

Parallel and Distributed Computing

Prodotto Matrice-Vettore

Materiale tratto da appunti e slides delle lezioni di Calcolo Parallelo e Distribuito tenute da A. Murli

e dal testo

A. Murli "Lezioni di Calcolo Parallelo", Liguori

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

1

1

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

2

Parallel and Distributed Computing

Prodotto Matrice-Vettore

Materiale tratto da appunti e slides delle lezioni di *Calcolo Parallelo e Distribuito* tenute da A. Murli

e dal testo

A. Murli "Lezioni di Calcolo Parallelo", Liguori

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

3

3

PROBLEMA: Prodotto **Matrice-Vettore**

Progettazione
di un algoritmo parallelo
per architettura **MIMD**
a memoria distribuita
per il calcolo del **prodotto**
di una matrice **A** per un vettore **x**:

$$Ax = y, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

4

4

Qual è l'algoritmo sequenziale?

Algoritmo sequenziale

```
for i:=0 to n-1 do
  yi := 0
  for j:=0 to n-1 do
    yi := yi + aij xj
  endfor
endfor
```

Prodotto **Matrice-Vettore**

$$Ax = y, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

5

5

In particolare ...

Algoritmo sequenziale

```
for i:=0 to n-1 do
  yi := 0
  for j:=0 to n-1 do
    yi := yi + aij xj
  endfor
endfor
```

Su un calcolatore tradizionale il
vettore y
viene "generalmente" calcolato
componente per componente
secondo un ordine prestabilito

L' i -esimo elemento di y
è il prodotto scalare della
 i -esima riga di A per il vettore x

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

6

6

Domanda

Qual è
l'algoritmo parallelo

?



Come decomporre
il problema
Matrice-Vettore ?

3/11/2023

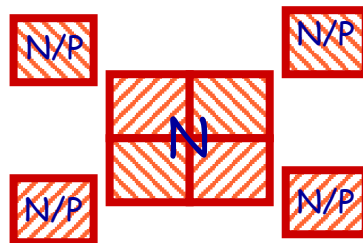
Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

7

7

DECOMPOSIZIONE: IDEA GENERALE

Decomporre un problema di dimensione N
in P sottoproblemi di dimensione N/P
e risolverli **contemporaneamente**
su più calcolatori



3/11/2023

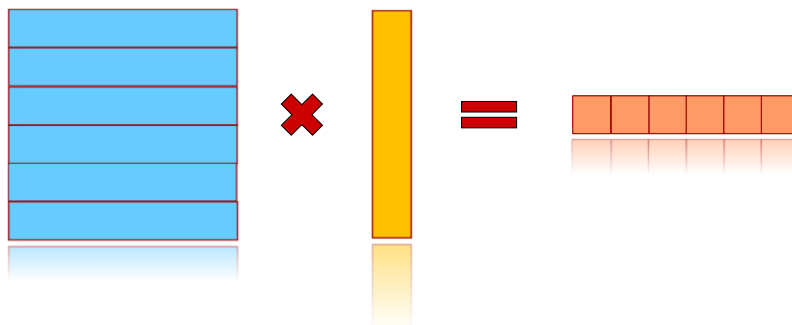
Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

8

8

Quali sono i sotto-problemi indipendenti?

Le componenti di y sono
calcolate effettuando i
prodotti scalari di
ciascuna riga di A per il vettore x



3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

9

9

Quali sono i sotto-problemi indipendenti?

Le componenti di y sono
calcolate effettuando i
prodotti scalari di
ciascuna riga di A per il vettore x



I prodotti scalari possono essere
calcolati in maniera indipendente
l'uno dall'altro

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

10

10

IDEA!

Decomposizione del problema
Matrice-Vettore



Partizionamento della matrice A
IN BLOCCHI



Riformulazione dell'algoritmo sequenziale
"A BLOCCHI"



Parallelismo dell'algoritmo
"A BLOCCHI"

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

11

11

Algoritmo a blocchi di righe

Distribuzione per blocchi di righe (I strategia)

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_{p-1} \end{bmatrix} \bullet x = y$$



$$A_i \in \mathbb{R}^{r \times n}$$
$$i = 0, p-1$$



$$A_i x = y_i$$

begin

$y := 0$

for $i := 0$ to $p-1$ do

$y_i := A_i x$

endfor

end

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

12

12

Algoritmo a blocchi di colonne

Distribuzione per blocchi di colonne (II strategia)

$$\begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \dots & A_{p-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{p-1} \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{p-1} r_i \quad \begin{matrix} A_i \in \mathbb{R}^{n \times r}, & x_i, r_i \in \mathbb{R}^r \\ i = 0, p-1 \end{matrix}$$

