

Calcolo Parallelo e Distribuito

Prodotto Matrice-Matrice

prof. Giuliano Laccetti a.a. 2023-2024 - prodotto mat-mat
01/12/2023

Materiale tratto da slide, appunti, lezioni di Calcolo Parallelo e Distribuito del prof. A. Murli
e dal testo
A. Murli - Lezioni di Calcolo Parallelo, ed. Liguori

1

prof. Giuliano Laccetti a.a. 2023-2024 - prodotto mat-mat
01/12/2023

2

Calcolo Parallelo e Distribuito

Prodotto Matrice-Matrice

prof. Giuliano Laccetti a.a. 2023-2024 - prodotto mat-mat
01/12/2023

Materiale tratto da slide, appunti, lezioni di Calcolo Parallelo e Distribuito del prof. A. Murli
e dal testo
A. Murli - Lezioni di Calcolo Parallelo, ed. Liguori

3

Problema

Progettazione
di un algoritmo parallelo
per architettura **MIMD**
a memoria distribuita
per il calcolo del **prodotto righe per colonne**
di 2 matrici **A** e **B**:

$$C = A \bullet B, \quad A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

4

Qual è l'algoritmo sequenziale ?

```
for i=0,n-1 do
  for j=0,n-1 do
    cij=0
    for k=0,n-1 do
      cij=cij+aik bkj
    endfor
  endfor
endfor
```

Prodotto **Matrice-Matrice**

$$A \bullet B = C, \quad A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

5

5

Qual è l'algoritmo sequenziale ?

```
for i=0,n-1 do
  for j=0,n-1 do
    cij=0
    for k=0,n-1 do
      cij=cij+aik bkj
    endfor
  endfor
endfor
```

Su un calcolatore tradizionale
la matrice C
viene "generalmente" calcolata
componente per componente
secondo un ordine prestabilito

*Il generico elemento di C
è il prodotto scalare della
 i -esima riga di A per la
 j -esima colonna di B*

01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

6

6

Domanda

Qual è
l'algoritmo parallelo

?



Come decomporre
il problema
Matrice-Matrice ?

01/11/2023

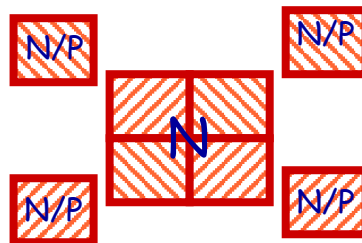
PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

7

7

DECOMPOSIZIONE: IDEA GENERALE

Decomporre un problema di dimensione N
in P sottoproblemi di dimensione N/P
e risolverli **contemporaneamente**
su più calcolatori



01/11/2023

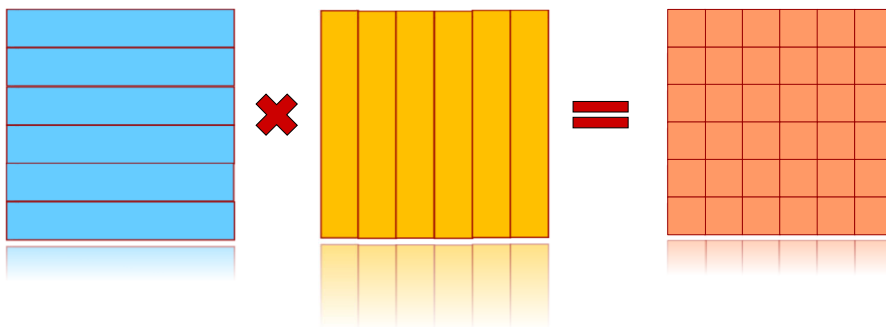
PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

8

8

Quali sono i sotto-problemi indipendenti?

Gli elementi di C sono
calcolati effettuando i
prodotti scalari di ciascuna riga di A per
ciascuna colonna di B



01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

9

9

Quali sono i sotto-problemi indipendenti?

Gli elementi di C sono
calcolati effettuando i
prodotti scalari di ciascuna riga di A per
ciascuna colonna di B



I prodotti scalari sono calcolati
in maniera indipendente
l'uno dall'altro

01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

10

10

IDEA!

