\circ = \partial\widetilde{\Delta}'\ , \quad \partial\Delta''^\circ = \partial\widetilde{\Delta}''$$
$$(c.3) \qquad \partial\Delta^* = \partial\Delta'^* = \partial\Delta''^* = \partial\widetilde{\Delta}^* = \partial\widetilde{\Delta}'^* = \partial\widetilde{\Delta}''^*$$

Fixemos $f \in \mathcal{C}(\partial\Delta^*;\mathbb{C})$ arbitária. Por $(c.1)$ e (5.1.5) temos

$$(c.4) \qquad \int\limits_{\partial\Delta} f = \int\limits_{[u_1,u_2]} f + \int\limits_{[u_2,u_3]} f + \int\limits_{[u_3,u_1]} f$$

donde, pelas definições de $\Delta', \Delta'', \partial\Delta', \partial\Delta''$, por (5.1.5) e pela comutatividade da soma em $\mathbb{C}$, resulta

$$(c.5) \qquad \int\limits_{\partial\Delta} f = \int\limits_{\partial\Delta'} f = \int\limits_{\partial\Delta''} f$$

o que junto com as duas primeiras identidades de (c.3) mostra que $\partial\Delta$, *$\partial\Delta'$, e $\partial\Delta''$ são equivalentes.*
Por outro lado, de (c.2) e (5.1.3) resulta

$$(c.6) \qquad \int\limits_{\partial\Delta} f = -\int\limits_{\partial\widetilde{\Delta}} f \qquad \int\limits_{\partial\Delta'} f = -\int\limits_{\partial\widetilde{\Delta}'} f \qquad \text{e} \qquad \int\limits_{\partial\Delta''} f = -\int\limits_{\partial\widetilde{\Delta}''} f$$

Podemos juntar (c.4), (c.5) e (c.6) numa única expressão:

$$(c.7) \qquad \int\limits_{\partial\Delta''} f = \int\limits_{\partial\Delta'} = \int\limits_{\partial\Delta} f = \int\limits_{[u_1,u_2]} f + \int\limits_{[u_2,u_3]} f + \int\limits_{[u_3,u_1]} = -\int\limits_{\partial\widetilde{\Delta}} f = -\int\limits_{\partial\widetilde{\Delta}'} f = -\int\limits_{\partial\widetilde{\Delta}''} f$$

Observar que das duas últimas identidades de (c.3) e das duas últimas identidades de (c.7) resulta que *$\partial\widetilde{\Delta}, \partial\widetilde{\Delta}'$ e $\partial\widetilde{\Delta}''$ são equivalentes.*

Se Ω é um aberto não vazio de $\mathbb{C}$, no que segue a expressão:

"Δ é um triângulo fechado contido em Ω"

tem o significado preciso seguinte: *Existe uma terna ordenada* $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ *tal que se verificam as duas condições seguintes:*
(1^o) *Os pontos a, b* e *c pertencem a Ω e $\Delta = (a,b,c)$.*
(2^o) *O triângulo T de vértices a, b e c* (isto é, T é o menor subconjunto con-

vexo *de* $\mathbb{C}$ contendo os pontos a, b e c) *está contido em* Ω.
Neste caso, por (c.1) temos $\partial\Delta = [a,b] \vee [b,c] \vee [c,a]$ e então, por (5.1.5), o símbolo $\int\limits_{\partial\Delta}$ tem o significado bem determinado seguinte:

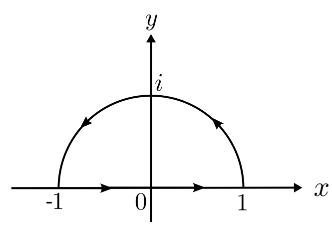
$$\int\limits_{\partial\Delta} f = \int\limits_{[a,b]} f + \int\limits_{[b,c]} f + \int\limits_{[c,a]} f \qquad \forall \quad f \in \mathcal{C}(\partial\Delta^*; \mathbb{C})$$

e por (1^o) e (2^o) a identidade acima terá sentido $\forall \ f \in \mathcal{C}(\Omega; \mathbb{C})$.Observe que a palavra "triângulo"está sendo usada em dois sentidos diferentes mas isto não acarreta nenhum tipo de confusão.

Exemplo Calcular $\int\limits_{\gamma} |z| \, \overline{z} dz$ sendo γ a CSDF definida por

$$\gamma(t) = \begin{cases} e^{it}, & \text{se} \quad 0 \leq t \leq \pi \\[2ex] \dfrac{2}{\pi}t - 3, & \text{se} \quad \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

A restrição $\gamma_0 = \gamma \mid [0, \pi]$ é o "semicírculo superior orientado positivamente" e a restrição $\gamma_1 = \gamma \, [\pi, 2\pi]$ é equivalente a $[-1, 1]$ (e portanto indicamos γ_1 com $[-1, 1]$ como dizemos em Casos Especiais, (b), então $\gamma = \gamma_0 \vee \gamma_1$ tem a seguinte representação geométrica:



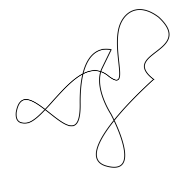
Como $\gamma'(t) = \begin{cases} ie^{it}, & \text{se} \quad 0 < t < \pi \\[2ex] \dfrac{2}{\pi}, & \text{se} \quad \pi < t < 2\pi \end{cases}$,

pela definição de $\displaystyle\int\limits_{\gamma} |z| \, \overline{z} dz$, temos:

$$\int_{\gamma} |z| \, \overline{z} dz = \int_0^{\pi} 1 \cdot e^{-it} \cdot i \cdot e^{it} dt + \int\limits_{\pi}^{2\pi} \left| \frac{2}{\pi}t - 3 \right| (\frac{2}{\pi}t - 3) \frac{z}{\pi} dt$$

$$= i\pi - \int\limits_{\pi}^{3\pi/2} (\frac{2}{\pi}t - 3)^2 dt + \int\limits_{3\pi/2}^{2\pi} (\frac{2}{\pi}t - 3)^2 dt = i\pi$$

Teorema 5.2 *Sejam* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *uma CSDF em* $\mathbb{C}$,
$\Omega := \mathbb{C} \backslash \gamma^*$ *e*



$$\operatorname{Ind}_\gamma : z \in \Omega \to \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} \in \mathbb{C}.$$

Então, $\operatorname{Ind}_\gamma$ *é uma função (definida em* Ω*) que toma valores inteiros, é constante em cada componente conexa de* Ω *e que vale* 0 *sobre a componente conexa não limitada de* Ω (ver exercício (5.6)).

Para cada $z \in \Omega$ o número inteiro $\operatorname{Ind}_\gamma$ é chamado *índice de* z *em relação a* γ. Como γ^* é compacto, é limitado e portanto existe um disco fechado D de raio finito tal que $\gamma^* \subset D$. Em consequência, $W := \mathbb{C} \backslash D$ é aberto, não vazio e obviamente W é conexo e como $W \subset \Omega$ resulta (ver Ex. (5.6) (f)) que W está contido numa componente conexa Ω_0 de Ω que não pode ser limitada pois W não é limitado, o que prova a existência de uma componente conexa não limitada de Ω_0 de Ω.Mostremos que Ω_0 é a única componente conexa não limitada de Ω. De fato, $\Omega_0 \supset W = \mathbb{C} \backslash D$, portanto $\mathbb{C} \backslash \Omega_0 \subset D$ e como as componentes conexas são duas a duas disjuntas, toda outra componente conexa Ω_1 de Ω está contida em $\mathbb{C} \backslash \Omega_0$ e portanto em D, donde Ω_1 é limitada.

Prova do Teorema 5.2 Fixemos $z \in \Omega$ arbitário e mostremos que $\operatorname{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$. Por definição temos:

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(s)ds}{\gamma(s) - z} \tag{5.2.1}$$

Pelo Teor. 3.14. (g) sabemos que para $w \in \mathbb{C}$ temos

$$\frac{w}{2\pi i} \in \mathbb{Z} \iff \exp(w) = 1$$

portanto de (5.2.1) resulta que a relação $\operatorname{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$ é equivalente a

$$\exp\left(\int_a^b \frac{\gamma'(s)ds}{\gamma(s) - z}\right) = 1 \tag{5.2.2}$$

Consideremos a função φ definida por

$$\varphi(t) = \exp\left(\int_a^t \frac{\gamma'(s)ds}{\gamma(s) - z}\right), \qquad \forall \ t \in [a,b] \tag{5.2.3}$$

Derivando esta função obtemos

$$\varphi'(t) = \frac{\varphi(t)\cdot\varphi'(t)}{\gamma(t)-z} \tag{5.2.4}$$

para cada $t \in [a,b]\setminus S$, onde S é o conjunto finito de pontos nos quais γ não é diferenciável. Calculando a derivada da função contínua:

$$\psi : t \in [a,b] \longmapsto \frac{\varphi(t)}{\gamma(t)-z} \in \mathbb{C}$$

obtemos $\psi'(t) = \dfrac{\varphi'(t)\,[\gamma(t)-z] - \varphi(t)\gamma'(t)}{[\gamma(t)-z]^2}$, para cada $t \in [a,b]\setminus S$,

em consequência por (5.2.4) resulta que

$$\psi'(t) = 0 \qquad \text{para cada } \; t \in [a,b]\setminus S \;\; ,$$

o que mostra que ψ é uma função contínua em $[a,b]$ cuja derivada é nula em $[a,b]\setminus S$, logo, como S é finito, resulta que ψ é constante em $[a,b]$ e como por (5.2.3) temos $\varphi(a) = 1$, resulta

$$\psi(a) = \frac{1}{\gamma(a)-z}.$$

De $\psi(t) = \psi(a) \;\; \forall \;\; t \in [a,b]$ resulta então por definição de ψ :

$$\varphi(t) = \frac{\gamma(t)-z}{\gamma(a)-z} \quad \forall \;\; t \in [a,b] \tag{5.2.5}$$

e como γ é fechada, isto é, $\gamma(a) = \gamma(b)$, de (5.2.5) resulta $\varphi(b) = 1$, ou seja (5.2.2), o que prova que $\mathrm{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$.
Como (5.2.1) vale para cada $z \in \Omega$, o Teor. 4.3 implica

$$\mathrm{Ind}_\gamma \in \mathcal{A}(\Omega)$$

donde $\mathrm{Ind}_\gamma \in \mathcal{C}(\Omega)$. Como a imagem de um conexo por uma função contínua é um conjunto conexo, resulta que se V é uma componente conexa de Ω, então $\mathrm{Ind}_\gamma(V)$ é um subconjunto conexo de $\mathbb{C}$. Ora, já vimos que $\mathrm{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$ para cada $z \in \Omega$, portanto

$$\varnothing \neq \mathrm{Ind}_\gamma(V) \subset \mathbb{Z} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Ind}_\gamma(V) \quad \text{é conexo,}$$

e como os únicos subconjuntos não vazios de $\mathbb{Z}$ que são conexos (no espaço topológico $\mathbb{C}$) são aqueles que têm apenas um elemento, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathrm{Ind}_\gamma(V) = \{k\}$, o que prova que

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = k \quad \text{para cada} \;\; z \in V,$$

isto é, Ind_γ é constante sobre cada componente conexa de Ω. Mostremos finalmente que Ind_γ se anula sobre a componente conexa não limitada Ω_0 de Ω. Se $\rho > 0$ é o raio de um disco de centro 0 contendo γ^*, então

$$\left|\frac{\gamma(s)}{z}\right| < \frac{1}{2}, \quad \forall \ s \in [a,b] \quad \text{e} \quad \forall \ x \in \Omega, \ \ |z| > 2\rho$$

donde

$$\left|\left|\frac{\gamma(s)}{z}\right| - 1\right| = 1 - \left|\frac{\gamma(s)}{z}\right| > \frac{1}{2}, \quad \forall \ s \in [a,b] \quad \text{e} \quad \forall \ |z| > 2\rho$$

o que implica

$$|\text{Ind}_\gamma(z)| \leq \frac{1}{2\pi\,|z|}\int_a^b \frac{|\gamma'(s)|\,ds}{\left|\left|\frac{\gamma(s)}{z}\right| - 1\right|} \leq \frac{1}{\pi\,|z|}\,|\gamma|\,, \quad \text{se} \quad |z| > 2\rho.$$

Como Ω_0 não é limitada existe $z \in \Omega_0$ tal que

$$|z| > \max(2\rho, \frac{|\gamma|}{\pi})$$

e então $|\text{Ind}_\gamma(z)| < 1$, logo $\text{Ind}_\gamma(z) = 0$. Como Ind_γ é constante em Ω_0, resulta $\text{Ind}_\gamma(w) = 0$ para cada $w \in \Omega_0$. $\square$

Na oBservação abaixo usaremos o argumento de um número complexo na sua forma intuitiva (ver Def. 6.9).

Observação Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ uma CSDF. Se interpretamos fisicamente $\gamma(t)$ como a posição de uma partícula móvel no instante t, o Teor. 5.2 tem uma interpretação física correspondente como o número de vezes que a partícula gira em volta do ponto $z \notin \gamma^*$ dado. De fato, com as notações do Teor. 5.2 fixemos $z \in \Omega$ arbitrário, então

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(s)ds}{\gamma(s) - z} = k \in \mathbb{Z},$$

portanto, se

$$\lambda(t) := \int_a^t \frac{\gamma'(s)ds}{\gamma(s) - z} \qquad \forall \quad t \in [a,b]$$

podemos escrever

$$2\pi \ \text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{i}\lambda(b) = 2k\pi$$

Sejam $\lambda_1 := \text{Re}(\lambda)$ e $\lambda_2 := \text{Im}(\lambda)$ isto é $\lambda(b) = \lambda_1(b) + i\lambda_2(b)$ logo de $\frac{1}{i}\lambda(b) = 2k\pi$ resulta que $\lambda(b)$ é imaginário puro, ou seja $\lambda(b) = i\lambda_2(b)$ (isto é, $\lambda_1(b) = 0$), donde

$$2\pi\text{Ind}_\gamma(z) = -i\lambda(b) = 2k\pi = \lambda_2(b)$$

o que implica (observe que $\lambda_2(b) = \lambda_2(b) - \lambda_2(a)$ pois $\lambda(a) = 0 \implies \lambda_2(a) = 0$)

[1] $\left\| \begin{array}{l} \lambda_2(b) = 2\pi \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \text{aumento total da parte} \\ \text{imaginária } \lambda_2 \text{ de } \lambda \text{ quando } t \text{ varia de } a \text{ até } b \end{array} \right.$

Por outro lado, de (5.2.5) $\quad (\varphi(t) = \dfrac{\gamma(t) - z}{\gamma(a) - z}) \quad$ segue

[2] $\quad \| \ \arg[\varphi(t)] = \arg[\gamma(t) - z] - \arg[\gamma(a) - z]$

e como $\varphi(t) = \exp[\lambda(t)] \quad \forall \ \ t \in [a, b]$, resulta $\quad \varphi(b) = \exp[\lambda(b)] = \exp[i\lambda_2(b)]$, o que implica (lembrar que $\arg(e^{ix}) = x \quad \forall \ \ x \in \mathbb{R}$)

[3] $\quad \| \ \arg[\varphi(b)] = \arg[\exp(i\lambda_2(b))] = \lambda_2(b)$

Igualando os últimos termos de [2] $(t = b)$ e [3] :

[4] $\left\| \begin{array}{l} \lambda_2(b) = \arg[\gamma(b) - z] - \arg[\gamma(a) - z] = \text{aumento total} \\ \text{do argumento de } \gamma(t) - z \text{ quando } t \text{ varia de } a \text{ até } b \end{array} \right.$

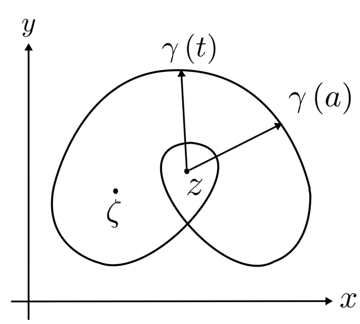
De [1] e [4] segue então

$$\left\| \begin{array}{l} 2\pi \ \mathrm{I}nd_\gamma(z) = \text{aumento total do argumento de } \gamma(t) - z \\ \text{quando } t \text{ varia de } a \text{ até } b = 2k\pi \end{array} \right.$$

e então, dividindo ambos membros da igualdade anterior por 2π, obtemos o número inteiro

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = k$$

que pode ser interpretado como *o número de vezes que a partícula móvel* $\gamma(t)$ *gira em volta de* z *quando* t *varia de* a *até* b, ou como se diz mais frequentemente, *o número de vezes que* γ *gira em volta de* z *quando* t *varia de* a *até* b.



O caso particular seguinte é importante para o que segue:

Proposição 5.3 *Se* γ *é o círculo orientado positivamente de centro* ζ *e raio* $r > 0$ (ver Casos Especiais, (a)), *então:*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1, \text{ se } |z-\zeta| < r \\ \\ 0, \text{ se } |z-\zeta| > r \end{cases}$$

Prova O aberto $\Omega = \mathbb{C}\setminus \gamma^*$ tem duas componentes conexas que são

$$\Omega_1 = D_r(\zeta) \quad \text{e} \quad \Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-\zeta| > r\}$$

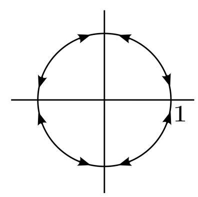
e como Ind_γ se anula sobre Ω_2 (pelo Teor. 5.2 pois Ω_2 é a componente conexa não limitada de Ω), basta ver que $\mathrm{Ind}_\gamma(\zeta) = 1$ (pois Ind_γ é constante sobre Ω_1 pelo Teor. 5.2). De fato,

$$\mathrm{Ind}_\gamma(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{dz}{z-\zeta} = \frac{ri}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}dt}{re^{it}} = 1. \ \Box$$

Exemplo 1 Se considera a CSDF $\Gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{C}$ definida por

$$\Gamma(t) = \left\{ \begin{array}{ll} e^{it}, & \text{se } t \in [0, 2\pi] \\ \\ e^{-it}, & \text{se } t \in [2\pi, 4\pi] \end{array} \right\}$$

Vamos mostrar que $\mathrm{Ind}_\Gamma \equiv 0$. De fato, é claro que $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0$ se $|z| > 1$ pela última asseção do Teor. 5.2. Para provar que $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0$ sempre que $|z| < 1$, basta ver que $\mathrm{Ind}_\Gamma(0) = 0$, o que é imediato.



$$\mathrm{Ind}_\Gamma(0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}dt}{e^{it}} + \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{-ie^{it}}{e^{-it}}dt\right] = 0$$

Exemplo 2 Estudar a função Ind_Γ sendo $\Gamma : [0, 12\pi] \to \mathbb{C}$ a CSDF definida por

$$\Gamma(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) = 5i - 2ie^{-it}, & \text{se } t \in [0, 2\pi] \\ \gamma_2(t) = i + 2ie^{it}, & \text{se } t \in [2\pi, 3\pi] \\ \gamma_3(t) = ie^{it}, & \text{se } t \in [3\pi, 9\pi] \\ \gamma_2(t), & \text{se } t \in [9\pi, 10\pi] \\ \gamma_1(t), & \text{se } t \in [10\pi, 12\pi] \end{cases}$$

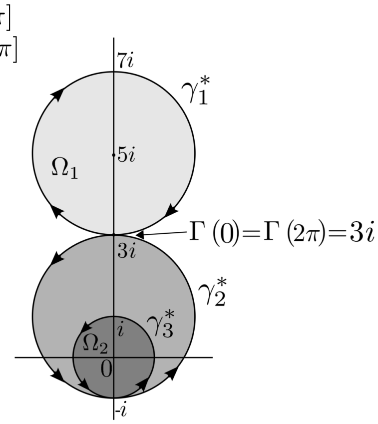
As componentes conexas de $\Omega = \mathbb{C}\setminus \Gamma^*$ são

Ω_1 = disco aberto de fronteira γ_1^*

Ω_2 = disco aberto de fronteira γ_3^*

Ω_3 = disco aberto de fronteira γ_2^* menos $\Omega_2 \cup \gamma_3^*$

Ω_4 = componente ilimitada de Ω



Ind$_\Gamma$ em Ω_1:

Basta calcular $\mathrm{Ind}_\Gamma(5i)$.

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(5i) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{12\pi} \frac{\Gamma'(t)dt}{\Gamma(t)-5i} = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_0^{2\pi} + \int_{2\pi}^{10\pi} + \int_{10\pi}^{12\pi}\right\}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2\pi}^{10\pi} = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\gamma_2'(t)dt}{\gamma_2(t)-5i} + \int_{3\pi}^{9\pi} \frac{\gamma_3'(t)dt}{\gamma_3(t)-5i} + \int_{9\pi}^{10\pi} \frac{\gamma_2'(t)dt}{\gamma_2(t)-5i}\right\}$$

Como $\gamma_2(t) = i + 2ie^{it}$ tem período 2π é
claro que

$$\int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\gamma_2'(t)dt}{\gamma_2(t)-5i} + \int_{9\pi}^{10\pi} \frac{\gamma_2'(t)dt}{\gamma_2(t)-5i} = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma_2'(t)dt}{\gamma_2(t)-5i}$$

, portanto

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2\pi}^{10\pi} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\gamma_2'(t)dt}{\gamma_2(t)-5i} + \frac{1}{2\pi i}\int_{3\pi}^{9\pi} \frac{\gamma_3'(t)dt}{\gamma_3(t)-5i} =$$

$\mathrm{Ind}_{\gamma_2}(5i)+ \mathrm{Ind}_{\gamma_3}(5i) = 0 + 0 = 0$, donde

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(5i) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\gamma_1'(t)dt}{\gamma_1(t)-5i} + \frac{1}{2\pi i}\int_{10\pi}^{12\pi} \frac{\gamma_1'(t)dt}{\gamma_1(t)-5i} = 2\ \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(5i) =$$

$$2(\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{2e^{-it}}{2ie^{-it}}dt) = \frac{1}{\pi i^2}\int_0^{2\pi} dt = -2$$

Ind$_\Gamma$ em Ω_2:

Basta calcular $\mathrm{Ind}_\Gamma(0)$.

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{12\pi} \frac{\Gamma'(t)dt}{\Gamma(t)} = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_0^{2\pi} + \int_{2\pi}^{10\pi} + \int_{10\pi}^{12\pi}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_0^{2\pi} + \int_{10\pi}^{12\pi}\right\} + \frac{1}{2\pi i}\int_{2\pi}^{10\pi} = 2\ \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0) + \frac{1}{2\pi i}\int_{2\pi}^{10\pi} \frac{\Gamma'(tdt)}{\Gamma(t)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{2\pi}^{10\pi} \frac{\Gamma'(t)dt}{\Gamma(t)} = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\gamma_2'(t)dt}{\gamma_2(t)} + \int_{3\pi}^{9\pi} \frac{\gamma_3'(t)dt}{\gamma_3(t)} + \int_{9\pi}^{10\pi} \frac{\gamma_2'(t)dt}{\gamma_2(t)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\gamma_2'(t)dt}{\gamma_2(t)} + \int_{9\pi}^{10\pi}\frac{\gamma_2'(t)dt}{\gamma_2(t)}\right\} + \frac{1}{2\pi i}\int_{3\pi}^{9\pi}\frac{\gamma_3'(t)dt}{\gamma_3(t)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\gamma_2'(t)dt}{\gamma_2(t)} + \frac{1}{2\pi i}\int_{3\pi}^{9\pi}\frac{\gamma_3'(t)dt}{\gamma_3(t)} = \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(0) + \mathrm{Ind}_{\gamma_3}(0)$$

$\mathrm{Ind}_{\gamma_2}(0) = 1$

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_3}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{3\pi}^{9\pi}\frac{-e^{it}dt}{ie^{it}} = \frac{1}{2\pi}\int_{3\pi}^{9\pi}dt = \frac{6\pi}{2\pi} = 3$$

portanto

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(0) = 1 + 3 = 4.$$

$\underline{\mathrm{Ind}_\Gamma \text{ em } \Omega_3}$

Basta calcular $\mathrm{Ind}_\Gamma(2i)$

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(2i) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{12\pi}\frac{\Gamma'(t)dt}{\Gamma(t)-2i} = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_0^{2\pi} + \int_{2\pi}^{10\pi} + \int_{10}^{12\pi}\right\} =$$

$$= 2\ \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(2i) + \frac{1}{2\pi i}\int_{2\pi}^{10\pi}\frac{\Gamma'(t)dt}{\Gamma(t)-2i} = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{2\pi}^{3\pi} + \int_{3\pi}^{9\pi} + \int_{9\pi}^{12\pi}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{2\pi}^{3\pi} + \int_{9\pi}^{10\pi}\right\} + \mathrm{Ind}_{\gamma_3}(2i) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{3\pi}\frac{\gamma_2'(t)dt}{\gamma_2(t)-2i} = \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(2i) = 1.$$

O teorema de Cauchy

Existem várias formas do teorema de Cauchy, mas todas elas expressam basicamente que *se Ω é um aberto não vazio de $\mathbb{C}$ e γ é uma CSDF em Ω, onde γ e Ω satisfazem certas condições topológicas, então*

$$\int_\gamma f = 0 \quad , \qquad \forall\ f \in \mathcal{H}(\Omega).$$

Vamos começar demonstrando uma forma muito simples do teorema de Cauchy (fazendo uma hipótese muito forte sobre Ω) que é porém suficiente para muitas aplicações importantes. Existe uma versão mais forte do teorema de Cauchy, usando o conceito de homotopia, que expressa o seguinte (γ_1 e γ_2 são duas CSD em Ω):

((*)) Se γ_1 e γ_2 são Ω-homotópicas $\implies \int\limits_{\gamma_1} f = \int\limits_{\gamma_2} f \quad \forall \quad f \in \mathcal{H}(\Omega)$

Neste caso, o teorema de Cauchy diz que $\int\limits_{\gamma} f$ é um invariante em relação às classes de homotopia de Ω. Finalmente , a versão mais forte do teorema de Cauchy se obtém usando o conceito de homologia (que depende do conceito de índice) e expressa o seguinte:

((**)) Se γ_1 e γ_2 são Ω-homológicas $\implies \int\limits_{\gamma_1} f = \int\limits_{\gamma_2} f \quad \forall \quad f \in \mathcal{H}(\Omega)$

Neste caso, o teorema de Cauchy diz que $\int\limits_{\gamma} f$ é um invariante em relação às classes de homologia de Ω. Não é difícil provar que se γ_1 e γ_2 são curvas Ω-homotópicas então são Ω-homológicas, o que mostra que o enunciado ((**)) é mais forte que o enunciado ((*)). No §7 provaremos ((**)) e ((*)) resultará como consequência

Proposição 5.4 *Seja $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que F' é contínua em Ω. Então,*

$$\int\limits_{\gamma} F'(z)dz = 0$$

para cada CSDF γ em Ω.

Prova Seja $[a, b]$ o domínio de γ, isto é $\gamma : [a, b] \to \Omega$, então pelo teorema fundamental do cálculo vem:

$\int_\gamma F'(z)dz = \int_a^b F'[\gamma(t)]\gamma'(t)dt = F[\gamma(b)] - F[\gamma(a)] = 0$, pois $\gamma(a) = \gamma(b)$. $\square$

Corolário 5.5 *A identidade*

$$\int\limits_{\gamma} z^m dz = 0$$

é válida nos seguintes casos:
(I.) *Para cada CSDF γ, se $m \in \mathbb{N}$*
(II.) *Para cada CSDF γ tal que $0 \notin \gamma^*$, se $m \in \mathbb{Z}$ e $m \leq -2$.*

Prova Para cada $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq -1$, a derivada da função $F(z) = \dfrac{z^{m+1}}{m+1}$ é $F'(z) = z^m$. $\square$

A parte difícil da prova do teorema de Cauchy é o seguinte:

Lema 5.6 (teorema de Cauchy para um triângulo) *Seja Δ um triângulo fechado contido num aberto não vazio Ω de $\mathbb{C}$,* (ver Casos Especiais (c)) *seja $p \in \Omega$ e seja $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ tal que $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{p\})$. Então,*

$$\int_{\partial\Delta} f = \int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

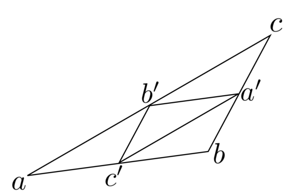
(Veremos mais adiante que as hipóeses do Lema 5.6 implicam $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, isto é, o ponto excepcional p na realidade não é excepcional. Porém, a formulação acima do lema será necessária em duas demonstrações importantes).
Antes de provar o Lema 5.6 vamos fazer alguns comentários e observações que são importantes para a compreensão desta demonstração. No que segue, a palavra "triângulo"indicará, ora uma terna ordenada de números complexos $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, ora o menor subconjunto convexo de $\mathbb{C}$ contendo os pontos a, b e c; porém esta ambiguidade não causará problemas pois o contexto indicará claramente em cada caso o sentido em que a palavra está sendo usada. Analogamente, a notação $[a,b]$ (onde $a,b \in \mathbb{C}$) indicará indistintamente o intervalo orientado de origem a e extremo b (ver Casos Especiais (b)) ou o segmento de extremos a e b (isto é $[a,b]^*$).

Observação 1 Lembremos que se X é um subconjunto limitado não vazio de $\mathbb{C}$, se chama ***diâmetro de*** X ao número real ≥ 0 :

$$diam(X) := \sup\{|z-w| \;\mid\; z,w \in X\}.$$

Dado um tirângulo $\Delta = (a,b,c) \in \mathbb{C}^3$,
sejam

a' = ponto médio de $[b,c]$
b' = ponto médio de $[a,c]$
c' = ponto médio de $[a,b]$



e consideremos os quatro
triângulos resultantes:
$\Delta^{(1)} = (a,c',b')$, $\Delta^{(2)} = (b,a',c')$, $\Delta^{(3)} = (c,b',a')$, $\Delta^{(4)} = (a',b',c')$.
Indicando a congruência com o símbolo $\equiv$, é claro que

$$\Delta^{(1)} \equiv \Delta^{(2)} \equiv \Delta^{(3)} \equiv \Delta^{(4)}$$

e que estes quatro triângulos são semelhantes a Δ. Como $\Delta^{(1)}$ se transforma em Δ por uma homotetia de centro a e razão 2, é imediato verificar que $diam(\Delta) = 2\; diam(\Delta^{(1)})$ donde

$$diam(\Delta^{(1)}) = diam(\Delta^{(2)}) = diam(\Delta^{(3)}) = diam(\Delta^{(4)}) = \frac{diam(\Delta)}{2}$$

Considerando as CSDF definidas pelos cinco triângulos anteriores é claro que valem as seguintes relações entre os comprimentos:

$$\left|\partial\Delta^{(1)}\right| = \left|\partial\Delta^{(2)}\right| = \left|\partial\Delta^{(3)}\right| = \left|\partial\Delta^{(4)}\right| = \frac{1}{2}\left|\partial\Delta\right|.$$

Observação 2 Seja K um subconjunto não vazio de $\mathbb{C}$, então são equiva-

lentes as afirmações seguintes:
(i) K é compacto;
(ii) Para cada família $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de conjuntos fechados em K tal que

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = \varnothing,$$

existe uma subfamília finita não vazia $(F_\lambda)_{\in\Lambda_0}$ de $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tal que

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda_0} F_\lambda = \varnothing.$$

Oservação 3 Sejam K um subconjunto compacto não vazio de $\mathbb{C}$, $(F_m)_{m\geq 1}$ uma sequência de conjuntos fechados <u>não vazios</u> tais que:
(1) $K \supset F_1 \supset F_2 \supset \ \ldots \supset F_m \supset F_{m+1} \supset \ldots$
(2) $\lim\limits_{m\to\infty} [diam(F_m)] = 0$

Então, existe $z \in K$ tal que $\bigcap\limits_{m\geq 1} F_m = \{z\}$.

De fato, como para cada $m \in \mathbb{N}$ o conjunto F_m é fechado resulta que F_m é fechado em K, logo se fosse $\bigcap\limits_{m\geq 1} F_m = \varnothing$, pela Obs. 2 precedente existiria uma parte finita J de $\mathbb{N}$ tal que

$$\bigcap_{m\in J} F_m = \varnothing$$

o que é absurdo pois como (F_m) é decrescente, é claro que

$$\bigcap_{m\in J} F_m = F_\nu \neq \varnothing$$

onde $\nu = \max\, J$. Em consequência temos $\mathrm{I} := \bigcap\limits_{m\geq 1} F_m \neq \varnothing$. Mostremos que I contém apenas um ponto. Suponhamos por absurdo que existem $z, w \in \mathrm{I}$ tais que $z \neq w$, então

$$\{z, w\} \subset \mathrm{I} \subset F_m \quad \forall \;\; m \in \mathbb{N},$$

donde, para cada $m \in \mathbb{N}$ resultaria

$$diam(F_m) \geq |z - w| > 0 \quad \forall \;\; m \geq 1$$

o que é absurdo pois

$$0 = \lim_{m\to\infty} [diam(F_m)] \geq |z - w| > 0$$

Resulta então que I tem apenas um elemento, isto é, existe $z \in K$ tal que $\mathrm{I} = \{z\} \subset F_m \subset K \quad \forall \;\; m \in \mathbb{N}$.

Prova do Lema 5.6 Sejam

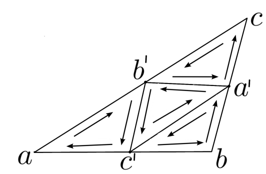
$$\Delta = (a, b, c) \;\text{ e }\; J := \int_{\partial\Delta} f(z)dz$$

Caso 1: $p \notin \Delta$. Sejam a', b' e c' os pontos médios de $[b, c]\,, [a, c]$ e $[a, b]$ respectivamente e consideremos os triângulos da Obs. 1 precedente
$\Delta^{(1)} = (a, c', b')$, $\Delta^{(2)} = (b, a', c')$, $\Delta^{(3)} = (c, b', a')$ e $\Delta^{(4)} = (a', b', c')$.
É imediato verificar que

$$J = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta^{(j)}} f(z)dz$$

e portanto

$$|J| \leq \sum_{j=1}^{4} \left| \int_{\partial\Delta^{(j)}} f(z)dz \right|$$



o que mostra que, pelo menos um dos quatro somandos do segundo membro da desigualdade acima é $\geq$ que $|J/4|$. Seja Δ_1 o triângulo correspondente ao somando em questão, isto é, tal que

$$\left| \int_{\partial\Delta_1} f(z)dz \right| \geq |J/4|$$

Pela Obs. 1 precedente temos:

$$diam(\Delta_1) = \frac{1}{2}\, diam(\Delta) \quad \text{ e } \quad |\partial\Delta_1| = \frac{1}{2}\, |\partial\Delta|$$

Procedendo com o triângulo Δ_1 da mesma forma que com Δ, obtemos um novo triângulo Δ_2 tal que

$$\left| \int_{\partial\Delta_2} f(z)dz \right| \geq \left|J/4^2\right| \ ,$$

$$diam(\Delta_2) = \frac{1}{2}\, diam(\Delta_1) = \frac{1}{2^2} diam(\Delta) \ \text{ e } \ |\partial\Delta_2| = \frac{1}{2}\, |\partial\Delta_1| = \frac{1}{2^2}\, |\partial\Delta| \, .$$

Prosseguindo desta forma construímos por indução uma sequência de triângulos $(\Delta_m)_{m\geq 1}$ tal que para cada $m \geq 1$ temos

$$\left| \int_{\partial\Delta_m} f(z)dz \right| \geq |J/4^m| \ ,$$

$$diam(\Delta_m) = \frac{1}{2^m}\, diam(\Delta) \quad \text{ e } \quad |\partial\Delta_m| = \frac{1}{2^m}\, |\partial\Delta| \, .$$

Da desigualdade anterior resulta então

$$\text{(5.6.1)} \qquad |J| \leq 4^m \left| \int_{\partial\Delta_m} f(z)dz \right| \ , \quad \forall \ m \geq 1$$

Observamos a seguir que Δ_m é fechado para cada $m \geq 1$, que $\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \cdots \supset \Delta_m \supset \Delta_{m+1} \supset \cdots$ e que

$$\lim_{m\to\infty} [diam(\Delta_m)] = diam(\Delta) \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2^m} = 0$$

Pela Obs. 3 anterior , existe $z_0 \in \Delta$ tal que

$$\bigcap_{m\geq 1} \Delta_m = \{z_0\}$$

Como $z_0 \in \Delta$ e $p \notin \Delta$ resulta $p \neq z_0$, logo f é $\mathbb{C}$-derivável em z_0, donde pelo Lema 1.3 existe $r > 0$ tal que $D_r(z_0) \subset \Omega$ e existe $\varphi : D_r(z_0) \to \mathbb{C}$ contínua em z_0 tal que $\varphi(z_0) = 0$, de modo que

$$f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0) = (z - z_0)\varphi(z) \quad \forall \ z \in D_r(z_0).$$

Fixemos $\varepsilon > 0$ arbitrário. Pela continuidade de φ em z_0 e por ser $\varphi(z_0) = 0$, existe $\delta \in]0, r[$ tal que $|\varphi(z)| \leq \varepsilon$ sempre que $z \in D_\delta(z_0)$ e em consequência:

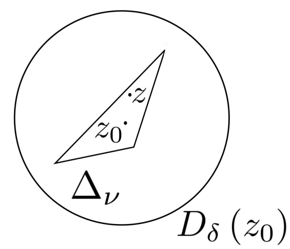
$$(5.6.2) \qquad |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon\, |z - z_0| \quad \forall \;\; z \in D_\delta(z_0)$$

Por outro lado, como $z_0 \in \Delta_m \;\; \forall \;\; m \in \mathbb{N}$ e $\lim\limits_{m \to \infty} [diam(\Delta_m)] = 0$, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $\Delta_\nu \subset D_\delta(z_0)$ e é claro que:

$$(5.6.3) \qquad |z - z_0| \leq |\partial \Delta_v| = \frac{1}{2^\nu}\, |\partial \Delta|\,, \quad \forall \;\; z \in \Delta_\nu$$

Ora, pelo Corol. 5.5 temos:

$$\int\limits_{\partial \Delta_\nu} f(z_0) dz = 0 \qquad \text{e} \qquad \int\limits_{\partial \Delta_\nu} f'(z_0)(z - z_0) dz = 0$$



o que implica

$$(5.6.4) \qquad \int\limits_{\partial \Delta_\nu} f(z) dz = \int\limits_{\partial \Delta_\nu} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)]\, dz$$

De $(5.6.1), (5.6.2), (5.6.3)$ e $(5.6.4)$ resulta então:

$$|J| \leq 4^\nu \left| \int\limits_{\partial \Delta_\nu} f(z) dz \right| = 4^\nu \left| \int\limits_{\partial \Delta_\nu} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)] dz \right| \leq$$

$$\leq 4^\nu \int\limits_{\partial \Delta_\nu} |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)|\, |dz| \leq 4^\nu \int\limits_{\partial \Delta_\nu} \varepsilon\, |z - z_0|\, |dz| \leq$$

$$\leq 4^\nu \varepsilon \frac{1}{2^\nu}\, |\partial \Delta| \int\limits_{\partial \Delta_\nu} |dz| = 4^\nu \varepsilon \frac{|\partial \Delta|}{2^\nu}\, |\partial \Delta_\nu| = 4^\nu \varepsilon \frac{|\partial \Delta|}{2^\nu} \frac{|\partial \Delta|}{2^\nu} \varepsilon\, |\partial \Delta|^2,$$

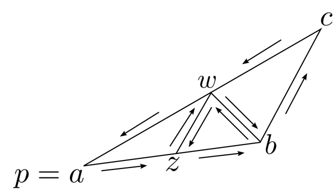
isto é,

$$|J| \leq \varepsilon\, |\partial \Delta|$$

o que mostra que $J = 0$ pois ε era arbitrário.

Caso 2: p é um vértice de Δ, por exemplo $p = a$. Se a, b e c são colineares então é claro que $J = 0$, logo podemos supor que a, b e c não são colineares.

Sejam $z \in [a, b]$ e $w \in [a, c]$ pontos tais que $z \neq a, b$ e $w \neq a, c$ e sejam $\Delta_1 = (a, z, w)$, $\Delta_2 = (z, b, w)$ e $\Delta_3 = (b, c, w)$.
Então é claro que



$$J = \sum_{j=1}^{3} \int_{\partial \Delta_j} f$$

Como a, b e c não são colineares, $p = a$ e z e w não são vértices de Δ, resulta $p \notin \Delta_2$ e $p \notin \Delta_3$, logo pelo Caso 1 temos:

$$\int_{\partial \Delta_2} f = \int_{\partial \Delta_3} f = 0$$

donde

$$J = \int_{\partial \Delta_1} f \tag{5.6.5}$$

Como Δ é compacto e $f \in \mathcal{C}(\Delta)$:

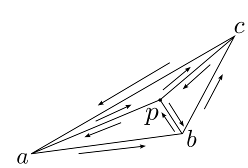
$$\|f\|_{\partial \Delta_1} \leq \|f\|_{\Delta_1} \leq \|f\|_{\Delta} < +\infty$$

e então de (5.6.5) resulta

$$|J| \leq \int_{\partial \Delta_1} |f(z)| \, |dz| \leq \|f\|_{\Delta} \cdot |\partial \Delta_1|$$

o que prova que $J = 0$ pois $|\partial \Delta_1|$ pode ser feito arbitrariamente pequeno a condição de tomar z e w suficientemente próximos de a.

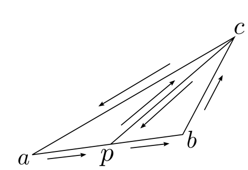
Caso 3: $p \in \Delta$ e p não é vértice de Δ
Como



$$J = \int_{\partial(a,b,p)} f \; + \int_{\partial(b,c,p)} f \; + \int_{\partial(c,a,p)} f$$

resulta $J = 0$ pois cada uma das três integrais ssé nula pelo Caso 2.

Caso 4: p pertence a um lado de Δ sem ser vértice de Δ. Este caso se reduz imediatamente

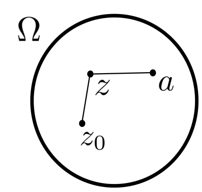


ao Caso 2. $\square$

Teorema 5.7 (O teorema de Cauchy num aberto convexo) *Sejam* Ω *um aberto convexo não vazio,* $p \in \Omega$ *e* $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ *tal que* $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{p\})$. *Então, existe* $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ *tal que* $F' = f$ *e em consequência*

(5.7.1) $$\int_\gamma f(z)dz = 0 \qquad \text{para cada CSDF } \gamma \text{ em } \Omega.$$

Prova Fixemos $a \in \Omega$. Como Ω é convexo, para cada $z \in \Omega$ a imagem do intervalo orientado $[a, z]$ está contida em Ω e portanto podemos definir a função



$$F : z \in \Omega \longmapsto \int_{[a,z]} f(\zeta)d\zeta \in \mathbb{C}.$$

Dados $z \in \Omega$ e $z_0 \in \Omega$, a convexidade de Ω implica que o triângulo fechado de vértices a, z e z_0 está contido em Ω e como pelo Lema 5.6 temos, se $\Delta = (a, z, z_0)$:

$$\int_{\partial\Delta} f = \int_{[a,z]} f + \int_{[z,z_0]} f + \int_{[z_0,a]} f = 0$$

donde

(5.7.2) $$\int_{[a,z]} f + \int_{[z_0,a]} f = \int_{[z_0,z]} f.$$

Por definição de F temos

(5.7.3) $$F(z) - F(z_0) = \int_{[a,z]} f - \int_{[a,z_0]} f = \int_{[a,z]} f + \int_{[z_0,a]} f$$

logo, de (5.7.2) e (5.7.3) resulta

(5.7.4) $$F(z) - F(z_0) = \int_{[z_0,z]} f = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)d\zeta \ .$$

Mostremos que $F'(z_0) = f(z_0)$. De fato, por (5.7.4) temos

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0,z]} [f(\zeta) - f(z_0)]\, d\zeta, \text{ se } z \neq z_0 \ .$$

Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, a continuidade de f em z_0 mostra que existe $\delta > 0$ tal que $|f(\zeta) - f(z_0)| < \varepsilon$ sempre que $|\zeta - z_0| < \delta$, em consequência, se $z \in \Omega$ e $0 < |z - z_0| < \delta$ temos

$$\left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| = \left| \frac{1}{z - z_0} \int\limits_{[z_o,z]} [f(\zeta) - f(z_0)]\, d\zeta \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|z - z_0|} \int\limits_{[z_0,z]} |f(\zeta) - f(z_0)|\, |d\zeta| < \frac{\varepsilon}{|z - z_0|} \int\limits_{[z_0,z]} |d\zeta| = \varepsilon \ ,$$

o que prova que $F'(z_0) = f(z_0)$ e portanto $F' = f$ em Ω pois z_0 era arbitário. Resulta então que $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ e que $F' \in \mathcal{C}(\Omega)$, donde pela Prop. 5.4, para cada CSDF γ em Ω temos

$$\int\limits_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = \int\limits_{\gamma} F'(\zeta) d\zeta = 0 \ .\Box$$

Teorema 5.8 (fórmula de representação integral de Cauchy)
Sejam Ω um aberto convexo não vazio de $\mathbb{C}$, γ uma CSDF em Ω e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Então, para cada $z \in \Omega$ tal que $z \notin \gamma^*$ temos:

$$f(z) \cdot \mathrm{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

Naturalmente, o caso mais interessante é aquele em que $\mathrm{Ind}_{\gamma}(z) = 1$.

Prova Fixemos $z \in \Omega$ tal que $z \notin \gamma^*$, então definimos $g : \Omega \to \mathbb{C}$ da forma seguinte:

$$g(\zeta) := \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \text{se } \ \zeta \in \Omega \ \text{ e } \ \zeta \neq z \\[2ex] f'(z), & \text{se } \ \zeta = z \end{cases}$$

É claro que $g \in \mathcal{C}(\Omega)$ e que $g \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z\})$, portanto g satisfaz as hipóteses do Teor. 5.7, o que implica

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} g(\zeta) d\zeta = 0$$

o que por definição de g (e observando que se $\zeta \in \gamma^*$ então $\zeta \neq z$ e portanto só interessa $g|\Omega \setminus \{z\}$) se escreve assim:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0$$

o que pela definição de $\mathrm{Ind}_{\gamma}(z)$ pode ser escrito da maneira seguinte:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - f(z)\cdot\mathrm{Ind}_{\gamma}(z) = 0. \ \square$$

Observação O conceito de convexidade é puramente algébrico, porém como todo aberto convexo é conexo e a "conexidade" é uma propriedade topológica muito forte, vemos na realidade que a hipótese (algébrica) de convexidade tem implicação topológicas muito fortes (conexidade). Entretanto, é importante notar que a conexidade de Ω não é suficiente para a validez do Teor. 5.7, isto é, se no enunciado do Teor. 5.7 substituímos a hipótese "convexo"por "conexo", o enunciado resultante é falso, como mostra o exemplo trivial seguinte: $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ é um aberto conexo (mas não é convexo), a função $f : z \in \Omega \longmapsto 1/z \in \mathbb{C}$ é holomorfa em Ω e o círculo orientado positivamente de centro 0 e raio 1 é uma CSDF em Ω, porém

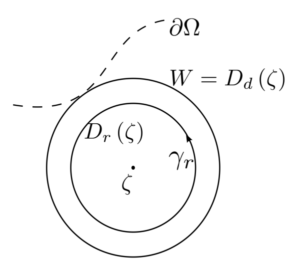
$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma}\frac{dz}{z} = \int_{0}^{2\pi}\frac{ie^{it}dt}{e^{it}} = 2\pi i \neq 0.$$

A fórmula de representação integral (Teor. 5.8) é uma poderosa auxiliar no estudo das propriedades locais das funções holomorfas como ficará bem claro no próximo resultado que é a recíproca do Teor. 4.6 .

Teorema 5.9 (Goursat) *Para cada aberto não vazio Ω de $\mathbb{C}$ temos $\mathcal{H}(\Omega) \subset \mathcal{A}(\Omega)$ e em consequência, pelo Teorema 4.6, temos $\mathcal{H}(\Omega) = \mathcal{A}(\Omega)$*

Prova Seja $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Dados $\zeta \in \Omega$ e $r > 0$ tais que $D_r(\zeta) \subset \Omega$, vamos construir uma série de potências em volta de ζ que representa f em $D_r(\zeta)$. suponhamos $r < d = dist(\zeta, \complement\Omega)$. Então $W := D_d(\zeta)$ é um aberto convexo contido em Ω e se γ_r é o círculo orientado positivamente de centro ζ e raio r (isto é $\gamma_r : t \in [0, 2\pi] \longmapsto \zeta + re^{it} \in \mathbb{C}$), como $r < d$ temos $\overline{D}_r(\zeta) \subset W$ e portanto$\gamma_r^* \subset W$. Como $D_r(\zeta) \cap \gamma_r^* = \varnothing$ e, pela Prop. 5.3 temos $\mathrm{Ind}_{\gamma_r}(z) = 1$ para cada $z \in D_r(\zeta)$, podemos aplicar o Teor. 5.8 ao aberto convexo $W = D_d(\zeta)$ e à CSDF γ_r obtendo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(\lambda)d\lambda}{\lambda - z} \quad \forall z \in D_r(\zeta).$$



Pela definição de integral curvilinha, a relação acima pode ser escrita da forma seguinte:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} \frac{f\left[\gamma_r(t)\right]\gamma_r'(t)dt}{\gamma_r(t) - z}, \forall z \in D_r(\zeta).$$

Pelo Teor. 4.3 resulta então $f \in \mathcal{A}(D_r(\zeta))$ e

$$(5.9.1) \quad \left| \begin{aligned} f(z) &= \sum_{m \geq 0} \left\{ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} \frac{f\left[\gamma_r(t)\right]\gamma_r'(t)dt}{\left[\gamma_r(t) - \zeta\right]^{m+1}} \right\} (z-\zeta)^m = \\ &= \sum_{m \geq 0} \left\{ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\gamma)d\gamma}{(\lambda - \zeta)^{m+1}} \right\} (z-\zeta)^m \end{aligned} \right.$$

para cada $z \in D_r(\zeta)$, sempre que $r \in]0, d[$. Só resta verificar o caso $r = d$. Pondo

$$c_m(r) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\lambda)d\lambda}{(\lambda - \zeta)^{m+1}} \qquad , \qquad r \in]0, d[$$

é imediato verificar que $c_m(r)$ independe de r pois escrevendo (5.9.1) para dois valores $r, r' \in]0, d[$, se por exemplo $0 < r \leq r' < d$, resulta

$$f(z) = \sum c_m(r)(z-\zeta)^m = \sum c_m(r')(z-\zeta)^m \quad \forall \quad z \in D_r(\zeta)$$

donde

$$\sum \left[c_m(r) - c_m(r\prime)\right](z-\zeta)^m = 0 \quad \forall \quad z \in D_r(\zeta) \qquad (r \leq r')$$

o que pelo exerc. 3.5 implica $c_m(r) = c_m(r')$ sempre que $r, r' \in]0, d[$. Vamos indicar por c_m este valor independente de r, isto é:

$$c_m = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\lambda)d\lambda}{(\lambda - \zeta)^{m+1}} \qquad \forall \quad r \in]0, d[$$

então (5.9.1) se escreve:

$$f(z) = \sum c_m(z-\zeta)^m \qquad \forall \quad z \in D_r(\zeta)$$

sempre que $r < d$. Resulta então (ver Obs. [2] , logo após a Def. 4.1 que o raio de convergência ρ da série acima é $\geq r$, para cada $r < d$, donde $\rho \geq d$, portanto

$$f(z) = \sum c_m(z-\zeta)^m \quad \forall \quad z \in D_d(\zeta),$$

o que prova que $f \in \mathcal{A}(\Omega)$. $\square$

Corolário 5.10 *Sejam Ω um aberto não vazio, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $\overline{D}_r(\zeta) \subset \Omega$. Se $\gamma : t \in [0, 2\pi] \longmapsto \zeta + re^{it} \in \mathbb{C}$ é o círculo orientado positivamente* de centro ζ *e raio r, então*

$$(5.10.1) \qquad f^{(m)}(\zeta) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\lambda) d\lambda}{(\lambda - \zeta)^{m+1}} = \frac{m!}{2\pi i} \int_{|\lambda - \zeta| = r} \frac{f(\lambda) d\lambda}{(\lambda - \zeta)^{m+1}} \quad \forall \ m \in \mathbb{N}$$

Prova Usar (5.9.1) e o Corol. 4.9. $\square$

Corolário 5.11 (Desigualdades de Cauchy) *Sejam Ω um aberto não vazio de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $\overline{D}_r(\zeta) \subset \Omega$. Então,*

$$\left| f^{(m)}(\zeta) \right| \leq \frac{m!}{r^m} \sup_{|z - \zeta| = r} |f(z)|, \ \textit{para cada } m \in \mathbb{N}.$$

Prova As hipóteses sendo as mesmas do Corol. 5.10, podemos usar (5.10.1), que junto com a desigualdade (5.1.6) prova o resultado. $\square$

Corolário 5.12 (teorema de Liouiville) *Se $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ e é limitada* (isto é, existe $M > 0$ tal que $\|f\|_{\mathbb{C}} \leq M$), *então f* é constante.

Prova Pelo Corol. 4.11 podemos escrever

$$(5.12.1) \qquad f(z) = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} f^{(m)}(0) z^m, \ \text{ para cada } z \in \mathbb{C}.$$

Mostremos que $f^{(m)}(0) = 0$ para cada $m \geq 1$. De fato, pelo Corol. 5.11 temos:

$$(5.12.2) \qquad \left| f^{(m)}(0) \right| \leq \frac{m!}{r^m} \sup_{|z| = r} |f(z)|, \quad \forall \ m \geq 1 \ , \ \forall \ r > 0$$

Por outro lado a hipótese de limitação sobre f acarreta

$$\sup_{|z|=r} |f(z)| \leq \|f\|_{\mathbb{C}} \leq M \qquad , \quad \forall \quad r > 0$$

logo de (5.12.2) resulta

$$\left| f^{(m)}(0) \right| \leq \frac{m!}{r^m} M \ , \ \forall \ m \geq 1 \ , \ \forall \ r > 0$$

e em consequência, para cada $m \geq 1$ *fixado* resulta

$$\left| f^{(m)}(0) \right| \leq \lim_{r \to +\infty} \left(\frac{m! M}{r^m} \right) = M m! \lim_{r \to +\infty} \frac{1}{r^m} = 0 \ , \ \text{ pois } \ m \geq 1.$$

Desta forma, de (5.12.1) resulta $f(z) = f(0)$ para cada $z \in \mathbb{C}$. $\square$

Corolário 5.13 (teorema fundamental da álgebra) *Todo polinômio com coeficientes complexos de grau $m \geq 1$, possui pelo menos uma raiz.*

Prova Seja $f(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k\, z^k$ o polinômio, então $a_m \neq 0$. Suponhamos por absurdo que f não possui nenhuma rais, isto é, $f(z) \neq 0 \;\; \forall \;\; z \in \mathbb{C}$. Resulta então que a função

$$g : z \in \mathbb{C} \longmapsto \frac{1}{f(z)} \in \mathbb{C}$$

é holomorfa em $\mathbb{C}$ (Exemplo 3, Cap 1). Como $a_m \neq 0$, é evidente que existe $\rho > 0$ tal que

$$\frac{|a_{m-1}|}{|z|} + \cdots\cdots + \frac{|a_0|}{|z|^m} < \frac{|a_m|}{2} \quad , \quad \text{se } |z| > \rho$$

portanto:

$$|f(z)| = |a_m z^m + \cdots + a_0| = |z|^m \cdot \left| a_m + \frac{a_{m-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^m} \right| \geq$$

$$\geq |z|^m \left| |a_m| - \left| \frac{a_{m-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^m} \right| \right| \geq |z|^m \cdot \left| |a_m| - \left(\frac{|a_{m-1}|}{|z|} + \cdots + \frac{|a_0|}{|z|^m} \right) \right| >$$

$$> |z|^m \cdot (|a_m| - \frac{|a_m|}{2}) = \frac{|a_m|\,|z|^m}{2} \quad , \text{ sempre que } |z| > \rho.$$

Seja $r = \max(\rho, \sqrt[m]{\frac{2}{|a_m|}})$, então o cálculo anterior mostra que

$$|f(z)| > 1 \;\; , \;\; \text{para cada } z \in \mathbb{C} \backslash \overline{D}_r(0)$$

e em consequência

(5.13.1) $$|g(z)| < 1 \;\; , \;\; \text{para cada } z \in \mathbb{C} \backslash \overline{D}_r(0)$$

Por outro lado, como $\overline{D}_r(0)$ é compacto e $|g|$ é contínua em $\overline{D}_r(0)$, é claro que $|g|$ é limitada em $\overline{D}_r(0)$, isto é, existe $L > 0$ tal que

(5.13.2) $$|g(z)| \leq L \;\; \text{para cada } z \in \overline{D}_r(0)$$

De (5.13.1) e (5.13.2) resulta

$$|g(z)| \leq M = \max(1, L) \text{ , para cada } z \in \mathbb{C}$$

isto é, g é limitada, logo, pelo Corol. 5.12 resulta que g é constante o que acarreta que f é constante o que é absurdo pois sendo $\partial f = m \geq 1$, f não pode ser constante pelo princípio de identidade de polinômios. $\square$

A próxima propriedade importante das funções analíticas que vamos ver é o princípio do módulo máximo e a parte essencial da prova está contida no seguinte:

Lema 5.14 *Sejam* $\zeta \in \mathbb{C}$, $\rho > 0$ *e* $f \in \mathcal{H}(D_\rho(\zeta))$. *Se*

(5.14.1) $$|f(z)| \leq |f(\zeta)| \quad \textit{para cada } z \in D_\rho(\zeta),$$

então $f(z) = f(\zeta)$ *para cada* $z \in D_\rho(\zeta)$.

Prova O resultado é trivial se $f(\zeta) = 0$ portanto podemos supor que $f(\zeta) \neq 0$. Pela fórmula de representação integral (Teor. 5.8) e pela Prop. 5.3, para cada $r \in]0, \rho[$ temos:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\zeta|=r} \frac{f(\lambda)d\lambda}{\lambda - \zeta} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta + re^{it})dt$$

e como $f(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)dt$, podemos escrever

$$0 = f(\zeta) - f(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[f(\zeta) - f(\zeta + re^{it})\right] dt, \ \forall \ r \in]0, \rho[$$

e sendo $f(\zeta) \neq 0$, resulta

(5.14.2) $$\int_0^{2\pi} \left[1 - \frac{f(\zeta + re^{it})}{f(\zeta)}\right] dt = 0 \quad , \ \forall \ r \in]0, \rho[$$

e em particular, a parte real desta integral é nula, isto é,

(5.14.3) $$\int_0^{2\pi} \left[1 - \mathrm{Re}(\frac{f(\zeta + re^{it})}{f(\zeta)})\right] dt = 0 \quad , \ \forall \ r \in [0, \rho] \quad .$$

Para cada $r \in]0, \rho[$ e para cada $t \in [0, 2\pi]$, a hipótese (5.14.1) implica

$$\mathrm{Re}(\frac{f(\zeta + re^{it})}{f(\zeta)}) \leq \left|\mathrm{Re}(\frac{f(\zeta + re^{it})}{f(\zeta)})\right| \leq \left|\frac{f(\zeta + re^{it})}{f(\zeta)}\right| \leq 1$$

donde

$$1 - \mathrm{Re}(\frac{f(\zeta + re^{it})}{f(\zeta)}) \geq 0 \qquad \forall \quad r \in]0, \rho[\ , \ \forall \ t \in [0, 2\pi]$$

o que junto a (5.14.3) implica

$$\mathrm{Re}(\frac{f(\zeta + re^{it})}{f(\zeta)}) = 1 \quad \forall \quad r \in]0, \rho[\ , \ \forall \ t \in [0, 2\pi]$$

ou seja

(5.14.4) $$\mathrm{Re}(\frac{f(z)}{f(\zeta)}) = 1 \qquad \forall \ z \in D_\rho(\zeta).$$

Seja $g : D_\rho(\zeta) \to \mathbb{C}$ a função definida por

$$g(z) := \frac{f(z)}{f(\zeta)} \quad \text{para cada} \;\; z \in D_\rho(\zeta)$$
então é claro que $g \in \mathcal{H}(D_\rho(\zeta))$ e como $D_\rho(\zeta)$ é um aberto conexo, a relação (5.14.4) e a Prop. 2.6 implicam que g é constante em $D_\rho(\zeta)$. Mas a definição de g mostra que $g(\zeta) = 1$, em consequência
$$g(z) = \frac{f(z)}{f(\zeta)} = 1 \qquad \text{para cada} \;\; z \in D_\rho(\zeta)$$
o que demonstra o resultado. $\square$

Teorema 5.15 (Princípio do módulo máximo) *Sejam Ω um aberto limitado e $f \in \mathcal{H}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Então, o máximo de $|f|$ em $\overline{\Omega}$ é atingido em $\partial\Omega$.*

Prova Como Ω é limitado, $\overline{\Omega}$ é compacto e, sendo $|f|$ contínua em $\overline{\Omega}$, esta função tem um máximo, isto é, existe $\zeta \in \overline{\Omega}$ tal que

$$\text{(5.15.1)} \qquad \max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| = |f(\zeta)|\,.$$

Se $\zeta \in \partial\Omega$ não há o que demonstrar de modo que podemos supor que $\zeta \in \Omega$ e neste caso vamos provar que existe $\xi \in \partial\Omega$ tal que $|f(\xi)| = |f(\zeta)|$. Como $\zeta \in \Omega$, existe $\rho > 0$ tal que $D_\rho(\zeta) \subset \Omega$ e então por (5.15.1) e pelo Lema 5.14 resulta
$$f(z) = f(\zeta), \qquad \forall \quad z \in D_\rho(\zeta)$$
o que mostra que f é constante sobre $D_\rho(\zeta)$, logo pelo Teor. 4.12, f é constante sobre a componente conexa Ω_0 de Ω que contem ζ. Como $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ e portanto $f|\overline{\Omega}_0 \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}_0)$ resulta que f é constante sobre $\overline{\Omega}_0$. Como $\varnothing \neq \partial\Omega_0 \subset \overline{\Omega}_0$, existe $\xi \in \partial\Omega_0$ e então $f(\zeta) = f(\xi)$, portanto de (5.15.1) segue
$$\max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| = |f(\xi)|$$
o que prova o resultado pois $\xi \in \partial\Omega_0 \subset \partial\Omega$. $\square$

O corolário seguinte é apenas uma reformulação do Teor. 5.15 que chama a atenção para o fato seguinte: na totalidade dos casos interessantes o máximo nunca é atingido no interior do aberto:

Corolário 5.16 *Sejam Ω um aberto limitado de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ e suponhamos que f não é constante em nenhuma componente conexa de Ω. Então,*
$$|f(z)| < \|f\|_{\overline{\Omega}} = \|f\|_{\partial\Omega} \qquad \forall \quad z \in \Omega. \;\; \square$$

O resultado seguinte é a recíproca do Lema 5.6.

Teorema 5.17 (teorema de Morera) *Sejam Ω um aberto não vazio de $\mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{C}(\Omega; \mathbb{C})$ tal que*

(5.17.1) $\displaystyle\int\limits_{\partial\Delta} f(z)dz = 0, \quad \forall$ *triângulo fechado* $\Delta \subset \Omega$.

Então $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Prova Sejam W um aberto convexo contido em Ω, $a \in W$ e consideremos a função análoga à do Teor. 5.7:

$$F : z \in W \longmapsto \int\limits_{[a,z]} f(\zeta)d\zeta \in \mathbb{C}$$

Da mesma forma que no Teor. 5.7, usando a hipótese (5.17.1) (em vez da holomorfia de f em $\Omega\setminus\{p\}$) resulta que

$$F' = f|W.$$

Ora, a existência de F' em W significa que

$$F \in \mathcal{H}(W) = \mathcal{A}(W),$$

portanto, pelo Teor. 4.6, obtemos $F' = f|W \in \mathcal{A}(W) = \mathcal{H}(W)$. Desta forma provamos que $f|W \in \mathcal{H}(W)$ para cada aberto convexo $W \subset \Omega$,

o que implica (ver Ex. (1.1)) $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. $\square$

Definição 5.18 Sejam Ω um aberto não vazio de $\mathbb{C}$ e $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções definidas em Ω a valores em $\mathbb{K}$. Diz-se que *a sequência* $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente sobre os compactos de* Ω *para uma função* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ se, para cada compacto $K \subset \Omega$ e para cada $\varepsilon > 0$ existe $\nu = \nu(K, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$m \geq \nu \implies \|f_m - f\|_K \leq \varepsilon$$

(ou equivalentemente, se para cada compacto $K \subset \Omega$ temos

$$f_m|K \rightrightarrows f|K, \text{ ver Def. 3.2. (b)}).$$

Teorema 5.19 (Weierstrass) *Sejam* Ω *um aberto não vazio de* $\mathbb{C}$ *e* $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *uma sequência em* $\mathcal{H}(\Omega)$. *Suponhamos que* $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente sobre os compactos de* Ω *para uma função* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$.*Então* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *e* $(f'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente sobre os compactosde* Ω *para* f'.

Prova Pelo exerc. (5.16) é claro que $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, em consequência, para provar que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, pelo Teor. 5.17, será suficiente verificar que

(5.19.1) $\displaystyle\int\limits_{\partial\Delta} f = 0 \quad \forall$ triângulo fechado $\Delta \subset \Omega$.

Fixado um triângulo fechado $\Delta \subset \Omega$, arbitrário, comecemos por provar que

(5.19.2) $$\lim_{m\to\infty} \int_{\partial\Delta} f_m = \int_{\partial\Delta} f.$$

De fato, é claro que para cada $m \in \mathbb{N}$ temos (ver (5.1.6)),

(5.19.3) $$\left| \int_{\partial\Delta} - \int_{\partial\Delta} f_m \right| = \left| \int_{\partial\Delta} (f - f_m) \right| \leq |\partial\Delta| \cdot \|f - f_m\|_{\partial\Delta^*}$$

Como $\partial\Delta^*$ é compacto, a hipótese de convergência sobre (f_m) implica que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que
$$m \geq \nu \Longrightarrow \|f - f_m\|_{\partial\Delta^*} \leq \varepsilon\, |\partial\Delta|^{-1}$$
o que junto a (5.19.3) prova (5.19.2). Pelo Lema 5.6 temos
$$\int_{\partial\Delta} f_m = 0 \qquad \forall \quad m \in \mathbb{N}$$
e então, de (5.19.2) resulta (5.19.1) e portanto
$$f \in \mathcal{H}(\Omega).$$
Seja K um compacto de Ω e mostremos que $f'_m|K \rightrightarrows f'|K$. Fixemos $\varepsilon > 0$ arbitrário. É claro que existe $r > 0$ tal que o conjunto
$$L = \bigcup_{\zeta\in K} \overline{D}_r(\zeta)$$
é compacto e está contido em Ω. Aplicando o Corol. 5.11 (desigualdades de Cauchy) à função $f - f_m$ obtemos:
$$|f'(\zeta) - f'_m(\zeta)| \leq \frac{1}{r} \sup_{|z-\zeta|=r} |f(z) - f_m(z)| \qquad \forall \quad \zeta \in K$$
donde

$$\|f' - f'_m\|_K \leq \sup_{\zeta\in K}\Big(\frac{1}{r} \sup_{|z-\zeta|=r} |f(z) - f_m(z)|\Big) = \frac{1}{r} \sup_{\substack{|z-\zeta|=r \\ \zeta\in K}} |f(z) - f_m(z)| \leq$$
$$\frac{1}{r} \sup_{\substack{|z-\zeta|\leq r \\ \zeta\in K}} |f(z) - f^m(z)| = \frac{1}{r}\, \|f - f_m\|_L \quad \text{, isto é}$$

(5.19.4) $$\|f' - f'_m\|_K \leq \frac{1}{r}\, \|f - f_m\|_L$$

Como L é um compacto de Ω, a hipótese de convergência sobre (f_m) acarreta que existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $\|f - f_m\|_L \leq r\varepsilon$ sempre que $m \geq \nu$, logo de (5.19.4) resulta:
$$m \geq \nu \Longrightarrow \|f' - f'_m\|_K \leq \varepsilon. \quad \square$$

Corolário 5.20 *Nas hipóteses do Teor. 5.19 temos* $f_m^{(k)}|K \rightrightarrows f^{(k)}|K$ *se* $m \to \infty$*, para cada compacto* $K \subset \Omega$ *e para cada* $k \geq 1$. $\square$

Exercícios

(**5.1**) Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ uma *CSD*. Prove que a função

$$\varphi : f \in \mathcal{C}(\gamma^*, \mathbb{C}) \longmapsto \int_\gamma f \in \mathbb{C}$$

é uma forma linear contínua sobre o espaço vetorial $\mathcal{C}(\gamma^*, \mathbb{C})$ normado pela norma "sup".

(**5.2**) Calcular $\displaystyle\int_\gamma f$ nos casos seguintes:

(a) $f(z) = 1 + z$, $\gamma : t \in [0, \pi] \longmapsto i + 2e^{it} \in \mathbb{C}$
(b) $f(z) = 1/z \quad \forall \ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\gamma : t \in [0, 2\pi] \longmapsto e^{it} \in \mathbb{C}$
(c) $f(z) = 1/z \quad \forall \ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\gamma : t \in [0, 2\pi] \longmapsto 2 + e^{it} \in \mathbb{C}$
(d) $f(z) = \mathrm{Re}(z)$, $\gamma : t \in [0, 1] \longmapsto (1 + i)t \in \mathbb{C}$
(e) $f(z) = \dfrac{1}{1 + z^2}$, $\forall \ z \in \mathbb{C}$, $z \neq \pm i$, $\gamma : t \in [0, 2\pi] \longmapsto \frac{3}{2}e^{it} \in \mathbb{C}$

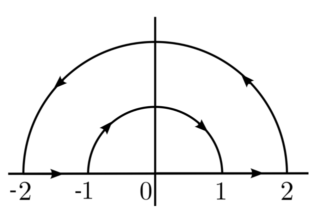
(**5.3**) Prove as asserções seguintes:
(a) A curva oposta a uma *CSD é* uma *CSD;*
(b) A justaposição (quando está definida) de duas curvas *CSD* é uma *CSD;*
(c) Se $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ então $\mathring{\gamma} = \mathring{\gamma}_2 \vee \mathring{\gamma}_1$.

(**5.4**)(a) Calcular as integrais seguintes:

$$\int_{|z|=r} \mathrm{Re}(z)dz \quad , \quad \int_{|z|=r} \mathrm{Im}(z)dz \quad , \quad \int_{|z|=r} \overline{z}dz.$$

(b) Calcular $\displaystyle\int_\gamma |z|\, dz$ sendo: (1^o) $\gamma = [0, 2 + i]$;
(2^o) $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$; (3^o) $\gamma(t) = e^{it}$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$.

(c) Calcular $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{\overline{z}}dz$ sendo γ a *CSDF tal que* γ^* é dada pela figura seguinte:



(**5.5**) Calcular $\displaystyle\int_{|z-a|=r} (z - a)^m dz$, $m \in \mathbb{N}^*$, $a \in$ e $r > 0$.

No exercício seguinte introduzimos o conceito de componente conexa de uma parte aberta de $\Omega \subset \mathbb{C}$ que é fundamental para a compreensão do que segue (este conceito já foi usado no Teorema 5.2).

(**5.6**) (*a*) Provar que se $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma família de abertos conexos não vazios de $\mathbb{C}$ tal que I:= $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}\Omega_\lambda \neq \varnothing$ então $\Omega := \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}\Omega_\lambda$ é um aberto conexo. (*Sugestão:* dados $z_1, z_2 \in \Omega$ arbitrários, mostrar que z_1 e z_2 podem ser unidos por um caminho em Ω passando por um ponto $\zeta \in$ I);
(*b*) Seja Ω um aberto não vazio de $\mathbb{C}$ e para cada $z \in \Omega$ seja $C(z)$ a reunião de todos os abertos conexos V tais que $z \in V \subset \Omega$. Provar que o conjunto $C(z)$ é o maior aberto conexo contido em Ω que contém z (este conjunto $C(z)$ é chamado *componente conexa de z em* Ω);
(*c*) Prove que se $z_1, z_2 \in \Omega$ então $C(z_1) = C(z_2)$ ou $C(z_1) \cap C(z_2) = \varnothing$; deduzir que a relação $\sim$ sobre Ω definida por $z_1 \sim z_2 \iff C(z_1) = C(z_2)$ é uma relação de equivalência;
(*d*) Prove que todo aberto não vazio Ω se escreve de forma única como reunião de uma família $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de abertos conexos não vazios dois a dois disjuntos (*Sugestão:* tomar como família $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ a família das classes de equivalência de(c)). Neste caso a família $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é dita *a família das componentes conexas de* Ω e dizemos que Ω_λ é uma *componente conexa de* Ω para cada $\lambda \in \Lambda$;
(*e*) Se $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é a família das componentes conexas de um aberto não vazio $\Omega \subset \mathbb{C}$, prove que Λ é no máximo enumerável (*Sugestão*: usar o exerc. 4.11 (a)). Mostre com exemplos que para cada $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ existe um aberto com exatamente m componentes conexas;
(*f*) Se W é uma parte aberta conexa não vazia de um aberto Ω de $\mathbb{C}$, então W está contido numa componente conexa de Ω.

(**5.7**) Seja $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \neq 1$. Calcule I= $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2\alpha\cos t + \alpha^2}$ integrando a função $\displaystyle\frac{1}{(z-\alpha)(z-\alpha^{-1})}$ sobre o círculo unitário.

(**5.8**) Calcular $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}dz$.

(**5.9**) Seja $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ e suponhamos que $f(z) = \displaystyle\int_{|\lambda|=1} \frac{\lambda^2 e^\lambda}{\lambda - z}d\lambda$, para cada $z \in D_1(0)$. Calcular $f(1)$.

(**5.10**) Seja $\sum c_m(z-\zeta)^m$ uma série de potências em volta de ξ de raio de convergência $\rho > 0$ e $f : z \in D_\rho(\zeta) \longmapsto \sum c_m(z-\zeta)^m \in \mathbb{C}$. Seja $\xi \in D_\rho(\zeta)$

e $r = |\xi - \zeta|$:
(a) Prove que $f \in \mathcal{A}(D_\rho(\zeta))$ [*Sugestão:* usar Corol. 4.7 e Teor. 5.9];
(b) Prove que $\forall\ k \in \mathbb{N}$ temos $f^{(k)}(z) = \sum_{m \geq k} \frac{f^{(m)}(\zeta)}{(m-k)!}(z-\zeta)^{m-k}$
$\forall\ z \in D_\rho(\zeta)$ [*Sugestão:* Corol. 4.8];
(c) Prove que $f(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \left[\sum_{m \geq k} \frac{f^{(m)}(\zeta)}{(m-k)!}(\xi-\zeta)^{m-k} \right] (z-\xi)^k$,
$\forall\ z \in D_{\rho-r}(\xi)$.

(**5.11**) Sejam $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ e suponhamos que existem três constantes reais positivas A, B e α tais que
$(*)$ $$|f(z)| \leq A + B\,|z|^\alpha \quad \forall\ z \in \mathbb{C}$$
Provar que f é um polinômio e que $\partial f \leq [[\alpha]]$ (*Sugestão*: Pelo Corol. 4.11 temos $f(z) = \sum (m!)^{-1} f^{(m)}(0) z^m \quad \forall\ z \in \mathbb{C}$, então basta provar que $f^{(n)}(0) = 0$ sempre que $n > m = [[\alpha]]$, o que se faz usando $(*)$ e as desigualdades de Cauchy).

(**5.12**) Sejam f e g duas funções inteiras tais que $|f(z)| \leq |g(z)| \quad \forall\ z \in \mathbb{C}$
(a) Prove que se $g(z) \neq 0$ para cada $z \in \mathbb{C}$, então existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $f = cg$.
(b) Deduzir que para cada polinômio $p \in \mathbb{C}[Z]$, existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que

$|p(\alpha)| > |e^\alpha|$;
(c) Tente provar a asserção (a) sem nenhuma hipótese sobre os zeros de g.

(**5.13**) Sejam Ω um aberto de $\mathbb{C}$ tal que $\overline{D}_1(0) \subset \Omega$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e suponhamos que (1^o) $f(0) = 1$; (2^o) $|f(z)| > 2$ sempre que $|z| = 1$. Pode f ter zeros em $D_1(0)$?

(**5.14**) Sejam Ω um aberto não vazio de $\mathbb{C}$ e $g \in \mathcal{C}(\Omega; \mathbb{K})$. Diz-se que g tem a *propriedade da média em* Ω se para cada $\overline{D}_r(a) \subset \Omega$ tivermos
$$g(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(a + re^{it})dt$$

(a) Verifique que toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tem a propriedade da média em Ω;
(b) Se $g \in \mathcal{C}(\Omega; \mathbb{C})$ então g possui a propriedade da média em Ω se e só se $\mathrm{Re}(g)$ e $\mathrm{Im}(g)$ têm propriedade da média em Ω;
(c) Sejam $\zeta \in \mathbb{C}$, $\rho > 0$ e $f \in \mathcal{C}(D_\rho(\zeta); \mathbb{K})$ tal que (1^o) f possui a propriedade da média em $D_\rho(\zeta)$; (2^o) $|f(z)| \leq |f(\zeta)|$ para cada $z \in D_\rho(\zeta)$. Provar que f é constante em $D_\rho(\zeta)$ [*Sugestão*: adaptar a prova do Lema 5.14; no caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ observar que é o mesmo raciocínio usado para provar (5.14.3),mas trabalhando com a parte imaginária em

vez da parte real, implica $\text{Im}(\dfrac{f(z)}{f(\zeta)}) = 0$ em $D_\rho(\zeta)$**]** **(***Observação*: é possível provar que $g \in \mathcal{C}(\Omega;\mathbb{K})$ tem a propriedade da média em Ω se e só se $g \in Har(\Omega;\mathbb{K})$; ver por exemplo [C], "Fonctions Analytiques d'une ou plusieurs variables complexas "Ch. IV, §3 e §4.)

(**5.15**) Seja $g_m : D_1(0) \to \mathbb{C}$ a função definida por $g_m(z) = z^m$, $m \in \mathbb{N}$. Prove que a sequência (g_m) converge uniformemente sobre os compactos $D_1(0)$ para a função nula sobre $D_1(0)$, porém (g_m) não converge uniformemente para a função nula em $D_1(0)$.

(**5.16**) Sejam Ω um aberto não vazio e $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{C}(\Omega;\mathbb{K})$ tal que (f_m) converge uniformemente sobre os compactos de Ω para uma função $f : \Omega \to \mathbb{K}$.
Prove que $f \in \mathcal{C}(\Omega;\mathbb{K})$ **[***Sugestão*: A desigualdade evidente

$$|f(z) - f(\zeta)| \leq |f(z) - f_m(z)| + |f_m(z) - f_m(\zeta)| + |f_m(\zeta) - f(\zeta)|,$$

vale para todo $z, \zeta \in \Omega$ e todo $m \in \mathbb{N}$; usar a convergência uniforme de (f_m) para majorar a 1^a e a 3^a parcela e fixar m, com este valor fixo de m majorar a 2^a parcela.**]**

(**5.17**) Sejam $\Omega := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| \dfrac{z}{z+1} \right| < 1 \right\}$ e seja

$$f : z \in \Omega \longmapsto \sum_{m\geq 0} (\frac{z}{z+1})^m \in \mathbb{C}$$

Prove que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ **[***Sugestão:* ver Exemplo que segue a Prop. 3.5**]**

(**5.18**) Existe ou não uma sequência de polinômios que converge uniformemente em $D_1(0)$ para $f(z) = \overline{z}$. Justifique sua resposta.

(**5.19**) Calcular as seguintes integrais:

(*a*) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{1 + senz}{z} dz$ (aplicar o Teor. 5.8 à função $f(z) := 1 + senz \ \ \forall\ z \in \mathbb{C}$)

(*b*) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z} dz$ (mesma coisa que (*a*))

(*c*) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{senz}{z} dz$ (mesma coisa que (*a*))

(*d*) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^{iz}}{z^2} dz$ (aplicar o Corol. 5.10 à função

$$f(z) := e^{iz} \quad \forall \;\; z \in \mathbb{C})$$

(e) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z - e^{-z}}{z^m} dz$ (aplicar o Corol. 5.10 a $f^{(m-1)}(0)$ sendo

$$f(z) := e^z - e^{-z} \quad \forall \;\; z \in \mathbb{C})$$

(**5.20**) Seja Ω um aberto conexo contendo $\overline{D}_2(0)$ e seja $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que

$$f(z) = \int\limits_{|\lambda|=1} \frac{\lambda^3 \cos \lambda d\lambda}{\lambda - z} d\lambda \qquad \text{para cada } z \in D_1(0).$$

Calcular $f(2i)$.

(**5.21**) Sejam r um número real positivo, e para cada $m \in \mathbb{N}$ seja $\gamma_m : t \in [0, 2\pi] \longmapsto r_m e^{it} \in \mathbb{C}$ o círculo orientado positivamente de centro 0 e raio r_m, onde $r_0 := r$ e $r_m := (1 - 1/m)r$ se $m \geq 1$

(a) Prove que se $f \in \mathcal{C}(\overline{D_r}(0))$ então

$$\int\limits_{\gamma} f(z) dz = \lim_{m \to \infty} \int\limits_{\gamma_m} f(z) dz$$

(b) Deduzir que se $f \in \mathcal{C}(\overline{D}_r(0)) \cap \mathcal{H}(D_r(0))$ então

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} \frac{f(\lambda) d\lambda}{\lambda - z}, \quad \text{sempre } |z| < r.$$

(**5.22**) Sejam $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ e $a \in \mathbb{C}$.

(a) Prove que as derivadas sucessivas de f no ponto a não podem satisfazer desigualdades do tipo:

$$\left| f^{(m)}(a) \right| > m! m^m \qquad \forall \;\; m \in \mathbb{N}$$

(b) Formular um resultado do tipo (a) que seja melhor que (a). **[***Sugestão*: para (a) e (b) : Usar o Corol. 5.11**].**

(**5.23**) (Ver comentário que segue o enunciado do Lema 5.6) Seja Ω um aberto não vazio de $\mathbb{C}$, seja $p \in \Omega$ e seja $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ tal que $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{p\})$. Prove que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. [*Sugestão*: Usar o Lema 5.6 e o Teor. 5.17].

(5.24) Se $f = u + iv \in \mathcal{H}(\Omega)$, onde $u = \mathrm{Re}(f)$ e $v = \mathrm{Im}(f)$, então $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$ (isto é, f é infinitamente $\mathbb{R}$-diferenciável em Ω)

[Sugestão: Comecemos lembrando as expressões de f' em função das derivadas parciais de u e v (ver Obs. logo após o fim da prova do Teor. 2.3)

(1) $$f' = u_x + iv_x = v_y - iu_y = u_x - iu_y = v_y + iv_x$$

De $f \in \mathcal{H}(\Omega) = \mathcal{A}(\Omega)$ segue $f' \in \mathcal{A}(\Omega) \subset \mathcal{C}(\Omega)$ portanto por (1) resulta que u_x, v_x, u_y e v_y são contínuas em Ω logo

$$(1') \qquad f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$$

Observe a seguir que $f'' \in \mathcal{A}(\Omega)$ e se aplicar (1) ao cálculo de f'' obtem-se

$$(2) \qquad f'' = \begin{cases} v_{xy} - iu_{xy} = -u_{yy} - iv_{yy} = \\ u_{xx} + iv_{xx} = v_{yx} - iu_{yx} \ . \end{cases}$$

De novo, $f'' \in \mathcal{A}(\Omega) \subset \mathcal{C}(\Omega)$ logo (2) mostra que todas as derivadas de 2ª ordem u e v são contínuas em Ω, isto é,

$$(2') \qquad f \in \mathcal{C}^2(\Omega).$$

A obtenção acima de $(1')$ e $(2')$ sugerem o próximo passo que consiste em provar o seguinte:

Lema Sejam $m \in \mathbb{N}^*$ e $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $\alpha + \beta = m$. Então

$$(3) \qquad f^{(m)} = \begin{cases} \pm \dfrac{\partial^m u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} \pm' i \dfrac{\partial^m v}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = \\ \\ \pm \dfrac{\partial^m v}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} \pm' i \dfrac{\partial^m u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} \end{cases}$$

onde a notação $\pm'$ significa que $\pm$ e $\pm'$são independentes.

Prova do lema Proceda por indução sobre m.

Afirmação: $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Dados $m \in \mathbb{N}^*$ arbitrário e $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $\alpha + \beta = m$, $\dfrac{\partial^m u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}$ e $\dfrac{\partial^m v}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}$ são contínuas. De fato, $f^{(m)} \in \mathcal{A}(\Omega) \subset \mathcal{C}(\Omega)$, então $f^{(m)}$ se escreve em algumas das 8 formas (3) e então a continuidade das derivadas parciais acima segue da continuidade de $f^{(m)}$.]

Capítulo 6

O TEOREMA DA APLICAÇÃO ABERTA. INVERSÃO DE FUNÇÕES ANALÍTICAS: O PROBLEMA GLOBAL. A FUNÇÃO LOGARITMO.

Lema 6.1 *Sejam* Ω um aberto não vazio de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *e* $g : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ *a função definida por*

$$g(z,w) := \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(w)}{z - w} \quad , \text{ se } \ z \neq w \\ \\ f'(z) \quad , \quad \text{se } \ z = w \end{cases}$$

Então $g \in \mathcal{C}(\Omega \times \Omega)$.

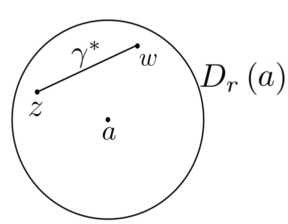
Prova Os únicos pontos nos quais a continuidade de g não é evidente são aqueles do tipo (z, z).Fixemos $a \in \Omega$ e $\varepsilon > 0$. Como f' é continua em Ω, existe $r > 0$ tal que

(6.1.1) $\quad z \in D_r(a) \implies |f'(z) - f'(a)| < \varepsilon$

Bastará provar então

(6.1.2) $\quad (z, w) \in D_r(a) \times D_r(a) \implies |g(z, w) - g(a, a)| < \varepsilon.$

Seja $(z, w) \in D_r(a) \times D_r(a)$ arbitrário tal que $z \neq w$ e consideremos o intervalo orientado de origem z e extremo w,
$\gamma : t \in [0, 1] \longmapsto (1 - t)z + tw \in \mathbb{C}.$
Como $D_r(a)$ é convexo, é claro que



(6.1.3) $\quad \gamma(t) \in D_r(a)$ para cada $t \in [0, 1]$

Vamos calcular $\displaystyle\int_\gamma f'$ de duas formas (na primeira usamos que $\gamma'(t) = w - z \ \forall \ t \in [0,1]$ e na segunda, o teorema fundamental do cálculo):

$$\int_{\gamma} f'(z)dz = \int_0^1 f'[\gamma(t)]\,\gamma'(t)dt = \begin{cases} (w-z)\displaystyle\int_0^1 f'[\gamma(t)]\,dt \\ \\ f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(w) - f(z) \end{cases}$$

em consequência, se $(z,w) \in D_r(a) \times D_r(a)$ e $z \neq w$ temos

$$(w-z)\int_0^1 f'[\gamma(t)]\,dt = f(w) - f(z)$$

o que implica

$$g(z,w) = \frac{f(z) - f(w)}{z - w} = \int_0^1 f'[\gamma(t)]\,dt \quad \text{, se } (z,w) \in D_r(a) \times D_r(a) \text{ e } z \neq w$$

e como $g(a,a) = f'(a) = \displaystyle\int_0^1 f'(a)dt$, podemos escrever

$$g(z,w) - g(a,a) = \begin{cases} f'(z) - f'(a) \quad , \quad \text{se } z = w \in D_r(a) \\ \\ \displaystyle\int_0^1 \left[f'[\gamma(t)] - f'(a)\right] dt, \quad \text{se} \quad (z,w) \in D_r(a) \times D_r(a) \quad \text{e} \quad z \neq w \end{cases}$$

e então, para cada $(z,w) \in D_r(a) \times D_r(a)$ resulta

$$|g(z,w) - g(a,a)| = \begin{cases} |f'(z) - f'(a)| < \varepsilon \quad , \text{ por } (6.1.1) \\ \\ \left|\displaystyle\int_0^1 \left[f'(\gamma(t)) - f'(a)\right] dt\right| \leq \displaystyle\int_0^1 \left|f'[\gamma(t)] - f'(a)\right| dt < \varepsilon \quad , \\ \text{por } (6.1.1) \text{ e } (6.1.3) \ ; \end{cases}$$

o que demonstra (6.1.2). $\square$

Teorema 6.2 (Teorema da função inversa, caso local) *Sejam Ω um aberto não vazio de $\mathbb{C}$, $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ e suponhamos que $\varphi'(z_0) \neq 0$. Então existe $\rho > 0$ tal que $V := D_\rho(z_0) \subset \Omega$ de modo que*
(a) $\varphi|V$ *é injetora,*
(b) $W := \varphi(V)$ *é aberto*
(c) $\varphi^{-1} \in \mathcal{H}(W)$ *e* $\varphi^{-1\prime}(w) = \dfrac{1}{\varphi'[\varphi^{-1}(w)]} \quad \forall \ w \in W$.

