Calcolo Speed Up ed Efficienza

Prodotto Matrice-Vettore

Strategia I - Quanti passi di calcolo?

$$Ax = b \quad A \in \Re^{nxm} \quad x \in \Re^{m} \quad b \in \Re^{n}$$

- Distribuzione della matrice per righe: ad ogni processore va un insieme di righe intere
- Il vettore X viene dato a tutti i processori
- Ogni processore calcola un prodotto matrice-vettore più piccolo

$$A_i x = b_i \quad A_i \in \Re^{rxm} \quad x \in \Re^{m} \quad b_i \in \Re^{r}$$

- Non si deve ricompilare il risultato

Strategia I - Quanti passi di calcolo?

Dati : p processi, **n (≥ p)**

$$r = \left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil = \begin{cases} \dfrac{n}{p} & se \quad n\%p = 0 \\ \dfrac{n}{p}+1 & se \quad n\%p \neq 0 \end{cases}$$

$$T(1) = n \cdot (2m-1)t_{calc}$$

$$T(p) = r \cdot (2m-1)t_{calc}$$

Solo più piccolo!

Algoritmo sequenziale

```
for i=0,n-1 do
        yi =0
   for j=0,n-1 do
            yi=yi+aij xj
   endfor
endfor
```

Strategia I – Speed up?

$$S(p) = \frac{T(1)}{T(p)}$$

$$T(1) = n \cdot (2m-1)t_{calc}$$

$$T(p) = r \cdot (2m-1)t_{calc}$$

Strategia I – Speed up?

$$S(p)=\frac{T(1)}{T(p)}=\frac{n\cdot(2m-1)t_{calc}}{r\cdot(2m-1)t_{calc}}$$

$$T(1)=n\cdot(2m-1)t_{calc}$$

$$T(p)=r\cdot(2m-1)t_{calc}$$

Strategia I – Speed up?

$$S(p) = \frac{T(1)}{T(p)} = \frac{n}{r}$$

$$T(1) = n \cdot (2m-1)t_{calc}$$

$$T(p) = r \cdot (2m-1)t_{calc}$$

Strategia I – Quanti passi di comun.?

Se li vogliamo considerare per rimettere insieme il risultato

Strategia I – Quanti passi di comun.?

Dati : p processi, **n (≥ p)**

$$r = \left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil = \begin{cases} \dfrac{n}{p} & se \quad n\%p = 0 \\ \dfrac{n}{p}+1 & se \quad n\%p \neq 0 \end{cases}$$

Se li vogliamo considerare per rimettere insieme il risultato

$$T(1) = n \cdot (2m-1)t_{calc}$$

$$T(p) = r \cdot (2m-1)t_{calc}$$

Strategia I – Quanti passi di comun.?

Dati : p processi, **n (≥ p)**

$$r=\left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil = \begin{cases} \frac{n}{p} & se \quad n\%p=0 \\ \frac{n}{p}+1 & se \quad n\%p\neq 0 \end{cases}$$

Se li vogliamo considerare per rimettere insieme il risultato

$$T(1)=n\cdot(2m-1)t_{calc}$$

$$T(p)=r\cdot(2m-1)t_{calc}+r\cdot\log_2 p t_{com}$$

Strategia I – Quanti passi di comun.?

Dati : p processi, **n (≥ p)**

$$r = \left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil = \begin{cases} \dfrac{n}{p} & se \quad n\%p = 0 \\ \dfrac{n}{p}+1 & se \quad n\%p \neq 0 \end{cases}$$

Se li vogliamo considerare per rimettere insieme il risultato

$$\boxed{t_{com} = ht_{calc}}$$

$$T(1) = n \cdot (2m-1)t_{calc}$$

$$T(p) = r \cdot (2m-1)t_{calc} + hr\log_2 pt_{calc}$$

Strategia I – Speed up?