Decomposizione del problema
Matrice per Matrice

Partizionamento delle matrici A e B
IN BLOCCHI

Riformulazione dell'algoritmo sequenziale
"A BLOCCHI"

Parallelismo dell'algoritmo
"A BLOCCHI"

01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

11

11

Algoritmo a blocchi - I strategia

Decomposizione di A per p blocchi di righe e
di B per p blocchi di colonne

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \dots \\ A_{p-1} \end{bmatrix} \cdot [B_0 B_1 \dots B_{p-1}] = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & \dots & C_{0,p-1} \\ C_{10} & \dots & \dots & C_{1,p-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{p-1,0} & \dots & \dots & C_{p-1,p-1} \end{bmatrix}$$

$A_i \in \mathbb{R}^{r \times n}$
 $B_j \in \mathbb{R}^{n \times r}$
 $i, j = 0, p-1$

$A_i B_j = C_{ij}$

01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

12

12

Algoritmo a blocchi - I strategia

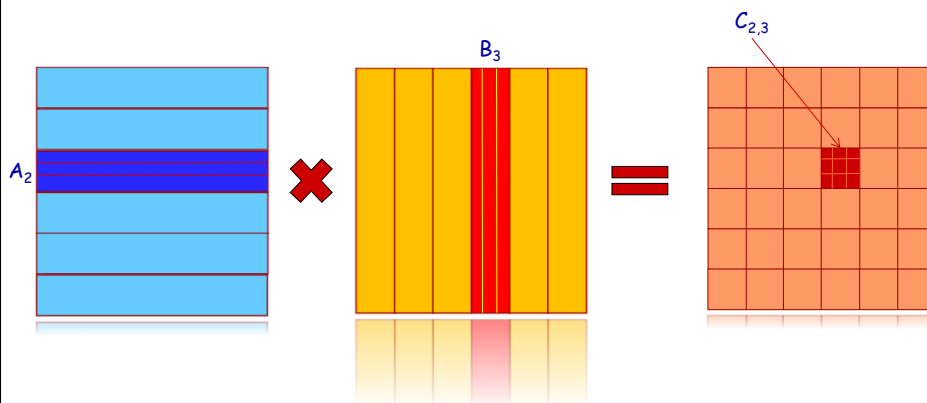
Decomposizione di A per p blocchi di righe e
di B per p blocchi di colonne

Prodotti matrice-matrice
di dimensione minore!

$$\begin{aligned} A_i &\in \mathbb{R}^{r \times n} \\ B_j &\in \mathbb{R}^{n \times r} \\ i, j &= 0, p-1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad A_i B_j = C_{ij}$$

```
begin
  C=0
  for i=0 to p-1 do
    for j=0 to p-1 do
       $C_{ij} = A_i B_j$ 
    endfor
  endfor
end
```

Algoritmo a blocchi - I strategia



Algoritmo a blocchi - II strategia

Decomposizione di A per p blocchi di colonne e di B per p blocchi di righe

$$[A_0 A_1 \dots A_{p-1}] \cdot \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \dots \\ B_{p-1} \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{p-1} C^i$$

$A_i \in \mathbb{R}^{n \times r}$
 $B_i \in \mathbb{R}^{r \times n}$
 $i = 0, p-1 \implies A_i B_i = C^i$

01/11/2023

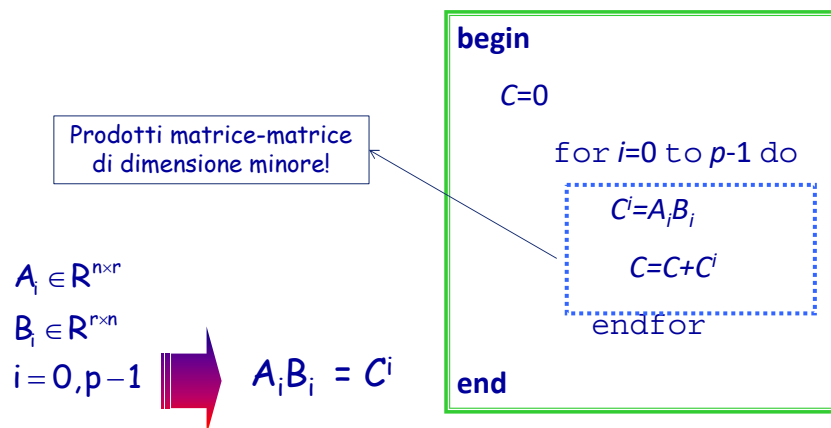
PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