Prova Consideremos a função g definida por

$$g(z,w) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(z)-\varphi(w)}{z-w} \quad , \quad \text{se } z \neq w \\ \\ \varphi'(z) \ , \ \text{se } z = w \end{cases}$$

então pelo Lema 6.1, g é contínua no ponto (z_0, z_0) e portanto para $\varepsilon := \dfrac{1}{2}\,|\varphi'(z_0)| > 0$, existe $\rho > 0$ tal que $V := D_\rho(z_0) \subset \Omega$ e

$$(6.2.1) \quad (z_1, z_2) \in V \times V \implies |g(z_1, z_2) - g(z_0, z_0)| \leq \frac{1}{2}\,|\varphi'(z_0)|.$$

Pela definição de g e pela 2^a propriedade triangular podemos escrever, para $z_1 \neq z_2$:

$$(6.2.2) \quad \left| \begin{array}{c} |g(z_1, z_2) - g(z_0, z_0)| = \left| \dfrac{\varphi(z_1)-\varphi(z_2)}{z_1 - z_2} - \varphi'(z_0) \right| \geq \\ |\varphi'(z_0)| - \left| \dfrac{\varphi(z_1)-\varphi(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \end{array} \right.$$

De (6.2.1) e (6.2.2) resulta então:

$$(6.2.3) \quad (z_1, z_2) \in V \times V \text{ e } z_1 \neq z_2 \implies |\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \geq \frac{1}{2}\,|\varphi'(z_0)|\,|z_1 - z_2|$$

o que prova a asserção (a). Mostremos que (6.2.3) implica

$$(6.2.4) \qquad \varphi'(\zeta) \neq 0 \quad , \quad \forall \ \ \zeta \in V$$

De fato, fixado $\zeta \in V$ arbitrário, por (6.2.3) temos

$$z \in V \text{ e } z \neq \zeta \implies |\varphi(z) - \varphi(\zeta)| \geq |\varphi'(z_0)|\,|z - \zeta|$$

donde

$$\left| \frac{\varphi(z)-\varphi(\zeta)}{z-\zeta} \right| \geq |\varphi'(z_0)|$$

portanto:

$$|\varphi'(\zeta)| = \lim_{z \to \zeta} \left| \frac{\varphi(z)-\varphi(\zeta)}{z-\zeta} \right| \geq \frac{1}{2}\,|\varphi'(z_0)| > 0$$

o que prova (6.2.4). Para verificar a asserção (b), fixemos $\zeta \in V$ arbitrário. Seja $r > 0$ tal que $\overline{D}_r(\zeta) \subset V$, então por (6.2.3) existe $\delta > 0$ tal que (basta tomar $0 < \delta < \dfrac{r}{4}\,|\varphi'(z_0)|$)

$$(6.2.5) \quad \left|\varphi(\zeta + re^{i\theta}) - \varphi(\zeta)\right| > 2\delta \quad , \quad \forall \ \ \theta \in [0, 2\pi] \ .$$

Como $\zeta \in V$ era arbitrário, basta demonstrar que

$$D_\delta(\varphi(\zeta)) \subset \varphi(V)$$

o que é equivalente a verificar:

$$\alpha \notin \varphi(V) \implies \alpha \notin D_\delta(\varphi(\zeta)) \,. \tag{6.2.6}$$

Seja $\alpha \notin \varphi(V)$. Então $h = \dfrac{1}{|\alpha - \varphi|V} \in \mathcal{H}(V)$. Por (6.2.5) e a propriedade triangular (somando e subtraindo α dentro de $|\cdot|$ de (6.2.5)):

$$2\delta < |\alpha - \varphi(\zeta)| + \left|\alpha - \varphi(\zeta + re^{i\theta})\right| \quad \forall \;\; \theta \in [0, 2\pi]$$

donde:

$$2\delta - |\alpha - \varphi(\zeta)| < \left|\alpha - \varphi(\zeta + re^{i\theta})\right| \quad \forall \;\; \theta \in [0, 2\pi]. \tag{6.2.7}$$

Apliquemos o princípio do máximo (Teor. 5.15) à função h e ao disco $\overline{D}_r(\zeta)$, então por (6.2.7) vem:

$$\frac{1}{|\alpha - \varphi(\zeta)|} = |h(\zeta)| \leq \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left|h(\zeta + re^{i\theta})\right| =$$

$$\sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \frac{1}{|\alpha - \varphi(\zeta + re^{i\theta})|} \leq \frac{1}{2\delta - |\alpha - \varphi(\zeta)|}$$

isto é:

$$\frac{1}{|\alpha - \varphi(\zeta)|} \leq \frac{1}{2\delta - |\alpha - \varphi(\zeta)|}$$

o que mostra que $|\alpha - \varphi(\zeta)| \geq \delta$ ou seja $\alpha \notin D_\delta(\varphi(\zeta))$, o que prova (6.2.6) e portanto (b). Finalmente, vamos verificar a asseção (c). Fixado $w_1 \in W = \varphi(V)$ arbitrário, por (b) existe $z_1 \in V$ tal que $\varphi(z_1) = w_1$. Se $w \in W$ e $\varphi^{-1}(w) =: z \in V$ temos

$$\frac{\varphi^{-1}(w) - \varphi^{-1}(w_1)}{w - w_1} = \frac{z - z_1}{\varphi(z) - \varphi(z_1)}$$

Por (6.2.3) temos: $w \to w_1 \implies z \to z_1$ e então por (6.2.4) obtemos:

$$\varphi^{-1\prime}(w_1) = \lim_{w \to w_1} \frac{\varphi^{-1}(w) - \varphi^{-1}(w_1)}{w - w_1} = \lim_{z \to z_1} \frac{z - z_1}{\varphi(z) - (z_1)} = \frac{1}{\varphi'(z_1)}$$

o que mostra que $\varphi^{-1} \in \mathcal{H}(W)$. $\square$

Definição 6.3 Sejam Ω_1 e Ω_2 dois abertos conexos não vazios de $\mathbb{C}$. Diz-se que φ *é um isomorfismo analítico de* Ω_1 *sobre* Ω_2 se se verificam as três condições seguintes:

(IA1) $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega_1)$

(IA2) φ é uma bijeção de Ω_1 sobre Ω_2

(IA3) $\varphi^{-1} \in \mathcal{H}(\Omega_2)$.

Dois abertos conexos não vazios de $\mathbb{C}$ são ditos *conformemente equivalentes* se existe um isomorfismo analítico de um deles sobre o outro.

No Exemplo 1 do cap.1 introduzimos a notação π_m para indicar a função $z \in \mathbb{C} \mapsto z^m \in \mathbb{C}$, onde $m \in \mathbb{N}^*$. Pelo teorema de existência da raiz m-ésima de um número complexo, para cada $w \in \mathbb{C}^*$, a equação

$$\pi_m(z) = z^m = w$$

tem precisamente m soluções (duas a duas diferentes): se $w = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$, então estas m soluções são dadas pela fórmula

$$z_k = \rho^{1/m} \cdot \exp(i(\frac{\theta + 2k\pi}{m})) \ \ , \ \ k = 0, 1, \cdots, m-1.$$

A aplicação π_m é aberta. Com efeito, se V é aberto e $0 \notin V$, como π_m' só se anula em 0, resulta $\pi'(z) \neq 0$ para cada $z \in V$, portanto $\pi_m(V)$ é aberto peloTeor. 6.2. Se $0 \in V$, então $\pi_m(D_r(0)) = D_{r^m}(0)$, portanto $\pi_m(V)$ é aberto também neste caso.
Se chamamos "função de tipo $(m, 1)$ "a toda função $f : X \to Y$ tal que $Card(f^{-1}(y)) = m$ para cada $y \in Y$ (isto é, para cada $y \in Y$ existam m pontos $x_1, \ldots, x_m$ em X, com $x_i \neq x_j$ sempre que $i \neq j$ tais que $f(x_i) = y$ para cada $i = 1, 2, \ldots, m$), então as considerações anteriores podem ser resumidas na afirmação seguinte:
Para cada $m \in \mathbb{N}^*$, π_m é uma aplicação aberta de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ tal que $\pi_m|\mathbb{C}^* : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ é uma aplicação de tipo $(m, 1)$.

Sejam Ω um aberto não vazio e $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\varphi'(z) \neq 0$ para cada $z \in \Omega$, então pelo Teor. 6.2 resulta que φ é aberta e, como composição de aplicações abertas é aberta, resulta que $\pi_m \circ \varphi$ é uma aplicação (holomorfa em Ω) aberta. O resultado seguinte mostra basicamente a recíproca desta asserção:
Se Ω é conexo, então cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f \neq$cte., é localmente da forma $\pi_m \circ \varphi$ a menos de constantes aditivas.
Antes de enunciar este resultado vamos fazer algumas considerações intuitivas que vão ajudar na compreensão do mesmo e de sua prova. Sejam Ω uma vizinhança aberta convexa de z_0, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f \neq$cte e seja $f(z_0) = w_0$. Pelo princípio dos zeros isolados podemos supor que Ω é suficientemente pequeno de modo que $f - w_0$ não tem outro zero diferente de z_0 em Ω, logo podemos escrever

$$[1] \qquad f(z) - w_0 = (z - z_0)^m g(z) \quad \forall \ \ z \in \Omega$$

onde $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $g(z) \neq 0 \ \ \forall \ \ z \in \Omega$ e $m =$ordem do zero que $f - w_0$ tem em z_0. Como já foi dito acima vamos mostrar que existe uma vizinhança V de z_0 em Ω e existe $\varphi \in \mathcal{H}(V)$ tal que

[2] $\qquad f(z) = w_0 + \pi_m \circ \varphi(z) = w_0 + [\varphi(z)]^m \quad \forall \ \ z \in V \ .$

A idéia (sem nenhum rigor!) para descobrir esta função φ é a seguinte: se [2] é válida, então por [1] devemos ter

[3] $\qquad (z - z_0)^m g(z) = [\varphi(z)]^m \quad \forall \ \ z \in V \ .$

Como aparecem potências naturais a idéia natural para expressar φ é "tomar logaritmos ", o que vamos fazer trabalhando formalmente com as regras habituais do caso real (que com severas restrições são ainda válidas, como veremos no cap. 8). De [3] resulta então

$$m \log(z - z_0) + \log g(z) = m \log \varphi(z)$$

e escrevendo

[4] $\qquad H(z) := \log g(z)$

resulta

$$\log(z - z_0) + \frac{H(z)}{m} = \log \varphi(z)$$

donde:

$$\varphi(z) = (z - z_0) \exp \frac{H(z)}{m}$$

Observar que "derivando"[4] obtemos:

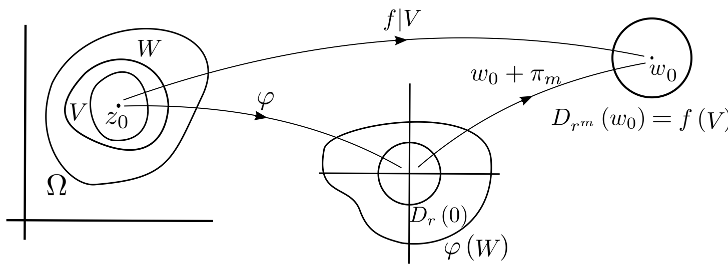
$$H' = g'/g$$

Naturalmente, tudo o que precede depois de [3] é uma sequência de afirmações sem nenhum fundamento teórico, porém na prova (agora sim rigorosa e completa) do teorema que segue vamos mostrar que as considerações acima, orientaram a elaboração da mesma. Nesta prova, como é lógico, vamos eliminar toda menção ao logaritmo complexo que só será definido no fim deste capítulo.

Teorema 6.4 *Sejam Ω um aberto conexo, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que f não é constante, $z_0 \in \Omega$ e $w_0 = f(z_0)$. Seja m a ordem do zero que a função $f - w_0$ tem em z_0. Então existe uma vizinhança de V de z_0 em Ω e existe $\varphi \in \mathcal{H}(V)$ tal que:*
(a) $f(z) = w_0 + [\varphi(z)]^m \quad \forall \ \ z \in V \qquad$ (i.e. $f|V = w_0 + \pi_m \circ \varphi$)
(b) *φ' não tem zeros em V e φ é um isomorfismo analítico de V sobre um disco $D_r(0)$ para algum $r > 0$. Em consequência,*

$$f|V \setminus \{z_0\} : V \setminus \{z_0\} \to D^*_{r^m}(w_0)$$

é uma função de tipo $(m, 1)$.



Prova Como a propriedade é de caracter local, não há perda de generalidade em supor que Ω é uma vizinhança convexa de z_0 suficientemente pequena de modo que $f(z) \neq w_0$ para cada $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$ (isto é possível pelo princípio dos zeros isolados, Teor. 4.15). Então podemos escrever

$$(6.4.1) \qquad f(z) - w_0 = (z - z_0)^m g(z) \quad \forall \;\; z \in \Omega$$

onde $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $g(z) \neq 0 \;\; \forall \;\; z \in \Omega$. Em consequência (ver cap. 1, Exemplo 3), temos $g'/g \in \mathcal{H}(\Omega)$ e então pelo teorema de Cauchy para um aberto convexo (Teor. 5.7), existe $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $h' = g'/g$. Consideremos a função

$$\psi := g.\exp(-h) \; .$$

Como

$$\psi' = g' \exp(-h) - gh' \exp(-h) = (g' - gh') \exp(-h) = 0$$

resulta que ψ é constante em Ω, isto é

$$\psi = g.\exp(-h) = k \in \mathbb{C}, \;\text{ em } \Omega$$

e como $g \neq 0$ em Ω, resulta $k \neq 0$ portanto (ver Teor. 3.14 (j)) existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\exp(\lambda) = k$ donde

$$g = k \exp(h) = \exp(h + \lambda), \text{ em } \Omega \; .$$

Seja

$$H := h + \lambda$$

então

$$(6.4.2) \qquad g = \exp(H)$$

$$(6.4.3) \qquad H' = g'/g$$

Definimos agora $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ por

$$\varphi(z) := (z - z_0) \exp(\frac{H(z)}{m}) \quad \forall \;\; z \in \Omega$$

e vamos mostrar que φ satisfaz as condições do enunciado.

Verificação de (a):

$$w_0 \left[\varphi(z)\right]^m = w_0 + \left[(z - z_0) \exp(\frac{H(z)}{m})\right]^m = w_0 + (z - z_0)^m . \exp H(z) =$$

$= w_0 + (z - z_0)^m.g(z) = f(z)$ para cada $z \in \Omega$, por (6.4.2) e (6.4.1).

Verificação de (b): É óbvio que $\varphi(z_0) = 0$. Por outro lado, por (6.4.3) resulta

$$\varphi'(z) = (1 + \frac{z - z_0}{m}.\frac{g'}{g}) \exp(\frac{H(z)}{m}) \quad \forall \ z \in \Omega$$

o que acarreta $\varphi'(z_0) = \exp(\dfrac{H(z_0)}{m}) \neq 0$. Pelo Teor. 6.2 resulta então que existe uma vizinhança W de z_0 em Ω tal que $\varphi : W \to \varphi(W)$ é um isomorfismo analítico e que $\varphi'(\zeta) \neq 0 \ \forall \ \zeta \in W$ (ver (6.4.2)). Como $\varphi(W)$ é aberto e $0 = \varphi(z_0) \in \varphi(W)$, existe $r > 0$ tal que $D_r(0) \subset \varphi(W)$, donde $V := \varphi^{-1}(D_r(0))$ é uma vizinhança aberta de z_0 contida em W e visivelmente

$$\varphi|V : V \to D_r(0)$$

é um isomorfismo analítico e $\varphi' \neq 0$ em V pois $\varphi' \neq 0$ em V pois $\varphi' \neq 0$ em $W \supset V$.

A última asserção do teorema agora é imediata pois se $w_1 \in D^*_{r^m}(w_0)$, então provar que a equação

$$f(z) = w_1$$

tem m soluções (duas a duas diferentes) em V, equivale a provar que a equação

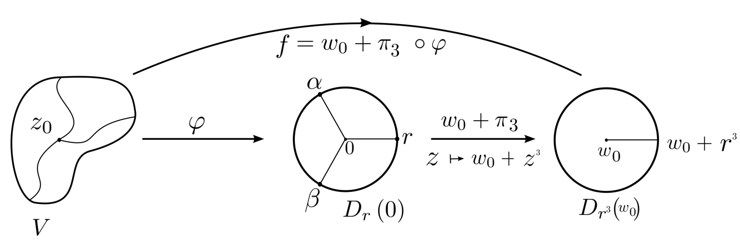
$$\pi_m[\varphi(z)] = [\varphi(z)]^m = w_1 - w_0 \qquad (\neq 0!)$$

tem m soluções (duas a duas diferentes) em V e sendo $\varphi : V \to D_r(0)$ uma aplicação bijetora, basta ver que a equação

$$\pi_m(\zeta) = \zeta^m = w_1 - w_0$$

tem m soluções (duas a duas diferentes) em $D_r(0)$, o que é óbvio por ser $w_1 - w_0 \neq 0$ e pelo teorema de existência de raízes m-ésima de um número complexo não nulo. $\square$

Observação 1 Para $m > 1$ a estrutura local de f pode ser descrita intuitivamente de forma bastante ilustrativa. Suponhamos para fixar idéias que $m = 3$. Indicando com $w_0 + \pi_3$ a aplicação $z \longmapsto w_0 + z^3$ e com as notações do Teor. 6.4, a figura seguinte:



mostra a imagem inversa de $D_{r^3}(w_0)$ e a imagem inversa do raio $\left[w_0, w_0 + r^3\right]$.
Observar que r, α e β são as três raízes cubicas de r^3, isto é $\alpha = r_{\langle \frac{2\pi}{3}}$ e $\beta = r_{\langle \frac{4\pi}{3}}$.

Observação 2 Se Ω não é conexo o Teor. 6.4 é falso pois se $A = D_1(0)$, $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 2\}$, $\Omega = A \cup B$ e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ é definida por $f(z) = z^3$ $\forall\ z \in A$ e $f|B = 0$, então f não é constante e, por exemplo, não podemos nem falar da ordem do zero $z_0 = 3$ de $f = f - 0 = f - w$.

Corolário 6.5 (teorema da aplicação aberta) *Se Ω é um aberto conexo não vazio de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e f não é constante, então $f(\Omega)$ é aberto.*

Prova De fato, dado $w_0 \in f(\Omega)$ arbitrário, seja $z_0 \in \Omega$ tal que $f(z_0) = w_0$. Então, pelo Teor. 6.4 existe uma vizinhança V de z_0 em Ω e existe $r > 0$ tal que $f(V) = D_{r^m}(w_0)$, onde m é a ordem do zero z_0 de $f - w_0$. Como $V \subset \Omega$, resulta $f(V) = D_{r^m}(w_0) \subset f(\Omega)$, o que mostra que w_0 é interior a $f(\Omega)$. $\square$

Se no Exemplo da Obs.2 acima modificamos a definição de f em B tomando por exemplo $f|B = 1$, com $f(A) = D_1(0)$ é claro que $f(\Omega) = D_1(0) \cup \{1\}$ que não é aberto o que mostra que o Corol. 6.5 é falso se não supormos Ω conexo.

O resultado seguinte é a versão global do Teor. 6.2.

Teorema 6.6 (teorema da função inversa, versão global) *Seja Ω um aberto conexo não vazio de $\mathbb{C}$, seja $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e suponhamos que f é injetora. Então $f'\,(z) \neq 0$ para cada $z \in \Omega$, f é um isomorfismo analítico de Ω sobre $f(\Omega)$* e

$$f^{-1\prime} = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(w)\right]} \quad \forall\ w \in f(\Omega)\ .$$

Prova Suponhamos por absurdo que existe $z_0 \in \Omega$ tal que $f'(z_0) = 0$, então como f não é constante e Ω é conexo e portanto f' não pode ser identicamente nula, z_0 é um zero isolado de f' e em consequência (ver exerc. 4.14) z_0 é um zero de $f - f(z_0)$ de ordem $m > 1$. PeloTeor.6.4 resulta então que localmente f é uma função de tipo $(m, 1)$; o que é absurdo pois $m > 1$ e f é injetora, o que prova a primeira asserção. Para provar que f é um isomorfismo analítico de Ω sobre $f(\Omega)$ e a asserção relativa a derivada de f^{-1}, como $f'(z) \neq 0$ para cada $z \in \Omega$, basta aplicar o Teor. 6.2. (c) em cada ponto de Ω. $\square$

Observação A recíproca da primeira asserção do Teor. 6.6 é falsa como mostra o exemplo seguinte: $f(z) = e^z$ então $f'(z) = e^z \neq 0$ para cada $z \in \mathbb{C}$, porém f não é injetora. (pois é periódica, de período $2\pi i$)

Corolário 6.7 *Sejam Ω um aberto conexo não vazio de $\mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, então são equivalentes as condições seguintes*:
(i) *f é injetora,*
(ii) *f é um isomorfismo analítico de Ω sobre $f(\Omega)$.* (em particular, vemos que a condição (IA3) da Def. 6.3 é superflua)

Prova A implicação (ii) $\Longrightarrow$ (i) é óbvia e a implicação (i) $\Longrightarrow$ (ii) está contida no Teor. 6.6. $\square$

A seguir vamos expor algumas ideias básicas sobre o problema da inversão global de funções analíticas (complexas) que, como veremos, é mais complicado que o seu análogo para funções reais. O Teor. 6.6 mostra que o problema da inversão global de uma função $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, Ω conexo, está resolvido se f é injetora. Se Ω é conexo e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ não é injetora, existem complexos $w_0 \in f(\Omega)$ tais que a equação $f(z) = w_0$ tem várias raízes distinta e se poderia esperar que existissem várias funções $g_1, g_2, \ldots$ definidas em $f(\Omega)$ tais que $f(g_1(w)) = w$, $f(g_2(w)) = w, \ldots$ para todo $w \in f(\Omega)$. Temos com certa frequência uma situação deste tipo no caso real, por exemplo, a função $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$ tem como imagem $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$ e existem duas funções contínuas $x \longmapsto \sqrt{x}$ e $x \longmapsto -\sqrt{x}$ definidas em $f(\mathbb{R})$ que são "inversas" de f. Vamos ver que no caso complexo, a inversão global não é tão simples. De modo mais preciso, *se $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ (Ω conexo) e f não injetora, não existe em geral uma função $g \in \mathcal{C}(f(\Omega))$ tal que $f(g(w)) = w$ para cada $w \in f(\Omega)$* (este tipo de situação também pode acontecer com funções reais de variável real), *em consequência, não vai existir inversa analítica de f em $f(\Omega)$*.O que vai ser possível é determinar subconjuntos abertos maximais W_λ ($\lambda \in \Lambda$) de $f(\Omega)$ (em geral diferentes de $f(\Omega)$) e funções $g_\lambda \in \mathcal{H}(W_\lambda)$ tais que

$$f(g_\lambda(w)) = w \quad \forall \;\; w \in W_\lambda \, .$$

As vezes teremos a situação mais complicada seguinte: para cada $\lambda \in \Lambda$, existe uma família $(g_{\lambda\alpha})_{\alpha \in A_\lambda}$ tal que $g_{\lambda\alpha} \in \mathcal{H}(W_\lambda)$ para cada $\alpha \in A_\lambda$ e

$$f(g_{\lambda\alpha}(w)) = w \quad \forall \;\; w \in W_\lambda \;\text{ e } \; \forall \;\; \alpha \in A_\lambda$$

Como ilustração e exemplo extremamente importante do que precede, vamos definir as funções logaritmo complexo. Começamos com o seguinte resultado do cálculo elementar. No que segue vamos a usar as notações

$$L_0 := \,]-\infty, 0] \quad \text{e} \quad D_0 := \mathbb{C} \backslash L_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq -|z|\}$$

Lema 6.8 *Para cada $w = s + it \in D_0$ existe um único par $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \,]-\pi, \pi[$ tal que $w = re^{i\theta}$, determinado pelas fórmulas*

$$r = \sqrt{s^2 + t^2} = |w| \qquad e \qquad \theta = 2.Arctg \frac{t}{s + |w|} \; .$$

Prova Suponhamos $|w| = 1$, então pelo Teor. 3.14 (i) existe $\tau \in \mathbb{R}$ tal

que $w = \exp(i\tau) = \cos\tau + i\,\mathrm{sen}\,\tau$. Como $\theta \longmapsto \exp(i\theta)$ (e portanto $\theta \longmapsto \cos\theta$ e $\theta \longmapsto \mathrm{sen}\,\theta$) tem período 2π, é claro que existe $\theta \in \left]-\pi, \pi\right]$ tal que $w = \exp(i\theta) = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$ e como $w \notin L_0$ é óbvio que $\theta \neq \pi$, donde $\theta \in \left]-\pi, \pi\right[$. É claro que este θ é único pois se $\theta_1, \theta_2 \in \left]-\pi, \pi\right[$ e $w = \exp(i\theta_1) = \exp(i\theta_2)$ então $\exp\left[i(\theta_1 - \theta_2)\right] = 1$, o que pelo Teor. 3.14 (g) implica $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$ e se fosse $k \neq 0$ então $|\theta_1 - \theta_2| = 2\,|k|\,\pi \geq 2\pi$, o que é absurdo, portanto $k = 0$, isto é, $\theta_1 = \theta_2$.
Consideremos agora o caso geral $w \in D_0$ então $w \neq 0$ donde resulta que podemos aplicar o que precede a $w/\,|w|$: resulta que *existe um único* $\theta \in \left]-\pi, \pi\right[$ tal que

$$\frac{w}{|w|} = \exp(i\theta) = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$$

ou seja

$$w = |w|\, e^{i\theta} = |w| \cos\theta + i\,|w|\,\mathrm{sen}\,\theta\ . \tag{6.8.1}$$

Ora, como $w = s + it$, igualando partes real e imaginária, obtemos $r := |w| = \sqrt{s^2 + t^2}$ e

$$\cos\theta = sr^{-1} \qquad , \qquad \mathrm{sen}\,\theta = tr^{-1}. \tag{6.8.2}$$

Como $\theta \in \left]-\pi, \pi\right[$ é claro que $\theta/2 \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$ e como neste intervalo a função "tangente"(definida por $tg := \mathrm{sen}\,/\cos$ fora dos pontos de anulação de "cos") é inversível, para determinar θ em função dos dados s, t e w, será suficiente calcular $tg\dfrac{\theta}{2}$ a partir de (6.8.2), o que é imediato

$$\frac{s}{r} = \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 \quad \Longrightarrow \quad 2\cos^2\frac{\theta}{2} = 1 + \frac{s}{r} = \frac{r+s}{r}$$

$$\frac{t}{r} = \mathrm{sen}\,\theta = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \quad , \quad \text{portanto}$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2} = \frac{2\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\frac{t}{r}}{\frac{r+s}{r}} = \frac{t}{s+r} = \frac{t}{s+|w|} \quad ,$$

donde $\theta = 2\,\mathrm{Arctg}\,\dfrac{t}{s+|w|}$. Agora, com os valores de θ e r calculados, o resultado segue da primeira igualdade de (6.8.1). □

Observe que (6.8.2) é rigoroso (isto é, sem uso da intuição geométrica) pois por definição (ver Obs. [3] que precede a Prova (parcial) do Teor. 3.14) tem-se $\cos\theta = \mathrm{Re}(e^{i\theta})$ e $\mathrm{sen}\,\theta := \mathrm{Im}(e^{i\theta})$ $\forall\ \theta \in \mathbb{R}$ (o que aliás foi usado na linha que precede a (6.8.1).

Seja $w = s + it \in D_0$ com $s < 0$ então $s = -|s|$ portanto

$$\frac{t}{s+|w|} = \frac{t}{\sqrt{s^2+t^2}-|s|} = \frac{t(\sqrt{s^2+t^2}+|s|)}{t^2} = \frac{\sqrt{s^2+t^2}+|s|}{t} \ , \ \text{ o que}$$

mostra que $\lim\limits_{t\to 0^{\pm}} \dfrac{t}{s+|w|} = \pm\infty$ e em consequência

$$((*)) \qquad \lim_{t\to 0^{\pm}} \operatorname{Arctg} \frac{t}{s+|w|} = \pm\frac{\pi}{2}$$

O Lema 6.8 (do qual utilizamos as notações) e as considerações acima justificam a seguinte:

Definição 6.9 Dado $w = s + it \in D_0 = \mathbb{C}\backslash L_0$ chama-se *amplitude* (ou *argumento*) *de* w ao número real (pertencente a $]-\pi, \pi[$)

$$Am(w) := 2 \operatorname{Arctg} \frac{t}{s+|w|}$$

Se $w \neq 0$ e $w = s + it \in \,]-\infty, 0] = L_0$ (e portanto $t = 0$ e $s < 0$) definimos

$$Am(w) := \pi \ \ ,$$

isto é em virtude de $((*))$, $Am(w) := \lim\limits_{\tau\to 0^+} Am(s + i\tau)$.

Observação (a) a prova do Lema 6.8 (e especialmente (6.8.2)) mostram que $\theta = Am(w)$ tem a interpretação geométrica habitual, a saber, o ângulo orientado formado pelas semi-retas $\overrightarrow{Ow}$ e $\mathbb{R}_+$.
(b) $Am \in \mathcal{C}(D_0;]-\pi, \pi[)$. De fato, a função

$$\varphi : w = s + it \in D_0 \ \longmapsto \ \frac{t}{s+|w|} = \frac{t}{s+\sqrt{s^2+t^2}} \in \mathbb{R}$$

é contínua pois $s + \sqrt{s^2+t^2} > 0$ para cada $w = s + it \in D_0$, o que mostra que a função Am, como composta de funções contínuas:

$$Am : w = s + it \in D_0 \ \overset{\varphi}{\longmapsto} \ \frac{t}{s+|w|} \in \mathbb{R} \ \overset{2\operatorname{Arctg}}{\longmapsto} \ 2 \operatorname{Arctg} \frac{t}{s+|w|} \in \,]-\pi, \pi[$$

é contínua, o que prova (b).

(c) Se $D_0 \underset{\neq}{\subset} X \subset \mathbb{C}$, e $\psi \in \mathcal{C}(X)$ então é falso $\psi|D_0 = Am$ (ou em linguagem menos precisa porém mais expressiva: *a função Am não pode ser estendida continuamente a nenhum ponto de L_0*).

Para provar esta afirmação fixemos $s_0 \in X \cap \complement D_0 \subset L_0$ e suponhamos em primeiro lugar que $s_0 \neq 0$ portanto $s_0 < 0$. Será suficiente mostrar que

$$\nexists \lim_{w \to s_0} Am(w)$$

e para isto, é suficiente provar que

$$[*] \qquad \lim_{t \to 0^+} Am(s_0 + it) \neq \lim_{t \to 0^-} Am(s_0 + it)$$

De fato, em vista da Def. 6.9, é claro que $((*))$ (três linhas acima da Def. 6.9) pode ser escrita na forma

$$\lim_{t \to 0^\pm} Am(s_0 + it) = \pm\pi$$

o que prova $[*]$.

Suponhamos agora que $s_0 = 0$, então, para mostrar

$$[**] \qquad \nexists \lim_{w \to 0} Am(w)$$

será suficiente verificar que, fixado $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, quando $w \to 0$ e w percorrendo a reta $y = \alpha x$, o limite depende de α. Em termos mais precisos, basta ver que

$$[***] \qquad \lim_{s \to 0} Am(s + i\alpha s) \text{ é uma função não constante de } \alpha.$$

Ora, isto é claro pois para $s > 0$ temos

$$\varphi(s + i\alpha s) = \frac{\alpha s}{\sqrt{\alpha^2 s^2 + s^2} + s} = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2} + 1}$$

o que mostra que

$$\lim_{s \to 0^+} \varphi(s + i\alpha s) = \frac{\alpha}{1 + \sqrt{1 + \alpha^2}}$$

que é uma função não constante de α (e, de passagem, resulta que $\nexists \lim_{w \to 0} \varphi(w)$) donde segue que $[***]$ pois:

$$\lim_{s \to 0^+} Am(s + i\alpha s) = \lim_{s \to 0^+} 2 \operatorname{Arctg}(\varphi(s + i\alpha s)) = 2 \operatorname{Arctg}(\lim_{s \to 0^+} \varphi(s + i\alpha s)) =$$

$$2\operatorname{Arctg}\left(\frac{\alpha}{1 + \sqrt{1 + \alpha^2}}\right)$$

que é visivelmente uma função não constante de α. Como $[***] \implies [**]$, a asserção (c) está completamente demonstrada.

Observar que

$((\otimes)) \qquad w = |w|\, e^{iAm(w)} \quad \forall \quad w \in \mathbb{C}^*$

De fato, se $w \in D_0$, então $((\otimes))$ decorre do Lema 6.8 e se $w \in L_0 \setminus \{0\}$, então w é real negativo, isto é

$$w = -|w| = |w|\, e^{i\pi} = |w|\, e^{iAm(w)}$$

pela Def. 6.9, o que prova $((\otimes))$ neste caso.

Lembremos que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é dita periódica de período $p \in \mathbb{C}$ se:
(1^o) $p \neq 0$; (2^o) $f(z+p) = f(z) \quad \forall \quad z \in \mathbb{C}$; (3^o) Se $q \in \mathbb{C}$ e $f(z+q) = f(z) \quad \forall \quad z \in \mathbb{C}$ então $|p| \leq |q|$.

A função $\exp : z \in \mathbb{C} \longmapsto e^z \in \mathbb{C}$ é periódica de período $2\pi i$. De fato, seja $q \in \mathbb{C}^*$ tal que $\exp(z+q) = \exp z$ para cada $z \in \mathbb{C}$, então pelo Teor. 3.14 (b), (c) resulta que $\exp(q) = 1$, portanto pelo Teor. 3.14 (g) temos $\dfrac{q}{2\pi i} \in \mathbb{Z}$, logo

$$\exp(z+q) = \exp(z) \quad \forall \quad z \in \mathbb{C} \iff \frac{q}{2\pi i} \in \mathbb{Z}$$

donde segue que $p = 2\pi i$ é o período da função "exp". Resulta então que "exp" não é injetora. A seguir vamos provar a existência de *subconjuntos abertos maximais* de

$$\mathcal{I}\mathrm{m}(\exp) = \mathbb{C}^*$$

nos quais definiremos "determinações"(ou "ramos") da função inversa de "exp".

Lema 6.10 *Seja* $w_0 = s + it \in \mathbb{C}^*$ $(s, t \in \mathbb{R})$ *e seja* $z \in \mathbb{C}$, *então, as condições seguintes são equivalentes*:
(i) $e^z = w_0$

(ii) $z = \ln|w_0| + i\,[Am(w_0) + 2k\pi]$, *para algum* $k \in \mathbb{Z}$.

Prova (ii) $\Longrightarrow$ (i): Pela identidade $((\otimes))$ que precede a definição de função periódica acima, temos

$$e^z = e^{\ln|w_0|}\, e^{i[Am(w_0)+2k\pi]} = |w_0|\, e^{iAm(w_0)} = w_0.$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Seja $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ tal que $e^z = w_0$.
Pela identidade $((\otimes))$ podemos escrever

$$e^z = e^x\, e^{iy} = w_0 = |w_0|\, e^{iAm(w_0)}$$

donde resulta

$$(6.10.1) \qquad e^x = |w_0| \quad \text{e} \quad e^{iy} = e^{iAm(w_0)}$$

A primeira das relações (6.10.1) equivale a

(6.10.2) $$x = \ln|w_0|$$

Por outro lado, como "exp" tem período $2\pi i$ é claro que a função $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{it} \in \mathbb{C}$ tem período 2π, em consequência, a segunda das relações (6.10.1) equivale a

(6.10.3) $$y = Am(w_0) + 2k\pi \ , \ \text{com} \ \ k \in \mathbb{Z}$$

De (6.10.2) e (6.10.3) resulta (ii). $\square$

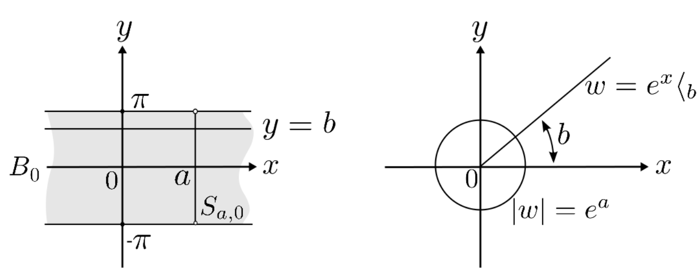
Lema 6.11 *Para cada $k \in \mathbb{Z}$ seja*

$$B_k := \{z \in \mathbb{C} | (2k-1)\pi < \mathrm{Im}(z) < (2k+1)\pi\}$$

então:
(1^o) *A restrição* $\exp|B_k$ *é injetora.*
(2^o) *Se Ω é um aberto de $\mathbb{C}$ tal que $\Omega \supsetneqq B_k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$,* então $\exp|\Omega$ *não é injetora.*
(3^o) *A imagem por* "exp" *da reta $y = b$, onde $(2k-1)\pi < b < (2k+1)\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$* (portanto esta reta está contida em B_k) *é a semireta aberta $w = e^x \langle_b$ $(x \in \mathbb{R})$. Dados $a \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$, a imagem do segmento aberto*

$$S_{a,k} = \{(a,y) | \ (2k-1)\pi < y < (2k+1)\pi\}$$

pela função "exp" *é o círculo $|w| = e^a$ sem o ponto $w = -e^a$.*
(4^o) *a imagem por* "exp" *do aberto B_k $(k \in \mathbb{Z})$ é o plano fendido $D_0 = \mathbb{C} \backslash L_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq -|z|\}$. Além disso, se $R_k := \{(x, 2(k+1)\pi) \mid x \in \mathbb{R}\}$ $\forall \ k \in \mathbb{Z}$ então $\exp(R_k) = L_0 \backslash \{0\}$ $\forall \ k \in \mathbb{Z}$.*



Prova (1^o) Fixados $k \in \mathbb{Z}$ arbitário, sejam $z_1, z_2 \in B_k$ tais que $e^{z_1} = e^{z_2}$ e mostremos que $z_1 = z_2$. Seja $w = e^{z_1} = e^{z_2}$, então pelo Lema 6.10 temos

$$z_1 = \ln|w| + i\,[Am(w) + 2k_1\pi] \quad , \quad k_1 \in \mathbb{Z}$$

$$z_2 = \ln|w| + i\,[Am(w) + 2k_2\pi] \quad , \quad k_2 \in \mathbb{Z}$$

donde:

(6.11.1) $$z_1 - z_2 = 2i(k_1 - k_2)\pi$$

Ora, como $z_1, z_2 \in B_k$ e ambos têm a mesma parte real ($= \ln|w|$), resulta $|z_1 - z_2| < 2\pi$, o que por (6.11.1) implica $k_1 = k_2$, isto é $z_1 = z_2$.
(2^o) Fixado $k \in \mathbb{Z}$ arbitrário, se $\Omega \supsetneqq B_k$ então existe $\zeta \in \Omega$ tal que $\zeta \notin B_k$ portanto

$$\mathrm{Im}(\zeta) \leq (2k-1)\pi \quad \text{ou} \quad \mathrm{Im}(\zeta) \geq (2k+1)\pi.$$

Suponhamos, por exemplo, que $\mathrm{Im}(\zeta) \geq (2k+1)\pi$, então é claro que existe $l \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\mathrm{Im}(\zeta) - 2l\pi \in \,](2k-1)\pi, (2k+1)\pi[$$

donde, por definição de B_k resulta:

$$z := \mathrm{Re}(\zeta) + i\,[\mathrm{Im}(\zeta) - 2l\pi] \in B_k$$

e então

$$e^z = \exp\{\mathrm{Re}(\zeta) + i\,[\mathrm{Im}(\zeta) - 2l\pi]\} = \exp(\zeta - 2l\pi i) = \exp(\zeta) = e^\zeta,$$

o que prova que $\exp|\Omega$ não é injetora pois $z \neq \zeta$
A asserção (3^o) é evidente e (4^o) decorre de (3^o). $\square$

Com a notação do Lema 6.11, seja

$$f := \exp|B_0 \,,$$

então é claro que $f \in \mathcal{H}(B_0)$. Pelo Lema 6.11 (1^o) e (4^o) temos respectivamente:

[1] $$f \text{ é injetora} \quad \text{e} \quad f(B_0) = D_0$$

Consideremos a função

$$g_0 : w \in D_0 \longmapsto \ln|w| + iAm(w) \in \mathbb{C}$$

Pelo Lema 6.8 e a Def. 6.9 temos $Am(w) \in \,]-\pi, \pi[$ se $w \in D_0$ portanto, pela definição de B_0 vem

$$g_0(w) \in B_0 = Dom(f), \quad \text{para cada } w \in D_0$$

em consequência está definido $f\,[g_0(w)]$ para cada $w \in D_0$ e o Lema 6.10 implica

[2] $$f\,[g_0(w)] = w \qquad \forall \quad w \in D_0$$

Por [1], f é uma bijeção de B_0 sobre D_0, logo por [2] e pelo exerc. 6.5 resulta que $g_0 = f^{-1}$. Pelo Teor. 6.6 temos que f é um isomorfismos analítico de B_0 sobre D_0, em consequência

[3] $\qquad g_0 = f^{-1} \in \mathcal{H}(D_0)$

[4] $\qquad g_0'(w) = \dfrac{1}{f'\left[g_o(w)\right]} \qquad \forall \quad w \in D_0$

Como $f' = f$ (ver Teor. 3.14 (e)), de [2] e [4] segue:

[5] $\qquad g_0'(w) = \dfrac{1}{w} \qquad \forall \quad w \in D_0.$

Definição 6.12 A função

$$g_0 : w \in D_0 \longmapsto \ln|w| + iAm(w) \in \mathbb{C}$$

é chamada *determinação* (ou *ramo*) *principal do logaritmo em* D_0 e é indicado pela notação

$$Log,$$

isto é $\qquad Log(w) = \ln|w| + iAm(w) \qquad \forall \ w \in D_0.$

As fórmulas $[2], [3]$ e $[5]$ se escrevem:

$[2']$ $\qquad \exp(Log(w)) = w \qquad \forall \quad w \in D_o$

$[3']$ $\qquad Log \in \mathcal{H}(D_0)$

$[5']$ $\qquad Log'(w) = \dfrac{1}{w} \qquad \forall \quad w \in D_0$

O disco aberto $D_1(1)$ é o maior disco aberto de centro 1 contido em D_0, logo pelo Corol. 4.11 resulta

$$Log(w) = \sum_{m \geq 0} \frac{Log^{(m)}(1)}{m!}(w-1)^m \qquad \forall \quad w \in D_1(1)$$

A partir de $[5']$ resulta imediatamente por indução que

$$Log^{(m)}(w) = \frac{(-1)^{m-1} \cdot (m-1)!}{w^m} \qquad \forall \quad w \in D_0, \quad \forall \quad m \in \mathbb{N}^*$$

portanto fazendo $w - 1 = z$ no desenvolvimento de Taylor acima de Log, obtemos

$$Log(1+z) = \sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \, z^m \qquad z \in D_1(0)$$

que é a forma habitual do desenvolvimento de Taylor da função Log.

O próximo resultado fornece a informação básica para calcular "*Log*" de um produto em D_0 de fatores em D_0.

Proposição 6.13 (1^o) *$Log(w^{-1}) = -Log(w)$, para cada $w \in D_0$.*
(2^o) Se $w_1 \in D_0$ e $w_2 \in D_0$ são tais que $w_1 w_2 \in D_0$ então:

$$Log(w_1 w_2) = \begin{cases} Log(w_1) + Log(w_2), \ \ se \ \ -\pi < Am(w_1) + Am(w_2) < \pi \\ Log(w_1) + Log(w_2) - 2\pi i, \ \ se \ \ Am(w_1) + Am(w_2) > \pi \\ Log(w_1) + Log(w_2) + 2\pi i, \ \ se \ \ Am(w_1) + Am(w_2) < -\pi \end{cases}$$

(A hipótese $w_1 w_2 \in D_0$ exclui a possibilidade: $Am(w_1) + Am(w_2) = \pm\pi$, ver Obs. logo após a prova da Prop. 6.13)

Prova (1^o) Como $w^{-1} = \overline{w}\,|w|^{-2}$ resulta $Am(w^{-1}) = Am(\overline{w}) = -Am(w)$ (isto segue da Def. 6.9), donde $Log(w^{-1}) = \ln|w|^{-1} - iAm(w) = -Log(w)$.
(2^o) Suponhamos verificadas as desigualdades:

$$(6.13.1) \qquad -\pi < Am(w_1) + Am(w_2) < \pi$$

Pela identidade $((\otimes))$ que precede a definição de função periódica temos $w_j = |w_j|\, e^{iAm(wj)}$ se $j = 1, 2$, portanto multiplicando estas identidades vem:

$$(6.13.2) \qquad w_1 w_2 = |w_1 w_2|\, e^{i[Am(w_1)+Am(w_2)]}$$

Por outro lado, aplicando de novo $((\otimes))$ a $w_1 w_2 \in D_0 \subset \mathbb{C}^*$ resulta

$$(6.13.3) \qquad w_1 w_2 = |w_1 w_2|\, e^{iAm(w_1 w_2)}$$

De $(6.13.1), (6.13.2)$ e $(6.13.3)$ (pela unicidade no Lema 6.8) resulta

$$Am(w_1 w_2) = Am(w_1) + Am(w_2)$$

o que implica
$Log(w_1 w_2) = \ln|w_1 w_2| + i\,[Am(w_1) + Am(w_2)] = [\ln|w_1| + iAm(w_1)] + [\ln|w_2| + iAm(w_2)] = Log(w_1) + Log(w_2)$.
Suponhamos agora verificada a desigualdade $Am(w_1) + Am(w_2) > \pi$, então

$$(6.13.4) \qquad \pi < Am(w_1) + Am(w_2) < 2\pi$$

Igualando os segundos membros de (6.13.2) e (6.13.3) e levando em consideração de novo que $t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{it} \in \mathbb{C}$ tem período 2π, resulta que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$(6.13.5) \qquad Am(w_1 w_2) + 2k\pi = Am(w_1) + Am(w_2)\ .$$

Como $w_1 w_2 \in D_0$ e portanto $Am(w_1 w_2) \in\,]-\pi, \pi[$, de (6.13.4) e (6.13.5) resulta $k = 1$ e então (6.13.5) se escreve assim:

$$Am(w_1 w_2) = Am(w_1) + Am(w_2) - 2\pi\ .$$

Em consequência, a definição de Log implica

$$Log(w_1w_2) = \ln|w_1w_2| + i\,[Am(w_1) + Am(w_2) - 2\pi] =$$
$$Log(w_1) + Log(w_2) - 2\pi i\ .$$

O caso $Am(w_1) + Am(w_2) < -\pi$ é inteiramente análogo. $\square$

Observação Vamos mostrar que a hipótese $w_1w_2 \in D_0$ implica $Am(w_1)+Am(w_2) \neq \pm\pi$. Igualando os segundos membros de (6.13.2) e (6.13.3) obtemos (6.13.5) para algum $k \in \mathbb{Z}$ e então, se fosse $Am(w_1)+Am(w_2) = \pm\pi$ teríamos

$$Am(w_1w_2) = \pm\pi - 2k\pi = -(2k \pm 1)\pi$$

o que é absurdo pois por definição de "Am" temos $Am(w_1w_2) \in]-\pi,\pi[$ e $-(2k\pm 1)\pi \notin]-\pi,\pi[$ qualquer que seja $k \in \mathbb{Z}$.

A seguir vamos determinar todas as determinações da função logaritmo em D_0 e, de forma mais geral, todas as determinações do logaritmo em abertos conexos deduzidos de D_0 por rotação de centro na origem.

Definição 6.14 Seja D um aberto conexo não vazio de $\mathbb{C}$. Chama-se *determinação (ou ramo) do logaritmo em D* a toda função $g \in \mathcal{C}(D)$ tal que

$$\exp[g(w)] = w \qquad \forall \quad w \in D.$$

Observar que nas condições da Def. 6.14 temos $0 \notin D$ em virtude do Teor. 3.14 (c). O resultado seguinte determina todas as determinações do logaritmo no aberto conexo $D_0 = \{z \in \mathbb{C} |\ z \neq -|z|\}$.

Proposição 6.15 *Se $g \in \mathcal{C}(D_0)$ então as condições seguintes são equivalentes:*

(i) $\exp[g(w)] = w$ *para cada* $w \in D_0$ (i.e. g é uma determinação do logaritmo em D_0)

(ii) *Existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$g(w) = Log(w) + 2k\pi i, \ \textit{ para cada } w \in D_0.$$

Prova (i) $\Longrightarrow$ (ii): Da definição de Log resulta (ver [2′]):

$$\exp[Log(w)] = w \qquad \forall \quad w \in D_0$$

então de (i) resulta

$$\exp[Log(w)] = \exp[g(w)] \qquad \forall \quad w \in D_0$$

ou seja

$$\exp[g(w) - Log(w)] = 1 \qquad \forall \quad w \in D_0$$

donde, pelo Teor. 3.14 (g) temos

$$\varphi(w) := \frac{1}{2\pi i}\,[g(w) - Log(w)] \in \mathbb{Z} \qquad \forall \quad w \in D_0$$

Como $g \in \mathcal{C}(D_0)$, resulta $\varphi \in \mathcal{C}(D_0)$ e como D_0 é conexo temos $\varphi(D_0)$ é conexo e sendo $\varphi(D_0) \subset \mathbb{Z}$, resulta que φ é constante, portanto existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\varphi(w) = \frac{1}{2\pi i}\,[g(w) - Log(w)] = k \in \mathbb{Z} \qquad \forall \quad w \in D_0,$$

ou seja, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$g(w) = Log(w) + 2k\pi i \qquad \forall \quad w \in D_0$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Resulta imediatamente de $[2']$ e do fato de "exp" ter período $2\pi i$:
$\exp[g(w)] = \exp[Log(w) + 2k\pi i] = \exp[Log(w)] = w$, para cada $w \in D_0$. $\square$

Para cada $k \in \mathbb{Z}$ indicaremos no que segue pela notação Log_k a função

$$w \in D_0 \longmapsto Log(w) + 2k\pi i \in \mathbb{C}$$

(em particular vamos indicar Log por Log_0). Como Log_k é soma da função $Log \in \mathcal{H}(D_0)$ com uma função constante ($w \longmapsto 2k\pi i$) e portanto analítica, é claro que

$$Log_k \in \mathcal{H}(D_0) \qquad \forall \quad k \in \mathbb{Z}$$

Pela Def. 6.14 e a Prop. 6.15 resulta que o conjunto enumerável (de elementos de $\mathcal{H}(D_0)$):

$$\{Log_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

é o conjunto de todas as determinações do logaritmo em D_0. Em fim, é claro agora (com notação do Lema 6.11) que

$$Log_k = (\exp \mid B_k)^{-1} \qquad \forall \quad k \in \mathbb{Z}$$

pois dado $w \in D_0$ arbitrário temos

$$Log_k(w) = \ln|w| + i\,[Am(w) + 2k\pi]$$

e de $-\pi < Am(w) < \pi$ resulta

$$(2k-1)\pi < Am(w) + 2k\pi < (2k+1)\pi$$

o que prova que

$$Log_k(w) \in B_k \qquad \forall \quad w \in D_0 \quad \text{e} \quad \forall \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Proposição 6.16 *Sejam $\alpha \in [0, 2\pi[$ e $D_\alpha := e^{i\alpha}.D_0$. Então, para cada $k \in \mathbb{Z}$ a função*

$$Log_{k,\alpha} : w \in D_\alpha \longmapsto i\alpha + Log_k(e^{-i\alpha}.w) \in \mathbb{C}$$

é uma determinação do logaritmo em D_α (ver exerc. (6.8)).

Prova Como Log_k é contínua em D_0 e a função $w \in D_\alpha \longmapsto e^{-i\alpha}w \in D_0$ é contínua em D_α, resulta que a função composta
$w \in D_\alpha \longmapsto Log_k(e^{-i\alpha}.w) \in \mathbb{C}$
é contínua em D_α e portanto:

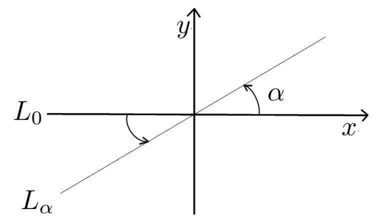
$$Log_{k,\alpha} \in \mathcal{C}(D_\alpha).$$

Pela Def. 6.14, só resta verificar então que

$$\exp[Log_{k,\alpha}(w)] = w \qquad \forall \quad w \in D_\alpha,$$

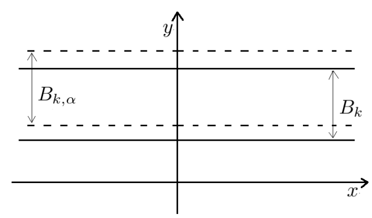
o que é trivial pois $\exp[Log_{k,\alpha}(w)] = \exp\left[i\alpha + Log_k(e^{-i\alpha}.w)\right] =$ $\exp(i\alpha).\exp\left[Log_k(e^{-i\alpha}w)\right] = e^{i\alpha}(e^{-i\alpha}w) = w \qquad \forall \quad w \in D_\alpha.$ $\square$

Observação Fixado $\alpha \in [0, 2\pi[$ como na Proposição 6.16, sejam $D_\alpha = e^{-i\alpha} D_0 = \mathbb{C} \backslash L_\alpha$, onde $L_\alpha := e^{i\alpha} L_0$. Sejam $R_{-\alpha} : w \in D_\alpha \longmapsto e^{-i\alpha} w \in D_0$ a transformação inversa de $R_\alpha : w \in D_0 \longmapsto e^{i\alpha} w \in D_\alpha$ $(\therefore R_\alpha(D_0) = D_\alpha$ e $R_{-\alpha}(D_\alpha) = D_0)$, $T_{i\alpha} : z \in \mathbb{C} \longmapsto \ z + i\alpha \in \mathbb{C}$ e $B_{k,\alpha} := B_k + i\alpha = T_{i\alpha}(B_k) = \{\zeta \in \mathbb{C} | (2k-1)\pi + \alpha < \zeta < (2k+1)\pi + \alpha\}$. É claro então que $Log_{k,\alpha}$ é a seguinte composta



$Log_{k,\alpha} : w \in D_\alpha \stackrel{R_{-\alpha}}{\longmapsto} e^{-i\alpha} w \in D_0 \stackrel{Log_k}{\longmapsto} Log_k(e^{-i\alpha} w) \in B_k \stackrel{T_{i\alpha}}{\longmapsto} i\alpha + Log_k(e^{-i\alpha} w) \in B_k$

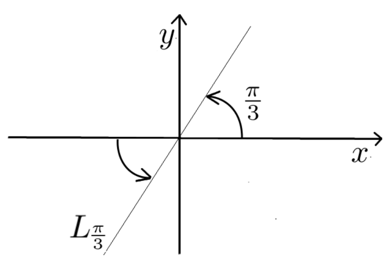
Como $R_{-\alpha}$ e $T_{i\alpha}$ são obviamente isomorfismos analíticos e $Log_k : D_0 \longmapsto B_k$ é um isomorfismo analítico de D_0 sobre B_k, é claro que $Log_{k,\alpha} : D_\alpha \longmapsto B_k$ é um isomorfismo analítico de D_α sobre $B_{k,\alpha}$ cujo inverso é $\exp | B_k$ (em vista da relação "$\exp[Log_{k,\alpha}(w)] = w, \forall w \in D_\alpha$", ver a prova da Proposição 6.16), o que mostra que $\exp | B_{k,\alpha}$ é injetora e, mais ainda

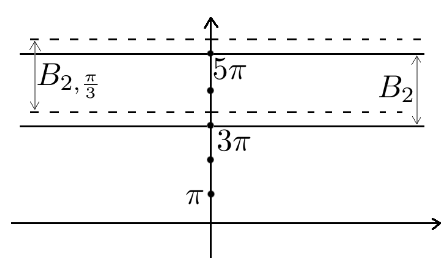


$$\exp | B_{k,\alpha} : B_{k,\alpha} \longmapsto D_\alpha$$

é um isomorfismo analítico de $B_{k,\alpha}$ sobre D_α.

Exemplo Determinar a imagem e a inversa da função $Log_{2,\frac{\pi}{3}}$. Pela Observação anterior, é claro que $\mathcal{I}m(Log_{2,\frac{\pi}{3}}) = B_{2,\frac{\pi}{3}} = \{\zeta \in \mathbb{C} | 3\pi + \frac{\pi}{3} < \mathrm{Im}(\zeta) < 5\pi + \frac{\pi}{3}\}$ e a inversa é $\exp | B_{2,\frac{\pi}{3}} : B_{2,\frac{\pi}{3}} \mapsto D_{\frac{\pi}{3}} (:= \mathbb{C} \backslash L_{\frac{\pi}{3}})$.





Definição 6.17 Seja $\lambda \in \mathbb{C}$. A função

$$z \in D_0 \longmapsto z^\lambda := \exp[\lambda Log(z)] \in \mathbb{C}$$

é chamada *determinação* (ou *ramo*) *principal da potência* λ*-ésima em* D_0.

É claro que $(z \longmapsto z^\lambda) \in \mathcal{H}(D_0)$.

Exemplo (1) Vamos calcular a determinação principal de i^i. Pela Def. 6.17 temos
$i^i = \exp[iLog(i)] = \exp[i(\ln|i| + iAm(i))] = \exp(-Am(i)) = \exp(-\pi/2) = e^{-\pi/2}$, isto é, $i^i = e^{-\pi/2}$.

(2) <u>As determinações de</u> $\sqrt{z}$ $(z \neq 0)$
A determinação principal de $\sqrt{z}$ é a função $z \longmapsto \exp\left[\frac{1}{2}Log(z)\right]$, vamos calcular este valor.
$\exp\left[\frac{1}{2}Log(z)\right] = \exp\left[\frac{1}{2}(\ln|z| + iAm(z))\right] = \exp(\ln\sqrt{|z|}).\exp(\frac{i}{2}Am(z)) =$

$\sqrt{|z|}.1 \angle \frac{Am(z)}{2} = \sqrt{|z|} \angle \frac{Am(z)}{2}$ portanto a detrminação principal da função raíz quadrada é $z \in D_0 \longmapsto \sqrt{|z|} \angle \frac{Am(z)}{2}$
De modo análogo calculamos a determinação correspondente a Log_1 (em vez de $Log = Log_0$ que dá a principal):

$\exp\left[\frac{1}{2}Log_1(z)\right] = \exp\left[\frac{1}{2}(\ln|z| + i(Am(z) + 2\pi))\right] = \sqrt{|z|}.\exp(\frac{i}{2}(Am(z)$
$+2\pi)) = \sqrt{|z|}.\exp(\frac{i}{2}Am(z))\exp(i\pi) = -\sqrt{|z|} \angle \frac{Am(z)}{2}$, logo esta determinação é

$$z \in D_0 \longmapsto -\sqrt{|z|} \angle \frac{Am(z)}{2}.$$

É imediato agora verificar que as duas determinações achadas são as únicas determinações da raíz quadrada em D_0. De fato, o mesmo tipo de cálculos acima mostra que

$$\exp\left[\frac{1}{2}Log_k(z)\right] = (-1)^k\sqrt{|z|} \angle \frac{Am(z)}{2} \quad , \text{ isto é}$$

$$\exp\left[\frac{1}{2}Log_k(z)\right] = \begin{cases} \sqrt{|z|}\,\Big\langle\dfrac{Am(z)}{2} & \text{, se } k \text{ é par} \\ -\sqrt{|z|}\,\Big\langle\dfrac{Am(z)}{2} & \text{, se } k \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Na lista de exercícios, no fim deste Capítulo, são enunciadas as principais propriedades das potências λ-ésimas.

Na Prop. A.2 (Apêndice do Capítulo 7) é dada uma caracterização simples dos abertos conexos nos quais existe uma determinação do logaritmo complexo da qual segue trivialmente o Lema 6.18 abaixo. Entretanto, parece útil resolver aqui mesmo, neste Capítulo 6, o problema da maximalidade dos abertos D_α ($\alpha \in\ ]0, 2\pi[$).

Lema 6.18 *Sejam* $a, b \in \mathbb{R}$ *tais que* $0 \le a < b$ *e*
$D := \{z \in \mathbb{C} \mid a < |z| < b\}$
Então, não existe nenhuma determinação do logaritmo complexo em D.

Prova Suponha por absurdo que existe uma determinação do logaritmo complexo em D, então (Def. 6.14) existe $g \in \mathcal{C}(D)$ tal que

(6.18.1) $$\exp[g(w)] = w \quad \forall \quad w \in D.$$

Como $0 \notin D$, pelo Lema 6.10, a relação (6.18.1) implica que $\forall\ w \in D$ $\exists\ \ k(w) \in \mathbb{Z}$ tal que $g(w) = \ln|w| + i\,[Am(w) + 2k(w)\pi]$, logo podemos escrever

(6.18.2) $$g(w) = \ln|w| + i\,[Am(w) + 2k(w)\pi] \quad \text{e} \quad k(w) \in \mathbb{Z}, \quad \forall\ \ w \in D.$$

Da igualdade em (6.18.2) resulta que a função

$$\psi : w \in D \longmapsto Am(w) + 2k(w)\pi \in \mathbb{R}$$

é contínua [pois $\psi(w) = \dfrac{1}{i}\,[g(w) - \ln|w|] \quad \forall \quad w \in D$ e g e $\ln|\cdot|$ são contínuas em D]. Em particular, ψ é contínua em $D \cap L_0$, vamos mostrar que isto é absurdo. Fixemos $w_0 \in D \cap L_0$ arbitrário, então

$$\psi(w_0) = \lim_{t\to 0^\pm} \psi(w_0 + it) = \lim_{t\to 0^\pm}\,[Am(w_0 + it) + 2\pi k(w_0 + it)]$$

Como $\exists \lim\limits_{t\to 0^\pm} Am(w_0 + it) = \pm\pi$ e $\exists \lim\limits_{t\to 0^\pm}\,[Am(w_0 + it) + 2\pi k(w_0 + it)] = \psi(w_0)$, concluimos que $\exists \lim\limits_{t\to 0^\pm} k(w_0 + it)$ portanto a igualdade acima pode ser escrita assim

$$\psi(w_0) = \pm\pi + 2\pi \lim_{t\to 0^\pm} k(w_0+it), \text{ donde}$$

$$\lim_{t\to 0^+} k(w_0+it) = \frac{1}{2\pi}(\psi(w_0)-\pi) =: m \in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{t\to 0^-} k(w_0+it) = \frac{1}{2\pi}(\psi(w_0)+\pi) =: n \in \mathbb{Z}\ .$$

Das definições de m e n resulta então

$$\psi(w_0) = \pi + 2\pi m = -\pi + 2\pi n \implies 2\pi = 2\pi(n-m) \text{ logo}$$

$n - m = 1$ e portanto $n = m+1$, donde resulta que $\exists\ m \in \mathbb{Z}$ tal que

(6.18.3) $\qquad \lim_{t\to 0+} k(w_0+it) = m \quad$ e $\quad \lim_{t\to 0^-} k(w_0+it) = m+1.$

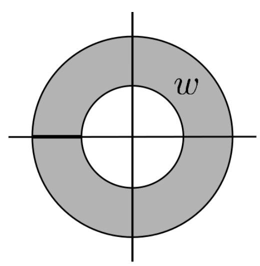
Por outro lado no aberto conexo $\omega := D \cap \complement L_0$, Am é contínua (pois $\omega \subset D_0$) e então, de (6.18.2), resulta que

$$w \in \omega \longmapsto k(w) \in \mathbb{Z}$$

é contínua, logo constante (ω é conexo), isto é, $\exists\ \nu \in \mathbb{Z}$ tal que

$$k(w) = \nu \qquad \forall \quad w \in \omega,$$

o que visivelmente está em contradição com (6.18.3). $\square$



Teorema 6.19 *Se Ω é um aberto conexo de $\mathbb{C}$ tal que $\Omega \supsetneqq D_0$ então não existe nenhuma determinação do logaritmo complexo em Ω.*

Prova Se $\Omega \supsetneqq D_0$ então existe $\zeta \in \Omega \cap \complement D_0 \subset L_0$, logo por definição de aberto, existe $r > 0$ tal que $D_r(\zeta) \subset \Omega$, donde $]\zeta - r, \zeta + r[\subset \Omega$. Como $\zeta \in L_0$ temos $\zeta \leq 0$. Suponhamos que $\zeta < 0$ então é claro que podemos supor $r < |\zeta|$ e, neste caso, Ω contem a "coroa"

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |\zeta| - r < |z| < |\zeta| + r\}$$

e a conclusão segue do Lema 6.18. Se $\zeta = 0$, então Ω contém a "coroa"

$$\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < r\}$$

e de novo, a conclusão resulta do Lema 6.18. $\square$

Corolário 6.20 *Se $\alpha \in [0, 2\pi[$ e Ω é um aberto conexo de $\mathbb{C}$ tal que $\Omega \supsetneqq D_\alpha (:= e^{i\alpha}.D_0)$, então não existe nenhuma determinação do logaritmo complexo em Ω.*

Prova De $\Omega \supsetneqq D_\alpha$ resulta $\Sigma := e^{-i\alpha}.\Omega \supsetneqq e^{-i\alpha}.D_\alpha = D_0$. Se existisse uma determinação g do logaritmo complexo em Ω então é claro que a função

$$f : z \in \Sigma \longmapsto -i\alpha + g(e^{i\alpha}.z) \in \mathbb{C}$$

seria uma determinação do logaritmo complexo em Σ, o que é absurdo em virtude do Teor. 6.19. $\square$

O Corol. 6.20 mostra que os conjuntos $D_\alpha(\alpha \in [0, 2\pi[)$ são os subconjuntos abertos maximais de $\mathcal{I}\mathrm{m}(\exp) = \mathbb{C}^*$ nos quais a função "exp" é inversível, isto é, existem determinações do logaritmo complexo.

Exercícios

(6.1) Sejam Ω um aberto conexo não vazio de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, I$= [a, b]$ um intervalo compacto de $\mathbb{R}$, $\varphi :$ I$\to \mathbb{C}$ e $\psi :$ I$\to \mathbb{C}$ duas funções Riemann-integráveis e suponhamos que $\varphi(t) \notin f(\Omega)$ para cada $t \in$ I. Prove que a função

$$F : z \in \Omega \longmapsto \int_a^b \frac{\psi(t)dt}{\varphi(t) - f(z)} \in \mathbb{C}$$

é analítica em Ω. [**Sugestão:** Se f =cte., então F =cte.; se $f \neq$cte., então $f(\Omega)$ é aberto e F se escreve como composta das funções:

$$z \in \Omega \overset{f}{\longmapsto} w = f(z) \in f(\Omega) \longmapsto \int_a^b \frac{\psi(t)dt}{\varphi(t) - w} \in \mathbb{C},$$

a primeira das quais é analítica por hipótese e a segunda é analítica pelo Teor. 4.3]. Como aplicação, determine o maior aberto conexo W de $\mathbb{C}$ no qual é analítica a função

$$F : z \in W \longmapsto \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} t \ dt}{t^2 - e^z} \in \mathbb{C}$$

[**Sugestão:** Como $t \in [0, 1] \implies t^2 \in [0, 1]$, basta achar os $z \in \mathbb{C}$ tais que $e^z \in [0, 1]$ e eliminá-los. É imediato verificar que $e^z \in [0, 1] \iff z \in S_k$ onde $k \in \mathbb{Z}$ e $S_k = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \leq 0 \text{ e } \operatorname{Im}(z) = 2k\pi\}$, portanto se $\Omega = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} S_k$, então $F \in \mathcal{H}(\Omega)$**]**.

(6.2) Determinar o maior disco aberto de centro na origem no qual $f(z) = z^2 + z$ seja injetora [**Sugestão:** A condição $f(\alpha) = f(\beta)$ com $\alpha \neq \beta$ implica $\alpha + \beta = -1$ logo $\alpha + \beta = \operatorname{Re}(\alpha) + \operatorname{Re}(\beta) = -1$ o que mostra que f é injetora no disco $D_{1/2}(0)$ pois $\operatorname{Re}(\alpha) > -1/2$ e $\operatorname{Re}(\beta) > -1/2$ portanto $\operatorname{Re}(\alpha) + \operatorname{Re}(\beta) > -1$. Se $r > 1/2$ então f não é injetora em $D_r(0)$

pois se o fosse, pelo Teor. 6.6 deveríamos ter $f'(z) = 2z + 1 \neq 0$ para cada $z \in D_r(0)$, o que é falso pois $f'(-1/2) = 0$ e $-1/2 \in D_r(0)$**]**.

(6.3) Determinar o maior disco aberto de centro na origem no qual $f(z) = e^z$ seja injetora **[Sugestão:** Sabemos que "exp" e uma bijeção da "banda"

$$B_k = \{z \in \mathbb{C}|\ (2k-1)\pi < \mathrm{Im}(z) < (2k+1)\pi\} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

sobre o plano fendido $D_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq -|z|\}$. Em particular, "exp" aplica B_0 sobre D_0, portanto o disco procurado é $D_\pi(0)$]

(6.4) Suponha que Ω é um aberto conexo, $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$, φ' não tem zeros em Ω, $f \in \mathcal{H}(\varphi(\Omega))$, $g = f \circ \varphi$, $z_0 \in \Omega$ e $w_0 = \varphi(z_0)$. Prove que se w_0 é um zero de ordem m de f, então z_0 é um zero de ordem m de g. Como se modifica esta situação se z_0 é um zero de ordem k de φ'?

(6.5) Sejam X e Y dois conjuntos e $\beta : X \to Y$ uma aplicação bijetora. Se $\alpha : Y \to X$ tem a propriedade

$$\beta\,[\alpha(y)] = y \qquad \forall \quad y \in Y$$

então $\alpha = \beta^{-1}$.

(6.6) (a) Sejam $k \in \mathbb{Z}$ e $X := \{(w_1, \ldots, w_n) \in D_0^n \ \mid w := \prod_{j=1}^{n} w_j \in D_0\}$.

Provar que: (I.) X é um aberto de $\mathbb{C}^n$; (II.) Para cada componente conexa X_0 de X, existe ($k_1, \ldots, k_n$) $\in \mathbb{Z}^n$ tal que

$$[*] \qquad Log_k(\prod_{j=1}^{n} w_j) = \sum_{j=1}^{n} Log_{k_j}(w_j) \quad \forall \quad (w_1, \ldots, w_n) \in X_0 \ .$$

(b) Sejam $k \in \mathbb{Z}$ e $(w_1, \ldots, w_n) \in D_0^n$ tal que $w := \prod_{j=1}^{n} w_j \in D_0$. Prove que existe $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ tal que

$$Log_k(\prod_{j=1}^{n} w_j) = \sum_{j=1}^{n} Log_{k_j}(w_j) \ .$$

Observação e sugestão: É claro que o item (b) é um caso particular do item (a). O enunciado (b) afirma, em princípio, que a n-upla $(k_1, \ldots, k_n)$ $\in \mathbb{Z}^n$ depende da n-upla $(w_1, \ldots, w_n) \in X$ considerada. Já o enunciado (a) mostra que a n-upla $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ depende da componente conexa X_0 de X, isto é, $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ serve para cada $(w_1, \ldots, w_n) \in X_0$. **[Sugestão para (a):** Fixe $(w_1^0, \ldots, w_n^0) \in X_0$ arbitrário portanto $w^0 := \prod_{j=1}^{n} w_j^0 \in D_0$ e

(1) $w^0 = |w^0| \exp(iAm(w^0))$ e $w_j^0 = |w_j^0| \exp(iAm(w_j^0))$ $(1 \leq j \leq n)$
donde

$$w^0 = \left|w^0\right| \exp(i\sum_{j=1}^{n} Am(w_j^0))$$

o que junto com a 1^a identidade de (1) acarreta

$$\exp\left[i(Am(w^0) - \sum_{j=1}^{n} Am(w_j^0))\right] = 1$$

donde

(2) $\exists\, \nu \in \mathbb{Z}$ tal que $Am(w^0) - \sum_{j=1}^{n} Am(w_j^0) = 2\pi\nu$. Como a função

(onde $w := \prod_{j=1}^{n} w_j$)

$$\Phi : (w_1, \ldots, w_n) \in X_0 \longmapsto Am(w) - \sum_{j=1}^{n} Am(w_j) \in \mathbb{R}$$

é evidentemente contínua, o argumento usado para provar (2) mostra que

$\Phi(w_1, \ldots, w_n) = 2\pi\nu_{(w_1,\cdots w_n)}\ \forall\ (w_1, \ldots, w_n) \in X_{0,}$ onde $\nu_{(w_1,\ldots w_n)} \in \mathbb{Z}$.

Como Φ é contínua, X_0 é conexo e $\mathrm{Im}(\Phi) \subset \{2\pi l \mid l \in \mathbb{Z}\}$,resulta que Φ é constante logo da forma $2\pi\nu$ para algum $\nu \in \mathbb{Z}$, isto é,

(3) $\exists\ \ \nu \in \mathbb{Z}$ tal que $Am(w) - \sum_{j=1}^{n} Am(w_j) = 2\pi\nu\ ,\ \forall\ \ (w_1, \ldots, w_n) \in X_0$

Considere a equação de n incógnitas inteiras $x_1, \ldots, x_n$:

(4) $$\sum_{j=1}^{n} x_j = k + \nu$$

É claro que (4) tem infinitas soluções em $\mathbb{Z}^n$, seja $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ uma solução qualquer de (4) e mostre que vale [$*$], ver linha 4 do exerc. (6.6).]

(6.7) Sejam $\alpha \in [0, 2\pi[$, $D_\alpha := e^{i\alpha}.D_0$ e, para cada $k \in \mathbb{Z}$ seja

$$Log_{k,\alpha} : w \in D_\alpha \longmapsto i\alpha + Log_k(e^{-i\alpha}.w) \in \mathbb{C}$$

(onde $\{Log_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ denota o conjunto de todas as determinações do logaritmo em D_0 , $Log_0 = Log =$ det. principal do logaritmo em D_0.)

(a) Determine a imagem e a inversa de cada uma das funções seguintes:

(I.) $Log_{1,\pi/12} \in \mathcal{H}(D_{\pi/2})$ **(II.)** $Log_{-2,\pi/3} \in \mathcal{H}(D_{\pi/3})$.

(b) Fixado $\alpha \in [0, 2\pi[$ prove que $\{Log_{k,\alpha} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ é o conjunto de *todas* as determinações do logaritmo em D_α.

(6.8) Prove as seguintes propriedades da determinação principal da

potência em D_0 :
(a) $z^{\lambda+\mu} = z^{\lambda}.z^{\mu} \quad \forall \quad z \in D_0, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$
(b) $(z^{\lambda})' = \lambda z^{\lambda-1} \quad \forall \quad z \in D_0, \quad \lambda \in \mathbb{C}$
(c) Sejam $z_1, z_2 \in D_0$ tais que $z_1 z_2 \in D_0$ e $-\pi < Am(z_1) + Am(z_2) < \pi$. Mostre que $(z_1 z_2)^{\lambda} = z_1^{\lambda} z_2^{\lambda} \quad \forall \quad \lambda \in \mathbb{C}$.
(d) As condições $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ e $z \in D_0$ tal que $z^{\lambda} \in D_0$, implicam

$$(z^{\lambda})^{\mu} = z^{\lambda\mu} \ ?$$

(e) Calcule π^i, i^{π}, $(1+i)^{1-i}$ e $(-i)^{-i}$ (det. principais)
Observação: Se necessário, veja o livro de Dieudonné [D], Calcul Infinitesimal. **Sobre o item (d):** No livro citado acima (pg 258) se pede para provar a seguinte afirmação

$((*)) \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \ z \in D_0 \ \text{ e } \ z^{\lambda} \in D_0 \implies (z^{\lambda})^{\mu} = z^{\lambda\mu}$
(I.) Prove com um contra-exemplo que $((*))$ é falsa **[Sugestão:** $z = e$, $\lambda = 2\pi i$ e $\mu = i$.];
(II.) Suponha agora que $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $z \in D_0$, $z^{\lambda} \in D_0$ e $\lambda.Log(z) \in B_0 := \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \mathcal{I}m(z) < \pi\}$. Prove que $\lambda Log(z) = Log(z^{\lambda})$ e, em consequência $(z^{\lambda})^{\mu} = z^{\lambda\mu}$;
(III.) Lembremos que se $w \in \mathbb{C}^*$ e $m \in \mathbb{Z}$ definimos indutivamente a potência de base complexa w e expoente inteiro m (que indicamos *provisóriamente* pela notação $w^{(m)}$ para distingui-la de $w^m := \exp(mLog(w))$ quando $w \in D_0$) pelas relações: (α) $w^{(0)} := 1$ e $w^{(1)} := w$; (β) $w^{(m+1)} := w^{(m)}.w \quad \forall \quad m \in \mathbb{Z}$. Prove que se $w \in D_0$ e $m \in \mathbb{Z}$ então $w^{(m)} = w^m$ (e portanto a notação especial $w^{(m)}$ é superflua). Suponha agora que $\lambda \in \mathbb{C}$, $z \in D_0$, $z^{\lambda} \in D_0$ e $m \in \mathbb{Z}$. Prove que $(z^{\lambda})^m = z^{\lambda m}$ **[Sugestão:** É trivial ver por indução que $(z^{(\lambda)})^m = z^{\lambda m}$.**]**
(IV.) Prove que se $\lambda \in B_0$ e $\mu \in \mathbb{C}$ então $(e^{\lambda})^{\mu} = e^{\lambda\mu}$
(V.) Mostre que se $z = i$, $\lambda = \pi$ e $\mu = 1/2$ então $(z^{\lambda})^{\mu} = -z^{\lambda\mu}$.(o que dá mais um contra-exemplo para a afirmação $((*))$ acima já que $z = i \in D_0$ e $z^{\lambda} = i^{\pi} = \exp(\frac{i\pi^2}{2}) \in D_0$.).**]**

(6.9) Lembremos que $Log = Log_0$ indica a determinação principal do logaritmo em D_0 e que $Log_k := Log_0 + 2k\pi i \quad \forall \quad k \in \mathbb{Z}$. Dados $z \in D_0$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ definimos, $\forall \quad k \in \mathbb{Z}$,

$$\det_k(z^{\lambda}) := \exp(\lambda \ Log_k(z))$$

(a) Seja $\lambda \in \mathbb{R} \cap \complement\mathbb{Q}$. Mostre que $\det_k(z^{\lambda}) \neq \det_h(z^{\lambda})$ sempre que $k, h \in \mathbb{Z}$ e $k \neq h$.
(b) A *determinação principal da raiz quadrada de z em* D_0 é denotada por $z^{1/2}$ e definida por

$$z^{1/2} := \exp(\frac{1}{2}Log(z)) = \exp\left[\frac{1}{2}(\ln|z| + iAm(z))\right] \quad \forall \quad z \in D_0 \ .$$

Mostre que a "raíz quadrada de z", $(\sqrt{z})$ tem duas determinações em D_0 que são $z^{1/2}$ e $-z^{1/2.}$
(c) Seja $\lambda = p/q$ com $q > 0$ e $m.d.c.(p, q) = 1$ então $\sqrt[q]{z^p}$ tem exatamente q determinações em D_0. De modo mais preciso, o conjunto

$$\{\det_k(z^{p/q}) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$
tem q elementos que são
$$\omega^0.z^{p/q},\ \ \omega^1.z^{p/q},\ \ldots,\ \omega^{q-1}.z^{p/q}$$
onde $z^{p/q}$ indica a determinação principal em D_0 (i.e. $z^{p/q} = \exp(\frac{p}{q}Log(z))$ e $\omega := \exp(\frac{2\pi i}{q})$ é a raíz q-ésima da unidade de menor amplitude positiva.

[Sugestões: (a) Fácil: É trivial verificar que $\det_k(z^\lambda) = \det_h(z^\lambda) \iff \lambda(k-h) \in \mathbb{Z}$, o que é falso se $\lambda \in \mathbb{R} \cap \complement\mathbb{Q}$; (b) Seja $\varphi(z)$ uma determinação qualquer da raíz quadrada de z em D_0, isto é, construída a partir das determinações Log_k $(k \in \mathbb{Z})$ do logaritmo em D_0. Em consequência, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que
$$\varphi(z) = \exp(\frac{1}{2}Log_k(z)) = z^{1/2}e^{k\pi i} \quad .$$
Ora, como $e^{k\pi i} = \pm 1 \quad \forall \quad k \in \mathbb{Z}$, resulta $\varphi(z) = \pm z^{1/2}$.
(c) No exerc.6.8, Obs. (III.) foi definido z^p $(p \in \mathbb{Z})$ logo o teor. de existência da raíz q-ésima dá sentido a $\sqrt[q]{z^p}$; tente genralizar o item (b). Se necessário ver Dieudonné [D], Calcul Infinitesimal, pg 259.**]**

(6.10) Calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z}}$, onde $\gamma(t) := e^{it} \quad \forall \quad t \in [0.\pi]$ e $\sqrt{z}$ é a determinação tal que $\sqrt{1} = 1$.

Os quatro exercíçios que seguem mostram outras formas bastante usuais de construir funções holomorfas.

(6.11) Seja $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$.
(a) Mostre que $e^{2\pi i t z} + 1 \neq 0$ para cada $(z,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$;
(b) Prove que, para cada $\alpha \in \mathbb{R}_+$, a função $f_\alpha : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por
$$f_\alpha(z) := \int_0^\alpha \frac{e^{-t}dt}{e^{2\pi i t z}+1} \qquad \forall \quad z \in \Omega$$
é analítica (em Ω);
(c) Prove que a função $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por
$$f(z) := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}dt}{e^{2\pi i t z}+1} \qquad \forall \quad z \in \Omega$$
é analítica (em Ω). **[Sugestão:** (a) Fácil; (b) Seja $\varphi(t,z) := \dfrac{e^{-t}}{e^{2\pi i t z}+1}$ $\forall$ $(t,z) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ então por (a): $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$ e $\varphi(t,\cdot) \in \mathcal{H}(\Omega) \quad \forall$ $t \in [0,\alpha]$, $f_\alpha(z) = \displaystyle\int_0^\alpha \varphi(t,z)dt$. Prove que $f_\alpha \in \mathcal{H}(\Omega)$ usando Morera + Fubini + Cauchy (Lema 5.6). Observe que para aplicar Morera a f_α é necessário verificar previamente que $f_\alpha \in \mathcal{C}(\Omega)$ o que resulta (a continui-

dade de f_α num ponto $\zeta \in \Omega$ qualquer) da continuidade *uniforme* de $\varphi \mid [0,\alpha] \times \overline{D}_r(\zeta)$, onde $\overline{D}_r(\zeta) \subset \Omega$; (c) Pelo teorema de *convergência de Weierstrass* (Teor. 5.19) basta ver que "$f_m \rightrightarrows f$ em K se $m \to \infty$, $\forall$ $K \subset\subset \Omega$". Lembre que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ é convergente e que isto equivale (pelo critério de Cauchy) a asserção: "$\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \nu_1 \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq n \geq \nu_1 \implies \displaystyle\int_n^m e^{-t}dt \leq \varepsilon$". Fixe $K \subset\subset \Omega$ e $\varepsilon > 0$ arbirários. Use a implicação acima e ... etc., para mostrar que $\exists \ \nu \in \mathbb{N}$ tal que

$$z \in K \text{ e } m \geq n \geq \nu \implies |f_m(z) - f_n(z)| = \left| \int_n^m \varphi(t,z)dt \right| \leq \varepsilon \quad \text{logo}$$

$(f_m|K)_{m\in\mathbb{N}}$ é convergente, etc. **]**

(6.11′) (Variante de (6.11)) Sejam $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ e $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uma função contínua verificando a condição seguinte:

$$(*) \ \forall \, \mu > 0 \text{ e } \forall \, \varepsilon > 0 \ \exists \, \nu \in \mathbb{N} \text{ tal que } m \geq n \geq \nu \implies \int_n^m |\varphi(t)| \, e^{-t\mu}dt \leq \varepsilon.$$

(a) Prove que para cada $m \in \mathbb{N}^*$ a função

$$f_m : z \in \Omega \longmapsto \int_0^m \varphi(t)e^{-tz}dt \in \mathbb{C}$$

é holomorfa;
(b) Sejam $K \subset\subset \Omega$ arbitrário e $L := \operatorname{Re}(K)$. Mostre que $L \subset\subset \mathbb{R}^*$ e deduza que $\mu > 0$ tal que

$$e^{-t\operatorname{Re}(z)} \leq e^{-t\mu} \qquad \forall \quad (z,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \ .$$

(c) Use (b) para mostrar que a sequência $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uniformemente convergente sobre os compactos de Ω; (d) Prove que a função

$$f : z \in \Omega \longmapsto \int_0^{+\infty} \varphi(t)e^{-tz}dt \in \mathbb{C}$$

é holomorfa **[Sugestão:** Visivelmente, a resolução de (6.11′) segue o mesmo tipo de ideias que a de (6.11), isto é, (a) segue de usar Morera +Fubini + Cauchy (Lema 5.6) e (b) resulta do teorema de convergência de Weierstrass (Teor. 5.19), mostrando que $f_m|K \rightrightarrows f|K$ se $m \to \infty$ $\forall \ K \subset\subset \Omega$.**]**

(6.12) Sejam Ω um aberto *convexo* $\neq \varnothing$ de $\mathbb{C}$, $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ uma CSD em $\mathbb{C}$ e $\varphi : \gamma^* \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua.
(a) Prove que a função $f : z \in \Omega \longmapsto \displaystyle\int_\gamma \varphi(\zeta,z)d\zeta \in \mathbb{C}$ é contínua;
(b) Prove que se $\varphi(\zeta,\cdot) \in \mathcal{H}(\Omega) \quad \forall \ \zeta \in \gamma^*$, então $f \in \mathcal{H}(\Omega)$;

(c) Suponha que para cada $(\zeta_0, z_0) \in \gamma^* \times \Omega$ existe o limite:

$$D_2\varphi(\zeta_0, z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(\zeta_0, z) - \varphi(\zeta_0, z_0)}{z - z_0}$$

e que $D_2\varphi \in \mathcal{C}(\gamma^* \times \Omega)$. Prove então as duas afirmações seguintes:

(I.) $\varphi(\zeta, z+h) - \varphi(\zeta, z) = \int_0^1 D_2\varphi(\zeta, z+th)h\,dt \quad \forall \quad \zeta \in \gamma^* \quad$ e $\forall \quad z+h \in D_r(\zeta) \subset \Omega$.

(II.) $f'(z) = \int_\gamma D_2\varphi(\zeta, z)d\zeta \quad \forall \quad z \in \Omega.$

[Sugestão: (a) Se $\overline{D}_r(z_0) \subset \Omega$ usar a continuidade *uniforme* de $\varphi|\gamma^* \times \overline{D}_r(z_0)$ para provar a continuidade de f em z_0; (b) Morera + Fubini + Cauchy; (c) (I.) Se necessário, ver S. Lang [L], Analysis II, chap.V, §4, Th.2 . (c) (II.) Mostre que

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(z+h) - f(z) - A(z).h|}{|h|} = 0, \text{ onde } A(z) := \int_\gamma D_2\varphi(\zeta, z)d\zeta.$$

Use (I.) para escrever

$$f(z+h) - f(z) - A(z).h = \int_\gamma \left\{ \int_0^1 \left[D_2\varphi(\zeta, z+th) - D_2\varphi(\zeta, z) \right] h\,dt \right\} d\zeta$$

e use a continuidade uniforme de $D_2\varphi|\gamma^* \times \overline{D}_r(z) \quad (\overline{D}_r(z) \subset \Omega)$ para majorar o integrando e obter
$|f(z+h) - f(z) - A(z)h| \leq |\gamma| \sup_{\substack{0 \leq t \leq 1 \\ \zeta \in \gamma^*}} |D_2\varphi(\zeta, z+th) - D_2\varphi(\zeta, z)|\,|h|$.**]**

(6.13) Sejam I um intervalo compacto de $\mathbb{R}$, Ω um aberto *convexo* $\neq \varnothing$ de $\mathbb{C}$ e $\Psi : \mathrm{I} \times \Omega \to \mathbb{C}$ uma função contínua.

(a) Prove que a função $f : z \in \Omega \longmapsto \int_a^b \Psi(t, z)dt \in \mathbb{C}$ é contínua;

(b) Prove que se $\Psi(t, \cdot) \in \mathcal{H}(\Omega)$ para cada $t \in \mathrm{I}$, então $f \in \mathcal{H}(\Omega)$;

(c) Prove que as duas funções abaixo são holomorfas:

(I.) $\quad z \in \Omega \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tz}}{1+t^2}dt \in \mathbb{C}, \text{ onde } \Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$

(II.) $\quad z \in \mathbb{C} \backslash [-1, 1] \longmapsto \int_0^1 \frac{\cos z}{z+t}dt \in \mathbb{C}$

[Sugestão: Para os itens (a) e (b) use o mesmo tipo de argumentos do exerc. (6.12), (a) e (b). Para o item (c), (I.) considere $f_m(z) := \int_0^m \frac{e^{-tz}}{1+t^2}dt$ $(m \in \mathbb{N}^*)$, verifique que $f_m \in \mathcal{H}(\Omega) \quad \forall \quad m \in \mathbb{N}^*$ e que, $\forall \quad K \subset\subset \mathbb{C}$ se tem que $(f_m|K)_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformemente para $f|K$, concluir usando o teorema de Weierstrass (Teor. 5.19). Aqui há a seguinte simplificação em relação aos exercícios precedentes na realidade, a sequência (f_m) é uniformemente convergente *em* Ω como é fácil ver majorando $\|f_m - f_n\|_\Omega$ por $\displaystyle\int_n^m \frac{dt}{1+t^2}$ $(m > n)$, que é pequeno se m, n são suficientemente grandes como resulta de aplicar o critério de Cauchy à integral convergente $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$.**]**

(6.14) Seja Ω um aberto conexo de $\mathbb{C}$.
(a) Mostre que $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ satisfazem a condição $\operatorname{Re}(f) = \operatorname{Re}(g)$, então existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $f = g + c$.
(b) Considere a função u, harmônica em $\mathbb{C}^*$, definida por $u(z) := \ln|z|$ para cada $z \in \mathbb{C}^*$. Existe $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ tal que $u = \operatorname{Re}(f)$?