↓

$$A_i x_i = r_i \quad \Rightarrow$$

```

begin
  y:=0
  for i:=0 to p-1 do
    r_i:=A_i x_i
    y:=y+r_i
  endfor
end
        
```

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

13

13

Algoritmo a blocchi

La decomposizione dei dati del problema
in questo caso
corrisponde ad un partizionamento in "blocchi"
della matrice e del vettore



Il calcolo della soluzione viene ricondotto
Al calcolo della soluzione relativa
a ciascun "blocco"

3/11/2023

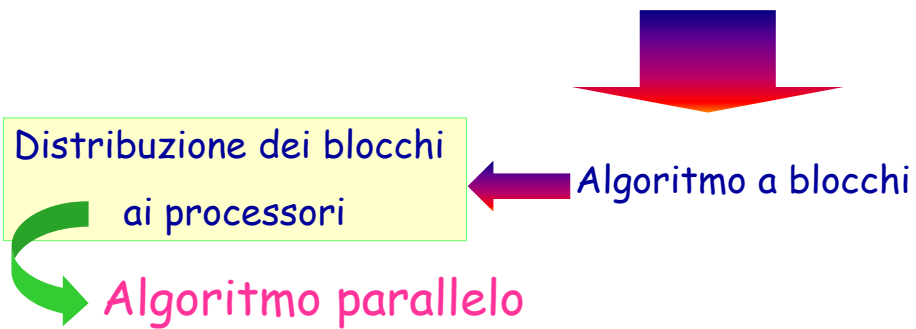
Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

14

14

Qual è l'algoritmo parallelo ?

Partizionamento della matrice



3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

15

15

I STRATEGIA

Suddividiamo la
matrice A in
BLOCCHI di RIGHE

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

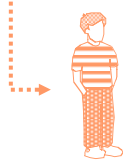
16

16

I STRATEGIA: Esempio n= 6

Distribuzione della matrice A per **blocchi di righe**

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} & a_{05} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{50} & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$$



Suddividiamo la matrice in
2 BLOCCHI di RIGHE
ed assegniamo ogni blocco
ad uno studente

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

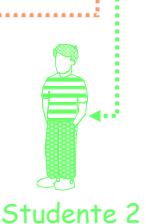
17

17

I STRATEGIA: Esempio n= 6

Distribuzione del vettore x

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} & a_{05} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{50} & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$$



Assegniamo il vettore x
INTERAMENTE
ai 2 studenti

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

18

18

Domanda

Con i dati così distribuiti
cosa può calcolare
ciascuno studente
?

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

19

19

I STRATEGIA: Esempio n= 6

Lo studente 1 può calcolare
SOLO le prime tre componenti
del vettore y

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} & a_{05} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$



Studente 1

3/11/2023


Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

20

20

I STRATEGIA: Esempio n= 6

Lo studente 2 può calcolare
SOLO le altre tre componenti
del vettore y

$$\begin{bmatrix} a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{50} & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$$


Studente 2

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

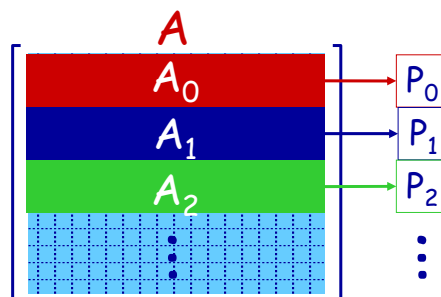
21

21

I STRATEGIA: In generale

I passo: decomposizione del problema

La matrice **A** viene distribuita
in BLOCCHI di RIGHE
fra p processori



3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

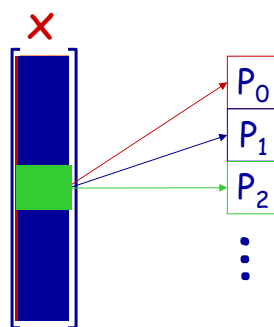
22

22

I STRATEGIA: In generale

I passo: decomposizione del problema

Il vettore x viene assegnato INTERAMENTE
ai p processori



3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

23

23

I STRATEGIA: In generale

I passo: decomposizione del problema

Il vettore x viene assegnato INTERAMENTE
ai p processori

Ciascun processore P_i calcola
 n/p componenti di $y \rightarrow y_i = A_i x$

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

24

24

I STRATEGIA: In generale

II passo: risoluzione dei sottoproblemi

Il prodotto $Ax=y$ viene decomposto
in p prodotti del tipo

$$A_i \cdot x = y_i$$

Ciascun processore calcola
un prodotto matrice vettore
(di dimensione più piccola di quello assegnato).