$$S(p)=\frac{T(1)}{T(p)}=\frac{n\cdot(2m-1)t_{calc}}{\left[r\cdot(2m-1)+hr\log_2 p\right]t_{calc}}$$

$$\boxed{t_{com}=ht_{calc}}$$

$$T(1)=n\cdot(2m-1)t_{calc}$$

$$T(p)=r\cdot(2m-1)t_{calc}+hr\log_2 pt_{calc}$$

Strategia I – Speed up?

$$S(p) = \frac{T(1)}{T(p)} = \frac{n \cdot (2m-1)}{r \cdot (2m-1) + hr \log_2 p}$$

$$T(1) = n \cdot (2m-1) t_{calc}$$

$$T(p) = r \cdot (2m-1) t_{calc} + hr \log_2 p t_{calc}$$

$$\boxed{t_{com} = h t_{calc}}$$

Strategia II - Quanti passi di calcolo?

$$Ax = b \quad A \in \Re^{nxm} \quad x \in \Re^{m} \quad b \in \Re^{n}$$

- Distribuzione della matrice per colonne: ad ogni processore va un insieme di colonne intere
- Il vettore X viene distribuito tra tutti i processori
- Ogni processore calcola un prodotto matrice-vettore più piccolo

$$A_i x_i = s_i \quad A_i \in \Re^{nxc} \quad x_i \in \Re^{c} \quad s_i \in \Re^{n}$$

- Si deve ricompilare il risultato

$$b = \sum_i s_i$$

Strategia II - Quanti passi di calcolo?

Dati : q processi, **m (≥ q)**

$$c = \left\lceil \frac{m}{q} \right\rceil = \begin{cases} \dfrac{m}{q} & se \quad m\%q = 0 \\ \dfrac{m}{q}+1 & se \quad m\%q \neq 0 \end{cases}$$

Algoritmo a blocchi

```
begin
    y=0
    for i=0 to p-1 do
            r_i=A_i x_i
            y=y+r_i
    endfor
end
```

$$T(1) = n \cdot (2m-1)t_{calc}$$

$$T(q) = n \cdot (2c-1)t_{calc} + n \cdot \log_2 q \cdot t_{calc}$$

Prodotto più piccolo!

Strategia II - Quanti passi di calcolo?

Dati : q processi, **m (≥ q)**

$$c = \left\lceil \frac{m}{q} \right\rceil = \begin{cases} \frac{m}{q} & se \quad m\%q = 0 \\ \frac{m}{q}+1 & se \quad m\%q \neq 0 \end{cases}$$

$$T(1) = n \cdot (2m-1)t_{calc}$$

$$T(q) = n \cdot (2c-1)t_{calc} + n \cdot \log_2 q \cdot t_{calc}$$

N somme per $\log_2(q)$ volte

Algoritmo a blocchi

```
begin
    y=0
    for i=0 to p-1 do
            r_i=A_i x_i
            y=y+r_i
    endfor
end
```

Strategia II – Speed up?

$$S(q)=\frac{T(1)}{T(q)}=\frac{n\cdot(2m-1)t_{calc}}{n\cdot(2c-1)t_{calc}+n\cdot\log_2 q\cdot t_{calc}}$$

$$T(1)=n\cdot(2m-1)t_{calc}$$

$$T(q)=n\cdot(2c-1)t_{calc}+n\cdot\log_2 q\cdot t_{calc}$$

Strategia II – Speed up?

$$S(q) = \frac{T(1)}{T(q)} = \frac{(2m-1)}{(2c-1)+\log_2 q}$$

$$T(1) = n \cdot (2m-1)t_{calc}$$

$$T(q) = n \cdot (2c-1)t_{calc} + n \cdot \log_2 q \cdot t_{calc}$$

Strategia II – Quanti passi di comun.?