[Sugestão: (a) Este item é um resultado trivial que é útil para resolver o item (b). Aplique o teorema da aplicação aberta à função

$$f - g : z \in \Omega \longmapsto i\,[\operatorname{Im}(f) - \operatorname{Im}(g)] \in \mathbb{C}$$

(b) Não. Suponha por absurdo que existe $v : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f := u + iv = \ln|\cdot| + iv \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$, então (as definições de D_0 e Log aparecem no Lema 6.8 e na definição 6.12)

$$g := f \mid D_0 \in \mathcal{H}(D_0) \quad \text{e } Log \in \mathcal{H}(D_0)$$

e $\operatorname{Re}(g) = \ln|\cdot| = \operatorname{Re}(Log)$. Por (a) existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $g = f \mid D_0 = Log + c$. Como $h := f - c \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ resulta

$$h \mid D_0 = Log \qquad \text{e} \qquad h \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$$

o que é absurdo. De fato, o que precede implica $\exp[h(z)] = z$ para cada $z \in \mathbb{C}^*$, isto é, h é uma determinação do logaritmo complexo em $\mathbb{C}^*$, o que sabemos não existir.**]**

Capítulo 7

O TEOREMA DE CAUCHY HOMOLÓGICO (GLOBAL)

O nosso principal objetivo neste Capítulo é provar um resultado que engloba e generaliza fortemente os Teor. 5.7 e 5.8. Para formular e demonstrar este resultado vamos precisar ampliar um pouco nossas definições sobre integração complexa. Dado um intervalo compacto I de $\mathbb{R}$ indicamos com *CSD* (I) o conjunto de todas as *CSD* em $\mathbb{C}$ definidas em I, (ver Def. 5.1) com $\mathcal{K}$ o conjunto de todas os intervalos compactos de $\mathbb{R}$ (não reduzidos a um ponto, ver início do Cap. 5) e seja

$$\mathfrak{S} := \bigcup_{\mathrm{I} \in \mathcal{K}} CSD(\mathrm{I})$$

o conjunto de todas as *CSD* em $\mathbb{C}$. ($\mathfrak{S}$ é um conjunto pois $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ é conjunto sempre que Λ o é e X_λ é conjunto para cada $\lambda \in \Lambda$.) Consideremos o grupo abeliano livre $\mathbb{Z}^{(\mathfrak{S})}$ sobre $\mathfrak{S}$ (ver exerc. (7.1)). Chama-se *cadeia* a qualquer elemento de $\mathbb{Z}^{(\mathfrak{S})}$. Seja

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{\nu} n_i \gamma_i$$

uma cadeia arbitrária. Definimos a *imagem* de Γ como sendo o conjunto compacto:

$$\Gamma^* := \bigcup_{i \in H} \gamma_i^* \quad , \quad \text{onde } H := \{i \mid 1 \leq i \leq \nu \text{ e } n_i \neq 0\}\,.$$

Se $f \in \mathcal{C}(\Gamma^*, \mathbb{C})$ definimos a *integral de f sobre* Γ por

[1] $$\int_\Gamma f = \int_\Gamma f(z)dz := \sum_{i=1}^{\nu} n_i \int_{\gamma_i} f(z)dz\ .$$

Se Ω é um aberto não vazio de $\mathbb{C}$ e $\gamma_i^* \subset \Omega$ para cada $i = 1, 2, \ldots, \nu$ dizemos que Γ *é uma cadeia em* Ω. A cadeia Γ é dita um *ciclo* se γ_i é uma *CSDF* para cada $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Definimos a *cadeia oposta de* Γ como sendo a cadeia

$$\Gamma^0 := \sum_{i=1}^{\nu} n_i \gamma_i^0\ .$$

É claro por [1] e por (5.1.2) que

$$[2] \qquad \int_{\Gamma^0} f = -\int_{\Gamma} f \qquad \forall \quad f \in \mathcal{C}(\Gamma^*; \mathbb{C})$$

pois

$$\int_{\Gamma^0} f = \sum_{i=1}^{\nu} n_i \int_{\gamma_i^0} f = \sum_{i=1}^{\nu} n_i \Big(-\int_{\gamma_i} f\Big) = -\int_{\Gamma} f$$

Se Γ é um ciclo e $\alpha \notin \Gamma^*$ definimos *o índice de* α *em relação a* Γ pela fórmula:

$$[3] \qquad \operatorname{Ind}_{\Gamma}(\alpha) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - \alpha}$$

e é claro por [1] e por [3] que

$$[4] \qquad \operatorname{Ind}_{\Gamma}(\alpha) = \sum_{i=1}^{\nu} n_i \operatorname{Ind}_{\gamma_i}(\alpha) \ .$$

De [2] resulta

$$\operatorname{Ind}_{\Gamma^0}(\alpha) = -\operatorname{Ind}_{\Gamma}(\alpha) \qquad \forall \quad \alpha \notin \Gamma^* \ .$$

Seja Ω um aberto não vazio arbitrário de $\mathbb{C}$. No teorema de Cauchy para um aberto convexo (Teor. 5.7) vimos que *se* Ω *é convexo e se* γ *é uma CSDF em* Ω*, então*

$$[5] \qquad \int_{\gamma} f = 0 \qquad \forall \quad f \in \mathcal{H}(\Omega) \ .$$

Gostaríamos agora de eliminar a hipótese de convexidade feita sobre Ω no Teor. 5.7, mais ainda, gostaríamos de eliminar toda hipótese topológica sobre o aberto Ω. Naturalmente, um resultado do tipo [5] não subsiste se eliminarmos *todas* as hipóteses sobre Ω e γ como mostra o exemplo bem conhecido seguinte:

$$\Omega = \mathbb{C}^*, f(z) := 1/z \qquad \forall \quad z \in \mathbb{C}^* \quad \text{e} \quad \gamma : t \in [0, 2\pi] \longmapsto e^{it} \in \mathbb{C},$$

pois neste caso sabemos que

$$\int_{\gamma} f = \int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0.$$

É claro que eliminar todas as hipóteses sobre Ω significa procurar uma boa hipótese sobre γ para conservar o teorema (isto é, um resultado do tipo [5]). Como toda *CSDF* é um ciclo, podemos tentar procurar um resultado mais geral trabalhando com um ciclo Γ em Ω em vez de uma *CSDF* γ em Ω. Em resumo, dado um aberto não vazio arbitrário Ω de $\mathbb{C}$, precisamos descobrir que tipo de hipótese deveremos fazer sobre um ciclo Γ em Ω para termos um resultado do tipo:

[6] $$\int_\Gamma f = 0 \qquad \forall \quad f \in \mathcal{H}(\Omega).$$

Comecemos observando que para cada $\alpha \notin \Omega$ temos:

$$(\varphi_\alpha : z \in \Omega \longmapsto (z-\alpha)^{-1} \in \mathbb{C}) \in \mathcal{H}(\Omega)$$

e portanto, uma *condição necessária* óbvia por termos um resultado do tipo [6] é que

$$\int_\Gamma \varphi_\alpha(z)dz = \int_\Gamma \frac{dz}{z-\alpha} = 0 \qquad \forall \quad \alpha \notin \Omega$$

ou, o que é equivalente:

[7] $$\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0 \qquad \forall \quad \alpha \notin \Omega.$$

O fato notável a respeito do teorema de Cauchy global é que ele expressa que as funções φ_α $(\alpha \notin \Omega)$ são as únicas obstruções possíveis para [6], em outras palavras, a condição necessária [7], também é condição suficiente para a validade de [6]. Vamos introduzir um nome especial para os ciclos que satisfazem [7], que é, por razões históricas: "homólogo a 0".Formalmente, dizemos que um ciclo Γ em Ω é Ω-*homólogo a* 0, e indicamos com a notação

$$\Gamma \overset{\Omega}{\backsim} 0 \ ,$$

se $\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0$ para cada $\alpha \notin \Omega$. Se Γ_1 e Γ_2 são dois ciclos em Ω dizemos que Γ_1 e Γ_2 são Ω-*homólogos,* e o indicamos com a notação

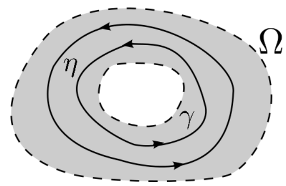
$$\Gamma_1 \overset{\Omega}{\backsim} \Gamma_2 \ ,$$

se $\mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\Gamma_2}(\alpha)$ para cada $\alpha \notin \Omega$. Visivelmente se tem

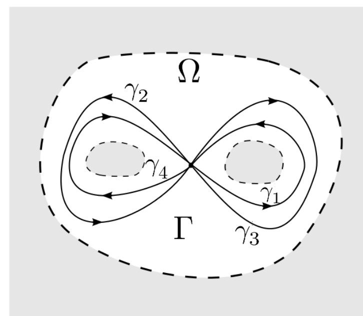
[8] $$\Gamma_1 \overset{\Omega}{\backsim} \Gamma_2 \iff \Gamma_1 - \Gamma_2 \overset{\Omega}{\backsim} 0$$

Exemplos (a) O aberto $\Omega = \mathbb{C}$ satisfaz a condição [7] para cada ciclo Γ em $\mathbb{C}$ pois caso contrário valeria a negação de [7], isto é: "$\exists \ \alpha \in \mathbb{C} \cap \complement\mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) \neq 0$" o que é ridículo pois $\mathbb{C} \cap \complement\mathbb{C} = \varnothing$. Mais geralmente, se Ω é um aberto *convexo* de $\mathbb{C}$, a condição [7] se verifica para cada ciclo Γ em Ω. De fato, se $\alpha \notin \Omega$ então

$\varphi_\alpha \in \mathcal{H}(\Omega)$ (onde $\varphi_\alpha(z) = (z-\alpha)^{-1}$ $\forall z \in \Omega$) e [7] resulta pelo Teor. 5.7, por [1] e [4] (do início deste Cap. 7).



(b) Na figura 1 ao lado, as *CSDF* γ e η em Ω são Ω-homólogas. De fato, se $\alpha \notin \Omega$ e α "está no buraco" de Ω então $\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha) = \mathrm{Ind}_\eta(\alpha) = 1$. Se $\alpha \notin \Omega$ e α não está no buraco então $\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha) = \mathrm{Ind}_\eta(\alpha) = 0$. Se $\Gamma := \gamma - \eta$ resulta $\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0$ para cada $\alpha \notin \Omega$.



(c) Na figura 2 ao lado (a parte hachurada aqui é $\complement\Omega$) consideremos o ciclo $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ em Ω que é homólogo a 0. De fato, se $\alpha \notin \Omega$ e α está no buraco da direita (resp. esquerda) então $\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(\alpha) + \mathrm{Ind}_{\gamma_3}(\alpha) = 1 + (-1) = 0$ (resp. $\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(\alpha) + \mathrm{Ind}_{\gamma_3}(\alpha) = 1 + (-1) = 0$) e obviamente $\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0$ se α está na componente conexa ilimitada de $\complement\Omega$ pois neste caso temos $\mathrm{Ind}_{\gamma_i}(\alpha) = 0$ para cada $i = 1, 2, 3, 4$.

Teorema 7.1 (Cauchy) *Sejam Ω um aberto não vazio de $\mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, então valem as duas asserções seguintes:*
(1^o) *Se Γ é um ciclo em Ω tal que*

(7.1.1) $$\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0 \qquad \forall \quad \alpha \notin \Omega \quad (\text{i.e. } \ \Gamma \overset{\Omega}{\backsim} 0)$$

então

(7.1.2) $$f(z).\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)dw}{w-z} \qquad \forall \quad z \in \Omega \backslash \Gamma^*$$

e

(7.1.3) $$\int_\Gamma f(z)dz = 0.$$

(2^o) *Se Γ_1 e Γ_2 são dois ciclos em Ω tais que*

(7.1.4) $\qquad \mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\Gamma_2}(\alpha) \qquad \forall \quad \alpha \notin \Omega \qquad (\text{i.e. } \Gamma_1 \overset{\Omega}{\backsim} \Gamma_2)$

então

(7.1.5)
$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz.$$

Observação: Já vimos no Exemplo (a) precedente que se $\Omega = \mathbb{C}$ então (7.1.1) vale para cada ciclo Γ em $\Omega = \mathbb{C}$. Mas é pertinente observar que *é inútil* provar o Teor. 7.1 no caso $\Omega = \mathbb{C}$ pois isto é imediato a partir do que já foi feito. De fato, $\Omega = \mathbb{C}$ sendo um aberto convexo, a parte (1^o) do Teor. 7.1 resulta do Teor. 5.7, 5.8 e de [1] (Ver início deste Cap. 7). A parte (2^o) do Teor. 7.1 (em qualquer caso $\Omega = \mathbb{C}$ ou $\Omega \neq \mathbb{C}$) é, como veremos, consequência trivial da parte (1^o). *Na prova do* Teor. 7.1 *podemos portanto supor* $\Omega \neq \mathbb{C}$.

A prova que segue do Teor. 7.1 é devida a John D. Dixon, Proc. Am. Math. Soc., Vol. 29, p. 625-626 (1971).

Prova (1^o) Seja $\Gamma = \sum_{i=1}^{\nu} n_i \gamma_i$. Pelo Lema 6.1, a função $g : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ definida por

$$g(z,w) = \begin{cases} (w-z)^{-1}.\,[f(w) - f(z)] \;, & \text{se} \quad w \neq z \\ f'(z) \;, & \text{se} \quad w = z \end{cases}$$

é contínua em $\Omega \times \Omega$. Em consequência podemos definir

$$h(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(z,w)dw \qquad \forall \quad z \in \Omega$$

e como

$$g(z,w) = (w-z)^{-1}.\,[f(w) - f(z)] \qquad \forall \quad (z,w) \in (\Omega \backslash \Gamma^*) \times \Gamma^*$$

resulta que

(7.1.6)
$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)dw}{w-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)dw}{w-z} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} - f(z).\mathrm{Ind}_{\Gamma}(z) \qquad \forall \quad z \in \Omega \backslash \Gamma^* \end{aligned}$$

e portanto, provar (7.1.2) equivale a mostrar que $h(z) = 0$ para cada $z \in \Omega \backslash \Gamma^*$. Na realidade vamos mostrar que

(7.1.7) $\qquad h(z) = 0 \qquad \forall \quad z \in \Omega.$

Comecemos provando que $h \in \mathcal{H}(\Omega)$. Como $g \in \mathcal{C}(\Omega \times \Omega, \mathbb{C})$ resulta que g é uniformemente contínua sobre cada $K \subset\subset \Omega \times \Omega$, donde se segue que, dados $\zeta \in \Omega$ e $\varepsilon > 0$ arbitrário, se $\overline{D}_r(\zeta) \subset\subset \Omega$ então $\overline{D}_r(\zeta) \times \Gamma^* \subset\subset \Omega \times \Omega$ o que implica que $g|\overline{D}_r(\zeta) \times \Gamma^*$ é uniformemente contínua. Em particular, existe $\delta \in]0, r[$ tal que

$$|z - \zeta| \leq \delta \implies |g(z,w) - g(\zeta,w)| \leq \frac{2\pi\varepsilon}{\sum\limits_{i=1}^{\nu} |\eta_i|\,|\gamma_i|} \qquad \forall \quad w \in \Gamma^*$$

donde:

$$|z - \zeta| \leq \delta \implies |h(z) - h(\zeta)| \leq \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{\nu} |n_i| \int\limits_{\gamma_i} |g(z,w) - g(\zeta,w)|\,|dw| \leq \varepsilon$$

o que mostra que

$$h \in \mathcal{C}(\Omega)\ . \tag{7.1.8}$$

Fixemos $w \in \Omega$ arbitário e seja $\psi_w : z \in \Omega \longmapsto g(z,w) \in \mathbb{C}$, então como $g \in \mathcal{C}(\Omega \times \Omega)$ é claro que $\psi_w \in \mathcal{C}(\Omega)$. Por outro lado, é claro pela definição de g que $\psi_w \in \mathcal{H}(\Omega\backslash\{w\})$, pois $z \longmapsto f(w) - f(z)$ e $z \longmapsto w - z$ são holomorfas e o denominador não é nulo em $\Omega\backslash\{w\}$. Logo pelo exerc. (5.14) temos $\psi_w \in \mathcal{H}(\Omega)$, o que prova que

$$\psi_w \in \mathcal{H}(\Omega) \qquad \forall \quad w \in \Omega\ . \tag{7.1.9}$$

Para provar que $h \in \mathcal{H}(\Omega)$, por (7.1.8) e pelo teorema de Morera (Teor. 5.17) basta provar que se Δ é um triângulo fechado arbitrário contido em Ω então

$$\int\limits_{\partial\Delta} h(z)dz = 0 \quad , \tag{7.1.10}$$

o que é uma consequência imediata do teorema de Fubini, do teorema de Cauchy para um triângulo (Lema 5.6) e de (7.1.9). De fato,

$$\int\limits_{\partial\Delta} h(z)dz = \int\limits_{\partial\Delta} \left\{ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} g(z,w)dw \right\} dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\Big(\int\limits_{\partial\Delta} g(z,w)dz\Big)dw =$$

$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\Big(\int\limits_{\partial\Delta} \psi_w(z)dz\Big)dw = 0$, já que por (7.1.9) e pelo Lema 5.6 temos

$\int_{\partial\Delta} \psi_w(z)dz = 0 \qquad \forall \quad w \in \Omega$. Desta forma, provamos (7.1.10) e portanto

que $h \in \mathcal{H}(\Omega)$. Seja agora

$$\Omega_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0\} \ ,$$

é claro (pelo Teor. 5.2) que Ω_1 é aberto e como por definição de Ω_1 temos $\Omega_1 \cap \Gamma^* = \varnothing$, o Teor. 4.3 implica que a função

$$h_1 : z \in \Omega_1 \longmapsto \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)dw}{w-z} \in \mathbb{C}$$

é analítica em Ω_1. Como estamos supondo $\Omega \neq \mathbb{C}$, isto é $\complement\Omega \neq \varnothing$, e a hipótese (7.1.1) implica $\complement\Omega \subset \Omega_1$, resultam as duas asserções seguintes:

$$\mathbb{C} = \Omega \cup \complement\Omega \subset \Omega \cup \Omega_1 = \mathbb{C} \qquad \text{e} \qquad \Omega_1 \neq \varnothing \quad (\text{pois } \Omega_1 \supset \complement\Omega \neq \varnothing).$$

Como $\mathbb{C}$ é conexo, as relações acima (junto ao fato óbvio: $\Omega \neq \varnothing$) implicam $\Omega_1 \cap \Omega \neq \varnothing$. De (7.1.6) e das definições de Ω_1 e h_1 resulta

$$h|\Omega \cap \Omega_1 = h_1|\Omega \cap \Omega_1$$

o que permite definir uma função inteira

$$\varphi : \Omega \cup \Omega_1 = \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

por $\varphi|\Omega := h$ e $\varphi|\Omega_1 := h_1$. Temos então $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.
Se V_i é a componente ilimitada de $\complement\gamma_i^*$ $(i-1,2,\ldots,\nu)$ então $V = \bigcap_{i\leq 1\leq \nu} V_i$ é a componente ilimitada de $\complement\Gamma^*$, logo pelo Teor. 5.2 resulta que $V \subset \Omega_1$, (portanto Ω_1 é ilimitado) e então de $\varphi|\Omega_1 = h_1$ resulta (admitindo a existência desses limites):

$$\text{(7.1.11)} \qquad \lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in\Omega}} \varphi(z) = \lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in\Omega_1}} h_1(z)$$

Mostremos que $\lim_{|z|\to+\infty} h_1(z) = 0$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, vamos mostrar

que existe $K > 0$ tal que

$$|z| > K \implies |h_1(z)| \leq \varepsilon$$

Tomamos

$$K > \sup\left\{\frac{1}{\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{\nu} |n_i|\,|\gamma_i|\,\|f\|_{\gamma_i^*} \quad , \quad 2\sup_{w\in\Gamma^*}|w|\right\} \ .$$

A desigualdade $K > 2\sup_{w\in\Gamma^*}|w|$ implica

$$|w-z| \geq ||w|-|z|| = |z|-|w| > K-|w| > K/2 \quad \forall \quad \begin{cases} w \in \Gamma^* \\ |z| > K \end{cases}$$

donde resulta para $|z| > K$:

$$|h_1(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{\nu} n_i \int\limits_{\gamma_i} \frac{f(w)dw}{w-z} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{\nu} |n_i| \left| \int\limits_{\gamma_i} \frac{f(w)dw}{w-z} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{\nu} |n_i| \int\limits_{\gamma_i} \frac{|f(w)|}{|w-z|} |dw| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{\nu} |n_i| \int\limits_{\gamma_i} \frac{\|f\|_{\gamma_i^*}}{K/2} |dw| =$$

$= \frac{1}{\pi K} \sum_{i=1}^{\nu} |n_i| \, |\gamma_i| \, \|f\|_{\gamma_i^*} < \varepsilon$, o que prova que $\lim\limits_{\substack{|z| \to +\infty \\ z \in \Omega_1}} h_1(z) = 0$ e então por (7.1.11) resulta

$$\lim_{\substack{|z| \to +\infty \\ z \in \Omega_1}} \varphi(z) = 0 \quad \text{e portanto} \quad \lim_{\substack{|z| \to +\infty \\ z \in \mathbb{C}}} \varphi(z) = 0 \tag{7.1.12}$$

Ora, φ é inteira e então (7.1.12) mostra que φ é limitada, logo pelo Corol. 5.12 (teor. de Louiville), resulta que φ é constante, logo por (7.1.12) resulta que $\varphi = 0$. A relação $\varphi|\Omega = h$, prova então (7.1.7), o que por (7.1.6) demonstra (7.1.2).
Vamos provar (7.1.3) a partir de (7.1.2). Seja $a \in \Omega \backslash \Gamma^*$ um ponto arbitrário, então definimos

$$F(z) := (z-a)f(z) \qquad \forall \quad z \in \Omega$$

É claro então que

$$\begin{cases} f(z) = \dfrac{F(z)}{z-a} & \forall \quad z \in \Gamma^* \\ \\ F \in \mathcal{H}(\Omega) \end{cases}$$

Por (7.1.2) aplicada à função F temos:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{F(z)}{z-a} dz = \text{Ind}_{\Gamma}(a).F(a) = 0$$

pois $F(a) = 0$, o que prova (7.1.3).

Finalmente, (7.1.5) segue de (7.1.4) e (7.1.3) aplicado ao ciclo $\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2$, pois se $\alpha \notin \Omega$ então

$$\text{Ind}_{\Gamma}(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z-a} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_1} \frac{dz}{z-\alpha} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_1} \frac{dz}{z-\alpha} =$$

$= \text{Ind}_{\Gamma_1}(\alpha) - \text{Ind}_{\Gamma_2}(\alpha) = 0$ por (7.1.4), isto é

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0 \qquad \forall \quad \alpha \notin \Omega$$
portanto por (7.1.3) temos:

$$0 = \int_\Gamma f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz - \int_{\Gamma_2} f(z)dz \ .$$

Observe que no caso $\Omega = \mathbb{C}$ já vimos que (1^o) vale e, em particular, (7.1.3) é válida o que implica a identidade acima, que prova (7.1.5) neste caso. □

Observação: O Teor. 7.1 (1^o) generaliza o teor. de Cauchy num aberto convexo (Teor. 5.7) e o teor. de representação integral de Cauchy (Teor. 5.8). De fato, se γ é uma *CSDF* num aberto convexo $\Omega \neq \mathbb{C}$ e $\alpha \notin \Omega$ então aplicando o Teor. 5.7 à função holomorfa $\varphi_\alpha(z) = (z-\alpha)^{-1}$ $(z \in \Omega)$ resulta $\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha) = 0$, o que mostra que a hipótese (7.1.1) do Teor. 7.1 está satisfeita para cada ciclo em Ω se Ω é convexo.

Antes de introduzir o conceito de homotopia que vai nos conduzir ao conceito fundamental de aberto simplesmente conexo além de fornecer uma importante classe de exemplos de holomologia, vamos apresentar uma consequência extremamente importante do Teor. 7.1 que mostra como o cálculo de integrais ao longo de um ciclo "complicado "se reduz ao cálculo de integrais sobre "pequenos círculos ". *Este resultado mostra também a razão pela qual era natural definir cadeias do modo como fizemos,* isto é, como combinações lineares formais de *CSDF* com coeficientes <u>inteiros</u>. Com a terminologia que será introduzida no Cap. 8 o resultado seguinte será chamado "Teorema dos resíduos".

Corolário 7.2 *Sejam Ω um aberto não vazio de $\mathbb{C}$, $F = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ um conjunto finito de pontos de Ω, $f \in \mathcal{H}(\Omega \backslash F)$ e Γ um ciclo em Ω tal que*
$$\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0 \qquad \forall \quad \alpha \notin \Omega \qquad (\text{i.e. } \ \Gamma \overset{\Omega}{\backsim} 0) \ .$$
Seja $\gamma_k : t \in [0, 2\pi] \longmapsto a_k + r_k e^{it} \in \mathbb{C}$ o círculo orientado positivamente de centro a_k e raio r_k para cada $k = 1, \dots, m$. Indiquemos com D_k o disco aberto $D_{r_k}(a_k)$ e vamos supor ainda que os r_k são suficientemente pequenos de modo que:
(1^o) $\overline{D}_k \subset \Omega \quad \forall \quad k = 1, \dots, m$; (2^o) $D_k \cap D_j = \varnothing$ *se* $k \neq j$.
Seja
$$n_k := \mathrm{Ind}_\Gamma(a_k) \qquad \forall \quad k = 1, 2, \dots, m \ .$$
(portanto $a_k \notin \Gamma^*$ $(1 \leq k \leq m)$ donde Γ é um ciclo em $\Omega \backslash F$.)

Então:
$$\Gamma \overset{\Omega \backslash F}{\backsim} \Sigma n_k \gamma_k$$
e em particular

$$\int_{\Gamma} f = \sum_{1\le k\le m} n_k \int_{\gamma_k} f = \int_{\Sigma\eta_k\gamma_k} f$$

Prova Sejam $\Gamma_1 := \Gamma - \sum_{k=1}^{m} n_k\gamma_k$ e $\alpha \notin \Omega\backslash F$. Se $\alpha \notin F$, então $\alpha \notin \Omega$ portanto $\mathrm{Ind}_{\gamma_k}(\alpha) = 0$ para cada $k = 1, \ldots, m$ e portanto $\mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(\alpha) =$ $= \mathrm{Ind}_{\Gamma}(\alpha) - \sum_{k=1}^{m} n_k \ \mathrm{Ind}_{\gamma_k}(\alpha) = 0 - \sum_{k=1}^{m} n_k 0 = 0$. Se $\alpha \in F$, isto é, $\alpha = a_j$ para algum j $(1 \le j \le m)$, então $\mathrm{Ind}_{\gamma_k}(\alpha) = \delta_{jk}$ $(1 \le k \le m)$ e então: $\mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(a_j) = \mathrm{Ind}_{\Gamma}(a_j) - \sum_{k=1}^{m} n_k\delta_{jk} = \mathrm{Ind}_{\Gamma}(a_j) - n_j = 0$ por hipótese. Em consequência provamos que

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(\alpha) = 0 \qquad \forall \quad \alpha \notin \Omega\backslash F,$$

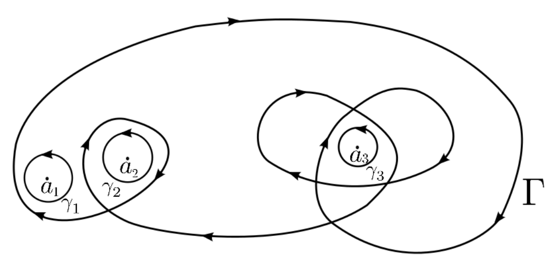
isto é,

$\Gamma_1 \overset{\Omega\backslash F}{\backsim} 0$ ou seja (por [8], antes dos exemplos que precedem o Teor. 7.1):

$$\Gamma \overset{\Omega\backslash F}{\backsim} \sum_{1\le k\le m} n_k\gamma_k \ .$$

Pelo Teor. 7.1 (2^o) resulta então $\int_{\Gamma} f = \sum_{k=1}^{m} n_k \int_{\gamma_k} f$. $\square$

Ilustramos o Corol. 7.2 com a figura



Como $\mathrm{Ind}_{\Gamma}(a_1) = -1$, $\mathrm{Ind}_{\Gamma}(a_2) = -2$ e $\mathrm{Ind}_{\Gamma}(a_3) = -3$, o Corol. 7.2 implica $\Gamma \backsim -\gamma_1 - 2\gamma_2 - 3\gamma_3$ e portanto

$$\int_{\Gamma} f = -\int_{\gamma_1} f - 2\int_{\gamma_2} f - 3\int_{\gamma_3} f$$

A seguir vamos introduzir e discutir brevemente um conceito topológico que além do seu interesse próprio é importante do ponto de vista das aplicações do teorema de Cauchy.

Definição 7.3 Sejam I=$[a,b]$ um intervalo compacto de $\mathbb{R}$ e Ω um aberto de $\mathbb{C}$.
(1^o) Sejam $\gamma_1 : \mathrm{I} \to \Omega$ e $\gamma_2 : \mathrm{I} \to \Omega$ duas curvas em Ω tendo a mesma origem e mesmo extremo (i.e. $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ e $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$). Diz-se que γ_1 e γ_2 são *homotópicas com extremos fixos* (ou brevemente Ω-*HEF*) se existe uma função contínua h :I×I $\to \Omega$ tal que:
(1) $h(a,t) = \gamma_1(t) \quad \forall \quad t \in \mathrm{I}$; (3) $h(s,a) = \gamma_1(a) = \gamma_2(a) \quad \forall \quad s \in \mathrm{I}$
(2) $h(b,t) = \gamma_2(t) \quad \forall \quad t \in \mathrm{I}$; (4) $h(s,b) = \gamma_1(b) = \gamma_2(b) \quad \forall \quad s \in \mathrm{I}$
Diz-se também que h é uma *homotopia de* γ_1 *a* γ_2 (ou uma *deformação contínua de* γ_1 *a* γ_2).
(2^o) Sejam $\gamma_1 : \mathrm{I} \to \Omega$ e $\gamma_2 : \mathrm{I} \to \Omega$ duas curvas fechadas em Ω. Diz-se que γ_1 e γ_2 são Ω-*homotópicas como curvas fechadas* (ou brevemente Ω-*HCF*) se existe uma função contínua $h : \mathrm{I}\times\mathrm{I} \to \Omega$ tal que, além das condições (1) e (2) acima, verifica a condição seguinte:

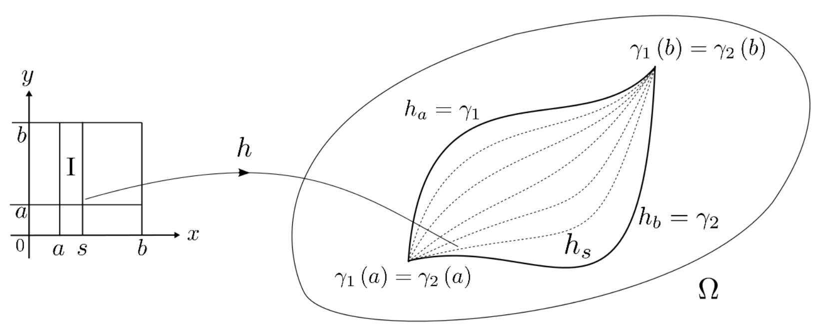
$$(3') \qquad h(s,a) = h(s,b) \quad \forall \quad s \in \mathrm{I}$$

Se γ_1 é constante dizemos que γ_1 é *homotópica a um ponto em* Ω.

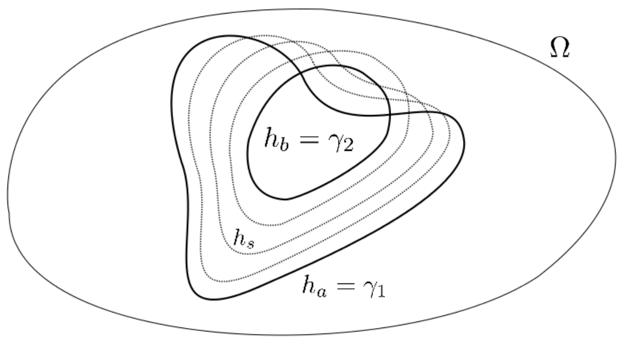
Observação: É possível definir homotopia de duas curvas arbitrárias no plano, i.e. sem extremos fixos, nós não o faremos pois não será necessário aqui (ver [D], pg 203).

O conceito de homotopia formaliza a ideia intuitiva de deformação contínua de uma curva em outra. As duas figuras seguintes ilustram os casos Ω-*HEF* e Ω-*HCF* respectivamente:

Caso Ω-*HEF*



Para cada $s \in \mathrm{I}$ a aplicação parcial $h_s : t \in \mathrm{I} \longmapsto h(s,t) \in \Omega$ é contínua (pois h o é) e as condições (3) e (4) mostram que h_s tem mesma origem e mesmo extremo que γ_1 e γ_2 para cada $s \in \mathrm{I}$. As condições (1) e (2) mostram que $h_a = \gamma_1$ e $h_b = \gamma_2$.
Caso $\Omega-HCF$



Como no caso anterior, para cada $s \in \mathrm{I}$ a função parcial $h_s : t \in \mathrm{I} \longmapsto h(s,t) \in \Omega$ é contínua e a condição $(3')$ mostra que h_s é uma curva fechada para cada $s \in \mathrm{I}$. As condições (1) e (2) mostram que $h_a = \gamma_1$ e $h_b = \gamma_2$.

Falando intuitivamente, um *aberto simplesmente conexo* é um aberto conexo que "não tem buracos"e como a homotopia é a ferramenta matemática que foi criada para "detectar buracos"podemos agora introduzir naturalmente este conceito:

Definição 7.4 Um aberto não vazio Ω de $\mathbb{C}$ é dito *simplesmente conexo* se Ω é conexo e cada curva fechada γ em Ω é homotópica a um ponto em Ω.

Exemplo Um aberto Ω de $\mathbb{C}$ é dito *a-estrelado* (onde $a \in \Omega$) se, para cada $z \in \Omega$ tivermos $[a,z]^* \subset \Omega$ (lembremos que

$$[a,z] : t \in [0,1] \longmapsto (1-t)a + tz \in \mathbb{C}).$$

É claro que um tal conjunto Ω é conexo (é trivial ver que é conexo por poligonais de dois lados) e Ω é simplesmente conexo pois se $\gamma : [0,1] \to \Omega$ é uma curva fechada em Ω então a função

$$h : (s,t) \in [0,1] \times [0,1] \longmapsto sa + (1-s)\gamma(t) \in \mathbb{C}$$

define uma homotopia de γ ao ponto a. De fato, é claro que h é contínua e como $\gamma(t) \in \Omega \quad \forall \quad t \in [0,1]$ por hipótese e Ω é a-estrelado, resulta que $[a, \gamma(t)]^*$ está contido em Ω para cada $t \in [0,1]$, isto é $\mathrm{Im}(h) \subset \Omega$. Além disto, $h(0,t) = \gamma(t) \quad \forall \quad t \in [0,1]$, $h(1,t) = a \quad \forall \quad t \in [0,1]$ e $h(s,0) =$ $= sa + (1-s)\gamma(0) = sa + (1-s)\gamma(t) = h(s,1) \quad \forall \quad s \in [0,1]$, o que prova as condições (1), (2) e $(3')$ da Ω-*HCF*.

Em particular, todo aberto convexo Ω (isto é, Ω é a-estrelado $\forall \quad a \in \Omega$) é simplesmente conexo.

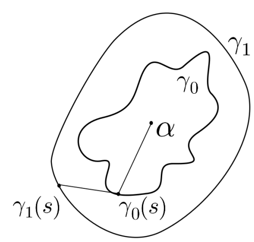
O nosso próximo objetivo é demonstrar que se γ_1 e γ_2 são duas *CSDF* em Ω, então

$$\left| \begin{array}{l} \gamma_1 \text{ e } \gamma_2 \text{ são } \Omega\text{-}HCF \quad \Longrightarrow \gamma_1 \overset{\Omega}{\backsim} \gamma_2 \\ \gamma_1 \text{ é homotópica a um ponto em } \Omega \quad \Longrightarrow \quad \gamma_1 \overset{\Omega}{\backsim} 0 \end{array} \right.$$

e para isto precisamos do seguinte:

Lema 7.5 *Sejam* $\gamma_0 : [0,1] \to \mathbb{C}$ *e* $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ *duas CSDF em* $\mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ *e suponhamos que*

(7.5.1) $\quad |\gamma_1(s) - \gamma_0(s)| < |\alpha - \gamma_0(s)| \quad \forall \ s \in [0,1]$



Então,

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(\alpha) \ .$$

Prova De (7.5.1) resulta $|\alpha - \gamma_0(s)| > 0$ para cada $s \in [0,1]$, donde $\alpha \notin \gamma_0^*$. Se $\alpha \in \gamma_1^*$ então $\exists \ \ s_0 \in [0,1]$ tal que $\alpha = \gamma_1(s_0)$ e então por (7.5.1)

$$|\alpha - \gamma_0(s_0)| = |\gamma_1(s_0) - \gamma_0(s_0)| < |\alpha - \gamma_0(s_0)|$$

o que é absurdo, portanto $\alpha \notin \gamma_1^*$. Em consequência podemos definir

$$\gamma := \frac{\gamma_1 - \alpha}{\gamma_0 - \alpha}$$

donde

(7.5.2) $$\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{\gamma_1'}{\gamma_1 - \alpha} - \frac{\gamma_0'}{\gamma_0 - \alpha}$$

e por (7.5.1) temos

$$|1 - \gamma(s)| = \left| 1 - \frac{\gamma_1(s) - \alpha}{\gamma_0(s) - \alpha} \right| = \left| \frac{\gamma_1(s) - \gamma_0(s)}{\alpha - \gamma_0(s)} \right| < 1 \qquad \forall \quad s \in [0,1]$$

o que mostra que $\gamma^* \subset D_1(1)$ e como $0 \notin D_1(1)$ resulta

$$\mathrm{Ind}_{\gamma}(0) = 0$$

o que junto a (7.5.2) implica

$$0 = 2\pi i \ \mathrm{Ind}\gamma(0) = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(s)ds}{\gamma(s)} = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma_1'(s)ds}{\gamma_1(s) - \alpha} - \int_0^{2\pi} \frac{\gamma_0'(s)ds}{\gamma_0(s) - \alpha} =$$

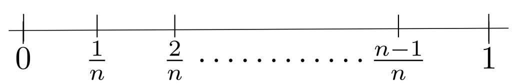
$$= 2\pi i \left[\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(\alpha) - \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(\alpha) \right] . \ \square$$

Proposição 7.6 *Seja* Ω *um aberto de* $\mathbb{C}$ *tal que* $\varnothing \neq \Omega$. *Se* Γ_0 *e* Γ_1 *são duas CSDF em* Ω *que são* Ω*-HCF, então* $\Gamma_0 \overset{\Omega}{\backsim} \Gamma_1$ (isto é, $\mathrm{Ind}_{\Gamma_0}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(\alpha) \quad \forall \quad \alpha \notin \Omega$). *Em particular, se* Γ *é uma CSDF em* Ω *que é homotópica a um ponto em* Ω, *então* $\Gamma \overset{\Omega}{\backsim} 0$ (isto é $\mathrm{Ind}_{\Gamma}(\alpha) = 0 \quad \forall \quad \alpha \notin \Omega$).

Antes de iniciar a prova formal da Prop. 7.6 vamos mostrar a ideia geométrica muito simples da mesma. O Lema 7.5 expressa, em linguagem intuitiva, que "se γ_0 e γ_1 são *CSDF*, $\alpha \notin \gamma_0^* \cup \gamma_1^*$ e, num certo sentido, α está mais longe das curvas que estas entre si, então $\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(\alpha)$". Assim sendo, a Prop. 7.6 parece bastante natural pois se $H : \mathrm{I} \times \mathrm{I} \to \Omega$ é uma homotopia de Γ_0 a Γ_1 (tomemos I$=[0,1]$ para simplificar, então $H(s,0) = \Gamma_0(s)$, $H(s,1) = \Gamma_1(s)$ e $H(0,t) = H(1,t)$, $\forall \quad (s,t) \in \mathrm{I}^2$), considerando a família a um parâmetro de curvas fechadas

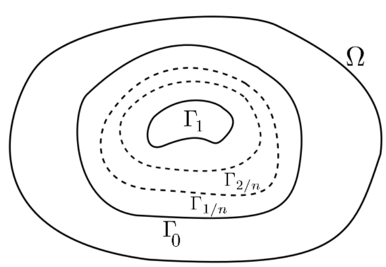
$$\Gamma_t : s \in \mathrm{I} \longmapsto H(s,t) \in \mathbb{C}$$

podemos pensar em dividir I$=[0,1]$ em n partes iguais:



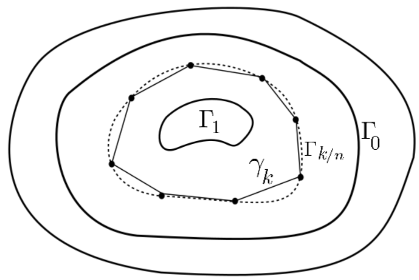
e considerar $\Gamma_0, \Gamma_{1/n}, \Gamma_{2/n}, \ldots, \Gamma_{n-1/n}, \Gamma_1$. Se n for suficientemente grande, é claro que k/n e $k+1/n$ serão próximos e então, pela continuidade uniforme de H, podemos esperar que $\Gamma_{k/n}$ e $\Gamma_{k+1/n}$ são "próximas"e que $\alpha \notin \Omega$ ëstá mais longe de $\Gamma_{k/n}$ e $\Gamma_{k+1/n}$ que estas entre si", donde resultaria, aplicando $n+2$ vezes o Lema 7.5, que

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma_0}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\Gamma_{1/n}}(\alpha) = \ldots\ldots\ldots = \mathrm{Ind}_{\Gamma_{n-1/n}}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(\alpha) \qquad ((*))$$



Entretanto, há uma objeção lógica à linha de raciocínio precedente devida ao seguinte fato: não há nada na definição de homotopia que nos permita assegurar que as curvas fechadas $\Gamma_{k/n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ sejam *CSDF*, e então a expressão $\mathrm{Ind}_{\Gamma_{k/n}}(\alpha)$ pode não estar definida. Como a forma mais simples de obtermos uma *CSDF* "próxima"de uma curva fechada γ dada, é construir uma poligonal fechada de vértices em γ, vamos modificar o raciocínio descrito acima substituindo a sequência $\Gamma_0, \Gamma_{1/n}, \ldots, \Gamma_1$ por uma sequência de poligonais fechadas $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$, onde γ_k tem seus vértices em $\Gamma_{k/n}$. No fim em vez de $((*))$ teremos

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma_0}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(\alpha) = \ldots\ldots = \mathrm{Ind}_{\gamma_n}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(\alpha)$$



Prova da Prop. 7.6 **Se** $\Omega = \mathbb{C}$ então (7.1.1) vale automáticamente, isto é, $\Gamma_0 - \Gamma_1 \overset{\mathbb{C}}{\backsim} 0$ donde $\Gamma_0 \overset{\mathbb{C}}{\backsim} \Gamma_1$ o que mostra que o resultado é trivial neste caso logo podemos supor $\Omega \neq \mathbb{C}$. Fixemos $\alpha \notin \Omega$. Suponhamos para simplificar que Γ_0 e Γ_1 têm como domínio $\mathrm{I} = [0,1]$, então por definição existe $H \in \mathcal{C}(\mathrm{I}^2, \Omega)$ tal que

$$\text{(7.6.1)} \quad \left| \begin{array}{l} H(s,0) = \Gamma_0(s)\ ,\ H(s,1) = \Gamma_1(s)\ e\ H(0,t) = H(1,t) \\ \forall\ (s,t) \in \mathrm{I}^2. \end{array} \right.$$

Como I^2 é compacto, $H(\mathrm{I}^2)$ também é compacto e como

$$\mathrm{dist}(\alpha, H(\mathrm{I}^2)) \geq dist(\partial\Omega, H(\mathrm{I}^2)) > 0$$

é claro que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\text{(7.6.2)} \qquad |\alpha - H(s,t)| > 2\varepsilon \quad \forall \quad (s,t) \in \mathrm{I}^2.$$

Como H é uniformemente contínua, existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$\text{(7.6.3)} \qquad |s - s'| + |t - t'| \leq \frac{1}{n} \implies |H(s,t) - H(s',t')| < \varepsilon\ .$$

Para cada $t \in \mathrm{I}$, seja $\Gamma_t : s \in \mathrm{I} \longmapsto H(s,t) \in \Omega$ e consideremos as $n+1$ curvas fechadas $\Gamma_0, \Gamma_{1/n}, \ldots, \Gamma_{n-1/n}, \Gamma_1$. Para cada $k = 0, 1, \ldots, n$ vamos construir uma poligonal γ_k cujos vértices estão em Γ_k da maneira seguinte. Dividimos I em n intervalos iguais

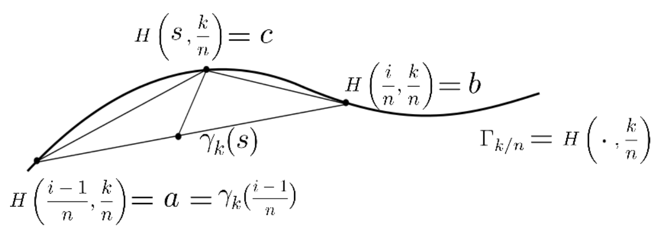
$$J_i = \left[\frac{i-1}{n},\ \frac{i}{n}\right] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

e para cada $k = 0, 1, \ldots, n$ definimos γ_k sobre J_i por

$$\text{(7.6.4)} \quad \left| \begin{array}{l} \gamma_k(s) = H(\frac{i}{n}, \frac{k}{n})(ns + 1 - i) + H(\frac{i-1}{n}, \frac{k}{n})(i - ns) \\ \\ \forall\ s \in J_i = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \end{array} \right.$$

(Observe que $\forall \ \ s \in J_i$ tem-se $i-1 \leq ns \leq i$ donde $i-ns \geq 0$, $ns+1-i \geq 0$ e $(i-ns) + (ns+1-i) = 1$ o que implica $\gamma_k(s) = H(\dfrac{i-1}{n}, \dfrac{k}{n})\lambda + H(\dfrac{i}{n}, \dfrac{k}{n})(1-\lambda)$, com $\lambda := i-ns$ e como a imagem de J_i pela aplicação $s \longmapsto \lambda$ é $[0,1]$ é claro que

$$(\gamma_k|J_i)^* = \left[H(\frac{i-1}{n}, \frac{k}{n}), H(\frac{i}{n}, \frac{k}{n}) \right] \ ).$$



Mostremos a seguir que de (7.6.3) e de (7.6.4) resulta

(7.6.5) $\qquad |\gamma_k(s) - H(s, k/n)| < \varepsilon \quad \forall \quad k = 0, 1, \ldots, n \quad \text{e} \quad \forall \quad s \in \mathrm{I}$

De fato, por (7.6.3) resulta que os lados do triângulo (a, b, c) na figura anterior têm comprimento $< \varepsilon$ e como diâmetro de um triângulo é o comprimento do maior dos seus lados, é claro que temos (7.6.5).
Como (7.6.5) se escreve

$$\left|\gamma_k(s) - \Gamma_{k/n}(s)\right| < \varepsilon \quad \forall \quad k = 0, 1, \ldots, n \quad \text{e} \quad \forall \quad s \in \mathrm{I}$$

resulta em particular para $k = 0$ e $k = n$:

(7.6.6) $\qquad |\gamma_0(s) - \Gamma_0(s)| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |\gamma_n(s) - \Gamma_1(s)| < \varepsilon \quad \forall \quad s \in \mathrm{I}$

De (7.6.2), (7.6.5) e da propriedade triangular resulta:

$$|\alpha - \gamma_k(s)| \geq |\alpha - H(s, k/n)| - |H(s, k/n) - \gamma_k(s)| > \varepsilon, \text{ portanto}$$

(7.6.7) $\qquad |\alpha - \gamma_k(s)| > \varepsilon \quad \forall \quad k = 0, 1, \ldots, n \quad \text{e} \quad \forall \quad s \in \mathrm{I}$

Por outro lado (fazendo as contas), de (7.6.3) e (7.6.4) segue

(7.6.8) $\qquad |\gamma_{k-1}(s) - \gamma_k(s)| < \varepsilon \quad \forall \quad k = 0, 1, \ldots, n \quad \text{e} \quad \forall \quad s \in \mathrm{I}$

Finalmente, de (7.6.6), (7.6.7) e (7.6.8) e aplicando $n+2$ vezes o Lema 7.5 obtemos $\mathrm{Ind}_{\Gamma_0}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(\alpha) = \ldots = \mathrm{Ind}_{\gamma_n}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(\alpha)$, o que prova que $\Gamma_0 \overset{\Omega}{\backsim} \Gamma_1$. Dizer que Γ é homotopica a um ponto $\zeta \in \Omega$ significa por definição que Γ é homotópica a uma curva constante $\widetilde{\Gamma} : t \in \mathrm{I} \longmapsto \zeta \in \Omega$. Pelo que precede temos $\mathrm{Ind}_{\Gamma}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}}(\alpha) \ \ \forall \ \ \alpha \notin \Omega$ e visivelmente $\mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}}(\alpha) = 0 \quad \forall \quad \alpha \neq \zeta$. $\square$

A recíproca da Prop. 7.6 é falsa, ver exerc. (7.4).

O resultado seguinte é a "versão homotópica"do teorema de Cauchy e é de fato a mais utilizada nas aplicações.

Teorema 7.7 (Cauchy) *Sejam Ω um aberto não vazio arbitrário de $\mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Então:*
(1^o) *Se γ é uma CSDF em Ω e γ é homotópica a um ponto em Ω, então*

$$f(z).\mathrm{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(w)dw}{w-z} \qquad \forall \quad z \in \Omega \backslash \gamma^*$$

e

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0 \ .$$

(2^o) *Se γ_1 e γ_2 são duas CSDF em Ω e γ_1 e γ_2 são Ω-HCF, então*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz \ .$$

Prova (1^o) Se γ é homotópica a um ponto em Ω, a última asserção da Prop.7.6 mostra que $\gamma \overset{\Omega}{\backsim} 0$ e, em consequência, o resultado é um caso particular do Teor. 7.1 (1^o).
(2^o) Se γ_1 e γ_2 são Ω-*HCF*, pela primeira parte da Prop. 7.6 resulta que $\gamma_1 \overset{\Omega}{\backsim} \gamma_2$, logo o resultado é um caso particular do Teor. 7.1 (2^o) . □

Uma outra forma muito utilizada do teorema de Cauchy é a seguinte em que Ω é suposto simplesmente conexo:

Teorema 7.8 *Seja Ω um aberto simplesmente conexo de $\mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Se γ é uma CSDF em Ω, então:*

$$f(z)\mathrm{Ind}_{\gamma}(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(w)dw}{w-z} \qquad \forall \quad z \in \Omega \backslash \gamma^*$$

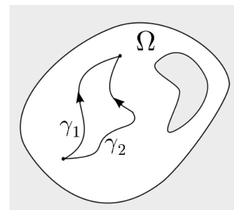
e

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0 \ .$$

Prova Como Ω é simplesmente conexo e γ é uma *CSDF* em Ω, é claro que γ é homotópica a um ponto em Ω e portanto o resultado é um caso particular do Teor. 7.7 (1^o). □

Observação Nas hipóteses do Teor. 7.8, a asserção correspondente a (2^o) do Teor. 7.7, isto é, "Se Ω é simplesmente conexo, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e γ_1 e γ_2 são duas *CSDF* em Ω então $\displaystyle\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma 2} f$ ", é verdadeira porém absolutamente trivial pois ambas integrais são nulas (pelo Teor. 7.8). Esta é a razão pela qual enunciamos o Teor. 7.8 sem a parte (2^o).

Teorema 7.9 (independência do caminho) *Sejam Ω um aberto não vazio de $\mathbb{C}$, I um intervalo compacto e $\gamma_1 : \mathrm{I} \to \Omega$, $\gamma_2 : \mathrm{I} \to \Omega$ duas CSD em Ω com mesma origem e mesmo extremo.*



(1^o) *Se γ_1 e γ_2 são Ω-HEF, então*

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f \qquad \forall \quad f \in \mathcal{H}(\Omega).$$

(2^o) *Se Ω é simplesmente conexo, então*

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f \qquad \forall \quad f \in \mathcal{H}(\Omega).$$

Prova (1^o) Pelo exerc. (7.2) sabemos que $\gamma_1 \vee \gamma_2^0$ é uma CSDF em Ω homotópica a um ponto em Ω e então, pelo Teor. 7.7 (1^o) resulta para $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ arbitária:

$$(7.9.1) \qquad 0 = \int_{\gamma_1 \vee \gamma_2^0} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2^o} f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f \quad ,$$

o que prova a asserção.
(2^o) É claro que $\gamma_1 \vee \gamma_2^0$ é uma *CSDF* em Ω e como Ω é simplesmente conexo, pelo Teor. 7.8 (1^o), podemos escrever (7.9.1), o que prova a asserção neste caso. □

Se Ω é um aberto *simplesmente conexo,* $z, w \in \Omega$ são pontos arbitrários, γ é uma *CSD* em Ω de origem z e extremo w e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, pelo Teor. 7.9 ($2^o$), o valor da integral

$$\int_{\gamma} f$$

depende apenas dos pontos z e w e não da particular *CSD* γ em Ω de origem z e extremo w. No que segue indicaremos o valor comum de todas estas integrais pela notação

$$\int_z^w f = \int_z^w f(\lambda) d\lambda \ .$$

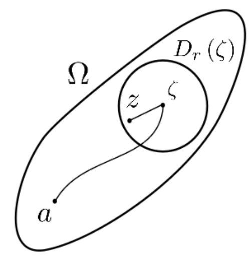
Corolário 7.10 *Se Ω é um aberto simplesmente conexo de $\mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, então f possui uma primitiva em Ω.*

Prova Fixemos $a \in \Omega$ arbitrário, então pelo Teor. 7.9(2^o), fica definida uma função

$$F : z \in \Omega \longmapsto \int_a^z f \quad \in \mathbb{C},$$

mostremos que

$$F'(z) = f(z) \qquad \forall \quad z \in \Omega \; .$$



Fixados $\zeta \in \Omega$ e $D_r(\zeta) \subset \Omega$, se $z \in D_r(\zeta)$ temos

$$F(z) = \int_a^z f = \int_z^\zeta f + \int_{[\zeta,z]} f =$$

$$F(\zeta) + \int_{[\zeta,z]} f(\lambda) d\lambda$$

donde

$$\frac{F(z) - F(\zeta)}{z - \zeta} = \frac{1}{z - \zeta} \int_{[\zeta,z]} f(\lambda) d\lambda$$

o que implica

$$\frac{F(z) - F(\zeta)}{z - \zeta} - f(\zeta) = \frac{1}{z - \zeta} \int_{[\zeta,z]} [f(\lambda) - f(\zeta)] \, d\lambda$$

e em consequência:

$$\left| \frac{F(z) - F(\zeta)}{z - \zeta} - f(\zeta) \right| \leq \sup_{\lambda \in [\zeta,z]^*} |f(\lambda) - f(\zeta)| \qquad \forall \;\; z \in D_r(\zeta)$$

o que mostra pela continuidade de f em ζ :

$$\lim_{z \to \zeta} \frac{F(z) - F(\zeta)}{z - \zeta} = f(\zeta) \; . \; \square$$

Como consequência do Corol. 7.10 resulta que se Ω é um aberto simplesmente conexo, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $f(z) \neq 0$ para cada $z \in \Omega$, então podemos definir em Ω um ramo do logaritmo de f (comparar a demonstração do próximo resultado com a do Teor. 6.4).

Corolário 7.11 *Sejam Ω um aberto simplesmente conexo e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$*

tal que $f(z) \neq 0$ *para cada* $z \in \Omega$. *Então existe* $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ *tal que* $f = \exp(g)$. *Se* $z_0 \in \Omega$ *e* $e^{w_0} = f(z_0)$, *a função* g *tal que* $f = \exp(g)$ *pode ser escolhida de modo a verificar a condição suplementar* $g(z_0) = w_0$.

Prova Por hipótese temos $f'/f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e como Ω é simplesmente conexo, o Corol. 7.10 implica que f'/f possui uma primitiva $g_1 \in \mathcal{H}(\Omega)$. Se $h := \exp(g_1)$, então $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $h(z) \neq 0$ para cada $z \in \Omega$, donde $f/h \in \mathcal{H}(\Omega)$ e

$$(f/h)' = \frac{f'h - fh'}{h^2} \ .$$

Por definição de h e de g_1 temos

$$h' = g_1'h = (f'/f)h \implies f'h - fh' = 0 \implies (f/h)' = 0$$

e portanto f/h é constante, isto é existe $c \in \mathbb{C}$ tal que

(7.11.1) $$\frac{f(z)}{h(z)} = c \qquad \forall \quad z \in \Omega$$

Como $f(z).h(z) \neq 0$ para cada $z \in \Omega$, é claro que $c \neq 0$, portanto existe $c' \in \mathbb{C}$ tal que $c = \exp(c')$ e então, da definição de h e de (7.11.1) resulta

(7.11.2) $$f = \exp(g_1 + c') \ .$$

Se $z_0 \in \Omega$ e $w_0 \in \mathbb{C}$ são tais que $e^{w_0} = f(z_0)$, então por (7.11.2) resulta

$$e^{w_0} = \exp\left[g_1(z_0) + c'\right] \implies \exp\left[w_0 - g_1(z_0) - c'\right] = 1$$

donde

$$\frac{w_0 - g_1(z_0) - c'}{2\pi i} = k \in \mathbb{Z}$$

o que implica $w_0 = g_1(z_0) + c' + 2k\pi i$ e então, definindo g por

$$g := g_1 + c' + 2k\pi i,$$

é claro que $g(z_0) = w_0$ e de (7.11.2) resulta $f = \exp(g)$. $\square$

O resultado seguinte dá a expressão integral do logaritmo complexo análoga ao caso real.

Proposição 7.12 *Seja* $D_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq -|z|\}$. *Fixados* $k \in \mathbb{Z}$ *e* $w_0 \in D_0$ *arbitrários temos*

$$Log_k(w) = Log_k(w_0) + \int_{w_0}^{w} \frac{d\lambda}{\lambda} = \ln|w_0| + i(Am(w_0) + 2k\pi) + \int_{w_0}^{w} \frac{d\lambda}{\lambda} \ ,$$

para cada $w \in D_0$. *Em particular* (tomando $k = 0$ e $w_0 = 1$) *temos:*

$$Log(w) = \int_1^w \frac{d\lambda}{\lambda} \ , \ \textit{para cada} \ \ w \in D_0 \ .$$

(lembrar que $Log := Log_0$)

Prova Seja $\varphi_0 : z \in D_0 \longmapsto 1/z \in \mathbb{C}$, então como D_0 é simplesmente conexo (por exemplo porque D_0 é 1-estrelado, ver Exemplo que segue à Def. 7.4 e $\varphi_0 \in \mathcal{H}(D_0)$, a prova do Corol. 7.10 mostra a função

$$\Phi : w \in D_0 \longmapsto \int_{w_0}^{w} \varphi_0(\lambda) d\lambda = \int_{w_0}^{w} \frac{d\lambda}{\lambda} \in \mathbb{C}$$

é uma primitiva de φ_0 em D_0, isto é, $\Phi' = \varphi_0$ em D_0. Como $Log_k' = \varphi_0$ em D_0 (ver [5′] pouco depois da Def. 6.12 e a definição de Log_k logo após a prova da Prop. 6.15), resulta que

$$(Log_k - \Phi)' = Log_k' - \Phi' = \varphi_0 - \varphi_0 = 0 \quad \text{em} \;\; D_0$$

o que implica (por ser D_0 conexo e pelo Corol. 2.8) que $Log_k - \Phi$ é constante em D_0, isto é, existe $c \in \mathbb{C}$ tal que

$$Log_k(w) - \Phi(w) = c \qquad \forall \quad w \in D_0$$

isto é

$$Log_k(w) = c + \int_{w_0}^{w} \frac{d\lambda}{\lambda} \qquad \forall \quad w \in D_0$$

o que para $w = w_0$ implica $c = Log_k(w_0)$. $\square$

Encerramos este capítulo com uma fórmula de representação integral para as derivadas sucessivas de uma função analítica que generaliza fortemente o Corol. 5.10. Precisaremos do seguinte:

Lema 7.13 *Seja γ uma CSD em $\mathbb{C}$ e seja $\varphi \in \mathcal{C}(\gamma^*)$.* Para cada $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ *consideremos a função*

$$F_m : z \in \complement\gamma^* \longmapsto \int_{\gamma} \frac{\varphi(\lambda) d\lambda}{(\lambda - z)^m} \in \mathbb{C} \; .$$

Então $F_m \in \mathcal{H}(\complement\gamma^*)$ e $F_m'(z) = mF_{m+1}(z) \qquad \forall \quad z \in \complement\gamma^*$.

Prova Começamos provando que F_1 é contínua. Sejam $a \in \complement\gamma^*$ arbitrário e $\delta > 0$ tal que $D_\delta(a) \cap \gamma^* = \varnothing$. É claro que para cada $z \in D_{\delta/2}(a)$ temos $|\lambda - z| > \delta/2$ para cada $\lambda \in \gamma^*$, o que implica

$$\text{(7.13.1)} \qquad \frac{1}{|\lambda - z|\,|\lambda - a|} \leq \frac{1}{(\delta/2)\delta} = \frac{2}{\delta^2} \qquad \forall \quad \begin{cases} \lambda \in \gamma^* \\ z \in D_{\delta/2}(a) \end{cases}$$

Ora, a definição de F_1 mostra que

$$\text{(7.13.2)} \qquad F_1(z) - F_1(a) = (z - a) \int_{\gamma} \frac{\varphi(\lambda) d\lambda}{(\lambda - z)(\lambda - a)}$$

o que junto a (7.13.1) acarreta

$$|F_1(z) - F_1(a)| \leq |z-a| \, \frac{2}{\delta^2} \int_\gamma |\varphi(\lambda)| \, |d\lambda| \qquad \forall \quad z \in D_{\delta/2}(a)$$

o que prova acontinuidade de F_1 em a em virtude da continuidade de φ que torna a integral do segundo membro finita. De (7.13.2) segue

$$\frac{F_1(z) - F_1(a)}{z-a} = \int_\gamma \frac{\varphi(\lambda) d\lambda}{(\lambda - z)(\lambda - a)}$$

donde

$$\left| \frac{F_1(z) - F_1(a)}{z-a} - F_2(a) \right| = \left| \int_\gamma \varphi(\lambda) \left\{ \frac{1}{(\lambda-z)(\lambda-a)} - \frac{1}{(\lambda-a)^2} \right\} d\lambda \right| =$$

$$= \left| (z-a) \int_\gamma \frac{\varphi(\lambda) d\lambda}{(\lambda-z)(\lambda-a)^2} \right| \leq |z-a| \int_\gamma \frac{|\varphi(\lambda)| \, |d\lambda|}{|\lambda - z| \, |\lambda - a|^2} \leq$$

$\leq |z-a| \, \dfrac{2}{\delta^3} \displaystyle\int_\gamma |\varphi(\lambda)| \, |d\lambda|$ se $z \in D_{\delta/2}(a)$, o que mostra que $F_1'(a) = F_2(a)$.

A prova segue por indução. Suponhamos provado que $F_{m-1}'(z) = (m-1) F_m(z) \ \ \forall \ \ z \in \complement\gamma^*$. Partimos da identidade de verificação imediata:

$$F_m(z) - F_m(a) = \left[\int_\gamma \frac{\varphi(\lambda) d\lambda}{(\lambda - z)^{m-1}(\lambda - a)} - \int_\gamma \frac{\varphi(\lambda) d\lambda}{(\lambda - a)^m} \right] +$$

$$(z-a) \int_\gamma \frac{\varphi(\lambda) d\lambda}{(\lambda-z)^m (\lambda - a)} \ .$$

Se $\Psi(\lambda) := \varphi(\lambda)(\lambda - a)^{-1} \quad \forall \ \ \lambda \in \gamma^*$ é claro que $\Psi \in \mathcal{C}(\gamma^*)$ e então a hipótese de indução aplicada à função

$$G_{m-1}(z) = \int_\gamma \frac{\Psi(\lambda) d\lambda}{(\lambda - z)^{m-1}}$$

mostra que G_{m-1} *é contínua em* a. Ora, a identidade acima se escreve

$$\text{(7.13.3)} \qquad \left| \begin{array}{l} F_m(z) - F_m(a) = [G_{m-1}(z) - G_{m-1}(a)] + \\ (z-a) \displaystyle\int_\gamma \frac{\varphi(\lambda) d\lambda}{(\lambda - z)^m (\lambda - a)} \end{array} \right.$$

donde $\forall \quad z \in D_{\delta/2}(a)$ resulta

$$|F_m(z) - F_m(a)| \leq |G_{m-1}(z) - G_{m-1}(a)| + |z-a| \, \frac{2^m}{\delta^{m+1}} \int_\gamma |\varphi(\lambda)| \, |d\lambda|$$

o que mostra que F_m é contínua em a.
Dividindo (7.13.3) por $(z-a)$ e observando que a integral que aparece no segundo membro de (7.13.3) é igual a $G_m(z)$, podemos escrever

$$\text{(7.13.4)} \qquad \frac{F_m(z)-F_m(a)}{z-a} = \frac{G_{m-1}(z)-G_{m-1}(a)}{z-a} + G_m(z)$$

A hipótese de indução aplicada a G_{m-1} mostra que

$$\lim_{z\to a} \frac{G_{m-1}(z)-G_{m-1}(a)}{z-a} = (m-1)G_m(a) = (m-1)F_{m+1}(a)$$

Por outro lado, como F_m é contínua e portanto G_m também o é, resulta que $\lim\limits_{z\to a} G_m(z) = G_m(a) = F_{m+1}(a)$, logo o limite para $z \to a$ do 1^o membro de (7.13.4) é igual a

$$(m-1)F_{m+1}(a) + F_{m+1}(a) = mF_{m+1}(a)\ . \ \square$$

Teorema 7.14 *Sejam Ω um aberto não vazio de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e γ uma CSDF em Ω tal que $\gamma \overset{\Omega}{\backsim} 0$. Então*

$$\text{(7.14.1))} \qquad \text{Ind}_\gamma(z)\cdot f^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\lambda)d\lambda}{(\lambda-z)^{m+1}} \quad \forall \quad \begin{cases} m \in \mathbb{N} \\ z \in \Omega\backslash\gamma^* \end{cases}$$

Prova: A prova é por indução sendo (7.14.1) verdadeira para $m=0$ pelo Teor. 7.1. Suponhamos a asserção válida para m e vamos prová-la para $m+1$.
Seja

$$F_{m+1}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\lambda)d\lambda}{(\lambda-z)^{m+1}} \quad \forall \quad z \in \Omega\backslash\gamma^*$$

Pelo Lema 7.13 temos $F_{m+1} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash\gamma^*)$ e

$$\text{(7.14.2)} \qquad F'_{m+1}(z) = (m+1)F_{m+2}(z) \quad \forall \quad z \in \mathbb{C}\backslash\gamma^*$$

Por outro lado, a função

$$g : z \in \Omega\backslash\gamma^* \longmapsto \text{Ind}_\gamma(z) f^{(m)}(z) \in \mathbb{C}$$

é analítica e como a hipótese de indução (isto é (7.14.1)) expressa que

$$g = m!F_{m+1} \ \text{ em } \Omega\backslash\gamma^*$$

resulta

$$\text{(7.14.3)} \qquad g' = m!F'_{m+1} \ \text{ em } \ \Omega\backslash\gamma^*$$

Ora, como Ind_γ é constante em cada componente conexa de $\complement\gamma^*$ resulta pela definição de g :

$$g'(z) = \text{Ind}_\gamma(z)\cdot f^{(m+1)}(z) \quad \forall \quad z \in \Omega\backslash\gamma^*$$

donde, por (7.14.3) e (7.14.2) resulta

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) f^{(m+1)}(z) = \frac{(m+1)!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\lambda)d\lambda}{(\lambda - z)^{m+2}} \qquad \forall \quad z \in \Omega \backslash \gamma^* . \ \square$$

APÊNDICE:

Nosso objetivo neste apêndice é caracterizar os abertos do plano nos quais existe uma determinação do logaritmo. Para isto vamos precisar do seguinte resultado sobre existência de primitivas que tem interesse próprio.

Proposição A.1 *Sejam* Ω *um aberto conexo de* $\mathbb{C}$ *e* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, *então as condições seguintes são equivalentes:*
(i) f *tem primitiva em* Ω.
(ii) $\displaystyle\int_\gamma f = 0$ *para cada CSDF* γ *em* Ω.

Quando as condições equivalentes acima estão verificadas, a função

$$F : z \in \Omega \longmapsto \int_a^b f(\lambda)d\lambda \in \mathbb{C}$$

é uma primitiva de f *em* Ω, *para cada* $a \in \Omega$ (e portanto $F \in \mathcal{H}(\Omega)$).

Aqui é pertinente observar que a notação $\displaystyle\int_a^z$ foi definida apenas nos abertos simplesmente conexos (logo após a prova do Teor. 7.9) portanto no enunciado acima da Prop. A.1 aparece como abuso de notação. Porém, como resultará da prova deste resultado, a condição (ii) implica que *para a função* f *considerada* vale o teorema da independência do caminho e então não há inconveniente em usar a notação $\displaystyle\int_a^z f$.

Prova $(i) \implies (ii)$: Seja F uma primitiva de f em Ω, então se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ é uma CSDF em Ω arbitrária, temos $\displaystyle\int_\gamma f = \int_\gamma F' =$

$$\int_a^b F'[\gamma(t)]\,\gamma'(t)dt = F[\gamma(b)] - F[\gamma(a)] = 0 \ \text{ pois } \ \gamma(a) = \gamma(b).$$

$(ii) \implies (i)$: Fixemos $a \in \Omega$ arbitrário. Dado $z \in \Omega$, se γ_1 e γ_2 são duas CSD em Ω de origem a e extremo z, é claro que $\gamma_1 \vee \gamma_2^\circ$ é uma CSDF em Ω, donde por (ii) resulta

$$0 = \int_{\gamma_1 \vee \gamma_2^\circ} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2^\circ} f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f$$

o que mostra que $\displaystyle\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$ quaisquer que sejam as CSD em Ω de origem a e extremo z; podemos portanto indicar o valor comum destas integrais pela notação $\displaystyle\int_a^z f$ e considerar a função

$$F : z \to \Omega \longmapsto \int_a^z f \in \mathbb{C}$$

Vamos mostrar que $F'(z) = f(z)$ para cada $z \in \Omega$, o que fazemos com o mesmo raciocínio do Corol. 7.10. Fixemos $\zeta \in \Omega$ arbitrário e $D_r(\zeta) \subset \Omega$, então se $z \in D_r(\zeta)$ vem

$$\frac{F(z) - F(\zeta)}{z - \zeta} - f(\zeta) = \frac{1}{z - \zeta} \int_{[\zeta, z]} [f(\lambda) - f(\zeta)]\, d\lambda$$

o que implica

$$\left| \frac{F(z) - F(\zeta)}{z - \zeta} - f(\zeta) \right| \leq \sup_{\lambda \in [\zeta, z]} |f(\lambda) - f(\zeta)| \quad \forall \quad z \in D_r(\zeta)$$

donde

$$\lim_{z \to \zeta} \frac{F(z) - F(\zeta)}{z - \zeta} = f(\zeta)\ . \quad \square$$

Proposição A.2 *Seja Ω um aberto conexo de $\mathbb{C}$, então as condições seguintes são equivalentes:*
(i) *Existe uma determinação do logaritmo em* Ω (isto é, existe $g \in \mathcal{C}(\Omega)$ *tal que* $\exp[g(w)] = w \quad \forall \quad w \in \Omega$).
(ii) $0 \notin \Omega$ *e* $\mathrm{Ind}_\gamma(0) = 0$ *para cada CSDF* γ, *em* Ω.

Prova (i) $\Longrightarrow$ (ii): Como $w = \exp[g(w)]$ para cada $w \in \Omega$, resulta $0 \notin \Omega$. Derivando a identidade acima obtemos

$$\exp[g(w)] \cdot g'(w) = 1 \text{ para cada } w \in \Omega,$$

ou seja

$$w \cdot g'(w) = 1 \text{ para cada } w \in \Omega,$$

isto é

$$g'(w) = 1/w \quad \text{para cada } w \in \Omega,$$

o que mostra que a função $w \in \Omega \longmapsto 1/w \in \mathbb{C}$ possui primitiva em Ω e entào, pela Prop. A.1, se γ é uma CSDF em Ω arbitrária devemos ter

$$\int_\gamma \frac{d\lambda}{\lambda} = 0$$

ou seja $\mathrm{Ind}_\gamma(0) = 0$, o que prova (ii) pois γ era arbitrária.
(ii) $\Longrightarrow$ (i): Fixemos $w_0 \in \Omega \cap D_0$ arbitrário (como D_0 é denso em $\mathbb{C}$ e Ω é um aberto não vazio temos $\Omega \cap D_0 \neq \varnothing$) e indiquemos com φ_0 a função $z \in \Omega \longmapsto 1/z \in \mathbb{C}$. Como $0 \notin \Omega$ é claro que $\varphi_0 \in \mathcal{H}(\Omega)$ e a condição

$$\mathrm{Ind}_\gamma(0) = 0 \qquad \forall \quad \text{CSDF } \gamma \text{ em } \Omega$$

significa que

$$\int_\gamma \varphi_0 = 0 \qquad \forall \quad \text{CSDF } \gamma \text{ em } \Omega$$

o que, pela Prop. A.1 (ii) $\Longrightarrow$ (i), mostra que φ_0 tem uma primitiva em Ω e, ainda pela Prop. A.1, sabemos que

$$g : w \in \Omega \longmapsto Log(w_0) + \int_{w_0}^{w} \frac{d\lambda}{\lambda} \in \mathbb{C}$$

é uma primitiva de φ_0 em Ω, e $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ [Observar que o número complexo $Log(w_0)$ está definido pois tomamos $w_0 \in \Omega \cap D_0$; poderíamos haver definido g usando $Log_k(w_0)$ com $k \in \mathbb{Z}$ arbitrário, em vez de $Log(w_0)$]. Só resta verificar que

$$(A.2.1) \qquad \exp[g(w)] = w \qquad \forall \quad w \in \Omega$$

Fixemos $w \in \Omega$ arbitrário, seja $\gamma : [a,b] \to \Omega$ uma CSD em Ω tal que $\gamma(a) = w_0$ e $\gamma(b) = w$ e consideremos a função

$$h : t \in [a,b] \longmapsto \int_a^t \frac{\gamma'(s)ds}{\gamma(s)} \in \mathbb{C}$$

Derivando a função $t \longmapsto \gamma(t)\exp[-h(t)]$ obtemos:

$$[\gamma(t)\exp(-h(t))]' = -\gamma(t)h'(t)\exp(-h(t)) + \gamma'(t)\exp[-h(t)] =$$

$\exp[-h(t)] \cdot \{\gamma'(t) - \gamma(t)h'(t)\} = 0$ em cada intervalo $]t_i, t_{i+1}[$ onde γ' existe (e é contínua), o que mostra que $t \longmapsto \gamma(t)\exp(-h(t))$ é constante, isto é, existe $c \in \mathbb{C}$ tal que

$$\gamma(t)\exp(-h(t)) = c \qquad \forall \quad t \in [a,b] \,.$$

Em particular, para $t = a$ e $t = b$ obtemos

$$\gamma(a) = \gamma(a)\exp(-h(a)) = \gamma(b)\exp(-h(b)) \qquad (= c)$$

donde

$$\gamma(b) = \gamma(a)\exp[h(b)]$$

o que se escreve assim

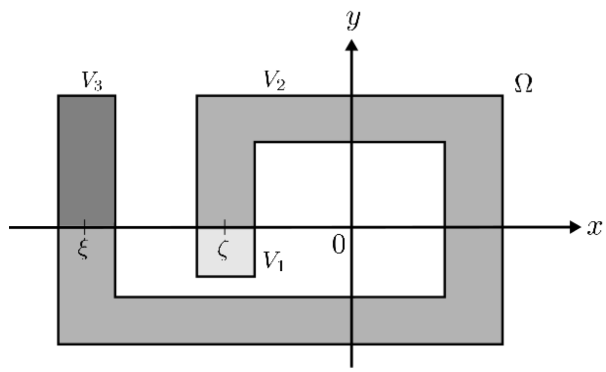
$$w = w_0 \cdot \exp\left(\int_{w_0}^{w} \frac{d\lambda}{\lambda}\right)$$

e como $w_0 = \exp[Log(w_0)]$, podemos escrever

$$w = \exp\left(Log(w_0) + \int_{w_0}^{w} \frac{d\lambda}{\lambda}\right)$$

o que demonstra $(A.2.1)$ em virtude da definição de g. $\square$

Exemplo A.3 Consideremos o aberto Ω da figura



É claro que $0 \notin \Omega$ e que $\mathrm{Ind}_\gamma(0) = 0$ para cada CSDF γ em Ω (se γ é uma CSDF em Ω, então as componentes conexas limitadas de $\complement\gamma^*$ estão contidas em Ω e como $0 \notin \Omega$ é claro que 0 pertence à componente ilimitada de $\complement\gamma^*$, logo pelo Teor. 5.2 temos $\mathrm{Ind}_\gamma(0) = 0$). Pela Prop. A.2 existe uma determinação do logaritmo g em Ω, vamos ver que relações existem entre g e, por exemplo, as determinações Log_k definidas em $D_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq -|z_0|\}$. Vamos indicar por V_1, V_2 e V_3 (ver fig.) as três componentes conexas de $\Omega \cap D_0$. Como

$$\exp[g(w)] = w \quad \forall \quad w \in \Omega$$
$$\exp[Log(w)] = w \quad \forall \quad w \in D_0$$

é claro que fixada uma componente conexa V_ν $(\nu = 1, 2, 3)$ temos

$$\exp[g(w)] = \exp[Log(w)] \qquad \forall \quad w \in V_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3)$$

donde

$$\varphi(w) = \frac{g(w) - Log(w)}{2\pi i} \in \mathbb{Z} \qquad \forall \quad w \in V_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3)$$

o que pelo argumento habitual (continuidade de φ, V_ν conexo, etc.) implica que existe $k_\nu \in \mathbb{Z}$ tal que $\varphi(w) = k_\nu$ para cada $w \in V_\nu$, isto é

[1] $$g(w) = Log(w) + 2k_\nu \pi i \quad \forall \quad w \in V_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3)$$

Consideremos agora um ponto $\zeta \in \overline{V}_1 \cap \overline{V}_2 \cap \Omega$. Como g é contínua em Ω e em particular em ζ, existe

[2] $$\lim_{w \to \zeta} g(w) = g(\zeta)$$

A função Log não tem limite para $w \to \zeta$ porém é claro que (em vista da "continuidade lateral"de Am)

$$\lim_{\substack{w \to \zeta \\ \mathrm{Im}(w) > o}} Log(w) = \lim_{\substack{w \to \zeta \\ w \in V_2}} Log(w) = \ln|\zeta| + i\pi$$

$$\lim_{\substack{w \to \zeta \\ \mathrm{Im}(w)<0}} Log(w) = \lim_{\substack{w \to \zeta \\ w \in V_1}} Log(w) = \ln|\zeta| - i\pi$$

donde resulta por [1] :

[3] $$\lim_{\substack{w \to \zeta \\ w \in V_2}} g(w) = \ln|\zeta| + i\pi + 2k_2\pi i$$

[4] $$\lim_{\substack{w \to \zeta \\ w \in V_1}} g(w) = \ln|\zeta| - i\pi + 2k_1\pi i$$

De [2] , [3] e [4] resulta

$$g(\zeta) = \ln|\zeta| + i\pi + 2k_2\pi i = \ln|\zeta| - i\pi + 2k_1\pi i$$

ou seja

$$k_1 = k_2 + 1 \ .$$

O mesmo raciocínio feito num ponto $\xi \in \overline{V_2} \cap \overline{V_3} \cap \Omega$ mostra que

$$k_2 = k_3 + 1 \ ,$$

donde por [1] resulta

$$g(w) = \begin{cases} Log(w) + 2k_1\pi i = Log_{k_1}(w) & \forall \quad w \in V_1 \\ Log(w) + 2k_2\pi i = Log_{k_1-1}(w) & \forall \quad w \in V_2 \\ Log(w) + 2k_3\pi i = Log_{k_1-2}(w) & \forall \quad w \in V_3 \ . \end{cases}$$

Exercícios

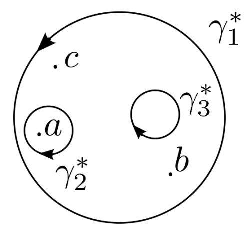
(7.1) (Exerc. de Álgebra) Sejam A um anel unitário e comutativo e T um conjunto não vazio qualquer. Um aplicação $x : t \in T \longmapsto x_t \in A$ é dita, de *suporte finito* se o conjunto $\{t \in T \mid x_t \neq 0\}$ é finito (e a família $x = (x_t)_{t \in T}$ é dita *quase-nula*). Indicamos com $A^{(T)}$ o conjunto de todas as aplicações de T em A de suporte finito, munido das operações pontuais

$$(x_t)_{t\in T} + (y_t)_{t\in T} := (x_t + y_t)_{t\in T} \qquad \text{e} \qquad \lambda(x_t)_{t\in T} := (\lambda x_t)_{t\in T} \qquad (\lambda \in A)$$

Para cada $t \in T$ definimos $e_t := (\delta_{tt'})_{t' \in T}$ ($\delta_{tt'}$ é o δ de Kronecker).
(a) Prove que $A^{(T)}$ é um A-módulo e que $(e_t)_{t\in T}$ é uma base de $A^{(T)}$;
(b) Mostre que a aplicação $\beta : t \in T \longmapsto e_t \in A^{(T)}$ é injetora e que portanto $A^{(T)}$ pode ser considerado um A-módulo de base T (quando identificamos t com e_t pela aplicação β resulta $T \subset A^{(T)}$ e portanto

cada elemento de $A^{(T)}$ admite uma expressão única do tipo $\sum\limits_{t\in T} x_t \cdot t$,

o que justifica o nome que às vezes é dado a $A^{(T)}$ que é: *módulo das combinações lineares formais de elementos de T com coeficientes em A*. O nome mais usual de $A^{(T)}$ é o seguinte: *A-módulo livre sobre T*);
(c) Verifique a seguinte "*propriedade universal*"de $A^{(T)}$: para cada A-módulo X e para cada *aplicação* $\varphi : T \to X$, existe uma única *aplicação linear* $\varphi_* : A^{(t)} \to X$ tal que $\varphi = \varphi_* \circ \beta$ (onde β é a aplicação definida em (b));
(d) Mostre que φ_* é injetora (resp. sobrejetora, bijetora) se e só se $(\varphi(t))_{t\in T}$ é LI (resp. um sistemas de geradores, uma base) de X.
(e) Considere o seguinte resultado bem conhecido do primeiro curso de Álgebra Linear:
Proposição: *Se K é um corpo e V, W são dois K-espaços vetoriais de dimensão finita, então qualquer aplicação K-linear $\theta : V \to W$ fica determinada pelos valores $\theta(b_i) \in W$ $(1 \le i \le n)$, onde $(b_i)_{1\le i\le n}$ é uma base arbitrária de V.*
Mostre que a Proposição acima é um caso particular da propriedade universal (c). No caso particular $A = \mathbb{Z}$, o $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}^{(T)}$ é chamado *grupo abeliano livre sobre T*.



(7.2) Se consideram os círculos orientados γ_1, γ_2 e γ_3 da figura ao lado. Sejam
$\Gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ e $V := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 1\}$
(a) Prove que se Ω é um aberto contendo $\overline{V}$ e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f \neq 0$ então

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \quad \forall \quad z \in V \ ,$$

(b) Sejam Ω e f como em (a) e suponha que Ω é conexo. Prove que é falsa a afirmação:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \qquad \forall \quad z \in \Omega\backslash\Gamma^* \ ,$$

(c) Sejam Ω e f como em (a) e sejam a, b e c três pontos de $\Omega\backslash\Gamma^*$ como na figura acima. Determine o valor da integral

$$\mathrm{I} := \int\limits_\Gamma \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)(z-c)^2} \ ,$$

supondo $f(c) \neq 0$. **[Atenção:** para fazer este item (c) são necessários resultados do Cap. 8 (Singularidades).**]**

(7.2′) **[**Variante do exerc. (7.2)**]** Sejam $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \Gamma, V, \Omega, a, b$ e c como no exerc. (7.2) acima e seja $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, Ω conexo, tal que

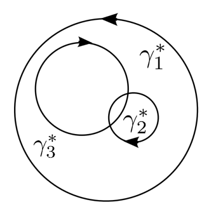
$$f(z) = \int\limits_{\Gamma} \frac{e^{i\zeta}\ \operatorname{sen}\zeta}{\zeta - z} d\zeta \qquad \forall \quad z \in V\ .$$

(a) Calcular $f(p)$ sendo p um ponto arbitrário da imagem Γ^* de Γ (justifique todas as passagens);
(b) Supondo $\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} c \neq 0$ determinar o valor da integral

$$\mathrm{I} := \int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)dz}{(z-a)^2(z-b)(z-c)}$$

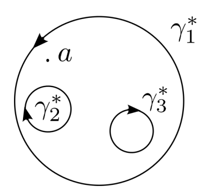
[Atenção: Aqui vale a mesma observação sobre o item (c) do exerc. (7.2), isto é, sào necessários resultados do Cap. 8 sobre singularidades.**]**

(7.2′′) (Outra variação do exerc. (7.2))
Sejam γ_1, γ_2 e γ_3 os três círculos orientados da figura ao lado. Sejam
$\Gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$
$W := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Ind}_\Gamma(z) \neq 0\}$ e Ω um aberto conexo contendo $\overline{W}$. Prove que <u>não existe</u> $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que



$$f(z) = \int\limits_{\Gamma} \frac{e^{i\zeta} \operatorname{sen}\zeta}{\zeta - z} d\zeta \ \forall\ z \in W\ .$$

(7.2′′′) (Outra variação do exerc. (7.2), usa singularidades)
Se consideram os círculos orientados γ_1, γ_2 e γ_3 da figura ao lado. Sejam $\Gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$,
$V := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 1\}$
e assuma que $0 \in V$. Suponha dados um aberto conexo Ω contendo $\overline{V}$ e $g \in \mathcal{H}(\Omega)$.
(a) Determine $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ sabendo que



$$f(z) = \int\limits_{\Gamma} \frac{g(\zeta)(1-\cos\zeta)}{\zeta^2(\zeta - z)}\ d\zeta \qquad \forall \qquad z \in V$$

;
(b) Seja $a \in V$ tal que $a \neq 0$ e $g(a)(1 - \cos a\ ) \neq 0$.Calcule

$$\mathrm{I} := \int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)dz}{(z-a)^2}\ .$$

[Sugestão: (a) Sejam D_i o disco aberto cuja fronteira é γ_1^* $(1 \leq i \leq 3)$ e W a componente conexa não limitada de $\complement\Gamma^*$ então a figura mostra que as componentes conexas de $\complement\Gamma^*$ são V, D_2, D_3 e W e, além disso, que $V = D_1 \backslash (\overline{D}_2 \cup \overline{D}_3)$. A definição de Ω mostra que $\complement\Omega \subset D_2 \cup D_3 \cup W$. Conclua que
$((*))$ $$\Gamma \backsim 0\ \cdot$$
A seguir considere a função h definida por

$$h(z) := z^{-2} g(z)(1-\cos z) \qquad \forall \;\; z \in \Omega \setminus \{0\}$$
e mostre que $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ e
$$h(0) = g(0)/2! \cdot$$
Aplique o teorema de Cauchy homológico (fórmula de representação integral à função h (o que é legítimo por $((*))$:

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(\zeta)(1-\cos\zeta)}{\zeta^2} d\zeta \quad \forall \quad z \in V$$

e deduza que $f(z) = 2\pi i h(z) \quad \forall \;\; z \in V$. Como Ω é conexo, o Corol. 4.13 acarreta $f = 2\pi i h$ em Ω, isto é,

$$f(z) = 2\pi i z^{-2} g(z)(1-\cos z) \quad \forall \;\; z \in \Omega \setminus \{0\} \;\text{ e }\; f(0) = 2\pi i h(0) = \pi i g(0).$$

(b) Considere a função φ definida por $\varphi(z) := (z-a)^{-2} f(z) \quad \forall \;\; z \in \Omega \setminus \{a\}$, é claro que φ é meromorfa em Ω pois $a \in V \subset \Omega$ e como $a \neq 0$ resulta que a é (o único) polo duplo de φ. Como Γ é um ciclo em $\Omega \setminus \{a\}$ (pois $a \in V$) podemos aplicar o Teorema dos Resíduos (ver Corol.7.2 ou Teor. 8.13) obtendo $\mathrm{I} = 2\pi i \operatorname{Re} s(\varphi, a)$. Além disso, como a é polo duplo é claro que $\operatorname{Re} s(\varphi, a) = \dfrac{1}{1!}\psi'(a)$, onde $\psi(z) := (z-a)^2 \varphi(z) = f(z)$, donde $\operatorname{Re} s(\varphi, a) = f'(a)$ e agora basta então calcular $f'(z) \;\; (z \neq 0)$, oque resulta derivando a expressão de $f(z)$ achada em (a)**]**.

(7.2*) Sejam γ uma *CSDF* simples tal que $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$ é igual a 0 ou 1 para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$, $V := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0\}$, Ω um aberto contendo $\overline{V}$ e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
(a) Prove que se $\lim\limits_{|z| \to +\infty} f(z) = 0$, então

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} -f(z), & \text{se } \; z \in \Omega \cap V \\ 0 \;, & \text{se } \; z \in \Omega \setminus \overline{V} \end{cases}$$

(b) Calcule a integral $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\gamma} \dfrac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$ supondo que $\lim\limits_{|z| \to +\infty} f(z) = A$, onde $A \in \mathbb{C}^*$ é arbitrário **[Sugestão:** (a) Aplique o teor. de Cauchy homológico com um ciclo em Ω do tipo $\Gamma = \gamma + \gamma_r$, sendo γ_r um círculo de centro na origem e raio r suficientemente grande, fazer $r \to +\infty$.**]**

(7.3) Prove que a homotopia é uma relação de equivalência **[**se necessário, ver Dieudonné [D], Calcul Infinitesimal, pg 203**]**.