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

25

25

I strategia: caratteristiche

- ♦ non sono richieste "interazioni" tra processori

MA

- ♦ il vettore x è assegnato a tutti i processori

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

26

26

Domanda

Qual è l'algoritmo parallelo
con la **I Strategia**
di decomposizione

?

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

27

27

Risposta

Partizionamento della matrice
in blocchi di righe



Algoritmo a blocchi

```
begin
  for  $i:=0$  to  $p-1$  do
     $y_i := A_i x$ 
  endfor
end
```



Distribuzione dei
blocchi fra i
processori



Algoritmo parallelo

Parallelizzazione dell'algoritmo a blocchi!

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

28

28

Risposta

Partizionamento della matrice
in blocchi di righe

Algoritmo a blocchi

```
begin
  for  $i:=0$  to  $p-1$  do
     $y_i:=A_i x$ 
  endfor
end
```

Algoritmo parallelo

```
begin
  forall  $P_i, i:=0$  to  $p-1$ 
     $\{P_i \text{ calcola } y_i:=A_i x\}$ 
  endfor
end
```

Parallelizzazione dell'algoritmo a blocchi!

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

29

29

II STRATEGIA

Suddividiamo
la matrice A in
BLOCCHI di COLONNE

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

30

30

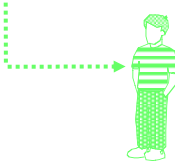
II STRATEGIA: Esempio n= 6

Distribuzione della matrice A per **blocchi di colonne**

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} & a_{05} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{50} & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$$



Studente 1



Studente 2

Suddividiamo la matrice in **2 BLOCCHI di COLONNE** ed assegniamo ogni blocco ad uno studente

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

31

31

II STRATEGIA: Esempio n= 6

Distribuzione del vettore x

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} & a_{05} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{50} & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$$



Studente 1



Studente 2

Distribuiamo le Componenti del vettore x Fra i 2 studenti

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

32

32

Domanda

Con i dati così
distribuiti
cosa può calcolare
ciascuno studente
?

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

33

33

II STRATEGIA: Esempio n= 6

Lo studente 1 calcola

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} \\ a_{50} & a_{51} & a_{52} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{bmatrix}$$



Studente 1

Ovvero...

3/11/2023


Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

34

34

II STRATEGIA: Esempio n= 6

Lo studente 1 calcola
"un contributo" del prodotto finale



$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3 + a_{04}x_4 + a_{05}x_5 \\ a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 \\ a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 \\ a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 \\ a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{bmatrix}$$

Studente 1

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

35

35

II STRATEGIA: Esempio n= 6

Lo studente 2 calcola

$$\begin{bmatrix} a_{03} & a_{04} & a_{05} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{bmatrix}$$



Studente 2

Ovvero...

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet


36

36

II STRATEGIA: Esempio n= 6

Lo studente 2 calcola
"un contributo" del prodotto finale

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 & + a_{03}x_3 + a_{04}x_4 + a_{05}x_5 \\ a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 \\ a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 & + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 \\ a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2 & + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 \\ a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2 & + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 \end{bmatrix}$$


 Studente 2

$= \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{bmatrix}$

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

37

Domanda

Come calcolare
il vettore

$$y = r + s$$

?