Dati : q processi, **m (≥ q)**

$$c = \left\lceil \frac{m}{q} \right\rceil = \begin{cases} \dfrac{m}{q} & se \quad m\%q = 0 \\ \dfrac{m}{q} + 1 & se \quad m\%q \neq 0 \end{cases}$$

$$T(1) = n \cdot (2m - 1)t_{calc}$$

$$T(q) = n \cdot (2c - 1)t_{calc} + n \cdot \log_2 q \cdot t_{calc}$$

Strategia II – Quanti passi di comun.?

Dati : q processi, **m (≥ q)**

$$c = \left\lceil \frac{m}{q} \right\rceil = \begin{cases} \dfrac{m}{q} & se \quad m\%q = 0 \\ \dfrac{m}{q} + 1 & se \quad m\%q \neq 0 \end{cases}$$

$$T(1) = n \cdot (2m-1)t_{calc}$$

$$T(q) = n \cdot (2c-1)t_{calc} + n \cdot \log_2 q \cdot t_{calc} + n \cdot \log_2 q \cdot t_{com}$$

Strategia II – Quanti passi di comun.?

Dati : q processi, **m (≥ q)**

$$c = \left\lceil \frac{m}{q} \right\rceil = \begin{cases} \dfrac{m}{q} & se \quad m\%q = 0 \\ \dfrac{m}{q} + 1 & se \quad m\%q \neq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{t_{com} = h t_{calc}}$$

$$T(1) = n \cdot (2m - 1) t_{calc}$$

$$T(q) = n \cdot (2c - 1) t_{calc} + n \cdot \log_2 q \cdot t_{calc} + h \cdot n \cdot \log_2 q \cdot t_{calc}$$

Strategia II – Speed up?

$$S(q) = \frac{T(1)}{T(q)} = \frac{n \cdot (2m-1)t_{calc}}{\left[n \cdot (2c-1) + n \cdot \log_2 q + h \cdot n \cdot \log_2 q\right] t_{calc}}$$

$$T(1) = n \cdot (2m-1)t_{calc}$$

$$T(q) = n \cdot (2c-1)t_{calc} + n \cdot \log_2 q \cdot t_{calc} + h \cdot n \cdot \log_2 q \cdot t_{calc}$$

Strategia II – Speed up?

$$S(q) = \frac{T(1)}{T(q)} = \frac{n \cdot (2m-1)}{n \cdot (2c-1) + n \cdot \log_2 q + h \cdot n \cdot \log_2 q}$$

$$T(1) = n \cdot (2m-1)t_{calc}$$

$$T(q) = n \cdot (2c-1)t_{calc} + n \cdot \log_2 q \cdot t_{calc} + h \cdot n \cdot \log_2 q \cdot t_{calc}$$

Strategia III - Quanti passi di calcolo?

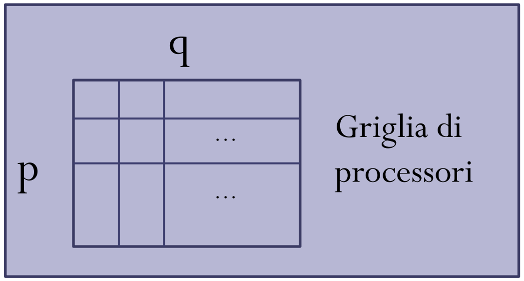
$$Ax = b \quad A \in \Re^{nxm} \quad x \in \Re^{m} \quad b \in \Re^{n}$$

- Processori idealmente disposti in una griglia pxq
- Distribuzione della matrice per blocchi: ad ogni processore va un blocco rettangolare
- Il vettore X viene distribuito tra i processori sulla stessa riga della griglia
- Ogni processore calcola un prodotto matrice-vettore più piccolo

$$A_i x_i = s_i \quad A_i \in \Re^{rxc} \quad x_i \in \Re^{c} \quad s_i \in \Re^{r}$$

- Si deve ricompilare il risultato solo lungo le colonne della griglia

Strategia III - Quanti passi di calcolo?