(7.4) [Resultado muito usado!] Sejam γ_1 e γ_2 duas curvas num aberto

Ω com a mesma origem e o mesmo extremo. Prove que se γ_1 e γ_2 são Ω-homotópicas com extremos fixos, então $\gamma_1 \vee \gamma_2^\circ$ é (uma curva fechada) homotópica a um ponto em Ω .**[Sugestão:** Podemos supor que γ_1 e γ_2 estão definidas em $\mathrm{I} := [0,1]$. Seja $h : \mathrm{I} \times \mathrm{I} \to \Omega$ uma homotopia de γ_1 a γ_2 (isto é, $h(0,t) = \gamma_1(t)$ e $h(1,t) = \gamma_2(t)$ $\forall$ $t \in \mathrm{I}$ e $h(s,0) = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ e $h(s,1) = \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ $\forall$ $s \in \mathrm{I}$). Defina uma re-parametrização γ de $\gamma_1 \vee \gamma_2^\circ$ da forma seguinte: $\gamma : \mathrm{I} \to \Omega$ é definida por:

$$\left| \begin{array}{c} \gamma(s) := \gamma_1(3s), \quad \forall \ s \in [0,1/3] \ , \\ \gamma(s) := \gamma_1(1) = \gamma_2(1), \ \text{se} \ \ s \in [1/3, 2/3] \qquad \text{e} \\ \gamma(s) := \gamma_2(3-3s), \ \text{se} \ \ s \in [2/3, 1] \end{array} \right.$$

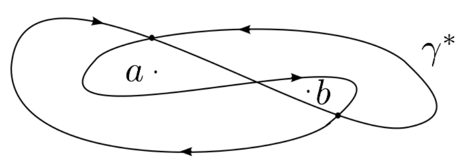
Prove a seguir que a função $H : \mathrm{I}^2 \to \Omega$ definida por

$$H(s,t) := \left\{ \begin{array}{c} h(s, 3t(1-s)), \quad \forall \ \ (t,s) \in [0,1/3] \times \mathrm{I} \\ h(3t-1+2s-3st, 1-s), \quad \forall \ \ (t,s) \in [1/3,2/3] \times \mathrm{I} \\ \gamma_2((3-3t)(1-s)), \quad \forall \ \ (t,s) \in [2/3,1] \times \mathrm{I} \end{array} \right.$$

é uma homotopia de γ à curva constante (ponto) $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$. **]**

(7.5) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a > b > 0$, $\gamma_1 : t \in [0, 2\pi] \longmapsto be^{it} \in \mathbb{C}$ o círculo positivamente orientado de centro O e raio b e $\gamma_2 : t \in [0,2\pi] \longmapsto a\cos t + ib\,\mathrm{sen}\, t \in \mathbb{C}$, a elipse "positivamente orientada"de centro O e semi-eixos a e b contidos nos eixos coordenados.
(a) Prove que γ_1 e γ_2 são $\mathbb{C}$-homotópicas como curvas fechadas;
(b) Deduzir que as duas curvas seguintes (agora um círculo e uma elipse positivamente orientados de centros, raio e semi-eixos arbitrários):
$\gamma_3 : t \in [0,2\pi] \longmapsto z_0 + re^{it} \in \mathbb{C}$ e $\gamma_4 : t \in [0, 2\pi] \longmapsto w_0 + e^{i\theta} \cdot \gamma_2(t) \in \mathbb{C}$ (onde $r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ e $z_0, w_0 \in \mathbb{C}$ são dados) são $\mathbb{C}$-homotópicas como curvas fechadas.

(7.6) Sejam $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$, $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ e γ a CSDF da figura abaixo:



(a) Prove que $\gamma \overset{\Omega}{\backsim} 0$;
(b) É "óbvio"que γ não é homotópica a um ponto em Ω. Como você provaria esta afirmação?
[Sugestão: Cursar tão rápido quanto possível, a disciplina "Topologia Algébrica".]

(7.7) Sejam a, b e γ_2 como no exerc. *(7.5)* acima. Calcular de duas formas diferentes a integral $\displaystyle\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z}$ e deduzir que

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t} = \frac{2\pi}{ab} \ .$$

(7.8) (a) Prove que se Ω é um aberto simplesmente conexo então duas *CSDF* em Ω são sempre Ω-*HCF* (homotópicas como curvas fechadas);

(b) Sejam $m \in \mathbb{Z}^*$ e $\gamma_m : t \in [0, 2\pi] \longmapsto e^{mit} \in \mathbb{C}$ o círculo orientado ("positivamente"se $m > 0$ e "negativamente"se $m < 0$) de centro O e raio 1, *percorrido m vezes*. Prove que γ_m e γ_n são $\mathbb{C}$-*HCF* quaisquer que sejam $m, n \in \mathbb{Z}^*$ e que se $m \neq n$ então γ_m e γ_n não são $\mathbb{C}^*$-*HCF* ;

(c) Seja $a \in \mathbb{C}$, prove que $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ não é simplesmente conexo;

(d) Seja $a \in \mathbb{C}$. Prove que se γ_1 e γ_2 são duas *CSDF* em $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ que são $\mathbb{C} \setminus \{a\}$-*HCF*, então $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(a) = \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(a)$;

(e) Se $\Omega \neq \mathbb{C}$ é um aberto simplesmente conexo e γ é uma *CSDF* em Ω, prove que $\gamma \overset{\Omega}{\backsim} 0$.

(7.9) Lembremos que $D_0 := \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq -|z|\}$ e $D_\alpha := e^{i\alpha} \cdot D_0$.

(a) Mostre que $\exp(\int_{w_0}^{w} \frac{d\zeta}{\zeta}) = \frac{w}{w_0} \quad \forall \ w, w_0 \in D_0$ e, em particular

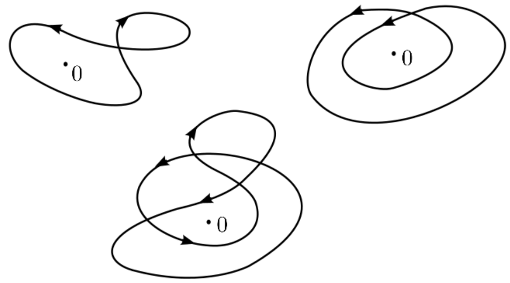
$\exp(\int_{1}^{w} \frac{d\zeta}{\zeta}) = w \quad \forall \ w \in D_0$;

(b) Dados $\alpha \in 0, 2\pi[$ e $k \in \mathbb{Z}$, mostre que

$$Log_{k,\alpha}(w) = i\alpha + Log_k(e^{-i\alpha} w_0) + \int_{w_0}^{w} \frac{d\zeta}{\zeta} \quad , \quad \forall \ w, w_0 \in D_\alpha.$$

(7.10) (a) Calcule a integral $\displaystyle\int_{|z-1|=1} (\frac{z}{z-1})^m dz$

(b) Calcule a integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z - e^{-z}}{z^4} \, dz$, onde γ é uma das seguintes curvas:



[Sugestão: (para (a) e (b)): Use o Teor. 7.14].

(7.11) Sejam γ uma *CSDF* em $\mathbb{C}$, $\varphi \in \mathcal{C}(\gamma^*;\mathbb{C})$ e para cada $m \in \mathbb{N}^*$, considere a função

$$F_m : z \in \Omega := \mathbb{C} \backslash \gamma^* \longmapsto \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^m} \in \mathbb{C}$$

Prove que $F_m \in \mathcal{H}(\Omega)$ e que $F'_m(z) = mF_{m+1}(z) \quad \forall \;\; z \in \Omega$.
[Sugestão: Este exercício é o Lema 7.13 . Se necessário ver Conway [Co], pg 92 ou Ahlfors [A], Cap. IV, §2, nº3, Lema 3.

Capítulo 8

SINGULARIDADES ISOLADAS. FUNÇÕES MEROMORFAS. O TEOREMA DOS RESÍDUOS. APLICAÇÕES.

Basicamente, neste capítulo vamos estudar funções $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$ (lembremos que $D_r^*(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-a| < r\}$) e vamos obter um certo número de resultados interessantes a partir da informação sobre o comportamento de f nas proximidades do ponto a.

Definição 8.1 Se Ω é um aberto de $\mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ dizemos que a é uma *singularidade isolada de* f (ou que f *tem uma singularidade isolada em* a). Se existe $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\varphi(z) = f(z) \quad \forall \;\; z \in \Omega \setminus \{a\}$, dizemos que a é uma *singularidade isolada removível* (ou simplesmente, *singularidade removível*).

Exemplo 1 Seja $f : z \in \mathbb{C}^* \longmapsto z^{-1}.\operatorname{sen} z \in \mathbb{C}$, então f tem uma singularidade removível no ponto $a = 0$ pois de

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = z\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots\right) \quad \forall \;\; z \in \mathbb{C}$$

resulta que a função inteira $\varphi : z \in \mathbb{C} \longmapsto 1 - \dfrac{z^2}{3!} + \dfrac{z^4}{5!} - \cdots \in \mathbb{C}$ tem a propriedade $\varphi(z) = f(z) \quad \forall \;\; z \in \mathbb{C}^*$.

Proposição 8.2 *Sejam* Ω *um aberto de* $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$ *e* $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$, *então as condições seguintes são equivalentes:*

(i) *a é uma singularidade removível de f;*

(ii) *Existem* $D_r(a) \subset \Omega$ *e* $\psi \in \mathcal{H}(D_r(a))$ *tais que* $\psi | D_r^*(a) = f \; | D_r^*(a)$;

(iii) *Existe* $D_r(a) \subset \Omega$ *tal que* $\|f\|_{D_r^*(a)} < +\infty$;

(iv) $\lim\limits_{z \to a} (z-a) f(z) = 0$

Prova As implicações (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) são óbvias portanto basta mostrar que (iv) $\Longrightarrow$ (ii). Seja $h : \Omega \to \mathbb{C}$ a função definida por

$$h(z) = \begin{cases} 0, \text{ se } z = a \\ \\ (z-a)^2 f(z), \text{ se } z \neq a \end{cases}$$

calculando $h'(a)$ pela definição, por (iv) obtemos

$$h'(a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z) = 0$$

o que mostra que $h \in \mathcal{H}(\Omega)$. Como a é um zero de h (ver Def. 4.17) existem $D_r(a) \subset \Omega$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ e $g \in \mathcal{H}(D_r(a))$ tais que $g(z) \neq 0$ para cada $z \in D_r(a)$ e

(8.2.1) $$h(z) = (z-a)^\nu g(z) \quad \forall \ z \in D_r(a)$$

Como a é um zero de h' é claro (ver exerc. 4.14) que $\nu > 1$, o que prova que a função

$$\psi : z \in D_r(a) \longmapsto (z-a)^{\nu-2} \cdot g(z) \in \mathbb{C}$$

é holomorfa. É claro que (8.2.1) pode ser escrita assim:

$$h(z) = (z-a)^2 \psi(z) \quad \forall \ z \in D_r(a)$$

o que, pela definição de h, implica $f(z) = \psi(z)$ para cada $z \in D_r^*(a)$, o que prova (ii) pois $\psi \in \mathcal{H}(D_r(a))$. $\square$

Exemplo 2 Seja $f : z \in \mathbb{C}^* \longmapsto \operatorname{sen}(z^{-1}) \in \mathbb{C}$. A função f tem uma singularidade isolada em $a = 0$ que não é removível. Para prová-lo usamos a Prop. 8.2 (iii): dado $H > 1$ arbitrário, existe $\varepsilon > 0$ tal que $0 < x < \varepsilon \implies e^{1/x} > H \implies e^{-1/x} < H^{-1}$ e então, para cada $z = ix$ tal que $0 < x < \varepsilon$ temos

$$|f(x)| = \frac{1}{2}\left|e^{1/x} - e^{-1/x}\right| > \frac{1}{2}\left|H - H^{-1}\right| > \frac{1}{2}(H-1),$$

isto é, $\|f\|_{D_\varepsilon^*(0)} = +\infty$ para cada $\varepsilon > 0$. Observemos também que, como $f(z) = 0$ se e só se $z = (k\pi)^{-1}$ com $k \in \mathbb{Z}^*$, se $\Omega := \{z \in \mathbb{C}^* \mid z \neq (k\pi)^{-1}$ $\forall \ k \in \mathbb{Z}^*\}$, a função

$$g : z \in \Omega \longmapsto (f(x))^{-1} = (\operatorname{sen}(z^{-1}))^{-1} \in \mathbb{C}$$

é analítica em Ω. É fácil ver que para cada $k \in \mathbb{Z}^*$, g tem uma singularidade não removível no ponto $(k\pi)^{-1}$ e em consequência o ponto $a = 0$ é uma *singularidade não isolada de g*. Não estudaremos aqui este tipo de singularidades.

Observações (A) A Prop. 8.2 mostra mais uma diferença interessante entre funções reais de variável real e funções complexas de variável complexa. A função $f(x) = |x| \ \ \forall \ x \in \mathbb{R}$ tem uma "singularidade não removível" no ponto $a = 0$ o que não impede de $|f|$ ser limitada em qualquer intervalo $]-\varepsilon, \varepsilon[$. Esta situação não pode acontecer no caso complexo: para uma função complexa de variável complexa f ter uma singularidade "honesta" no ponto a (i.e. não removível), f deve ser bastante "mal comportada"nas proximidades de a, isto é, não pode existir e ser finito o limite $\lim_{z \to a} |f(x)|$, em outros termos, ou $\lim_{z \to a} |f(x)| = +\infty$ ou este limite não existe.

(B) Se $a \in \mathbb{C}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ e $(c_k)_{1 \leq k \leq \nu}$ é uma sequência de números complexos tal que $c_\nu \neq 0$, então: (I) A função

$$\theta : z \in \mathbb{C} \setminus \{a\} \longmapsto \sum_{k=1}^{\nu} c_k (z-a)^{-k} \in \mathbb{C}$$

tem uma singularidade não removível em a; (II) Se Ω é um aberto de $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$, $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ e $f - \theta | \Omega \setminus \{a\}$ tem uma singularidade removível em a, então f tem uma singularidade não removível em a.
De fato, suponhamos por absurdo que θ tem uma singularidade removível em então

(B.1) $$\exists \quad F \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \text{ tal que } F(z) = \sum_{k=1}^{\nu} c_k (z-a)^{-k} \quad \forall \ z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$$

donde multiplicando por $(z-a)^\nu$ resulta

$$F(z)(z-a)^\nu = \sum_{k=1}^{\nu} c_k (z-a)^{\nu-k} + c_\nu \quad \forall \ z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$$

portanto tomando limites para $z \to a$ obtemos $c_\nu = 0$, contra o suposto, o que prova (I). Como por hipótese $f - \theta | \Omega \setminus \{a\}$ tem uma singularidade removível em a, existe $\psi \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(z) - \theta(z) = \psi(z) \quad \forall \ z \in \Omega \setminus \{a\}$.
Se f tivesse uma singularidade removível em a, então existiria $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(z) = \varphi(z) \quad \forall \ z \in \Omega \setminus \{a\}$, o que implica $\theta(z) = +\varphi(z) - \psi(z)$ $\forall \ z \in \Omega \setminus \{a\}$, donde resultaria que θ tem uma singularidade removível em a (pois $-\varphi - \psi \in \mathcal{H}(\Omega)$), o que é absurdo por (I). Isto prova (II).

O resultado seguinte classifica os três tipos de singularidades isoladas possíveis.

Teorema 8.3 *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$ e $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$, então se verifica uma e apenas uma das três condições seguintes:*
(a) *f tem uma singularidade removível no ponto a.*
(b) *Existem um único $\nu \in \mathbb{N}^*$ e uma única sequência $(c_k)_{1 \leq k \leq \nu}$ de números complexos tal que $c_\nu \neq 0$, de modo que a função*

$$z \in \Omega \setminus \{a\} \longmapsto f(z) - \sum_{k=1}^{\nu} c_k (z-a)^{-k} \in \mathbb{C}$$

tem uma singularidade removível no ponto a.
(c) *Para cada $\rho > 0$ tal que $D_\rho(a) \subset \Omega$, o conjunto $f(D^*_\rho(a))$ é denso em $\mathbb{C}$.*

Prova Indicamos com $\backsim (c)$ a negação de (c) (significado análogo para as notações $\backsim (a)$ e $\sim (b)$). Então é claro que basta provar as duas implicações seguintes:

(8.3.1) $$(c) \implies \backsim (a) \text{ e } \backsim (b)$$
(8.3.2) $$\backsim (c) \implies \text{ou } (a) \text{ ou } (b)$$

Pela Prop. 8.2 (i) $\iff$ (iii) é claro que $(c) \implies \backsim (a)$ portanto, para provar

(8.3.1) basta mostrar que $(c) \implies \backsim (b)$ ou equivalentemente

(8.3.1′) $\qquad (b) \implies \backsim (c)$.

Pela observação (B), (II) precedente é claro que

$$(a) \implies \backsim (b) \quad \text{(Ou equivalentemente } (b) \implies \backsim (a)),$$

isto é, as condições (a) e (b) não se verificam simultâneamente . Resulta então que para provar (8.3.2) é suficiente mostrar a implicação

(8.3.2′) $\qquad \backsim (c) \implies (a)$ ou (b)

Desta forma, a prova do resultado se reduz a verificar (8.3.1′) e (8.3.2′).

Prova de (8.3.2′) Se (c) é falso, então existem $\rho > 0$, $\delta > 0$ e $w \in \mathbb{C}$ tais que

$$D_\rho(a) \subset \Omega \ \text{ e } \ f(z) \notin \overline{D}_\delta(w) \quad \forall \ z \in D^*_\rho(a)$$

ou seja

$$|f(z) - w| > \delta \quad \forall \ z \in D^*_\rho(a).$$

Consideremos a função

$$g : z \in D^*_\rho(a) \longrightarrow \frac{1}{f(z) - w} \in \mathbb{C} .$$

É claro que $g \in \mathcal{H}(D^*_\rho(a))$ e $|g(z)| < \delta^{-1} \quad \forall \ z \in D^*_\rho(a)$, logo, pela Prop. 8.2. (iii) $\implies$ (i), g tem uma singularidade removível em a e portanto existe $\psi \in \mathcal{H}(D_\rho(a))$ tal que $\psi|D^*_\rho(a) = g$. Temos então dois casos possíveis segundo que $\psi(a) = 0$ ou $\psi(a) \neq 0$.

Caso 1: $\psi(a) \neq 0$. Neste caso, como $\psi \neq 0$ (pois $g \neq 0$), pelo Teor. 4.15 existe $r > 0$ tal que $D_r(a) \subset D_\rho(a)$ e $\psi(z) \neq 0 \quad \forall \ z \in D_r(a)$. Em consequência podemos considerar a seguinte função

$$\varphi : z \in D_r(a) \longmapsto w + \frac{1}{\psi(z)} \in \mathbb{C}$$

É claro que $\varphi \in \mathcal{H}(D_r(a))$. A relação $\psi|D^*_\rho(a) = g$ implica $\psi|D^*_r(a) = g|D^*_r(a)$ e então as definições de φ e de g mostram que $\varphi|D^*_r((a)) = f|D^*_r(a)$, o que prova pela Prop. 8.2. (ii) $\implies$ (i), que neste caso se verifica (a).

Caso 2: $\psi(a) = 0$ Neste caso, como a é um zero de ψ (ver Def. 4.17) existem $D_r(a) \subset D_\rho(a)$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ e $\psi_0 \in \mathcal{H}(D_r(a))$ tais que $\psi_0(z) \neq 0$ $\forall \ z \in D_r(a)$ e

$$\psi(z) = (z - a)^\nu \cdot \psi_0(z) \quad \forall \ z \in D_r(a).$$

Como ψ_0 não tem zeros em $D_r(a)$, a função

$$h : z \in D_r(a) \longmapsto \frac{1}{\psi_0(z)} \in \mathbb{C}$$

é analítica em $D_r(a)$ e podemos portanto considerar o seu desenvolvimento de Taylor em volta de a (ver Corol. 4.11):

(8.3.3) $$h(z) = \sum_{m \geq 0} b_m (z - a)^m \quad \forall \ z \in D_r(a) \cdot$$

Por outro lado, a definição de ψ e a relação $D_r^*(a) \subset D_\rho^*(a)$ implicam

$$g(z) = \psi(z) = (z-a)^\nu \psi_0(z) = \frac{1}{(z-a)^{-\nu} \cdot h(z)} \quad \forall \ z \in D_r^*(a)$$

donde, pela definição de g resulta:

$$(8.3.4) \qquad f(z) - w = (z-a)^{-\nu} \cdot h(z) \quad \forall \ z \in D_r^*(a)$$

De (8.3.3) e (8.3.4) segue que para cada $z \in D_r^*(a)$ temos:

$$f(z) - w = \frac{b_0}{(z-a)^\nu} + \frac{b_1}{(z-a)^{\nu-1}} + \ldots + \frac{b_{\nu-1}}{z-a} + b_\nu + b_{\nu+1}(z-a) + \ldots$$

e então, pondo $c_k := b_{\nu-k}$ para $k = 1, 2, \ldots \nu$, podemos escrever

$$(8.3.5) \quad f(z) - \sum_{k=1}^{\nu} c_k (z-a)^{-k} = w + b_\nu + b_{\nu+1}(z-a) + \ldots, \quad \forall \ z \in D_r^*(a)$$

e $c_\nu = b_\nu = h(a) \neq 0$. Além disto, o 2º membro de (8.3.5) está definido em $D_r(a)$ e portanto (ver exerc. 5.10) define uma função $F \in \mathcal{H}(D_r(a))$ e então (8.3.5) implica que

$$z \in \Omega \setminus \{a\} \longmapsto f(z) - \sum_{k=1}^{\nu} c_k (z-a)^{-k} \in \mathbb{C}$$

tem uma singularidade removível em a. Para verificarmos que neste caso vale a condição (b), só resta mostrar a unicidade de ν e dos coeficientes c_k. Suponhamos por absurdo que existem duas funções $F_1, F_2 \in \mathcal{H}(\Omega)$ e duas sequências finitas de números complexos $(c_k)_{1 \le k \le \nu}$ e $(c'_j)_{1 \le j \le \mu}$ tais que

$$(8.3.6) \qquad f(z) - \sum_{k=1}^{\nu} c_k (z-a)^{-k} = F_1(z) \quad \forall \ z \in \Omega \setminus \{a\}, \ \ c_\nu \neq 0$$

$$(8.3.7) \qquad f(z) - \sum_{j=1}^{\mu} c'_j (z-a)^{-j} = F_2(z) \quad \forall \ z \in \Omega \setminus \{a\}, \ \ c'_\mu \neq 0$$

então vamos provar que

$$(8.3.8) \qquad \nu = \mu \quad \text{e} \quad c_k = c'_k \quad \forall \ k = 1, 2, \ldots, \nu$$

É claro que não há perda de generalidade em supor, por exemplo, que $\mu \ge \nu$, então subtraindo (8.3.7) de (8.3.6) podemos escrever

$$(8.3.9) \qquad F(z) = \sum_{r=1}^{\mu} \frac{d_r}{(z-a)^r} \qquad \forall \ z \in \Omega \setminus \{a\}$$

onde $F := F_1 - F_2$ e

$$d_r := \begin{cases} c'_r - c_r, & \text{se } 1 \leq r \leq \nu \\ \\ c'_r, & \text{se } v < r \leq \mu \end{cases}.$$

Como $F \in \mathcal{H}(\Omega)$, o mesmo argumento usado na Obs. (B), (I) para mostrar que (B.1) é falsa, implica que (8.3.9) é falsa a menos que $d_r = 0$ para cada $r = 1, 2, \ldots, \mu$. Ora, como $c_\nu \neq 0$ e $c'_\mu \neq 0$, resulta $\mu = \nu$ e $c_r = c'_r$ para cada $r = 1, 2, \ldots, \nu$, o que prova (8.3.8). Isto completa a verificação de que no Caso 2 vale a condição (b), o que prova (8.3.2$'$).

Prova de (8.3.1$'$) A hipótese (b) implica que existe $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que

$$\varphi(z) = f(z) - \sum_{k=1}^{\nu} \frac{c_k}{(z-a)^k} \qquad \forall \ z \in \Omega \setminus \{a\} \tag{8.3.10}$$

Fixado $\varepsilon > 0$ arbitrário, a continuidade de φ implica que existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$z \in D_{\delta_1}(a) \implies |\varphi(z) - \varphi(a)| < \varepsilon \tag{8.3.11}$$

Seja

$$T(z) := \left| \frac{c_\nu}{(z-a)^\nu} \right| - \left| \sum_{k=1}^{\nu-1} \frac{c_k}{(z-a)^k} \right| \qquad (z \neq a)$$

e mostremos que

$$\lim_{z \to a} T(z) = +\infty \tag{8.3.12}$$

De fato,

$$T(z) = \left| \frac{z-a}{z-a} \right|^\nu T(z) = \frac{1}{|z-a|^\nu} \left[|c_\nu| - \left| \sum_{k=1}^{\nu-1} c_k (z-a)^{\nu-k} \right| \right]$$

e como $|c_\nu| > 0$ e $\nu - k > 0$ sempre que $1 \leq k \leq \nu - 1$, resulta que para z suficientemente próximo de a temos

$$|c_\nu| - \left| \sum_{k=1}^{\nu-1} c_k (z-a)^{\nu-k} \right| > \frac{|c_\nu|}{2}$$

e portanto, para estes valores de z temos

$$T(z) > \frac{|c_\nu|}{2\,|z-a|^\nu} \longrightarrow +\infty \quad \text{se } \ z \to a$$

o que prova (8.3.12). De (8.2.12) segue que dado $R > \varepsilon$ existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$(8.3.13) \qquad z \in D^*_{\delta_2}(a) \implies \left|\sum_{k=1}^{\nu} \frac{c_k}{(z-a)^k}\right| \geq T(z) > R + |\varphi(a)|\,.$$

Seja então $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$,então para cada $z \in D^*_\delta(a)$, as relações $(8.3.10), (8.3.11)$ e (8.3.13) implicam:

$$\varepsilon > |\varphi(z) - \varphi(a)| = \left|f(z) - \sum_{k=1}^{\nu}\frac{c_k}{(z-a)^k} - \varphi(a)\right| =$$

$$\left|\varphi(a) + \sum_{k=1}^{\nu}\frac{c_k}{(z-a)^k} - f(z)\right| \geq \left|\varphi(a) + \sum_{k=1}^{\nu}\frac{c_k}{(z-a)^k}\right| - |f(z)| \geq$$

$$\geq \left|\sum_{k=1}^{\nu}\frac{c_k}{(z-a)^k}\right| - |\varphi(a)| - |f(z)| \geq R - |f(z)| \quad , \text{ donde}$$

$$z \in D^*_\delta(a) \implies |f(z)| > R - \varepsilon > 0$$

o que mostra que $f(D^*_\rho(a)) \cap D_{R-\varepsilon}(0) = \varnothing$ para cada $\rho \in \,]0, \delta]$, isto é (c) é falsa. $\square$

Na próxima definição introduzimos os nomes das singularidades isoladas correspondentes às condições (b) e (c) do Teor. 8.3 .

Definição 8.4 Sejam Ω um aberto de $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$ e $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$.
(1^o) Quando se verifica a condição (b) do Teor. 8.3 se diz que o ponto a é um *polo de ordem* ν *de* f. A função

$$z \longmapsto \sum_{k=1}^{\nu} c_k (z-a)^{-k}$$

é chamada *parte principal ou singular de* f *em* a. O número complexo c_1 é chamado de *resíduo de* f *em* a e é indicado pela notação

$$\operatorname{Re} s(f, a)\ .$$

(2^o) Quando se verifica a condição (c) do Teor. 8.3 se diz que o ponto a é uma *singularidade essencial de* f.

Observação: É frequente encontrar nos textos sobre funções analíticas a seguinte definição: uma singularidade isolada de f em a é dita *essencial* se o ponto a não é singularidade removível nem polo de f (estas singularidades sendo definidas previamente). Nestes casos se demonstra o teorema (devido a Weierstrass) que diz que se a é uma singularidade essencial de f então vale a condição (c) do Teor. 8.3. O que fizemos nesta exposição então, foi adotar este resultado de Weierstrass como definição de singularidade essencial.

Proposição 8.5 *Sejam* Ω *um aberto de* $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$ *e* $f \in \mathcal{H}(\Omega\setminus\{a\})$.
(1^o) *As condições seguintes são equivalentes:*
(i) a *é uma singularidade essencial de* f .
(ii) *Para cada* $w \in \mathbb{C}$ *existe uma sequência* (z_m) *em* $\Omega\setminus\{a\}$ *tal que* $z_m \to a$ *e* $f(z_m) \to w$ *para* $m \to \infty$.
(2^o) *As condições seguintes são equivalentes:*
(i) a *é um polo de* f *de ordem* ν.
(ii) *Existem* $\nu \in \mathbb{N}^*$ *e* $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ *com* $g(a) \neq 0$ *tais que* $f(z) = g(z)(z-a)^{-\nu}$ $\forall\ z \in \Omega\setminus\{a\}$.

(iii) $\lim_{z\to a} |f(z)| = +\infty$.

Prova **(1^o)** Claro; (2^o) a implicação (i) $\implies$ (ii) é imediata pois por hipótese existe $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que

$$\varphi(z) = f(z) - \sum_{k=1}^{\nu} c_k (z-a)^{-k} \quad \forall\ z \in \Omega\setminus\{a\}$$

e então basta definir g por

$$g(z) := c_\nu + c_{\nu-1}(z-a) + \ \dots\ + c_1(z-a)^{\nu-1} + (z-a)^\nu \varphi(z) \quad \forall\ z \in \Omega$$

portanto $g(a) = c_\nu \neq 0$.
A implicação (ii) $\implies$ (iii) é trivial pois $g(a) \neq 0$. Mostremos finalmente que (iii) $\implies$ (i). É claro que se vale (iii) então a não é uma singularidade removível de f (pela Prop. 8.2 (i) $\iff$ (iii)). Por outro lado, é imediato verificar que a não pode ser uma singularidade essencial de f pois se este fosse o caso, por (1^o) existiria uma sequência (z_m) em $\Omega\setminus\{a\}$ tal que $z_m \to a$ e $f(z_m) \to 1$ (por exemplo) para $m \to \infty$ e portanto $|f(z_m)| \to 1$ o que visívelmente está em contradição com a condição (iii). Desta forma provamos que se vale (iii) então não se verificam nem a condição (a) nem a condição (c) do Teor. 8.3, logo necessariamente vale a condição (b) do Teor. 8.3, donde (i) . $\square$

Corolário 8.6 *Se* Ω *é um aberto de* $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$ *e* $f \in \mathcal{H}(\Omega\setminus\{a\})$ *então,* a *é uma singularidade essencial de* f *se e só se não existe* $\lim_{z\to a} |f(z)|$. $\square$

Desenvolvimento de Laurent Vamos introduzir uma ferramenta bastante útil no estudo das singularidades isoladas. Sejam ρ_1 e ρ_2 dois elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$ tais que

$$0 \leq \rho_1 < \rho_2 \leq +\infty$$

e seja $a \in \mathbb{C}$. Chamamos *anel de centro* a *e raios* ρ_1 *e* ρ_2 ao conjunto aberto

$$A\,[a, \rho_1, \rho_2] = \{z \in \mathbb{C} \mid \rho_1 < |z-a| < \rho_2\}$$

Vamos mostrar que toda $f \in \mathcal{H}(A\,[a, \rho_1, \rho_2])$ admite um desenvolvimento (único) em série do tipo

$$((*)) \qquad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m (z-a)^m$$

chamado *desenvolvimento* (ou *série*) *de Laurent* que substitui a série de Taylor quando $\rho_1 = 0$ e a singularidade de f em a não é removível (e coincide com ela quando a singularidade de f em a é removível).

Em primeiro lugar devemos definir as séries do tipo $((*))$.

Definição 8.7 (1^o) Seja $(z_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ uma sequência de números complexos. Dizemos que a série

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} z_m \tag{8.7.1}$$

é *absolutamente convergente* se as duas séries $\sum_{m=0}^{\infty} z_m$ e $\sum_{m=1}^{\infty} z_{-m}$ são absolutamente convergentes e, neste caso, a soma da série (8.7.1) é o nímero complexo (ainda indicado por (8.7.1)):

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} z_m := \sum_{m=1}^{\infty} z_{-m} + \sum_{m=0}^{\infty} z_m$$

(2^o) Sejam X uma partee não vazia de $\mathbb{C}, (f_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ uma sequência de funções definidas em X com valores em $\mathbb{C}$ e suponhamos que a série

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(z)$$

é absolutamente convergente para cada $z \in X$. Diz-se que a série

$$8.8.8 \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \tag{8.7.2}$$

é *uniformemente convergente sobre* X se as duas séries de funções $\sum_{m=0}^{\infty} f_m$ e $\sum_{m=1}^{\infty} f_{-m}$ são uniformemente convergentes sobre X. Neste caso, o valor de (8.7.2) em $z \in X$ é por definição

$$(\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m)(z) := \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(z),$$

o que (por (1^o) e (2^o)) implica a identidade em X :

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m = \sum_{m=1}^{\infty} f_{-m} + \sum_{m=0}^{\infty} f_m \ .$$

Teorema 8.8 (Laurent) *Sejam* $a \in \mathbb{C}, 0 \le \rho_1 < \rho_2 \le +\infty, \Omega = A\,[A, \rho_1, \rho_2]$ *e* $f \in \mathcal{H}(A\,[a, \rho_1, \rho_2]) = \mathcal{H}(\Omega)$.
(1^o) *Existe uma sequência* $(a_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ *de números complexos tal que*

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m (z-a)^m \qquad \forall \quad z \in \Omega = A\,[a, \rho_1, \rho_2] \tag{8.8.1}$$

(2^o) **Se** $\rho_1 < s_1 < s_2 < \rho_2$, *então a série que aparece no segundo membro* de (8.8.1) *é uniformemente convergente no anel compacto contido em* Ω :

$$\overline{A\,[a, s_1, s_2]} = \{z \in \mathbb{C} \mid s_1 \leq |z-a| \leq s_2\}\,.$$

(3^o) *Para cada* $m \in \mathbb{Z}$ *temos*

$$(8.8.2) \qquad a_m = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=r} \frac{f(z)dz}{(z-a)^{m+1}} \quad ,$$

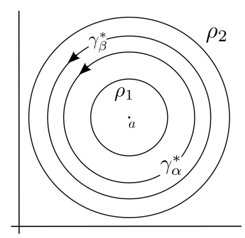
qualquer que seja r *tal que* $\rho_1 < r < \rho_2$.

Prova Dados α, β tais que $\rho_1 < \alpha < \beta < \rho_2$ considere os círculos positivamente orientados de centro a e raios α e β :

$\gamma_\alpha : t \in [0, 2\pi] \longmapsto a + \alpha e^{it} \in \mathbb{C}$

e $\gamma_\beta : t \in [0, 2\pi] \longmapsto a + \beta e^{it} \in \mathbb{C}$

É claro que γ_α e γ_β são Ω-HCF e então,pela Prop. 7.6, resulta que $\gamma_\alpha \overset{\Omega}{\backsim} \gamma_\beta$, donde



$\Gamma := \gamma_\beta - \gamma_\alpha \overset{\Omega}{\backsim} 0$, o que pelo Teor. 7.1 implica

$$\text{Ind}_\Gamma(z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{f(\lambda)d\lambda}{\lambda - z} \qquad \forall \quad \Omega \setminus \gamma_\alpha^* \cup \gamma_\beta^*$$

Se $z \in A\,[a; \alpha, \beta]$ então pela Prop. 5.3, tem-se

$$\text{Ind}_\Gamma(z) = \text{Ind}_{\gamma_\beta}(z) - \text{Ind}_{\gamma_\alpha}(z) = 1 - 0 = 1$$

portanto, a identidade acima se escreve na forma

$$(8.8.3) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\beta} \frac{f(\lambda)d\lambda}{\lambda - z} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\alpha} \frac{f(\lambda)d\lambda}{\lambda - z}$$

$\forall \quad z \in A\,[a; \alpha, \beta]$

O Teor. 4.3 mostra que a função

$$z \in \mathbb{C} \setminus \gamma_\beta^* \longmapsto \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\beta} \frac{f(\lambda)d\lambda}{\lambda - z} \in \mathbb{C}$$

é analítica e, em particular, a função

$$f_\beta : z \in D_\beta(a) \longmapsto \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\beta} \frac{f(\lambda)d\lambda}{\lambda - z} \in \mathbb{C}$$

é analítica. De modo análogo, a função

$$z \in \mathbb{C} \setminus \gamma_\alpha^* \longmapsto -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\alpha} \frac{f(\lambda)d\lambda}{\lambda - z} \in \mathbb{C}$$

é analítica e, em particular, a função

$$f_\alpha : z \in \mathbb{C}\backslash\overline{D}_\alpha(a) \longmapsto -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\alpha} \frac{f(\lambda)d\lambda}{\lambda - z} \in \mathbb{C}$$

é analítica. Por (8.8.3) podemos escrever

$$(8.8.4) \qquad \left| \begin{array}{l} f(z) = f_\beta(z) + f_\alpha(z) \quad \forall \quad z \in A\,[a;\alpha,\beta]\,, \quad \text{sempre que} \\ \rho_1 < \alpha < \beta < \rho_2. \end{array} \right.$$

A prova do Teor. 4.3 (e a definição de integral de linha) mostram que o desenvolvimento de Taylor de f_β em volta de a (válido em $D_\beta(a)$ pelo Corol. 4.11) é

$$(8.8.5) \qquad \left| \begin{array}{l} f_\beta(z) = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\beta} \frac{f(\lambda)d\lambda}{(\lambda - a)^{m+1}} \right\} (z-a)^m \quad \forall \quad z \in D_\beta(a), \\ \\ \text{sempre que } \beta \in]\rho_1,\rho_2[. \end{array} \right.$$

Dado $r \in]\rho_1, \rho_2[$ arbitrário, se $\gamma = \gamma_r : t \in [0, 2\pi] \longmapsto a + re^{it} \in \mathbb{C}$, é claro que γ_β e γ são Ω-HCF e como

$$(8.8.6) \qquad (z \in \Omega \longmapsto \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}} \in \mathbb{C}) \in \mathcal{H}(\Omega) \quad \forall \;\; m \in \mathbb{Z}$$

pelo Teor. 7.7. (2^o), temos (usando (8.8.6) $\;\forall\;\; m \in \mathbb{N}$):

$$\int\limits_{\gamma_\beta} \frac{f(\lambda)d\lambda}{(\lambda - a)^{m+1}} = \int\limits_{\gamma} \frac{f(\lambda)d\lambda}{(\lambda - a)^{m+1}} \quad \forall \quad m \in \mathbb{N}$$

o que mostra que (8.8.5) se escreve assim

$$(8.8.5') \qquad \left| \begin{array}{l} f_\beta(z) = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda - a| = r} \frac{f(\lambda)d\lambda}{(\lambda - a)^{m+1}} \right\} (z-a)^m \quad \forall \quad z \in D_\beta(a) \\ \\ \text{quaisquer que sejam } r, \beta \in]\rho_1, \rho_2[. \end{array} \right.$$

Em consequência, se definimos $f_{(2)} := \bigcup\limits_{\rho_1 < \beta < \rho_2} f_\beta$ é claro que $Dom(f_{(2)}) =$ $= \bigcup\limits_{\rho_1 < \beta < \rho_2} D_\beta(a) = D_{\rho_2}(a)$ e então, em vista de (8.8.5′) tem-se:

$$(8.8.7) \qquad \left| \begin{array}{l} f_{(2)}(z) = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda - a| = r} \frac{f(\lambda)d\lambda}{(\lambda - a)^{m+1}} \right\} (z-a)^m \quad \text{para cada} \\ z \in D_{\rho_2}(a), \text{ sendo a convergência absoluta e uniforme em } \overline{D}_{s_2}(a) \\ \text{para cada} \quad s_2 \in \;\;]0, \rho_2[. \end{array} \right.$$

Por outro lado, $\forall\ \ \lambda \in \gamma_\alpha^*$ (i.e. $|\lambda - a| = \alpha$) e $\forall\ \ z \in \mathbb{C}\backslash\overline{D}_\alpha(a)$ (isto é $|z-a| > \alpha$) temos $\left|\dfrac{\lambda - a}{z-a}\right| < 1$, donde

$$\frac{1}{\lambda - z} = -\frac{1}{z-a}\Big(\frac{1}{1 - \dfrac{\lambda - a}{z-a}}\Big) = -\frac{1}{z-a}\sum_{n\geq 0}\Big(\frac{\lambda - a}{z-a}\Big)^n = -\sum_{n\geq 0}\frac{(\lambda - a)^n}{(z-a)^{n+1}}.$$

Observemos que $\forall\ \ z \in \mathbb{C}\backslash\overline{D}_\alpha(a)$ fixado, temos

$$\sup_{\lambda\in\gamma_\alpha^*}\left|\frac{(\lambda-a)^n}{(z-a)^{n+1}}\right| = \frac{1}{\alpha}\Big(\frac{\alpha}{|z-a|}\Big)^{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

e como a série numérica (z é fixo!) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\alpha}\Big(\frac{\alpha}{z-a}\Big)^{n+1}$ é absolutamente convergente, pela Prop. 3.5 (teste M de Weierstras) resulta que a série

$$-\sum_{n\geq 0}\frac{(\lambda-a)^n}{(z-a)^{n+1}}$$

é absolutamente convergente $\forall\ \ \lambda \in \gamma_\alpha^*$ e $\forall\ \ z \in \mathbb{C}\backslash\overline{D}_\alpha(a)$ e, além disso, é uniformemente convergente em $\lambda \in \gamma_\alpha^*$, $\forall\ \ z \in \mathbb{C}\backslash\overline{D}_\alpha(a)$. Como f é contínua e portanto limitada sobre o compacto γ_α^*, resulta que a série (ver exerc. 4.2)

$$\frac{f(\lambda)}{\lambda - z} = -\sum_{n\geq 0}\frac{f(\lambda)(\lambda-a)^n}{(z-a)^{n+1}}$$

é absolutamente convergente $\forall\ \ \lambda \in \gamma_\alpha^*$, $\forall\ \ z \in \mathbb{C}\backslash\overline{D}_\alpha(a)$ e, uniformemente convergente em $\lambda \in \gamma_\alpha^*$, $\forall\ \ z \in \mathbb{C}\backslash\overline{D}_\alpha(a)$ fixado. Em consequência podemos integrar termo a termo em relação a λ, obtendo $\forall\ \ z \in \mathbb{C}\backslash\overline{D}_\alpha(a)$:

$$\int_{\gamma_\alpha}\frac{f(\lambda)d\lambda}{\lambda - z} = -\sum_{n\geq 0}\int_{\gamma_\alpha}\frac{f(\lambda)(\lambda-a)^n}{(z-a)^{n+1}}d\lambda = -\sum_{n\geq 0}\left\{\int_{\gamma_\alpha}\frac{f(\lambda)d\lambda}{(\lambda-a)^{-n}}\right\}\frac{1}{(z-a)^{n+1}} =$$

$$= -\sum_{k=-1}^{-\infty}\left\{\int_{\gamma_\alpha}\frac{f(\lambda)d\lambda}{(\lambda-a)^{k+1}}\right\}(z-a)^k, \text{ donde (ver definição de } f_\alpha)$$

$$(8.8.8) \quad \left| \begin{array}{l} f_\alpha(z) = \displaystyle\sum_{m=-1}^{-\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\alpha}\frac{f(\lambda)d\lambda}{(\lambda-a)^{m+1}}\right\}(z-a)^m \quad \forall\ \ z \in \mathbb{C}\backslash\overline{D}_\alpha(a), \\ \text{sempre que } \alpha \in]\rho_1, \rho_2[. \end{array}\right.$$

Se $s_1 > \alpha$ então $F := \mathbb{C}\backslash D_{s_1}(a)$ é um fechado contido no aberto $A := \mathbb{C}\backslash\overline{D}_\alpha(a)$; vamos mostrar que a série em (8.8.7) é absoluta e uniformemente convergente em F. De fato, fixemos σ tal que $\rho_1 < \sigma < s_1$ e $\sigma < \rho_2$ e seja

$$\gamma_\sigma : t \in [0, 2\pi] \longmapsto a + \sigma e^{it} \in \mathbb{C}.$$

Então, γ_σ e γ_α são Ω-HCF e (8.8.6) mostra que em (8.8.8) podemos substituir γ_α por γ_σ, majorando o módulo do termo geral da série em (8.8.8) assim [$z \in F$ e $m \in \mathbb{Z}^*_-$!] :

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\alpha}\frac{f(\lambda)d\lambda}{(\lambda-a)^{m+1}}(z-a)^m\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\gamma_\sigma}\frac{f(\lambda)d\lambda}{(\lambda-a)^{m+1}}(z-a)^m\right| \overset{(*)}{\leq}$$

$\overset{(*)}{\leq} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{\gamma_\sigma}\frac{|f(\lambda)|\,|d\lambda|}{\sigma^{m+1}}s_1^m \leq \|f\|_{\gamma_\sigma^*}\cdot(\frac{s_1}{\sigma})^m$, onde $(*)$ resulta observando que $z \in F \iff |z-a| \geq s_1$ e portanto $|z-a|^m \leq s_1^m \ \ \forall \ \ m \in \mathbb{Z}^*_-$. Em consequência, definindo $c := \|f\|_{\gamma_\sigma^*}$ resulta

$$\sup_{z\in F}\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\alpha}\frac{f(\lambda)d\lambda}{(\lambda-a)^{m+1}}(z-a)^m\right| \leq c(\frac{\sigma}{s_1})^{-m} \quad \forall \ \ m \in \mathbb{Z}^*_-$$

e como a série

$$\sum_{m=-1}^{-\infty}(\frac{\sigma}{s_1})^{-m} = \sum_{p=1}^{+\infty}(\frac{\sigma}{s_1})^p$$

é convergente (pois $\sigma < s_1$), de novo pela Prop. 3.5, resulta que a série em (8.8.8) é absoluta e uniformemente convergente em F. Como γ_α e γ são Ω-HCF, por (8.8.8) podemos substituir γ_α por γ (de novo pelo Teor. 7.7 (2^o)), logo (8.8.8) se escreve assim:

$$f_\alpha(z) = \sum_{m=-1}^{-\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\lambda)d\lambda}{(\lambda-a)^{m+1}}\right\}(z-a)^m \quad \forall \ \ z \in \mathbb{C}\backslash\overline{D}_\alpha(a)$$

e $\forall \ \ r, \alpha \in]\rho_1, \rho_2[$.

Em consequência, definindo $f_{(1)} := \bigcup\limits_{\rho_1<\alpha<\rho_2} f_\alpha$, é claro que $Dom(f_{(1)}) =$ $= \bigcup\limits_{\rho_1<\alpha<\rho_2}(\mathbb{C}\backslash\overline{D}_\alpha(a)) = \mathbb{C}\backslash\overline{D}\rho_1(a)$ e, em vista das propriedades de convergência da série em (8.8.8) já verificadas, resulta

(8.8.9)
$$f_{(1)}(z) = \sum_{m=-1}^{-\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda-a|=r}\frac{f(\lambda)d\lambda}{(\lambda-a)^{m+1}}\right\}(z-a)^m \ \ \forall \ \ z \in \mathbb{C}\backslash\overline{D}_{\rho_1}(a)$$

e $\forall \ \ r \in]\rho_1, \rho_2[$, sendo a convergência absoluta e uniforme em $\mathbb{C}\backslash D_{s_1}(a)$ sempre que $s_1 > \rho_1$.

Observando finalmente que das definições de $f_{(2)}$ e de $f_{(1)}$ e de (8.8.4) resulta

$$f(z) = f_{(2)}(z) + f_{(1)}(z) \quad \forall \ \ z \in \Omega = A\,[a; \rho_1, \rho_2]$$

o que junto com (8.8.7), (8.8.8) e a Def. 8.7, implica

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda - a| = r} \frac{f(\lambda) d\lambda}{(\lambda - a)^{m+1}} \right\} (z-a)^m \quad \forall \;\; z \in A\left[a; \rho_1, \rho_2\right]$$

e $\forall \;\; r \in]\rho_1, \rho_2[$, sendo *a convergência* absoluta e uniforme no anel compacto $\overline{A\left[a; s_1, s_2\right]} \quad (\rho_1 < s_1 < s_2 < \rho_2)$. $\square$

Definição 8.9 Se $a \in \mathbb{C}$, $0 \leq \rho_1 < \rho_2 \leq +\infty$ e $f \in \mathcal{H}(A\left[a, \rho_1, \rho_2\right])$, a série de (8.8.1) é chamada *desenvolvimento de Laurent* (ou *série de Laurent*) *de f no anel* $A\left[a, \rho_1, \rho_2\right]$.

Consideremos uma função analítica f com uma singularidade isolada num ponto a, isto é,

$$f \in \mathcal{H}(A\left[a, 0, R\right]) \text{ , para algum } R > 0$$

Se a não é removível o desenvolvimento de Laurent no anel $A\left[a, 0, R\right]$ substitui o desenvolvimento de Taylor de f em volta de a (que $\nexists$ pois a não é removível) e a "parte negativa"do mesmo significa a forma em que deve ser "corrigido o desenvolvimento de Taylor"para levar em consideração a singularidade não removível em a. Observemos ainda que em virtude do Corol. 5.10 a "parte não negativa"do desenvolvimento de Laurent é formalmente idêntica ao desenvolvimento de Taylor. Estas considerações terão um significado preciso no Corol. 8.10.

Corolário 8.10 *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$, $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$, $\rho > 0$ tal que $D^*_\rho(a) = A\left[a, 0, \rho\right] \subset \Omega \setminus \{a\}$ e*

$$(8.10.1) \qquad f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m (z-a)^m \quad \forall \;\; z \in A\left[a, 0, \rho\right]$$

a série de Laurent de f no anel $A\left[a, 0, \rho\right]$. Então:
(1º) O ponto a é uma singularidade removível de f se e só se $a_m = 0$ $\forall \;\; m \in \mathbb{Z}^*_-$.
(2º) O ponto a é um polo de ordem ν (> 0, por definição) *de f se e só se $a_\nu \neq 0$ e $a_m = 0 \;\; \forall \;\; m \leq -\nu - 1$*
(3º) O ponto a é uma singularidade essencial de f se e só se o conjunto

$$X = \left\{ m \in \mathbb{Z}^*_- \mid a_m \neq 0 \right\}$$

é infinito.

Prova (1º) Se o ponto a é uma singularidade removível de f então existe $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que

$$(8.10.2) \qquad f(z) = \varphi(z) \quad \forall \;\; z \in A\left[a, 0, \rho\right] \qquad (z \in \Omega)$$

Seja

$$(8.10.3) \qquad \varphi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (z-a)^m \quad \forall \;\; z \in D_\rho(a)$$

a série de Taylor de φ em volta de a, então substituindo em (8.10.2) obtemos

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (z-a)^m \quad \forall \quad z \in A\,[a,0,\rho]\,,$$

o que implica, por 8.10.1) e pela unicidade da série de Laurent, que $a_m = b_m \;\; \forall \;\; m \in \mathbb{N}$ e $a_m = 0 \;\; \forall \;\; m \in \mathbb{Z}^*_-$. Reciprocamente, se $a_m = 0$ $\forall \;\; m \in \mathbb{Z}^*_-$, então por (8.10.1) temos

$$(8.10.4) \qquad f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z-a)^m \quad \forall \quad z \in A\,[a,0,\rho]$$

e como o segundo membro de (8.10.4) define uma função analítica φ em $D_\rho(a)$ (ver exerc. 5.10), podemos escrever (por (8.10.4) :

$$\varphi \in \mathcal{H}(D_\rho(a)) \qquad \text{e} \qquad f(z) = \varphi(z) \quad \forall \quad z \in D^*_\rho(a),$$

o que mostra que a é uma singularidade removível de f.

(2^o) Se a é um polo de ordem ν de f, por definição existe uma sequência $(c_{-k})_{1 \le k \le \nu}$ de números complexos com $c_{-\nu} \neq 0$ e existe $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que

$$(8.10.5) \qquad f(z) - \sum_{k=1}^{\nu} \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} = \varphi(z) \qquad \forall \quad z \in A\,[a,0,\rho]\;.$$

Se usamos de novo (8.10.3) para indicar a série de Taylor de φ em volta de a (esta φ não tem nada a ver com a φ de (1^o) mas aqui interessa apenas a notação), por (8.10.5) resulta

$$(8.10.6) \quad f(z) = -\sum_{k=1}^{\nu} \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (z-a)^m \quad \forall \;\; z \in A\,[a,0,\rho]$$

o que pela unicidade da série de Laurent mostra que

$$(8.10.7) \qquad f(z) = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + \sum_{m=0}^{\infty} b_m (z-a)^m \quad \forall \quad z \in A\,[a,0,\rho]$$

é a série de Laurent de f no anel $A\,[a,0,\rho]$, logo por (8.10.1) resulta $a_m = b_m \quad \forall \;\; m \in \mathbb{N}$, $a_{-k} = c_{-k} \quad \forall \;\; k = 1, 2, \dots, \nu$ donde, em particular, $a_{-\nu} = c_{-\nu} \neq 0$ e $a_m = 0 \quad \forall \;\; m \le -\nu - 1$.Reciprocamente, suponhamos que $a_{-\nu} \neq 0$ e $a_m = 0 \quad \forall \;\; m \le -\nu - 1$ então é válida (8.10.7) e portanto (8.10.6) com $a_m = b_m \quad \forall \;\; m \in \mathbb{N}$ e que $a_{-k} = c_{-k} \quad \forall \;\; k = 1, 2, \dots, \nu$. Ora, o segundo membro de (8.10.6) (com $b_m = a_m \quad \forall \;\; m \in \mathbb{N}$) define uma função analítica ψ em $D_\rho(a)$ (exerc. 5.10), logo podemos escrever (por (8.10.6)):

$$\psi \in \mathcal{H}(D_\rho(0)) \quad \text{e} \quad f(z) - \sum_{k=1}^{\nu} \frac{a_{-k}}{(z-a)^k} = \psi(z) \quad \forall \;\; z \in D_\rho(a)$$

o que significa precisamente que vale a condição (b) do Teor. 8.3, isto é, f tem um polo de ordem ν no ponto (a).
(3^o) Se a é uma singularidade essencial de f e se o conjunto X fosse finito, então por (1^o) e (2^o) a seria uma singularidade removível ou polar dependendo que $X = \varnothing$ ou $X \neq \varnothing$ respectivamente, o que é absurdo, logo X é infinito. Reciprocamente, se X é infinito então (1^o) e (2^o) mostram que a singularidade em a não pode ser nem removível nem polar, logo é essencial. □

A seguir vamos introduzir um conceito fundamental na teoria das funções complexas de variável complexa que é o de *função meromorfa.* Se Ω é um aberto conexo de $\mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $g \neq 0$, sabemos pelo Corol. 4.16 que $D = Z(g)$ é um conjunto discreto e fechado em Ω (ou equivalentemente D não tem ponto de acumulação em Ω, ver exerc. (4.11) (c)), em consequência $\Omega \backslash D$ é aberto em $\mathbb{C}$ e pelo Exemplo 3 do capítulo 1 é claro que

$$f/g \in \mathcal{H}(\Omega \backslash D).$$

Se $a \in D$ (e $f \neq 0$), sabemos que existem $\nu, \mu \in \mathbb{N}$ $\nu \geq 1$, $\mu \geq 0$ e $D_r(a) \subset \Omega$ tais que

$$g(z) = (z-a)^\nu g_1(z) \qquad \text{e} \qquad f(z) = (z-a)^\mu \cdot f_1(z),$$

onde $f_1, g_1 \in \mathcal{H}(D_r(a))$, $f_1(z) \neq 0$ e $g_1(z) \neq 0$ para cada $z \in D_r(a)$.
Resulta que

$$f_1/g_1 \in \mathcal{H}(D_r(a)) \qquad \text{e} \qquad (f_1/g_1)(z) \neq 0 \quad \forall \quad z \in D_r(a)$$

logo

$$\frac{f_1(z)}{g_1(z)} = \sum_{m \geq 0} c_m (z-a)^m \qquad \forall \quad z \in D_r(a) \quad \text{e} \quad c_0 \neq 0$$

donde

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{(z-a)^\mu}{(z-a)^\nu} \cdot \frac{f_1(z)}{g_1(z)} = (z-a)^{\mu-\nu} \cdot \sum_{m \geq 0} c_m (z-a)^m \quad \forall \quad z \in D_r(a)$$

Se $\mu < \nu$, como $c_0 \neq 0$, a identidade acima mostra que f/g tem um polo de ordem $\nu - \mu$ em a (se $\mu \geq \nu$ então f/g tem uma singularidade removível em a). Motivados por este tipo de situação damos a seguinte:

Definição 8.11 Seja Ω um aberto não vazio de $\mathbb{C}$. Uma função φ é dita *meromorfa em* Ω se existe $D \subset \Omega$ tal que as condições seguintes estão verificadas
(M1) D não tem ponto de acumulação em Ω.
(M2) $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega \backslash D)$.
(M3) φ tem um polo em cada ponto de D.

O conjunto de todas as funções meromorfas em Ω munido das operações de adição e multiplicação ponto a ponto tem, como é fácil de verificar, uma estrutura de corpo que é indicada pela notação

$$\mathcal{M}(\Omega).$$

Como o conjunto vazio não tem ponto de acumulação em Ω, é claro que $\mathcal{H}(\Omega) \subset \mathcal{M}(\Omega)$. As considerações que precedem à Def. 8.11 mostram então que se Ω é um aberto conexo de $\mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $g \neq 0$, então $\varphi = f/g \in \mathcal{M}(\Omega)$. Reciprocamente, é possível provar (mas não é fácil, ver por exemplo [R2], Th.15.12) que toda função meromorfa $\varphi \in \mathcal{M}(\Omega)$ é um quociente de duas funções analíticas em Ω, em outras palavras, que $\mathcal{M}(\Omega)$ é o corpo de frações do anel de integridade $\mathcal{H}(\Omega)$. Se $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, pela Def. 8.11 temos $f \in \mathcal{H}(\Omega \backslash D)$ onde D é um subconjunto de Ω sem ponto de acumulação em Ω. Se $a \in D$, então a é um polo de f e portanto estão definidos (ver Def. 8.4) o *resíduo e a parte principal de* f *em* a.

O nosso próximo objetivo é o teorema dos resíduos que vai ser uma consequência trivial do Corol. 7.2 e do seguinte:

Lema 8.12 *Sejam* Ω *um aberto de* $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$ *e* $f \in \mathcal{H}(\Omega \backslash \{a\})$
(a) *Se* a *é um polo de* f *então*

$$\operatorname{Re} s(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\varepsilon} f(z) dz$$

para cada $\varepsilon > 0$ *tal que* $\overline{D}_\varepsilon(a) \subset \Omega$.
(b) *Se* a *é um polo simples de* f (i.e. um polo de ordem 1) *então*

$$\operatorname{Re} s(f, a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z).$$

Prova (a) Pela Def. 8.4 (1^o) existem $\nu \in \mathbb{N}^*$, uma família $(c_k)_{1 \leq k \leq \nu}$ de números complexos com $c_\nu \neq 0$ e $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ tais que

$$\text{(8.12.1)} \qquad \varphi(z) := f(z) - \sum_{k=1}^{\nu} \frac{c_k}{(z-a)^k} \quad \forall \quad z \in \Omega \backslash \{a\}$$

Dado $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{D}_\varepsilon(a) \subset \Omega$, existe $\eta > \varepsilon$ tal que $\overline{D}_\varepsilon(a) \subset D_\eta(a) \subset \Omega$ e como $D_\eta(a)$ é um aberto convexo, pelo teorema de Cauchy para um aberto convexo (Teor. 5.7) temos

$$\int_{|z-a|=\varepsilon} \varphi(z) dz = 0 \ ,$$

o que por (8.12.1) implica

$$\text{(8.12.2)} \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\varepsilon} \left\{ f(z) - \sum_{k=1}^{\nu} \frac{c_k}{(z-a)^k} \right\} dz = 0$$

Pelo Corol. 5.5 (ou fazendo os cálculos) temos

$$c_1 \int\limits_{|z-a|=\varepsilon} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i c_1 \qquad \text{e} \qquad \int\limits_{|z-a|=\varepsilon} \frac{c_k dz}{(z-a)^k} = 0 \quad \forall \;\; k = 2, 3, \ldots, \nu$$

o que junto com a Prop. 5.3 e por ser $c_1 = \operatorname{Re}s(f, a)$, prova (a) .
(b) Se f tem um polo simples em a, então podemos escrever (8.12.1) com $\nu = 1$, donde

$$\varphi(z)(z-a) = (z-a)f(z) - c_1 \quad \forall \quad z \in \Omega \backslash \{a\} \; . \;\; \square$$

Teorema 8.13 (teorema dos resíduos) *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{M}(\Omega), D$ o conjunto dos polos de f e seja Γ um ciclo em $\Omega \backslash D$ tal que*

(8.13.1) $$\operatorname{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0 \quad \forall \;\; \alpha \notin \Omega \quad \text{(i.e. } \Gamma \overset{\Omega}{\backsim} 0)$$

Então

(8.13.2) $$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma f(z) dz = \sum_{a \in D} \operatorname{Re}s(f, a).\operatorname{Ind}_\Gamma(a)$$

Prova Comecemos por provar que a soma que aparece no segundo membro de (8.13.2) é finita. Para tanto é suficiente mostrar que o conjunto

$$F := \{a \in D \; |\operatorname{Ind}_\Gamma(a) \neq 0\}$$

é finito (pois o segundo membro de (8.13.2) toma a forma

$$\sum_{a \in F} \operatorname{Re}s(f, a) \cdot Ind_\Gamma(a))$$

Seja V uma componente conexa de $\mathbb{C} \backslash \Gamma^*$. Se V é a componente ilimitada de $\mathbb{C} \backslash \Gamma^*$ ou se $V \cap (\mathbb{C} \backslash \Omega) \neq \varnothing$, como a função $\operatorname{Ind}_\Gamma : z \in \mathbb{C} \backslash \Gamma^* \longmapsto \operatorname{Ind}_\Gamma(z) \in \mathbb{Z}$ é constante sobre cada componente conexa de $\mathbb{C} \backslash \Gamma^*$ resulta pelo Teor. 5.2 ou por (8.13.1) respectivamente, que

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0 \quad \forall \quad z \in V$$

e em consequência

(8.13.3) $$\left| \begin{array}{l} V \cap F = \varnothing \;\text{ se }\; V \text{ é a componente conexa ilimitada de} \\ \mathbb{C} \backslash \Gamma^* \;\text{ ou }\; \text{se } V \cap (\mathbb{C} \backslash \Omega) \neq \varnothing \; . \end{array} \right.$$

Concluimos então, que se W indica a reunião de todas as componentes conexas limitadas e contidas em Ω de $\mathbb{C} \backslash \Gamma^*$, devemos ter $F \subset W$. Como Γ^* é compacto e portanto limitado, existe $\rho > 0$ tal que $\Gamma^* \subset D_\rho(0)$ o que implica $W \subset D_\rho(0)$ **[**De fato, basta verificar que se V é uma componente conexa limitada contida em Ω de $\mathbb{C} \backslash \Gamma^*$ então $V \subset D_\rho(0)$, vamos provar um pouco mais, a saber

$$\sup_{z \in \overline{V}} |z| < \rho \; .$$

De fato, $\overline{V}$ é compacto e

$$\overline{V} = V \cup \partial V \subset V \cup \partial(\mathbb{C} \backslash \Gamma^*) = V \cup \Gamma^*.$$

A função $\varphi : z \in \overline{V} \longmapsto |z| \in \mathbb{R}$ é contínua e como $\overline{V}$ é compacto, existe $\xi \in \overline{V}$ tal que

$$\sup_{z\in\overline{V}} \varphi(z) = \sup_{z\in V} |z| = |\xi| = \varphi(\xi).$$

Mostremos que $\xi \in \partial V \subset \Gamma^*$. Como V é aberto temos $V \cap \partial V = \varnothing$ logo se $\xi \notin \partial V$ temos $\xi \in V$ donde existe $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{D}_\varepsilon(\xi) \subset V$ e então $\zeta := \xi + \dfrac{\xi}{|\xi|}\varepsilon \in \overline{D}_\varepsilon(\xi) \subset V$, o que é absurdo pois

$$\varphi(\zeta) = \left|\xi + \frac{\xi}{|\xi|}\varepsilon\right| = |\xi| \left|1 + \frac{\varepsilon}{|\xi|}\right| > |\xi| = \sup_{z\in\overline{D}} \varphi(z).$$

Resulta então que $\xi \in \partial V \subset \Gamma^*$ e como $\Gamma^* \subset D_\rho(0)$ temos $|z| < \rho$ $\forall \quad z \in \Gamma^*$ e em particular $\sup_{z\in\overline{V}} |z| = |\xi| < \rho$**]**. Em consequência, W é limitado e portanto $\overline{W}$ é compacto e como

$$\overline{W} = W \cup \partial W \subset W \cup \partial(\mathbb{C}\backslash\Gamma^*) = W \cup \Gamma^* \subset \Omega,$$

temos $F \subset W \subset \overline{W} \subset \Omega$. Então, se F fosse infinito, a compacidade de $\overline{W}$ implica que F tem um ponto de acumulação $a \in \overline{W}$ e como $F \subset D$ e $\overline{W} \subset \Omega$, se segue que $a \in \Omega$ é um ponto de acumulação de D em Ω, o que é absurdo pela definição de função meromorfa, logo F é finito e

$$(8.13.4) \qquad \sum_{a\in D} \operatorname{Re} s(f,a).\operatorname{Ind}_\Gamma(a) = \sum_{a\in F} \operatorname{Re} s(f,a).\operatorname{Ind}_\Gamma(a)\ ,$$

Como D não tem ponto de acumulação em Ω e F é finito, é claro que para cada $a \in F$ existe $r(a) > 0$ tal que, se indicamos com D_a o disco aberto de centro a e raio $r(a)$, então se verificam as condições:

(I.) $\overline{D}_a \subset \Omega$

(II.) $D_a \cap D_b = \varnothing$ seempre que $a, b \in F$ e $a \neq b$

Pelo Corol. 7.2 resulta então

$$(8.13.5) \qquad \int_\Gamma f(z)dz = \sum_{a\in F} \operatorname{Ind}_\Gamma(a). \int_{|z-a|=r(a)} f(z)dz$$

Ora, o Lema 8.12. (a) e a condição (I.) acima implicam que

$$(8.13.6) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r(a)} f(z)dz = \operatorname{Re} s(f,a) \qquad \forall \quad a \in F$$

e portanto, (8.13.2) resulta de (8.13.4), (8.13.5) e (8.13.6). $\square$

Observação Sejam Ω um aberto de $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e

$$g : z \in \Omega\backslash\{a\} \longmapsto \frac{f(z)}{z-a} \in \mathbb{C}$$

É claro então que $g \in \mathcal{M}(\Omega)$ e que a é um polo simples de g se $f(a) \neq 0$, logo o Lema 8.12. (b) implica

$$\operatorname{Re} s(g,a) = \lim_{z \to a} (z-a)g(z) = f(a) \ .$$

Seja Γ um ciclo em $\Omega \setminus \{a\}$ tal que $\operatorname{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0 \quad \forall \ \ \alpha \notin \Omega$ então aplicando o Teor. 8.13 a g e Γ vem

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{f(z)}{z-a} dz = \operatorname{Ind}_\Gamma(a) f(a)$$

o que trocando os papeis das variáveis significa:

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{f(\lambda) d\lambda}{\lambda - z} \qquad \forall \quad z \in \Omega \setminus \Gamma^*$$

sendo Γ um ciclo em Ω que é Ω-homólogo a 0. Desta forma o teorema da representação integral de Cauchy (Teor. 7.1, (7.1.2)) aparece como um caso especial do teorema dos resíduos.

Antes de apresentar as aplicações do Teor. 8.13 ao cálculo de integrais vamos dar um resultado relativo à contagem de zeros de uma função analítica numa certa região que é aplicação direta do Teor. 8.13. Começamos dando uma definição precisa do que vamos entender por "contar zeros". Sejam Ω um aberto de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, X uma parte não vazia de Ω e suponhamos que o conjunto F dos zeros de f em Xseja finito e que a seja um zero de ordem ν_a de f para cada $a \in F$. Por definição, *o número de zeros de f em X contados com sua multiplicidade* é o número inteiro não negativo

$$Z_X(f) = Z_f := \sum_{a \in F} \nu_a \ .$$

Observar que se $F = \varnothing$ então $Z_f = \sum_{a \in \varnothing} \nu_a = 0$.

O resultado seguinte é uma aplicação do teorema dos resíduos

Teorema 8.14 (Contagem de zeros) *Sejam Ω um aberto conexo de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f \neq 0$ e A o conjunto dos zeros de f. Para cada $a \in A$ indicamos com ν_a a ordem de a. Seja γ uma CSDF em Ω tal que:*

(8.14.1) $\qquad \operatorname{Ind}_\gamma(\alpha) = 0 \quad \forall \quad \alpha \notin \Omega \quad$ (i.e. $\gamma \overset{\Omega}{\backsim} 0$)

Nestas condições temos as asserções seguintes:

(1^o) *Se $A \cap \gamma^* = \varnothing$ então*

(8.14.2) $$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{a \in A} \nu_a \operatorname{Ind}_\gamma(a)$$

(2^o) *Suponhamos que γ satisfaz a condição suplementar*

(8.14.3) $\qquad \operatorname{Ind}_\gamma(\alpha) = 0 \quad$ ou $\ 1 \qquad \forall \quad \alpha \in \Omega \setminus \gamma^*$

e seja

$$\Omega_1 := \{\alpha \in \Omega \mid \mathrm{Ind}_\gamma(\alpha) = 1\}\,.$$

Então f tem um número finito de zeros em Ω_1 e se f não tem zeros em γ^*, temos:

$$(8.14.4) \qquad Z_f = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \mathrm{Ind}_\Gamma(0)\ ,$$

onde $\Gamma := f \circ g$ e Z_f indica o número de zeros de f em Ω_1, contados com sua multiplicidade.

Prova (1^o) Pelo exerc. (8.11) $f'/f \in \mathcal{M}(\Omega)$. Se $a \in A$ então

$$f(z) = (z-a)^{\nu_a} g(z)$$

onde g e $1/g$ são holomorfas em algum disco aberto $D_r(a)$, contido em Ω e então

$$(8.14.5) \qquad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\nu_a}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)} \qquad \forall \quad z \in D_r(a)$$

em consequência, a função

$$z \in D_r^*(a) \longmapsto \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{\nu_a}{z-a} \in \mathbb{C}$$

tem uma singularidade removível no ponto a [pois coincide em $D_r^*(a)$ com $g'/g \in \mathcal{H}(D_r(a))$], o que implica

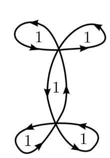
$$(8.14.6) \qquad \mathrm{Re}\, s(f'/f, a) = \nu_a \qquad \forall \quad a \in A$$

Por (8.14.1) e por ser $A \cap \gamma^* = \varnothing$, podemos aplicar o Teor. 8.13 a f'/f e γ e como A é o conjunto dos polos de f'/f , novamente pelo exerc. (8.11) temos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{a\in A} \mathrm{Re}\, s(f'/f, a)\cdot\mathrm{Ind}_\gamma(a)$$

o que por (8.14.6), prova (8.14.2).

(2^o) A componente conexa ilimitada de $\mathbb{C}\backslash\gamma^*$ contém o complementar de um disco $D_\rho(0)$ para algum ρ suficientemente grande, donde $\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha) = 0$ $\forall \quad \alpha \in \mathbb{C}\backslash D_\rho(0)$, o que acarreta pela definição de Ω_1 que $\Omega_1 \subset D_\rho(0)$, isto é, Ω_1 é relativamente compacto. Por outro lado Ω_1 é reunião de componentes conexas de $\mathbb{C}\backslash\gamma^*$ contidas em Ω, donde:



$$\overline{\Omega}_1 = \Omega_1 \cup \partial\Omega_1 \subset \Omega_1 \cup \gamma^* \subset \Omega$$

o que mostra que $\overline{\Omega}_1$ é uma parte compacta contida em Ω, portanto (ver exerc. 4.12) f tem um número finito de zeros em $\overline{\Omega}_1$, o que prova a primeira asserção. Se f não tem zeros em γ^* então se verifica a hipótese de (1^o), isto é, $A \cap \gamma^* = \varnothing$ e em consequência é válida a identidade (8.14.2) que escrevemos assim:

$$(8.14.7) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{a\in A\cap\Omega_1}\nu_a \ \operatorname{Ind}_\gamma(a) + \sum_{a\in A\setminus\Omega_1}\nu_a \ \operatorname{Ind}_\gamma(a)\ .$$

A hipótese (8.14.3) e as definições de Ω_1 e de Z_f implicam

$$\sum_{a\in A\cap\Omega_1}\nu a \ \operatorname{Ind}_\gamma(a) = \sum_{a\in A\cap\Omega_1}\nu_a \ = Z_f \qquad \text{e} \qquad \sum_{a\in A\setminus\Omega_1}\nu_a \ \operatorname{Ind}_\gamma(a) = 0$$

o que por (8.14.7) prova a primeira identidade de (8.14.4). A segunda identidade de (8.14.4) é um cálculo trivial. De fato, se indicamos com $[a,b]$ o domínio de γ então (observe que $0 \notin \Gamma^*$ pois f não tem zeros em γ)

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f'(\gamma(s))}{f(\gamma(s))}\gamma' ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz \ \ . \square$$

Exemplo 2 Como ilustração do Teor. 8.14 vamos calcular a integral

$$\mathrm{I} = \int_{|z|=2} \frac{2z+1}{z^2+z+1}dz$$

É claro que $\Omega = \mathbb{C}$ e o círculo $|z| = 2$ satisfaz as hipóteses (8.14.1) e (8.14.3) e que $\Omega_1 = D_2(0)$. As raízes de $f(z) = z^2 + z + 1 = 0$ são as duas raízes cúbicas não reais ω_1 e ω_2 de 1, ambas estão contidas em $D_2(0)$, têm ordem de multiplicidade igual a 1 e o índice de cada uma delas em relação a $|z| = 2$ é 1 portanto

$$\mathrm{I} = 2\pi i(1\times 1 + 1\times 1) = 4\pi i$$

Observação Sejam Ω, γ e f como no Teor. 8.14 (1^o) e fixemos $\zeta \in \operatorname{Im}(f)$ arbitrário. Dizemos que $a \in \Omega$ *é uma raiz de ordem* ν *da equação* $f(z) = \zeta$ se a é um zero de ordem ν da função $z \in \Omega \longmapsto f(z) - \in \mathbb{C}$. Seja agora D uma parte de Ω sem ponto de acumulação tal que

(I.) a é uma raiz de ordem ν_a da equação $f(z) = \zeta \quad \forall \ a \in D$;

(II.) $D \cap \gamma^* = \varnothing$;

(III.) $f(z) \neq \zeta$ para cada $z \in \Omega\setminus D$.

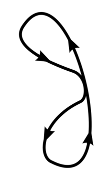
Então aplicando o Teor. 8.14 (1^o) à função $z \longmapsto f(z) - \zeta$ obtemos a fórmula análoga a (8.14.2)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-\zeta}dz = \sum_{a\in D}\nu_a \ \operatorname{Ind}_\gamma(a) \ \ .$$

O próximo resultado é uma aplicação do Teor. 8.14 (i.e. do teorema dos resíduos) chamado "teorema de Rouché"que fornece o número de zeros de uma função holomorfa f num disco conhecendo o número de zeros que tem, no mesmo disco, uma outra função holomorfa g "próxima"de f. Na realidade vamos apresentar uma versão mais geral deste teorema:

Corolário 8.15 (Rouché) *Sejam* Ω *um aberto conexo e* γ *uma CSDF em* Ω *verificando as condições:*

$$\left| \begin{array}{l} \mathrm{Ind}_\gamma(\alpha) = 0 \quad \forall \quad \alpha \notin \Omega \\ \mathrm{Ind}_\gamma(\alpha) = 0 \quad \text{ou} \quad 1 \quad \forall \ \ \alpha \in \Omega \backslash \gamma^* \end{array} \right.$$



Seja $\Omega_1 := \{\alpha \in \Omega \mid \mathrm{Ind}_\gamma(\alpha) = 1\}$. *Se* $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ *e se verifica a condição*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \forall \ \ z \in \gamma^* \tag{8.15.1}$$

então

$$Z_f = Z_g \ ,$$

onde Z_f (resp. Z_g) *indica o número de zeros de* f (resp. g) *em* Ω_1 *contados com sua multiplicidade.*

Prova A condição (8.15.1) mostra que g não é identicamente nula e que g não tem zeros em γ^*, portanto podemos aplicar o Teor. 8.14 (2^o) com g no lugar de f, obtendo

$$Z_g = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz = \mathrm{Ind}_{\Gamma_0}(0)$$

onde $\Gamma_0 := g \circ f$. Seja $\Gamma := f \circ \gamma$ e suponhamos, por exemplo, que o domínio de γ é $[0, 1]$, então a hipótese (8.15.1) expressa que

$$|\Gamma(s) - \Gamma_0(s)| < |\Gamma(s)| \quad \forall \quad s \in [0, 1] \, ,$$

o que pelo Lema 7.5 acarreta

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(0) = \mathrm{Ind}_{\Gamma_0}(0) \ .$$

Finalmente, observemos que (8.15.1) mostra que $f \neq 0$ e que f não tem zeros em γ^*, logo o Teor. 8.14 (2^o) é válido para f, donde

$$Z_f = \mathrm{Ind}_\Gamma(0) \ . \ \ \square$$

O próximo resultado é a "versão meromorfa"do Teor. 8.14 e é conhecido como "Princípio do Argumento"(a razão pela qual o Teor. 8.16 é chamado desta forma está relacionada com o conceito de'"primitiva ao longo de uma curva"que não definiremos neste livro, ver [C], pg 120). Sejam Ω um aberto conexo de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, B o conjunto dos polos de f e, para cada $b \in B$, indiquemos com ω_b a ordem de b. Pela Def. 8.11, B não tem ponto de acumulação em Ω e então para cada compacto $K \subset \Omega$, o conjunto $B \cap K$ é finito. Seja agora X uma parte não vazia de Ω e suponhamos que o conjunto $B \cap X$ dos polos de f em X *seja finito.* Por definição, *o número de polos de* f *em* X *contados com sua multiplicidade* é o número inteiro não negativo

$$\mathcal{P}_X(f) = \mathcal{P}_f = \sum_{b \in B \cap X} \omega_b \qquad\qquad (B \cap X \quad \text{finito})$$

Teorema 8.16 *Sejam Ω um aberto conexo de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ tal que $f \neq 0$ e A(resp. B) o conjunto dos zeros (resp. polos) de f. Para cada $a \in A$ (resp. $b \in B$) indiquemos com ν_a (resp. ω_b) a ordem de a (resp. b). Seja γ uma CSDF em Ω tal que*

$$(8.16.1) \qquad \operatorname{Ind}_\gamma(\alpha) = 0 \qquad \forall \quad \alpha \notin \Omega \qquad (\text{i.e.} \quad \gamma \overset{\Omega}{\backsim} 0)$$

Nestas condições valem as asseções seguintes:
(1^o) *Se $A \cap \gamma^* = B \cap \gamma^* = \varnothing$, então*

$$(8.16.2) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)dz}{f(z)} = \sum_{a \in A} \nu_a \operatorname{Ind}_\gamma(a) - \sum_{b \in B} \omega_b \operatorname{Ind}_\gamma(b)$$

(2^o) *Suponhamos que γ satisfaz a condição suplementar*

$$(8.16.3) \qquad \operatorname{Ind}_\gamma(\alpha) = 0 \quad \text{ou} \quad 1 \qquad \forall \qquad \alpha \in \Omega \backslash \gamma^*$$

e seja $\Omega_1 := \{\alpha \in \Omega \mid \operatorname{Ind}_\gamma(\alpha) = 1\}$.
Então f têm um número finito de zeros e um número finito de polos em Ω_1 (i.e. $A \cap \Omega_1$ e $B \cap \Omega_1$ são finitos) *e, se f não tem zeros nem polos em γ^*, então*

$$(8.16.4) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z_f - P_f$$

onde Z_f (resp. P_f) indica o número de zeros (resp. polos) de f em Ω_1 contados com sua multiplicidade.

Prova (1^o) Pelo exerc.(8.11) (a), (b) e (c) temos $f'/f \in \mathcal{M}(\Omega)$ e

$$(8.16.5) \qquad \left| \begin{array}{l} \operatorname{Re}s(f'/f, a) = \nu_a \quad \forall \quad a \in A \\ \operatorname{Re}s(f'/f, b) = -\omega_b \quad \forall \quad b \in B \end{array} \right.$$

Pelo exerc.(8.11) (d) sabemos que o conjunto dos polos da função f'/f é o conjunto $A \cup B$. Por (8.16.1) e por ser $A \cap \gamma^* = B \cap \gamma^* = \varnothing$, podemos aplicar o Teor. 8.13 a f'/f e γ obtendo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{c \in A \cup B} \operatorname{Re}s(f'/f, c) \cdot \operatorname{Ind}_\gamma(c)$$

o que juntos a (8.16.5) prova (8.16.2).
(2^o) Comoo $f \neq 0$, os conjuntos A e B não têm ponto de acumulação em Ω. Por outro lado, já foi demonstrado no Teor. 8.14.(2^o) que $\overline{\Omega}_1$ é uma

parte compacta de Ω, em consequência, os conjuntos $A\cap\overline{\Omega}_1$ e $B\cap\overline{\Omega}_1$ são finitos, o que prova a primeira afirmação. Suponhamos agora que f não tem nem zeros nem polos em γ^*, então está verificada a hipótese de (1^o), logo é válida a identidade (8.16.2) que escrevemos da forma seguinte:

$$(8.16.6)\qquad \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{a\in A\cap\Omega_1}\nu_a \operatorname{Ind}_\gamma(a) + \sum_{a\in A\setminus\Omega_1}\nu_a \operatorname{Ind}_\gamma(a) - \\ \displaystyle - \sum_{b\in B\cap\Omega_1}\omega_b \operatorname{Ind}_\gamma(b) - \sum_{b\in B\setminus\Omega_1}\omega_b \operatorname{Ind}_\gamma(b) \end{array}\right.$$

Ora, a hipótese (8.16.3) e a s definições de Ω_1, Z_f e P_f mostram que

$$\sum_{a\in A\cap\Omega_1}\nu_a \operatorname{Ind}_\gamma(a) = \sum_{a\in A\cap\Omega_1}\nu_a = Z_f \qquad , \qquad \sum_{a\in A\setminus\Omega_1}\nu_a \operatorname{Ind}_\gamma(a) = 0$$

$$\sum_{b\in B\cap\Omega_1}\omega_b \operatorname{Ind}_\gamma(b) = \sum_{b\in B\cap\Omega_1}\omega_b = P_f \qquad ; \qquad \sum_{b\in B\setminus\Omega_1}\omega_b \operatorname{Ind}_\gamma(b) = 0 \quad ,$$

o que por (8.16.6) prova (8.16.4). $\square$

Cálculo de integrais pelo método dos resíduos.

Vamos calcular integrais *definidas* sem explicitar uma primitiva da função sob o sinal de integração mas interpretando o valor da integral como uma soma de resíduos relativos a pontos singulares de uma função meromorfa convenientemente escolhida. Não existe um método geral de ataque do problema, assim sendo vamos nos limitar a considerar alguns tipos clássicos de integrais mais frequentes nas aplicações. Para que um método destes seja aplicável na prática, devemos ter um mecanismo razoavelmente eficiente para calcular resíduos:

Proposição 8.17 *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{C}$, $f\in\mathcal{M}(\Omega)$, $f\neq 0$, $a\in\Omega$ um polo de f de ordem m e*

$$g(z) := (z-a)^m f(z) \qquad \forall \quad z\in D_\varepsilon^*(a)$$

(onde $D_\varepsilon(a)\subset\Omega$ é tal que $f\in\mathcal{H}(D_\varepsilon^*(a))$). *Então,*

$$\operatorname{Re}s(f,a) = \frac{1}{(m-1)!}g^{(m-1)}(a).$$

Em particular, se a é um polo simples (i.e. $m=1$) *de f temos: (reencontramos* o resultado do Lema 8.12 (b)):

$$\operatorname{Re} s(f,a) = g(a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)\ .$$

Prova Como a é uma singularidade isolada de f, existe $\varepsilon > 0$ tal que $D_\varepsilon(a) \subset \Omega$ e $f \in \mathcal{H}(D_\varepsilon^*(a))$, portanto pela Prop. 8.5, (2^o), (ii) existe $g \in \mathcal{H}(D_\varepsilon(a))$ tal que $g(a) \neq 0$ e

$$(8.17.1) \qquad g(z) = (z-a)^m f(z) \qquad \forall \quad z \in D_\varepsilon^*(a)\ .$$

Como

$$g(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} g^{(k)}(a)(z-a)^k \qquad \forall \quad z \in D_\varepsilon(a),$$

por (8.17.1) resulta para cada $z \in D'_\varepsilon(a)$:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m} = \frac{g(a)}{(z-a)^m} + \ldots + \frac{1}{(m-1)!}\frac{g^{(m-1)}(a)}{z-a} \quad +$$

$$+ \sum_{k\geq m} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^{k-m} \qquad \text{o que prova que}$$

$$\operatorname{Re} s(f,a) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(a)$$

Em particular, se $m = 1$ temos por (8.17.1)

$$\operatorname{Re} s(f,a) = g(a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)\ .\ \square$$

A seguir vamos estudar vários tipos de integrais definidas calculáveis pelo método dos resíduos

Tipo 1 Consideremos integrais da forma

$$\mathrm{I} = \int_0^{2\pi} R(sent, \cos t)dt$$

onde $R : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto R(x,y) \in \mathbb{R}$ denota uma função racional contínua sobre o círculo $x^2 + y^2 = 1$. Seja $z = e^{it}$, então quando t cresce de 0 a 2π, z percorre o círculo orientado positivamente de centro 0 e raio 1. Como

$$sent = \frac{1}{2i}(z - 1/z) \quad , \quad \cos t = \frac{1}{2}(z + 1/z) \quad \text{e} \quad dz = izdt$$

a definição de integral curvilinha mostra que

$$(T.1.1) \qquad \mathrm{I} = \int_0^{2\pi} R(sent, \cos t)dt = \int_{|z|=1} \frac{1}{iz} R\left[\frac{1}{2i}(z-1/z), \frac{1}{2}(z+1/z)\right] dz =$$

$$= \frac{1}{i}\int_{|z|=1} f(z)dz$$

onde

$(T.1.2)$ $\qquad f(z) := \dfrac{1}{z} R\left[\dfrac{1}{2i}(z-1/z), \dfrac{1}{2}(z+1/z)\right] \quad \forall\ z \in \mathbb{C}$, onde o segundo membro está definido.

Ora, pelo Teor. 8.13 temos:

$$(T.1.3) \qquad \frac{1}{i} \int\limits_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi \sum_{a \in A} \operatorname{Re} s(f,a)$$

sendo A o conjunto dos polos de $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ contidos em $D_1(0)$ (pelo Teor. 8.13 a soma deveria ser extendida ao conjunto D de todos os polos de f, porém no caso presente é claro que $\operatorname{Ind}_{|z|=1}(a) = 0$ sempre que $|a| > 1$ portanto basta considerar o conjunto A dos polos em $D_1(0)$).
A definição de resíduo de uma função meromorfa num ponto a foi dada apenas no caso em que o ponto é polo da função, porém como o resíduo de uma função $\varphi \in \mathcal{M}(\Omega)$ num ponto $a \in \Omega$, no Teor. 8.13, aparece na forma do Lema 8.12 (a), isto é,

$$\operatorname{Re} s(\varphi, a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=\varepsilon} \varphi(z)dz \quad ,$$

não há inconveniente em tomar esta expressão como definição de resíduo de φ *em* a*, seja ou não* a *um polo de* φ (se a não é polo de φ então $\operatorname{Re} s(\varphi, a) = 0$). Fazendo isto, podemos simplificar expressões do tipo $(T.1.3)$ assim

$$(T.1.4) \qquad \frac{1}{i} \int\limits_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi \sum_{|a|<1} \operatorname{Re} s(f,a)$$

a soma agora sendo estendida a $D_1(0)$. Em resumo, de $(T.1.1)$ e $(T.1.4)$ resulta

$$\mathrm{I} = \int_0^{2\pi} R(sent, \cos t)dt = 2\pi \sum_{|a|<1} \operatorname{Re} s(f,a)$$

sendo f dada por $(T.1.2)$

Exemplo Calcular $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + sent}$, sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$.

Neste caso $R(x,y) = \dfrac{1}{a+x}$ donde $f(z) = \dfrac{2i}{z^2 + 2aiz - 1}$ que tem dois polos:

$$z_1 = i(-a + \sqrt{a^2-1}) \qquad \text{e} \qquad z_2 = i(-a - \sqrt{a^2-1}) \ .$$

Como $|z_2| > 1$ e $|z_1| < 1$ temos

$$\mathrm{I} = \frac{1}{i} \int\limits_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi \operatorname{Re} s(f, z_1) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

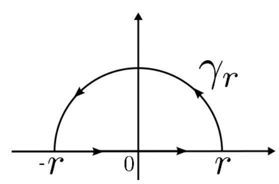
Tipo 2 Integrais do tipo

$$\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$$

onde $R(x) = \dfrac{a_n x^n + \ \dots \ + a_0}{b_m x^m + \ \dots + b_0}$ é uma função racional sem polos no eixo real. Devemos supor que I é convergente, isto é, a parte principal de $R(x)$ no infinito que é

$$\frac{x^n}{x^m} = \frac{1}{x^{m-n}}$$

deve ser do tipo $1/x^p$ com $p \geq 2$ logo $m \geq n+2$.



Sejam $\gamma_r : t \in [0,\pi] \longmapsto re^{it} \in \mathbb{C}$ e $\Gamma_r := [-r,r] \vee \gamma_r \quad \forall \ r > 0$ então pelo Teor. 8.13 podemos escrever

$$(T.2.1) \qquad \int_{\gamma_r} R(z)dz = \int_{-r}^{r} R(x)dx + \int_{\gamma_r} R(z)dz = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(a)>0} \operatorname{Re} s(R,a) \quad \forall$$

$r > r_0$ onde todas as raízes de $b_m z^m + \dots + b_0 = 0$ (i.e. polos de R) estão contidos no disco $D_{r_0}(0)$

Vamos provar que

$$(T.2.2) \qquad \lim_{r \to +\infty} \int_{\gamma_r} R(z)dz = 0$$

De fato,

$$|R(z)| = \left| \frac{z^n}{z^m} \cdot \frac{a_n + a_{m-1}z^{-1} + \ \dots + a_0 z^{-n}}{b_m + b_{m-1}z^{-1} + \ \dots + b_0 z^{-m}} \right|$$

portanto se $M > \left| \dfrac{a_n}{b_m} \right|$, existe $N > 0$ tal que $\forall \ r > N$ temos

$$|R(z)| \leq M r^{n-m} \quad \text{sempre que } |z| = r$$

donde

$$\left| \int_{\gamma_r} R(z)dz \right| \leq \int_0^{\pi} M r^{n-m} r dt = \frac{M\pi}{r^{m-n-1}}$$

e como $m \geq n+2$ e portanto $m - n - 1 > 0$, resulta $(T.2.2)$.