3/11/2023

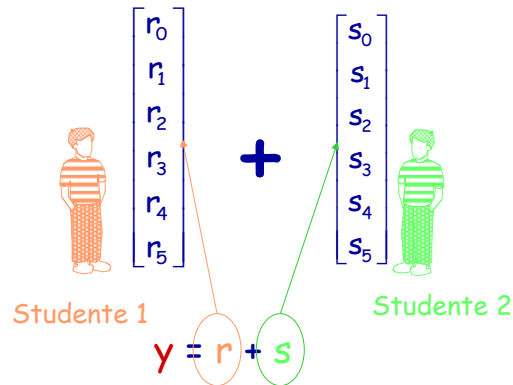
Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

38

38

II STRATEGIA: Esempio n= 6

Per ottenere il vettore y
gli studenti devono "interagire"
sommando i loro risultati parziali



3/11/2023

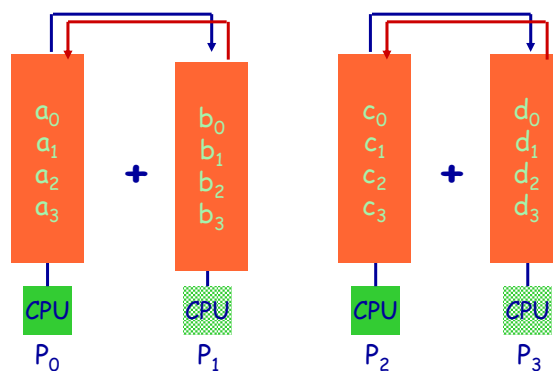
Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

39

39

Esempio N=4, p=4

I passo



P_0 e P_1 calcolano contemporaneamente entrambi la stessa somma di 2 vettori
 P_2 e P_3 calcolano contemporaneamente entrambi la stessa somma di 2 vettori

3/11/2023

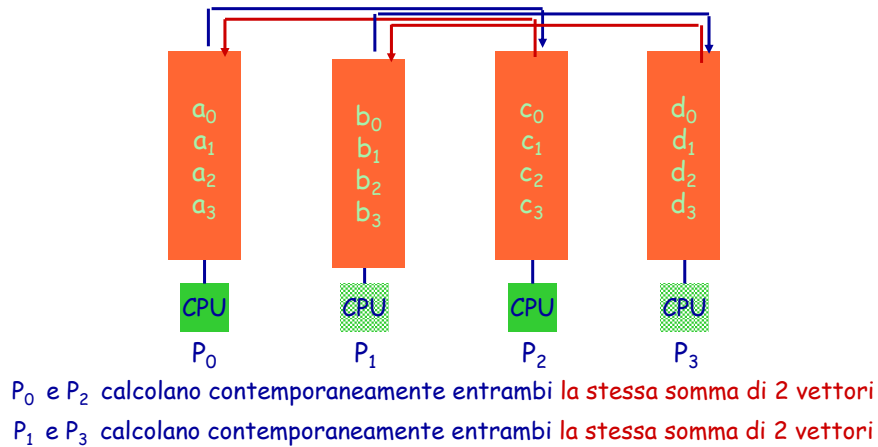
Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

40

40

Esempio $N=4, p=4$

II passo



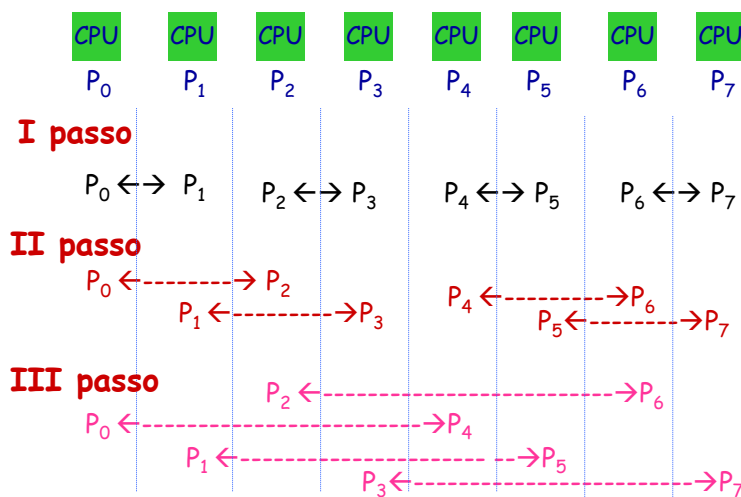
3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