Dati : pxq processi, **n (≥ p), m (≥ q)**

$$r = \left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil = \begin{cases} \dfrac{n}{p} & se \quad n\%p = 0 \\ \dfrac{n}{p}+1 & se \quad n\%p \neq 0 \end{cases} \qquad c = \left\lceil \frac{m}{q} \right\rceil = \begin{cases} \dfrac{m}{q} & se \quad m\%q = 0 \\ \dfrac{m}{q}+1 & se \quad m\%q \neq 0 \end{cases}$$

$$T(1) = n \cdot (2m-1)t_{calc}$$

Albero per la somma dei vettori di r elementi tra i q processori di una riga della griglia

$$T(pxq) = r \cdot (2c-1)t_{calc} + (r \cdot \log_2 q)t_{calc}$$

Strategia III – Speed up?

$$S(pxq) = \frac{T(1)}{T(pxq)} = \frac{n \cdot (2m-1)t_{calc}}{r \cdot (2c-1)t_{calc} + (r \cdot \log q)t_{calc}}$$

$$T(1) = n \cdot (2m-1)t_{calc}$$

$$T(pxq) = r \cdot (2c-1)t_{calc} + (r \cdot \log_2 q)t_{calc}$$

Strategia III – Speed up?

$$S(pxq) = \frac{T(1)}{T(pxq)} = \frac{n \cdot (2m-1)}{r \cdot (2c-1) + r \cdot \log q}$$

$$T(1) = n \cdot (2m-1)t_{calc}$$

$$T(pxq) = r \cdot (2c-1)t_{calc} + (r \cdot \log_2 q)t_{calc}$$

Strategia III – Quanti passi di comun.?

Dati : pxq processi, **n (≥ p), m (≥ q)**

$$r = \left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil = \begin{cases} \frac{n}{p} & se \quad n\%p = 0 \\ \frac{n}{p}+1 & se \quad n\%p \neq 0 \end{cases} \qquad c = \left\lceil \frac{m}{q} \right\rceil = \begin{cases} \frac{m}{q} & se \quad m\%q = 0 \\ \frac{m}{q}+1 & se \quad m\%q \neq 0 \end{cases}$$

$$T(1) = n \cdot (2m-1)t_{calc}$$

$$T(pxq) = r \cdot (2c-1)t_{calc} + (r \cdot \log_2 q)t_{calc}$$

Strategia III – Quanti passi di comun.?

Ricordiamo chi comunica cosa a chi???