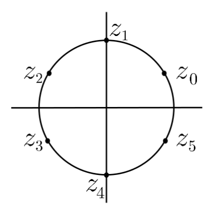
Como
$$\mathrm{I} = \lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r} R(x)dx,$$
de $(T.2.1)$ e $(T.2.2)$ segue

$$(T.2.3) \qquad \mathrm{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(a)>0} \mathrm{Re}\, s(R,a)$$

Observar que poderíamos ter trabalhado no semiplano $\mathrm{Im}(a) < 0$, bastando para isto considerar $\widetilde{\gamma}_r : t \in [0,\pi] \longmapsto re^{-it} \in \mathbb{C}$ e $\widetilde{\Gamma}_r = [-r,r] \vee \widetilde{\gamma}_r$. Neste caso, para os pontos a "interiores a $\widetilde{\Gamma}_r$" temos $\mathrm{Ind}_{\widetilde{\Gamma}_r}(a) = -1$ e então, em vez de $(T.2.3)$ teríamos
$$\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = -2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(a)<0} \mathrm{Re}\, s(R,a) \quad .$$

Exemplo: Calcular $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}$

Como $\mathrm{I} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}$, a integral do exemplo pode ser considerada do Tipo 2. Vamos determinar os polos de $R(z) = \dfrac{1}{1+z^6}$ que são pontos de anulação de z^6+1. De $z^6 = -1 = e^{i\pi}$ resulta $z_k = e^{\frac{i}{6}(\pi+2k\pi)}$, $k = 0,1,2,3,4,$ e 5 logo só $z_0 = e^{\frac{i\pi}{6}}$, $z_1 = e^{\frac{i\pi}{2}}$ e $z_2 = e^{\frac{5i\pi}{6}}$ pertencem ao semiplano $\mathrm{Im}(z) > 0$. Resulta então



$$\mathrm{I} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \pi i \sum_{k=0}^{2} \mathrm{Re}\, s\left(\frac{1}{1+z^6}, z_k\right)$$

$$\mathrm{Re}\, s\left(\frac{1}{1+z^6}, z_k\right) = \lim_{z\to z_k}(z - z_k)\frac{1}{1+z^6} = \lim_{z\to z_k} \frac{1}{\dfrac{1+z^6}{z-z_k}} =$$
$$\lim_{z\to z_k} \frac{1}{z^5 + z_k z^4 + z_k^2 z^3 + z_k^3 z^2 + z_k^4 z + z_k^5} = \frac{1}{6z_k^5} = -\frac{z_k}{6} \quad \text{pois} \quad z_k^6 = -1 \quad \text{logo}$$

$$\mathrm{Re}\, s\left(\frac{1}{1+z^6}, z_0\right) = -\frac{z_o}{6} = -\frac{1}{6}e^{\frac{i\pi}{6}}$$

$$\operatorname{Re}s(\frac{1}{1+z^6}, z_1) = -\frac{z_1}{6} = -\frac{1}{6}e^{\frac{i\pi}{2}}$$
$$\operatorname{Re}s(\frac{1}{1+z^6}, z_2) = -\frac{z_2}{6} = -\frac{1}{6}e^{\frac{5i\pi}{6}}$$

portanto $$\mathrm{I} = -\frac{\pi i}{6}(e^{\frac{i\pi}{6}} + e^{\frac{i\pi}{2}} + e^{\frac{5\pi i}{6}}) = \frac{\pi}{3} \quad .$$

Tipo 3 Integrais do tipo
$$\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix} \cdot f(x)dx$$
onde $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, Ω é um aberto que contem o semiplano
$$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \geq 0\},$$
f tem apenas *número finito* de polos no semiplano aberto
$$\prod := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$$
e

$$(T.3.1) \qquad \lim_{|z| \to +\infty} f(z) = 0 \ .$$

É claro então que existe $\rho > 0$ tal que todos os polos de f (em $\prod$) estão em $D_\rho(0)$. Seja agora $r > \rho$ arbitrário e consideremos

$$\gamma_r : t \in [0, \pi] \longmapsto re^{it} \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \Gamma_r := [-r, r] \vee \gamma_r \ ,$$

então, pelo Teor. 8.13 resulta

$$\int_{\gamma_r} e^{iz} f(z)dz = \int_{[-r,r]} e^{ix} f(x)dx + \int_{\gamma_r} e^{iz} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(a)>0, |a|<\rho} \operatorname{Re}s(e^{iz} f(z), a).$$

Portanto, tomando limites para $r \to +\infty$ obtemos

$$(T.3.2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix} f(x)dx + \lim_{r \to +\infty} \int_{\gamma_r} e^{iz} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(a)>0} \operatorname{Re}s(e^{iz} f(z), a)$$

Mostremos que a segunda parcela do 1^o membro de $(T.3.2)$ é nula. Seja $M(r) := \sup\{|f(z)| \mid z \in \Omega \text{ e } |z| = r\}$, então de $(T.3.1)$ segue

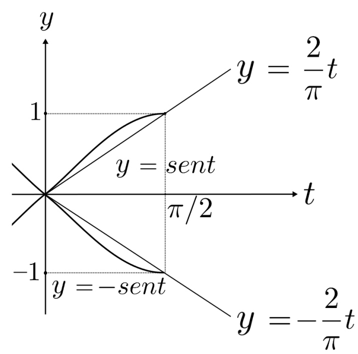
$$(T.3.3) \qquad \lim_{r \to \infty} M(r) = 0$$

e então
$$\left| \int_{\gamma_r} e^{iz} f(z)dz \right| = \left| \int_0^\pi e^{ir(\cos t + i sen t)} \cdot f(re^{it}) rie^{it} dt \right| =$$

$$= \left| \int_0^{\pi} e^{ir\cos t} \cdot e^{-rsent} f(rie^{it}) dt \right| \leq M(r) r \int_0^{\pi} e^{-rsent} dt = 2M(r) r \int_0^{\pi/2} e^{-rsent} dt$$

É claro (ver figura) que

$$-sent \leq -\frac{2}{\pi} t \qquad \forall \quad t \in [0, \pi/2]$$



e então

$$\int_0^{\pi/2} e^{-rsent} dt \leq \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2rt}{\pi}} dt =$$

$$\frac{\pi}{2r}(1 - e^{-r}) \leq \frac{\pi}{2r} \quad ,$$

em consequência $\left| \int_{\gamma_r} e^{iz} f(z) dz \right| \leq 2M(r) r \cdot \frac{\pi}{2r} = M(r)\pi$

o que, por $(T.3.3)$, implica que

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{\gamma_r} e^{iz} f(z) dz = 0$$

e então, por $(T.3.2)$, vem:

$$(T.3.4) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(a) > 0} \mathrm{Re}\, s(e^{iz} f(z), a)$$

A seguir vamos calcular integrais do tipo 3 admitindo que f tem também um polo simples na origem:

Tipo 4 Integrais do tipo

$$\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix} f(x) dx$$

onde $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, Ω sendo um aberto que contém o semiplano $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$, f tem um polo simples na origem e um número finito de polos no semiplano aberto $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ e

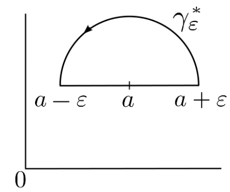
$$(T.4.1) \qquad \lim_{|z| \to +\infty} f(z) = 0 \ .$$

Vamos precisar do seguinte:

Lema 8.18 *Sejam* $a \in \mathbb{C}, \rho > 0, f \in \mathcal{H}(D_\rho^*(a))$ *e suponhamos que* a *é um polo simples de* f. *Se* $0 < \varepsilon < \rho$ *e* $\gamma_\varepsilon : t \in [0,\pi] \longmapsto a + \varepsilon e^{it} \in \mathbb{C}$, *então*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz \quad = \quad \pi i \operatorname{Re} s(f,a)$$

.



Prova Existe $h \in \mathcal{H}(D_\rho(a))$ al que

$$f(z) = \frac{\operatorname{Re} s(f,a)}{z-a} + h(z) \qquad \forall \quad z \in D_\rho^*(a)$$

donde

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = \operatorname{Re} s(f,a) \int_0^\pi nidt + \int_0^\pi h(a+\varepsilon e^{it})\varepsilon i e^{it} dt$$

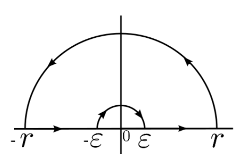
$= \pi \operatorname{Re} s(f,a) + \varepsilon i \displaystyle\int_0^\pi h(a+\varepsilon e^{it}) e^{it} dt$, o que prova o resultado pois h é localmente limitada em a . □

Voltemos ao cálculo de I. Naturalmente vamos supor, por hipótese, que I existe, isto é, existe e é finito o limite duplo

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to \infty \\ r \to +\infty}} \left\{ \int_{-r}^{-\varepsilon} e^{ix} f(x)dx + \int_\varepsilon^r e^{ix} f(x)dx \right\} = \int_{-\infty}^0 e^{ix} f(x)dx + \int_0^{+\infty} e^{ix} f(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix} f(x)dx = \mathrm{I}$$

Dado $\delta > 0$ arbitário, seja $\gamma_\delta : t \in [0,\pi] \longmapsto \delta e^{it} \in \mathbb{C}$,
então consideremos a seguinte CSDF



Se $g(z) := e^{iz} f(z)$, pelo Teor. 8.13 temos

$$\int_\gamma g(z)dz = \int_{[-r,-\varepsilon]} + \int_{\gamma_\varepsilon^\circ} + \int_{[\varepsilon,r]} + \int_{\gamma_r} = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(a)>0} \operatorname{Re} s(g,a)$$

o que podemos escrever assim

$$\int_{-r}^{-\varepsilon} e^{ix} f(x)dx + \int_{\varepsilon}^{r} e^{ix} f(x)dx + \int_{\gamma_r} g(z)dz = \int_{\gamma_\varepsilon} g(z)dz + 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(a)>0} \mathrm{Re}\, s(g,a)$$

Tomando limites para r$\to +\infty$ e $\varepsilon \to 0^+$, e levando em consideração que da mesma forma que no caso anterior (já que $(T.3.1) = (T.4.1)$):

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} g(z)dz = 0 \ ,$$

por $(T.4.1)$ e pelo Lema 8.18, obtemos:

$$(T.4.2) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix} f(x)dx = \pi i \,\mathrm{Re}\, s(g,0) + 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(a)>0} \mathrm{Re}\, s(g,a) \ .$$

Exemplo: Calcular

$$\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$$

Como único polo de $g(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$ é na origem, a 2^a parcela do 2^o membro de $(T.4.2)$ é nula, donde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i \,\mathrm{Re}\, s(\frac{e^{iz}}{z}, 0)$$

e sendo

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + i - \frac{z^2}{2!} + \ldots\ldots \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Re}\, s(\frac{e^{iz}}{z}, 0) = 1$$

o que implica

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i \ .$$

A relação acima junto com

$$\frac{e^{ix}}{x} = \frac{\cos x + isenx}{x}$$

acarreta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx = 0 \qquad , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{senx}{x} dx = \pi$$

e

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{senx}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{senx}{x} dx = \frac{\pi}{2} \ .$$

Exercícios

(8.1) Prove que para todo $k \in \mathbb{Z}^*$ a função $g(z) = (sen(z^{-1}))^{-1}$ do Exemplo 2 tem uma singularidade não removível em $(k\pi)^{-1}$.

(8.2) Resolver o exerc. 5.12. (c).

(8.3) (a) Prove que se $(z_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência em $\mathbb{C}$ e a série $\sum_{m=-\infty}^{\infty} z_m$ é absolutamente convergente com soma z, então

$$z = \lim_{k\to\infty} \sum_{m=-k}^{k} z_m \qquad \text{(i.e. } \sum_{m=-\infty}^{\infty} z_m = \lim_{k\to\infty} \sum_{m=-k}^{k} z_m)$$

(b) Mostre com um exemplo que a recíproca de (a) é falsa (tomar $z_m = 1/m \quad \forall \quad m \in \mathbb{Z}^*$ e $z_0 = 0$) .

(8.4) Sejam $a \in \mathbb{C}$, $0 \leq \rho_1 < \rho_2 \leq +\infty$ e $f \in \mathcal{H}(A\,[a,\rho_1,\rho_2])$. Prove que o desenvolvimento em série em (8.8.1) de f é único (se necessário, ver [D, ChVIII, n^o 2, pg 235]).

(8.5) Sejam $a \in \mathbb{C}$, $0 \leq \rho_1 < \rho_2 \leq +\infty$ e $f \in \mathcal{H}(A\,[a,\rho_1,\rho_2])$. Prove que existem $f_2 \in \mathcal{H}(D_{\rho_2}(a))$ e $f_1 \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash\overline{D}_{\rho_1})$ tais que

$$((*)) \qquad f(z) = f_2(z) + f_1(z) \qquad \forall \quad z \in A\,[a,\rho_1,\rho_2]$$

Mostre que esta decomposição é única se f_1 satisfaz a condição suplementar: $\lim_{|z|\to\infty} f_1(z) = 0$ (ver se necessário [Ca, pg 88]).

(8.6) Cada uma das funções f seguintes tem uma singularidade isolada em $a = 0$. Classificar esta singularidade, definir $f(0)$ de modo a tornar f analítica, nos casos em que $a = 0$ seja removível; determinar a parte principal de f em $a = 0$ quando a singularidade seja polar e determinar $f(A\,[0,0,\delta])$ para valores arbitráriamente pequenos de δ quando $a = 0$ seja essencial.

(a) $f(z) = \dfrac{1}{z} sen z$; (b) $f(z) = \dfrac{1}{z}\cos z$;

(c) $f(z) = \dfrac{\cos z - 1}{z}$, (d) $f(z) = \exp(1/z)$;

(e) $f(z) = \dfrac{1}{z^2}\log(1+z)$; (f) $f(z) = \dfrac{\cos z^{-1}}{z^{-1}}$;

(g) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z(z-1)}$; (h) $f(z) = (1-e^z)^{-1}$;

(i) $f(z) = z sen\dfrac{1}{z}$, (j) $f(z) = z^n \cdot sen 1/z$ ($n \in \mathbb{N}^*$ dado)

[Sugestões: (a) Exemplo 1; (b) $\dfrac{1}{z} coz = \dfrac{1}{z} - \dfrac{z}{2!} + \dfrac{z^3}{4!} - \cdots\cdots$ (polo simples); (c) $\dfrac{\cos z - 1}{z} = -\dfrac{z}{2!} + \dfrac{z^3}{4!} - \cdots\cdots$ (sing. rem.);
(d) $\exp(1/z) = 1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2!z^2} + \dfrac{1}{3!z^3} + \cdots\cdots$ (sing.ess.);

(e) $\dfrac{1}{z^2}Log(1+z) = \dfrac{1}{z} - 1/2 + z/3 - \cdots\cdots$ (polo simples);

(f) $z\cos 1/z = z - \dfrac{1}{2!z} + \dfrac{1}{4!z^3} - \cdots\cdots$ (sing. ess.); (g) $\dfrac{z^2+1}{z-1} =$ $z + 1 - \dfrac{2}{1-z} = -1 - z - 2z^2 - 2z^3 - \cdots\cdots$ portanto $\dfrac{z^2+1}{z(z-1)} =$ $-\dfrac{1}{2} - 1 - 2z\cdots\cdots$(polo simples); (h) Como $|f(z)| = |1-e^z|^{-1} \to +\infty$ se $z \to 0$, f tem um polo em $z=0$. Se ν indica a ordem do polo de f em $z=0$ $\exists$ $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que

$$((*))\quad \frac{1}{1-e^z} = \frac{g(z)}{z^\nu} \quad \forall \quad z \in \mathbb{C}^* \implies ((**))\quad g(z) = \frac{z^\nu}{1-e^z} \quad \forall \quad z \in \mathbb{C}^*$$

logo $g(0) = \lim\limits_{z\to 0} g(z) = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z^\nu}{1-e^z}$, o que implica $\nu = 1$ pois $g(0) \neq 0$. (ver Prop. 8.5, (2^o), (ii))

(8.7) Explicite os desenvolvimentos do tipo $\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m z^m$ que

$$f(z) = \frac{1}{9-z^2} + \frac{1}{5-z}$$

admite, indicando as regiões de convergência.

[Sugestão: f é analítica em $\mathbb{C}\setminus\{\pm 3, 5\}$ e como o enunciado pede desenvolvimentos em volta da origem basta procurar os desenvolvimentos de Laurent de f nos anéis: $A[0,0,3]\,, A[0,3,5]$ e $A[0,5,+\infty]$. Usando séries geométricas se obtém

$$f(z) = \frac{1}{5}\sum_{n\geq 0}(\frac{z}{5})^n + \frac{1}{9}\sum_{n\geq 0}(\frac{z}{3})^{2n} \quad \text{se} \quad |z| < 3;$$

$$f(z) = z^{-2}\sum_{n\geq 0}(\frac{3}{z})^{2n} + \frac{1}{5}\sum(\frac{z}{5})^n, \ \text{se} \ \ 3 < |z| < 5 \qquad \text{e}$$

$$f(z) = -\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}(\frac{5}{z})^n - \frac{1}{z^2}\sum_{n\geq 0}(\frac{3}{z})^{2n} \quad \text{se} \quad |z| > 5\textbf{]}$$

(8.8) Dados $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$, determinar o desenvolvimento de Laurent de f em cada um dos seguintes anéis: $A[0,0,1]\,,\ A[0,1,2]$ e $A[0,2,+\infty]\,.$

[Sugestão: Decompor f em frações simples

$$f(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} + \frac{1}{z-2}\right]$$

e usar a observação seguinte: $(a \in \mathbb{R}, a > 0)$

$$\frac{1}{z-a} = \begin{cases} -\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{1-z/a} = -\dfrac{1}{a}\displaystyle\sum_{n\geq 0}(\frac{z}{a})^n \ \ \text{se} \ \ |z| < a \\[2ex] \dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1-a/z} = \dfrac{1}{z}\displaystyle\sum_{n\geq 0}(\frac{a}{z})^n \ \ \text{se} \ \ |z| > a \ \ . \end{cases}$$

Por exemplo, se obtem

$$f(z)=\frac{1}{2z}+\sum_{n\geq 0}\frac{1}{z}(1-\frac{1}{z^n})z^n \qquad \forall \quad z\in A\,[0,0,1]\,, \ \text{etc}]$$

(8.9) Sejam Ω um aberto de $\mathbb{C}$, $\varnothing\neq D\subset\Omega$ tal que $f\in\mathcal{H}(\Omega\backslash D)$ e f tem um polo em cada ponto de D. Prove que D não tem ponto de acumulação em Ω .

[Sugestão: se por absurdo D tem um ponto de acumulação $a\in\Omega$ então $a\in D$ ou $a\notin D$. Por hipótese existe uma sequência $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ em D tal que $a_m\to a$ e $a_m\neq a \quad \forall \quad m\in\mathbb{N}$, o que mostra que $a\in D$ (pois se $a\notin D$ então $a\in\Omega\backslash D$ e portanto existe $D_r(a)\subset\Omega\backslash D$ tal que f é analítica em $D_r(a)$ portanto $a_m\notin D_r(a) \quad \forall \quad m\in\mathbb{N}$ logo $a_m\nrightarrow a$). De $a\in D$ segue que a é uma singularidade isolada de f e então existe $\rho>0$ tal que $f\in\mathcal{H}(D^*_\rho(a))$ e portanto $a_m\notin D^*_\rho(a) \quad \forall \quad m\in\mathbb{N}$ e portanto $a_m\nrightarrow a$ o que é absurdo**]**.

(8.10) Calcular as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_{|z|=7}\frac{e^z}{e^z-1}dz$; (b) $\displaystyle\int_{|z|=4} tgz dz$

(c) $\displaystyle\int_{|z|=4} cotgz dz$; (d) $\displaystyle\int_{|z|=3/2}\frac{3z^2-6z+2}{z^3-3z^2+2z}dz$.

[Sugestão: Use o Teor. 8.14**]**

(8.11) Sejam Ω um aberto de $\mathbb{C}$, $a\in\Omega$ e $f\in\mathcal{M}(\Omega)$, $f\neq 0$.

(a) Mostre que $f'/f\in\mathcal{M}(\Omega)$;

(b) Se a é um zero de ordem m de f então f/f' tem um polo simples em a e $\operatorname{Re}s(f/f',a)=m$;

(c) Se a é um polo de ordem m de f então f'/f tem um polo simples em a e $\operatorname{Re}s(f'/f,a)=-m$;

(d) São equivalentes as condições: (i) p é um polo de f'/f ; (ii) ou p é um polo de f ou p é um zero de f .

[Sugestão: (a) $f'\in\mathcal{M}(\Omega)$, $f\in\mathcal{M}(\Omega)$, $f\neq 0$ e $\mathcal{M}(\Omega)$ é corpo portanto $f'/f\in\mathcal{M}(\Omega)$; (b) (resp. (c)) Derivar a identidade $f(z)=(z-a)^m\cdot g(z)$ (resp. $f(z)=(z-a)^{-m}\cdot g(z)$; ver Prop.8.5 ($2^o$), (ii)) e calcular f'/f;

(d) Seja A (resp. B) o conjunto dos zeros (resp. polos) de f. (ii)$\Longrightarrow$ (i): Segue de (b) e (c); (i) $\Longrightarrow$ (ii): De (i) e pelo exerc. (8.9) resulta que existe $D_\varepsilon(p)\subset\Omega$ tal que $f'/f\in\mathcal{H}(D^*_\varepsilon(p))$ e pela Prop. 8.5 (2^o)

$$(*) \qquad \lim_{z\to p}\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|=+\infty$$

Se $p\in B$, OK é compatível com (i) por (c). Se $p\notin B$ então $f\in\mathcal{H}(D_\varepsilon(p))$ e $f'\in\mathcal{H}(D_\varepsilon(p))$. Se $p\notin A$ poderemos supor $f(z)\neq 0 \quad \forall \quad z\in D_\varepsilon(p)$ e portanto $f'/f\in\mathcal{H}(D_\varepsilon(p))$ o que está em contradição visível com $(*)$.**]**

(8.12) Sejam Ω um aberto conexo de $\mathbb{C}$; $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, $\overline{D}_\rho(a) \subset \Omega$ e suponhamos que

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \ \ , \ \text{se} \ \ |z-a| = \rho$$

Então, f e g têm o mesmo número de zeros em $D_\rho(a)$ contados com sua multiplicidade. (este exercício é chamado frequentemente "teorema de Rouché").

(8.13) Sejam Ω um aberto conexo de $\mathbb{C}$ e $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{H}(\Omega)$ tal que: (1^o) $f_m(z) \neq 0 \quad \forall \ z \in \Omega$ e $\forall \ m \in \mathbb{N}$; (2^o) (f_m) converge uniformemente sobre os compactos de Ω, para f. Prove que $f = 0$ ou $f(z) \neq 0$ para cada $z \in \Omega$ **[Sugestão:** Suponha por absurdo que f tem um zero isolado ζ logo $\exists \ \ \overline{D}_\varepsilon(\zeta) \subset \Omega$ tal que $f(z) \neq 0$ para cada $z \in \overline{D}^*_\varepsilon(\zeta)$. Seja $M = \min\{|f(z)| \ | \ |z-\zeta| = \varepsilon\} > 0$ e use a convergência uniforme de (f_m) para f e a definição de M para concluir que existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $|f(z) - f_\nu(z)| < |f(z)|$ sempre que $|z-a| = \varepsilon$. Usar o exerc. (8.12)**]**

(8.14) Sejam Ω um aberto conexo de $\mathbb{C}$ tal que $\overline{D}_1(0) \subset \Omega$ e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ verificando a condição

$(*)$ $\qquad\qquad |f(z)| < 1$ sempre que $|z| = 1$.

Quantos pontos fixos tem f no disco unitário fechado $\overline{D}_1(0)$? **[Sugestão:** Por $(*)$, f não tem pontos fixos em $\partial\overline{D}_1(0)$. Um ponto fixo de f é um zero da função $z \longmapsto z - f(z)$; observar que $(*)$ pode ser escrita assim $|z - (z - f(z))| < |z|$ sempre que $|z| = 1$**]**

(8.15) Sejam $z_1, \cdots, z_k$ os zeros distintos de $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots$ $.. + a_n$, $n \geq 1$, tendo respectivamente multiplicidades $m_1, \cdots, m_k$ e $r = \inf\limits_{i\neq j} |z_i - z_j|$. Prove que para todo $\varepsilon \in]0, r[$ existe $\delta > 0$ tal que todo polinômio $q(z) = z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n$, para o qual se tem $\sup|b_i - a_i| < \delta$, tem exatamente m_j zeros em $|z - z_j| < \varepsilon$, $j = 1, 2, \cdots, k$.

(8.16) Demonstrar o teorema fundamental da álgebra usando o teorema de Rouché (de modo preciso, o exerc. 8.12; se necessário, ver [C, pg 121-122]).

(8.17) Sejam Ω um aberto conexo de $\mathbb{C}, g \in \mathcal{H}(\Omega), f \in \mathcal{M}(\Omega)$ tal que $f \neq 0$ e A (resp.B) o conjunto dos zeros (resp. polos) de f. Para cada $a \in A$ (resp. $b \in B$) indiquemos com ν_a (resp. ω_b) a ordem de a (resp. b). Seja γ uma CSDF em Ω tal que:

$$\Omega \neq \mathbb{C} \implies \operatorname{Ind}_\gamma(\alpha) = 0 \quad \forall \ \alpha \notin \Omega$$

e suponhamos que $A \cap \gamma^* = B \cap \gamma^* = \varnothing$. Prove que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(z)f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{a\in A} g(a)\nu_a \operatorname{Ind}_\gamma(a) - \sum_{b\in B} g(b)\omega_b \operatorname{Ind}_\gamma(b)$$

[Sugestão: Copiar o raciocínio do exerc. 8.11 e mostrar que se

$a \in A$ (resp. $b \in B$) e $g(a) \neq 0$ (resp. $g(b) \neq 0$) então

$$\operatorname{Re}s(\frac{gf'}{f}, a) = \nu_a g(a) \qquad (\text{resp. } \operatorname{Re}s(\frac{gf'}{f}, b) = -\omega_b g(b))$$

e a seguir aplicar o Teor. 8.13 a gf'/f e γ da mesma forma que no Teor. 8.16**]**

(8.18) Sejam Ω um aberto de $\mathbb{C}$, $\overline{D}_r(a) \subset \Omega$ e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f \mid \overline{D}_r(a)$ é injetora. Se $U := f(D_r(a))$, prove que

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=r} \frac{zf'(z)}{f(z)-w} dz \qquad \forall \quad w \in U$$

[Sugestão: Para cada $z_0 \in D_r(a)$, se $w_0 = f(z_0)$, a função $z \longmapsto f(z) - w_0$ tem um único zero em $D_r(a)$. Aplicar o exerc. 8.17 com $g = id$**]**

(8.19) Seja $(z_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de números complexos convergente para $z_0 \in \mathbb{C}$, com $z_n \neq z_0$ para $n \geq 1$ e seja $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z_n \mid n \geq 0\}$. Se $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e z_n é um polo de f para cada $n \geq 1$, prove que $f(\Omega \cap D_\varepsilon(z_0))$ é denso em $\mathbb{C}$ para todo $\varepsilon > 0$.
[Sugestão: se a afirmação fosse falsa, existiriam $\varepsilon > 0, \zeta \in \mathbb{C}$ e $r > 0$ tais que $f(\Omega \cap D_\varepsilon(z_0)) \cap \overline{D}_r(\zeta) = \varnothing$ e portanto se $g : z \in \Omega \cap D_\varepsilon(z_0) \longmapsto (f(z) - \zeta)^{-1} \in \mathbb{C}$, então $g \in \mathcal{H}(\Omega \cap D_\varepsilon(z_0))$ e $|g(z)| < \dfrac{1}{r} \quad \forall \ z \in \Omega \cap D_\varepsilon(z_0)$ logo g tem uma singularidade removível em cada $z_n \in D_\varepsilon(z_0)$ $(n \geq 0)$. Existe então $\psi \in \mathcal{H}(D_\varepsilon(z_0))$ tal que $\psi \mid \Omega \cap D_\varepsilon(z_0) = g$. Mostrar que em cada um dos dois casos possíveis: $\psi(z_0) \neq 0$ e $\psi(z_0) = 0$ se obtém uma contradição da maneira seguinte. Se $\psi(z_0) \neq 0$, $\exists\ \eta > 0$ tal que $D_\eta(z_0) \subset D_\varepsilon(z_0)$ e $\psi(z) \neq 0 \ \ \forall \ \ z \in D_\eta(z_0)$ e se $\varphi : z \in D_\eta(z_0) \longmapsto \zeta + \dfrac{1}{\psi(z)} \in \mathbb{C}$ então $\varphi \in \mathcal{H}(D_\eta(z_o))$ e $\varphi \mid \Omega \cap D_\eta(z_0) = f \mid \Omega \cap D_\eta(z_0)$ portanto f tem uma *singularidade removível* nos pontos $z_\eta \in D_\eta(z_0)$ $(\eta \geq 0)$ o que é absurdo. Se $\psi(z_0) = 0$ então $\psi(z) = (z - z_0)^\nu \psi_0(z)$, etc.; concluir que f tem um polo em z_0 o que é absurdo pois z_0 não é singularidade isolada de f pois $z_n \to z_0$].

(8.20) Calcule a integral $I := \displaystyle\int_\gamma \frac{e^{iz}(1 - \cos z)}{z^3(z + \alpha i)} dz$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$ e γ é o círculo positivamente orientado de centro 0 e raio 1.
[Sugestão: Observe que a função $z \longmapsto z^{-2}(1 - \cos z)$ tem uma singularidade removível em $z = 0$. Use o teorema de representação integral de Cauchy.**]**

(8.21) Sejam Ω um aberto conexo $\neq \varnothing$ de $\mathbb{C}$, $g \in \mathcal{H}(\Omega)$, $g \neq$ cte., Γ um ciclo e Ω tal que $\Gamma \overset{\Omega}{\backsim} 0$ e suponha que $Ind_\Gamma(0) = 1$.
(a) Determine $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ sabendo que

$$f(z) = -\int_\Gamma \frac{g(\lambda)(\lambda - \operatorname{sen}\lambda)}{\lambda^3(\lambda - z)} d\lambda \quad \forall \ \ z \in W,$$

onde $W := \{z \in \mathbb{C} \mid Ind_\Gamma(z) = 1\}$.
(b) Mostre que $\exists \ \ \alpha \in \Gamma^*$ tal que $3! \, |g(\alpha)| \, |\alpha - \operatorname{sen}\alpha| > |\alpha|^3 \, |g(0)|$.
[Sugestão: (a) Observe que $z \longmapsto z^{-3}(z - \operatorname{sen} z)$ tem uma singularidade removível em $z = 0$. O resto é como sempre: Teor. Cauchy homológico e Corol. 4.13; (b) Aplique o Teor. 5.15 a $f|W_0$ onde W_0 :=componente conexa de W que contém 0.**]**

(8.22) Seja $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ e suponha que $\exists \ \ \alpha > 0, K > 0$ e $R > 0$ tais que $|f(z)| \geq k \, |z|^\alpha \ \ \forall \ \ |z| > R$. Prove que f é um polinômio.
[Sugestão: É claro que a única singularidade de f é no ∞ e a hipótese mostra que: $\lim\limits_{|z| \to +\infty} |f(z)| = +\infty$. Mostre que esta relação acarreta que a singularidade de f no ∞ só pode ser removível ou polar (e portanto f é polinômio).**]**

(8.23) Sejam Ω um aberto de $\mathbb{C}, a \in \Omega, \nu \in \mathbb{Z}^*$ e $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$. Mostre que as três condições abaixo são equivalentes:
(i) a é um zero de f de multiplicidade $\nu > 0$ (resp. a é um polo de f de ordem $-\nu = |\nu| > 0$).
(ii) Existe um aberto V tal que $a \in V \subset \Omega$ e existe $\nu \in \mathbb{Z}_+^*$ (resp. $\nu \in \mathbb{Z}_-^*$) tal que a função

$$g : z \in V \longmapsto f(z)(z-a)^{-\nu} \in \mathbb{C}$$

é holomorfa e $Z(g) = \varnothing$.
(iii) Existe um aberto V tal que $a \in V \subset \Omega$, existe $\nu \in \mathbb{Z}_+^*$ (resp. $\nu \in \mathbb{Z}_-^*$) e existe $g \in \mathcal{H}(V)$, com $Z(g) = \varnothing$ tal que $f(z) = (z-a)^\nu \cdot g(z)$ para cada $z \in V$.

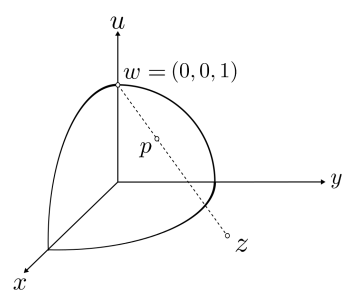
Capítulo 9

A ESFERA DE RIEMANN. ABERTOS SIMPLESMENTE CONEXOS.

Em muitas partes do estudo das funções complexas de variável complexa é conveniente introduzir o ponto no infinito, que dá uma maior simetria, aos resultados sobre funções analíticas, além do que, torna mais claros certos fenômenos relacionados com o comportamento destas funções quando $|z| \to \infty$. Indiquemos com (x, y, u) as coordenadas de um ponto de $\mathbb{R}^3$ e consideremos a esfera S^2 de equação

$$x^2 + y^2 + u^2 = 1$$

munida da topologia induzida por $\mathbb{R}^3$. Como S^2 é fechado e limitado em $\mathbb{R}^3$, é claro que S^2 é um espaço topológico compacto.



Seja $w \in S^2$ o ponto de coordenadas $(0, 0, 1)$, chamamos *projeção estereográfica de polo* w à função bijetora φ que asssocia a cada ponto
$$p \in S^2 \setminus \{w\},$$
o ponto z intersecção da reta wp com o plano $u = 0$. Vamos determinar a expressão analítica de φ, se (x_0, y_0, u_0) são as coordenadas de $p \in S^2 \setminus \{w\}$ então as equações paramétricas da reta wp são
$$x = \lambda x_0 \quad , \quad y = \lambda y_0 \quad , \quad u = 1 + \lambda(u_0 - 1)$$
e por definição de φ, para obter as coordenadas (x, y) de z basta fazer $u = 0$ portanto $1 + \lambda(u_0 - 1) = 0 \implies \lambda = (1 - u_0)^{-1}$ (como $p \neq w$ temos $u_0 < 1$) e substituindo este valor de λ nas expressões de x e y vem

$$x = \frac{x_0}{1 - u_0} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{y_0}{1 - u_0}$$

donde

$$\varphi(p) = \varphi(x_0, y_0, u_0) = \frac{x_0 + iy_0}{1 - u_0} = z,$$

isto é,

$$\varphi(x,y,u)=\frac{x+iy}{1-u} \qquad \forall \qquad p=(x,y,u)\in S^2\setminus\{w\}$$

Inversamente, dado $z=x_0+iy_0=(x_0,y_0,0)$, as equações da reta wz são

$$x=\lambda x_0 \quad , \quad y=\lambda y_0 \quad , \quad u=1-\lambda$$

que suibstituídas na equação de S^2 dão a equação em λ :

$$\lambda\left[(x_0^2+y_0^2+1)\lambda-2\right]=0$$

A solução $\lambda=0$ não interessa (correponde ao ponto w) e a solução

$$\lambda=\frac{2}{x_0^2+y_0^2+1}=\frac{2}{|z|^2+1}$$

fornece as coordenadas do ponto $p=\varphi^{-1}(z)$:

$$x=\frac{2x_0}{|z|^2+1} \quad , \quad y=\frac{2y_0}{|z|^2+1} \quad , \quad u=\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$$

portanto, temos a expressão analítica de φ^{-1}

$$\varphi^{-1}(z)=\varphi^{-1}(x_0,y_0,0)=(\frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2+1},\frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z|^2+1},\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1})=p$$

a partir das expressões analíticas de φ e φ^{-1} é imediato verificar que φ e φ^{-1} são contínuas, em resumo

$$\varphi : S^2\setminus\{w\}\to\mathbb{C}$$

é um homeomorfismo.

Definição 9.1 Chama-se *esfera de Riemann* ao par (S^2,φ). O ponto $w=(0,0,1)\in S^2$ será indicado no que segue por ∞ e será chamado *ponto no infinto* (é frequente o uso da notação $\mathbb{C}_\infty$ para indicar S^2 (ver exerc. (9.1)); por abuso de notação indicaremos a esfera de Riemann por S^2 (ou por $\mathbb{C}_\infty$).

No que segue sempre vamos considerar $\mathbb{C}\subset S^2$ por meio da aplicação $\varphi^{-1}:\mathbb{C}\to S^2$ que é um homeomorfismo de $\mathbb{C}$ sobre $S^2\setminus\{\infty\}$.

A seguir vamos introduzir alguns conceitos e notações atravez dos quais vamos poder considerar funções holomorfas e meromorfas definidas em abertos de S^2. Dado $r>0$ definiremos os seguintes subconjuntos de S^2 :

$$D_r^*(\infty)=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|>r\} \quad , \quad D_r(\infty)=D_r^*(\infty)\cup\{\infty\}$$

É imediato então verificar que a topologia de $S^2=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ pode ser definida dizendo que uma parte Ω de S^2 é aberta se e só se Ω é reunião de discos abertos $D_r(a)$, os $a's$ arbitrários em S^2 e os $r's$ arbitrários em $\mathbb{R}_+^*$.

Definição 9.2 Se $r > 0$ e $f \in \mathcal{H}(D_r^*(\infty))$ dizemos que f tem uma *singularidade isolada* no ∞. A função f tem no ∞ *uma singularidade removível* (resp. *polo de ordem* m, *singularidade essencial*) se a função composta

$$\overline{f} : z \in D_{1/r}^*(0) \longmapsto 1/z \in D_r^*(\infty) \overset{f}{\longmapsto} f(1/z) \in \mathbb{C}$$

tem no 0 uma singularidade removível (resp. polo de ordem m, singularidade essencial). A *série de Laurent de* f *no* ∞ é, por definição, a série

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \frac{1}{z^m} \qquad\qquad |z| > r$$

onde $\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m z^m$ é a série de Laurent de $ildef$ no anel $A\,[0; 0, 1/r]$. Em particular, a *parte principal de* f *no* ∞ é $z \longmapsto P(1/z)$ sendo $z \longmapsto P(z)$ a parte principal de $ildef$ no 0. Resulta então

$$[1] \qquad\qquad ildef(z) = f(1/z) \qquad \forall \quad 0 < |z| < 1/r$$

o que pode ser escrito, usando a variável $z' = 1/z$, na forma seguinte

$$[2] \qquad\qquad f(z') = ildef(1/z') \qquad \forall \qquad |z'| > r$$

Temos então as três possibilidades seguintes:

(I.) $ildef$ tem uma *singularidade removível no* 0, isto é, (ver Prop. 8.2 (i) $\iff$ (iii)), resulta por [1] :

$$\|ildef\|_{D_{1/r}^*(0)} = (\sup_{0<|\lambda|<1/r} |ildef(\lambda)| = \sup_{0<|\lambda|<1/r} |f(1/\lambda)| = \sup_{|\mu|>r} |f(\mu)|) =$$

$= \|f\|_{D_r^*(\infty)} < +\infty$ e em consequência, existe o limite:

$$l := \lim_{z \to 0} ildef(z).$$

Pela Def.9.2 resulta que f tem uma singularidade removível no ∞. Por [2] e pela definição geral de limite [graças à qual a relação "$\lim\limits_{z' \to \infty} f(z') = l$" fica definida pela condição: $\forall \ \ \varepsilon > 0 \ \ \ \exists \ \ \delta > 0$ tal que $z' \in D_\delta^*(\infty) \implies |f(z') - l| \leq \varepsilon$] podemos escrever

$$\lim_{z' \to \infty} f(z') = \lim_{z' \to \infty} ildef(1/z') = \lim_{z \to 0} ildef(z) = l$$

Neste caso *definimos* $f(\infty) := l$ e dizemos que

$$f \in \mathcal{H}(D_r(\infty))$$

[Observar que a holomorfia de f no ∞ não foi definida em termos de diferenciabilidade de f no ∞ mas em termos de comportamento de $ildef$ na vizinhança de 0]. A série de Laurent de $ildef$ em 0 é sua série de Taylor, isto é, da forma $\sum_{m\geq 0} a_m z^m$, portanto a série de Laurent de f no ∞ é

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cdot \frac{1}{z^m} \qquad \forall \qquad |z| > r.$$

Exemplo 1 Seja Γ um ciclo em $\mathbb{C}$ e consideremos a função analítica

$$\mathrm{Ind}_\Gamma : z \in \mathbb{C}\backslash\Gamma^* \longmapsto \mathrm{Ind}_\Gamma(z) \in \mathbb{C}$$

Como Ind_Γ é nula na componente conexa ilimitada de $\mathbb{C}\backslash\Gamma^*$, existe $r > 0$ tal que $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0 \quad \forall \quad z \in D_r^*(\infty)$, o que mostra que Ind_Γ tem uma singularidade removível no ∞. Definindo então

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(\infty) := 0$$

resulta $\mathrm{Ind}_\Gamma \in \mathcal{H}(D_r(\infty))$.

Exemplo 1' Consideremos a função $p(z) = 4(z-2)^{-3}$ e mostremos que p tem uma singularidade removível no ∞. De fato, basta mostrar que a função:

$$\overline{p}(z) = p(1/z) = 4(\frac{1}{z} - 2)^{-3}$$

tem uma singularidade removível no 0, o que é óbvio, pois

$$\overline{p}(z) = \frac{4z^3}{(1-2z)^3} \qquad \forall \quad z \neq 0$$

e a função $f(z) = 4z^3(1-2z)^{-3}$ é analítica em $D_{1/r}^*(0)$ sempre que $2 < r < +\infty$, portanto

$$\|p\|_{D_r^*(\infty)} = \|\overline{p}\|_{D_{1/r}^*(0)} = \|f\|_{D_{1/r}^*(0)} < \infty \qquad (2 < r < +\infty).$$

Uma generalização óbvia do argumento acima mostra que se $a \in \mathbb{C}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ e $(c_k)_{1\leq k\leq \nu}$ é uma família finita em $\mathbb{C}$ então a função

$$p(z) = \sum_{k=1}^{\nu} c_k (z-a)^{-k} \qquad (z \neq a)$$

tem uma singularidade removível no ∞.

(II.) Se $ildef$ tem um polo de ordem m no 0, pela Def. 9.2 resulta que f tem um polo de ordem m no ∞. A parte principal de $ildef$ no 0 é da forma

$$P(z) = \sum_{k=1}^{m} a_{-k} z^{-k} \qquad \text{com} \qquad a_{-m} \neq 0$$

portanto a parte principal de f no ∞ é o polinômio de grau m :

$$z \longmapsto \sum_{k=1}^{m} a_{-k}(1/z)^{-k} = \sum_{k=1}^{m} a_{-k} z^k.$$

A função

$$\psi(z) := ildef(z) - \sum_{k=1}^{m} a_{-k} z^{-k}$$

tem então uma singularidade removível no 0 o que significa que a função $\varphi(z) := \psi(1/z)$, isto é, (por [2] , ver o que segue à Def. 9.2):

$$\varphi(z) = f(z) - \sum_{k=1}^{m} a_{-k} z^{k} \qquad (a_{-m} \neq 0)$$

tem uma singularidade removível no ∞ (isto é, $\varphi = \overline{\psi}$). A série de Laurent de $ildef$ no anel $A\,[0, 0, 1/r]$ é da forma

$$\sum_{k=-m}^{\infty} a_k z^k$$

portanto, a série de Laurent de f em $D_r^*(\infty)$ é

$$\sum_{k=-m}^{\infty} a_k (\frac{1}{z})^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{1}{z^k} + a_{-1} z + a_{-2} z^2 + \cdots + a_{-m} z^m.$$

Exemplo 2 Seja $f(z) = c_0 z^m + c_1 z^{m-1} + \cdots + c_m$ um polinômio de grau m (isto é, $c_0 \neq 0$), então

$$ildef(z) = c_0 z^{-m} + c_1 z^{-m+1} + \cdots + c_m$$

que tem, visivelmente, um polo de ordem m no 0. Resulta portanto que f tem um polo de ordem m no ∞ e f coincide com uma parte principal no ∞. É claro ainda que ∞ é a única singularidade (isolada) de f (vale a recíproca, ver Prop. 9.4 (2^o)).

(III.) Se $ildef$ tem uma singularidade essencial no 0, pela Def. 9.2 resulta que f tem uma singularidade essencial no ∞. Pelo Corol. 8.10, a série de Laurent de $ildef$ no anel $A\,[0, 0, 1/r]$ é da forma

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m z^m$$

onde o conjunto $X = \{m \in \mathbb{Z} \mid m < 0 \text{ e } a_m \neq 0\}$ é infinito. Em consequência, a série de Laurent de f em $D_r^*(\infty)$ é

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \frac{1}{z^m} = \sum_{m=-\infty}^{-1} a_m z^{|m|} + \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \frac{1}{z^m}$$

Exemplo 3 A função $f = \exp$ tem uma singularidade essencial no ∞. De fato, neste caso $ildef$ é definida por

$$\overline{f}(z) = \exp(1/z) \qquad 0 < |z| < 1/r$$

que tem uma singularidade essencial no 0 (ver exerc. (8.6), (d)). A série de Laurent de f em $D_r^*(\infty)$ é então a série de Taylor de f. De modo mais geral, se $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ e f não é um polinômio (e portanto o conjunto dos $m \in \mathbb{N}$ tais que $f^{(m)}(0) \neq 0$ é infinito como resulta do Teor. 4.12), pelo Teor. 8.8 podemos concluir que a série de Laurent de $ildef$ no anel $A\,[0, 0, 1/r]$ é

$$\overline{f}(z) = f(1/z) = \sum_{m\geq 0} \frac{1}{m!} f^{(m)}(0) z^{-m} \ , \qquad (0 < |z| < 1/r)$$

isto é, $\overline{f}$ tem uma singularidade essencial no 0, logo f tem uma singularidade essencial no ∞ e a série de Laurent de f em $D_r^*(\infty)$ é a série de Taylor de f :

$$f(z) = \sum_{m\geq 0} \frac{1}{m!} f^{(m)}(0) z^{m} \qquad (|z| > r).$$

Definição 9.3 Seja Ω um aberto de S^2 tal que $\infty \in \Omega$.
(1^o) Uma função f é dita *holomorfa em* Ω se $f \in \mathcal{H}(\Omega\setminus\{\infty\})$ e f tem uma singularidade removível no ∞;
(2^o) Uma função g é dita *meromorfa em* Ω se $g \in \mathcal{M}(\Omega\setminus\{\infty\})$ e g tem um polo ou uma singularidade removível no ∞. Usamos as notações habituais: $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $g \in \mathcal{M}(\Omega)$.

Uma *função racional* g é, por definição um quociente de dois polinômios P e $Q \neq 0$, isto é, $g = P/Q$, onde podemos supor que P e Q não têm zeros em comum.

Proposição 9.4 (1^o) *$f \in \mathcal{H}(S^2)$ se e só se f é constante;*
(2^o) *Se $f \in \mathcal{M}(S^2)$ e ∞ é o único polo de f então f é um polinômio;*
(3^o) *$g \in \mathcal{M}(S^2)$ se e só se g é uma função racional.*

Prova (1^o) Se $f \in \mathcal{H}(S^2)$ então pela Def. 9.3 temos $f \in \mathcal{H}(S^2\setminus\{\infty\}) = \mathcal{H}(\mathbb{C})$ e como ∞ é uma singularidade removível de f, existe $r > 0$ tal que $M := \|f\|_{D_r^*(\infty)} < +\infty$. Por outro lado, a compacidade de $\overline{D}_r(0)$ e a continuidade de f mostram que $N := \|f\|_{\overline{D}_r(0)} < +\infty$ o que implica $\|f\|_{\mathbb{C}} = \max(M, N) < +\infty$, o que prova que f é constante pelo teorema de Louiville.
(2^o) Por (II) , logo após o Exemplo $1'$, se $p(z) = \sum_{k=1}^{m} a_{-k} z^k$ é a parte principal de f no ∞, é claro que a função $\varphi := f - p$ tem uma singularidade removível no ∞. Como ∞ é o único polo de f resulta $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ e como evidentemente $p \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, resulta $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ o que junto ao fato de ∞ ser uma singularidade removível de φ, implica (ver Def. 9.3 (1^o)) que $\varphi \in \mathcal{H}(S^2)$. Por (1^o) obtemos então $\varphi = c \in \mathbb{C}$, donde $f(z) = c + p(z)$ para cada $z \in \mathbb{C}$, isto é, f é um polinômio.
(3^o) Suponhamos que g é uma função racional, isto é, $g = P/Q$ onde P e Q não têm zeros comuns. Se $D = \{a_1, \cdots, a_m\}$ é o conjunto dos zeros de Q e ν_k é a multiplicidade de a_k como zero de $Q(1 \leq k \leq m)$, então D é o conjunto dos polos de g *em* $\mathbb{C}$, a_k é um polo de ordem ν_k e é claro que $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus D)$, isto é, $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C}) = \mathcal{M}(S^2\setminus\{\infty\})$. Resta então (ver Def. 9.3) mostrar que g tem um polo ou uma singularidade removível no ∞. Sejam

$Q(z) = c_0 z^m + \cdots + c_m \quad (c_0 \neq 0 \text{ logo } \partial Q = m)$, $P(z) = d_0 z^n + \cdots + d_n$ e vamos distinguir três possibilidades segundo que $n \lesseqgtr m$.

Possibilidade 1: $n = m$. Neste caso é claro que

$$g(z) = \frac{d_0 + \cdots + d_n z^{-n}}{c_0 + \cdots + c_m z^{-m}} \qquad \forall \quad z \neq 0$$

donde

$$\overline{g}(z) = g(1/z) = \frac{d_0 + \cdots + d_n z^n}{c_0 + \cdots + c_m z^m}$$

e sendo $c_0 \neq 0$ é claro que $\|\overline{g}\|_{D^*_{1/r}(0)} < +\infty$, isto é, $\overline{g}$ tem uma singularidade removível no 0 ou seja g tem uma singularidade removível no ∞.

Possibilidade 2: $n < m$. Neste caso, pondo $p := m - n > 0$ podemos escrever

$$g(z) = z^{-p} \frac{d_0 + \cdots + d_n z^{-n}}{c_0 + \cdots + c_m z^{-m}} \qquad (z \neq 0)$$

donde

$$\overline{g}(z) = g(1/z) = z^p \frac{d_0 + \cdots + d_n z^n}{c_0 + \cdots + c_m z^m}$$

e de novo a hipótese $c_0 \neq 0$ mostra que $\|\overline{g}\|_{D^*_{1/r}(0)} < +\infty$, isto é, $\overline{g}$ tem uma singularidade removível no 0, ou seja, g tem uma singularidade removível no ∞.

Possibilidade 3: $n > m$. Neste caso fazendo o quociente de P por Q obtemos

$$P = QQ_1 + R \qquad , \qquad \partial R < \partial Q$$

donde

$$g = Q_1 + \frac{R}{Q}$$

Pela Possib. 2 sabemos que R/Q tem uma singularidade removível no ∞ e pelo Exemplo 2 precedente resulta que Q_1 tem um polo no ∞, em consequência g tem um polo no ∞. Em resumo, provamos que $g \in \mathcal{M}(S^2 \setminus \{\infty\})$ e que g tem uma singularidade removível ou um polo no ∞, isto é, $g \in \mathcal{M}(S^2)$. Inversamente, se $g \in \mathcal{M}(S^2)$ então $g \in \mathcal{H}(S^2 \setminus D)$ onde D é o conjunto dos polos de g e como todo polo é uma singularidade isolada, resulta que D é um conjunto sem ponto de acumulação em S^2 o que junto à compacidade de S^2 acarreta que D é finito. Seja $D = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ (∞ pode pertencer a D ou não) e seja p_k a parte principal de g em a_k. Se ν_k é a ordem do polo a_k e $a_k \neq \infty$ (resp. $a_k = \infty$) então

$$\text{(9.4.1)} \quad p_k(z) = \sum_{j=1}^{\nu_k} c_{kj}(z - a_k)^{-j} \quad (\text{resp.} \quad p_k(z) = \sum_{j=1}^{\nu_k} c_{kj} z^{-j}), \;\; c_{k\nu_k} \neq 0$$

É claro que $g_1 := g - p_1$ tem uma singularidade removível em a_1, mostremos que isto implica

(9.4.2) O conjunto dos polos de g_1 (em S^2) é $D_1 := \{a_2, \cdots, a_m\}$

De fato, se $a_1 \neq \infty$ então (ver exemplo $1'$) p_1 não tem singularidade em $S^2\setminus\{a_1\}$, de modo que o conjunto dos polos de g_1 *em* $S^2\setminus\{a_1\}$ é o conjunto dos polos de g *em* $S^2\setminus\{a_1\}$, isto é D_1, o que prova (9.4.2) pois a_1 é uma singularidade removível de g_1. Se $a_1 = \infty$ então p_1 é im polinômio e portanto (ver exemplo 2) não tem singularidades em $S^2\setminus\{a_1\} = S^2\setminus\{\infty\} = \mathbb{C}$ donde se segue que o conjunto dos polos de g_1 *em* $S^2\setminus\{\infty\}$ é o conjunto dos polos de g *em* $S^2\setminus\{\infty\}$, isto é, $D\setminus\{a_1\} = D\setminus\{\infty\} = D_1$, o que prova (9.4.2) neste caso pois $a_1 = \infty$ é uma singularidade removível de g_1. Em consequência, $g_2 := g_1 - p_2 = (g - p_1) - p_2 = g - (p_1 + p_2)$ tem uma singularidade removível em a_2 e então, o mesmo argumento usado para provar (9.4.2) (levando em consideração que p_2 é a parte principal *também* de g_1 em a_2) mostra que o conjunto dos polos de g_2 (em S^2) é $D_2 := \{a_3, \cdots, a_m\}$. Por indução é imediato verificar que

$$g - \sum_{k=1}^{m} p_k$$

tem uma singularidade removível em cada ponto de D, donde

$$g - \sum_{k=1}^{m} p_k \in \mathcal{H}(S^2).$$

Por (1^o) resulta então que existe $c \in \mathbb{C}$ tal que

$$g = c + \sum_{k=1}^{m} p_k,$$

que é uma função racional em virtude de (9.4.1). $\square$

Exemplo: Determinar a forma geral das funções

$$f \in \mathcal{H}(S^2\setminus\{1, \infty\})$$

que verificam as duas condições seguintes:

(I.) f tem um polo de ordem 2 no ponto 1 e

$$\operatorname{Re}s(f, 1) = -3$$

(II.) f tem um polo de ordem 3 no ∞.

Solução: Por (I.) a parte principal p de f em 1 tem a forma seguinte:

$$p(z) = \frac{\lambda}{(z-1)^2} - \frac{3}{z-1} \qquad \text{com} \quad \lambda \in \mathbb{C}^*$$

Em consequência, a função

$$\varphi : z \longmapsto f(z) - p(z)$$

tem uma singularidade removível no 1 e portanto é analítica em $\mathbb{C}$ e, por (II.), tem um polo de ordem 3 no ∞. [pois f tem um polo de ordem 3 no ∞ e p, como sabemos pelo exemplo $1'$, NÃO tem singularidade no ∞, logo $\varphi = f - p$ tem um polo de ordem 3 no ∞.] Resulta então que a parte principal de φ no ∞ é da forma seguinte:

$$z \longmapsto a + bz + cz^2 + dz^3$$

com $a, b, c \in \mathbb{C}$ e $d \in \mathbb{C}^*$. Em consequência,

$$f(z) = \frac{\lambda}{(z-1)^2} + \frac{3}{z-1} + a + bz + cz^2 + dz^3$$

com λ, a, b, c e d complexos e $\lambda \cdot d \neq 0$.

No resultado seguinte apresentamos uma série de caracterizações dos abertos simplesmente conexos que ilustram o papel fundamental que estes têm na teoria das funções analíticas. Uma das condições que encontraremos no teorema que segue é: "$S^2 \backslash \Omega$ é conexo" onde Ω é um aberto de $\mathbb{C}$ e esta afirmação *não é equivalente* à asserção "$\mathbb{C} \backslash \Omega$ é conexo". Por exemplo se

$$\Omega := \{x + iy \mid 0 < y < 1 \text{ e } x \in \mathbb{R}\}$$

não é difícil ver que $S^2 \backslash \Omega$ é conexo ao passo que $\mathbb{C} \backslash \Omega$ tem 2 componentes conexas.

Teorema 9.5 (1^o) *Para um aberto conexo não vazio Ω de $\mathbb{C}$ as nove condições seguintes são equivalentes:*

(i) *Ω é homeomorfo a $D_1(0)$.*

(ii) *Ω é simplesmente conexo.*

(iii) $\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha) = 0$ *para cada CSDF γ em Ω e para cada $\alpha \in S^2 \backslash \Omega$.*

(iv) *$S^2 \backslash \Omega$ é conexo.*

(v) *Para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e para cada $K \subset\subset \Omega$ existe uma sequência $(p_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de polinômios tal que $p_m|K \rightrightarrows f|K (ver Def. 3.2(b))$.*

(vi) *Para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e para cada CSDF γ em Ω temos*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

(vii) *Para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F' = f$.*

(viii) *Se $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $1/f \in \mathcal{H}(\Omega)$* (i.e. $f(z) \neq 0 \ \ \forall \ \ z \in \Omega$) *existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f = \exp(g)$.*

(ix) *Se $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $1/f \in \mathcal{H}(\Omega)$, existe $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f = \varphi^2$.*

(2^o) *Se $\Omega \neq \mathbb{C}$, então as condições acima são equivalentes à seguinte:*

(i$'$) *Ω é conformemente equivalente a $D_1(0)$* (ver Def. 6.3)

A prova deste resultado não é inteiramente trivial e só será concluída nos capítulos seguintes. As condições (i) e (ii) são, propriedades topológicas internas fortes de Ω; as condições (iii) e (iv) se referem à forma em que Ω está contido em S^2; as propriedades (v),(vi),(vii) e

(viii) são de caráter analítico; (ix) é uma asserção de caráter algébrico que expressa que todo elemento inversível do anel $\mathcal{H}(\Omega)$ tem raiz quadrada. Observar que as implicações (ii)$\Rightarrow$(vi), (ii)$\Rightarrow$(vii) e (ii)$\Rightarrow$(viii) são conhecidas (ver Teor. 7.8, Corol. 7.10 e Corol. 7.11 resp.). A implicação (iv) $\Rightarrow$(v) está contida no Teorema de Runge que só será provado no capítulo 11. A prova do Teor. 9.5 será feita seguindo o esquema seguinte:
(i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(iv)$\Rightarrow$(v)$\Rightarrow$(vi)$\Rightarrow$(vii)$\Rightarrow$(viii)$\Rightarrow$(ix)$\Rightarrow$(i)
e a implicação (ix)$\Rightarrow$(i) é trivial no caso $\Omega = \mathbb{C}$ pois as aplicações

$$h : z \in \mathbb{C} \mapsto \frac{z}{1+|z|} \in D_1(0) \qquad , \qquad h^{-1} : z \in D_1(0) \mapsto \frac{z}{1-|z|} \in \mathbb{C}$$

são homeomorfismos recíprocos como é imediato verificar pois é óbvio que $h \circ h^{-1} = 1_{D_1(0)}$ e $h^{-1} \circ h = 1_{\mathbb{C}}$ e a continuidade de h e h^{-1} é evidente pois são quocientes de funções contínuas. No caso $\Omega \neq \mathbb{C}$, em vez de provar que (ix)$\Rightarrow$(i) vamos demonstrar que (ix)$\Rightarrow$(i$'$), o que completará a prova do Teor. 9.5 já que óbviamente (i$'$)$\Rightarrow$(i). É usual enunciar a implicação (ix)$\Rightarrow$(i$'$) da maneira seguinte:

Teorema da aplicação de Riemann: *Se Ω é um aberto simplesmente conexo e $\varnothing \neq \Omega \neq \mathbb{C}$, então $\mathbb{C}$ é conformemente equivalente a $D_1(0)$.* (Teor. 10.19)

A prova do teorema de Riemann será feita no capítulo 10 segundo a seguinte linha de raciocínio: Se Ω é simplesmente conexo, então pela implicação (ii)$\Rightarrow$(ix) do Teor. 9.5 (já provada), resulta que vale (ix) e usando apenas esta condição vamos provar (i$'$).

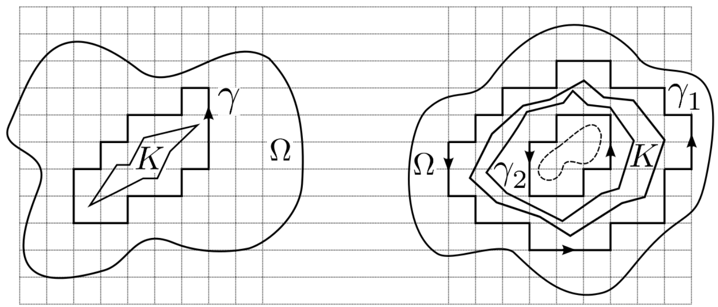
Na prova da implicação (iii)$\Rightarrow$(iv) do Teor. 9.5 vamos precisar do seguinte:

Lema 9.6 *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{C}$ e K uma parte compacta não vazia de Ω. Então existe um ciclo Γ em $\Omega \backslash K$ tal que a fórmula de Cauchy*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\lambda)d\lambda}{\lambda - z}$$

é válida para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e para cada $z \in K$.

Antes de expor a prova completa do Lema 9.6 vamos mostrar a ideia geométrica da mesma.



Como K é uma parte compacta de Ω existe $\eta > 0$ tal que $\operatorname{dist}(K, \partial\Omega) \geq 2\eta$. Construimos então um "engradado"com quadrados de lado η e a partir dele construimos tantas CSDF como seja necessário na forma de poligonais de lados paralelos aos eixos. Na Fig. 1 temos $\Gamma = \gamma$; na Fig. 2 temos $\Gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ e em ambos casos é claro que

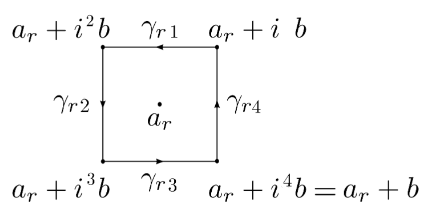
$$\begin{aligned} \operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 1 \qquad \forall \qquad z \in K, \\ \operatorname{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0 \qquad \forall \qquad \alpha \notin \Omega. \end{aligned}$$

A seguir vamos introduzir um formalismo muito simples que vai tornar rigorosa a ideia que acabamos de esboçar. Seja Φ um conjunto finito não vazio de intervalos orientados (ver capítulo 5). Para cada $p \in \mathbb{C}$, seja $m_{\mathrm{I}}(p)$ (resp. $m_F(p)$) o número de elementos de Φ cujo ponto inicial (resp. final) é p. Dizemos que Φ é *equilibrado* se $m_{\mathrm{I}}(p) = m_F(p)$ para cada $p \in \mathbb{C}$. (Como Φ é finito, é claro que $m_{\mathrm{I}}(p) = m_F(p) = 0$ para "quase todo"$p \in \mathbb{C}$)

Exemplo 4 Consideremos um "engradado de lado $\eta > 0$", isto é, dois feixes enumeráveis de retas, cada um deles paralelos a um dos eixos coordenados de modo que a distância entre duas paralelas consecutivas é igual a η. Desta forma, $\mathbb{C}$ é a reunião de uma infinidade enumerável de quadrados fechados de lado η. Se $\varnothing \neq K \subset\subset \mathbb{C}$, é claro que existe um número finito $Q_1, \cdots, Q_m$ de quadrados do engradado tais que $K \cap Q_r \neq \varnothing$ para cada $r = 1, 2, \cdots, m$ e

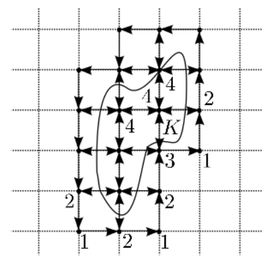
$$K \subset \bigcup_{1 \leq r \leq m} Q_r$$

Sejam a_r o centro de $Q_r, a_r + b$ um qualquer dos seus vértices e γ_{rk} o intervalo orientado:



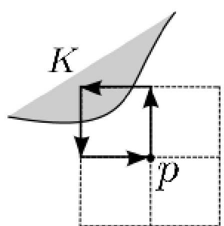
$$\gamma_{rk} := \left[a_r + i^k b, a_r + i^{k+1} b\right].$$

Vamos mostrar que $\Sigma := \{\gamma_{rk} \mid 1 \leq r \leq m \;\text{ e } 1 \leq k \leq 4\}$
é um conjunto equilibrado de intervalos orientados; de modo mais preciso vamos provar que $1 \leq m_{\mathrm{I}}(p) = m_F(p) \leq 4$ para cada p que é vértice de algum Q_r com $1 \leq r \leq m$.

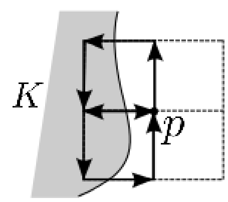


De fato, basta ver que se p é um vértice qualquer de algum dos Q_r então p pode ser vértice de um, dois, três ou quatro dos Q_r:

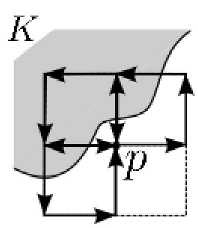
Caso 1: $m_{\mathrm{I}}(p) = m_F(p) = 1$



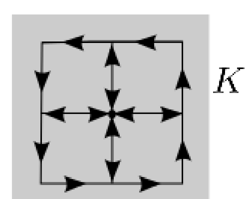
Caso 2: $m_{\mathrm{I}}(p) = m_F(p) = 2$



Caso3: $m_{\mathrm{I}}(p) = m_F(p) = 3$



Caso 4: $m_{\mathrm{I}}(p) = m_F(p) = 4$



Em resumo, o exame de cada um dos quatro casos possíveis mostra que Σ é um conjunto equilibrado.

Seja agora Φ um conjunto finito não vazio equilibrado de intervalos orientados. Vamos mostrart que *é possível construir um ciclo (não necessariamente único)* Γ *tal que* $\gamma^* \subset \Gamma^*$ *para cada* $\gamma \in \Phi$.Tomemos $\gamma_1 = [a_0, a_1] \in \Phi$ arbitário e suponhamos escolhidos segmentos dois a dois diferentes em $\Phi : \gamma_1, \cdots, \gamma_k \quad (k \geq 1)$ onde $\gamma_i = [a_{i-1}, a_i]$ para $i = 1, 2, \cdots, k$. Se $a_k = a_0$, o primeiro passo do processo acaba tomando $\Gamma_1 = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_k$ que é uma CSDF (e se $\Phi = \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots .., \gamma_k\}$ então o processo todo acaba tomando $\Gamma = \Gamma_1$ que é um ciclo). Se $a_k \neq a_0$ e se r dos intervalos $\gamma_1, \cdots, \gamma_k$ têm a_k como ponto final então é claro que só $r - 1$ deles podem ter a_k como ponto final (pois $\gamma_k =[a_{k-1}, a_k]$ é um destes r intervalos que têm a_k como ponto final, γ_k ***não tem*** a_k como ponto inicial e Φ é *equilibrado*). Como Φ é equilibrado, deve existir *pelo menos um intervalo* $\gamma_{k+1} \in \Phi$ (diferente de $\gamma_1, \cdots, \gamma_k$) que tem a_k como ponto inicial. Desta forma, provamos que *cada vez que* $a_k \neq a_0$ *necessariamente o processo contínua com um intervalo* $\gamma_{k+1} \in \Phi$ *diferente dos anteriores* $\gamma_1, \cdots, \gamma_k$. Em consequência, como Φ é finito e equilibrado, devemos voltar ao ponto a_0 depois de, digamos n_1 intervalos, logo obtemos uma *poligonal fechada* $\Gamma_1 := \gamma_1 \vee \cdots \vee \gamma_{n_1}$ que é portanto uma CSDF. Se o conjunto $\Phi_1 := \Phi \setminus \{\gamma_1, \cdots, \gamma_{n_1}\}$ não é vazio, então Φ_1 é *equilibrado* pois pela construção da sequência $\gamma_1, \cdots, \gamma_{n_1} \quad (\gamma_i = [a_{i-1}, a_i])$ cada um destes intervalos contribuiram com o mesmo número de "chegadas"que de "saídas" nos vértices da poligonal fechada Γ_1. Resulta então que podemos aplicar a Φ_1 a mesma construção precedente obtendo uma outra poligonal fechada (CSDF):

$$\Gamma_2 := \gamma_{n_1+1} \vee \cdots \vee \gamma_{n_2}$$

Como Φ é finito, é claro que podemos enumerar os elementos de Φ e associa-los em subconjuntos que por justaposição produzem poligonais fechadas (CSDF), em símbolos:

$$\Phi = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_{n_1}\} \cup \{\gamma_{n_1+1}, \cdots, \gamma_{n_2}\} \cup \cdots \cup \left\{\gamma_{n_{p-1}+1}, \cdots, \gamma_{n_p}\right\}$$

onde

$$\Gamma_1 = \gamma_1 \vee \cdots \vee \gamma_{n_1}, \;\; \Gamma_2 = \gamma_{n_1+1} \vee \cdots \vee \gamma_{n_2}, \cdots \; \Gamma_p = \gamma_{n_{p-1}+1} \vee \cdots \vee \gamma_{n_p}$$

são poligonais fechadas (CSDF) e portanto

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \cdots + \Gamma_p$$

é um ciclo. É claro que sempre é possível obter mais de um ciclo como Γ a partir de Φ (pois $\Phi \neq \varnothing$). Um qualquer destes ciclos obtidos a partir de Φ pelo processo acima descrito é indicado pela notação geral

$$\sum_{\gamma \in \Phi} \gamma$$

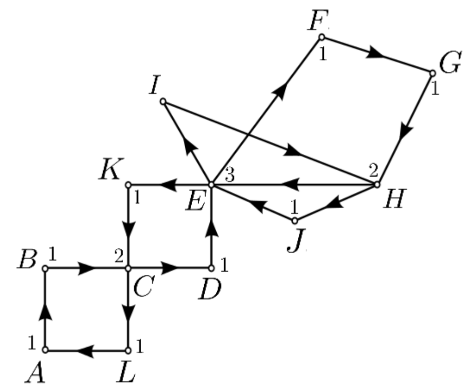
Podemos então resumir a discussão acima no seguinte enunciado:

Lema 9.7 *Todo conjunto finito não vazio equilibrado de intervalos orientados* Φ *determina um conjunto (finito) não vazio de ciclos* (denotados genericamente por

$$\sum_{\gamma \in \Phi} \gamma;$$

é claro qu todos estes ciclos determinados por Φ têm a mesma imagem $\underset{\gamma\in\Phi}{\cup}\gamma^*)$

O desenho abaixo ilustra o Lema 9.7 com um exemplo de um conjunto equilibrado de intervalos orientados Φ e dois ciclos (na realidade duas poligonais fechadas) obtidas a partir de Φ. O número em cada vértice p da poligonal indica $m_I(p) = m_F(p)$.



$\Phi = \{AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HE, EI, IH, HJ, JE, EK, KC, CL, LA\}$

então um dos ciclos definidos a partir de Φ se obtém fazendo justaposição dos intervalos "na ordem em que aparecem na definição de Φ" :

$\Gamma_1 = AB \vee BC \vee CD \vee DE \vee EF \vee FG \vee GH \vee HE \vee EI \vee IH \vee HJ \vee$
$JE \vee EK \vee KC \vee CL \vee LA$
Mas é claro que o ciclo
$\Gamma_2 = AB \vee BC \vee CD \vee DE \vee EI \vee IH \vee HJ \vee JE \vee EF \vee FG \vee GH \vee$
$\vee HE \vee EK \vee KC \vee CL \vee LA.$

é um ciclo obtido a partir de Φ de acordo com a prova do Lema 9.7 e $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$. É claro que outras variações são possíveis a partir do "entroncamento"E :

$\Gamma_3 = AB \vee \cdots \vee DE \vee EI \vee IH \vee HE \vee EF \vee FG \vee GH \vee HJ \vee JE \vee \cdots$

Prova do Lema 9.6: Como K é uma parte compacta de Ω existe $\eta > 0$ tal que $dist(K, \partial\Omega) > 2\eta$. Consideremos a construção feita no Exemplo 4 precedente , isto é, um "engradado de lado η" e seja $\{Q_1, Q_2, \cdots, Q_m\}$ o conjunto dos quadrados que cortam K e portanto $K \subset \underset{1\leq r\leq m}{\cup} Q_r$.
Sejam a_r o centro de Q_r, $a_r + b$ um qualquer dos vértices de Q_r,

$\gamma_{rk} := \left[a_r + i^k b, a_r + i^{k+1} b\right] \quad (1 \le r \le m, \quad 1 \le k \le 4)$ e definamos

$$\partial Q_r := \gamma_{r1} \vee \gamma_{r2} \vee \gamma_{r3} \vee \gamma_{r4}.$$

É fácil ver, usando a Prop. 5.3 e o Lema 7.5 que

$$\text{(9.6.1)} \qquad \mathrm{Ind}_{\partial Q_r}(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha \in \overset{\circ}{Q}_r \\ 0, & \text{se } \alpha \notin Q_r \end{cases}$$

Ainda como no Exemplo 4 consideremos o conjunto equilibrado

$$\sum := \{\gamma_{rk} \mid 1 \le r \le m \ \text{ e } 1 \le k \le 4\}$$

e seja

$$\Phi := \sum \setminus \left\{\gamma \in \sum \ \mid \gamma^0 \in \sum\right\}.$$

Por definição, Φ é construido tirando de $\sum$ intervalos γ que contribuem com "uma chegada e uma saída"em cada um dos seus extremos, portanto Φ é um conjunto equilibrado (veja Φ na fig. no Exemplo 4). Seja então Γ um dos ciclos $\sum\limits_{\gamma \in \Phi} \gamma$ construídos a partir de Φ pelo Lema 9.7.

Se um lado L de algum Q_r (isto é $L = \gamma_{rk}^*$ para algum $k = 1, 2, 3, 4$) corta K então os dois quadrados Q_r e Q_s que têm L como lado comum cortam K e como ∂Q_r e ∂Q_s estão "orientados positivamente", se $L = \gamma_{rk}^* = \gamma_{sh}^*$, é claro que γ_{rk} e γ_{sh} são opostos entre si, logo $\gamma_{rk} = \gamma_{sh}^0 \notin \Phi$ e $\gamma_{sh} = \gamma_{rk}^0 \notin \Phi$, o que mostra que se $\gamma \in \Phi$ então $\gamma^* \cap K = \varnothing$, donde resulta $\Gamma^* \cap K = \varnothing$. É claro que a condição $dist(K, \partial\Omega) > 2\eta$ implica $\Gamma^* \subset \Omega$ e portanto Γ é um ciclo em $\Omega \setminus K$. Observemos ainda que a construção de Φ a partir de $\sum$ mostra que

$$\text{(9.6.2)} \qquad \mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = \sum_{1 \le r \le m} \mathrm{Ind}_{\partial Q_r}(\alpha) \qquad \forall \quad \alpha \notin \bigcup_{1 \le r \le m} \partial Q_r$$

De fato, dado $\alpha \notin \bigcup\limits_{1 \le r \le m} \partial Q_r$,a definição de $\sum \setminus \Phi$ (isto é, a definição de Φ) implica:

$$\sum_{\gamma \in \Sigma \setminus \Phi} \int_\gamma \frac{dz}{z - \alpha} = \sum_i \left\{ \int_{\gamma_i} \frac{dz}{z - \alpha} + \int_{\gamma_i^\circ} \frac{dz}{z - \alpha} \right\} = 0$$

donde segue: $2\pi i \sum\limits_{r=1}^{m} \mathrm{Ind}_{\partial Q_r}(\alpha) = \sum\limits_{r=1}^{m} \int\limits_{\partial Q_r} \dfrac{da}{z - \alpha} = \sum\limits_{\substack{1 \le r \le m \\ 1 \le k \le 4}} \int\limits_{\gamma_{rk}} \dfrac{dz}{z - \alpha} =$

$$= \sum_{\gamma \in \phi} \int_\gamma \frac{dz}{z - \alpha} + \sum_{\gamma \in \sum \setminus \Phi} \frac{dz}{z - \alpha} = \sum_{\gamma \in \Phi} \int_\gamma \frac{dz}{z - \alpha} = 2\pi i \int_\Gamma \frac{dz}{z - \alpha}$$

onde a última igualdade resulta da construção de Γ a partir de Φ :

$\Gamma = \Gamma_1 + \cdots + \Gamma_p$ sendo $\Gamma_i = \gamma_{n_{i-1}+1} \vee \cdots \vee \gamma_{n_i}$ para cada $1 \leq i \leq p$ e $n_0 := 0$, resulta

$$\int_\Gamma = \sum_{i=1}^{p} \int_{\Gamma_i} = \sum_{i=1}^{p} \left\{ \sum_{l=n_{i-1}+1}^{n_i} \int_{\gamma_l} \right\} = \sum_{\gamma \in \Phi} \int_\gamma ,$$

o que de passagem justifica a notação $\sum\limits_{\gamma\in\Phi} \gamma$ introduzida no Lema 9.7 para indicar um qualquer dos ciclos determinados por Φ. De (9.6.1) e (9.6.2) resulta

$$(9.6.3) \qquad \mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha \in \overset{\circ}{Q}_r \text{ para algum } r = 1, 2, \cdots, m \\ 0, & \text{se } \alpha \notin \bigcup\limits_{r=1}^{m} Q_r \end{cases}$$

Dado $z \in K$ temos $z \notin \Gamma^*$ e portanto existe Q_r e existe uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\overset{\circ}{Q}_r$ tal que $a_n \longrightarrow z$ se $n \longrightarrow \infty$ e como a função
$w \longmapsto \mathrm{Ind}_\Gamma(w)$
é contínua e constante sobre cada componente conexa de $\mathbb{C}\backslash\Gamma^*$ e, por (9.6.3), temos $\mathrm{Ind}_\Gamma(a_n) = 1 \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$, resulta $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 1$. Se $z \notin \Omega$ então $z \notin \bigcup\limits_{1\leq r\leq m} Q_r$, logo por (9.6.3) obtemos $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0$, em resumo

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \begin{cases} 1, & \text{de } z \in K \\ 0, & \text{se } z \notin \Omega \end{cases}$$

o que prova, pelo Teor. 7.1 (1^o), que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\lambda)d\lambda}{\lambda - z} \quad \forall \quad z \in K \text{ e } \forall \quad f \in \mathcal{H}(\Omega). \ \square$$

Prova (incompleta) do Teor. 9.5

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Por (i) existe um homeomorfismo $\psi : \Omega \to D_1(0)$. Sejam $I = [0,1]$ e $\gamma : I \to \Omega$ uma curva fechada em Ω, basta então mostrar que γ é homotópica a um ponto. Definimos

$$H : (s,t) \in I \times I \longmapsto \psi^{-1}(t.\psi(\gamma(s))) \in \Omega.$$

É claro que H é contínua, $H(s,0) = \psi^{-1}(0)$ é constante, $H(s,1) = \gamma(s)$ e $H(0,t) = H(1,t) \quad \forall \quad t \in I$ pois $\gamma(0) = \gamma(1)$. Desta forma, H é uma homotopia de γ a $\psi^{-1}(0)$ e portanto Ω é simplesmente conexo.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Seja γ uma CSDF em Ω, então por (ii) e pela definição de aberto simplesmente conexo resulta que γ é Ω-HCF a um ponto, donde, pela Prop. 7.6 e pelo Exemplo 1,logo após a Def. 9.2, resulta (iii).

(iii) $\Longrightarrow$ (iv): Suponhamos por absurdo que (iv) é falsa. Então $S^2\backslash\Omega$ é um fechado não conexo de S^2, portanto $S^2\backslash\Omega = H \cup K$, onde H e K são fechados não vazios tais que $H \cap K = \varnothing$. Suponhamos, por exemplo, que $\infty \in H$ $(\Omega \subset \mathbb{C} \implies \infty \in S^2\backslash\Omega = H \cup K \implies \infty \in H$ ou $\infty \in K)$ e seja $W := \mathbb{C}\backslash H = S^2\backslash H$. Como $S^2 = (\Omega \cup K) \cup H = W \cup H;\ H \cap W = \varnothing$, $H \cap \Omega = \varnothing$ e portanto $H \cap (\Omega \cup K) = \varnothing$ (pois $H \cap K = \varnothing$), obtemos $W = \Omega \cup K$. Como K é fechado em S^2 que é compacto, é claro que $K \subset\subset S^2$ e sendo $K \subset \mathbb{C}$ (pois $\infty \in H$ e portanto $\infty \notin K$) resulta $K \subset\subset \mathbb{C}$. Por outro lado, $W = \mathbb{C}\backslash H$ é aberto em $\mathbb{C}$ (pois $W = S^2\backslash H$ é aberto em S^2 e $W \subset \mathbb{C}$), em consequência: $K \subset\subset W$ =aberto de $\mathbb{C}$. Seja agora $f := 1 \in \mathcal{H}(W)$. Então aplicando o Lema 9.6 a W, K e f, existe um ciclo Γ em $W\backslash K = \Omega$ tal que

$$f(z) = 1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{d\lambda}{\lambda - z} = \mathrm{Ind}_{\Gamma}(z) \quad \forall \quad z \in K.$$

Como $K \neq \varnothing$ e $K \subset \mathbb{C}\backslash\Omega \subset S^2\backslash\Omega$, encontramos um subconjunto não vazio (o K) de $S^2\backslash\Omega$ tal que

$$1 = \mathrm{Ind}_{\Gamma}(z) \neq 0 \quad \forall \quad z \in K \subset S^2\backslash\Omega$$

o que está em contradição com (iii). De fato, $\Gamma = \sum\limits_{i=1}^{p} \Gamma_i$ onde Γ_i é uma CSDF em Ω (Γ_i é uma CSDF (poligonal fechada) em $W\backslash K \subset \Omega$ pois $W = \Omega \cup K$) e por (iii) temos $\mathrm{Ind}_{\Gamma_i}(z) = 0$ para todo $z \in S^2\backslash\Omega$ e para todo $i = 1, 2, \cdots, p$, donde $\mathrm{Ind}_{\Gamma}(z) = \sum\limits_{i=1}^{p} \mathrm{Ind}_{\Gamma_i}(z) = 0$ para todo $z \in S^2\backslash\Omega$ e isto vale em particular para cada $z \in K \subset S^2\backslash\Omega$.

(iv) $\Longrightarrow$ (v): Esta implicação está contida no teorema de aproximação de Runge. (Teor.11.4).

(v) $\Longrightarrow$ (vi): Fixem $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e uma CSDF γ em Ω arbitrárias. Como $\gamma^* \subset\subset \Omega$, por (v) resulta que existe uma sequência $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de polinômios tal que $p_m \overset{\gamma^*}{\rightrightarrows} f$. Ora, pelo Corol. 5.5 (I) (ou pelo Teor. 7.8 pois $p_m \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ e $\mathbb{C}$ é simplesmente conexo) se segue que $\int\limits_{\gamma} p_m(z)dz = 0 \quad \forall \quad m \in \mathbb{N}$, logo $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_{\gamma} p_m(z)dz = 0.$

(vi) $\Longrightarrow$ (vii): A Prop. A.1 (ver Apêndice do Cap. 7) expressa precisamente que (vi) $\Longleftrightarrow$ (vii) (lembrar que Ω é conexo por hipótese!).

(vii) $\Longrightarrow$ (viii): Acabamos de observar que (vii) $\Longleftrightarrow$ (vi) e no Apêndice do Cap. 7 vimos que quando (vi) está verificada, o símbolo $\int\limits_{z}^{w}$ com $z, w \in \Omega$ tem um sentido bem determinado e igual a $\int\limits_{\gamma}$ sendo γ uma CSD em Ω de origem z e extremo w. Fixado $a \in \Omega$ arbitrário, como $f(a) \neq 0$, existe $b \in \mathbb{C}$ tal que $\exp(b) = f(a)$, então definimos

$g : \Omega \to \mathbb{C}$ por

$$g(z) := \int_a^z \frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} d\lambda + b \qquad \forall \quad z \in \Omega$$

donde

$$g(a) = b.$$

Por hipótese $f'/f \in \mathcal{H}(\Omega)$, logo por (vii), f'/f tem primitiva e então, pela Prop. A.1 resulta que g é uma primitiva de f'/f, isto é,

$$g' = f'/f \quad \text{em} \;\; \Omega$$

Seja $h := \exp(g)$ e mostremos que $h = f$. É claro que $\varphi := h/f \in \mathcal{H}(\Omega)$ donde resulta

$$\varphi' = \frac{h'f - hf'}{f^2} = \frac{fg'\exp(g) - f'\exp(g)}{f^2} = \frac{\exp(g)}{f^2}(fg' - f') = 0.$$

Como Ω é conexo, concluímos que $\varphi = cte$ e como

$$\varphi(a) = \frac{h(a)}{f(a)} = \frac{\exp(g(a))}{f(a)} = \frac{\exp(b)}{f(a)} = 1 \qquad \text{(definição de b)}$$

obtemos $\varphi \equiv 1$ o que implica $f = h = \exp(g)$.

(viii) $\Longrightarrow$ (ix): Por (viii) existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f = \exp(g)$. Basta então definir $\varphi = \exp(\frac{1}{2}g)$.

(ix) $\Longrightarrow$ (i): Se $\Omega = \mathbb{C}$ já vimos que a asserção é imediata. Se $\Omega \neq \mathbb{C}$, a afirmação resultará do teorema de Riemann (Capítulo 10, Teor. 10.19).

Corlário 9.8 *Se Ω é um aberto de $\mathbb{C}$, $f \in H(\Omega)$ e $f(z) \neq 0$ para cada $z \in \Omega$, então $\ln|f| \in Har(\Omega, \mathbb{R})$.*

Prova: Todo disco aberto $D \subset \Omega$ é simplesmente conexo, portanto existe $g \in \mathcal{H}(D)$ tal que $f = \exp(g)$ em D. Como $g \in \mathcal{H}(D) \subset Har(D, \mathbb{C})$, temos $u = \text{Re}(g) \in Har(\Omega, \mathbb{R})$, o que prova o resultado pois de $f = \exp(g)$ se segue que $|f| = \exp(u)$, ou seja $u = \ln|f|$. $\square$

Exercícios

(9.1) (de Topologia Geral) Uma compactificação de Alexandroff de um espaço topológico X é um par (X_∞, χ) tal que

(1º) X_∞ é um espaço topológico separado compacto.

(2º) χ é um homeomorfismo de X sobre $\chi(X)$.

(3º) $X_\infty = \chi(X) \cup \{\infty\}$, onde $\infty \notin \chi(X)$.

O ponto ∞ tal que $X_\infty \backslash \chi(X) = \{\infty\}$ é chamado ponto no infinito.
(a) Prove que todo espaço localmente compacto possui uma compactificação de Alexandroff;
(b) Prove que a compactificação de Alexandroff é única no sentido seguinte: Se $\chi : X \to X_\infty$ e $\chi' : X \to X_{\infty'}$ são duas compactificações de Alexandroff do mesmo espaço localmente compacto separado X, então existe um único homeomorfismo h tornando comutativo o diagrama ao lado e tal que $h(\infty) = \infty'$;

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\chi'} & X_{\infty'} \\ \chi \downarrow & \nearrow_h & \\ X_\infty & & \end{array}$$

(c) Prove a seguinte "propriedade universal"da compactificação de Alexandroff (X_∞, χ) do espaço separado localmente compacto X : $\forall$ espaço separado compacto K e $\forall\ f \in \mathcal{C}(X; K)$ $\exists 1$ $f_* \in \mathcal{C}(X_\infty; K)$ tornando comutativo o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & K \\ \chi \downarrow & \nearrow f_* & \\ X_\infty & & \end{array}$$

(d) Verifique que (S^2, φ^{-1}) é uma compactificação de Alexandroff de $\mathbb{C}$.
[**Sugestão:** se necessário ver o livro de E. L. Lima, Elementos de Topologia Geral, Cap. VII].

(9.2) (Exerc. Básico 08/81) Determinar forma geral das funções $f \in \mathcal{H}(S^2 \backslash \{0, \infty\})$ que verificam as duas condições seguintes:
(a) f tem um polo de ordem 2 com parte principal z^{-2} no 0;
(b) f tem um polo de ordem $m > 0$ no ∞. [Resp.: $f(z) = z^{-2} + \sum\limits_{0 \le j \le m} a_j z^j$, com $a_m \neq 0$]

(9.3) Prove que as três condições seguintes são equivalentes:
(i) $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ e f é injetora;
(ii) Existem $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$ com $a_1 \neq 0$ tais que $f(z) = a_0 + a_1 z$ $\forall\ z \in \mathbb{C}$;
(iii) f é um automorfismo analítico de $\mathbb{C}$ (isto é, f é um isomorfismo analítico de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$).
[**Sugestão:** É claro que (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (i) portanto basta provar que (i) $\Longrightarrow$ (ii) e para isto podemos proceder em duas etapas. Seja $f(z) = \sum\limits_{m \ge 0} a_m z^m$ o desenvolvimento de Taylor de f em volta de 0.
Etapa 1: O conjunto $X := \{m \in \mathbb{N} \mid a_m \neq 0\}$ é finito. Para provar esta afirmação supor por absurdo que X é infinito, então f tem uma singularidade essencial no ∞, isto é, $\overline{f(D_r^*(\infty))} = \mathbb{C}$. Usar a injetividade de f e o teorema da aplicação aberta para chegar a uma contradição.
Etapa 2: $a_m \notin X$ para cada $m \ge 2$.Pela etapa 1, f é um polinômio e

supondo grau $(f) > 1$ se obtém uma contradição de novo usando a injetividade de f e as raízes (ou raíz de multiplicidade ≥ 2) de f.]