41

41

Esempio $N=8, p=8$



3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

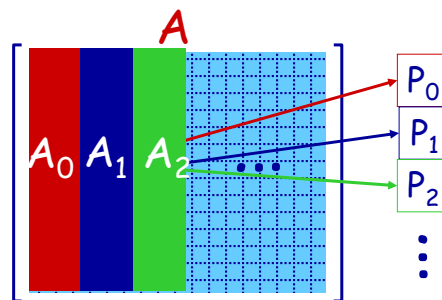
42

42

II STRATEGIA: In generale

I passo: decomposizione del problema

La matrice A viene distribuita
in BLOCCHI di COLONNE
fra p processori



3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

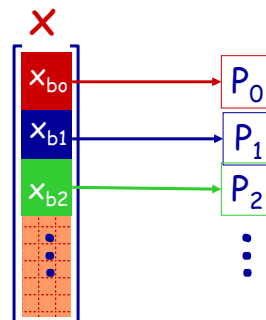
43

43

II STRATEGIA: In generale

I passo: decomposizione del problema

Il vettore x viene distribuito
fra i p processori



3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

44

44

II STRATEGIA: In generale

II passo: risoluzione dei sottoproblemi

Il prodotto $Ax=y$ viene decomposto
in p prodotti del tipo

$$A_i \cdot x_{bi} = r_i \text{ dove } y = \sum_{i=0}^{p-1} r_i$$

Ciascun processore calcola
un prodotto matrice vettore
(di dimensione più piccola di quello assegnato).

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

45

45

II strategia: caratteristiche

- ♦ Tutti i dati sono distribuiti tra processori
- ♦ In questo caso l'algoritmo parallelo è analogo a quello della somma

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

46

46

Domanda

Qual è l'algoritmo parallelo
con la **II Strategia**
di decomposizione

?

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

47

47

Risposta

Partizionamento della matrice
in blocchi di colonne



```
begin
  y:=0
  for i:=0 to p-1 do
     $r_i := A_i x_{bi}$ 
     $y := y + r_i$ 
  endfor
end
```



Distribuzione dei
blocchi fra i
processori



Algoritmo parallelo

Parallelizzazione dell'algoritmo a blocchi!

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

48

48

Risposta

Partizionamento della matrice
in blocchi di colonne



```
begin
  y:=0
  for i:=0 to p-1 do
     $r_i := A_i x_i$ 
     $y := y + r_i$ 
  endfor
end
```



Algoritmo parallelo

```
begin
  forall  $P_i$ ,  $i:=0$  to  $p-1$ 
    {  $P_i$  calcola  $r_i := A_i x_{bi}$  }
    { combinazione degli  $r_i$  }
     $y := y + r_i$ 
  endfor
end
```

Parallelizzazione dell'algoritmo a blocchi!

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

49

49

Domanda

E' possibile realizzare
un'altra decomposizione
del problema:
prodotto
Matrice-Vettore

?

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

50

50

Risposta: SI!

Decomposizione 1: BLOCCHI di RIGHE

+

Decomposizione 2: BLOCCHI di COLONNE

=

Decomposizione 3: **BLOCCHI QUADRATI**

3/11/2023

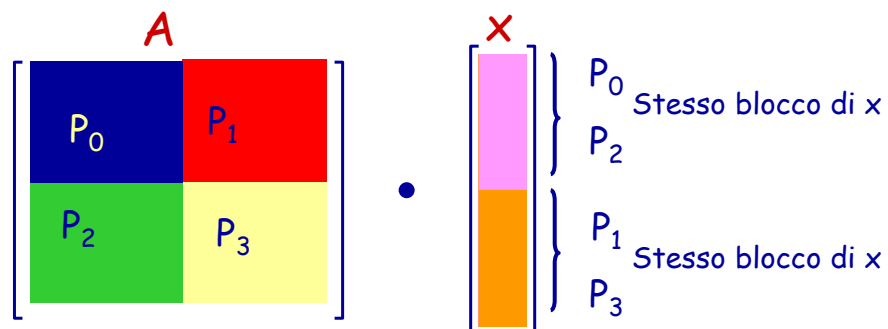
Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

51

51

III Strategia: Esempio (4 processori)

Distribuzione della matrice A per blocchi quadrati



Distribuzione del vettore x fra i processori

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

52

52

Domanda

Ciascun processore
quale "parte" di y
calcola
?