Esempio N = 9 , P=4

P_0

r_0
r_4

+

P_1

s_0
s_4

r_5
r_9

+

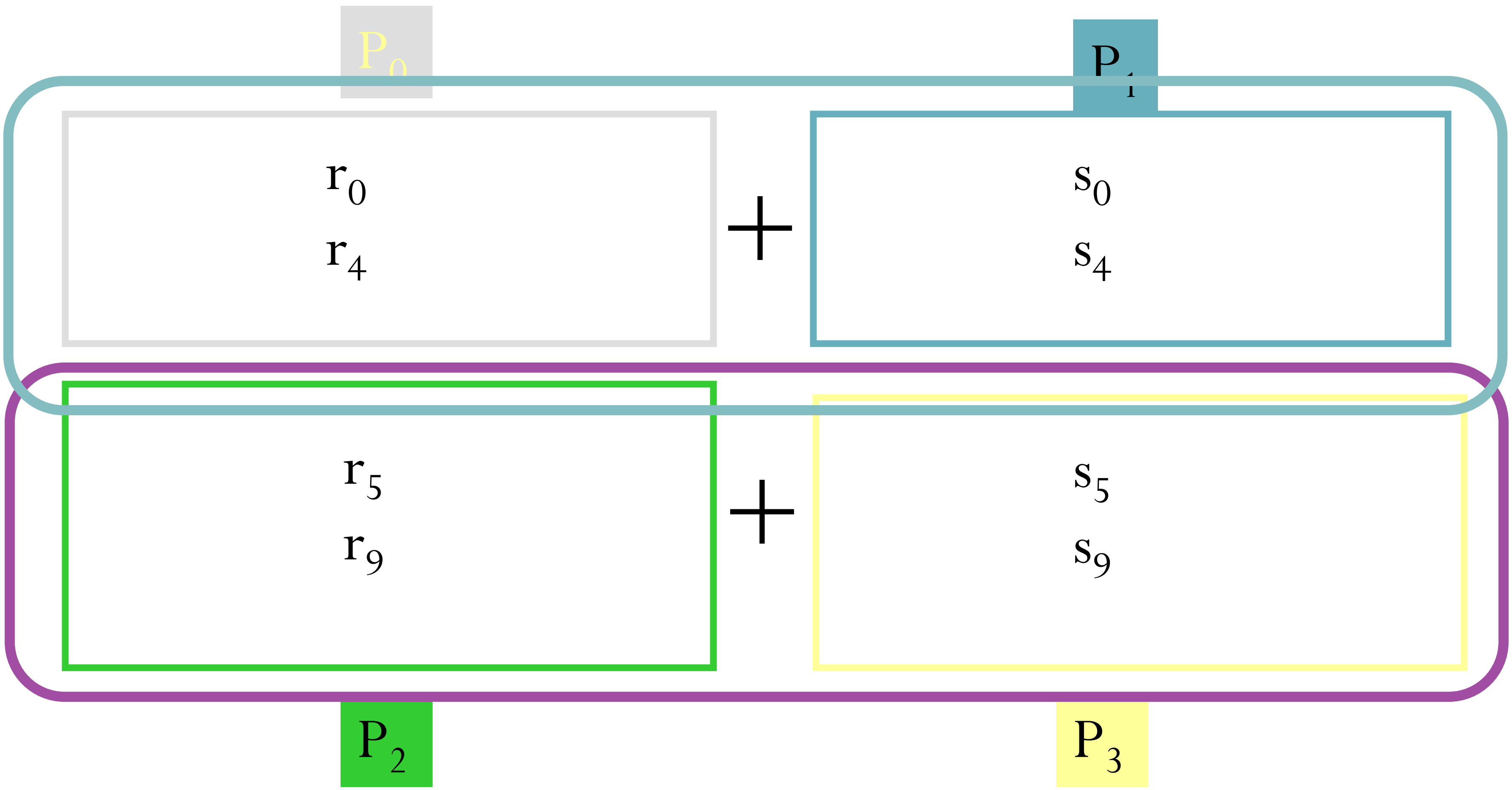
s_5
s_9

P_2

P_3

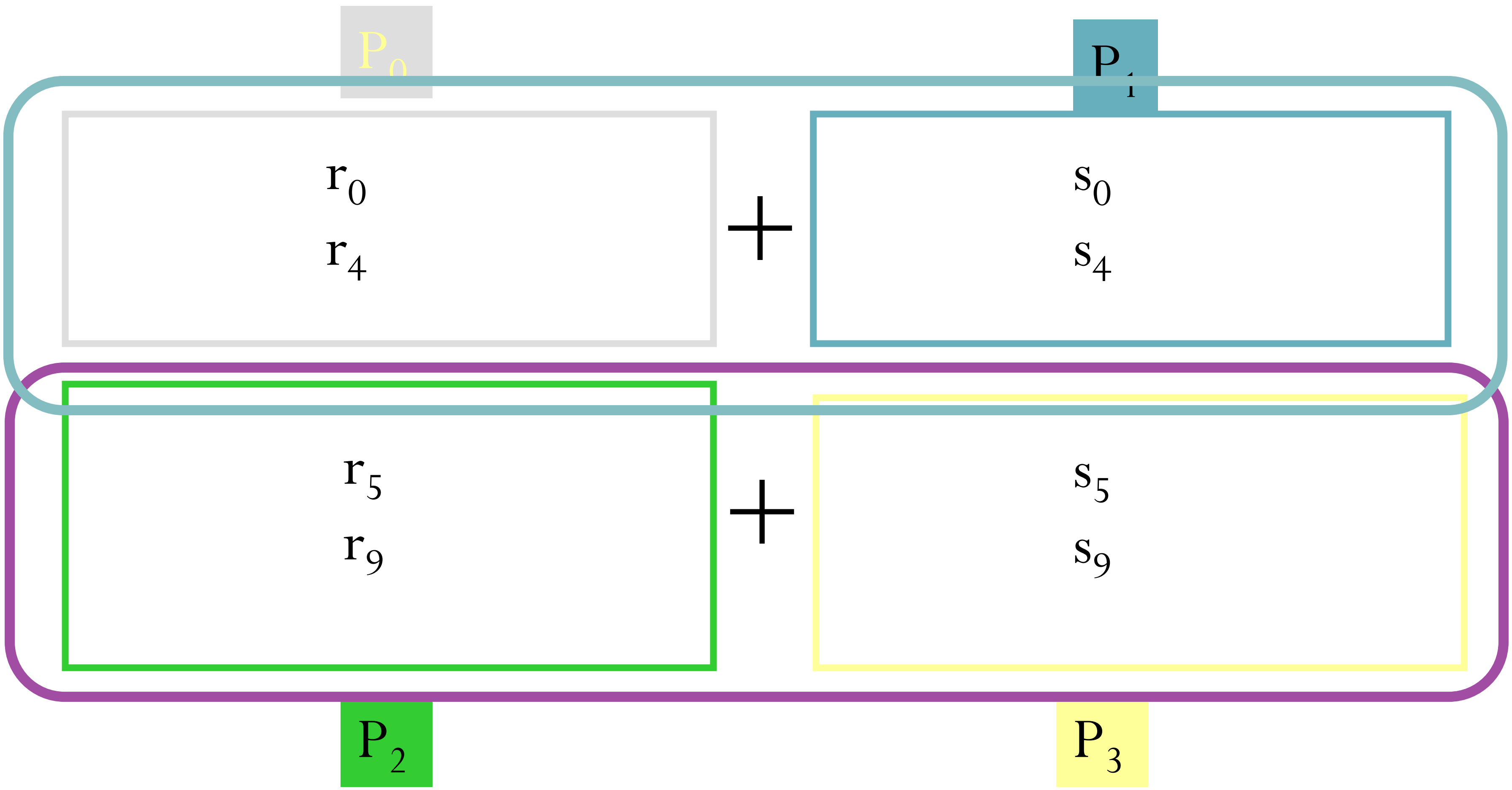
Comunicazione: somma in parallelo

Esempio N = 9 , P=4



Comunicazione: somma in parallelo

Esempio N = 9 , P=4



La comunicazione avviene solo riga per riga (della griglia)

Strategia III – Quanti passi di comun.?

Dati : pxq processi, **n (≥ p), m (≥ q)**

$$r = \left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil = \begin{cases} \frac{n}{p} & se \quad n\%p = 0 \\ \frac{n}{p}+1 & se \quad n\%p \neq 0 \end{cases} \qquad c = \left\lceil \frac{m}{q} \right\rceil = \begin{cases} \frac{m}{q} & se \quad m\%q = 0 \\ \frac{m}{q}+1 & se \quad m\%q \neq 0 \end{cases}$$

Albero per la somma di vettori di r elementi tra processori sulla stessa riga della griglia

$$T(1) = n \cdot (2m-1)t_{calc}$$

$$T(pxq) = r \cdot (2c-1)t_{calc} + (r \cdot \log_2 q)t_{calc} + (r \cdot \log_2 q)t_{com}$$

Strategia III – Quanti passi di comun.?