(9.4) Seja $\varphi : (x, y, u) \in S^2 \setminus \{\infty\} \longmapsto z \in \mathbb{C}$ a projeção estereográfica.
(a) Mostre que se C é um círculo sobre S^2 que não passa (resp. passa) por ∞, então $\varphi(C)$ (resp. $\varphi(C \setminus \{\infty\})$) é um círculo (resp. uma reta) de $\mathbb{C}$;
(b) Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, para que $\varphi^{-1}(z_1)$ e $\varphi^{-1}(z_2)$ sejam antípodas é necessário e suficiente que $z_1 \overline{z}_2 = -1$;
(c) Mostre que a distância $\overline{P_1P_2}$ (em $\mathbb{R}^3$), entre $P_1 := \varphi^{-1}(z_1)$ e $P_2 := \varphi^{-1}(z_2)$ $(z_1, z_2 \in \mathbb{C})$ é dada pela fórmula

$$\overline{P_1P_2} = \frac{2\,|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)}} \ .$$

(9.5) Determine todas as funções f analíticas em $S^2 \setminus \{-1.2.\infty\}$ tais que:
(a) f tem um polo simples em $z = \infty$;
(b) f tem um polo duplo em $z = 2$ com resíduo 2;
(c) f tem um polo simples em $z = -1$ com resíduo 1;
(d) $f(0) = 0$ e $f(1) = 2$.
[Sugestão: As condições (a), (b) e (c) mostram que as funções f procuradas devem obedecer à relação

$$f(z) - \frac{1}{z+1} - \frac{2}{z-2} - \frac{a}{(z-2)^2} = b + cz \qquad (z \neq -1, 2)$$

onde $ac \neq 0$. A condição (d) permite expressar a e c em função de b o que dá a família procurada de funções (dependendo de b, que também deve obedecer alguma restição).**]**

(9.6) Determine $f \in \mathcal{H}(S^2 \setminus \{-2, \infty\})$ que verifique concomitantemente as seguintes condições:
(a) f tem um polo de ordem 2 no ponto $z = -2$, tendo como parte principal $p(z) = \dfrac{3}{(z+2)^2} - \dfrac{2}{z+2}$;
(b) f tem um polo de ordem 2 no ∞;
(c) $f(1) = f(-1) = f(0) = 0$.

(9.7) Determinar a forma geral das funções $f \in \mathcal{H}(S^2 \setminus \{-1, \infty\})$ que verificam as duas condições seguintes:
(a) f tem um polo de ordem 3 no ponto $z = -1$ com parte principal

$$p(z) = \frac{1}{(z+1)^3} - \frac{2}{(z+1)^2} + \frac{3}{z+1} \ ;$$

(b) f tem um polo de ordem 2 no ∞.

Capítulo 10

TRANSFORMAÇÕES CONFORMES. O TEOREMA DE MONTEL E O TEOREMA DA APLICAÇÃO DE RIEMANN.

Para cada $z \in \mathbb{C}^*$ definimos o *versor de* z como

$$V[z] := \frac{z}{|z|} \ .$$

É claro que $V \in \mathcal{C}(\mathbb{C}^*, \partial D_1(0))$.

Definição 10.1 Sejam Ω um aberto conexo de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função, e suponhamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $D_\varepsilon(z_0) \subset \Omega$ e $f(z) \neq f(z_0)$ para cada $z \in D^*_\varepsilon(z_0)$. Dizemos que f *preserva os ângulos em* z_0 se o limite

$$\ell := \lim_{r\downarrow 0} e^{-i\theta} V\left[f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)\right]$$

existe e independe de θ.

O significado geométrico da Def.10.1 é, numa linguagem menos precisa, o seguinte: *se L' e L'' são duas semiretas de origem z_0, então o ângulo das tangentes as suas imagens $f(L')$ e $f(L'')$ em $f(z_0)$ é o mesmo que o de L' e L'',em medida e orientação.* De fato, é imediato verificar que $e^{-i\theta} V\left[f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)\right] = V\left[\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right]$, onde $z = z_0 + re^{i\theta}$ portanto a condição da Def. 10.1 expressa que

$$V\left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right] \longrightarrow \ell \ \text{ se } \ r \downarrow 0$$

o que equivale (*intuitivamente!)* a afirmar que $\arg\left[\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right] = \arg\left[f(z) - f(z_0)\right] - \arg(z - z_0) \to \alpha := \arg \ell$, se $r \downarrow 0$ o que, levando em consideração que $\arg(z - z_0) = \theta$, se escreve assim:

(10.1.1) $\qquad \arg\left[f(z)-f(z_0)\right] \longrightarrow \theta+\alpha, \text{ se } r\downarrow 0$

Por outro lado, para cada $\theta\in[0,2\pi[$, seja

$$\gamma_\theta : r\in[0,\varepsilon[\longmapsto f(z_0+r^{i\theta})\in\mathbb{C},$$

então a tangente a γ_θ no ponto $r=0$ (i.e. em $f(z_0)$) é a semireta de origem $f(z_0)$ que tem a direção do vetor

$$\gamma_\theta'(0)=\lim_{r\downarrow 0}\frac{f(z_0+re^{i\theta})-f(z_0)}{r}$$

cujo argumento é dado por

$$\arg\gamma_\theta'(0)=\arg\left\{\lim_{r\downarrow 0}\frac{f(z_0+re^{i\theta})-f(z_0)}{r}\right\}=$$

$$=\lim_{r\downarrow 0}\left\{\arg\frac{f(z_0+re^{i\theta})-f(z_0)}{r}\right\}=\lim_{r\downarrow 0}\left\{\arg\left[f(z_0+re^{i\theta})-f(z_0)\right]\right\},$$

portanto

(10.1.2) $\qquad \arg\left[f(z_0+re^{i\theta})-f(z_0)\right]\longrightarrow\arg\gamma_\theta'(0), \text{ se } r\downarrow 0$

De (10.1.1) e (10.1.2) resulta então

(10.1.3) $\qquad \arg\gamma_\theta'(0)=\alpha+\theta$

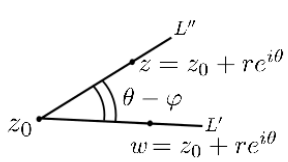
Repetindo todas as considerações anteriores para um ponto $w=z_0+re^{i\varphi}$, obteremos a fórmula análoga a (10.1.3):

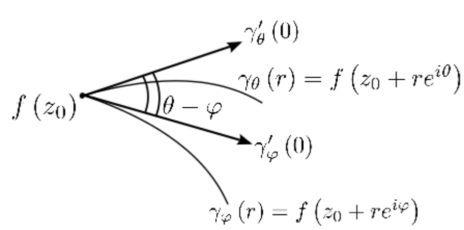
$$\arg\gamma_\varphi'(0)=\alpha+\varphi$$

que junto com (10.1.3) implica

$$\arg\gamma_\theta'(0)-\arg\gamma_\varphi'(0)=\theta-\varphi$$

que tem a seguinte representação geométrica:





As considerações precedentes são intuitivas e têm apenas a finalidade de esclarecer o conteúdo geométrico da Def. 10.1; em outras palavras, não se pretende provar nada, como mostra o fato de trabalharmos alegremente com a função argumento ($\arg \lim = \lim \arg$!) e admitir a existência dos limites $\gamma'_\theta(0)$ e $\gamma'_\varphi(0)$ sem nenhuma hipótese sobre f.

Definição 10.2 Seja Ω um aberto conexo. Uma aplicação $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é dita *conforme* se preserva os ângulos em cada ponto de Ω.

Vamos mostrar que se Ω é um aberto conexo, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $1/f' \in \mathcal{H}(\Omega)$, então f é uma aplicação conforme; isto resultará como consequência do seguinte:

Teorema 10.3 *Sejam Ω um aberto conexo, $z_0 \in \Omega$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função $\mathbb{R}$-diferenciável em z_0* (i.e. existe $df(x_0)$). *Então as condições seguintes são equivalentes:*
(i) $f'(z_0)$ *existe e é diferente de* 0.

(ii) $df(z_0) \neq 0$ *e f preserva os ângulos em z_0.*

Prova (i) $\Longrightarrow$ (ii): Como $f'(z_0)$ existe, $df(z_0)$ é a aplicação $\lambda \longmapsto f'(z_0)\lambda$ que é diferente de 0 pois $f'(z_0) \neq 0$. Por outro lado f preserva os ângulos em z_0 pois se $z = z_0 + re^{i\theta}$ temos (lembrar que V é contínua)

$$\lim_{r\downarrow 0} e^{-i\theta} V\left[f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)\right] = \lim_{z \to z_0} V\left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right] = V\left[f'(z_0)\right]$$

que existe e independe de θ
(ii) $\Longrightarrow$ (i): Sejam $z_0 = (x_0, y_0)$ e $z = (x, y) = z_0 + re^{i\theta}$, então

$$df(z_0) = D_1 f(z_0) dx(z_0) + D_2 f(z_0) dy(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\partial z(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) d\overline{z}(z_0)\ . \tag{10.3.1}$$

Como f é $\mathbb{R}$-diferenciável em z_0, existe $D_\varepsilon(z_0) \subset \Omega$ e $\varphi : D_\varepsilon(z_0) \to \mathbb{C}$ contínua em z_0 tal que $\varphi(z_0) = 0$ de modo que
$f(x, y) - f(x_0, y_0) = df(z_0).(x - x_0, y - y_0) + |z - z_0|\,\varphi(z) \quad \forall\ z \in D_\varepsilon(z_0)$

e então se $\alpha := \dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ e $\beta := \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)$, resulta $df(z_0) = \alpha dz(z_0) +$ $+ \beta d\overline{z}(z_0)$ donde $df(z_0)(z - z_0) = \alpha(z - z_0) + \beta\overline{(z - z_0)}$ e portanto

$f(z) - f(z_0) = \alpha(z - z_0) + \beta\overline{(z - z_0)} + |z - z_0|\,\varphi(z) \quad \forall\ z \in D_\varepsilon(z_0)$
donde

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \alpha + \beta\frac{\overline{z-z_0}}{z-z_0} + (V\,[z-z_0])^{-1}\varphi(z) \quad \forall \;\; z \in D^*_\varepsilon(z_0)$$

o que implica

$$(10.3.2) \qquad \left| \begin{array}{l} V\left[\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right] = \dfrac{\alpha+\beta e^{-2i\theta}+(V\,[z-z_0])^{-1}\varphi(z)}{|\alpha+\beta e^{-2i\theta}+(V\,[z-z_0])^{-1}\varphi(z)|} \\ \forall \;\; z \in D^*_\varepsilon(z_0). \end{array} \right.$$

Por hipótese, existe e independe de θ o limite para $r \downarrow 0$ do 1º membro de (10.3.2). Se excluimos os valores de $\theta \in [0, 2\pi]$ tais que $\alpha + \beta e^{-2i\theta} = 0$ (existem dois no máximo pois $\theta \in [0, 2\pi[\longmapsto e^{-2i\theta} \in \mathbb{C}$ é o círculo unitário percorrido em sentido negativo duas vezes), então, como $\varphi(z) \to \varphi(z_0) = 0$ para $r \downarrow 0$, de (10.3.2) resulta:

$$(10.3.3) \qquad \left| \begin{array}{l} \lim\limits_{r\downarrow 0} V\left[\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right] = \lim\limits_{r\downarrow 0} e^{-i\theta}V\left[f(z_0+re^{i\theta})-f(z_0)\right] = \\ = \dfrac{\alpha+\beta e^{-2i\theta}}{|\alpha+\beta e^{-2i\theta}|}. \end{array} \right.$$

O último membro de (10.3.3) é independente de θ, o que só pode acontecer se $\beta = \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$ (verificação trivial direta) e então por (10.3.1) resulta $df(z_0) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0)dz(z_0)$, o que mostra que $df(z_0)$ é $\mathbb{C}$-linear, donde (ver exerc. 2.16 (ii)$\Longrightarrow$(i) e exerc. 2.4) $f'(z_0) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0) \neq 0$ pois $df(z_0) \neq 0$.$\square$

Corolário 10.4 *Sejam Ω um aberto conexo e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f'(z) \neq 0$ para cada $z \in \Omega$. Então f é uma aplicação conforme.* $\square$

Observações: Sejam Ω um aberto conexo, $z_0 \in \Omega$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função, então

[1] Se $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $f'(z_0) = 0$ então f não preserva ângulos em z_0 [exercício]

[2] $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ pode ser $\mathbb{R}$-diferenciável em z_0 com $df(z_0) = 0$ e preservar ângulos em z_0 como mostra o exemplo seguinte:

$f(z) = z\,|z|$ que preserva ângulos em $z_0 = 0$ pois

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = |z| \implies V\left[\frac{f(z)-f(0)}{z-0}\right] = 1 \longrightarrow 1$$

que é independente de θ.

Transformações lineares fracionárias

Se a, b, c, e d são números complexos tais que $\Delta := ad - bc \neq 0$, a aplicação

$$\Phi : z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

é chamada *transformação linear fracionária* (TLF). É conveniente considerar Φ como uma aplicação de S^2 em S^2, com as convenções óbvias em relação a ∞, isto é,

$$\Phi(-d/c) = \infty \qquad \text{e} \qquad \Phi(\infty) = a/c \qquad \text{se} \quad c \neq 0$$

Se $c = 0$, a condição $\Delta \neq 0$ implica $ad \neq 0$ e então $\Phi(z) = a'z + b'$ com $a' := ad^{-1}$ e $b' := bd^{-1}$. No caso geral $c \neq 0$, é claro que $\Phi \in \mathcal{M}(S^2)$, Φ tem uma singularidade removível no ∞ e um polo (de ordem 1) em $-d/c$. Observemos ainda que

$$\Phi'(z) = \frac{ad - bc}{(cz+d)^2} \neq 0$$

para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$, logo, pelo Corol. 10.4,

$$\Phi \mid \mathbb{C}\setminus\{-d/c\} : z \in \mathbb{C}\setminus\{-d/c\} \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{C}\setminus\{a/c\}$$

é uma aplicação conforme e um isomorfismo analítico do 1º aberto sobre o 2º (ver Corol. 6.7, a condição $\Delta \neq 0$ implica trivialmente que Φ é injetora). É imediato então verificar que Φ é um homeomorfismo de S^2 sobre S^2. De fato, como Φ^{-1} também é uma TLF (ver Exerc.10.1) basta verificar a continuidade de Φ. No ponto ∞ isto segue facilmente da definição de vizinhança do infinito e no ponto $-d/c$ resulta da expressão $((*))$ de Φ (poucas linhas antes da Prop. 10.5).

Vamos mostrar que

$$\Phi : z \in S^2 \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \in S^2, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

é uma composta de aplicações do tipo seguinte:

$T_\alpha : z \longmapsto z + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$ (translação), $R_\beta : z \longmapsto \beta z$, $|\beta| = 1$ (rotação)

$H_r : z \longmapsto rz$, $r > 0$ (homotetia), $I : z \longmapsto 1/z$ (inversão)

De fato, isto é claro se $c = 0$ pois para $a' = a/d$ e $b' = b/d$ temos $\Phi(z) = a'z + b' = T_{b'}(H_{|a'|}(R_{V[a']}(z)))$ pois de $a' = |a'|\, V[a']$ resulta que $z \longmapsto a'z$ e a composta

$$z \overset{R_{V[a']}}{\longmapsto} V[a']\, z \overset{H_{|a'|}}{\longmapsto} |a'|\, V[a']\, z = a'z$$

Se $c \neq 0$, a asserção acima resulta da identidade

$$((*)) \qquad \Phi(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{(bc-ad)c^{-1}}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{c^{-1}\Delta}{cz+d}$$

Aplicações do tipo T_α, R_β e H_r transformam retas em retas e círculos em círculos, o que não é verdade para I para a qual vale o resultado seguinte:

Proposição 10.5 *Se $\mathcal{F}$ é o conjunto de todas as retas e círculos do plano, então $I(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$. Em consequência $\Phi(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.*

Prova Comecemos por observar que basta provar

(10.5.1) $$I(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$$
já que desta inclusão e de $I^2 = id$, resulta
$$\mathcal{F} = I(I(\mathcal{F})) \subset I(\mathcal{F}).$$
Um elemento arbitrário $\ell \in \mathcal{F}$ é representado analiticamente por uma equação do tipo

(10.5.2) $$\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0 \ ; \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{R}; \beta \in \mathbb{C}; \ \beta\overline{\beta} \geq \alpha\gamma$$

Se $\alpha \neq 0$, (10.5.2) define um círculo e se $\alpha = 0$ então (10.5.2) define uma reta. A imagem $I(\ell)$ de ℓ por I tem por equação a expressão que se obtém substituindo z por $1/z$ em (10.5.2), isto é
$$\alpha + \beta\overline{z} + \overline{\beta}z + \gamma z\overline{z} = 0$$
que é uma equação do mesmo tipo que (10.5.2) verificando as mesmas condições, logo $I(\ell) \in \mathcal{F}$. $\square$

Proposição 10.6 ($1^{\underline{0}}$) *Se $\{a, b, c\}$ é um conjunto ordenado de três elementos de S^2, então existe uma única transformação linear fracionária φ que transforma o conjunto ordenado $\{a, b, c\}$ no conjunto ordenado $\{0, 1, \infty\}$.* (i.e. $\varphi(a) = 0, \varphi(b) = 1$ e $\varphi(c) = \infty$)
($2^{\underline{o}}$) *Se $\{a, b, c\}$ e $\{a', b', c'\}$ são dois conjuntos ordenados de três elementos de S^2, então existe uma única transformação linear fracionária ψ que transforma o conjunto ordenado $\{a, b, c\}$ no conjunto ordenado $\{a', b', c'\}$* (i.e. $\psi(a) = a'$, $\psi(b) = b'$ e $\psi(c) = c'$).
Dizer que $\{a, b, c\}$ é um conjunto ordenado implica que a, b e c são dois a dois diferentes e a ordem $\leq$ pode ser definida, por exemplo, por $a \leq b \leq c$ (ou $c \leq b \leq a$ ou ... etc.)

Prova ($1^{\underline{0}}$) **Caso 1:** $a, b, c \in \mathbb{C}$. Como $\varphi(a) = 0$ devemos ter $z - a$ no numerador, como $\varphi(c) = \infty$ devemos ter $z - c$ no denominador, logo φ será da forma
$$\varphi(z) = k\frac{z-a}{z-c} \quad , \quad k \in \mathbb{C}$$
e de $\varphi(b) = 1 = k\dfrac{b-a}{b-c}$ segue $k = \dfrac{b-c}{b-a}$, donde
$$\varphi(z) = \frac{(b-c)(z-a)}{(b-a)(z-c)}$$
o que prova a existência e unicidade de φ.

Caso 2: $a = \infty$ (e portanto $b, c \in \mathbb{C}$). Como $\varphi(c) = \infty$ devemos ter $z - c$ no denominador, como $\varphi(\infty) = 0$, o numerador independe de z, logo φ é da forma

$$\varphi(z) = \frac{k}{z-c} \quad , \text{ com } k \in \mathbb{C}$$

e de $\varphi(b) = 1$ resulta $k = b - c$, donde $\varphi(z) = \dfrac{b-c}{z-c}$

Os casos 3 e 4 abaixo são análogos ao Caso 2:

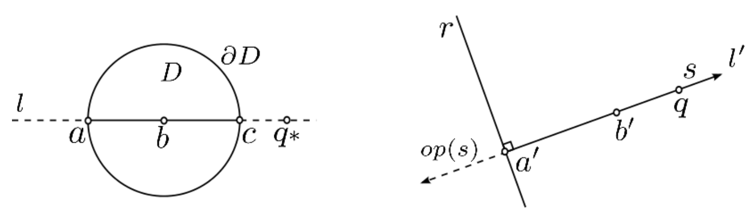
Caso 3: $b = \infty$ (e portanto $a, c \in \mathbb{C}$)

Caso 4: $c = \infty$ (e portanto $a, b \in \mathbb{C}$)

($2^{\underline{o}}$) Por ($1^{\underline{o}}$) existe uma transformação linear fracionária φ_1(resp. φ_2) que transforma $\{a, b, c\}$ em $\{0, 1, \infty\}$ (resp. $\{a', b', c'\}$ em $\{0, 1, \infty\}$, então basta tomar $\psi := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$. $\square$

Corolário 10.7 ($1^{\underline{o}}$) *Se ℓ_1 e ℓ_2 são elementos arbitrários de $\mathcal{F}$, então existe uma transformação linear fracionária ψ tal que $\psi(\ell_1) = \ell_2$.*
($2^{\underline{o}}$) *Cada disco aberto de $\mathbb{C}$ pode ser aplicado conformemente sobre um semiplano aberto por uma tranformação linear fracionária.*

Prova ($1^{\underline{o}}$) Seja $\{a, b, c\}$ (resp. $\{a', b', c'\}$) um conjunto ordenado de três elementos de ℓ_1 (resp. ℓ_2), então pela Prop. 10.6 ($2^{\underline{o}}$) existe uma transformação linear fracionária ψ que transforma $\{a, b, c\}$ em $\{a', b', c'\}$ e, pela Prop. 10.5, é claro que $\psi(\ell_1) = \ell_2$
($2^{\underline{o}}$) Fixemos um disco aberto D de $\mathbb{C}$, sejam a e c dois pontos de ∂D diametralmente opostos e $b = \dfrac{1}{2}(a + c)$ o centro de D.



Sejam agora $a', b' \in \mathbb{C}$ tais que $a' \neq b'$ e consideremos a transformação linear fracionária φ que transforma $\{a, b, c\}$ em $\{a', b', \infty\}$. Seja s a semireta aberta de origem a' que contém b', seja r a reta ortogonal a s passando por a' e seja Π o semi-plano aberto de bordo r que contém s. Vamos mostrar que $\varphi(D) = \Pi$.

Asserção 1: $\varphi(]a, c[) = s$

Seja ℓ (resp. ℓ') a reta que contém a, b e c (resp. a'e b') então, pela definição de φ e pela Prop. 10.5 é claro que $\varphi(\ell) = \ell'$. Dado $p \in]a, c[$ arbitrário, temos $\varphi(p) \in \ell'$ portanto $\varphi(p) \in s$ ou $\varphi(p) \in op(s)$ [$\varphi(p) \neq a'$ pois $\varphi(a) = a'$ e $p \neq a$]. Seja θ (resp. θ') o ângulo formado pelos vetores $p - a$ e $b - a$ (resp. $\varphi(p) - a'$ e $b' - a'$). Como φ preserva os ângulos em a [pois

$a, a' \in \mathbb{C}$ e $\varphi(a) = a'$ portanto φ é analítica numa vizinhança de a; φ só tem um polo no ponto c pois $\varphi(c) = \infty$], resulta $\theta = \theta' = 0$ e portanto $\varphi(p) \in s$ [já que se $\varphi(p) \in op(s)$, então $\theta' = \pi$] o que mostra que $\varphi(]a, c[) \subset s$. Para mostrar a inclusão inversa vamos supor por absurdo que

$$\text{(10.7.1)} \qquad \exists\, q \in s \text{ tal que } q \notin \varphi(]a, c[)$$

então, pela continuidade de $\varphi|]a, c[$ e a conexidade de $]a, c[$ resulta que $\varphi(]a, c[)$ é conexo. Em consequência $\varphi(]a, c[)$ está contido em uma das duas compotes conexas de $s \backslash \{q\}$, em outras palavras indicando com s' a semireta aberta de origem q contida em s,temos

$$\text{(10.7.2)} \qquad \text{ou} \quad \varphi(]a, c[) \subset]a', q[\quad \text{ou} \quad \varphi(]a, c[) \subset s'$$

A relação $\varphi'(a) = a'$ e a continuidade de φ em a mostram que se $p \in]a, c[$ e $p \to a$ então $\varphi(p) \to a'$, donde resulta que é falsa a segunda inclusão de (10.7.2) (pois dela resultaria $|\varphi(p) - a'| \geq |q - a'| > 0$ o que está em contradição com $\varphi(p) \to a'$). Mostremos que a primeira inclusão de (10.7.2) também leva a uma contradição. De fato, se $p \in]a, c[$ e $p \to c$, a continuidade de φ em c (lembrar que $\varphi : S^2 \to S^2$ é um homeomorfismo) implica que $\varphi(p) \to \infty$, isto é $|\varphi(p)|$ é arbitrariamente grande desde que se tome $p \in]a, c[$ suficientemente próximo de c. Então, se a primeira inclusão de (10.7.2) fosse verdadeira teríamos

$$|q - a'| \geq |\varphi(p) - a'| \geq |\varphi(p)| - |a'| \qquad \forall \;\; p \in]a, c[$$

donde

$$|\varphi(p)| \leq |a'| + |q - a'| \qquad \forall \;\; p \in]a, c[$$

o que está em contradição em a relação $\lim\limits_{\substack{p \to c \\ p \in]a, c[}} |\varphi(p)| = +\infty$

Provamos assim que (10.7.2) é falsa e como (10.7.1) $\Longrightarrow$ (10.7.2), resulta que (10.7.1) é falsa, o que prova a Asserção 1.

Asserção 2: $\qquad \varphi(\partial D) = r$

Pela Prop. 10.5, $\varphi(\partial D)$ é uma reta ou um círculo e de $c \in \partial D$ resulta $\varphi(c) = \infty \in \varphi(\partial D)$, o que mostra que $\varphi(\partial D)$ não é um círculo, logo $\varphi(\partial D)$ é uma reta passando por $a' = \varphi(a)$ (pois $a \in \partial D$). Por outro lado, $]a, c[$ e ∂D têm tangentes ortogonais no ponto a, logo se transformam por φ em curvas com tangentes ortogonais em $a' = \varphi(a)$ e como $\varphi(]a, c[) = s$ e $\varphi(\partial D)$ =reta, resulta que ambas são ortogonais em a', isto é, $\varphi(\partial D) = r$, o que prova a Asserção 2. $S^2 \backslash \partial D$ tem duas componentes conexas que são D em $S^2 \backslash \overline{D}$ e como φ é um homeomorfismo de S^2 sobre S^2, resulta que $\varphi(D)$ e $\varphi(S^2 \backslash \overline{D})$ são abertos conexos de S^2. Além disto, a reunião disjunta

$$S^2 = D \cup \partial D \cup (S^2 \backslash D)$$

se tranforma por φ na reunião disjunta

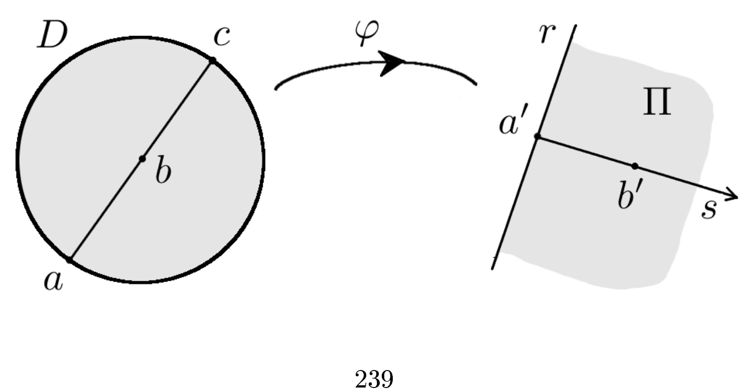
$$\varphi(S^2) = S^2 = \varphi(D) \cup \varphi(\partial D) \cup \varphi(S^2 \backslash \overline{D}) = \varphi(D) \cup r \cup \varphi(S^2 \backslash \overline{D})$$

o que mostra que $\varphi(D)$ e $\varphi(S^2 \backslash \overline{D})$ são as duas componentes conexas do aberto $S^2 \backslash r$. Como $c \in \partial D$ e $\varphi(c) = \infty \in r$, resulta $\varphi(D) \cup \varphi(S^2 \backslash D) \subset \mathbb{C}$, isto é, $\varphi(D)$ e $\varphi(S^2 \backslash \overline{D})$ são os dois semiplanos em que r divide $\mathbb{C}$ e, sendo $b \in D$ e $\varphi(b) = b' \in \Pi$, obtemos $\varphi(D) = \Pi$. $\square$

Observação Não é difícil determinar a fórmula explicita da TLF φ da prova acima. Como $\varphi(c) = \infty$, devemos ter $z - c$ no denominador. Então escrevendo $\varphi(z) = (Az + B)(z - c)^{-1}$ e usando as condições $\varphi(a) = a'$ e $\varphi(b) = b'$, resulta $Aa + B = a'(a - c)$ e $Ab + B = b'(b - c)$, donde seguem os valores de A e B em função de a, b e c e portanto a expressão de φ :

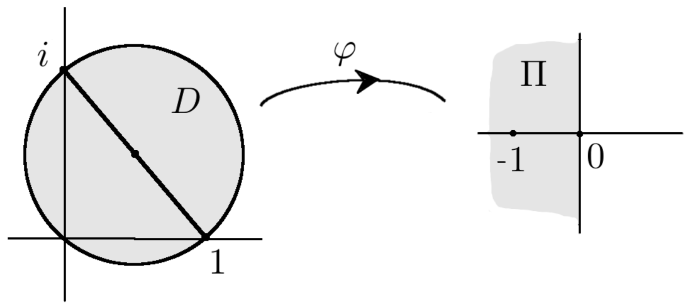
$$\varphi\ (z) = \frac{[a'(a-c) - b'(b-c)]\, z + ab'(b-c) - a'b(a-c)}{(a-b)(z-c)}.$$

Escolio Da prova do Corolário 10.7 (2º) resulta o seguinte fato que é bastante útil na hora de resolver exercícios:
Sejam $a, b, c, a', b' \in \mathbb{C}$ tais que $a \neq c, a' \neq b'$,
$b := \frac{1}{2}(a + c) =$ ponto médio de $[a, c]$
$D := D_{|a-b|}(b)$
$s :=$ semi reta aberta de origem a' que contém b'
$r :=$ reta ortogonal a s passando por a'
$\Pi :=$ semiplano aberto de bordo r que contém s
$\varphi :=$ transformação linear fracionária que leva $\{a, b, c\}$ em $\{a', b', \infty\}$
(a expressão de φ está na Observação anterior)
Então valem as asserções seguintes :
(1º) $\varphi(]a, c[) = s$
(2º) $\varphi(\partial D) = r$
(3º) $\varphi(D) = \Pi$
(4º) $\varphi(\mathbb{C} \cap \complement\bar{D}) = \mathbb{C} \cap \complement(\bar{\Pi}\{p\}$ onde $p := \varphi(\infty)$
(como $\mathbb{C} \cap \complement\bar{D}$ não é simplesmente conexo é claro que sua imagem por φ, que é um isomorfismo analítico não é simplesmente conexo)



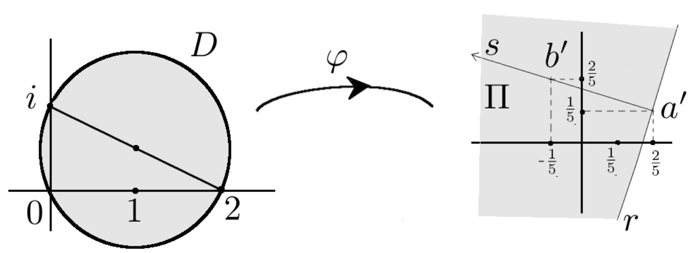
Exemplos (1) Consideremos a TLF φ definida por $\varphi(z) := \frac{z-1}{z-i}$. Como $\varphi(1) = 0$, $\varphi(i) = \infty$, e $\varphi(\frac{1}{2}(1+i)) = -1$, resulta que φ leva $\{1, \frac{1}{2}(1+i), i\}$ em $\{0, -1, \infty\}$ e então por ($3^{\underline{o}}$) concluimos que

$$\varphi\left(D_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{1}{2}(1+i)\right)\right) = \{z \in \mathbb{C} | Re(z) < 0\}$$



(2) Seja φ uma TLF tal que $\varphi(2) = a' := \frac{2}{5} + \frac{i}{5}$, $\varphi(i) = \infty$ e $\varphi(\frac{1}{2}(2+i)) = b' := -\frac{1}{5} + \frac{2i}{5}$. Então φ leva $\{2, \frac{1}{2}(2+i), i\}$ em $\{a', b', \infty\}$ e então, por ($3^{\underline{o}}$) resulta

$$\varphi\left(D_{\frac{\sqrt{5}}{2}}\left(\frac{1}{2}(2+i)\right)\right) = \Pi \quad \text{(ver figura)}$$



A seguir vamos combinar um lema clássico de Schwarz com o princípio do máximo para obter a expressão geral de um isomorfismo analítico de $D_1(0)$ sobre $D_1(0)$ que, como veremos, são transformações lineares fracionárias.

Teorema 10.8 (lema de Schwarz) *Seja* $f \in \mathcal{H}(D_1(0))$ *tal que* $\|f\|_{D_1(0)} \leq 1$ *e* $f(0) = 0$. *Então, temos as seguintes desigualdades*:

(10.8.1) $\qquad |f(z)| \leq |z| \quad \forall \ z \in D_1(0)$

(10.8.2) $\qquad |f'(0)| \leq 1$

Alem disto, se existe $z_0 \in D_1^*(0)$ *tal que vale a igualdade em (*10.8.1) *ou se* *se verifica a igualdade em* (10.8.2) *então existe* $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ *tal que* $f(z) = \lambda z$ *para todo* $z \in D_1(0)$.

Em linguagem geométrica, a hipótese diz que f é uma aplicação holomorfa de $D_1(0)$ em $D_1(0)$ que deixa a origem fixa; parte da conclusão diz que ou f é uma rotação ou f transforma cada $z \in D_1^*(0)$ num ponto $f(z)$ tão ou mais próximo da origem que z.

Prova do Teor. 10.8 Se f =cte, de $f(0) = 0$ decorre $f = 0$ e neste caso (10.8.1) e (10.8.2) são triviais e são o único que há para provar [pois a igualdade em (10.8.1) não se verifica para nenhum $z \in D_1^*(0)$]. Podemos então supor $f \neq$ cte e então 0 é um zero isolado de f e portanto a função

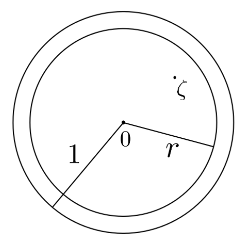
$$g : z \in D_1^*(0) \longmapsto \frac{f(z)}{z} \in \mathbb{C}$$

tem uma singularidade removível no 0, donde

$$g \in \mathcal{H}(D_1(0)).$$

Mostremos que

$$|z| < 1 \implies |f(z)| < 1, \tag{10.8.3}$$



e isto é evidente se $\|f\|_{D_1(0)} < 1$. Vamos assumir que $\|f\|_{D_1(0)} = 1$ e suponhamos por absurdo que existe ζ tal que $|\zeta| < 1$ e $|f(\zeta)| = 1$. Seja então r tal que $|\zeta| < r < 1$ e apliquemos o princípio do módulo máximo em $\overline{D}_r(0) \subset D_1(0)$, resulta que $|f|$ atinge seu máximo num ponto interior $\zeta \in D_r(0)$, o que implica que f constante em $D_r(0)$ e portanto em $D_1(0)$ o que é absurdo (seja porque supusemos $f \neq$ cte ou porque $f =$ cte implica $0 = |f(0)| = |f(\zeta)| = 1$).

A relação (10.8.3) que acabamos de provar, implica:

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} < \frac{1}{r}, \qquad \text{se} \quad |z| = r < 1 \tag{10.8.4}$$

e aplicando o princípio de máximo a g e ao disco $\overline{D}_r(0)$ resulta que (10.8.4) vale para cada $|z| \leq r$, isto é

$$\frac{|f(z)|}{|z|} < \frac{1}{r} \ \text{ se } \ |z| \leq r < 1 \tag{10.8.5}$$

Fixemos $\zeta \in D_1^*(0)$ arbitrário, então (10.8.5) implica

$$|f(\zeta)| < \frac{|\zeta|}{r} \quad \text{sempre que } r \in [|\zeta|\,, 1[$$

e em consequência

$$|f(\zeta)| \leq \inf_{r \in [|\zeta|, 1[} \frac{|\zeta|}{r} = |\zeta|\,;$$

o que demonstra (10.8.1).Por outro lado, de

$$f(z) = zg(z) \qquad \forall \ \ z \in D_1(0)$$

resulta $f'(0) = g(0)$ e como por (10.8.1) temos $|g(z)| \leq 1$ para cada $z \in D_1(0)$, resulta $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$, o que prova (10.8.2).Suponhamos que existe $z_0 \in D_1^*(0)$ tal que $|f(z_0)| = |z_0|$ então $|g(z_0)| = 1$ e de novo pelo princípio de máximo resulta $g = \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$, isto é, $f(z) = \lambda z$, $|\lambda| = 1$ para cada $z \in D_1(0)$. Finalmente, se $|f'(0)| = 1$, de $f'(0) = g(0)$ resulta $|g(0)| = 1$ e então de novo pelo princípo de máximo (e de $\|g\|_{D_1(0)} \leq 1$ por (10.8.1) resulta $g = \lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ outra vez. □

Definição 10.9 Para cada $\alpha \in D_1(0)$, seja

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z} \ .$$

Nos resultdos seguintes usamos as notações

$$U := D_1(0) \qquad \text{e} \qquad T := \partial D_1(0) \ .$$

Proposição 10.10 *Para cada $\alpha \in U$ fixado, valem as seguintes asserções:*

(a) φ_α *é uma aplicação bijetora de T sobre T.*
(b) φ_α *é uma aplicação bijetora de U sobre U.*
(c) $\varphi_\alpha^{-1} = \varphi_{-\alpha}$.
(d) *Temos as identidades seguintes:*

$$\text{(10.10.1)} \qquad \varphi_\alpha'(0) = 1 - |\alpha|^2 \qquad ; \qquad \varphi_\alpha'(\alpha) = \frac{1}{1 - |\alpha|^2} \ .$$

Prova φ_α é holomorfa no plano todo salvo no ponto

$$1/\overline{\alpha} \notin \overline{U}$$

onde tem um polo. Por cálculo direto verificamos que

$$\varphi_{-\alpha}(\varphi_\alpha(z)) = z \qquad \forall \ \ z \neq 1/\overline{\alpha},$$

em consequência

$$\varphi_\alpha : \mathbb{C} \setminus \{1/\overline{\alpha}\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{-1/\overline{\alpha}\} \quad \text{e} \quad \varphi_{-\alpha} : \mathbb{C} \setminus \{-1/\overline{\alpha}\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{1/\overline{\alpha}\}$$

são aplicações inversas uma da outra, o que prova (c).
Um elemento arbitrário de T é da forma e^{it} com $t \in \mathbb{R}$, seja então $z = e^{it} - \alpha$, então

$$\left|\varphi_\alpha(e^{it})\right| = \frac{e^{it} - \alpha}{1 - \overline{\alpha} e^{it}} = \left| \frac{e^{it} - \alpha}{e^{-it} - \overline{\alpha}} \right| = \frac{|z|}{|\overline{z}|} = 1$$

o que prova que $\varphi_\alpha(T) \subset T$ e, pelo mesmo argumento $\varphi_{-\alpha}(T) \subset T$ donde por (c) resulta $\varphi_\alpha(T) = T$. Resulta então pelo princípio de máximo que $\varphi_\alpha(U) = U$, o que prova (a) e (b). Derivando φ_α obtemos

$$\varphi_\alpha'(z) = \frac{1 - |\alpha|^2}{(1 - \overline{\alpha} z)^2}$$

donde resultam as identidades (10.10.1). □

O resultado seguinte resolve um problema de extremos.

Teroema 10.11 *Sejam* $\alpha, \beta \in U$ *e* $f \in \mathcal{H}(U)$ *tal que* $\|f\|_U \leq 1$ *e* $f(\alpha) = \beta$. *então temos*

$$\|f'(\alpha)\| = \frac{1 - |\beta|^2}{1 - |\alpha|^2} \tag{10.11.1}$$

e a igualdade acontece em (10.11.1) *se e só se existe* $\lambda \in \mathbb{C}$, *com* $|\lambda| = 1$ *tal que* $f(z) = \varphi_{-\beta}(\lambda \varphi_\alpha(z))$ *para cada* $z \in U$.

Prova Consideremos a função $g = \varphi_\beta \circ f \circ \varphi_{-\alpha}$, então como φ_β e $\varphi_{-\alpha}$ transformam U em U (e $f \neq 1$ pois $|f(\alpha)| = |\beta| < 1$, é claro que $g \in \mathcal{H}(U)$, $\|g\|_U \leq 1$ e $g(0) = 0$. Podemos então aplicar o lema de Schwarz à função g, obtendo (por (10.8.2)) $|g'(0)| \leq 1$. Pela regra de cadeia resulta
$g'(0) = \varphi'_\beta\left[f(\varphi_{-\alpha}(0))\right] f'\left[\varphi_{-\alpha}(0)\right] \varphi'_{-\alpha}(0)$, isto é

$$g'(0) = \varphi'_\beta(\beta) f'(\alpha) \varphi'_{-\alpha}(0) \tag{10.11.2}$$

e então as identidades (10.10.1) implicam

$$|f'(\alpha)| = \frac{|g'(0)|}{\varphi'_\beta(\beta)\varphi'_{-\alpha}(0)} \leq \frac{1 - |\beta|^2}{1 - |\alpha|^2} \tag{10.11.3}$$

o que prova (10.11.1). A igualdade em (10.11.3) acontece se e só se $|g'(0)| = 1$, o que *equivale* (pelo lema de Schwarz) a dizer que g é uma rotação, isto é $g(z) = \lambda z$ com $|\lambda| = 1$, o que pela definição de g equivale a $f = \varphi_{-\beta} \circ g \circ \varphi_\alpha$, ou seja $f(z) = \varphi_{-\beta}(\lambda \varphi_\alpha(z))$ para cada $z \in U$. $\square$

Teorema 10.12 *Se* f *é um isomorfismo analítico de* U *sobre* U, *então existe* $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ *tal que*

$$f(z) = \lambda \varphi_\alpha(z) \quad \forall \quad z \in U$$

onde $\alpha \in U$ *e* $f(\alpha) = 0$.

Prova Seja $g := f^{-1}$ então $g(0) = \alpha$ e pela regra da cadeia, derivando no ponto α a identidade $z = g(f(z))$ obtemos:

$$g'(0) f'(\alpha) = 1.$$

Aplicando o Teor. 10.11 às funções f e g e aos pontos 0 e α obtemos as desigualdades:

$$|f'(\alpha)| \leq \frac{1}{1 - |\alpha|^2} \qquad , \qquad |g'(0)| \leq 1 - |\alpha|^2 \tag{10.12.2}$$

e multiplicando estas desigualdades membro a membro e levando em consideração (10.12.1), resulta que em (10.12.2) valem as igualdades, em particular:

$$|f'(\alpha)| = \frac{1}{1-|\alpha|^2}$$

o que, pela última parte do Teor. 10.11 aplicado com $\beta = 0$, significa (obsevar que $\varphi_0 = id$) que existe $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ tal que $f(z) = \lambda\varphi_\alpha(z)$ para cada $z \in U$. $\square$

Famílias Normais

O teorema da aplicação de Riemann será demonstrado exibindo o isomorfismo analítico (entre Ω = aberto simplesmente conexo e $U = D_1(0)$) como a solução de um certo problema de extremo que por sua vez depende da utilização de certas propriedades de compacidade de conjuntos de funções analíticas.

Definição 10.13 Sejam Ω um aberto conexo de $\mathbb{C}$ e $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$. Diz-se que $\mathcal{F}$ é uma *família normal* se cada sequência de elementos de $\mathcal{F}$ possui uma subsequência que converge uniformemente sobre as partes compactas de Ω. (a função limite (pertence a $\mathcal{H}(\Omega)$ pelo Teor. 5.19) não tem porque pertencer a $\mathcal{F}$).

Para compreender o significado da Def. 10.13 devemos situa-la no seu contexto adequado que é a teoria dos espaços localmente convexos (ELC). Se Ω é um aberto de $\mathbb{C}$, a topologia mais natural sobre $\mathcal{H}(\Omega)$ é definida pela família de seminormas

$$\|.\|_K : f \in \mathcal{H}(\Omega) \longmapsto \|f\|_K \in \mathbb{R}_+$$

quando K percorre a coleção de todas as partes compactas de Ω. Esta topologia (localmente convexa) é chamada topologia da convergência uniforme sobre as partes compactas de Ω e é indicada por τ_0. Como Ω pode ser escrito como reunião de uma família enumerável crescente de compactos (ver Lema 10.17)

$$\Omega = \bigcup_{m\geq 1} K_m \ ,$$

resulta que a topologia τ_0 pode ser definida pela família enumerável $(\|.\|_{K_m})_{m\geq 1}$ de seminormas, o que implica que o ELC $(\mathcal{H}(\Omega);\tau_0)$ é metrizável. Por outro lado, dizer que uma sequência (f_m) em $\mathcal{H}(\Omega)$ converge uniformemente sobre as partes compactas de Ω para f ($\in \mathcal{H}(\Omega)$ pelo Teor. 5.19), significa precisamente que

$$f_m \xrightarrow{\tau_0} f$$

e então, dizer que uma família $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ é normal significa:

$(*)$ toda sequência em $\mathcal{F}$ possui uma subsequência que é τ_0-convergente.

Ora, como $(\mathcal{H}(\Omega);\tau_0)$ é metrizável, a propriedade $(*)$ caracteriza as partes relativamente compactas do ELC $(\mathcal{H}(\Omega);\tau_0)$. Em resumo, a Def. 10.13 caracteriza as partes relativamente compactas de $(\mathcal{H}(\Omega);\tau_0)$ sem mencionar τ_0, graças à substituição do conceito topológico: $f_m \xrightarrow{\tau_0} f$, pela Def. 5.18 . Dizer que uma parte $\mathcal{F} \subset (\mathcal{H}(\Omega);\tau_0)$ é limitada equivale (por definição de limitado num ELC) a dizer que para cada compacto $K \subset \Omega$ existe $M(K) > 0$ tal que

$$\|f\|_K \leq M(K) \qquad \forall \quad f \in \mathcal{F}$$

ou seja,

$\sup\{\|f\|_K \ \mid f \in \mathcal{F}\} = \sup\{|f(z)| \ \mid z \in K \text{ e } f \in \mathcal{F}\} < \infty \quad \forall \ K \subset\subset \Omega.$

A definição que segue dá um nome especial às partes limitadas do ELC $(\mathcal{H}(\Omega);\tau_0)$ sem mencionar τ_0 nem a teoria dos ELC .

Definição 10.14 Uma coleção $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ é dita *uniformemente limitada sobre as partes compactas de* Ω se, para cada compacto $K \subset \Omega$ existe $M(K) > 0$ tal que

$$\sup\{|f(z)| \ \mid z \in K \ \text{ e } \ f \in \mathcal{F}\} \leq M(K) \ .$$

O resultado seguinte é um caso particular de um fato trivial da teoria ELC, a saber que todo relativamente compacto de um ELC é limitado:

Proposição 10.15 *Se $\mathcal{F}$ é uma família normal de $\mathcal{H}(\Omega)$, então $\mathcal{F}$ é uniformemente limitada sobre as partes compactas de* Ω [na linguagem dos ELC expressaríamos este resultado assim: todo relativamente compacto de $(\mathcal{H}(\Omega);\tau_0)$ é limitado]

Prova Suponhamos por absurdo que $\mathcal{F}$ é uma família normal e que $\mathcal{F}$ não é uniformemente limitada sobre as partes compactas de Ω. Resulta então que existe um compacto K de Ω tal que

$$\sup\{|f(z)| \ \mid z \in K \ \text{ e } f \in \mathcal{F}\} = +\infty,$$

o que significa que para cada $m \in \mathbb{N}^*$ existe $f_m \in \mathcal{F}$ tal que

(10.15.1) $$\sup\{|f_m(z)| \ \mid z \in K\} \geq m \qquad (\forall \ \ m \in \mathbb{N}^*)$$

Desta forma construímos uma sequência $(f_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ de elementos de $\mathcal{F}$ caracterizada pela desigualdade (10.15.1). Como $\mathcal{F}$ é normal, a sequência (f_m) possui uma subsequência $(f_{m_\nu})_{\nu\geq 1}$ que converge uniformemente sobre as partes compactas de Ω para $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Em consequência, temos

(10.15.2) $$\sup\{|f_{m_\nu}(z) - f(z)| \ \mid z \in K\} \longrightarrow 0 \ \text{ se } \ \nu \to \infty$$

Seja $M := \|f\|_K$. Como para cada $z \in K$ e para cada $\nu \in \mathbb{N}^*$ temos

$$|f_{m_\nu}(z)| \leq |f_{m_\nu}(z) - f(z)| + |f(z)|\,,$$

a relação (10.15.1) acarreta:

$$m_\nu \leq \sup_{z\in K} |f_{m_\nu}(z)| \leq \sup_{z\in K} |f_{m_\nu}(z) - f(z)| + M,$$

o que por (10.15.2) mostra que existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$m_\nu < M + 1 \text{ para cada } \nu \geq p,$$

o que é absurdo pois por definição de subsequência a função $\nu \in \mathbb{N}^* \longmapsto m_\nu \in \mathbb{N}^*$ é estritamente crescente. $\square$

Como já foi dito, a Prop.10.15 é um resultado muito natural quando olhado do ponto de vista dos ELC. Nos ELC (separados) de dimensão finita, que são os $\mathbb{K}^m$, sabemos que vale a equivalência

$((*))$ relativamente compacto $\Longleftrightarrow$ limitado.

Entretanto, nos ELC de *dimensão infinita*, de modo geral $((*))$ é falsa pois *é falsa em geral a implicação:*

$((**))$ relativamente compacto $\Longleftarrow$ limitado.

Deste ponto de vista é surpreendente (e não trivial como veremos) que a implicação $((**))$ é válida no ELC de dimensão infinita $(\mathcal{H}(\Omega); \tau_0)$. Em outras palavras, levando em consideração a Prop. 10.15, no ELC $(\mathcal{H}(\Omega); \tau_0)$ vale a caracterização $((*))$ das partes relativamente compactas, igual que nos espaços $\mathbb{K}^m$; isto é o que diz o seguinte

Teorema 10.16 (Montel) *Para uma parte $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ são equivalentes as condições seguintes:*
(i) *$\mathcal{F}$ é uma família normal* (i.e. $\mathcal{F}$ é uma parte relativamente compacta do ELC $(\mathcal{H}(\Omega); \tau_0)$).
(ii) *$\mathcal{F}$ é uniformemente limitada sobre as partes compactas de* Ω (i.e. $\mathcal{F}$ é limitada no ELC $(\mathcal{H}(\Omega); \tau_0)$).

A implicação (i) $\Longrightarrow$ (ii) é a Prop. 10.15. A implicação (ii) $\Longrightarrow$ (i) é o Lema 10.18 para o qual precisaremos do seguinte:

Lema 10.17 *Seja Ω um aberto não vazio arbitrário de $\mathbb{C}$. Então existe uma sequência $(K_m)_{m \geq 1}$ de compactos tais que:*

(a) $\Omega = \bigcup\limits_{m \geq 1} K_m$; (b) $K_m \subset \mathring{K}_{m+1} \quad \forall \quad m \geq 1$

(c) *Para cada compacto $K \subset \Omega$ existe $\nu \geq 1$ tal que $K \subset K_\nu$*
(d) *Cada componente conexa de $S^2 \backslash K_m$ contém uma componente conexa de $S^2 \backslash \Omega$, para cada $m \geq 1$.*

A condição (d) expressa, numa linguagem mais intuitiva, que os únicos "buracos"de K_m são aqueles que provêm de "buracos"de Ω.

Prova Para cada $m \in \mathbb{N}^*$ seja

$$V_m = D_m(\infty) \cup \bigcup_{a \notin \Omega \cup \{\infty\}} D_{1/m}(a)$$

e definimos $K_m := S^2 \backslash V_m$. A relação $z \in K_m$ equivale a $z \notin V_m$, isto é,

$$|z| \leq m \quad \text{e} \quad dist(z, S^2 \backslash \Omega) \geq 1/m$$

o que prova que

$$(10.17.1) \qquad K_m = \{z \in \Omega \mid \ |z| \leq m \quad \text{e} \quad dist(z, S^2 \backslash \Omega) \geq 1/m\}$$

Como V_m é aberto é claro que K_m é fechado e (10.17.1) mostra que $K_m \subset \overline{D}_m(0)$, logo K_m é limitado, donde K_m é uma parte compacta de Ω, portanto $\Omega \supset \bigcup K_m$. Inversamente, se $z \in \Omega$, existem $p, q \in \mathbb{N}^*$ tais que:

$$|z| \leq p \quad \text{e} \quad dist(z, S^2 \backslash \Omega) > 1/q$$

logo, se $m = \max(p,q)$, como $p \leq m$ e $1/q \geq 1/m$, temos: $|z| \leq m$ e $dist(z, S^2 \backslash \Omega) \geq 1/m$, o que por (10.17.1) mostra que $z \in K_m$, o que prova (a).

Verificação de (b): Se $z \in K_m$ e $r := \dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{m+1}$ então

$$(10.17.2) \qquad D_r(z) \subset K_{m+1}$$

De fato, dado $w \in D_r(z)$ temos $|w| \leq |z| + |w - z| < m + r < m + 1$, donde

$$|w| < m + 1.$$

Por outro lado, se $a \in S^2 \backslash \Omega$, é claro que

$|w - a| \geq |z - a| - |w - z| \geq \dfrac{1}{m} - (\dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{m+1}) = \dfrac{1}{m+1}$ o que acarreta

$$dist(w, S^2 \backslash \Omega) \geq \frac{1}{m+1},$$

o que por (10.17.1) mostra que $w \in K_{m+1}$ e portanto demonstra (10.17.2), isto é, $z \in \overset{\circ}{K}_{m+1}$.

Verificação de (c): Por (b) é claro que $\Omega = \bigcup\limits_{m \geq 1} \overset{\circ}{K}_m$, logo, se K é um compacto arbitrário de Ω, $(\overset{\circ}{K}_m)_{m \geq 1}$ é uma cobertura aberta de K e então existe $\nu \in \mathbb{N}^*$ tal que $K \subset \overset{\circ}{K}_1 \cup \overset{\circ}{K}_2 \cup \ldots \cup \overset{\circ}{K}_\nu$, donde $K \subset K_\nu$.

Verificação de (d): Seja D um dos discos que aparecem na definição de V_m, então se c é o centro de D temos $c \in \mathbb{C} \backslash \Omega \subset S^2 \backslash \Omega$ ou $c = \infty \in S^2 \backslash \Omega$, donde $D \cap (S^2 \backslash \Omega) = \varnothing$. Como todo disco é conexo, se A é uma componente conexa de $V_m = S^2 \backslash K_m$, resulta A contém algum dos discos D, logo

$$(10.17.3) \qquad A \cap (S^2 \backslash \Omega) \neq \varnothing \quad \forall \ A = \text{componente conexa de } V_m.$$

Seja A uma componente conexa de $V_m = S^2 \backslash K_m$, então por (10.17.3) existe $z \in A \cap (S^2 \backslash \Omega)$ e portanto z está contido numa componente conexa B de $S^2 \backslash \Omega$, mostremos que $A \supset B$. Comecemos observando que se c é centro de algum disco $D \subset V_m$ ($D = D_{1/m}(c)$ se $c \notin \Omega \cup \{\infty\}$ e $D = D_m(\infty)$ se $c = \infty$) o que mostra que

$$(10.17.4) \qquad S^2 \backslash \Omega \subset V_m \ .$$

Ora, se $A \not\supseteq B$, existe $b \in B$ tal que $b \notin A$ e portanto b pertence a outra componente conexa A_0 de $V_m = S^2 \backslash K_m$, logo basta verificar que:
"Se B é uma componente conexa de $S^2 \backslash \Omega$ e A, A_0 são duas componentes conexas diferentes de $S^2 \backslash K_m = V_m$ e $A \cap B \neq \varnothing$, então $A_0 \cap B = \varnothing$."
De fato, se $A_0 \cap B \neq \varnothing$, então $A \cup B$ e $A_0 \cup B$ são conexos e como por (10.17.4), B é um conexo de V_m, resulta

$$A \cup B \subset V_m \quad \text{e} \quad A_0 \cup B \subset V_m,$$

donde (por definição de componente conexa) temos:

$$A \cup B = A \qquad \text{e} \quad A_0 \cup B = A_0,$$

e em consequência $\varnothing \neq B \subset A \cap A_0$, o que é absurdo pois sendo $A \neq A_0$ resulta $A \cap A_0 = \varnothing$. $\square$

O resultado seguinte é a prova da implicação (ii) $\Longrightarrow$ (i) do teorema de Montel (Teor. 10.16), e para isto vamos introduzir o conceito de equicontinuidade uniforme, apenas no caso em que vai ser utilizada. Seja X uma parte não vazia de Ω e $\mathcal{F}$ uma parte não vazia de $\mathcal{H}(\Omega)$, dizemos que $\mathcal{F}$ é *uniformemente equicontínua sobre* X se para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$z', z'' \in X \quad \text{e} \quad |z' - z''| < \delta \implies |f(z') - f(z'')| < \varepsilon \quad \forall \quad f \in \mathcal{F}.$$

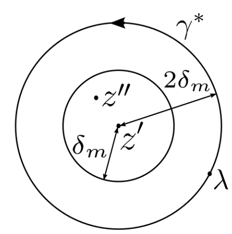
Lema 10.18 *Sejam Ω um aberto conexo de $\mathbb{C}$ e $\mathcal{F}$ uma parte de $\mathcal{H}(\Omega)$ que é uniformemente limitada sobre cada parte compacta de Ω* [isto é, para cada compacto $K \subset \Omega$ existe $M(K) > 0$ tal que $\sup\{|f(z)| \; |z \in K$ e $f \in \mathcal{F}\} \leq \mathcal{M}(K)$]. *Então $\mathcal{F}$ é uma família normal.*

Prova Seja $(K_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ a sequência de compactos construída no Lema 10.17. Comecemos por provar:
Asserção 1: *$\mathcal{F}$ é uniformemente equicontínua sobre K_m para cada $m \in \mathbb{N}^*$.*

Pela condição (b) do Lema 10.17, fixado $m \in \mathbb{N}^*$ arbitrário existe $\delta_m > 0$ tal que

$$D_{2\delta_m}(z) \subset K_{m+1} \quad \forall \quad z \in K_m \; .$$

Dados $z', z'' \in K_m$ tais que $|z' - z''| < \delta_m$ vamos majorar $|f(z') - f(z'')|$ usando a fórmula de Cauchy. Seja γ o círculo orientado positivamente de centro z' e raio $2\delta_m$. A identidade



$$\frac{1}{\lambda - z'} - \frac{1}{\lambda - z''} = \frac{z' - z''}{(\lambda - z')(\lambda - z'')}$$

implica

$$(10.18.1) \quad f(z') - f(z'') = \frac{z' - z''}{2\pi i} \int_\lambda \frac{f(\lambda) d\lambda}{(\lambda - z')(\lambda - z'')}$$

e como $|\lambda - z'| = 2\delta_m$ e $|\lambda - z''| > \delta_m \;\; \forall \;\; \lambda \in \gamma^*$, de

(10.18.1) resulta

$$(10.18.2) \qquad |f(z') - f(z'')| \leq \frac{M(K_{m+1})}{\delta_m} |z' - z''| \quad \forall \quad f \in \mathcal{F} \ ,$$

o que prova a Asserção 1 pois dado $\varepsilon > 0$ arbitrário basta tomar

$$(10.18.3) \qquad \delta = \frac{\varepsilon \delta_m}{\varepsilon + M(K_{m+1})} \ .$$

Seja agora $(f_m)_{m \geq 1}$ uma sequência arbitrária de elementos de $\mathcal{F}$. É claro que existe um subconjunto enumerável E de Ω tal que $K_n \cap E$ é denso em K_n para cada $n \geq 1$. Como E é enumerável, existe uma bijeção

$$i \in \mathbb{N}^* \longmapsto w_i \in E.$$

Fixado $z \in \Omega$ arbitrário, a hipótese de limitação uniforme de $\mathcal{F}$ sobre os compactos de Ω implica que a sequência $(f_m(z))_{m \geq 1}$ é limitada, em particular, para $z = w_1$ resulta que $(f_m(w_1))_{m \geq 1}$ é limitada, portanto existe uma subsequência N_1 de $\mathbb{N}^*$,

$$N_1 = (\alpha_{11} < \alpha_{12} < \ ....),$$

tal que existe $\lim\limits_{i \to \infty} f_{\alpha_{1i}}(w_1) = l_1$. Como $(f_{\alpha_{1i}}(w_2))_{i \geq 1}$ é limitada, existe uma subsequência N_2 de N_1,

$$N_2 = (\alpha_{21} < \alpha_{22} < \ ....),$$

tal que existe $\lim\limits_{i \to \infty} f_{\alpha_{2i}}(w_2) = l_{2.}$ Continuando este processo existirá para cada $m \in \mathbb{N}^*, m \geq 2$, uma subsequência N_m de N_{m-1},

$$N_m := (\alpha_{m1} < \alpha_{m2} < \ ....)$$

tal que existe

$$(10.18.4) \qquad \lim_{i \to \infty} f_{\alpha_{mi}}(w_m) = l_m, \quad \forall \quad m \in \mathbb{N}^*$$

Definimos a "sequência diagonal"$N = (\beta_1, \beta_2, \ ....)$ da forma seguinte: $\beta_m = \alpha_{mm} \quad \forall \quad m \geq 1$. Vamos verificar que

$$(10.18.5) \qquad \beta_m < \beta_{m+1} \quad \forall \quad m \in \mathbb{N}^*$$

De fato, $\alpha_{m+1,m} =$ m-ésimo termo de $N_{m+1} = (\alpha_{m+1,i})_{i \geq 1}$ e como N_{m+1} é uma subsequência de $N_m = (\alpha_{mi})_{i \geq 1}$, é claro que $\alpha_{m+1,m} \geq \alpha_{mm}$. Ora, como N_{m+1} é estritamente crescente temos $\alpha_{m+1,m+1} > \alpha_{m+1,m}$, donde $\beta_{m+1} = \alpha_{m+1,m+1} > \alpha_{m+1,m} \geq \alpha_{mm} = \beta_m$. Além disto, como $N_1 \supset N_2 \supset \ ... \supset N_m \supset N_{m+1} \supset \ ....$ (aqui há um abuso de notação que consiste em indicar com N_m a *imagem* da sequência N_m, porém isto é irrelevante) é claro que

$$(10.18.6) \qquad \beta_k \in N_m \quad \forall \quad k \geq m, \quad \forall \quad m \geq 1$$

(de fato $\beta_m = \alpha_{mm} \in N_m$, $\beta_{m+1} = \alpha_{m+1,m+1} \in N_{m+1} \subset N_m$, etc.)

Vamos provar agora que

$$(10.18.7) \qquad \forall \quad m \in \mathbb{N}^*, \quad \exists \lim_{j\to\infty} f_{\beta_j}(w_m)$$

De fato, fixado $m \in \mathbb{N}^*$ arbitrário, as condições (10.18.5) e (10.18.6) mostram $(f_{\beta_j}(w_m))_{j\geq m}$ é uma subsequência de $(f_k(w_m))_{k\in N_m} = (f_{\alpha_{mi}}(w_m))_{i\geq 1}$ e como por (10.18.4), esta sequência converge para l_m resulta que

$$\exists \lim_{j\to\infty} f_{\beta_j}(w_m) = \lim_{j\to\infty} f_{\alpha_{jj}}(w_m) = l_m$$

o que prova (10.18.7). É claro que $(f_{\beta_j})_{j\geq 1} = (f_{\alpha_{jj}})_{j\geq 1}$ é uma subsequência de (f_m) em consequência, o lema ficará demonstrado se verificarmos a seguinte:

Asserção 2: *Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, a sequência $(f_{\beta_j})_{j\geq 1}$ converge uniformemente sobre K_n* (e portanto, (f_{β_j}) converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset \Omega$). Fixemos $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$. Consideremos δ definido por (10.18.3). Como $K_n \cap E$ é denso em K_n, é óbvio que $(D_\delta(z))_{z\in K_n\cap E}$ é uma cobertura aberta de K_n e como K_n é compacto, existem p pontos $z_1, ..., z_p$ em $K_m \cap E$ tais que

$$(10.18.8) \qquad K \subset D_\delta(z_1) \cup ... \cup D_\delta(z_p) \ .$$

Por outro lado $(f_{\beta_j}(z_1)), (f_{\beta_j}(z_2)), ..., (f_{\beta_j}(z_p))$ é um número finito de sequências convergentes (por (10.18.7) já que $z_1, ..., z_p \in E$), logo são de Cauchy, donde segue que existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que

$$(10.18.9) \qquad r, s \geq \nu \implies |f_{\beta_r}(z_i) - f_{\beta_s}(z_i)| < \varepsilon \quad \forall \ i = 1, 2, ..., p$$

Dados $z \in K_n$ arbitrário, por (10.18.8) existe i, $1 \leq i \leq p$ tal que $z \in D_\delta(z_i)$ e portanto:

$$(10.18.10) \qquad \left\| \begin{array}{l} r, s \geq \nu \implies |f_{\beta_r}(z) - f_{\beta_s}(z)| \leq \overbrace{|f_{\beta_r}(z) - f_{\beta_r}(z_i)|}^{(1)} + \\ + \overbrace{|f_{\beta_r}(z_i) - f_{\beta_s}(z_i)|}^{(2)} + \overbrace{|f_{\beta_s}(z_i) - f_{\beta_s}(z)|}^{(3)} < 3\varepsilon \end{array} \right.$$

pois as parcelas (1) e (3) são $< \varepsilon$ ($\forall \ r, s!$) pela escolha do δ e por (10.18.2) já que $|z - z_i| < \delta$, e a parcela (2) é $< \varepsilon$ por (10.18.9). Como $z \in K_n$ era arbitrário (10.18.10) significa

$$r, s \geq \nu \implies \|f_{\beta_r} - f_{\beta_s}\|_{K_n} \leq 3\varepsilon,$$

o que prova a Asseção 2. $\square$

Teorema 10.19 (Riemann) *Se Ω é um aberto simplesmente conexo de $\mathbb{C}$ e $\Omega \neq \mathbb{C}$, então Ω é conformemente equivalente a $U = D_1(0)$.*

Observemos que o caso $\Omega = \mathbb{C}$ deve ser excluído pelo teorema de Louiville, isto é $\mathbb{C}$ e $D_1(0)$ não são conformemente equivalentes, eles são apenas homeomorfos.
Se Ω_1 e Ω_2 são abertos conexos conformemente equivalentes, isto é,existe um isomorfismos analítico $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ então é fácil verificar que a aplicação

$$\varphi_* : f \in \mathcal{H}(\Omega_2) \longmapsto \varphi \circ f \in \mathcal{H}(\Omega_1)$$

é um isomorfismo de aneis e então, se Ω_1 tem uma estrutura simples, problemas concernentes a $\mathcal{H}(\Omega_2)$ podem ser transferidos para $\mathcal{H}(\Omega_1)$ e, uma vez resolvidos em $\mathcal{H}(\Omega_1)$, obter a solução em $\mathcal{H}(\Omega_2)$ por meio de φ_*. O exemplo mais importante deste tipo de técnica se apoia no Teor. 10.19, que reduz o estudo de muitos problemas relativos a $\mathcal{H}(\Omega)$, com Ω simplesmente conexo $\neq \mathbb{C}$, ao estudo de $\mathcal{H}(U)$. Naturalmente, para obter soluções explícitas dos problemas é necessário ter uma informação precisa sobre isomorfismo analítico $\varphi : \Omega \to U$. Na prova que segue do Teor. 10.19 utilizaremos apenas a existência da raíz quadrada analítica de uma função analítica sem zeros num aberto simplesmente conexo, o que (a menos do teorema de Runge) completará a prova do Teor. 9.5 .

Prova do Teor. 10.19 (No que segue $D_1(0)$ é denotado por U) Consideremos a classe de funções

$$\Sigma = \{\psi \in \mathcal{H}(\Omega) \mid \psi \text{ é injetora e } \psi(\Omega) \subset U\},$$

vamos mostrar que existe $\psi \in \Sigma$ tal que $\psi(\Omega) = U$, o que provará o resultado pelo Corol. 6.7.
Asserção 1: $\Sigma \neq \varnothing$
Como $\Omega \neq \mathbb{C}$ existe $w_0 \in \mathbb{C}\backslash\Omega$ e como Ω é simplesmente conexo e a função $z \in \Omega \longmapsto z - w_0 \in \mathbb{C}$ é holomorfa e não tem zeros em Ω, pelo Teor. 9.5 (ii) $\implies$ (ix) (admitindo a implicação (iv) $\implies$ (v) do Teor. 9.5 que está contida no teorema de Runge) resulta que existe $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\varphi^2(z) = = z - w_0 \ \ \forall \ \ z \in \Omega$. Se $z_1, z_2 \in \Omega$ e $\varphi(z_1) = \pm\varphi(z_2)$ então $z_1 - w_0 = \varphi^2(z_1) = = \varphi^2(z_2) = z_2 - w_0$, donde $z_1 = z_2$ e potanto $\varphi(z_1) = \pm\varphi(z_2) = \varphi(z_2)$, o que mostra que *$\varphi$ é injetora e que não existem pontos $z_1, z_2 \in \Omega$ tais que* $\varphi(z_1) = -\varphi(z_2)$ (pois neste caso $-\varphi(z_2) = \varphi(z_2)$, donde $\varphi(z_2) = 0$ o que é absurdo pois φ não tem zeros em Ω). Como φ não é constante e Ω é conexo, $\varphi(\Omega)$ é aberto, portanto existe $r > 0$ tal que

$$\varphi(\Omega) \supset \overline{D}_r(\varphi(a)), \text{ para algum } a \in \Omega.$$

Se existisse algum $z \in \Omega$ tal que $\varphi(z) \in \overline{D}_r(-\varphi(a))$, então $-\varphi(z) \in -\overline{D}_r(-\varphi(a)) = \overline{D}_r(\varphi(a)) \subset \varphi(\Omega)$, portanto, existe $w \in \Omega$ tal que $\varphi(w) = -\varphi(z)$, o que é absurdo, como já vimos. Desta forma provamos que $\varphi(\Omega) \cap \overline{D}_r(-\varphi(a)) = \varnothing$, ou seja

$$|\varphi(z) + \varphi(a)| > r \quad \forall \quad z \in \Omega$$

o que prova que

$$\psi = \frac{r}{\varphi + \varphi(a)} \in \Sigma$$

pois ψ é injetora (pois φ o é) e $|\psi(z)| = \dfrac{r}{|\varphi(z) + \varphi(a)|} < \dfrac{r}{r} = 1$ para cada $z \in \Omega$, donde $\psi(\Omega) \subset U$.

Asserção 2: Se $\psi \in \Sigma, \psi(\Omega) \subsetneqq U$ e $\zeta \in \Omega$, então existe $\psi_1 \in \Sigma$ tal que

$$|\psi_1'(\zeta)| > |\psi'(\zeta)|.$$

Se $\psi \in \Sigma$ e $\psi(\Omega) \subsetneqq U$ então existe $\alpha \in U \backslash \psi(\Omega)$. Consideremos a função φ_α da Def. 10.9, então é claro que $\varphi_\alpha \circ \psi \in \Sigma$ e como $\alpha \notin \psi(\Omega)$ temos

$$(\varphi_\alpha \circ \psi)(z) = \frac{\psi(z) - \alpha}{1 - \overline{\alpha}\psi(z)} \neq 0 \quad \forall \ \ z \in \Omega.$$

Em consequência, existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g^2 = \varphi_\alpha \circ \psi$; mostremos que g é injetora. De fato, de $g(z_1) = g(z_2)$ segue

$$g^2(z_1) = \varphi_\alpha \circ \psi(z_1) = \varphi_\alpha \circ \psi(z_2) = g^2(z_2)$$

isto é

$$\frac{\psi(z_1) - \alpha}{1 - \overline{\alpha}\psi(z_1)} = \frac{\psi(z_2) - \alpha}{1 - \overline{\alpha}\psi(z_2)}$$

donde $\psi(z_1)(1 - |\alpha|^2) = \psi(z_2)(1 - |\alpha|^2)$, logo $\psi(z_1) = \psi(z_2)$, o que acarreta $z_1 = z_2$ pois ψ é injetora. Além disto, é claro que $g(\Omega) \subset U$ [se $z \in \Omega$ e $|g(z)| \geq 1$ então $1 \leq \left|g^2(z)\right| = |\varphi_\alpha \circ \psi(z)| = |\varphi_\alpha(\psi(z))| < 1$ pois $\varphi_\alpha \circ \psi \in \Sigma$].
Desta forma provamos que

$$g \in \Sigma.$$

Sejam $q : z \in \mathbb{C} \longmapsto z^2 \in \mathbb{C}$ e $\beta := g(\zeta) \in U$ (pois $g(\Omega) \subset U$), então podemos considerar φ_β; vamos mostrar que $\psi_1 := \varphi_\beta \circ g$ demonstra a Asserção 2. É claro que ψ_1 é injetora e que $\psi_1(\Omega) \subset U$, logo $\psi_1 \in \Sigma$. As definições de g, q e ψ_1 mostram que

$$\psi = \varphi_{-\alpha} \circ q \circ g = \varphi_{-\alpha} \circ q \circ \varphi_{-\beta} \circ \psi_1 \tag{10.19.1}$$

Como $\psi_1(\zeta) = \varphi_\beta(g(\zeta)) = \varphi_\beta(\beta) = 0$, se $F := \varphi_{-\alpha} \circ q \circ \varphi_{-\beta}$, então (10.19.1) se escreve $\psi = F \circ \psi_1$ e pela regra da cadeia vem

$$\psi'(\zeta) = F'(0)\psi_1'(\zeta)\ . \tag{10.19.2}$$

Visivelmente $F(U) \subset U$ e F não é injetora em U [pois q não o é, e se $0 < a < 1$ existem dois pontos $w_1, w_2 \in U$, $w_1 \neq w_2$ tais que $\varphi_{-\beta}(w_1) = a$ e $\varphi_{-\beta}(w_2) = -a$ e então $F(a) = F(-a)$]. Pelas definições de g e β temos:

$$\beta^2 = g^2(\zeta) = (\varphi_\alpha \circ \psi)(z) = \frac{\psi(z) - \alpha}{1 - \overline{\alpha}\psi(z)}$$

o que implica $F(0) = \psi(z)$ pois:

$$F(0) = \varphi_{-\alpha}(q(\varphi_{-\beta}(0))) = \varphi_{-\alpha}(\beta^2) =$$

$$= \frac{\beta^2+\alpha}{1+\overline{\alpha}\beta^2} = \frac{\dfrac{\psi(z)-\alpha}{1-\overline{\alpha}\psi(z)}+\alpha}{1+\overline{\alpha}\dfrac{\psi(z)-\alpha}{1-\overline{\alpha}\psi(z)}} = \psi(\zeta)$$

Aplicando o Teor. 10.11 à função F, de $F(0)=\psi(\zeta)$ resulta

$$|F'(0)| \leq \frac{1-|\psi(\zeta)|^2}{1-|0|^2} = 1-|\psi(\zeta)|^2 \tag{10.19.3}$$

e ainda pelo Teor. 10.11 sabemos que a igualdade em (10.19.3) implica que F é injetora, o que não é o caso, como já observamos, logo $|F'(0)| < 1-|\psi(\zeta)|^2 \leq 1$, portanto

$$|F'(0)| < 1$$

e em consequência, de (10.19.2) resulta $|\psi'(\zeta)| < |\psi_1'(\zeta)|$, o que prova a Asserção 2. [Observar que $\psi'(\zeta) \neq 0$ pois ψ é injetora, ver Teor. 6.6]

Fixemos $z_0 \in \Omega$ arbitrário e seja

$$\eta := \sup\{|\psi'(z_0)| \ \mid \psi \in \Sigma\},$$

então pela Asserção 2 resulta:

$$\forall \ h \in \Sigma \ \text{ tal que } |h'(z_o)| = \eta \ \text{ temos } h(\Omega) = U \tag{10.19.4}$$

De fato, dado $h \in \Sigma$ tal que $|h'(z_0)| = \eta$, se fosse $h(\Omega) \subsetneqq U$, pela Asserção 2 existiria $h_1 \in \Sigma$ tal que $|h_1'(z_0)| > |h'(z_0)|$ donde por definição de η :

$$\eta \geq |h_1'(z_0)| > |h'(z_0)| = \eta,$$

o que é absurdo. Em consequência, ***basta verificar a existência de uma função*** $h \in \Sigma$ ***tal que*** $|h'(z_0)| = \eta$. Por definição de η, existe uma sequência $(\psi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ em Σ tal que

$$|\psi_m'(z_0)| \longrightarrow \eta \ \text{ se } m \to \infty \tag{10.19.5}$$

Se K é um compacto arbitrário de Ω, então para cada $\psi \in \Sigma$ temos $\psi(\Omega) \subset U$ portanto

$$\|\psi\|_K \leq \|\psi\|_\Omega \leq 1 \qquad \forall \ \psi \in \Sigma$$

o que mostra que Σ é uniformemente limitada sobre os compactos de Ω e então pelo Lema 15.10 resulta que Σ é normal. Em consequência (ψ_m) possui uma subsequência, que ainda denotaremos por (ψ_m) para simplificar a notação, que converge uniformemente sobre todo compacto de Ω para uma função h. Pelo Teor. 5.19, $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ e (ψ_m') converge uniformemente sobre os compactos de Ω para h', portanto considerando o compacto $\{z_0\}$, temos

$$\psi_m'(z_0) \to h'(z_0) \quad \text{ se } \quad m \to \infty$$

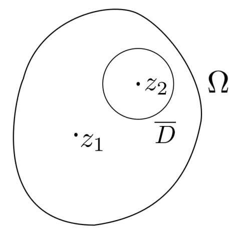
o que prova por (10.19.5) que $|h'(z_0)| = \eta$. Resta verificar que $h \in \Sigma$. Como

$\Sigma \neq \varnothing$ e cada $\psi \in \Sigma$ é injetora resulta que ψ' não se anula em nenhum ponto de Ω donde $\eta > 0$ o que implica $|h'(z_0)| = \eta > 0$, logo h não é constante. Como $\psi_m(\Omega) \subset U$ para cada $m \in \mathbb{N}$, resulta $h(\Omega) \subset \overline{U}$ e então ($h \neq$ cte. e Ω conexo) pelo teorema da aplicação aberta resulta $h(\Omega) \subset U$. Mostremos finalmente que h é injetora. Fixemos $z_1, z_2 \in \Omega$, $z_1 \neq z_2$, sejam

$$\alpha = h(z_1) \quad \text{e} \quad \alpha_m = \psi_m(z_1) \quad \forall \ m \geq 1$$

e seja $\overline{D}$ um disco fechado de centro z_2 contido em Ω tal que $z_1 \notin \overline{D}$. Como os zeros da função não constante:

$$h - \alpha : z \in \Omega \longmapsto h(z) - \alpha \in \mathbb{C}$$



não têm ponto de acumulação em Ω, podemos supor que $h - \alpha$ não tem zeros em $\partial\overline{D}$ [se para cada disco fechado $\overline{D}$ nas condições acima, $h - \alpha$ tivesse um zero em $\partial\overline{D}$, é claro que z_2 seria um ponto de acumulação de zeros de $h - \alpha$ em Ω]. A sequência $(\psi_m - \alpha_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente (sobre cada compacto de Ω e portanto) sobre $\overline{D}$ para $h - \alpha$ (pois obviamente $\alpha_m \to \alpha$) e $\psi_m - \alpha_m$ não tem zeros em D, pois é injetora e se anula em z_1, então pelo teorema de Rouché (de modo preciso, exerc. 8.13) e por ser $h - \alpha \neq$ cte, resulta que $h - \alpha$ não tem zeros em D, em particular $h(z_2) - \alpha \neq 0$ isto é, $h(z_2) \neq h(z_1)$. $\square$

Obsevemos que na prova anterior temos $h(z_0) = 0$ pois se fosse $h(z_0) = \beta \neq 0$, como $h(\Omega) = U$ resulta $\beta \in U$ e portanto $\varphi_\beta \circ h \in \Sigma$ e

$$|(\varphi_\beta \circ h)'(z_0)| = \left|\varphi_\beta'(\beta) \cdot h'(z_0)\right| = \frac{|h'(z_0)|}{1 - |\beta|^2} > |h'(z_0)| = \eta$$

o que é absurdo por definição de η. Como $|h'(z_0)| = \eta > 0$ obtemos o seguinte:

Corolário 10.20 *Sejam Ω um aberto simplesmente conexo de $\mathbb{C}$ tal que $\Omega \neq \mathbb{C}$ e $z_0 \in \Omega$* arbitrário. Então existe uma única $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *tal que:*
(1º) $f(z_0) = 0$ e $f'(z_0) > 0$.
(2º) *f é injetora.*
(3º) *$f(\Omega) = U$.*

Prova Pela prova do Teor. 10.19 é claro que, dado $z_0 \in \Omega$ existe $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ satisfazendo as condições (2º) e (3º) e tal que

$$h(z_0) = 0 \quad \text{e} \quad h'(z_0) =: \alpha \in \mathbb{C}^*$$

(pois $|h'(z_0)| = |\alpha| = \eta > 0$). Se $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ basta tomar $f = h$. Se $\alpha \in \mathbb{C}^* \backslash \mathbb{R}_+^*$, então

$$\alpha = re^{i\theta}, \ \text{com} \ r > 0 \ \text{e} \ 0 < \theta < 2\pi.$$

Definimos então $f : \Omega \longrightarrow U$ por $f(z) = e^{-i\theta}h(z)$ para cada $z \in \Omega$, então é claro que f satisfaz ($2^{\underline{o}}$) e ($3^{\underline{o}}$) e $f(z_0) = 0$. Além disto

$$f'(z_0) = e^{i\theta}h'(z_0) = e^{-i\theta}.re^{i\theta} = r > 0.$$

Mostremos então a unicidade de f. Seja $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que g tem as propriedades ($1^{\underline{o}}$),($2^{\underline{o}}$) e ($3^{\underline{o}}$), então $f \circ g^{-1} : U \to U$ é um isomorfismo analítico de U sobre U. Por outro lado

$$(f \circ g^{-1})(0) = f(z_0) = 0,$$

então, pelo Teor. 10.12, existe $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ tal que

$$f \circ g^{-1} = \lambda\varphi_0 = \lambda \cdot id.$$

isto é,

$$f = \lambda\varphi_0 \circ g$$

o que se escreve assim $f(z) = \lambda g(z)$, donde

$$0 < f'(z_0) = \lambda g'(z_0)$$

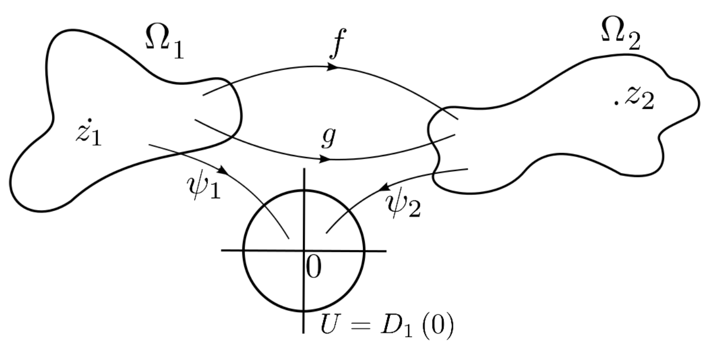
o que mostra que λ é real positivo e (pois $g'(z_0) > 0$) como $|\lambda| = 1$, obtemos $\lambda = 1$, donde $f = g$. $\square$

Corolário 10.21 *Sejam Ω_1 e Ω_2 dois abertos simplesmente conexos de $\mathbb{C}$ tais que $\varnothing \neq \Omega_i \neq \mathbb{C}$ e $z_i \in \Omega_i$ $(i = 1, 2)$ pontos arbitrários. Então, existe um único isomorfismo analítico f de Ω_1 sobre Ω_2 tal que $f(z_1) = z_2$ e $f'(z_1) > 0$* [ou mais geralmente, tal que $f'(z_1)$ tenha um argumento prefixado θ, isto é, $e^{-i\theta} \cdot f'(z_0) > 0$]

Prova

Existência: Pelo Corol. 10.20, para cada $i = 1, 2$, existe um único isomorfismo analítico $\psi_i : \Omega_i \to U$ tal que

$$\psi_i(z_i) = 0 \qquad \text{e} \qquad \psi_i'(z_i) > 0 \qquad (i = 1, 2)$$



Seja $f = \psi_2^{-1} \circ \psi_1$, então é claro f é um isomorfismo analítico de Ω_1 sobre Ω_2 e $f(z_1) = \psi_2^{-1}[\psi_1(z_1)] = \psi_2^{-1}(0) = z_2$. Por outro lado,

$$f'(z) = (\psi_2^{-1})'[\psi_1(z)]\,\psi_1'(z) \qquad \forall \quad z \in \Omega$$

donde pelo Teor. 6.2 (c) resulta:

$$f'(z_1)(\psi_2^{-1})'\left[\psi_1(z_1)\right]\psi_1'(z_1) = (\psi_2^{-1})'(0).\psi_1'(z_1) = \frac{\psi_2'(z_1)}{\psi_2'(z_1)} > 0.$$

Unicidade: Seja g um isomorfismo analítico arbitrário de Ω_1 sobre Ω_2 tal que

$$g(z_1) = z_2 \quad \text{e} \quad g'(z_1) > 0,$$

então

$$h := \psi_2 \circ g \circ \psi_1^{-1} : U \longrightarrow U$$

é um isomorfismo analítico e como

$$h(0) = \psi_2\left[g(\psi_1^{-1}(0))\right] = \psi_2\left[g(z_1)\right] = \psi_2(z_2) = 0,$$

pelo Teor. 10.12, existe $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ tal que

$$h(z) = \lambda\varphi_0(z) = \lambda z \quad \forall \quad z \in U$$

isto é

(10.21.1) $$h = \psi_2 \circ g \circ \psi_1^{-1} = \lambda\varphi_0$$

Em consequência $g = \psi_2^{-1} \circ (\lambda\varphi_0) \circ \psi_1$, donde $g(z) = \psi_2^{-1}\left[\lambda\psi_1(z)\right]$ para cada $z \in \Omega_1$, e portanto

$$g'(z) = (\psi_2^{-1})'\left[\lambda\psi_1(z)\right].\lambda\psi_1'(z) \quad \forall \ z \in \Omega_1$$

e em particular (de novo pelo Teor. 6.2 (c))

$$g'(z_1) = (\psi_2^{-1})'\left[\lambda\psi_1(z_1)\right]\lambda\psi_1'(z_1) = \lambda(\psi_2^{-1})'(0)\psi_1'(z_1) = \lambda\frac{\psi_1'(z_1)}{\psi_2'(z_2)} > 0$$

Ora, como $\psi_1'(z_1) > 0$ e $\psi_2'(z_2) > 0$, resulta $\lambda > 0$ e de $|\lambda| = 1$ segue então $\lambda = 1$, logo de (10.21.1) resulta $h = \varphi_0 = id$ e então (10.21.1) mostra que $g = \psi_2^{-1} \circ \psi$, isto é $g = f$. $\Box$

Exercícios

(10.1) Mostre que o conjunto de todas as transformações lineares fracionárias é um grupo para a composição

(10.2) Mostre que a TLF $\varphi(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ éuma aplicação conforme bijetora de $D_1(0)$ sobre o semiplano $\Pi = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(z) > 0\}$.

(10.3) Mostre que a TLF $\varphi(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ é uma aplicação conforme bijetora de $D_1(0)$ sobre o semiplano $\Pi = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{I}m(z) > 0\}$.
[**Sugestão:** Observar que $\varphi^{-1}(z) = i.\dfrac{1+z}{1-z}$ e usar o exerc. (10.1).]

(10.4) Prove que existem infinitas determinações da função

$$z \longmapsto \log(\frac{z+1}{z-3}i)$$

em $\mathbb{C}\backslash\overline{D}_2(1)$, onde "log"denota alguma determinação do logaritmo complexo e $\overline{D}_2(1) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \leq 2\}$.

[Sugestão: A TLF $\varphi(z) := \dfrac{z+1}{z-3}i$ leva $\{-1, 1, 3\}$ em $\{0, i, \infty\}$, donde resulta $\varphi(D_2(1)) = \Pi_0 := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) < 0\}$ e $\varphi(\mathbb{C}\backslash\overline{D}_2(1)) = \Pi\backslash\{i\}$, com $\Pi := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{I}m(z) > 0\}$. Ora, qualquer das determinações Log_k (onde $k \in \mathbb{Z}$, $Log_0 = Log$ é a determinação principal do logaritmo complexo e $Log_k = Log + 2k\pi i$) é analítica em $D_0 := \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq -|z|\}$ e $\Pi\backslash\{i\} \subset D_0$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, considere a função composta

$$z \in \mathbb{C}\backslash\overline{D}_2(1) \xrightarrow{\varphi} \frac{z+1}{z-3}i \in \Pi\backslash\{i\} \subset D_0 \xrightarrow{Log_k} Log_k(\frac{z+1}{z-3}i) \in \mathbb{C}.$$

Observação: É claro que há muitas outras determinações analíticas (infinitas) trabalhando com as funções $Log_{k,\alpha}$ com $\alpha \in]\pi, 2\pi[$.**]**

(10.5) Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ um aberto conexo, $U := D_1(0)$ e $\mathcal{F}$ uma parte não vazia de $\mathcal{H}(\Omega)$ verificando a condição seguinte:

$((*))$ $\quad \forall\ K \subset\subset \Omega\ \exists\ S \subset\subset U$ tal que $f(K) \subset S\ \ \forall\ f \in \mathcal{F}$.

(a) Prove que, $\forall\ m \in \mathbb{N}$ e $\forall\ f \in \mathcal{F}$, a função $f_m : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por

$$f_m(z) := \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta e^{|\zeta|} d\zeta}{f(z) - \zeta^m} \qquad (z \in \Omega)$$

é holomorfa em Ω.

(b) Prove que o conjunto $\Phi := \{f_m \mid f \in \mathcal{F}$ e $m \in \mathbb{N}\}$ é uma família normal.