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

53

53

Esempio $N = 6$, Processori=4

P_0

$$\begin{aligned} a_{00} \cdot x_0 + a_{01} \cdot x_1 + a_{02} \cdot x_2 \\ a_{10} \cdot x_0 + a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \\ a_{20} \cdot x_0 + a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \end{aligned}$$

P_1

$$\begin{aligned} a_{03} \cdot x_3 + a_{04} \cdot x_4 + a_{05} \cdot x_5 \\ a_{13} \cdot x_3 + a_{14} \cdot x_4 + a_{15} \cdot x_5 \\ a_{23} \cdot x_3 + a_{24} \cdot x_4 + a_{25} \cdot x_5 \end{aligned}$$

P_2

$$\begin{aligned} a_{30} \cdot x_0 + a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 \\ a_{40} \cdot x_0 + a_{41} \cdot x_1 + a_{42} \cdot x_2 \\ a_{50} \cdot x_0 + a_{51} \cdot x_1 + a_{52} \cdot x_2 \end{aligned}$$

P_3

$$\begin{aligned} a_{33} \cdot x_3 + a_{34} \cdot x_4 + a_{35} \cdot x_5 \\ a_{43} \cdot x_3 + a_{44} \cdot x_4 + a_{45} \cdot x_5 \\ a_{53} \cdot x_3 + a_{54} \cdot x_4 + a_{55} \cdot x_5 \end{aligned}$$

Calcolo dei prodotti parziali

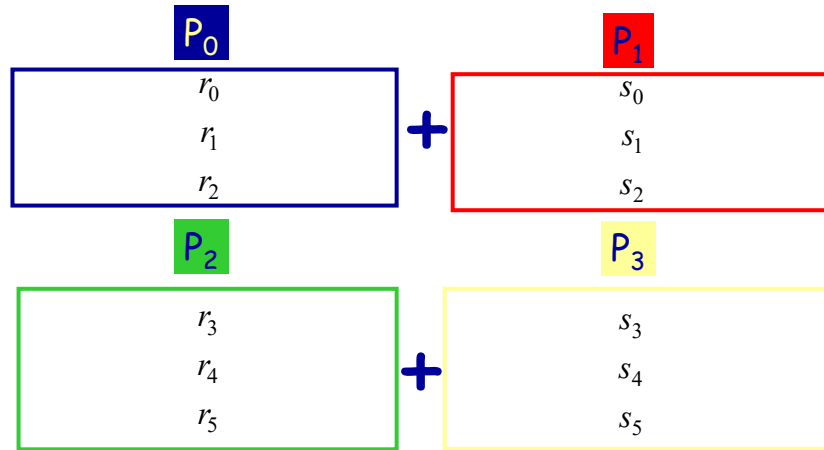
3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

54

54

Esempio $N = 6$, Processori=4



Scambio: somma in parallelo

3/11/2023

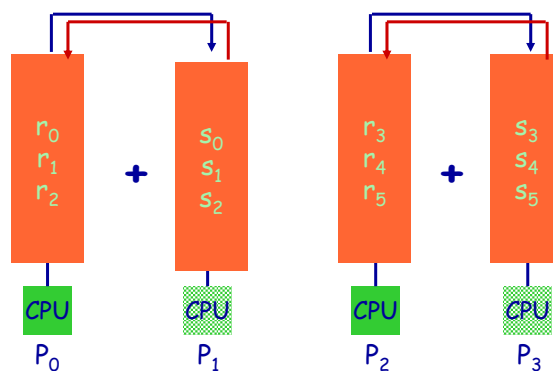
Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

55

55

Esempio III Strategia $P=4$

I passo



P_0 e P_1 calcolano contemporaneamente entrambi la stessa somma di 2 vettori
 P_2 e P_3 calcolano contemporaneamente entrambi la stessa somma di 2 vettori

3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

56

56

III strategia: sintesi

Ciascun processore calcola
somme parziali
di alcune componenti del vettore y



I processori devono **sommare** i risultati parziali
e **scambiarsi** le componenti
per avere il risultato finale, y

3/11/2023

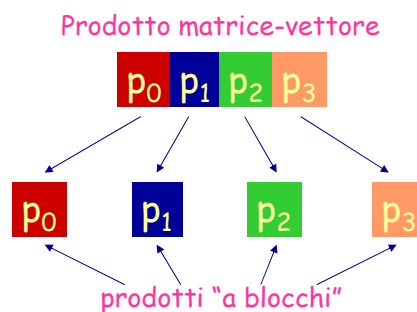
Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

57

57

IDEA GENERALE: matrice vettore in parallelo

Riformulazione del prodotto matrice vettore in
"prodotti a blocchi" ed assegnazione di ciascun di
questi prodotti ad un processore



3/11/2023

Parallel and Distributed Computing a.a. 2023/2024 - prof. Giuliano Laccetti - Prodotto Mat-Vet

58
last

58

FINE LEZIONE

Prodotto Matrice-Vettore