Dati : pxq processi, **n (≥ p), m (≥ q)**

$$r = \left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil = \begin{cases} \frac{n}{p} & se \quad n\%p = 0 \\ \frac{n}{p}+1 & se \quad n\%p \neq 0 \end{cases}$$

$$c = \left\lceil \frac{m}{q} \right\rceil = \begin{cases} \frac{m}{q} & se \\ \frac{m}{q}+1 & se \quad m\%q \neq \end{cases}$$

Se li vogliamo considerare per rimettere insieme il risultato

$$T(1) = n \cdot (2m-1)t_{calc}$$

$$T(pxq) = r \cdot (2c-1)t_{calc} + (r \cdot \log_2 q)t_{calc} + (r \cdot \log_2 q)t_{com}$$

Strategia III – Quanti passi di comun.?

Dati : pxq processi, **n (≥ p), m (≥ q)**

$$r = \left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil = \begin{cases} \dfrac{n}{p} & se \quad n\%p = 0 \\ \dfrac{n}{p}+1 & se \quad n\%p \neq 0 \end{cases}$$

$$c = \left\lceil \frac{m}{q} \right\rceil = \begin{cases} \dfrac{m}{q} & se \\ \dfrac{m}{q}+1 & se \quad m\%q \neq \end{cases}$$

Se li vogliamo considerare per rimettere insieme il risultato

$$T(1) = n \cdot (2m-1)t_{calc}$$

Albero per la riunione di vettori di r elementi in uno da n elementi, tra i processori di una colonna della griglia

$$T(pxq) = r \cdot (2c-1)t_{calc} + (r \cdot \log_2 q)t_{calc} + (r \cdot \log_2 q)t_{com} + (r \cdot \log_2 p)t_{com}$$

Strategia III – Quanti passi di comun.?

Dati : pxq processi, **n (≥ p), m (≥ q)**

$$r = \left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil = \begin{cases} \frac{n}{p} & se \quad n\%p = 0 \\ \frac{n}{p}+1 & se \quad n\%p \neq 0 \end{cases} \qquad c = \left\lceil \frac{m}{q} \right\rceil = \begin{cases} \frac{m}{q} & se \quad m\%q = 0 \\ \frac{m}{q}+1 & se \quad m\%q \neq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{t_{com} = ht_{calc}}$$

$$T(1) = n \cdot (2m-1)t_{calc}$$

$$T(pxq) = r \cdot (2c-1)t_{calc} + (r \cdot \log_2 q)t_{calc} + h(r \cdot \log_2 q)t_{calc} + h(r \cdot \log_2 p)t_{calc}$$

Strategia III – Speed up?

$$S(pxq) = \frac{T(1)}{T(pxq)} = \frac{n \cdot (2m-1)t_{calc}}{r \cdot (2c-1)t_{calc} + (r \cdot \log_2 q)t_{calc} + h(r \cdot \log_2 q)t_{calc} + h(r \cdot \log_2 p)t_{calc}}$$

$$T(1) = n \cdot (2m-1)t_{calc}$$

$$T(pxq) = r \cdot (2c-1)t_{calc} + (r \cdot \log_2 q)t_{calc} + h(r \cdot \log_2 q)t_{calc} + h(r \cdot \log_2 p)t_{calc}$$

Strategia III – Speed up?

$$S(pxq) = \frac{T(1)}{T(pxq)} = \frac{n \cdot (2m-1)}{r \cdot (2c-1) + r \cdot \log_2 q + hr \cdot \log_2 q + hr \cdot \log_2 p}$$

$$T(1) = n \cdot (2m-1) t_{calc}$$

$$T(pxq) = r \cdot (2c-1) t_{calc} + (r \cdot \log_2 q) t_{calc} + h(r \cdot \log_2 q) t_{calc} + h(r \cdot \log_2 p) t_{calc}$$