[Sugestão: (a) Para cada $f \in \mathcal{F}$ e $m \in \mathbb{N}$, a função $g_m : U \to \mathbb{C}$ definida por

$$g_m : w \in U \longmapsto \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta e^{|\zeta|} d\zeta}{w - \zeta^m} \in \mathbb{C}$$

pertence a $\mathcal{H}(U)$ e $((*))$ mostra que $f(\Omega) \subset U$ logo $f_m = g_m \circ f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
(b) Pelo teor. de Montel, basta ver que Φ é uniformemente limitado sobre compactos de Ω, o que é imediato por $((*))$: dado $K \subset\subset \Omega$ arbitrário, $\exists\ S \subset\subset U$ tal que $f(K) \subset S\ \ \forall\ f \in \mathcal{F}$. Óbviamente $\exists\ r \in]0, 1[$ tal que $S \subset D_r(0) \subset U$ portanto $|\zeta^m - w| \geq |\zeta|^m - |w| > 1 - r\ \ \forall\ |\zeta| = 1$ e $\forall\ w \in S$ donde $|f_m(z)| \leq \dfrac{2\pi e}{1-r}\ \ \forall\ f \in \mathcal{F},\ \forall\ m \in \mathbb{N}$ e $\forall\ z \in K$, isto é, $\sup\{\varphi(z) \mid \varphi \in \Phi$ e $z \in K\} < +\infty$.**]**

(10.6) Sejam Ω um aberto simplesmente conexo não vazio tal que $\Omega \neq \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$ e $r \in \mathbb{R}_+^*$.

(a) Prove que o conjunto $\mathcal{F} := \{f \in \mathcal{H}(\Omega) \mid f$ é um isomorfismo analítico de Ω sobre $D_r(a)\}$ é não vazio.

(b) Mostre que $\mathcal{F}$ é um conjunto infinito.

[Sugestão: (a) Pelo teor. de Riemann existe um isomorfismo analítico $\psi : \Omega \to U := D_1(0)$ e é óbvio que $g : z \in U \longmapsto a + rz \in D_r(a)$ é um iso-

morfismo analítico de U sobre $D_r(a)$. Então $f := g \circ \psi \in \mathcal{F}$.
(b) Para cada $\alpha \in U$ seja $\varphi_\alpha(z) := \dfrac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$, então (notações de (a))
$f_\alpha := g \circ \varphi_\alpha \circ \psi \in \mathcal{F}$ e $\alpha \neq \beta \implies f_\alpha \neq f_\beta$.]

(10.7) Sejam $a, b \in \mathbb{C}$ com $a \neq b$ e $\complement\,[a,b] = S^2 \setminus [a,b]$. Prove que existem infinitas determinações da função

$$z \longmapsto \log \frac{z-a}{z-b}$$

em $\complement\,[a,b]$, onde " log " denota algumas determinação do logaritmo complexo.

[**Sugestão:** É necessário provar que existe alguma determinação log do logaritmo complexo verificando a inclusão (abreviamos Domínio por *Dom*):

$$\left\{ \frac{z-a}{z-b} \mid z \in \complement\,[a,b] \right\} \subset Dom(\log)$$

de modo que a função composta

$$z \in \complement\,[a,b] \longmapsto \frac{z-a}{z-b} \in Dom(\log) \overset{\log}{\longmapsto} \log \frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{C}$$

está bem definida.
Podemos proceder da maneira seguinte: considere a TLF φ definida por $\varphi(z) := \dfrac{z-a}{z-b}$ para cada $z \in S^2$ e mostre que (ver Lema 6.8):

$(*)$ $$\varphi(\complement\,[a,b]) = D_0.$$

Observe que uma vez provada $(*)$ acima, as infinitas funções $(k \in \mathbb{Z})$:

$$z \in \complement\,[a,b] \overset{\varphi}{\longmapsto} \frac{z-a}{z-b} \in D_0 \overset{Log_k}{\longmapsto} \mathrm{Log}_k \frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{C}$$

resolvem a questão.]

(10.8) Prove que é possível definir infinitas determinações analíticas da função

$$z \longmapsto \log \frac{z-1}{z-5}$$

em $\mathbb{C}\setminus\overline{D}_2(3)$, onde "log" denota alguma determinação do logaritmo complexo.

[**Sugestão:** A TLF φ definida por $\varphi(z) := \dfrac{z-1}{z-5}$ leva $\{1,3,5\}$ em $\{0,-1,\infty\}$ donde (ver Corol. 10.7 ($2^{\underline{a}}$)) $\varphi(D_2(3)) = S_- := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < 0\}$ e $\varphi(\partial D_2(3))$ =eixo Oy, donde resulta facilmente

$$\varphi(\mathbb{C}\setminus\overline{D}_2(3)) = (\mathbb{C}\setminus\overline{S}_-)\setminus\{1\} \text{ e como } \varphi(\infty) = 1 \text{ se obtem}$$
$$\varphi(\mathbb{C}\setminus\overline{D}_2(3)) = S_+\setminus\{1\}$$

onde $S_+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Ora $S_+\setminus\{1\} \subset S_+ \subset D_0$ e então, para cada $k \in \mathbb{Z}$ as funções

$$z \in \mathbb{C}\setminus\overline{D}_2(3) \overset{\varphi}{\longmapsto} \frac{z-1}{z-5} \in S_0 \subset D_0 \overset{\mathrm{Log}_k}{\longmapsto} \mathrm{Log}_k \frac{z-1}{z-5} \in \mathbb{C}$$

resolvem a questão.]

(10.9) Sejam $K := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| z - \frac{1}{2}(1+i) \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$ e $\Omega := \mathbb{C} \backslash K$

(a) Prove que as funções $\varphi : z \in \mathbb{C} \backslash \{i\} \longmapsto \dfrac{z-1}{z-i} \in \mathbb{C}$ é um isomorfismo analítico de Ω sobre $\varphi(\Omega)$;
(b) Mostre que $\varphi(\Omega) \subset \Pi := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$;
(c) Deduzir de (b) que existem infinitas determinações analíticas da função

$$z \in \Omega \longmapsto \log \frac{z-1}{z-i} \in \mathbb{C}$$

onde " log " indica alguma determinação do logaritmo complexo.

[Sugestão: (a) Como Ω é conexo basta ver que $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ e φ é injetora (ver Corol. 6.7);
(b) Se $z = x + iy$ com $x, y \in \mathbb{R}$ é claro que $z \in \Omega \Leftrightarrow x(x-1) + y(y-1) > 0$ e, para $z \in \Omega$ arbitrário, tem-se $\operatorname{Re}(\varphi(z)) = \dfrac{x(x-1) + y(y-1)}{x^2 + (y-1)^2} > 0$ para cada $z = x + iy \in \mathbb{R}$;
(c) Como $\Pi \subset D_0$, de (b) resulta $\varphi(\Omega) \subset D_0$ e então, para cada $k \in \mathbb{Z}$ as funções compostas

$$z \in \Omega \overset{\varphi}{\longmapsto} \frac{z-1}{z-i} \in \Pi \subset D_0 \overset{\mathrm{Log}_k}{\longmapsto} \mathrm{Log}_k \frac{z-1}{z-i} \in \mathbb{C}$$

resolvem a questão.

[Observações: (I.) É fácil ver que $\varphi(\Omega) = \Pi$;
(II.) É claro que $\Pi \subset D_\alpha$ ($:= e^{i\alpha} \cdot D_0$, ver exerc. (6.7)) $\forall \alpha \in A :=]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$ logo o conjunto $\left\{ \mathrm{Log}_{k,\alpha} \circ \varphi \mid k \in \mathbb{Z} \text{ e } \alpha \in A \right\}$ também resolve a questão.**]]**

Capítulo 11

O TEOREMA DE APROXIMAÇÃO DE RUNGE

Este capítulo e os seguintes se distinguem dos anteriores pela utilização (muito moderada) de Análise Funcional, Teoria da Medida e Cálculo Avançado.

No que segue vamos usar algumas vezes a "medida"$dz \wedge d\overline{z}$, isto é, integrais do tipo

$$\int_E f(z)dz \wedge d\overline{z},$$

onde E é um conjunto Lebesgue mensurável do plano complexo. Vamos ver o que significa o símbolo $dz \wedge d\overline{z}$. Da Álgebra Exterior sabemos que

$$dz \wedge d\overline{z} = (dx + idy) \wedge (dx - idy) = -2idx \wedge dy$$

onde $d\lambda = dx \wedge dy$ sendo λ a medida de Lebesgue no plano complexo $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Em vista disto poderia parecer natural pensar que $d\mu = dz \wedge d\overline{z}$ onde μ é a medida complexa dada por

$$\mu(E) = \int_E dz \wedge d\overline{z} = -2i \int_E dx \wedge dy = -2i\lambda(E)$$

para cada $E \subset \mathbb{R}^2$, E sendo Lebesgue mensurável. Mas é claro que o que precede é manifestamente falso pois se $E \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto Lebesgue mensurável com medida infinita resulta

$$\int_E dz \wedge d\overline{z} = -2i.\infty$$

o que não faz sentido e nem existe maneira de dar sentido ao produto $i.\infty$. A forma correta de dar sentido a $dz \wedge d\overline{z}$ como medida é a seguinte: fixemos um conjunto $B \subset \mathbb{R}^2$ que é Lebesgue mensurável com medida finita (isto é, $\lambda(B) < \infty$), então definimos a medida complexa μ_B da forma seguinte ($\lambda_B := \lambda|B$):

$$\mu_B(E) := \int_E dz \wedge d\overline{z} = -2i \int_E dx \wedge dy = -2i\lambda_B(E)$$

para cada $E \subset B$ que seja Lebesgue mensurável. É claro então que $d\mu_B = dz \wedge d\overline{z}$ e μ_B é uma medida complexa sobre $\mathcal{L}|B$ ($\mathcal{L}$ denotando a

$\sigma-$álgebra dos conjuntos Lebesgue mensuráveis do plano complexo) cuja derivada de Radon-Nikodym em relação a λ_B é $-2i$ pois $d\mu_B = -2id\lambda_B$. Para cada conjunto Lebesgue mensurável com medida finita B do plano complexo $\mathbb{C}$ temos uma medida complexa μ_B e é costume usar o símbolo

$$dz \wedge d\overline{z}$$

para denotar qualquer dos $d\mu_B$.
A expressão $dz \wedge d\overline{z}$ também aparece naturalmente na seguinte situação (ligeiramente diferente da que acabamos de apresentar):

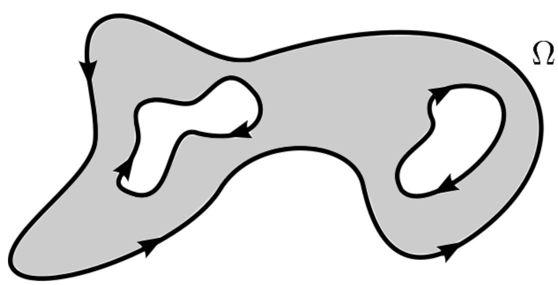
Seja $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$ tal que $B :=$supp(φ) é uma parte limitada de Ω. É natural então definir a medida complexa μ por

$$\mu(E) := \int_E \varphi(z) dz \wedge d\overline{z} = -2i \int_{E \cap B} \varphi(z) dx \wedge dy$$

para cada $E \subset \mathbb{R}^2$, E sendo Lebesgue mensurável. É claro que isto faz sentido com hipóteses mais fracas sobre φ ($\varphi \in L^1(\Omega)$, etc.).

Se Ω é um aberto de $\mathbb{C}$, a notação $K \subset\subset \Omega$ significa que K é compacto e contido em Ω.

Seja D um aberto limitado de $\mathbb{C}$ e suponhamos que sua fronteira ∂D é reunião de um número finito de curvas de Jordan de classe C^1. A fórmula (dita de Pompeu) que será demonstrada a seguir (Teor. 11.1) generaliza fortemente algumas das fórmulas habituais de representação integral para funções holomorfas. A sua prova se apoia no teorema de Stokes, isto é, presupomos $\mathbb{R}^2$ orientado positivamente pela forma canônica $dx \wedge dy$ e, sobre D e ∂D, consideramos as orientações induzidas (o que corresponde a



Se $u \in C^1(\overline{D})$ (isto é, u, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ admitem extensão contínua a $\overline{D}$) então

$$[11.1] \qquad \int_{\partial D} u(z) dz = 2i \int_D \frac{\partial u}{\partial \overline{z}} dx \wedge dy$$

onde $dx \wedge dy$ é a forma diferencial associada à medida de Lebesgue $dxdy$ em $\mathbb{R}^2$. A prova de [11.1] resulta imediatamente da fórmula de Green. De fato, se u_1 e u_2 são respectivamente as partes real e imaginária de u, isto é, $u = u_1 + iu_2$, é claro que (ver (5.1.1)):

$$\int_{\partial D} udz = \int_{\partial D} u_1dx - u_2dy + i\int_{\partial D} u_2dx + u_1dy$$

Aplicando a fórmula de Green a cada uma das integrais do segundo membro da identidade acima vem

$$\int_{\partial D} u_1dx - u_2dy = -\int_D \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)dx \wedge dy$$

$$\int_{\partial D} u_2dx + u_1dy = \int_D \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y}\right)dx \wedge dy$$

donde

$$\int_{\partial D} udz = \int_D \left[-\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y}\right)\right] dx \wedge dy =$$
$$= \int_D \left[\left(-\frac{\partial u_1}{\partial y} - i\frac{\partial u_2}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - i\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)\right] dx \wedge dy =$$

$$= \int_D \left(-\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx \wedge dy = 2i\int_D \frac{\partial u}{\partial \overline{z}}dx \wedge dy.$$

Como já observamos no início deste capítulo

$$d\overline{z} \wedge dz = 2idx \wedge dy$$

e então podemos escrever [11.1] assim

$$\int_{\partial D} u(z)dz = \int_D \frac{\partial u}{\partial \overline{z}}d\overline{z} \wedge dz \qquad [11.2]$$

o que pode também ser demonstrada imediatamente pelo teorema de Stokes

$$\int_{\partial D} w = \int_D dw$$

com $w(z) := u(z)dz$ pois $dw = du \wedge dz = (\frac{\partial u}{\partial z}dz + \frac{\partial u}{\partial \overline{z}}d\overline{z}) \wedge dz =$
$= \frac{\partial u}{\partial \overline{z}}d\overline{z} \wedge dz.$

Na prova do próximo resultado (chamado *fórmula de Cauchy generalizada* ou *fórmula de Pompeu*) vamos usar a fórmula [11.2].

Teorema 11.1 *Sejam* Ω e W *dois abertos não vazios de* $\mathbb{C}$, *suponha que* $\overline{W} \subset\subset \Omega$ *e que* ∂W *é reunião de um número finito de curvas de Jordan de classe* $\mathcal{C}^1$. *Se* $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, *então para cada* $\zeta \in W$ *tem-se*

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial W} \frac{u(z)dz}{z-\zeta} + \frac{1}{2\pi i} \int_{W} \frac{\partial u}{\partial \overline{z}}(z) \frac{dz \wedge d\overline{z}}{z-\zeta}.$$

Observe que a hipótese $\overline{W} \subset\subset \Omega$ implica que W é um aberto limitado.

Prova A integral de volume do 2º membro tem uma singularidade e sua existência ficará clara no fim desta demonstração. Fixados $\zeta \in W$ e $0 < \varepsilon < dist(\zeta, \complement W)$ arbitrários, seja

$$W_\varepsilon := W \backslash \overline{D}_\varepsilon(\zeta) = \{z \in W \mid |z-\zeta| > \varepsilon\}$$

e considere a função

$$v : z \in W_\varepsilon \longmapsto \frac{u(z)}{z-\zeta} \in \mathbb{C}$$

então é claro que $v \in \mathcal{C}^1(\overline{W}_\varepsilon)$. Aplicando [11.2] vem

$$\int_{\partial W_\varepsilon} v(z)dz = \int_{W_\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial \overline{z}} d\overline{z} \wedge dz.$$

Como $\dfrac{\partial v}{\partial \overline{z}}(z) = \dfrac{\partial u}{\partial \overline{z}}(z) \dfrac{1}{z-\zeta}$ resulta que a identidade acima se escreve assim:

$$\int_{\partial W_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \overline{z}}(z) \frac{d\overline{z} \wedge dz}{z-\zeta} = \int_{\partial W} \frac{u(z)dz}{z-\zeta} - \int_{|z-\zeta|=\varepsilon} \frac{u(z)dz}{z-\zeta} \ .$$

A seguir fazemos a mudança de variáveis $z = \zeta + \varepsilon e^{i\theta}$ donde $dz = \varepsilon i e^{i\theta} d\theta$, obtendo (ver (5.1.1)):

$$\int_{|z-\zeta|=\varepsilon} \frac{u(z)dz}{z-\zeta} = \int_0^{2\pi} u(\zeta + \varepsilon e^{i\theta}) i d\theta$$

o que implica

$$(11.1.1) \qquad \int_0^{2\pi} u(\zeta + \varepsilon e^{i\theta}) i d\theta = \int_{\partial W} \frac{u(z)dz}{z-\zeta} + \int_{W_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \overline{z}}(z) \frac{dz \wedge d\overline{z}}{z-\zeta} \ .$$

Vamos mostrar que fazendo $\varepsilon \downarrow 0$ em (11.1.1) se obtém a fórmula procurada:

$$(11.1.2) \qquad 2\pi i u(\zeta) = \int_{\partial W} \frac{u(z)dz}{z-\zeta} + \int_{W} \frac{\partial u}{\partial \overline{z}}(z) \ \frac{dz \wedge d\overline{z}}{z-\zeta} \ .$$

Vejamos inicialmente que o primeiro membro de (11.1.1) tende para o primeiro membro de (11.1.2) quando $\varepsilon \downarrow 0$. Seja

$$T_\varepsilon := \int_0^{2\pi} u(\zeta + \varepsilon e^{i\theta}) i d\theta - 2\pi i u(\zeta)$$

então é claro que $|T_\varepsilon| \leq \int_0^{2\pi} \left| u(\zeta + \varepsilon e^{i\theta}) - u(\zeta) \right| d\theta \longrightarrow 0$ se $\varepsilon \downarrow 0$ pois u

é contínua por hipótese. Vamos provar agora que o segundo membro de (11.1.1) tende para o segundo membro de (11.1.2), isto é, que $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} S_\varepsilon = 0$ onde

$$S_\varepsilon := \int\limits_{W_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \overline{z}}(z)\frac{dz\wedge d\overline{z}}{z-\zeta} - \int\limits_{W} \frac{\partial u}{\partial \overline{z}}(z)\frac{dz\wedge d\overline{z}}{z-\zeta} \ .$$

Ora como $W = W_\varepsilon \cup \overline{D}_\varepsilon(\zeta)$ (reunião disjunta) podemos escrever

$$S_\varepsilon = -\int\limits_{\overline{D}_\varepsilon(\zeta)} \frac{\partial u}{\partial \overline{z}}(z)\frac{dz\wedge d\overline{z}}{z-\zeta} \ . \tag{11.1.3}$$

Vamos admitir por um momento que a função φ definida por $\varphi(z) := = (z-\zeta)^{-1}$ $(z \neq \zeta)$ é *localmente integrável,* isto é, para cada $\varepsilon > 0$ se tem

$$\varphi \in L^1(\overline{D}_\varepsilon(\zeta)) \ . \tag{11.1.4}$$

Então, de (11.1.3) e (11.1.4) resulta

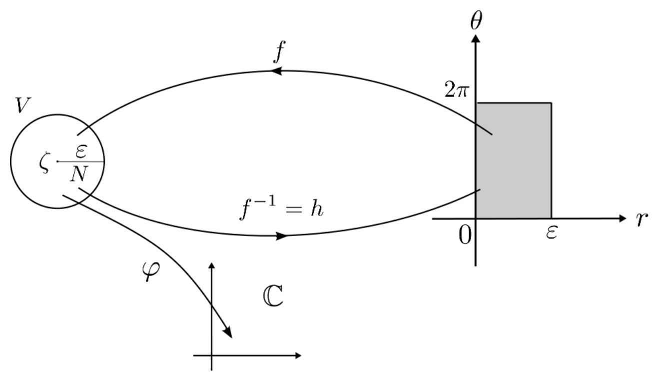
$$|S_\varepsilon| \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial \overline{z}} \right\|_{\overline{D}_\varepsilon(\zeta)} \cdot \int\limits_{\overline{D}_\varepsilon(\zeta)} \frac{2dx\wedge dy}{|z-\zeta|} = 2\left\| \frac{\partial u}{\partial \overline{z}} \right\|_{\overline{D}_\varepsilon(\zeta)} \cdot \|\varphi\|_{L^1(\overline{D}_\varepsilon(\zeta))}$$

e como a medida de $\overline{D}_\varepsilon(\zeta)$ $(= 2\pi\varepsilon^2)$ tende a zero se $\varepsilon \downarrow 0$, resulta (pelo teorema da convergência dominada, de modo mais preciso, ver [[R2], Ex. 12, p. 33]) que $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \|\varphi\|_{L^1(\overline{D}_\varepsilon(\zeta))} = 0$ donde $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} S_\varepsilon = 0$. Para completar a prova do teorema falta apenas verificar (11.1.4) e é claro que basta mostrar que

$$\varphi \in L^1(D_\varepsilon(\zeta)) \tag{11.1.4$'$}$$

pois a singularidade de φ não está em $\partial D_\varepsilon(\zeta)$. Para isto vamos usar o teorema de mudança de variáveis que pode ser enunciado da maneira seguinte:

Teorema de mudança de variáveis (TMV): *Seja h um $\mathcal{C}^1$-difeomorfismo de um aberto V* de $\mathbb{R}^n$ *sobre $h(V)$.* Se $g \in L^1(h(V))$, *então tem-se:*
(a) $(g\circ h)\,|\Delta_h| \in L^1(V)$
(b) $\int\limits_{h(V)} g d\lambda = \int\limits_V (g\circ h)\,|\Delta_h|\, d\lambda$,
onde Δ_h é a matriz jacobiana de h, $|\Delta_h| := \det \Delta_h$ e λ denota a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$.



Voltemos então à prova de (11.1.4′). Sejam $R :=]0, \varepsilon[\times]0, 2\pi[$ e $g : (r, \theta) \in R \longmapsto 1 \in \mathbb{C}$. É claro que $g \in L^1(R)$ pois

$$\int_R |g|\, d\theta dr = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varepsilon} dr = 2r\varepsilon < \infty$$

Sejam agora $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2 = (\zeta_1, \zeta_2)$, $D_\varepsilon := D_\varepsilon(\zeta)$, $N := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{I}m(z) = \mathcal{I}m(\zeta)\ , \mathcal{R}e(z) \geq \mathcal{R}e(\zeta)$ e $0 \leq |z - \zeta| < \varepsilon$ e $V := D_\varepsilon \backslash N$. Definimos então $f : R \longrightarrow V$ por $f(r, \theta) := (f_1(r, \theta), f_2(r, \theta))$, onde $f_1(r, \theta) = \zeta_1 + r \cos\theta$ e $f_2(r, \theta) = \zeta_2 + r \operatorname{sen}\theta$ (isto é, f é a mudança de variáveis $(r, \theta) \longmapsto z = \zeta + re^{i\theta}$). É claro que f é de classe $\mathcal{C}^1$ (na realidade $\mathcal{C}^\infty$), bijetora e que $f(R) = V = D_\varepsilon \backslash N$ é aberto, portanto para verificar que f é um $\mathcal{C}^1$-difeomorfismo, é suficiente (por um corolário do teorema da função inversa) mostrar que $f^{-1} : V \longrightarrow R$ é diferenciável, o que por sua vez segue também do teorema da função inversa. De fato, calculemos o determinante da matriz jacobiana de f num ponto arbitrário $(r, \theta) \in R$:

$$|\Delta_f(r, \theta)| = \begin{vmatrix} \partial f_1/\partial r & \partial f_1/\partial \theta \\ \partial f_2/\partial r & \partial f_2/\partial \theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -rsen\theta \\ sen\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \neq 0$$

donde $|\Delta_f(r, \theta)| \neq 0$ em cada ponto de R. Em consequência pelo teorema da função inversa , f é localmente inversível em R (o que não é nenhuma novidade já que f é globalmente inversível em R) *e com inversa diferenciável.* Como a diferenciabilidade é uma propriedade local, resulta que f^{-1} é diferenciável em $V = D_\varepsilon \backslash N$ portanto f é um $\mathcal{C}^1$-difeomorfismo. Aplicamos então o TMV, (a) ao $\mathcal{C}^1$-difeomorfismo $h := f^{-1}$, então $H(V) = R$ e

$$(g \circ f^{-1}) \left|\Delta_{f^{-1}}\right| \in L^1(D_\varepsilon \backslash N)$$

e como $\left|\Delta_{f^{-1}}(z)\right| = \dfrac{1}{|\Delta_f(r, \theta)|} = \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{|z - \zeta|}$ (pois $z - \zeta = re^{i\theta}$), resulta $\left[(g \circ f^{-1}) \left|\Delta_{f^{-1}}\right|\right](z) = \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{|z-\zeta|} = |\varphi(z)|$, o que mostra que $\varphi \in L^1(D_\varepsilon \backslash N)$. Finalmente, como $\lambda(N) = 0$ ($\lambda =$ medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^2$)

$$\int_{D_\varepsilon} |\varphi|\, d\lambda = \int_{D_\varepsilon \backslash N} |\varphi|\, d\lambda + \int_N |\varphi|\, d\lambda = \int_{D_\varepsilon \backslash N} |\varphi|\, d\lambda < \infty$$

donde $\varphi \in L^1(D_\varepsilon)$. $\square$

Seja μ uma medida de Borel complexa sobre $\mathbb{R}^2$ (isto é, μ está definida sobre uma σ-álgebra $\mathcal{M}$ de $\mathbb{R}^2$ que contém a σ-álgebra $\mathcal{B}$ dos borelianos de $\mathbb{R}^2$). Chama-se *suporte de* μ ao conjunto Ω_μ^c, onde Ω_μ é a reunião de todos os abertos $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ que satisfazem a condição

$$X \in \mathcal{M} \text{ e } X \subset \mathcal{O} \implies \mu(X) = 0$$

Notação $\operatorname{supp}(\mu)$

O lema abaixo fornece alguns exemplos que serão úteis logo mais:

Lema 11.2 *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^3$; $k \geq 1$* e *$\varphi \in \mathcal{C}_0^k(\Omega)$. Então a medida μ definida por*

$$\mu(X) := \int_X \varphi(z) dz \wedge d\bar{z} \quad \forall \;\; X \in \mathcal{M} \qquad\qquad \text{(isto é, } d\mu = \varphi dz \wedge d\bar{z})$$

é uma medida de Borel complexa e supp(μ) $=\operatorname{supp}(\varphi)$.

No enunciado acima estamos supondo que $\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra de Ω que contém a σ-álgebra $\mathcal{B}_\Omega$ dos borelianos de Ω.

Prova Ver exercicio (11.2). $\square$

Teorema 11.3 (a) *Seja μ uma medida de Borel complexa sobre $\mathbb{C}$ de suporte compacto K então, a função u definida por*

$$u : \zeta \in K^c \longmapsto \int_K \frac{d\mu(z)}{z - \zeta} \in \mathbb{C}$$

é holomorfa em K^c.
(b) *Sejam Ω um aberto $\neq \varnothing$ de $\mathbb{C}, k \geq 1$ e $\varphi \in \mathcal{C}_0^k(\Omega)$. Então, se indicamos com μ a medida de Borel complexa em Ω de suporte compacto definida por*

$$d\mu = (2\pi i)^{-1} \varphi dz \wedge d\bar{z}$$

(*ou equivalentemente, $\mu(X) = (2\pi i)^{-1} \int_X \varphi(z) dz \wedge d\bar{z} \quad \forall \;\; X \in \mathcal{M}$*),
a função

$$u : \zeta \in \Omega \longmapsto (2\pi i)^{-1} \int_\Omega \frac{d\mu(z)}{z - \zeta} = (2\pi i)^{-1} \int_\Omega \frac{\varphi(z)}{z - \zeta} dz \wedge \overline{dz} \in \mathbb{C}$$

é de classe $\mathcal{C}^k$ e $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}} = \varphi$ em Ω.

Prova (a) Inicialmente vamos verificar que u está bem definida o que é claro pois o integrando

$$z \in K \longmapsto \frac{1}{z-\zeta} \in \mathbb{C}$$

é contínuo para cada $\zeta \in K^c$ e portanto integrável no compacto K. Por derivação sob o sinal de integração obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}(\zeta) = \int_K \frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}}(\frac{1}{z-\zeta}) d\mu(z) = 0$$

pois a função $\zeta \in K^c \longmapsto (z-\zeta)^{-1} \in \mathbb{C}$ sendo holomorfa para cada $z \in K$, resulta que para cada $z \in K$ fixado temos

$$\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}}(\frac{1}{z-\zeta}) = 0 \quad \forall \ \zeta \in K^c,$$

(b) Vamos mostrar que u está bem definida. De fato, seja $K :=$supp(φ) e fixemos $\zeta \in K$ e $\varepsilon > 0$ tais que $\overline{D}_\varepsilon(\zeta) \subset \Omega$, então

$$\int_\Omega |\varphi(z)| \left| \frac{dz \wedge d\overline{z}}{z-\zeta} \right| = \int_K |\varphi(z)| \left| \frac{dz \wedge d\overline{z}}{z-\zeta} \right| \leq$$

$$\leq 2 \left\| \varphi \right\|_K (\int_{K \setminus \overline{D}_\varepsilon(\zeta)} \frac{dx \wedge dy}{|z-\zeta|} + \int_{\overline{D}_\varepsilon(\zeta)} \frac{dx \wedge dy}{|z-\zeta|}) < \infty,$$

onde a primeira das integrais é finita pois $\mu(K \setminus \overline{D}_\varepsilon(\zeta)) < \infty$ e a segunda integral é finita, como foi visto na prova de (11.1.4) (e (11.1.4′)).
Como $K =$supp(φ) é compacto contido em Ω é indiferente integrar em Ω ou em K ou em $\mathbb{R}^2$, isto é,

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(z) \frac{dz \wedge d\overline{z}}{z-\zeta} \quad \forall \ \zeta \in \Omega.$$

O fato de integrar em $\mathbb{R}^2$ torna muito mais simples fazer a mudança de variáveis $\eta = z - \zeta$ na expressão acima de u, donde

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\zeta + \eta) \frac{d\eta \wedge d\overline{\eta}}{\eta} \quad \forall \ \zeta \in \Omega. \tag{11.3.1}$$

Como a função $\eta \longmapsto \eta^{-1}$ é localmente integrável (como foi visto na prova de (11.1.4)) podemos derivar k vezes sob o sinal de integração em (11.3.1), isto é, se D é um operador de derivação de ordem $l \leq k$ em $\mathbb{R}^2$, então

$$Du(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}^2} D\varphi(\zeta + \eta) \frac{d\eta \wedge d\overline{\eta}}{\eta} \quad \forall \ \zeta \in \Omega \ ,$$

o que mostra que $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$. De (11.3.1) e do Teor. 11.1 se segue que

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta + \eta) \frac{d\eta \wedge d\overline{\eta}}{\eta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{\zeta}}(z) \frac{dz \wedge d\overline{z}}{z-\zeta} =$$

$$= \varphi(\zeta) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(0)} \frac{\varphi(z) dz}{z-\zeta} = \varphi(\zeta) \quad \forall \ \zeta \in \Omega,$$

onde $r > 0$ é suficientemente grande de modo que $\text{supp}(\varphi) \subset D_r(0)$. $\square$

A equação
$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}(z) = f(z) \quad \forall \;\; z \in \Omega$$
onde $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ é chamada *equação de Cauchy-Riemann.* No Teor. 11.3 (b) aprendemos a resolver esta equação no caso particular em que f tem suporte compacto. Mais adiante vamos resolver esta equação no caso geral $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.
A partir da representação de uma função holomorfa u num disco aberto $\Omega = D_\rho(\zeta)$ pela sua série de Taylor em volta de ζ, resulta que u pode ser aproximada uniformemente por polinômios sobre qualquer parte compacta de Ω. Este resultado excepcionalmente bom é devido ao fato de Ω ser um disco mas, no caso geral em que Ω é um aberto $\neq \varnothing$ qualquer de $\mathbb{C}$ não podemos esperar um resultado tão bom. No caso geral, o teorema de aproximação toma a forma seguinte: sejam K um compacto e Ω um aberto tais que $\varnothing \neq K \subset \Omega$, procuramos condições topológicas sobre o par (Ω, K) para que toda função holomorfa em alguma vizinhança aberta de K (contida em Ω) possa ser aproximada uniformemente sobre K por funções holomorfas em Ω. Este problema é resolvido pelo seguinte resultado

Teorema 11.4 (Runge) *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{C}$ e $\varnothing \neq K \subset\subset \Omega$. As seguintes condições sobre o par (Ω, K) são equivalentes:*
(i) *Para toda vizinhança aberta ω de K, $\omega \subset \Omega$, toda $f \in \mathcal{H}(\omega)$ pode ser aproximada uniformemente sobre K por funções de $\mathcal{H}(\Omega)$.*
(ii) *O aberto $\Omega \backslash K$ não tem componentes conexas com fecho compacto contido em Ω.*
(iii) *Para cada $z \in \Omega \backslash K$ existe $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que*
(11.4.1) $$|u(z)| > \|u\|_K \; .$$

Um par (Ω, K) verificando as condições equivalentes do Teor. 11.4 é chamado *um par de Runge.*

Observações: O caso mais interessante do ponto de vista da aproximação é aquele em que ω é "muito menor"que Ω pois neste caso (i) expressa que para toda f no espaço "grande"$\mathcal{H}(\omega)$, existe uma sequência $(f_n)_{n \geq 1}$ no espaço "pequeno"$\mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f_n \overset{K}{\rightrightarrows} f$. A condição (ii) é uma caracterização topológica da configuração (Ω, K) para que a aproximação seja possível que tornaremos mais intuitiva nos próximos exemplos. Mais adiante (após a prova do Teor. 11.4) veremos o significado da condição (iii) que voltará a aparecer no estudo das funções holomorfas de várias variáveis. Finalmente, observemos que a condição (i) *não significa* que $f_n|\omega \xrightarrow{\tau_0} f$ em $\mathcal{H}(\omega)$ pois para isto seria necessário que $f_n \overset{L}{\rightrightarrows} f$ para cada $L \subset\subset \omega$ e não apenas sobre K.

Antes de proceder à demonstração do Teor. 11.4 vamos ver vários exemplos de pares (Ω, K), alguns verificando e outros não, a condição (ii) do enunciado.

Exemplo 11.5 (a) Sejam $\Omega := D_2(0)$ e $K := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Neste caso, $O := D_1(0)$ é uma componente conexa de $\Omega \backslash K$ tal que $\overline{O}$ é compacto e $\overline{O} \subset \Omega$. Concluimos então que (Ω, K) não é um par de Runge pois não satisfaz a condição (ii) do Teor. 11.4.
(b) Sejam $\Omega := D_2(0)$ e $K := \overline{D}_1(0)$. Neste caso $O := \Omega \backslash K$ é conexo, $\overline{O}$ é compacto mas $\overline{O}$ não está contido em Ω, portanto este par (Ω, K) satisfaz a condição (ii) do Teor. 11.4 e é um par de Runge.
(c) Sejam $\Omega := \mathbb{C}$ e $K := \overline{D}_1(0)$. Neste caso $O := \Omega \backslash K$ é conexo, $\overline{O} \subset \Omega$ mas $\overline{O}$ não é compacto, portanto este é um exemplo (de tipo diferente do anterior) de par de Runge que satisfaz a condição (ii) do Teor. 11.4 donde $(\Omega, K) = (\mathbb{C}, \overline{D}_1(0))$ é um par de Runge.
(d) Sejam $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 4\}$ e $K := \{z \in \mathbb{C} \mid 2 \le |z| \le 3\}$. Para as duas componentes conexas O_1 e O_2 de $\Omega \backslash K$ tem-se: $\overline{O}_i$ é compacta mas $\overline{O}_i$ não está contida em Ω $(i = 1, 2)$ portanto (Ω, K) não é um par de Runge pois não satisfaz a condição (ii) do Teor. 11.4.

Os exemplos precedentes sugerem então a seguinte imagem intuitiva: os pares (Ω, K) que satisfazem a condição (ii) do Teor. 11.4 são aqueles nos quais, ou bem K não tem "buracos"(Exemplo 11.5. (b) e (c)) ou bem K tem buracos mas estes "provêm"de buracos de Ω (Exemplo 11.5. (d)). No Exemplo 11.5. (a), o buraco de K não provem de nenhum buraco de Ω (que não os têm). Observemos ainda que os Exemplos 11.5 (b) e (c) são diferentes entre si no sentido seguinte:
No Exemplo 11.5 (b): $\overline{O}$ é compacto mas $\overline{O}$ não está contido em Ω;
No Exemplo 11.5 (c): $\overline{O} \subset \Omega$ mas $\overline{O}$ não é compacto.

Na prova do Teor. 11.4 vamos usar o seguinte fato de fácil verificação:
A condição (ii) do Teor. 11.4 é equivalente à seguinte asserção (ver exerc. (11.4)):
(ii$'$) *Para cada componente conexa O de K^c se verifica (pelo menos) uma das afirmações seguintes: $O \cap \Omega^c \neq \varnothing$ ou O não é limitada.*

Prova do Teor. 11.4 (iii) $\Longrightarrow$ (ii): Suponha por absurdo que $\Omega \backslash K$ tem uma componente O tal que $\overline{O} \subset\subset \Omega$, então de $\overline{O} \subset \Omega$ segue $\partial O \subset K$ (ver exerc. (11.5)). Por outro lado, como $\overline{O}$ é compacto, O é um aberto limitado. Dada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ arbitrária, é claro que $f|\overline{O} \in \mathcal{C}(\overline{O})$ e $f|O \in \mathcal{H}(O)$ portanto, pelo princípio de máximo e levando em consideração que $\partial O \subset K$, obtemos:

(11.4.2) $$\|f\|_{\overline{O}} = \|f\|_{\partial O} \le \|f\|_K \quad \forall \ f \in \mathcal{H}(\Omega) ,$$

o que é absurdo por (iii) tomando um ponto arbitrário $z \in O \subset \Omega \backslash K$ pois (11.4.2) expressa que não existe $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ de modo que se verifica (11.4.1).

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Suponha que (ii) é falsa, então o mesmo raciocínio acima mostra que existe uma componente conexa O de $\Omega\backslash K$ de modo que vale (11.4.2). Fixemos um aberto ω tal que $K \subset \omega \subset \Omega$ e $f \in \mathcal{H}(\omega)$, então por (i) existe uma sequência (f_m) em $\mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f_m \overset{K}{\rightrightarrows} f$ donde, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

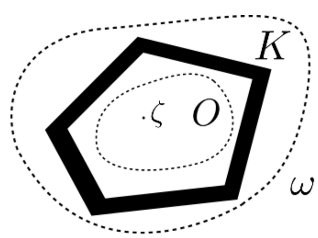
$$\|f_m - f_n\|_K \leq \varepsilon \quad \forall \;\; m, n \geq \nu \ ,$$

o que junto com (11.4.2) implica que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_m - f_n\|_{\overline{O}} \leq \varepsilon \quad \forall \;\; m, n \geq \nu$$

o que expressa que $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy do espaço de Banach $\mathcal{C}(\overline{O})$ [$\overline{O}$ é compacto pois o argumento por absurdo é o mesmo da prova de (iii) $\Longrightarrow$ (ii)]. Em consequência existe $F \in \mathcal{C}(\overline{O})$ tal que $f_m \overset{\overline{O}}{\rightrightarrows} F$ e como $\partial O \subset K$ e $f_m \overset{K}{\rightrightarrows} f$ resulta $F|\partial O = f|\partial O$. De $f_m \in \mathcal{H}(O)$ e $f_m \overset{\overline{O}}{\rightrightarrows} F$ segue que $f_m \rightrightarrows F$ sobre cada compacto de O [isto é, $f_m \to F$ no ELC $(\mathcal{H}(O), \tau_0)$] portanto, pelo teorema de convergência de Weierstrass, obtemos $F \in \mathcal{H}(O)$, donde

$$F \in \mathcal{H}(O) \cap \mathcal{C}(\overline{O}) \ . \tag{11.4.3}$$



É claro agora que todas as considerações precedentes valem para cada aberto ω tal que $K \subset \omega \subset \Omega$ e para cada $f \in \mathcal{H}(\omega)$ e, em particular, são válidas quando fazemos a seguinte escolha:
(a) ω verifica $O\backslash\omega \neq \varnothing$ (isto é, é falso $O \subset \omega$)
(b) $f \in \mathcal{H}(\omega)$ definida por $f(z) := (z - \zeta)^{-1}$, onde $\zeta \in O\backslash\omega$. Evidentemente, temos $(z - \zeta)f(z) = 1$ para cada $z \in \omega$ e como $F|\partial O = f|\partial O$ (lembrar que $\partial O \subset K \subset \omega$) resulta

$$(z - \zeta)F(z) = 1 \quad \forall \;\; z \in \partial O \ . \tag{11.4.4}$$

Definimos $v(z) := (z - \zeta)F(z) \quad \forall \;\; z \in \overline{O}$ então, por (11.4.3) resulta $v \in \mathcal{H}(O) \cap \mathcal{C}(\overline{O})$. Por outro lado, por (11.4.4) obtemos

$$v(z) = 1 \quad \forall \;\; z \in \partial O$$

o que pelo princípio de máximo (aplicado a $v - 1$) implica $v \equiv 1$ em $\overline{O}$ (estamos supondo $\overline{O}$ compacto), o que é absurdo pois $\zeta \in O \subset \overline{O}$ e $v(\zeta) = 0$.
(ii) $\Longrightarrow$ (i) Sejam ω um aberto tal que $K \subset \omega \subset \Omega$ e $f \in \mathcal{H}(\omega)$, então (i) significa que vale a afirmação:

(i′) $\quad \forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ u \in \mathcal{H}(\Omega)$ *tal que* $\|u - f\|_K \leq \varepsilon$.

É claro que

$$X := \{\varphi_K \mid \varphi_K := \varphi|K \ , \text{ onde } \varphi \in \mathcal{H}(\Omega)\}$$

é um subespaço vetorial do espaço de Banach $\mathcal{C}(K)$.
Por outro lado, $f_K := f|K \in \mathcal{C}(K)$ mas como o caso interessante é $\omega \neq \Omega$ e f não tem porque admitir uma extensão holomorfa a Ω, em geral teremos $f_K \notin X$. Então, (i′) pode ser expressada de forma equivalente assim:

(i′′) $\qquad \forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ u_K \in X$ *tal que* $\|u_K - f_K\| \leq \varepsilon$,

onde $\|\cdot\|$ denota a norma de $\mathcal{C}(K)$. Ora, é claro que (i′′) é equivalente a

(i′′′) $$f_K \in \overline{X}\ .$$

Por um corolário do teorema de Hahn-Banach (ver [R2], Th. 5.19) a condição (i′′′) é equivalente à seguinte:

(i$^{\text{IV}}$) $\qquad \forall\ \ \Phi \in \mathcal{C}(K)'$ *tal que* $X \subset Ker\ \Phi$ *tem-se* $\Phi(f_K) = 0$.

Em vista do teorema de representação de Riesz (ver [R2], Th. 6.19), para cada $\Phi \in \mathcal{C}(K)'$ existe uma única medida de Borel complexa regular μ sobre K tal que

$$\Phi(g) = \int_K g d\mu \quad \forall\ \ g \in \mathcal{C}(K)$$

e então, (i$^{\text{IV}}$) equivale a

(i$^{\text{V}}$) $\quad$ $\forall$ medida de Borel complexa regular μ sobre K tal que $\int_K \sigma d\mu = 0\ \ \forall\ \ \sigma \in X$ tem-se $\int_K f_K d\mu = 0$.

Em resumo, vamos provar que (ii) $\Longrightarrow$ (i$^{\text{V}}$). Como $\int_K f_K d\mu = \int_K f d\mu$ no que segue escrevemos f em vez de f_K. A verificação de (ii) $\Longrightarrow$ (i$^{\text{V}}$) tem duas etapas. Observemos inicialmente que se μ é uma medida de Borel complexa sobre K, podemos estender μ a uma medida de Borel complexa $\widehat{\mu}$ sobre $\mathbb{C}$ definida por $\widehat{\mu}(A) := \mu(A \cap K)$ para cada boreliano $A \subset \mathbb{C}$. É claro que $\widehat{\mu}$ é uma medida de Borel complexa sobre $\mathbb{C}$ de suporte compacto (contido em K), portanto o Teorema 11.3 (a) é aplicável. Por simplicidade de notação, no que segue $\widehat{\mu}$ será denotado por μ.
Aqui é interessante notar que a nossa hipótese (ii) será utilizada apenas na verificação da seguinte:
Afirmação 1 *Se μ é uma medida de Borel complexa regular sobre K tal que*

(11.4.5) $$\int_K \sigma d\mu = 0 \quad \forall\ \ \sigma \in X\ ,$$

então a função $\varphi : \zeta \in K^c \longmapsto \int_K \frac{d\mu(z)}{z - \zeta} \in \mathbb{C}$ *é identicamente nula.*

Prova da Afirmação 1. Fixemos uma medida de Borel complexa regular μ sobre K tal que $\int_K \sigma d\mu = 0$ para cada $\sigma \in X$. Pelo Teor. 11.3 (a) sabemos que $\varphi \in \mathcal{H}(K^c)$. Derivando sob o sinal de integração [o que é legítimo pois para cada $\zeta \in K^c$ e cada $\nu \geq 0$ a função definida por

$$z \in K \longmapsto \frac{d^\nu}{dz^\nu}((z-\zeta)^{-1}) = \nu!(z-\zeta)^{-\nu-1} \in \mathbb{C}$$

pertence a $\mathcal{L}^1(K)$ (pois de fato pertence a $\mathcal{C}(K) \subset \mathcal{L}^1(K)$] obtemos

$$\varphi^{(\nu)}(\zeta) = \nu! \int_K \frac{d\mu(z)}{(z-\zeta)^{\nu+1}} \qquad (\zeta \in K^c, \nu \geq 0). \tag{11.4.6}$$

Se $\zeta \in \Omega^c \subset K^c$ então a função $\sigma_{\nu,\zeta} : z \in \Omega \longmapsto (z-\zeta)^{-\nu-1} \in \mathbb{C}$ é holomorfa em Ω para cada $\nu \geq 0$, isto é, $\sigma_{\nu,\zeta} \in \mathcal{H}(\Omega)$ para cada $\nu \geq 0$, donde

$$\sigma_{\nu,\zeta}| \, K \in X \text{ para cada } \nu \geq 0. \tag{11.4.7}$$

Resulta então que (11.4.6) pode ser escrita na forma

$$\varphi^{(\nu)}(\zeta) = \nu! \int_K \sigma_{\nu,\zeta}(z) d\mu(z)$$

portanto, pela hipótese feita sobre μ (ver enunciado da Afirmação 1) e por (11.4.7) resulta $\varphi^{(\nu)}(\zeta) = 0 \;\; \forall \;\; \zeta \in \Omega^c$ e $\nu \geq 0$, isto é,

$$\varphi^{(\nu)} \equiv 0 \;\text{ em }\; \Omega^c \quad \forall \;\; \nu \geq 0 \tag{11.4.8}$$

Observemos que devemos provar que $\varphi \equiv 0$ em K^c (e visivelmente "$\varphi^{(\nu)} \equiv 0$ em $\Omega^c \;\; \forall \;\; \nu \geq 0$" não implica "$\varphi^{(\nu)} \equiv 0$ em $K^c \;\; \forall \;\; \nu \geq 0$" (basta que K^c tenha uma componente conexa O tal que $\overline{O} \subset\subset \Omega$). O esquema da prova da implicação (ii) $\Longrightarrow$ (i) é o seguinte:

Etapa 1: Provar a Afirmação 1.

Etapa 2: Provar que a Afirmação 1 $\Longrightarrow$ (i^{V}).

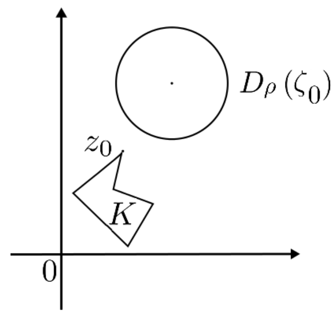
Vamos provar que : $\varphi \equiv 0$ em K^c.

Seja $(O_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ a família das componentes conexas de K^c então (ver Exerc. 11.5 (b)) temos, $\forall \;\; \lambda \in \Lambda$, duas possibilidades (aqui usamos (ii) na forma (ii$'$)):

$$O_\lambda \cap \Omega^c \neq \varnothing \qquad \text{ou} \qquad O_\lambda \text{ não é limitada.}$$

Como K é compacto, é claro que K^c tem uma única componente conexa não limitada que vamos indicar com O_α $(\alpha \in \Lambda)$ e então, definindo $\Lambda_1 := = \{\lambda \in \Lambda \mid O_\lambda \cap \Omega^c \neq \varnothing\}$ é claro que $\Lambda = \Lambda_1 \cup \{\alpha\}$. Vamos então verificar que

(11.4.9) $\qquad \varphi \equiv 0$ em $O_\lambda, \quad \forall \ \lambda \in \Lambda.$



Caso 1 Seja $\lambda \in \Lambda_1$, arbitrário. Então existe $\zeta \in O_\lambda \cap \Omega^c$ e por (11.4.8) e pelo Corol. 4.13 resulta $\varphi \equiv 0$ em $O_\lambda \left[\varphi^{(\nu)}(\zeta) = 0 \ \ \forall \ \ \nu \geq 0\right]$, donde

(11.4.10) $\qquad \varphi \equiv 0$ em $O_\lambda \quad \forall \ \lambda \in \Lambda_1.$

Caso 2 Vejamos agora que $\varphi \equiv 0$ em O_α. Como K é compacto e $z \in K \longmapsto |z| \in \mathbb{R}$ é contínua, existe $z_0 \in K$ tal que $|z_0| = \sup\limits_{z \in K} |z|$. Como O_α não é limitada, existe $\zeta_0 \in O_\alpha$ tal que $|\zeta_0| > |z_0|$.
Definimos $r_1 := \dfrac{1}{2} \left(|\zeta_0| - |z_0|\right)$. Como $\zeta_0 \in O_\alpha$ que é aberto, existe $r_2 > 0$ tal que $D_{r_2}(\zeta_0) \subset O_\alpha$ portanto, se $\rho := \min(r_1, r_2)$ é imediato verificar
$D_\rho(\zeta_0) \subset O_\alpha \quad$ e $\quad |\zeta| > |z_0| \quad \forall \ \zeta \in D_\rho(\zeta_0)$
(pois se existisse $\zeta \in D_\rho(\zeta_0)$ tal que $|\zeta| \leq |z_0|$ então teríamos $|\zeta_0| \leq |\zeta| + |\zeta_0 - \zeta| < |z_0| + \rho \leq |z_0| + r_1 < |z_0| + 2r_1 = |\zeta_0|$,o que seria ridículo). Em consequência $|z| \leq |z_0| < |\zeta| \ \ \forall \ \ z \in K$ e $\forall \ \ \zeta \in D_\rho(z_0)$ o que implica que a série geométrica

$$\frac{1}{z - \zeta} = -\frac{1}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^n}$$

converge uniformemente em $z \in K \ \ \forall \ \ \zeta \in D_\rho(\zeta_0)$ donde resulta que podemos integrar esta série termo a termo obtendo:

$$\varphi(\zeta) = \int_K \frac{d\mu(z)}{z - \zeta} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\zeta^{n+1}} \int_K z^n d\mu(z) = 0 \qquad (\zeta \in D_\rho(\zeta_0))$$

pois a restrição a K de cada uma das funções $z \longmapsto z^n$ pertence a X e então, de novo pela hipótese sobre μ (ver enunciado da Afirmação 1), se segue que $\int_K z^n d\mu(z) = 0 \ \ \forall \ \ n \geq 0$. Provamos assim que $\varphi \equiv 0$ em $D_\rho(\zeta_0)$ e portanto (pelo Corol.4.13) resulta

(11.4.11) $\qquad \varphi \equiv 0$ em O_α .

Por (11.4.10) e (11.4.11) resulta $\varphi \equiv 0$ em $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda = K^c$, o que completa

a prova da Afirmação 1. Vejamos finalmente que
Afirmação 1 $\Longrightarrow$ *(i^{V}):* Seja V um aberto tal que

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset \omega\ ,$$

$\overline{V}$ compacto e $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\omega)$ verificando $0 \leq \psi \leq 1$ e $\psi \equiv 1$ sobre $\overline{V}$. Pelo Teor. 11.1 (ou mais precisamente, pelo exerc. (11.1), (b) temos:

$$f(z)\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\omega \frac{f(z)}{\zeta - z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta) d\zeta \wedge d\overline{\zeta} \quad \forall\ \ z \in \omega$$

e como $\psi \equiv 1$ em $\overline{V} \supset K$ resulta

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\omega \frac{f(z)}{\zeta - z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta) d\zeta \wedge d\overline{\zeta} \quad \forall\ \ z \in K \tag{11.4.12}$$

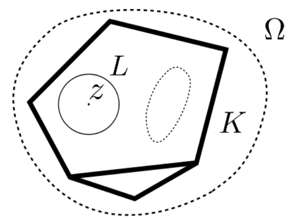
De $\psi \equiv 1$ em $\overline{V}$ resulta também que $\dfrac{\partial \psi}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta) = 0 \quad \forall\ \ \zeta \in V$ e, em particular $\dfrac{\partial \psi}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta) = 0 \quad \forall\ \ \zeta \in K$, portanto (11.4.12) se escreve assim:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\omega \cap K^c} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta) d\zeta \wedge d\overline{\zeta} \quad \forall\ \ z \in K$$

donde resulta (i^{V}):

$$\int_K f(z) d\mu(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_K \left\{ \int_{\omega \cap K^c} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta) d\zeta \wedge d\zeta \right\} d\mu(z) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega \cap K^c} \left\{ \int_K \frac{d\mu(z)}{z - \zeta} \right\} f(\zeta) \frac{\partial \psi}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta) d\zeta \wedge d\overline{\zeta} = 0$$



pois pela Afirmação 1 tem-se $\displaystyle\int_K \frac{d\mu(z)}{z - \zeta} = 0$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Fixado $z \in \Omega \backslash K$ arbitrário escolhemos um disco fechado L de centro z tal que $L \subset \Omega \backslash K$. Seja O a componente de $\Omega \backslash K$ que contem L, então definimos
$\mathcal{C}_1 :=$ conjunto das componentes de $\Omega \backslash L \cup K$,
$\mathcal{C}_2 :=$ conjunto das componentes de $\Omega \backslash K$ que são diferentes de O.
É claro que $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 \cup \{O \backslash L\}$ (Observe que a única componente de $\Omega \backslash K$ que foi alterada foi O, pela retirada do pequeno disco fechado L)

Se $O' \in \mathcal{C}_1, O' \neq O\backslash L$ então $O' \in \mathcal{C}_2$ logo O' satisfaz (u), isto é,

$$(11.4.13) \qquad \overline{O}' \text{ não é compacto ou } \overline{O}' \text{ não está contido em } \Omega.$$

Agora está claro que a componente restante de $\Omega\backslash L \cup K$, isto é, $O\backslash L$, também satisfaz:

$$(11.4.14) \qquad \overline{O\backslash L} \text{ não é compacto ou } \overline{O\backslash L} \text{ não está contido em } \Omega.$$

De fato, por (ii) resulta que : $\overline{O}$ não é compacto ou $\overline{O}$ não está contido em Ω. Se $\overline{O}$ não é compacto então O não é limitado e portanto $O\backslash L$ não é limitado donde $\overline{O\backslash L}$ não é compacto. Se $\overline{O}$ não está contido em Ω então existe $\zeta \in \partial O$ tal que $\zeta \notin \Omega$ donde $\zeta \notin L$ (pois $L \subset \Omega$) o que implica $\zeta \in \partial O\backslash L \subset \overline{O\backslash L}$ e portanto $\overline{O\backslash L}$ não está contido em Ω, o que prova (11.4.14). Ora, de (11.4.13) e (11.4.14) resulta que $\Omega\backslash L \cup K$ não tem componentes com fecho compacto contida em Ω, isto é, o par $(\Omega, L \cup K)$ satisfaz a condição (ii). Sejam V (resp. W) uma vizinhança aberta de K (resp. L) tais que $V \cap W = \varnothing$ e considere a função $f \in \mathcal{H}(V \cup W)$ definida por $f := 0$ em V e $f := 1$ em W. Como já verificamos a equivalência (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) concluímos que f pode ser aproximada uniformemente sobre $L \cup K$ por elementos de $\mathcal{H}(\Omega)$, em particular, existe $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\|u - f\|_{L\cup K} < 1/2$ donde $\|u\|_K < 1/2$ e $\|u - 1\|_L < 1/2$, o que implica (por ser z o centro de L):

$1 - |u(z)| \leq |u(z) - 1| < 1/2$ e portanto $|u(z)| > 1/2 \geq \|u\|_K$. □

A condição (ii) do Teor. 11.4 sugere a introdução do conceito de envólucro holomorfo de um compacto que é muito importante em várias variáveis:

Definição 11.5 Sejam Ω um aberto de $\mathbb{C}$ e K um compacto contido em Ω. Chama-se $\mathcal{H}(\Omega)$-*envólucro de* K ao conjunto

$$\widehat{K}_\Omega := \{z \in \Omega \mid |f(z)| \leq \|f\|_K \quad \forall \quad f \in \mathcal{H}(\Omega)\}.$$

É claro que $K \subset \widehat{K}_\Omega \subset \Omega$. No Exerc. 11.6 estão reunidas as propriedades mais simples do $\mathcal{H}(\Omega)$-envólucro de K. Se Ω é um aberto de $\mathbb{C}$ e K é uma parte compacta de Ω, diz-se que (Ω, K) é um *par de Runge* quando estão verificadas as três condições equivalentes do Teor. 11.4. Quando não houver perigo de confusão, escreveremos $\widehat{K}$ em vez de $\widehat{K}_\Omega$.

O fim da prova do Teorema 9.5

Nesta parte final do Cap. 11 vamos precisar de três resultados prévios, cada um dos quais é frequentemente chamado de "Teorema de aproximação de Runge". Aqui vai ser necessário trabalhar com a esfera de Riemann S^2 e vamos usar frequentemente a Def. 9.3 e a Prop. 9.4. Além disso, para cada $\psi \in \mathcal{M}(S^2)$, o conjunto de *todos os polos de* ψ será denotado por

$Pol(\psi)$.

Teorema 11.1* Sejam $K \subset\subset \mathbb{C}$ *e* $A \subset S^2 \backslash K$ *verificando a condição*

(11.1*.1) $A \cap V \neq \varnothing$ *para cada componente conexa* V *de* $S^2 \backslash K$.

Se Ω *é um aberto de* $\mathbb{C}$ *tal que* $\Omega \supset K$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *e* $\varepsilon > 0$ *então, existe* $R \in \mathcal{M}(S^2)$ *verificando* $Pol(R) \subset A$ *tal que* $\|f - R\|_K < \varepsilon$.

Observações (a) $S^2 \backslash K$ tem no máximo uma quantidade enumerável de componentes conexas. Se V indica a componente conexa ilimitada de $S^2 \backslash K$, pode muito bem acontecer que $\infty \in A \cap V$, que é um caso particular de especial interesse como veremos no Teor. 11.2*.
(b) Como resultará da prova do Teor. 11.1*, o caso particular em que supomos $A \cap V = \{\alpha\}$ para cada componente conexa V de $S^2 \backslash K$ [isto é, A tem um único ponto em cada componente conexa de $S^2 \backslash K$] é suficiente para as nossas finalidades.

Prova do Teor. 11.1* Naturalmente, a prova é muito parecida com a da implicação (ii) $\Longrightarrow$ (i) do Teor. 11.4, inclusive com o mesmo tipo de utilização dos teoremas de Hahn-Banach e de representação de Riesz. Por esta razão, a prova que segue será bastante abreviada. Consideremos

$$M := \left\{\psi|K \mid \psi \in \mathcal{M}(S^2) \text{ e } Pol(\psi) \subset A\right\},$$

então a hipótese $A \subset S^2 \backslash K$ implica que M é um subespaço vetorial de $\mathcal{C}(K)$ e então devemos provar que

(11.1*.2) $\qquad f|K$ pertence ao fecho de M em $\mathcal{C}(K)$.

Agora, usando os teoremas de Hahn-Banach e de representação de Riez da mesma forma que na prova do Teor. 11.4 (ii) $\Longrightarrow$ (i), é fácil ver que (11.1*.2) é equivalente à seguinte afirmação:

(11.1*.3) | Para cada medida de Borel complexa regular μ sobre K tal que $\int_K \psi d\mu = 0$ para cada $\psi \in M$, tem-se $\int_K (f|K) d\mu = 0$.

Fixemos uma medida de Borel complexa regular μ sobre K tal que $\int_K \psi d\mu = 0$ para cada $\psi \in M$ e consideremos a função:

$$h(z) := \int_K \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z} \quad \forall \ z \in S^2 \backslash K.$$

É fácil ver que $h \in \mathcal{H}(S^2 \backslash K)$ [pelo mesmo tipo de argumento usado na prova do Teor. 4.3 (desenvolvimento em série de potências)]. Se V é uma componente conexa arbitrária de $S^2 \backslash K$, pela hipótese (11.1*.1),existe $\alpha \in A \cap V$ e então existe $r > 0$ tal que $D_r(\alpha) \subset V$. Se $\alpha \neq \infty$ e fixamos $z \in D_r(\alpha)$, é claro [observando que $\left|\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}\right| < 1$ para $\zeta \in K$ e com os mesmo argumentos da prova do Teor. 4.3] que

(11.1*.4) $\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z-\alpha)^m}{(\zeta-\alpha)^{m+1}}$, uniformemente em K ($z \in D_r(\alpha)$ fixado)

Em consequência, podemos integrar a série acima termo a termo em relação a $d\mu(\zeta)$. Como para cada $m \in \mathbb{N}$ a função

$$\psi_m(\zeta) := \frac{(z-\alpha)^m}{(\zeta-\alpha)^{m+1}} \qquad (\zeta \in S^2)$$

pertence a $\mathcal{M}(S^2)$ e $\{\alpha\} = Pol(\psi_m) \subset A$, concluimos que $\psi_m \in M$ e então (pela hipótese feita sobre μ em (11.1*.3)) resulta

$$\int_K \psi_m(\zeta) d\mu(\zeta) = 0 \qquad (m \geq 0)$$

donde, para cada $z \in D_r(\alpha)$ temos

$$h(z) = \int_K \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{m=0} \int_K \psi_m(\zeta) d\mu(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_K \frac{(z-\alpha)^m}{(\zeta-\alpha)^{m+1}} d\mu(\zeta) = 0.$$

e então, pelo Corol. 4.13 resulta

(11.1*.5) $$h(z) = 0 \text{ para cada } z \in V.$$

Se $\alpha = \infty$, em vez de (11.1*.4) escrevemos

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta^m}{z^{m+1}} \quad \forall \ \zeta \in K \ \text{ e } \ |z| > r,$$

onde $r > 0$ é tal que $K \cap D_r(\infty) = \varnothing$. Mostremos que

$$h(z) = 0 \quad \forall \quad z \in D_r(\infty)$$

De fato, $\varphi_m(\zeta) := \zeta^m \cdot z^{-m-1}$ é um polinômio donde $\varphi_m \in \mathcal{M}(S^2)$ e $Pol(\varphi_m) = \{\infty\} \subset A$ e então a hipótese feita sobre μ em(11.1*.3) mostra que $\int_K \varphi_m(\zeta) d\mu(\zeta) = 0$ para cada $m \geq 0$ o que implica para cada $z \in D_r(\infty)$:

$$h(z) = -\int_K \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z} = -\sum_{m=0}^{\infty} \int_K \varphi_m(\zeta) d\mu(\zeta) = -\sum_{m=0}^{\infty} \int_K \zeta^m \cdot z^{-m-1} d\mu(\zeta) = 0$$

portanto h é nula na componente conexa de $S^2 \backslash K$ que contém ∞, isto é, $h \equiv 0$ na componente conexa ilimitada de $S^2 \backslash K$, o que junto com (11.1*.5) implica

(11.1*.6) $$h \equiv 0 \qquad (\text{isto é, } \ h(z) = 0 \quad \forall \ \ z \in S^2 \backslash K)$$

Pelo Lema 9.6 existe um ciclo Γ em $\Omega \backslash K$ tal que

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z) dz}{z - \zeta} \quad \forall \ \ \zeta \in K$$

e então pelo teorema de Fubini (cuja aplicação é legítima pois estamos trabalhando com medidas de Borel e funções contínuas em compactos) vem

$$\int_K f(\zeta)d\mu(\zeta) = \int_K d\mu(\zeta)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)dz}{z-\zeta}\right\} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz\int_K \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)h(z)dz = 0, \text{ por } (11.1^*.6), \text{ o que prova } (11.1^*.3) \text{ e}$$

portanto $(11.1^*.2)$. $\square$

Observação: Embora V seja, em $(11.1^*.5)$, uma componente conexa arbitrária de $S^2\backslash K$ poderia muito bem acontecer que se V_0 é a componente ilimitada de $S^2\backslash K$ então $A \cap V_0 = \{\infty\}$. É claro que o caso de V_0 não está incluído na prova de $(11.1^*.5)$ razão pela qual foi necessário provar a parte que $h \equiv 0$ em V_0, para termos $(11.1^*.6)$.

Teorema 11.2* *Sejam $K \subset\subset \mathbb{C}$ tal que $S^2\backslash K$ é conexo, Ω um aberto de $\mathbb{C}$ tal que $\Omega \supset K$ e suponhamos que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Então existe uma sequência $(p_m)_{m\geq 1}$ de polinômios tal que*

$$p_m \overset{K}{\rightrightarrows} f \qquad\qquad (m \to \infty)$$

Prova Como $S^2\backslash K$ tem uma única componente conexa $V := S^2\backslash K$ que não é limitada pois $K \subset\subset \mathbb{C}$, podemos aplicar o Teor. 11.1* com $A = \{\infty\}$. Então, para cada $\varepsilon_m = 1/m$ $(m \in \mathbb{N}^*)$ existe $p_m \in \mathcal{M}(S^2)$ tal que $Pol(p_m) \subset \{\infty\}$ e $\|p_m - f\|_K < 1/m$, o que prova o resultado pois a inclusão acima implica que p_m é um polinômio para cada $m \in \mathbb{N}^*$. $\square$

Teorema 11.3* *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{C}$, $A \subset S^2\backslash\Omega$ suponhamos verificada a condição seguinte:*

$(11.3^*.1)$ $\qquad A \cap X \neq \varnothing$ *para cada componente conexa X de $S^2\backslash\Omega$.*

Então, para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ existe uma sequência $(R_m)_{m\geq 1}$ em $\mathcal{M}(S^2)$, verificando $Pol(R_m) \subset A$ para cada $m \geq 1$ tal que

$$R_m \overset{K}{\rightrightarrows} f \ \text{ se } \ m \to \infty, \quad \forall \ K \subset\subset \Omega.$$

Em particular, se $S^2\backslash\Omega$ é conexo, existe uma sequência $(p_m)_{m\geq 1}$ de polinômios tal que

$$p_m \overset{K}{\rightrightarrows} f \ \text{ se } m \to \infty, \quad \forall \ K \subset\subset \Omega.$$

Observações (1) O conjunto fechado $S^2\backslash\Omega$ pode ter uma infinidade não enumerável de componentes conexas, por exemplo, se $\mathcal{C}$ é o conjunto de Cantor ($\mathcal{C} \subset [0,1]$),

$$\mathcal{C}_0 := \{x + iy \mid x \in \mathcal{C} \ \text{ e } \ y \in \mathbb{R}\} \subset S^2 \ \text{ e } \ S^2\backslash\Omega = \{\infty\} \cup \mathcal{C}_0.$$

(2) Notemos que a última afirmação do Teor. 11.3* está dizendo que a sequência $(p_m|\Omega)_{m\geq 1}$ converge para f no ELC $(\mathcal{H}(\Omega), \tau_0)$.

Prova do Teor. 11.3* **Seja** $(K_m)_{m\geq 1}$ uma sequência de compactos verificando as quatro condições (a), (b), (c) e (d) do Lema 10.17. Fixemos $m \geq 1$ arbitrário. Dada uma componente conexa V de $S^2\backslash K_m$, pela condição (d) do Lema 10.17, existe uma componente conexa X de $S^2\backslash\Omega$ tal que $V \supset X$ e então a hipótese (11.3*.1) implica que $A \cap V \neq \varnothing$. Ficou então provada a afirmação:

$$A \cap V \neq \varnothing \quad \forall \text{ componente conexa } V \text{ de } S^2\backslash K_m.$$

Em consequência, como $A \subset S^2\backslash\Omega \subset S^2\backslash K_m$ podemos aplicar o Teor. 11.1* aos dados K_m, A, Ω, f e $\varepsilon := 1/m$, donde concluímos que existe $R_m \in \mathcal{M}(S^2)$ verificando $Pol(R_m) \subset A$ e tal que

$$\text{(11.3*.2)} \qquad \|R_m - f\|_{K_m} < 1/m \qquad (m \geq 1)$$

Seja $K \subset\subset \Omega$ arbitrário. Pela condição (c) do Lema 10.17 existe $\nu \in \mathbb{N}^*$ tal que $K \subset K_m$ para cada $m \geq \nu$ e então de (11.3*.2) resulta

$$\|R_m - f\|_K \leq \|R_m - f\|_{K_m} < 1/m \qquad \forall \ m \geq \nu,$$

o que prova a primeira afirmação.

Em particular, se $S^2 \backslash\Omega$ é conexo então a condição (d) do Lema 10.17 implica que $S^2\backslash K_m$ é conexo para cada $m \geq 1$. Pelo Teor. 11.2* resulta que fixado $m \geq 1$ arbitrário existe um polinômio p_m tal que $\|p_m - f\|_{K_m} < 1/m$ e então, a conclusão segue como no caso acima pois se $K \subset\subset \Omega$ e $K \subset K_m$ para cada $m \geq \nu$ podemos concluir

$$\|p_m - f\|_K \leq \|p_m - f\|_{K_m} < 1/m \quad \forall \ m \geq \nu. \ \square$$

A prova do Teor. 9.5 A única implicação que faltava provar era (iv) $\Longrightarrow$ (v) que é exatamente a segunda afirmação do Teor. 11.3*.

Exercícios

(11.1) Sejam Ω e W como no Teor.11.1 e $u \in \mathcal{C}^1(\overline{W})$.

(a) Mostre que se $u \in \mathcal{H}(W)$ então para cada $\zeta \in W$ tem-se

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial W} \frac{u(z)}{z-\zeta}dz.$$

(b) Mostre que se $u = 0$ em ∂W então, para cada $\zeta \in W$ tem-se

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_W \frac{\partial u}{\partial \overline{z}}(z)\frac{dz \wedge d\overline{z}}{z-\zeta} \ .$$

Em particular, a identidade acima vale se $u \in \mathcal{D}(W)$.

(11.2) Prove o Lema 11.2 .

(11.3) Prove o item (b) do Teor. 11.3 com as hipóteses:
(i) Ω é limitado e (ii) $\varphi \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ é limitada.

Sugestão: As hipóteses de limitação sobre Ω e φ asseguram a existência da integral que define u pois para $\zeta \in \Omega$ e $\overline{D}_\varepsilon(\zeta) \subset \Omega$ fixadas temos

$$\int_\Omega |\varphi(z)| \left|\frac{dz \wedge d\bar{z}}{z-\zeta}\right| \leq 2\,\|\varphi\|_\Omega \Big(\int_{\Omega \setminus \overline{D}_\varepsilon(\zeta)} \frac{dz \wedge dy}{|z-\zeta|} + \int_{\overline{D}_\varepsilon(\zeta)} \frac{dz \wedge dy}{|z-\zeta|}\Big) < \infty,$$

onde a primeira (resp. segunda) integral do segundo membro é finita devido ao fato de Ω ser limitado (pela integrabilidade local de $z \longmapsto (z-\zeta)^{-1}$, ver (11.1.4′)). É claro agora que bastará provar que cada $z_0 \in \Omega$ fixado possui uma vizinhança aberta V tal que

$$u \in \mathcal{C}^k(V) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}} = \varphi \ \text{ ou } V\ .$$

Fixado $z_0 \in \Omega$ arbitrário seja V uma vizinhança aberta de z_0 tal que $\overline{V} \subset\subset \Omega$. Seja $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $0 \leq \chi \leq 1, \chi \equiv 1$ em $\overline{V}$ e $\operatorname{supp}(\chi) \subset\subset \Omega$.
Então $u = u_1 + u_2$ donde

$$u_1(\zeta) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Omega \chi(z)\varphi(z)\frac{dz \wedge d\bar{z}}{z-\zeta}$$

e

$$u_2(\zeta) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Omega [1-\chi(z)]\,\varphi(z)\frac{dz \wedge d\bar{z}}{z-\zeta}\ .$$

Como $\chi\varphi \in \mathcal{C}_0^k(\Omega)$, pelo Teor. 11.3 (b), tem-se:

$$u_1 \in \mathcal{C}^k(\Omega) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u_1}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) = \chi(\zeta)\varphi(\zeta) \quad \forall\ \zeta \in \Omega$$

Prove a seguir que

(I.) $u_1 \in \mathcal{C}^k(V)$ e $\dfrac{\partial u_1}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) = \varphi(\zeta) \quad \forall\ \zeta \in V$

e

(II.) $u_2 \in \mathcal{C}^k(V)$ e $\dfrac{\partial u_2}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) = 0 \quad \forall\ \zeta \in V.$

(use a igualdade $u_2(\zeta) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Omega\setminus\overline{V}} [1-\chi(z)]\,\varphi(z)\frac{dz \wedge d\bar{z}}{z-\zeta} \quad \forall\ \zeta \in V$)

(11.4) (*Topologia Geral, componentes conexas de um aberto de* $\mathbb{R}^n$)
Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ a família das componentes de Ω então:
(a) Ω_λ é um aberto (não vazio por definição de componente) para cada $\lambda \in \Lambda$ e $\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu = \varnothing$ sempre que $\lambda, \mu \in \Lambda$ e $\Omega_\lambda \neq \Omega_\mu$;
(b) $\partial\Omega_\lambda \subset \partial\Omega \quad \forall\ \lambda \in \Lambda$;
(c) $Card(\Lambda) \leq Card(\mathbb{N})$.

(11.5) (*Topologia Geral*) Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e suponha que

$\varnothing \neq K \subset\subset \Omega$. Prove que as condições abaixo são equivalentes:
(a) Não existe nenhuma componente conexa O de $\Omega \cap K^c$ tal que $\overline{O} \subset\subset \Omega$ (esta é a condição (ii) do Teor. 11.4);
(b) Para cada componente conexa Σ de K^c tem-se $\Sigma \cap \Omega^c \neq \varnothing$ ou Σ não é limitada.
[**Observação:** Note que se O é a componente não limitada de K^c então pode acontecer qualquer das duas possibilidades seguintes: (I.) $\Omega^c \cap O \neq \varnothing$ ou (II.) $\Omega^c \cap O = \varnothing$. De fato, num par (K, Ω) verificando (I.) (resp. (II.)) é o seguinte: $K := \overline{D}_1(0)$ e $\Omega := D_2(0)$ (resp. $K := \{z \mid 2 \leq |z| \leq 3\}$ e $\Omega := (\overline{D}_1(0)^c)$].

(11.6) Sejam Ω um aberto de $\mathbb{C}$, $K \subset\subset \Omega$ e $\widehat{K} := \widehat{K}_\Omega$. Prove as afirmações seguintes:
(a) Se d indica a distância euclideana em $\mathbb{C}$, então $d(K, \Omega^c) = d(\widehat{K}, \Omega^c)$;
(b) $\widehat{K}$ é compacto e $(\Omega, \widehat{K})$ é um par de Runge;
(c) (Ω, K) é um par de Runge se e só se $K = \widehat{K}$;
(d) Se $K \subset G \subset\subset \Omega$ então $\widehat{K}_\Omega \subset \widehat{G}_\Omega$;
(e) $\widehat{K}$ está contido no envólucro convexo de K.
[**Sugestão:** (a) Basta ver que fixado $\zeta \in \Omega^c$ se tem $d(K, \zeta) \leq d(\widehat{K}, \zeta)$. Observe que a relação $w \in \widehat{K}$ equivale a $|f(w)| \leq \|f\|_K \ \ \forall \ \ f \in \mathcal{H}(\Omega)$; aplicar esta desigualdade com $f_0 \in \mathcal{H}(\Omega)$ definida por $f_0(z) := (z - \zeta)^{-1}$.
(e) Seja $\Gamma(K)$ o envólucro convexo de K, prove que $K \subset \bigcap_{(p,q) \in \mathbb{R}^2} S(p, q, \sigma_{pq}) =$
$= \Gamma(K)$, onde
$S(p, q, t) := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid px - qy \leq t\big\}$ e $\sigma_{pq} := \sup_{u+iv \in K} (pu - qv)$. Para provar a inclusão $\widehat{K} \subset S(p, q, \sigma_{p,q})$ use a desigualdade $|f(z)| \leq \|f\|_K$ com $z = x + iy \in \widehat{K}$, $f(w) := e^{aw}$ e $a := p + iq$.] **Observação:** Do item (a) resulta a seguinte imagem geométrica de $\widehat{K}_\Omega$: este conjunto é a reunião de K com os pontos que pertencem aos "buracos"de K que "não provém de buracos"de Ω.

(11.7) Prove que se Ω é um aberto de $\mathbb{C}$ então existe uma sequência exaustiva $(K_n)_{n \geq 1}$ para Ω tal que $(\Omega; K_n)$ é um par de Runge para cada $n \geq 1$ (isto é, a sequência $(K_n)_{n \geq 1}$ satisfaz as seguintes condições: (I.) $K_n \subset\subset \Omega$ $\forall \ n \geq 1$; (II.) $\widehat{K}_n = K_n \ \ \forall \ \ n \geq 1$; (III.) $K_n \subset \mathring{K}_{n+1} \ \ \forall \ \ n \geq 1$ e (IV.) $\Omega = \bigcup_{n \geq 1} K_n$)
[**Sugestão:** use o Exerc. (11.6)].

(11.8) Seja Ω um aberto de $\mathbb{C}$.
(a) Prove que se $K := \overline{D}_r(a) \subset\subset \Omega$ então $K = \widehat{K}_\Omega$ (isto é, (Ω, K) é um par de Runge).
(b) Com as notações acima, se $r > s > 0$ e $H := K \cap (D_s(a))^c$ prove que $H \neq \widehat{H}_\Omega = K$ (isto é, (Ω, H) não é um par de Runge).

(11.9) Se $K \subset\subset \Omega$ são equivalentes as condições seguintes:
(i) Para cada aberto $W \supset K$ e para cada $f \in \mathcal{H}(W)$, f pode ser aproximada uniformemente sobre K por polinômios;
(ii) K^c é conexo;
(iii) Para cada $z \in K^c$ existe um polinômio p tal que $|p(z)| > \|p\|_K$
[Sugestão: Em vista das observações que precedem o enunciado do Teor. 11.4, se obtém este caso particular tomando $\Omega = \mathbb{C}$].

(11.10) Sejam $K \subset\subset \mathbb{C}$ e Ω um aberto de $\mathbb{C}$ que contém K, verificando a condição:

$$\left\| \begin{array}{l} \text{cada componente conexa de } S^2 \backslash K \text{ contém uma} \\ \text{componente conexa de } S^2 \backslash \Omega. \end{array} \right.$$

Prove que se $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$ então existe $R \in \mathcal{M}(S^2)$ verificando $Pol(R) \subset S^2 \backslash \Omega$ tal que $\|f - R\|_K < \varepsilon$.

(11.11) Prove que o Teor. 11.2* é falso para cada compacto $K \subset \mathbb{C}$ tal que $S^2 \backslash K$ não é conexo.
[Sugestão: Seja $K \subset\subset \mathbb{C}$ tal que $S^2 \backslash K$ tem uma componente conexa limitada que denotamos por V. Fixe $\alpha \in V$ arbitrário e considere a função $f(z) := (z - \alpha)^{-1}$, $z \neq \alpha$.

(11.12) Seja Ω um aberto de $\mathbb{C}$. Prove que para cada $K \subset\subset \Omega$ e para cada vizinhança aberta V de K onde $V \subset \Omega$ existe uma sequência $(C_j)_{j \geq 1}$ de constantes positivas tal que

$$\left\| f^{(j)} \right\|_K = \sup_{z \in K} \left| f^{(j)}(z) \right| \leq C_j \|f\|_{L^1(V)} \quad \forall \ f \in \mathcal{H}(\Omega)$$

onde $f^{(j)} = \partial^j f / \partial z^j$.

[Sugestão: Se necessário ver [H], Th. 1.2.4]

Capítulo 12

O TEOREMA DE MITTAG-LEFFLER

Como aplicação do Teor. 11.4 vamos provar que se Ω é um aberto de $\mathbb{C}$ então existem elementos de $\mathcal{M}(\Omega)$ com polos e partes principais nos polos prefixados. De modo preciso temos o seguinte:

Teorema 12.1 (Mittag-Leffler) *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{C}$, A um subconjunto de Ω* sem ponto de acumulação em Ω, $(n_\alpha)_{\alpha\in A}$ *uma família em* $\mathbb{N}^*$ *e $(P_\alpha)_{\alpha\in A}$ uma família de funções racionais do tipo*

$$P_\alpha(z) = \sum_{j=1}^{n_\alpha} \frac{c_{j\alpha}}{(z-\alpha)^j} \qquad \forall \ \ z \in \Omega\setminus\{\alpha\}\,, \quad \text{com} \ \ c_{n_\alpha\alpha} \neq 0.$$

Então existe $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ tal que $Pol(f) = A$ e, para cada $\alpha \in A$, a parte principal de f em α é P_α (Em outros termos, existe uma função meromorfa f em Ω tal que:
(I.) Para cada $n \geq 1$, f tem um polo de ordem n_α em α e P_α é a parte principal de f em α; (II.) $f \in \mathcal{H}(\Omega\setminus A)$).

Neste Capítulo apresentaremos várias formas equivalentes do Teor. 12.1 algumas das quais são úteis no estudo das funções holomorfas de várias variáveis. Na prova do Teor. 12.1 será necessário usar o exerc. (11.7).

Prova Sabemos que existe uma sequência $(K_m)_{m\geq 1}$ de compactos verificando as condições (a),(b),(c) e (d) do Lema 10.17.
Definimos

$$A_1 := A \cap K_1 \qquad \text{e} \qquad A_m := A \cap (K_m\setminus K_{m-1}) \quad \forall \quad m \geq 2.$$

Como $A_m \subset K_m$ e A não tem ponto de acumulação em Ω (nem portanto em K_m), resulta que A_m é finito. Seja

$$Q_m(z) := \sum_{\alpha\in A_m} P_\alpha(z) \qquad\qquad (m \geq 1)$$

Como A_m é finito é claro que $Q_m \in \mathcal{M}(S^2)$ para cada $m \geq 1$ e como

$$Pol(Q_m) = A_m \subset K_m\setminus K_{m-1} \qquad \forall \ \ m \geq 2 \tag{12.1.1}$$

resulta em particular que existe um aberto ω contendo K_{m-1} tal que

$$Q_m|\omega \in \mathcal{H}(\omega).$$

Dada uma componente conexa V de $S^2\setminus K_{m-1}$ sabemos (de novo pela condição (d) do Lema 10.17) que existe uma componente conexa X de $S^2\backslash\Omega$ tal que $V \supset X$ portanto escolhendo $\alpha_V \in X \subset V$, o conjunto B destes pontos α_V satisfaz as seguintes condições (note que $S^2\backslash K_{m-1}$ pode ter várias componentes conexas e então o conjunto B pode ter mais de um ponto):

(12.1.2) $\quad \left| \begin{array}{l} B \cap V \neq \varnothing \text{ para cada componente conexa } V \text{ de } S^2\backslash K_{m-1} \\ \text{e } \ B \subset S^2\backslash\Omega. \end{array} \right.$

A primeira afirmação de (12.1.2) mostra que podemos aplicar o Teor. 11.1* a $K_{m-1}, B, Q_m|\omega$ e $\varepsilon = 2^{-m}$, o que implica que existe $R_m \in \mathcal{M}(S^2)$ verificando $Pol(R_m) \subset B$ tal que

$$\|R_m - Q_m\|_{K_{m-1}} < 2^{-m} \qquad (m \geq 2) \tag{12.1.3}$$

e, pela segunda afirmação de (12.1.2), $Pol(R_m) \subset S^2\backslash\Omega$, o que implica

$$R_m|\Omega \in \mathcal{H}(\Omega) \qquad (m \geq 2). \tag{12.1.4}$$

Vamos mostrar que a função

$$f(z) := Q_1(z) + \sum_{m\geq 2} [Q_m(z) - R_m(z)] \qquad (z \in \Omega\backslash A) \tag{12.1.5}$$

prova o resultado. De fato, fixemos $\nu \in \mathbb{N}^*$ arbitrário, então sobre K_ν a série

$$\sum_{m\geq \nu+1} [Q_m(z) - R_m(z)] \tag{12.1.6}$$

converge uniformemente, pelo teste M de Weierstrass (Prop. 3.5) e por (12.1.3) pois

$$\sum_{m\geq\nu+1} \|Q_m - R_m\|_{K_\nu} \leq \sum_{m\geq\nu+1} 2^{-m} < \infty \ .$$

Aqui é pertinente notar que a série (12.1.6) tem todos seus termos holomorfos em $\mathring{K}_\nu$pois dado $m \geq \nu+1$ arbitrário, de (12.1.1) resulta que $Q_m|\mathring{K}_{m-1}$ não tem polos em $K_\nu \subset \mathring{K}_{m-1}$, logo $Q_m|\mathring{K}_\nu$ é holomorfa e a nossa afirmação segue de (12.1.4). Podemos então concluir, em vista do Teorema 5.19, que a série (12.1.6) define uma função $g \in \mathcal{H}(\mathring{K}_\nu)$ e então, por (12.1.5), podemos escrever

$$f(z) = Q_1(z) + \sum_{m=2}^{\nu} [Q_m(z) - R_m(z)] + g(z) \qquad \forall \ \ z \in \mathring{K}_\nu$$

ou ainda

$$f - (Q_1 + \ \dots . \ + Q_\nu) = -\sum_{m=2}^{\nu} R_m + g \quad \text{em} \quad \mathring{K}_\nu. \tag{12.1.7}$$

Como o segundo membro de (12.1.7) é holomorfo em $\overset{\circ}{K}_\nu$por (12.1.4) é claro que o primeiro membro de (12.1.7) também é holomorfo em $\overset{\circ}{K}_\nu$, o que mostra que f tem as partes principais prefixadas em cada ponto de $A \cap \overset{\circ}{K}_\nu$e portanto em cada ponto de A pois ν era arbitrário. $\square$

Existem várias formulações equivalentes do Teor. 12.1 das quais vamos enunciar e provar apenas as duas seguintes:

Teorema 12.2 *Seja Ω um aberto de $\mathbb{C}$. Então, para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ existe $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ tal que $\dfrac{\partial u}{\partial \overline{z}} = f$ em Ω.*

Teorema 12.3 *Sejam $(\Omega_j)_{j \geq 1}$ uma sequência de abertos não vazios de $\mathbb{C}$, $\Omega := \bigcup\limits_{j \geq 1} \Omega_j$ e suponhamos dadas funções $g_{jk} \in \mathcal{H}(\Omega_j \cap \Omega_k)$ para cada $j, k \geq 1$ tais que $\Omega_j \cap \Omega_k \neq \varnothing$, verificando as condiçõe seguintes:*

$$\text{(12.3.1)} \qquad \left| \begin{array}{l} g_{jk} = -g_{kj} \ \ \textit{sempre que} \ \ \Omega_j \cap \Omega_k \neq \varnothing \\ g_{jk} + g_{kl} + g_{lj} = 0 \ \textit{em} \ \Omega_j \cap \Omega_k \cap \Omega_l, \ \textit{quaisquer que} \\ \textit{sejam} \ j, k, l \geq 1 \ \textit{tais que} \ \Omega_j \cap \Omega_k \cap \Omega_l \neq \varnothing \ . \end{array} \right.$$

Então, para cada $j \geq 1$ existe $g_j \in \mathcal{H}(\Omega_j)$ tal que

$$\text{(12.3.2)} \qquad g_{jk} = g_k - g_j \qquad \textit{em} \qquad \Omega_j \cap \Omega_k$$

para cada $j, k \geq 1$ verificando $\Omega_j \cap \Omega_k \neq \varnothing$.

Prova do Teorema 12.2: Seja $(K_\nu)_{\nu \geq 1}$ uma sequência exaustiva para Ω tal que (Ω, K_ν) é um par de Runge para cada $\nu \geq 1$ (ver exerc. (11.7)) e seja W_ν um aberto tal que $K_\nu \subset W_\nu \subset \overline{W}_\nu \subset\subset \overset{\circ}{K}_{\nu+1}$ para cada $\nu \geq 1$. Seja $\psi_\nu \in \mathcal{C}_0^\infty(\overset{\circ}{K}_{\nu+1})$ tal que $0 \leq \psi_\nu \leq 1$ e $\psi_\nu \equiv 1$ em $\overline{W}_\nu$ para cada $\nu \geq 1$. A seguir definimos uma nova sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \geq 1}$ da maneira seguinte:

$$\varphi_1 := \psi_1 \qquad \text{e} \qquad \varphi_\nu := \psi_\nu - \psi_{\nu-1} \qquad \forall \ \ \nu \geq 2 \ .$$

É claro então que $\varphi_\nu \equiv 0$ em $\overline{W}_{\nu-1}$ para cada $\nu \geq 2$ e que

$$\sum_{\nu \geq 1} \varphi_\nu(z) = 1 \qquad \forall \quad z \in \Omega$$

De fato, dado $z \in \Omega$ temos dois casos possíveis: (I.) $z \in \overline{W}_1$ e (II.) $\exists \ \ l \geq 1$ tal que $z \in \overline{W}_{l+1} \backslash \overline{W}_l$.

Caso (I.): $\psi_1(z) = \varphi_1(z)$ e para cada $j \geq 2$ tem-se $\overline{W}_1 \subset \overline{W}_{j-1} \subset \overline{W}_j$ donde $\varphi_j(z) = \psi_j(z) - \psi_{j-1}(z) = 1 - 1 = 0$ para cada $j \geq 2$, o que implica $\sum\limits_{\nu \geq 1} \varphi_\nu(z) = \varphi_1(z) + \sum\limits_{j \geq 2} \varphi_j(z) = \varphi_1(z) = 1$.