15

15

Algoritmo a blocchi - II strategia

Decomposizione di A per p blocchi di colonne e di B per p blocchi di righe



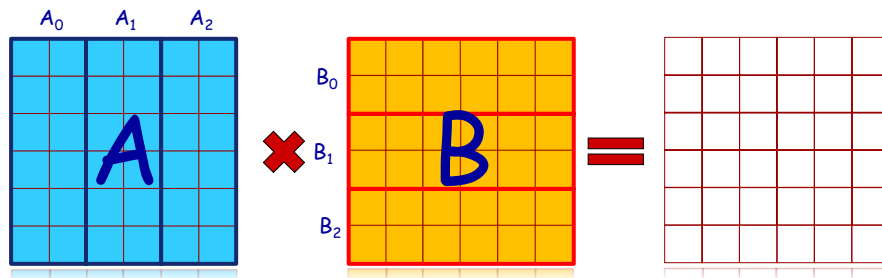
01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

16

16

Algoritmo a blocchi - II strategia



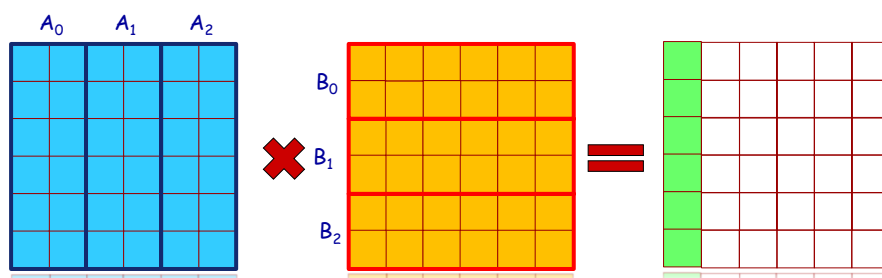
01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

17

17

Algoritmo a blocchi - II strategia



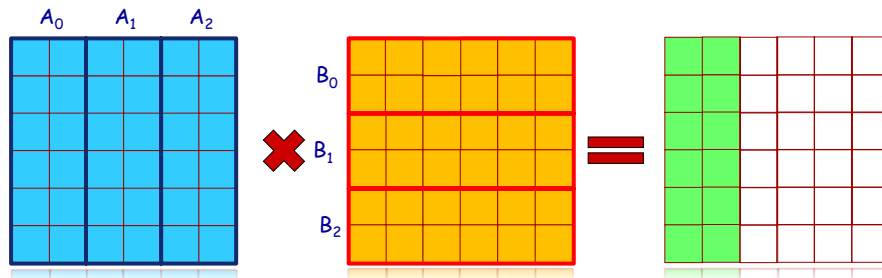
01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

18

18

Algoritmo a blocchi - II strategia



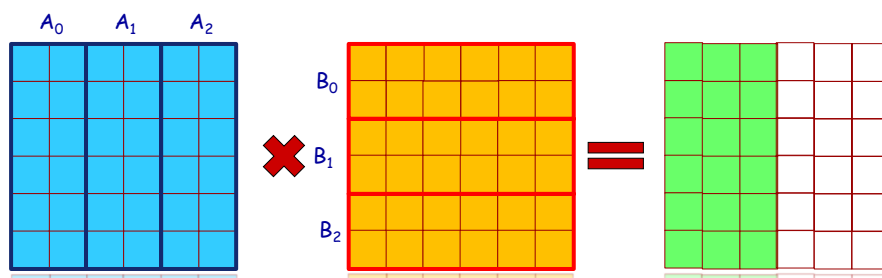
01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