Caso (II.): Para cada j tal que $1 \leq j < l$ (este conjunto de $j's$ é vazio se

$l=1$ mas no fim não faz diferença pois vamos mostrar que $\sum\limits_{1\leq j<l}\varphi_j(z)=0)$

se tem $\mathrm{supp}(\psi_j)\subset \overset{\circ}{K}_{j+1}\subset \overset{\circ}{K}_l\subset W_l$ e como $z\notin \overline{W}_l$ resulta $\psi_j(z)=0$ sempre que $1\leq j<l$, donde

$$(12.2.1)\qquad \varphi_j(z)=\psi_j(z)-\psi_{j-1}(z)=0 \qquad \forall \quad 1\leq j<l\ .$$

Por outro lado, para cada $j\geq l+1$ tem-se $z\in \overline{W}_{l+1}\subset \overline{W}_j$ portanto $\psi_j(z)=1$ para cada $j\geq l+1$ e, em consequência, para cada $k\geq l+2$ (e portanto $j=k-1\geq l+1$) vem $\varphi_k(z)=\psi_k(z)-\psi_{k-1}(z)=1-1=0$, isto é,

$$(12.2.2)\qquad \varphi_k(z)=0 \qquad \forall \quad k\geq l+2.$$

De (12.2.1) e (12.2.2) resulta
$\sum\limits_{\nu\geq 1}\varphi_\nu(z)=\sum\limits_{1\leq\nu<l}\varphi_\nu(z)+\varphi_l(z)+\varphi_{l+1}(z)+\sum\limits_{\nu\geq l+2}\varphi_\nu(z)=\varphi_l(z)+\varphi_{l+1}(z)=$

$=\varphi_{l+1}(z)-\psi_{l-1}(z)=1-0=1$ pois $z\in\overline{W}_{l+1}$ implica $\psi_{l+1}(z)=1$ e $\psi_{l-1}(z)=0$ por (12.2.1).]
Manifestamente, cada φ_j tem suporte compacto portanto $\varphi_j f\in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)\subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ para cada $j\geq 1$, em consequência (ver Teor. 11.3 (b)) existe $u_j\in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\frac{\partial u_j}{\partial \overline{z}}=\varphi_j f \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2 \quad \forall \ \ j\geq 1\ .$$

Como para cada $j\geq 2$ se tem $\psi_j=\psi_{j-1}\equiv 1$ em $\overline{W}_{j-1}$, o que implica $\varphi_j\equiv 0$ em W_{j-1} para cada $j\geq 2$, o que prova que $u_j\in\mathcal{H}(W_{j-1})$ para cada $j\geq 2$. Pelo Teor. 11.4 (Runge) e por ser (Ω,K_{j-1}) um par de Runge sempre que $j\geq 2$, existe $v_j\in\mathcal{H}(\Omega)$ tal que

$$\|u_j-v_j\|_{K_{j-1}}\leq 2^{-j} \qquad \forall \ \ j\geq 2$$

donde resulta que a série $u_*:=\sum\limits_{\nu\geq 2}(u_\nu-v_\nu)$ converge uniformemente sobre cada compacto de Ω **[**de fato, se $K\subset\subset\Omega$ existe $\nu\geq 1$ tal que $K\subset K_\nu\subset K_j$ para cada $j\geq\nu$. Por outro lado, fixado $\varepsilon>0$ arbitrário, sabemos que existe $\nu(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ tal que $m>n>\nu(\varepsilon)\implies \sum\limits_{j=n+1}^{m}2^{-j}<\varepsilon$. Em consequência,

$$\sum_{j=n+1}^{m}\|u_j-v_j\|_K\leq \sum_{j=n+1}^{m}\|u_j-v_j\|_{K_{j-1}}\leq \sum_{j=n+1}^{m}2^{-j}<\varepsilon$$

sempre que $m>n>\max(\nu,\nu(\varepsilon))$ **(** $\implies n>\nu\implies K\subset K_\nu\subset K_n\subset K_{n+1}\subset ....\subset K_m$. Observemos que os K_{j-1} da segunda somatória (isto é, $(K_{j-1})_{n+1\leq j\leq m}$**)** são exatamente os $(K_l)_{n\leq l\leq m-1}=(K_n,K_{n+1},\ \dots\ ,K_{m-1})$ e todos eles contem K, o que justifica a primeira desigualdade **)]**.
Como $u_{j+1}\in\mathcal{H}(W_j)$ para cada $j\geq 1$ e $W_\nu\supset W_j$ se $\nu\geq j$, obtemos

$$(12.2.3)\qquad u_\nu-v_\nu\in\mathcal{H}(W_j) \qquad \forall \quad \nu>j\geq 1\ ,$$

o que mostra que as reduzidas da série $\sum_{\nu>j}(u_\nu - v_\nu)$ são funções analíticas em W_j, portanto pelo Teor. 5.19, a série converge para uma função analítica em W_j e em consequência $u_* \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. De fato, dado $z \in \Omega$ arbitrário, basta ver que existe um aberto V, $z \in V \subset \Omega$ tal que $u_*|V \in \mathcal{C}^\infty(V)$. Seja $j \geq 1$ tal que $z \in W_j$, então tomamos $V := W_j$ pois de $g_j := = \sum_{\nu>j}(u_\nu - v_\nu) \in \mathcal{H}(W_j)$ e $r_j := \sum_{2\leq\nu\leq j}(u_\nu - v_\nu) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ resulta $u_*|W_j = = u_*|V \in \mathcal{C}^\infty(V) = \mathcal{C}^\infty(W_j)$ [se $j=1$ então $g_1 = \sum_{\nu>1}(u_\nu - v_\nu)$ e $r_1 = 0$, se $j=2$ então $g_2 = \sum_{\nu>2}(u_\nu - v_\nu)$ e $r_2 = u_2 - v_2$]. Como z era arbitrário concluímos que $u_* \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, como queríamos provar. Mostremos finalmente que:

(12.2.4) O cálculo de $\dfrac{\partial u_*}{\partial \overline{z}}$ pode ser feito derivando termo a termo a série que define u_*.

De fato, fixado $\zeta \in \Omega$ arbitrário, existe $j \geq 2$ tal que $\zeta \in W_j$ e como $u_* = \sum_{2\leq\nu\leq j}(u_\nu - v_\nu) + \sum_{\nu>j}(u_\nu - v_\nu)$ e $\sum_{\nu>j}(u_\nu - v_\nu) \in \mathcal{H}(W_j)$, por (12.2.3) resulta a primeira igualdade de (12.2.5) :

$$0 = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left\{\sum_{\nu>j}(u_\nu - v_\nu)\right\}(\zeta) = \sum_{\nu>j}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(u_\nu - v_\nu)(\zeta) \tag{12.2.5}$$

[por (12.2.3), cada $u_\nu - v_\nu$ $(\nu > j)$ é analítica em W_j e como $\zeta \in W_j$ obtemos $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}(u_\nu - v_\nu)(\zeta) = 0 \quad \forall \ \nu > j$ e portanto $\sum_{\nu>j}\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}(u_\nu - v_\nu)(\zeta) = 0$, o que justifica a segunda igualdade em (12.2.5)]. Em vista da definição de u_* e de (12.2.5) vem

$$\frac{\partial u_*}{\partial \overline{z}}(\zeta) \overset{(1)}{=} \sum_{2\leq\nu\leq j}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(u_\nu - v_\nu)(\zeta) + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left\{\sum_{\nu>j}(u_\nu - v_\nu)\right\}(\zeta) \overset{(2)}{=}$$

$$= \sum_{2\leq\nu\leq j}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(u_\nu - v_\nu)(\zeta) \overset{(3)}{=} \sum_{2\leq\nu\leq j}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(u_\nu - v_\nu)(\zeta) + \sum_{\nu>j}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(u_\nu - v_\nu)(\zeta) =$$

$= \sum_{\nu\geq 2}\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}(u_\nu - v_\nu)(\zeta)$ [(1) vem da definição de u_*; (2) vem de $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}\left\{\sum_{\nu>j}\ldots\right\} = 0$ por (12.2.5); (3) resulta das duas igualdades em (12.2.5)]. Podemos então escrever (lembrar que $v_\nu \in \mathcal{H}(\Omega) \quad \forall \ \nu \geq 1$):

$\dfrac{\partial u_*}{\partial \overline{z}} = \sum_{\nu\geq 2}\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}(u_\nu - v_\nu) = \sum_{\nu\geq 2}\dfrac{\partial u_\nu}{\partial \overline{z}} = \sum_{\nu\geq 2}\varphi_\nu f$ em Ω, portanto definindo

$u := u_1 + u_*$ obtemos:
$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial u_1}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial u_*}{\partial \overline{z}} = \sum_{\nu \geq 1} \varphi_\nu f = f \quad \text{em } \Omega. \ \square$$

Exercícios

(12.1) (a) Duas funções $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ são *relativamente primas* (em símbolos: $(f,g) = 1$) se os únicos divisores comuns de f e g são funções holomorfas em Ω sem ponto de anulação. Mostre que $(f,g) = 1$ se e só se $Z(f) \cap Z(g) = \varnothing$.
(b) Se $(f,g) = 1$ mostre que existem funções $f_1, g_1 \in \mathcal{H}(\Omega)$ tais que $ff_1 + gg_1 = 1$.
[Sugestão: Mostre que existe $\varphi \in \mathcal{M}(\Omega)$ tal que $f_1 = \varphi g \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $g \mid (1 - f_1 f)$ (isto é, g divide $1 - f_1 f$).**]**
(c) Seja $\varnothing \neq \mathfrak{X} \subset \mathcal{H}(\Omega)$. Diz-se que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ é o *máximo divisor comum de* $\mathfrak{X}$ se: (I.) $f|g \quad \forall \ g \in \mathfrak{X}$ e (II.) Se $h|g \quad \forall \ g \in \mathfrak{X}$ então $h|f$. O máximo divisor comum de $\mathfrak{X}$ é indicado pela notação: $m.d.c.\ \mathfrak{X}$.
Sejam $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $g := m.d.c.\{f_1, \ldots, f_n\}$. Mostre que existem funções $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ em $\mathcal{H}(\Omega)$ tais que $g = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i f_i$.
[Sugestão: Use (b) e indução.**]**
(d) Seja $(I_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma família de ideais de $\mathcal{H}(\Omega)$, mostre que $I := \bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha$ é também um ideal de $\mathcal{H}(\Omega)$. Se $\mathfrak{X}$ é um subconjunto não vazio de $\mathcal{H}(\Omega)$ chama-se *ideal de* $\mathcal{H}(\Omega)$ *gerado por* $\mathfrak{X}$ ao ideal de $\mathcal{H}(\Omega)$:
$$[\mathfrak{X}] := \bigcap \{I \mid I \text{ é um ideal de } \mathcal{H}(\Omega) \text{ e } \mathfrak{X} \subset I\}.$$
Prove que $[\mathfrak{X}]$ é o menor ideal de $\mathcal{H}(\Omega)$ que contém $\mathfrak{X}$ e que
$$[\mathfrak{X}] = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \varphi_i f_i \mid n \in \mathbb{N}^*, \varphi_i \in \mathcal{H}(\Omega) \text{ e } f_i \in \mathfrak{X} \quad \forall \ i = 1, 2, \ldots, n \right\}.$$

(12.2) Construir uma função meromorfa sobre o plano complexo cujos polos são simples nos inteiros de Gauss (que são os números complexos do tipo $m + ni$, com $m, n \in \mathbb{Z}$) com resíduo 1.

(12.3) Construir uma função meromorfa sobre o disco unitário aberto $U := D_1(0)$ cujos polos são simples nos pontos $(1 - 2^{-n}) \exp(2\pi i k/n)$, $1 \leq k \leq n$, $n \geq 1$, com resíduo 1.

(12.4) Aqui vamos provar a equivalência entre os Teoremas 12.2 e 12.3.
(a) Suponha fixados Ω aberto de $\mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Prove que se D é um disco aberto tal que $\varnothing \neq \overline{D} \subset\subset \Omega$ então existe $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$ tal que $\dfrac{\partial v}{\partial \overline{z}} = f$ em D.

(b) Prove que Teor. 12.3 $\Longrightarrow$ Teor. 12.2;
(c) Prove que Teor. 12.2 $\Longrightarrow$ Teor. 12.3.
[Sugestão: (a) Fácil; (b) Escreva Ω como reunião enumerável de discos abertos de fecho compacto contidos em Ω,isto é, $\Omega = \bigcup_{j\geq 1} D_j$, D_j é um disco aberto tal que $\varnothing \neq \overline{D}_j \subset\subset \Omega \quad \forall \ j \geq 1$. Use (a) para achar, para cada $j \geq 1$, uma $v_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$ tal que $\dfrac{\partial v_j}{\partial \overline{z}} = f|D_j$ e defina $g_{jk} := v_j - v_k$, mostre que $\dfrac{\partial g_{jk}}{\partial \overline{z}} = 0$ em $D_j \cap D_k$ sempre que $D_j \cap D_k \neq \varnothing$ e verificar que valem as igualdades

$$g_{jk} = -g_{kj} \qquad \text{e} \qquad g_{jk} + g_{kl} + g_{lj} = 0$$

Pelo Teor. 12.3 (aplicado à família (g_{jk})), para cada $j \geq 1$ existe $g_j \in \mathcal{H}(D_j)$ tal que $g_{jk} = g_k - g_j$ em $D_j \cap D_k (\neq \varnothing)$ e portanto (pela definição das g_{jk}) tem-se $v_j + g_j = v_k + g_k$ em $D_j \cap D_k$ sempre que $D_j \cap D_k \neq \varnothing$. Em consequência, as relações $u|D_j := v_j + g_j$ para cada $j \geq 1$, define uma função $u : \Omega \to \mathbb{C}$ que resolve questão. (c) Partimos dos dados e hipóteses do Teor. 12.3. Associada à cobertura $(\Omega_j)_{j\geq 1}$, considere uma cobertura aberta $(V_\nu)_{\nu\geq 1}$ de Ω que é localmente finita (isto é, $\forall \ z \in \Omega \ \exists$ uma vizinhança de z que corta apenas um número finito de $V_\nu' s$) e mais fina que $(\Omega_j)_{j\geq 1}$ (isto é, $\forall \ \nu \geq 1 \ \exists \ i_\nu \geq 1$ tal que $V_\nu \subset \Omega_{i_\nu}$) e a sequência $(\varphi_\nu)_{\nu\geq 1}$ em $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ verificando as condições (I.) $\varphi_\nu \in \mathcal{C}_0^\infty(V_\nu) \subset \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, $\forall \ \nu \geq 1$; (II.) $0 \leq \varphi_\nu \leq 1 \ \forall \ \nu \geq 1$; (III.) $\sum_{\nu\geq 1} \varphi_\nu(z) = 1 \ \forall \ z \in \Omega$ e (IV.) $\forall \ K \subset\subset \Omega$, o conjunto $\{\nu \geq 1 \mid \varphi_\nu$ não é identicamente nula em $K\}$ é finito (isto segue trivialmente de (I.) e do fato de $(V_\nu)_{\nu\geq 1}$ ser localmente finita). Para ver a ideia da prova vamos supor o problema resolvido e ver o que resulta. Vamos então supor (12.3.2) verificada, logo para $j = i_\nu$ (lembremos da aplicação $\nu \longmapsto i_\nu$, onde $V_\nu \subset \Omega_{i_\nu}$) se $\Omega_{i_\nu} \cap \Omega_k \neq \varnothing$ tem-se $g_{i_\nu k} = g_{i_\nu} - g_k$ o que implica

$$g_k = \sum_{\nu\geq 1} \varphi_\nu g_{i_\nu} + \sum_{\nu\geq 1} \varphi_\nu g_{i_\nu k} \tag{12.3.3}$$

o que mostra que, definindo $h_k := \sum_{\nu\geq 1} \varphi_\nu g_{i_\nu k}$ em Ω_k $(k \geq 1)$, será suficiente achar $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ tal que

$$g_k = u + h_k \qquad (k \geq 1)\ . \tag{12.3.4}$$

Inicialmente, mostre que h_k está bem definida. De fato, não é evidente (nem em geral verdadeiro) que $\Omega_{i_\nu} \cap \Omega_k \neq \varnothing \quad \forall \ \nu \geq 1$ e $g_{i_\nu k}$ não está definida em $\Omega_{i_\nu} \cap \Omega_k = \varnothing$. Mostre que é natural convencionar que $(\varphi_\nu g_{i_\nu k})(z) = 0$ $\forall \ z \in \Omega_k$ se $\Omega_{i_\nu} \cap \Omega_k = \varnothing$ verificando que $\text{supp}(\varphi_\nu) \subset V_\nu \subset \Omega_{i_\nu} \subset \Omega_k^c$. Mostre a seguir que a soma infinita que define $h_k(z)$ existe para cada $z \in \Omega_k$ considerando $F := \{\nu \in \mathbb{N}^* \mid \varphi_\nu|\omega$ não é identicamene nula $\}$, onde ω é aberto $\neq \varnothing$ tal que $\varpi \subset\subset \Omega_k$. Por (IV.), F é finito e $h_k|\omega = \sum\limits_{\nu \in F} \varphi_\nu g_{i_\nu k}$ e portanto h_k está bem definida e pertence a $\mathcal{C}^\infty(\Omega_k) \quad \forall \ \ k \geq 1$. Finalmente, mostre que $h_k - h_j = g_{jk}$ em $\Omega_j \cap \Omega_k$, $g_{i_\nu k} - g_{i_\nu j} = g_{jk}$ em $\Omega_{i_\nu} \cap \Omega_j \cap \Omega_k$ e $h_k(z) - h_j(z) = g_{jk}(z) \quad \forall \ \ z \in \Omega_j \cap \Omega_k$ $(\neq \varnothing)$. Como $g_{jk} \in \mathcal{H}(\Omega; \cap \Omega_k)$ resulta $\dfrac{\partial h_k}{\partial \overline{z}} = \dfrac{\partial h_j}{\partial \overline{z}}$ em $\Omega_j \cap \Omega_k$ $(\neq \varnothing)$ portanto, existe $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ tal que $\psi|\Omega_k = $ $= \dfrac{\partial h_k}{\partial \overline{z}} \quad \forall \ \ k \geq 1$. Pelo Teor. 12.2 existe $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ tal que $\dfrac{\partial u}{\partial \overline{z}} = -\psi$ em Ω e então, as funções $g_k := h_k +\ u|\Omega_k \ \ (k \geq 1)$ têm as propriedades do enunciado.]

Capítulo 13

O TEOREMA DOS ZEROS DE WEIERSTRASS

Neste capítulo precisaremos de alguns fatos elementares a respeito de produtos infinitos sobre os quais seguiremos de perto [R2], Cap. 15.
Até o momento o único que sabemos sobre o conjunto $Z(f)$ dos zeros de uma função holomorfa $f \neq$cte. é que $Z(f)$ não tem ponto de acumulação no domínio Ω de f. De fato, sem alguma outra hipótese, isto é o único que pode ser dito, em virtude do teorema de Weierstrass segundo o qual cada subconjunto A de Ω sem ponto de acumulação em Ω é um $Z(f)$ para alguma $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Se $A = \{a_m \mid m \in \mathbb{N}^*\}$, um caminho aparentemente natural para construir uma tal função f é escolher funções $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ $(n \geq 1)$ com único zero em a_n e, a seguir, considerar o limite do produto

$$p_m := f_1 f_2 \, \ldots \, f_m$$

para $m \to \infty$. É possível provar a existência de uma tal sequência $(f_n)_{n\geq 1}$ de modo que a sequência $(p_m)_{m\geq 1}$, convirja para alguma $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ com $f(z) \neq 0$ sempre que $z \notin A$ e $Z(f) = A$.

Definição 13.1 Suponha que $(u_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência em $\mathbb{C}$,

$$p_n := (1+u_1)(1+u_2) \cdots (1+u_n) \tag{13.1.1}$$

e que $p := \lim\limits_{n\to\infty} p_n$ existe. Então escrevemos

$$p := \prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n). \tag{13.1.2}$$

O número p_n é chamado *produto parcial* do *produto infinito* (13.1.2). Diz-se que o produto infinito (13.1.2) *é convergente* se a sequência $(p_n)_{n\geq 1}$ é convergente.

No estudo das séries $\sum a_n$ é importante saber se a_n se aproxima rapidamente de 0. De modo análogo, no estudo dos produtos infinitos é importante saber se seus fatores estão próximos de 1. Estas observações justificam a notação da Def. 13.1 pois $1+u_n$ é próximo de 1 sempre que u_n é próximo de 0.

Lema 13.2 *Se $(u_i)_{1\leq i\leq N}$ é uma sequência finita em $\mathbb{C}$ e*

(13.2.1) $$p_N := \prod_{n=1}^{N}(1+u_n)\ , \qquad p_N^* := \prod_{n=1}^{N}(1+|u_n|)\ ,$$

então

(13.2.2) $$p_N^* \le \exp(\sum_{i=1}^{N}|u_i|)$$

e

(13.2.3) $$|p_N - 1| \le p_N^* - 1.$$

Prova Se $x \ge 0$, como $e^x = 1 + x + \ldots \ge 1 + x$, substituindo x por $|u_i|$ vem $1 + |u_i| \le e^{|u_i|}$ $(1 \le i \le N)$, o que implica
$$p_N^* = \prod_{i=1}^{N}(1+|u_i|) \le \exp(\sum_{i=1}^{N}|u_i|)$$
o que prova (13.2.2). A verificação de (13.2.3) também é trivial por indução. Para $N = 1$, (13.2.3) é clara pois $p_1 = 1 + u_1$ e $p_1^* = 1 + |u_1|$ donde $p_1 = 1 + u_1 \le 1 + |u_1| = p_1^*$ e portanto $p_1 - 1 \le u_1 \le |u_1| = p_1^* - 1$ e então $|p_1 - 1| \le |u_1| = p_1^* - 1$. Suponha que (13.2.3) é válida para $k = 1, 2, \ldots,$ $N - 1$ então, a definição de p_k mostra que
$$p_{k+1} - 1 = p_k(1 + u_{k+1}) - 1 = (p_k - 1)(1 + u_{k+1}) + u_{k+1}$$
donde (para $k = N$): $p_{N+1} - 1 = (p_{N-1})(1 + u_{N+1}) + u_{N+1}$, o que implica
$$|p_{N+1} - 1| \le |p_N - 1|\,(1+|u_{N+1}|)+|u_{N+1}| \overset{(*)}{\le} (p_N^*-1)(1+|u_{N+1}|)+|u_{N+1}| =$$
$= p_{N+1}^* - 1$, onde a desigualdade $(*)$ segue da hipótese de indução. □

Se $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $z \in \Omega$ denotamos com $\omega(f, z)$ a *multiplicidade* do zero que f tem em z. Se $f(z) \ne 0$ definimos $\omega(f, z) := 0$ (ver Def. 4.17).
Se $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ então é claro (ver Def. 4.17) que $\omega(fg, z) = \omega(f, z) + \omega(g, z)$ para cada $z \in \Omega$. Uma consequência do exerc. (13.1) é o seguinte resultado que usaremos frequentemente:

Teorema 13.3 *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{C}$ e $(f_n)_{n\ge1}$ uma sequência em $\mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f_n|\Omega_0$ não é identicamente nulo para cada $n \ge 1$ e para cada componente conexa Ω_0 de Ω. Suponha também que a série*

(13.3.1) $$\sum_{n\ge1}|1 - f_n(z)|$$

converge uniformemente sobre os compactos de Ω. Então, o produto

(13.3.2) $$f(z) = \prod_{n\ge1} f_n(z)$$

converge uniformemente sobre os compactos de Ω e portanto $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Além disso tem-se
$$\omega(f, z) = \sum_{n=1}^{\infty}\omega(f_n, z) \quad \forall \ \ z \in \Omega\ .$$

Prova Aplicamos o exerc. (13.1) com $S = K \subset\subset \Omega$, $u_n(z) = f_n(z) - 1$ (e portanto $\sum\limits_{n\geq 1}|u_n(z)| = \sum\limits_{n\geq 1}|1-f_n(z)|$ e $f(z) = \prod\limits_{n\geq 1}(1+u_n(z)) = \prod\limits_{n\geq 1} f_n(z))$ o que prova a primeira afirmação, isto é, a convergência sobre os compactos de Ω do produto (13.3.2), donde pelo Teor. 5.19 resulta $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Prova da segunda afirmação do Teor. 13.3: Seja $z \in \Omega$ arbitrário. Vamos provar a seguinte afirmação:

(13.3.3) | Existe uma vizinhança aberta V de $z, V \subset \Omega$ tal que se $\mathfrak{X} := \{f_n \mid Z(f_n) \cap V \neq \varnothing\}$ então $\mathfrak{X}$ é finito.

De fato, suponha por absurdo que (13.3.3) é falsa então, se $\ell \in \mathbb{N}$ é o menor natural tal que $D_{1/\ell}(z) \subset \Omega$, a falsidade de (13.3.3) acarreta que para cada $m \geq \ell$, tem-se $V_m := D_{1/m}(z) \subset \Omega$ e existe uma subsequência $(f^m_{n_\nu})_{\nu\geq 1}$ de (f_n):

(S_m) $\qquad f^m_{n_1}\ , f^m_{n_2}\ , \ldots, f^m_{n_\nu}\ , \ldots \qquad (V_m)$

tal que cada um dos seus termos tem zeros em V_m (esta condição implica que a aplicação $n_i \longmapsto f^m_{n_i}$ pode ser considerada injetora). Seja z^m_ν o zero de $f^m_{n_\nu}$ em V_m e considere a sequência diagonal $f^1_{n_1}\ , f^2_{n_2}, \cdots, f^\nu_{n_\nu}\ , \cdots$, então, pela definição de z^m_ν resulta

$$f^\nu_{n_\nu}(z^\nu_\nu) = 0 \quad \forall \ \ \nu \geq 1. \tag{13.3.4}$$

Como $(z^m_\nu)_{\nu\geq 1}$ é uma sequência em V_m para cada $m \geq 1$, em particular temos $z^\nu_\nu \in V_\nu$ para cada $\nu \geq 1$ donde, pela definição de $V_m (m \geq 1)$, é claro que

$$\lim_{\nu\to\infty} z^\nu_\nu = z. \tag{13.3.5}$$

Vamos mostrar que o que precede leva auma contradição. De fato, fixemos uma vizinhança compacta K de z tal que $K \subset \Omega$ e $m \geq 1$. Então, a hipótese (13.3.1) mostra [pela caracterização da convergênciauniforme sobre as partes compactas usando o critério de Cauchy] que associados a K e a $\varepsilon := 1/2$:

(13.3.6) | Existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq j$ e $p > 0$ implica $\sum\limits_{i=n}^{n+p} |1 - f^m_i(\zeta)| < 1/2$ para cada $\zeta \in K \quad (m \geq 1)$

Observe que:
(O$_1$) (13.3.6) é legítima pois a hipótese (13.3.1) implica que cada série $\sum\limits_{i\geq 1}|1 - f^m_i(\zeta)|$ $(m \geq 1)$ tem as mesmas propriedades de convergência;

(O$_2$) O $j \in \mathbb{N}$ em (13.3.6) depende de $m \in \mathbb{N}^*$ mas isto é irrelevante uma vez que no raciocínio que segue vamos trabalhar com $m \geq 1$ fixado.
Por outro lado
(I.) $\exists\ \ \nu_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\nu \geq \nu_0 \implies z^\nu_\nu \in K \quad$ (por (13.3.4))

(II.) $\exists \ \nu_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\nu \geq \nu_1 \implies n_\nu > j$ $((f^m_{n_\nu})$ sendo uma subsequência de (f_n), a aplicação $\sigma : \nu \longmapsto n_\nu$ é estritamente crescente e portanto $\lim\limits_{\nu\to\infty} n_\nu = \infty)$.
Seja agora $\lambda := \max(\nu_0, \nu_1)$ então

$$\text{(III.)} \qquad \lambda \geq \nu_1 \overset{(I.)}{\implies} n_\lambda > j \overset{(*)}{\implies} \sum_{i=j}^{n_\lambda} \left|1 - f_i^\lambda(\zeta)\right| < 1/2 \quad \forall \ \zeta \in K$$

onde $(*)$ resulta de (13.3.6) [observe que (13.3.6) é uma implicação do tipo:

$$n \geq j \ \text{ e } \ p > 0 \implies \sum_{i=n}^{n+p} \ ......$$

e, em particular, para $n = j$ resulta $\sum\limits_{i=j}^{j+p}$ ...... e então, escolhendo $p > 0$ de modo que $j + p = n_\lambda$ (i.e. $p := n_\lambda - j$) obtemos

$$n_\lambda > j \implies \sum_{i=j}^{n_\lambda} \ ......$$

que é exatamente $(*)$.]
Por outro lado, de (I.) resulta

$$\lambda \geq \nu_0 \implies z_\lambda^\lambda \in K$$

e de (III.) segue:

$$\lambda \geq \nu_1 \implies \sum_{i=j}^{n_\lambda} \left|1 - f_i^\lambda(\zeta)\right| < 1/2 \quad \forall \ \zeta \in K.$$

Ora, a definição de λ mostra que $\lambda \geq \nu_0, \nu_1$ e então as duas implicações acima mostram que

$$\text{(13.3.7)} \qquad \sum_{i=j}^{n_\lambda} \left|1 - f_i^\lambda(z_\lambda^\lambda)\right| < 1/2 \ \text{ se } \ \lambda = \max(\nu_0, \nu_1) \ ,$$

o que é absurdo. De fato, considerando o último somando em (13.3.7) e levando em consideração (13.3.4) obtemos

$$1 = \left|1 - f_{n_\lambda}^\lambda(z_\lambda^\lambda)\right| \ < 1/2$$

,

o que completa a verificação de (13.3.3), isto é, o conjunto $\mathfrak{X}$ é finito. Seja $\mathfrak{X} = \{f_{n_1}, \ f_{n_2}, \ ... \ f_{n_t}\}$ então definindo $I := \mathbb{N}^* \setminus \{n_1, n_2, \ ... \ n_t\}$ podemos escrever

$$\prod_{n\geq1} f_n = (\prod_{i=1}^t f_{n_i}).(\prod_{n\in I} f_n)$$

o que implica $\omega(\prod\limits_{n\geq1} f_n, z) = \omega(\prod\limits_{i=1}^t f_{n_i}, z) + \omega(\prod\limits_{n\in I} f_n, z)$ e como $\omega(\prod\limits_{n\in I} f_n, z) = 0$ e $\omega(\prod\limits_{i=1}^t f_{n_i}, z) = \sum\limits_{i=1}^t \omega(f_{n_i}, z)$, obtemos $\omega(\prod\limits_{n\geq1} f_n, z) =$

$= \sum_{i=1}^{t} \omega(f_{n_i}, z) = \sum_{n \geq 1} \omega(f_n, z)$. $\square$

Definição 13.4 Seja $E_0(z) := 1 - z$ e, para $p \in \mathbb{N}^*$,

$$E_p(z) := (1-z)\exp\left(\sum_{i=1}^{p} \frac{z^i}{i}\right)$$

.

Esta função E_p é chamada *fator de Weierstrass de ordem p.*

Estas funções foram introduzidas por Weierstrass e às vezes também são chamadas de *fatores elementares.*
É claro que $Z(E_p) = \{1\}$ para cada $p \in \mathbb{N}$. A principal razão de interesse destas funções é que $E_p(z)$ é próximo de 1 se $|z| < 1$ e p é grande embora $E_p(1) = 0$.

Lema 13.5 *Para* $|z| \leq 1$ *e* $p \in \mathbb{N}$ *tem-se*

$$|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1} \ .$$

Prova Para $p = 0$ o resultado é evidente. Se $p \geq 1$, por cálculo direto resulta

$$(13.5.1) \qquad -E_p'(z) = z^p \exp\left(\sum_{i=1}^{p} \frac{z^i}{i}\right)$$

o que mostra que E_p' tem um zero de ordem p em $z = 0$, isto é, $\omega(-E_p', 0) = = p$. Mostremos que a série de Taylor de $-E_p'(z)$ em volta da origem tem seus coeficientes em $\mathbb{R}_+$. De fato,

$$-\int_{[0,z]} E_p'(w)dw$$

é uma primitiva de E_p' (ver Prop. A.1, Apêndice do Cap. 8) portanto existe $k \in \mathbb{C}$ tal que

$$-\int_{[0,z]} E_p'(w)dw = -E_p(z) + k \qquad (z \in \mathbb{C})$$

e então, para $z = 0$ tem-se $0 = -E_p(0) + k = -1 + k$ donde $k = 1$ o que implica

$$(13.5.2) \qquad -\int_{[0,z]} E_p'(w)dw = 1 - E_p(z) \qquad (z \in \mathbb{C}) \ .$$

Por outro lado, aplicando a definição de exp no 2º membro de (13.5.1) obtemos

$$-E_p'(z) = z^p \exp\left(\sum_{n=1}^{p} \frac{z^i}{i}\right) = z^p \left\{1 + \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{z^i}{i}\right) + \frac{1}{2!}\left(\sum_{i=1}^{p} \frac{z^i}{i}\right)^2 + \ ...\right\} =$$

$= \sum\limits_{n\geq p} b_n z^n$, o que implica $b_p = 1$ e $b_n > 0$ para cada $n \geq p$.
Em consequência, por (13.5.2) obtemos para cada $z \in \mathbb{C}$:

$$(13.5.3) \qquad 1 - E_p(z) = \int\limits_{[0,z]} (\sum_{n\geq p} b_n w^n) dw = \sum_{n\geq p} \frac{b_n z^{n+1}}{n+1} \ .$$

Agora definimos $\varphi(z) := \dfrac{1-E_p(z)}{z^{p+1}}$ para cada $z \in \mathbb{C}$, é claro pela série em (13.5.3) que φ tem uma singularidade removível em $z = 0$, logo $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ e

$$\varphi(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \qquad (z \in \mathbb{C})$$

onde $a_n > 0$ para cada $n \geq 0$. Para $|z| \leq 1$ temos

$$|\varphi(z)| = \left| \sum_{n\geq 0} a_n z^n \right| \leq \sum_{n\geq 0} a_n |z|^n \leq \sum_{n\geq 0} a_n = \varphi(1) = 1$$

logo, a definição de φ mostra que $|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}$ sempre que $|z| \leq 1$. $\square$

Teorema 13.6 *Seja $(z_n)_{n\geq 1}$ uma sequência em $\mathbb{C}^*$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = \infty$. Seja $(p_n)_{n\geq 1}$ uma sequência em $\mathbb{N}$ tal que para cada $r \in \mathbb{R}_+^*$ se tem*

$$(13.6.1) \qquad \sum_{n\geq 1} (\frac{r}{|z_n|})^{1+p_n} < \infty \ .$$

Então, o produto infinito

$$(13.6.2) \qquad P(z) := \prod_{n\geq 1} E_{p_n}(\frac{z}{z_n})$$

é uma função inteira tal que $Z(P) = \{z_i \mid i \geq 1\}$. De modo mais preciso, se $\alpha := z_{n_0}$ (para algum $n_0 \geq 1$), $A_\alpha := \{i \in \mathbb{N}^* \mid z_i = \alpha\}$ e $\nu = \mathrm{Card}(A_\alpha)$, então P tem um zero de ordem ν em α, isto é, $\omega(P, \alpha) = \nu$. A condição (13.6.1) está sempre verificada se $p_n = n - 1$ para cada $n \geq 2$.

Prova Comecemos provando que (13.6.1) é válida para $p_n = n - 1$, o que é trivial pois devemos verificar a convergência da série $\sum\limits_{n\geq 1} (\dfrac{r}{|2n|})^n$o que é claro:

$$\left| (\frac{r}{|z_n|})^n \right|^{1/n} = \frac{r}{|z_n|} \longrightarrow 0 \quad \text{se} \quad n \to \infty$$

donde

$$\sum_{n\geq 1} (\frac{r}{|z_n|}) < \infty \ .$$

Fixemos a seguir uma sequência $(p_n)_{n\geq 1}$ em $\mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{R}_+^*$ de modo que se verifique (13.6.1) e suponhamos que $|z| \leq r$. Pelo Lema 3.15 podemos

escrever
$$\left|1 - E_{p_n}(\frac{z}{z_n})\right| \leq \left|\frac{z}{z_n}\right|^{p_n+1} \leq (\frac{r}{|z_n|})^{p_n+1}$$
o que mostra, pelo Teor. 13.3, que o produto infinito $P(z)$ definido em (13.6.2) converge uniformemente sobre os compactos de $\mathbb{C}$ determinando uma função inteira P tal que
$P(z) = 0 \iff E_{p_n}(\frac{z}{z_n}) = 0$ para algum $n \geq 1 \iff z = z_n$ para algum $n \geq 1$, o que prova que $Z(P) = \{z_i \mid i \geq 1\}$. Por fim, definindo $\lambda_n(z) :=$ $= E_{p_n}(\frac{z}{z_n})$ $(n \geq 1,\ z \in \mathbb{C})$ resulta $P = \prod_{n\geq 1} \lambda_n$ e

(13.6.3) $$\omega(P,\alpha) = \sum_{n\geq 1} \omega(\lambda_n, \alpha) \ .$$

Como E_q $(q \in \mathbb{N})$ tem 1 como único zero que é simples é claro que para cada $i \in A_\alpha$, λ_i vai ter $z_i = \alpha$ como único zero simples (pois $\lambda_i(\zeta) =$ $= E_{p_i}(\zeta/z_i) = 0 \iff \zeta/z_i = 1 \iff \zeta = z_i = \alpha$) donde $\omega(\lambda_i, \alpha) = 1$ sempre que $i \in A_\alpha$ e então
$$\omega(P,\alpha) = \sum_{i\in A_\alpha} \omega(\lambda_i, \alpha) + \sum_{i\notin A_\alpha} \omega(\lambda_i, \alpha) = \nu$$
pois se $n \notin A_\alpha$ então $z_n \neq \alpha$ donde $\lambda_n(\alpha) \neq 0$ o que implica $\omega(\lambda_n, \alpha) = 0$ e portanto $\sum_{i\notin A_\alpha} \omega(\lambda_i, \alpha) = 0$. $\square$

É claro que em (13.6.2) pode muito bem acontecer que "existam z_n repetidos", isto é, a aplicação $n \in \mathbb{N} \longmapsto z_n \in \mathbb{C}$ não é injetora. A seguir vamos introduzir uma notação mais adequada para lidar com este tipo de fenômeno.

Notação 13.7 Sejam Ω um aberto de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f(0) \neq 0$ e suponha que $Z(f)$ é um conjunto infinito, isto é, podemos escrever $Z(f) = \{z_i \mid i \geq 1\}$. Visando uma simplificação das notações no Teor. 13.8 abaixo indicaremos $\omega(f, z_i)$ por ν_i, isto é,

(13.7.1) $$\nu_i = \omega(f, z_i) \qquad (i \geq 1)$$

(Observe que $\nu_i \geq 1$ para cada $i \geq 1$ pois $f(z_i) = 0$)
Vamos chamar de *sequência de zeros de f listados de acordo com a sua multiplicidade* a seguinte sequência

(13.7.2) $$(\widehat{z}_i)_{i\geq 1} := (z_1, \overset{\nu_1}{\smile\!\!\!\ldots}, z_1,\ z_2, \overset{\nu_2}{\smile\!\!\!\ldots}, z_2,\ \ldots\ z_i, \overset{\nu_i}{\smile\!\!\!\ldots}, z_i, \ldots).$$

O resultado abaixo é conhecido como "teorema de fatoração de Weierstrass".

Teorema 13.8 *Seja $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, suponha que $Z(f)$ é infinito e pode, portanto ser escrito na forma $Z(f) = \{z_i \mid i \geq 1\}$. Defina*
$$\nu_i = \omega(f, z_i) \qquad (i \geq 1).$$
Seja $(\widehat{z}_i)_{i\geq 1}$ a sequência dos zeros de f listados de acorde com a sua multi-

plicidade, isto é, (ver (13.7.2)):

$$(\widehat{z}_i)_{i\geq 1} = (z_1, \overset{\nu_1}{\overbrace{\ldots}} z_1,\ z_2, \overset{\nu_2}{\overbrace{\ldots}} z_2, \ldots\ldots z_i, \overset{\nu_i}{\overbrace{\ldots}}\ldots,\ z_i,\ \ldots\ldots)$$

Então, existem $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ *e uma sequência* $(p_n)_{n\geq 1}$ *tais que*

$$f(z) = \begin{cases} e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}(\frac{z}{\widehat{z}_n}), & se\ \ f(0) \neq 0 \\ \\ z^k.e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}(\frac{z}{\widehat{z}_n}), & se\ f(0) = 0\ e\ k := \omega(f,0). \end{cases}$$

Prova Caso 1 $f(0) \neq 0$. É claro que $Z(f)$ satisfaz as hipóteses do Teor. 13.6 (isto é, $z_i \neq 0 \ \ \forall \ \ i \geq 1$ e $\lim_{i\to\infty} |z_i| = \infty$). Podemos então construir o produto P do Teor. 13.6 (supondo já fixada uma sequência $(p_n)_{n\geq 1}$ em $\mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{R}_+^*$ de modo que (13.6.1) está verificada) a partir de $Z(f) = \{z_i \mid i \geq 1\}$ ou equivalentemente, a partir da sequência $(\widehat{z}_i)_{i\geq 1}$, ver (13.7.2) :

$$P(z) = \prod_{n\geq 1} E_{p_n}\left(\frac{z}{\widehat{z}_n}\right) \qquad (z \in \mathbb{C})$$

Pela construção de P é claro que P e f têm os mesmos zeros com igual ordem de multiplicidade e nenhuma destas duas funções têm zeros fora de $Z(f)$. Em consequência, f/P é uma função inteira sem zeros no plano complexo, isto é,

$$(13.8.1) \qquad f/P \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \ \text{ e } \ (f/P)(z) \neq 0 \quad \forall \ \ z \in \mathbb{C}\ .$$

Como $\mathbb{C}$ é simplesmente conexo, o Teor. 9.5 (ii) $\Longrightarrow$ (viii), implica que existe $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $e^g = f/P$, ou seja

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{n\geq 1} E_{p_n}(z/\widehat{z}_n) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Caso 2 $f(0) = 0$. Se $k := \omega(f,0) \geq 1$ então basta aplicar o Caso 1 à função $z \longmapsto z^{-k} f(z)$. $\square$

O resultado seguinte é chamado "teorema dos zeros de Weierstrass".

Teorema 13.9 *Seja* Ω *um aberto contido em* S^2, $\Omega \neq S^2$. *Sejam* A *um subconjunto de* Ω *sem ponto de acumulação em* Ω *e*

$$\nu : a \in A \mapsto \nu_a \in \mathbb{N}^*$$

uma função. Então existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *verificando as condições seguintes:*
(I.) $Z(f) = A$
(II.) $\omega(f,a) = \nu_a \quad \forall \ \ a \in A$.

Prova Inicialmente, comecemos com as três observações seguintes:

Observação 1 Em vista das hipóteses sobre Ω e A é claro que A é finito ou enumerável. No caso $\mathrm{Card}(A) = \infty$ vamos fixar de uma vez por todas uma aplicação bijetora $\sigma : n \in \mathbb{N}^* \longmapsto a_n \in A$, o que vai nos permitir escrever $A = \{a_n \mid n \geq 1\}$. Considere agora a composta

$$\nu \circ \sigma : n \in \mathbb{N}^* \longmapsto a_n \in A \longmapsto \nu_{a_n} \in \mathbb{N}^*$$

que, definindo $\nu_n := \nu_{a_n}$ para cada $n \geq 1$, pode ser escrita assim:

$$\nu \circ \sigma : n \in \mathbb{N} \longmapsto \nu_n \in \mathbb{N}^*.$$

A partir das duas sequências σ e $\nu \circ \sigma$ acima construimos a nova sequência (como já foi feito antes, ver (13.7.2))

$$(\widehat{a}_n)_{n\geq 1} := (a_1, \overset{\nu_1}{\smile\ldots}, a_1, a_2, \overset{\nu_2}{\smile\ldots}, a_2, \ldots\ldots, a_i, \overset{\nu_i}{\smile\ldots}, a_i, \ldots\ldots)$$

Admitindo o Teor.13.9 já provado, a sequência $(\widehat{a}_n)_{n\geq 1}$ acima é a sequência dos zeros de f listados de acordo com sua multiplicidade.

Observação 2 Podemos supor sem perda de generalidade que $\infty \in \Omega \backslash A$. De fato, se não for este o caso, isto é, $\infty \notin \Omega$, basta considerar uma transformação linear fracionária T tal que se $\Omega' := T(\Omega)$ e $A' := T(A)$, então $\infty \in \Omega'$ mas $\infty \notin A'$. Admitindo já provado o Teor. 13.9 no caso $\infty \in \Omega$ mas $\infty \notin A$, como $\infty \in \Omega'$ mas $\infty \notin A'$, existe $g \in \mathcal{H}(\Omega')$ tal que $Z(g) = A'$ e g tem um zero de multiplicidade ν_i em $T(a_i) \in A'$ para cada $i \geq 1$. Em consequência a função $f := g \circ T$ prova o Teor. 13.9 no caso $\infty \notin \Omega$.

Observação 3 *Se* Card$(A) < \infty$ *e* $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, *vamos mostrar que a prova do Teor.* 13.9 *é trivial, isto é, é imediato construir* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *tal que* a_i *é um zero de* f *de multiplicidade* ν_i $(1 \leq i \leq n)$ *e* $f(z) \neq 0$ *para cada* $z \in \Omega \backslash A$.

De fato, fixado $a_0 \in S^2 \backslash \Omega$ (o que implica, pela Obs. 2, que $a_0 \neq \infty$) definimos

$$(13.9.1) \qquad f(z) := \frac{(z-a_1)^{\nu_1} \ldots (z-a_n)^{\nu_n}}{(z-a_0)^{\nu_1+\cdots+\nu_n}} \qquad \forall \quad z \in \Omega$$

(lembrar que $\nu_i = \nu_{a_i} = \nu(a_i)$, $1 \leq i \leq n$)

Afirmações:

(a) $f \in \mathcal{H}(\Omega)$;

(b) $Z(f) = A$;

(c) $\omega(f, a_i) = \nu_i$ *para cada* $i = 1, 2, \ldots, n$.

As afirmações acima seriam completamente evidentes não fosse pelo fato (ver Obs. 2): $\infty \in \Omega \backslash A$. Vamos então mostrar que f tem uma singularidade removível no ∞ (e que $f(\infty) = 1$), o que provará a Afirmação (a) acima e, desta e da definição (13.9.1) resultarão as Afirmações (b) e (c).

Para provar que f tem uma singularidade removível no ∞ (e que $f(\infty) = 1$) basta mostrar que (ver **Exemplo 1′** do Cap. 9) a função

$$(13.9.2) \qquad ildef(z) := f(1/z) = \frac{(1-a_1 z)^{\nu_1} \ldots (1-a_n z)^{\nu_n}}{(1-a_0 z)^{\nu_1+\cdots+\nu_n}}$$

tem uma singularidade removível no 0, o que é claro pois a função $ildef$ é analítica em $D^*_{1/r}(0) \quad \forall \ |a_0| < r < \infty$ (de fato, $|1 - a_0 z| \geq 1 - |a_0|\,|z| > 0 \iff |z| < \dfrac{1}{r} < \dfrac{1}{|a_0|} \quad \forall \ |a_0| < r < \infty$, donde $\|ildef\|_{D^*_{1/r}(0)} < \infty$ $(|a_0| < r < \infty)$, isto é, f tem uma singularidade removível no ∞, como queríamos provar. Observemos também que da definição de $ildef$ segue óbviamente que

$$\ell = \lim_{z \to 0} ildef(z) = 1$$

o que mostra (ver Cap. 9) que $f(\infty) = \ell = 1$. *A afirmação* (a) *está provada* (*e portanto também* (b) e (c)).
Visto que a definição (13.9.1) de f pode parecer um pouco artificial vamos fazer algumas observações no sentido de tornar esta função mais natural. Inicialmente, observemos que se eliminamos o denominador

$$(z - a_0)^{\nu_1 + \ldots + \nu_n} \tag{13.9.3}$$

da funçao f, esta tomaria a forma

$$g(z) = (z - a_1)^{\nu_1} \ldots (z - a_n)^{\nu_n} \qquad (z \in \Omega)$$

que é um polinômio e teria (ver EX.2, Cap.9) um polo de ordem $\nu_1 + \cdots + \nu_n$ no ∞ e portanto teríamos $g \in \mathcal{M}(\Omega) \backslash \mathcal{H}(\Omega)$ o que não fornece a prova procurada pois $g \notin \mathcal{H}(\Omega)$. Isto justifica a presença do denominador (13.9.3) na definição de $ildef$.
A outra observação a respeito da definição de f é bem mais simples e se refere ao expoente $\nu_1 + \ldots + \nu_n$ em (13.9.3). Aqui basta dizer que os expoentes $\nu_1, \ldots, \nu_n$ são importantes pela Afirmação (c) e então o expoente $\nu_1 + \cdots + \nu_n$ no denominador é o único que permite obter a definição (13.9.2) de $ildef$.

Continuação da prova do Teor. 13.9
Seja $K := S^2 \backslash \Omega$. Como Ω é aberto em S^2 resulta que K é fechado em S^2 que é compacto e como $\infty \notin K$ (ver Obs. 2) concluimos que $K \subset \mathbb{C}$ donde $K \subset\subset \mathbb{C}$. Vamos considerar a sequência $(\widehat{a}_n)_{n \geq 1}$ (associada às sequências $(a_n)_{n \geq 1}$ e $(\nu_n)_{n \geq 1}$ da Observação 1). Tem-se

Afirmação 1 Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ existe $\beta_n \in K$ tal que

$$|\beta_n - \widehat{a}_n| \leq |\beta - \widehat{a}_n| \qquad \forall \ \beta \in K. \tag{13.9.4}$$

De fato, fixado $n \in \mathbb{N}^*$ arbitrário, é claro que a função

$$\beta \in K \longmapsto |\beta - \widehat{a}_n| \in \mathbb{R}_+$$

é contínua e portanto tem um mínimo β_n em K, o que prova a nossa asserção.

Afirmação 2 Com as notações precedentes, $\lim\limits_{n \to \infty} |\widehat{a}_n - \beta_n| = 0$. Vamos demonstrar esta Afirmação 2 por absurdo, se ela fosse falsa teríamos: $|\beta_n - \widehat{a}_n| \geq \delta$ para algum $\delta > 0$ e para infinitos $n \in \mathbb{N}$, ou seja, de modo mais preciso,

$$(13.9.5)\quad \left|\begin{array}{l} \exists\ \ \delta > 0 \text{ tal que } \forall\ \ p \in \mathbb{N}^*\ \ \exists\ \ n_p \in \mathbb{N},\ n_p > \max\ (p, n_{p-1}) \\ \\ \text{tal que } \left|\widehat{a}_{n_p} - \beta_{n_p}\right| \geq \delta \qquad (n_0 := 0) \end{array}\right.$$

De (13.9.5) resulta que a sequência $(n_p)_{p\geq 1}$ é estritamente crescente e portanto $(\widehat{a}_{n_p})_{p\geq 1}$ é uma subsequência de $(\widehat{a}_m)_{m\geq 1}$. Além disso, é claro por (13.9.5) que

$$\left|\widehat{a}_{n_p} - \beta_{n_p}\right| \geq \delta \qquad \forall\ \ p \geq 1$$

e como por (13.9.4) temos

$$\left|\beta_{n_p} - \widehat{a}_{n_p}\right| \leq \left|\beta - \widehat{a}_{n_p}\right| \qquad \forall\ \ \beta \in K,\ \ \forall\ \ p \geq 1$$

resulta

$$(13.9.6)\qquad \left|\beta - \widehat{a}_{n_p}\right| \geq \delta \qquad \forall\ \ \beta \in K,\ \ \forall\ \ p \geq 1.$$

Ora, $(\widehat{a}_{n_p})_{p\geq 1}$ é uma sequência em S^2 que é compacto logo $(\widehat{a}_{n_p})_{p\geq 1}$ possui uma subsequência convergente $\lambda = (\widehat{a}_{n_{p_j}})_{j\geq 1}$ para um ponto $\alpha \in S^2$. De (13.9.6) resulta visívelmente que $\alpha \notin K$ [de fato, se fosse $\alpha \in K$, de (13.9.6) resultaria $\left|\alpha - \widehat{a}_{n_p}\right| \geq \delta\ \ \forall\ \ p \geq 1$, o que é absurdo pois os pontos de $\lambda = (\widehat{a}_{n_{p_j}})_{j\geq 1}$ são alguns dos pontos $\widehat{a}_{n_p}$ e portanto $\left|\alpha - \widehat{a}_{n_p}\right|$ é arbitrariamente pequeno para os $\widehat{a}_{n_p}$ de λ pois $\lambda \to \alpha$.]. De $\alpha \notin K$, em vista da definição de K, resulta $\alpha \in \Omega$. Mas é claro agora que $\alpha \in \Omega$ é absurdo pois α seria um ponto de acumulação de A em Ω já que $\lambda \to \alpha$ e λ é uma sequência de $\widehat{a}_n\ 's$. Em resumo provamos que

$$\alpha \notin K \implies \alpha \in \Omega \implies \text{contradição},$$

o que prova a Afirmação 2.

A seguir definimos $r_n := 2\,|\widehat{a}_n - \beta_n|\ \ \forall\ \ n \geq 1$ e fixamos $K_0 \subset\subset \Omega$ arbitrário. Com estas notações vamos provar que

Afirmação 3 Existe $N \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$|z - \beta_n| > r_n \quad \forall\ \ z \in K_0\ \text{ e }\ \forall\ \ n \geq N.$$

Com efeito, como $K_0 \subset\subset \Omega$, a definição de K mostra que $K \cap K_0 = \varnothing$ e portanto

$$\delta_0 := \text{dist}(K, K_0) > 0.$$

Como $\beta_n \in K$ para cada $n \geq 1$, a definição acima de δ_o mostra que

$$|z - \beta_n| \geq \delta_0 \quad \forall\ \ z \in K_0, \quad \forall\ \ n \geq 1\ .$$

Por outro lado, da Afirmação 2 resulta

$$r_n = 2\,|\widehat{a}_n - \beta_n| \longrightarrow 0\ \text{ se } n \to 0,$$

o que implica que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $r_n < \delta_0\ \ \ \forall\ \ n \geq N$ e, em consequência, $|z - \beta_n| \geq \delta_0 > r_n\ \ \ \forall\ \ n \geq N\ $ e $\forall\ \ z \in K_0$ donde $|z - \beta_n| > r_n$ $\forall\ \ n \geq N\ $ e $\ \forall\ \ z \in K_0$, que é a Afirmação 3.

Definimos a seguir (ver Def. 13.4).

$$(13.9.7) \qquad f(z) := \prod_{n=1}^{\infty} E_n(\frac{\widehat{a}_n - \beta_n}{z - \beta_n}) \quad \forall \ z \in \Omega,$$

vamos mostrar que f satisfaz as condições do enunciado. Observemos em primeiro lugar que cada fator no segundo membro de (13.9.7) está bem definido pois $\beta_n \in K \subset \Omega^c$ para cada $n \geq 1$ portanto $z - \beta_n \neq 0$ sempre que $z \in \Omega$ e $n \geq 1$. Mostremos a seguir que o segundo membro de (13.9.7) está bem definido, isto é, que estão satisfeitas as propriedades de convergência sobre os compactos do produto infinito (13.9.7).

Como $|\widehat{a}_n - \beta_n| = \frac{1}{2} r_n$ para cada $n \geq 1$ e $|z - \beta_n| > r_n$ para cada $n \geq N$ e cada $z \in K_0$ (ver Afirmação 3) podemos escrever

$$\left|\frac{\widehat{a}_n - \beta_n}{z - \beta_n}\right| = \frac{|\widehat{a}_n - \beta_n|}{|z - \beta_n|} \leq \frac{r_n/2}{r_n} = \frac{1}{2} \quad \forall \ z \in K_0 \ \text{ e } \ \forall \ n \geq N$$

e então, pelo Lema 13.5 obtemos

$$(13.9.8) \qquad \left| \begin{array}{l} \left|1 - E_n(\frac{\widehat{a}_n - \beta_n}{z - \beta_n})\right| \leq \left|\frac{\widehat{a}_n - \beta_n}{z - \beta_n}\right|^{n+1} \leq (\frac{1}{2})^{n+1} \\ \forall \ z \in K_0 \ \text{ e } \ \forall \ n \geq N \ . \end{array} \right.$$

Como K_0 é um compacto arbitrário de Ω, de (13.9.8) segue que a série (ver (13.3.1)):

$$\sum_{n \geq 1} \left|1 - E_n(\frac{\widehat{a}_n - \beta_n}{z - \beta_n})\right|$$

converge uniformemente sobre os compactos de Ω e então, pelo Teor. 13.3, resulta que o produto infinito (13.9.7) converge uniformemente sobre os compactos de Ω e, em consequência, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Além disso, $f(z) = 0$ se e só se

$$E_n(\frac{\widehat{a}_n - \beta_n}{z - \beta_n}) = 0 \ \text{ para algum } n \geq 1$$

o que equivale a afirmar que $z = \widehat{a}_n$ para algum $n \geq 1$ (pois as funções E_n têm apenas um zero simples em 1). Podemos então concluir que $Z(f) = A$.

Vamos ver por fim que $\omega(f, a_i) = \nu_i$ para cada $i \geq 1$. Fixado $i \in \mathbb{N}^*$ arbitrário definimos o seguinte conjunto:

$$I_i := \{p \in \mathbb{N}^* \mid \widehat{a}_p = a_i\}$$

que visívelmente tem ν_i elementos, isto é, $\text{Card}(I_i) = \nu_i$.

No que segue vamos denotar com $E_n(\frac{\widehat{a}_n - \beta_n}{* - \beta_n})$ a função

$$z \longmapsto E_n(\frac{\widehat{a}_n - \beta_n}{z - \beta_n}) \ .$$

Pelo Teor. 13.3 tem-se ($i \geq 1$ continua fixado):

$$(13.9.9) \quad \left| \begin{array}{c} \omega(f, a_i) = \sum_{n \geq 1} \omega \left[E_n(\frac{\widehat{a}_n - \beta_n}{* - \beta_n}), a_i \right] = \\ \\ \sum_{p \in I_i} \omega \left[E_p(\frac{\widehat{a}_p - \beta_p}{* - \beta_p}), a_i \right] + \sum_{p \notin I_i} \omega \left[E_p(\frac{\widehat{a}_p - \beta_p}{* - \beta_p}), a_i \right] \end{array} \right|$$

Observemos agora que

$$p \in I_i \iff \widehat{a}_p = a_i \implies \omega \left[E_p(\frac{\widehat{a}_p - \beta_p}{* - \beta_p}), a_i \right] = 1 \quad \forall \ \ p \in I_i \ \text{ pois}$$

$\dfrac{\widehat{a}_p - \beta_p}{a_i - \beta_p} = 1 \quad \forall \ \ p \in I_i$, donde

$$(13.9.10) \qquad \sum_{p \in I_i} \omega \left[E_p(\frac{\widehat{a}_p - \beta_p}{* - \beta_p}), a_i \right] = 1. \operatorname{Card}(I_i) = \nu_i$$

Analogamente,

$$p \notin I_i \iff \widehat{a}_p \neq a_i \implies \frac{\widehat{a}_p - \beta_p}{a_i - \beta_p} \neq 1 \implies E_p(\frac{\widehat{a}_p - \beta_p}{a_i - \beta_p}) \neq 0$$

$\implies \omega \left[E_p(\dfrac{\widehat{a}_p - \beta_p}{* - \beta_p}), a_i \right] = 0$ e em consequência

$$(13.9.11) \qquad \sum_{p \notin I_i} \omega \left[E_p(\frac{\widehat{a}_p - \beta_p}{* - \beta_p}), a_i \right] = 0 \ .$$

Substituindo as duas somas da última parcela de (13.9.9) pelos valores achados em (13.9.10) e (13.9.11) obtemos $\omega(f, a_i) = \nu_i + 0 = \nu_i$. $\Box$

O resultado seguinte generaliza o Teor. 13.9:

Teorema 13.10 *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{C}$, $(a_i)_{i \geq 1}$ uma sequência em Ω sem ponto de acumulação em Ω verificando $a_i \neq a_j$ sempre que $i \neq j$; $D := \{a_i \mid i \geq 1\}$ e seja $(\nu_i)_{i \geq 1}$ uma sequência em $\mathbb{Z}^*$. Então, existe $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ tal que $f|\Omega \backslash D \in \mathcal{H}(\Omega \backslash D)$, $Z(f|\Omega \backslash D) = \varnothing$ e, para cada $i \geq 1$ a função*

$$z \longmapsto f(z)(z - a_i)^{-\nu_i}$$

é holomorfa e sem ponto de anulação numa vizinhança aberta de a_i.

Pelo exerc. (8.23) é claro, com as notaçõess do Teor. 3.10, que se $\nu_i > 0$ (resp. $\nu_i < 0$) então a_i é um zero de f de multiplicidade ν_i (resp. polo de f de ordem $-\nu_i = |\nu_i|$). Podemos então concluir que o Teor. 13.10 expressa que sempre existe uma função meromorfa com zeros e polos, com multiplicidades e ordens, prescritos.

Prova do Teor. 13.10 A ideia da prova é simples, consiste em aplicar o Teor. 13.9 aos $\nu_i > 0$ (resp. $\nu_i < 0$) obtendo uma função f^+ (resp. f^-) em $\mathcal{H}(\Omega)$ e a seguir ver que $f := f^+/f^-$ resolve a questão. Sejam

$$A := \{a_i \mid \nu_i \geq 1\} \ \text{ e } \ B := \{a_i \mid \nu_i \leq -1\},$$

podemos então supor que A e B são conjuntos infinitos pois se algum dos conjuntos A, B (ou ambos) for finito, a prova se simplifica bastante.

A função $f^+ \in \mathcal{H}(\Omega)$: Aplicamos o Teor. 13.9 a (Ω, A) obtendo uma $f^+ \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $Z(f^+) = A$ e $\omega(f^+, a_i) = \nu_i$ para cada $a_i \in A$. Como cada $a_i \in A$ é um zero de f^+ de multiplicidade $\nu_i > 0$, pelo exerc. (8.23), existe um aberto V_i verificando $a_i \in V_i \subset \Omega$ e tal que a função

$$g_i : z \in V_i \longmapsto f^+(z)(z - a_i)^{-\nu_i} \in \mathbb{C} \tag{13.10.1}$$

é holomorfa e $Z(g_i) = \varnothing$.

A função $f^- \in \mathcal{H}(\Omega)$: Aplicamos o Teor. 13.9 a (Ω, B) obtendo uma $f^- \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $Z(f^-) = B$ e $\omega(f^-, a_i) = -\nu_i = |\nu_i|$ para cada $a_i \in B$. Como cada $a_i \in B$ é um zero de f^- de multiplicidade $-\nu_i = |\nu_i|$, pelo exerc. (8.23), existe um aberto W_i verificando $a_i \in W_i \subset \Omega$ e tal que a função

$$h_i : z \in W_i \longmapsto f^-(z)(z - a_i)^{-|\nu_i|} \in \mathbb{C} \tag{13.10.2}$$

é holomorfa e $Z(h_i) = \varnothing$.

A seguir definimos $f(z) := \dfrac{f^+(z)}{f^-(z)}$ $\quad (z \in \Omega)$ e vamos mostrar que f tem as propriedades requeridas. É claro que $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ pois é o quociente de duas funções holomorfas em Ω. Fixemos $a_i \in A$ arbitrário. Por (13.10.1) podemos escrever

$$f^+(z) = g_i(z)(z - a_i)^{\nu_i} \quad \forall \ z \in V_i$$

e então, definindo $G_i(z) := g_i(z)/f^-(z)$ para cada $z \in V_i$ resulta

$$f(z) = \frac{f^+(z)}{f^-(z)} = G_i(z)(z - a_i)^{\nu_i} \quad \forall \ z \in V_i. \tag{13.10.3}$$

Como D é um conjunto discreto é claro que podemos supor que $V_k \cap W_j = \varnothing$ quaisquer que sejam $k \geq 1$ e $j \geq 1$. Em consequência, resulta $Z(f^-|V_i) = \varnothing$ e como $Z(g_i) = \varnothing$ concluimos que $G = g_i/f^-$ é holomorfa e sem ponto de anulação em V_i e então de (13.10.3) segue que a_i é um zero de f de multiplicidade ν_i. Fixemos a seguir $a_i \in B$ arbitrário. Por (13.10.2) podemos escrever

$$f^-(z) = h_i(z)(z - a_i)^{|\nu_i|} \quad \forall \ \ z \in W_i$$

e então, definindo $H_i(z) := f^+(z)/h_i(z)$ para cada $z \in W_i$, como H_i é holomorfa e sem ponto de anulação em W_i (aqui o argumento é um pouco mais simples que o usado com G_i cujo denominador era mais complicado que o de H_i) obtemos

$$f(z) = \frac{f^+(z)}{f^-(z)} = \frac{H_i(z)}{(z - a_i)^{|\nu_i|}} \qquad \forall \ \ z \in W_i,$$

o que mostra que a_i é um polo de f de ordem $|\nu_i|$. Pelo Teor. 13.9 temos $Z(f^+|\Omega\backslash A) = \varnothing$ portanto $Z(f|\Omega\backslash A) = \varnothing$ e como $\Omega\backslash D \subset \Omega\backslash A$, é claro que $Z(f|\Omega\backslash D) = \varnothing$. Por outro lado, é claro que

$$Pol(f) = Pol(f^+/f^-) = Z(f^-) = B$$

portanto $f \in \mathcal{H}(\Omega\backslash B)$ e sendo $\Omega\backslash D \subset \Omega\backslash B$ resulta $f \in \mathcal{H}(\Omega\backslash D)$. $\square$

Como consequência do Teor. 13.9 obtemos uma caracterização das funções meromorfas:

Teorema 13.11 *Se Ω é um aberto em $\mathbb{C}$, são equivalentes as duas condições seguintes:*
(i) *φ é meromorfa em Ω;*
(ii) *φ é o quociente de duas funções holomorfas em Ω.*
Em particular, se Ω é conexo então o corpo $\mathcal{M}(\Omega)$ de todas as funções meromorfas em Ω é o corpo de frações do anel de integridade $\mathcal{H}(\Omega)$ (ver Corol. 4.14 e Def. 8.11).

A afirmação "$\mathcal{M}(\Omega)$ é o corpo de frações do anel de integridade $\mathcal{H}(\Omega)$" é falsa para funções holomorfas de n variáveis com $n \geq 2$.

Prova do Teor. 13.11 A implicação (ii) $\Longrightarrow$ (i) segue trivialmente das considerações que precedem à Def. 8.11. Vamos então provar que (i) $\Longrightarrow$ (ii). Sejam $\varphi \in \mathcal{M}(\Omega), A$ o conjunto de todos os polos de φ em Ω e, para cada $a \in A$, seja ν_a a ordem do polo de φ em a. Pelo Teor.13.9 existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que g tem um zero de multiplicidade ν_a em cada $a \in A$ e g não tem nenhum outro zero. Definimos $f := \varphi g$. É claro então que as singularidades de f nos pontos de A são removíveis, o que mostra que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e portanto $\varphi = f/g$ em $\Omega\backslash A$. $\square$

Consideremos o seguinte problema: Dados um aberto Ω de $\mathbb{C}$ arbitrário e um subconjunto A de Ω sem ponto de acumulação em Ω, existe uma $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ com valores prescritos em cada ponto de A? A resposta é afirmativa mas aqui vamos mostrar que é possível fazer bem melhor prescrevendo um número finito de derivadas em cada ponto de A. Este resultado, conhecido como "Teorema de interpolação"(Teor.13.12), que segue de combinar o Teor.12.1 (Mittag-Leffler) com o Teor.13.9 (Weierstrass), é muito útil para determinar a estrutura dos ideais finitamente gerados dos aneis $\mathcal{H}(\Omega)$. Na prova abaixo do Teor.13.12, o teorema de Mittag-Leffler é usado na forma equivalente do Teor.12.2.

Teorema 13.12 *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{C}$, A um subconjunto de Ω sem ponto de acumulação em Ω,*

$$\nu : a \in A \longmapsto \nu(a) \in \mathbb{N}$$

uma função e $(w_{k,a})_{0 \leq k \leq \nu(a)}$ uma sequência finita em $\mathbb{C}$ para cada $a \in A$.

Então, existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que

$$f^{(k)}(a) = k! w_{k,a} \quad \text{para cada } a \in A \quad \text{e} \quad 0 \leq k \leq \nu(a) \ .$$

Em consequência, para cada $a \in A$ existe uma vizinhança aberta V_a de a tal que

$$f(z) = \sum_{0 \leq k \leq \nu(a)} w_{k,a}(z-a)^k + \sum_{k > \nu(a)} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(z-a)^k \quad \text{para cada } z \in V_a \ .$$

Prova As hipóteses sobre A mostram que este conjunto é enumerável portanto podemos alterar a notação (como já fizemos várias vezes) escrevendo

$$A = \{a_i \mid i \geq 1\} \quad , \qquad \nu_i := \nu(a_i) \qquad (i \geq 1) \quad \text{e}$$

$w_{k,a} = w_{k,a_i} =: w_{k,i}$ sempre que $i \geq 1$ e $0 \leq k \leq \nu_i$.

Pelo Teor. 13.9 existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $Z(g) = A$ e

$$\omega(g, a_i) = \nu_i + 1 \qquad \forall \ \ i \geq 1 \ .$$

Seja $(\varepsilon_i)_{i \geq 1}$ uma sequência em $\mathbb{R}_+^*$ tal que a família de discos $(\Delta_i)_{i \geq 1}$ definida por

$$\Delta_i := D_{2\varepsilon_i}(a_i) \qquad (i \geq 1)$$

seja formada por discos dois a dois disjuntos (isto é possível em vista da hipótese feita sobre A). Agora, para cada $i \geq 1$ considere o polinômio

$$P_i(z) := P_{a_i}(z) := \sum_{k=0}^{\nu_i} w_{k,i}(z-a_i)^k$$

e uma função $\varphi_i \in \mathcal{C}_0^\infty(\Delta_i)$ tal que

$$0 \leq \varphi_i \leq 1 \quad \text{e} \quad \varphi_i \equiv 1 \quad \text{em } \overline{D_{\varepsilon_i}}(a_i).$$

Para uma $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ arbitrária considere a função f definida por

$$(13.12.1) \qquad f(z) := \sum_{i \geq 1} P_i(z)\varphi_i(z) - g(z)\psi(z) \qquad (z \in \Omega).$$

Como $\operatorname{supp}(\varphi_i) \cap \operatorname{supp}(\varphi_j) = \varnothing$ sempre que $i \neq j$, a série que aparece em

(13.12.1) contem no máximo um termo não nulo na vizinhança de qualquer ponto de Ω, o que mostra que $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. A seguir, precisamos escolher ψ de modo que f seja holomorfa, o que significa que devemos achar uma $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ em Ω. Observemos que $\dfrac{\partial P_i}{\partial \overline{z}} = 0$ e $\dfrac{\partial g}{\partial \overline{z}} = 0$ em Ω e então, aplicando $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ em (13.12.1) podemos escrever

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = \sum_{i \geq 1} P_i(z) \frac{\partial \varphi_i}{\partial \overline{z}}(z) - g(z) \frac{\partial \psi}{\partial \overline{z}}(z) \qquad (z \in \Omega)$$

donde resulta

$$h(z) := \sum_{i \geq 1} P_i(z) \frac{\partial \varphi_i}{\partial \overline{z}}(z) = g(z) \frac{\partial \psi}{\partial \overline{z}}(z) \qquad (z \in \Omega). \tag{13.12.2}$$

Como $\varphi_i \equiv 1$ em $\overline{D_{\varepsilon_i}}(a_i)$ para cada $i \geq 1$, é claro que na reunião

$$R := \bigcup_{i \geq 1} \overline{D_{\varepsilon_i}}(a_i)$$

temos $h \equiv 0$, o que implica que a função F dada por

$$F(z) := \begin{cases} h(z)/g(z) \ , & \text{se } \ z \in \Omega \backslash A \\ 0 \ , \ \text{se } \ z \in A \end{cases}$$

está bem definida pois o denominador g só se anula em A e então, sendo

$$h \mid \overline{D_{\varepsilon_i}}(a_i) = 0 \ \text{ e } \ g(z) \neq 0 \quad \forall \ z \in D^*_{\varepsilon_i}(a_i) \quad (i \geq 1)$$

podemos concluir que a função meromorfa h/g em $D_{\varepsilon_i}(a_i)$ tem uma singularidade removível em a_i e portanto podemos escrever

$$(h/g) \mid D_{\varepsilon_i}(a_i) := 0 \quad \forall \ i \geq 1. \tag{13.12.3}$$

Em consequência, F está bem definida e $F \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. De (13.12.2) e da denição de F resulta que o nosso problema está resolvido se acharmos uma função $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial \overline{z}} = F \ , \ \text{ em } \ \Omega. \tag{13.12.4}$$

Ora, pelo Teor. 12.2, existe $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ tal que se verifica (13.12.4) e então, a função f dada por (13.12.1) é holomorfa em Ω. Além disso, tem-se

$$\psi \mid D_{\varepsilon_i}(a_i) \in \mathcal{H}(D_{\varepsilon_i}(a_i)) \quad \forall \ i \geq 1$$

pois por (13.12.3) resulta $F \mid D_{\varepsilon_i}(a_i) \equiv 0$ para cada $i \geq 1$ e então, de

(13.12.4) segue $\dfrac{\partial\psi}{\partial\bar{z}} \mid D_{\varepsilon_i}(a_i) \equiv 0$ para cada $i \geq 1$. Fixemos $i \geq 1$ arbitrário e seja $z \in \overline{D_{\varepsilon_i}}(a_i)$ arbitrário. Então $\varphi_j(z) = 0$ para cada $j \geq 1$ e $j \neq i$, donde resulta (ver (13.12.1) lembrando que ψ está fixada por (13.12.4))

$$f(z) = P_i(z)\varphi_i(z) - g(z)\psi(z) \qquad (z \in \Omega)$$

e como $\varphi_i(z) = 1$ podemos escrever $f(z) = P_i(z) - g(z)\psi(z)$ $(z \in \Omega)$ e então, derivando k vezes, sendo $0 \leq k \leq \nu_i$, obtemos

$$f^{(k)}(z) = (P_i(z))^{(k)} - (g(z)\psi(z))^{(k)} \quad (z \in \Omega) \tag{13.12.5}$$

Como a_i é um zero de multiplicidade $\nu_i + 1$ de g, podemos escrever

$$g(z) = (z - a_i)^{\nu_i+1}.g_0(z) \text{ onde } g_0 \in \mathcal{H}(D_{\varepsilon_i}(a_i)) \text{ e } Z(g_0) = \varnothing$$

e, em consequência, definindo $G(z) := (g(z)\psi(z))^{(k)}$ obtemos

$$G(z) = \left[(z - a_i)^{\nu_i+1}.g_o(z)\psi(z)\right]^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} C_j^k \left[(z - a_i)^{\nu_i+1}\right]^{(k-j)} (g_0(z)\psi(z))^{(j)}.$$

Visivelmente, em cada termo da somatória acima há um fator do tipo $(z - a_i)^p$, com $p > 0$ pois $\nu_i + 1 > k - j$ para cada $j = 0, 1, \ldots, k$ e podemos então concluir que

$$G(a_i) = (g(z)\psi(z))^{(k)}|_{z=a_i} = 0 \tag{13.12.6}$$

o que implica por (13.12.5) : $f^{(k)}(a_i) = (P_i(z))^{(k)}|_{z=a_i}$. Pela definição de P_i e por um cálculo direto (ver Exerc.13.3) obtemos

$$(P_i(z)^{(k)})|_{z=a_i} = k!w_{k,i},$$

donde

$$f^{(k)}(a_i) = k!w_{k,i} \text{ para cada } i \geq 1 \text{ e } 0 \leq k \leq \nu_i \text{ . } \square$$

Exercícios

(13.1) Se S é um conjunto não vazio qualquer indicamos com

$$\mathcal{B}(S, \mathbb{C})$$

o espaço vetorial complexo de todas as funções $f : S \longrightarrow \mathbb{C}$ que são limitadas (i.e. $\|f\|_S < \infty$).

Seja $(u_n)_{n\geq1}$ uma sequência em $\mathcal{B}(S, \mathbb{C})$ tal que $\sum_{n\geq1} |u_n(s)|$ converge uniformemente em S (ver Def. 3.4. (b)). então, o produto

$$f(s) := \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(s)) \tag{13.1 − 1}$$

converge uniformemente sobre S e $f(s_0) = 0$ se e só se $u_n(s_0) = -1$ para algum $n \geq 1$. Ainda mais, se $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ é uma permutação de $\mathbb{N}^*$ também se tem

$$(13.1-2) \qquad f(s) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_{\sigma(n)}(s)) \qquad (s \in S)$$

Sugestão: Se necessário veja [R2], Th. 15.4.

(13.2) Seja $(u_n)_{n\geq 1}$ uma sequência em $[0,1[\subset \mathbb{R}$.
Prove que $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-u_n) > 0$ se e só se $\sum\limits_{n\geq 1} u_n < \infty$.

Sugestão: Se necessário veja [R2], Th. 15.5.

(13.3) Sejam $m \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{C}$, $(w_k)_{0\leq k\leq m}$ uma sequência em $\mathbb{C}$ e considere o polinômio

$$P(z) := \sum_{k=0}^{m} w_k (z-a)^k \quad \forall \ z \in \mathbb{C}.$$

Mostre que $(P(z))^{(k)}|_{z=a} = k! w_k \qquad (0 \leq k \leq m)$.

(13.4) Considere a sequência $(a_m)_{m\geq 1}$ definida por $a_m := \dfrac{1}{m+1}$ para cada $m \geq 1$ e seja $A := \{a_m \mid m \geq 1\}$.
(a) Existe $f \in \mathcal{H}(D_1^*(0))$ tal que $Z(f) = A$?
(b) Existe $f \in \mathcal{H}(D_1(0))$ tal que $Z(f) = A$?

(13.5) Sejam Ω um aberto simplesmente conexo de $\mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Quais são as condições necessárias e suficientes sobre f e g de modo que a equação $\varphi^2 + f\varphi + g = 0$ admita a solução $\varphi \in \mathcal{M}(\Omega)$?

(13.6) Prove que qualquer que seja a solução meromorfa da equação $zf(z) = f(z+1)$ verificando a condição $f(1) = 1$ deve ter polos simples em $z = -n$, $n \in \mathbb{N}^*$, com resíduos $(-1^n)/n!$.

(13.7) Seja Ω um aberto não vazio de $\mathbb{C}$. Prove que existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ que não se estende analíticamante a nenhum aberto contendo estritamente Ω, nem mesmo como função meromorfa, isto é, não existem um disco aberto $D_r(a)$ centrado em algum $a \in \partial\Omega$ nem uma $g \in \mathcal{M}(D_r(a))$ tais que g e f coincidem em $D_r(a) \cap \Omega$.

Sugestão: Se necessário ver [H], Corol.1.5.3 ou [BG] Corol. 3.3.3.

(13.8) Sejam Ω um aberto não vazio de $\mathbb{C}$ e $(g_\alpha)_{\alpha\in A}$ uma família não vazia em $\mathcal{H}(\Omega)$.Chama-se *ideal gerado pela família* $(g_\alpha)_{\alpha\in A}$ ao conjunto $[(g_\alpha)_{\alpha\in A}]$

de todas as funções do tipo $\sum\limits_{\alpha \in A} f_\alpha g_\alpha$, onde $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ é uma família suporte finito em $\mathcal{H}(\Omega)$ (o que é manifestamente equivalente a dizer que é o menor ideal de $\mathcal{H}(\Omega)$ contendo g_α para cada $\alpha \in A$). Nesta situação diz-se que (g_α) é um sistema de geradores de $[(g_\alpha)]$. Se um ideal I de $\mathcal{H}(\Omega)$ admite um sistema finito $(g_1, \ \ldots, g_n)$ de geradores (resp. um sistema de geradores com um único elemento g) diz-se que I é um *ideal de tipo finito* (resp. I é um *ideal principal*)
(a) Mostre que $[(g_\alpha)]$ é um ideal de $\mathcal{H}(\Omega)$.
(b) Prove que cada ideal do tipo finito de $\mathcal{H}(\Omega)$ é principal.
(c) Para $p \in \mathbb{N}^*$ defina $g_p(z) := \prod\limits_{m \geq p} (1 - \dfrac{z^2}{m^2})$. Prove que o ideal $[(g_p)_{p \geq 1}]$ gerado por $(g_p)_{p \geq 1}$ não é principal.

Sugestão: para (b): se necessário ver [R2], Th. 15.15.

(13.9) Sejam Ω um aberto não vazio de $\mathbb{C}$ e I um ideal de $\mathcal{H}(\Omega)$. Definimos
$$Z(I) := \bigcap_{f \in I} Z(f) \ .$$
Observar que $Z(\mathcal{H}(\Omega)) = \varnothing$ pois $1 \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $Z(1) = \varnothing$.
Prove que existem ideais $I \neq \mathcal{H}(\Omega)$ tais que $Z(I) = \varnothing$ e $I \neq \{0\}$.

[Sugestão: Seja $(a_i)_{i \geq 1}$ uma sequência em Ω sem ponto de acumulação em Ω e seja
$$I := \{f \in \mathcal{H}(\Omega) \mid \exists \ \ \nu_f \in \mathbb{N} \text{ tal que } f(a_i) = 0 \ \ \forall \ \ i \geq \nu_f + 1\}$$
(a) Prove que I é um ideal de $\mathcal{H}(\Omega)$.
(b) Use o Teor. 13.9 (Weierstrass) para provar que $I \neq \{0\}$.
Observe que $I \neq \mathcal{H}(\Omega)$ pois $1 \notin I$. É claro que $Z(I) = \varnothing$.]

(13.10) (a) Sejam $0 < |a| < 1$ e $|z| \leq r < 1$. Mostre que
$$\left| \frac{a + |a| \, z}{(1 - \overline{a} z) a} \right| \leq \frac{1 + r}{1 - r}$$

(b) Seja $(a_m)_{m \geq 1}$ uma sequência em $\mathbb{C}$ tal que $0 < |a_m| < 1$ para cada $m \geq 1$ e verificando $\sum\limits_{m \geq 1} (1 - |a_m|) < \infty$.
Prove que o produto
$$B(z) := \prod_{m \geq 1} \frac{|a_m|}{a_m} (\frac{a_m - z}{1 - \overline{a}_m z})$$
converge em $\mathcal{H}(D_1(0))$ [isto é, o produto infinito acima definindo $B(z)$ converge uniformemente sobre compactos de $D_1(0)$.]
(c) Mostre que $|B(z)| \leq 1$ para cada $z \in D_1(0)$.
(d) Ache uma sequência $(a_m)_{m \geq 1}$ em $D_1(0)$ tal que $\sum\limits_{m \geq 1} (1 - |a_m|) < \infty$ de modo que cada número do tipo $e^{i\theta}$ seja um ponto de acumulação de $(a_m)_{m \geq 1}$.

($B(z)$ é chamado *produto de Blaschke)*

(13.11) (*A topologia* τ_0) Seja Ω um aberto não vazio de $\mathbb{C}$, vamos definir a topologia natural sobre $\mathcal{H}(\Omega)$. Por simplicidade, no que se segue vamos usar a notação

$$\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$$

para indicar o conjunto de todas as vizinhanças de 0 em $\mathbb{C}$. Para cada $K \subset\subset \Omega$ e cada $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ definimos

$$\Gamma(K,V) := \{f \in \mathcal{H}(\Omega) \mid f(K) \subset V\}$$

e

$$\mathcal{B}_{\Omega} := \{\Gamma(K,V) \mid K \subset\subset \Omega \text{ e } V \in \mathcal{V}_{\mathbb{C}}\}$$

Prove que existe uma única topologia sobre $\mathcal{H}(\Omega)$, usualmente denotada por τ_0, compatível com a estrutura de anel de $\mathcal{H}(\Omega)$, tal que $\mathcal{B}_{\Omega}$ é um sistema fundamental de τ_0-vizinhanças de 0 em $\mathcal{H}(\Omega)$. τ_0 é chamada *topologia de convergência uniforme sobre os compactos de* Ω.

Sugestão: Use o seguinte resultado pertencente ao "folclore" da Álgebra Topológica (ver [Bki], Ch 3, §1 e §3):

Proposição: *Sejam* A *um anel unitário e comutativo e* $\mathcal{B}$ *uma base de filtro sobre* A *verificando as condições seguintes:*
($\mathrm{GA_I}$) *Para cada* $B \in \mathcal{B}$ *existe* $B_1 \in \mathcal{B}$ *tal que* $B_1 + B_1 \subset B$;
($\mathrm{GA_{II}}$) *Para cada* $B \in \mathcal{B}$ *tem-se* $-B \in \mathcal{B}$;
($\mathrm{AV_I}$) *Para cada* $a \in A$ *e para cada* $B \in \mathcal{B}$ *existe* $B_0 \in \mathcal{B}$ *tal que* $aB_0 \subset B$.
($\mathrm{AV_{II}}$) *Para cada* $B \in \mathcal{B}$ *existe* $B_1 \in \mathcal{B}$ *tal que* $B_1 B_1 \subset B$.
Então existe uma única topologia τ *compatível com a estrutura de anel de* A [isto é, tornando contínuas as duas funções $(x,y) \longmapsto x-y$ e $(x,y) \longmapsto xy$] *para a qual* $\mathcal{B}$ *é um sistema fundamental de* τ*-vizinhanças de* 0.]

(13.12) A definição da topologia τ_0 apresentada no Exerc. (13.11) foi feita dentro do espirito da teoria dos grupos (abelianos) e anéis topológicos (ver [Bki], Ch3, §6). Aqui vamos definir τ_0 como uma topologia localmente convexa sobre $\mathcal{H}(\Omega)$ da maneira seguinte: para cada $K \subset\subset \Omega$ e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ lembramos que

$$\|f\|_K := \sup_{z \in K} |f(z)| \, .$$

(a) Mostre que $\|\cdot\|_K$ é uma semi-norma sobre $\mathcal{H}(\Omega)$ para cada $K \subset\subset \Omega$. Seja τ_0' a topologia localmente convexa determinada pela família de semi-normas $(\|\cdot\|_K)_{K \subset\subset \Omega}$ e prove que $\tau_0' = \tau_0$.

[Sugestão: Com a notação do Exerc. (13.11) observe que se $K \subset\subset \mathbb{C}$ e $r \in \mathbb{R}_+^*$ então $\Gamma(K, D_r(0)) = B_{K,r}$ onde $B_{K,r}$ é a $\|\cdot\|_K$*-bola aberta de centro na origem e raio* r definida por $B_{K,r} := \{f \in \mathcal{H}(\Omega) \mid \|f\|_K < r\}$.**]**

(b) Mostre que a topologia τ_0 é *localmente multiplicativamente convexa*, isto é, satisfaz a condição seguinte (aqui vamos usar a $\|\cdot\|_K$-bola aberta definida na Sugestão do item (a)):

$$(*) \quad \left| \begin{array}{l} \textit{Dado } B_{K,r} (K \subset\subset \Omega \text{ e } r > 0) \textit{ existe } B_{H,\rho} (H \subset\subset \Omega \text{ e } \rho > 0) \\ \textit{tal que } B_{H,\rho} \cdot B_{H,\rho} \subset B_{K,r} \end{array} \right.$$

[Sugestão: Fixados $K \subset\subset \Omega$ e $r > 0$ tome $H \subset\subset \Omega$ tal que $H \supset K$ e $\rho > 0$ tal que $\rho^2 < r$.**]**
Nestas condições diz-se que $(\mathcal{H}(\Omega), \tau_0)$ é um espaço localmente multiplicativamente convexo.

Referências

[A] L.V. Ahlfors, *Complex Analysis*, Recent trends in combinatorics (Matrahaza, 1995), Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1953.

[Ap] T. M. Apostol, *Mathematical Analysis, A Modern Approach to Advanced Calculus*, Addison-Wesley Reading, 1957.

[BG] C. Berenstein e R. Gay, *Complex variable, An introduction*, Springer-Verlag, GTM, 1991.

[Bki] N. Bourbaki, *Topologie Générale*, Ch. 3 et 4, Hermann, Paris, 1960.

[C] H. Cartan, *Theorie elementaire des fonctions analytiques d'une et plusieurs variables*, Hermann, Paris, 1961.

[Co] J.B. Conway, *Functions of one complex variable*, Springer-Verlag, 1973.

[D] J.A. Dieudonné, *Calcul Infinitésimal*, Hermann, Paris, 1980.

[G] T.W. Gamelin, *Complex Analysis*, UTM, Springer, 2001.

[G-K-R] J.P. Gilman, I. Kra e R.E. Rodriguez, *Complex Analysis in the Spirit of Lipman Bers*, Springer, GTM, 2007.

[Go] R. Godement, *Analyse Mathematique III, Fonctions Analytiques, differentielles et varietés, Surfaces de Riemann*, Springer, 2001.

[Gr] A. Grothendieck, *Espaces Vectoriels Topologiques*, 2nd ed., Sociedade de Matemática de São Paulo, São Paulo, 1958.

[H] L. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, Van Nostrand, Princeton, 1966.

[Ho] J. Horváth, *Topological Vector Spaces and Distributions*, Vol. I, Addison-Wesley, 1966.

[L] S. Lang, *Complex Analysis*, Addison-Wesley, 1977.

[N] A.L. Neto, *Funções de uma variável complexa*, IMPA, Projeto Euclides, 1996.

[P] D. Pisanelli, *Funções holomorfas*, Edusp, 1976.

[R1] W. Rudin, *Princípios de Análise Matemática*, Ao Livro Técnico, 1971.

[R2] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, TMH Edition, 1978.

[R/R] A. Robertson, W. Robertson, *Topological Vector Spaces*, Cambridge University Press, 1966.

[S] M. Sebastiani, *Introdução à Geometria Analítica Complexa*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, 2004.

[Sh] B. V. Shabat, *Introduction to Complex Analysis, Part I: Functions of one variable*, Translation of Matemathical Monographs, Vol. 110, 1991.