19

19

Algoritmo a blocchi - II strategia



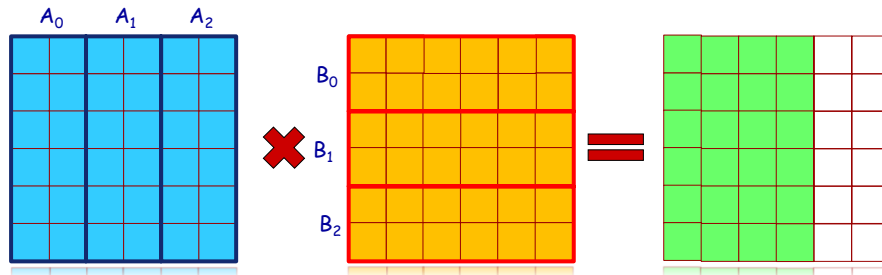
01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

20

20

Algoritmo a blocchi - II strategia



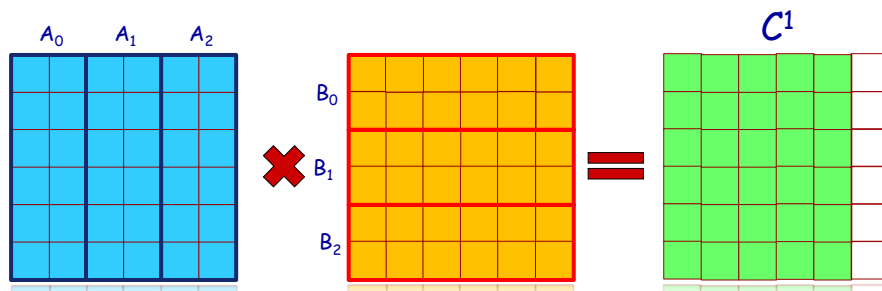
01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

21

21

Algoritmo a blocchi - II strategia



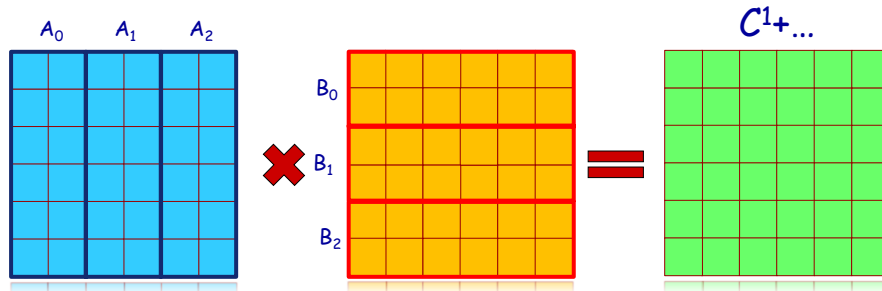
01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

22

22

Algoritmo a blocchi - II strategia



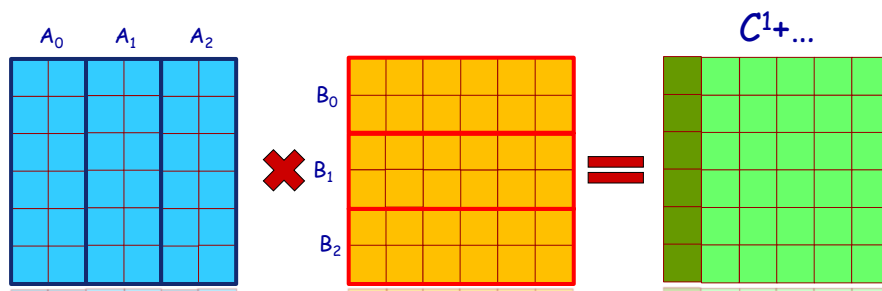
01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

23

23

Algoritmo a blocchi - II strategia



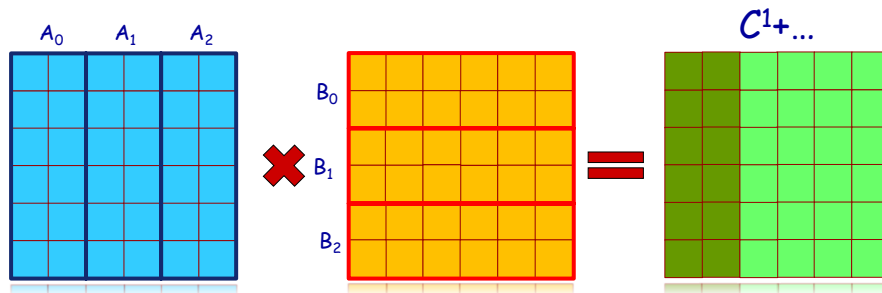
01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

24

24

Algoritmo a blocchi - II strategia



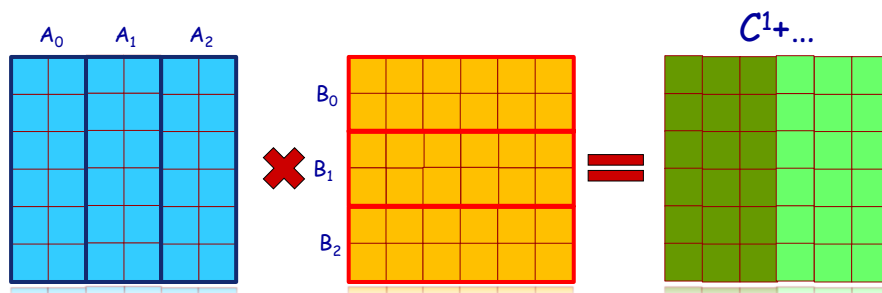
01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

25

25

Algoritmo a blocchi - II strategia



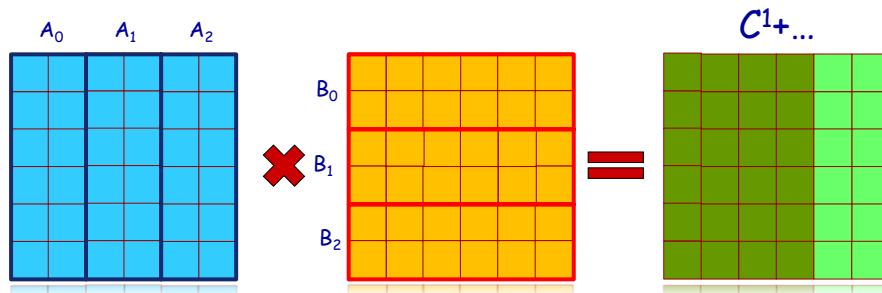
01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

26

26

Algoritmo a blocchi - II strategia



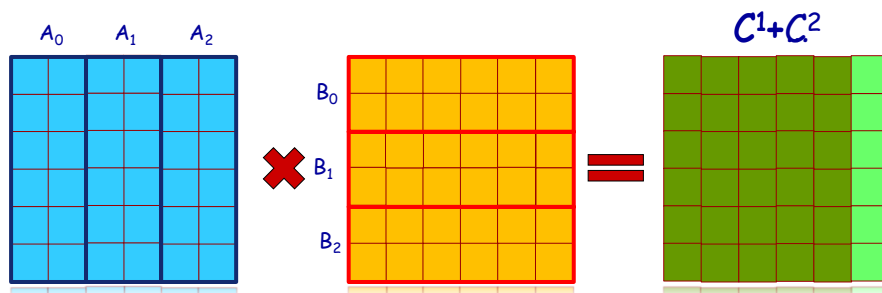
01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

27

27

Algoritmo a blocchi - II strategia



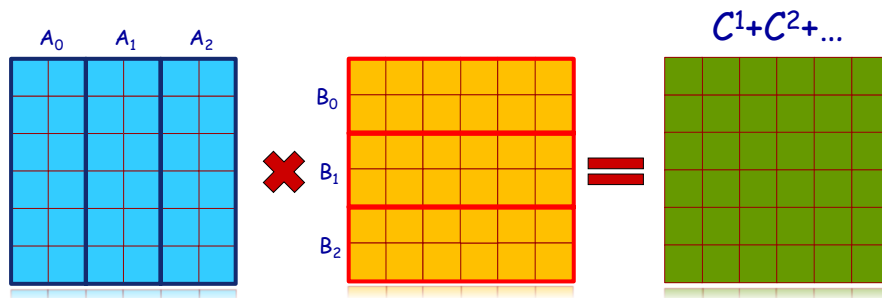
01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

28

28

Algoritmo a blocchi - II strategia



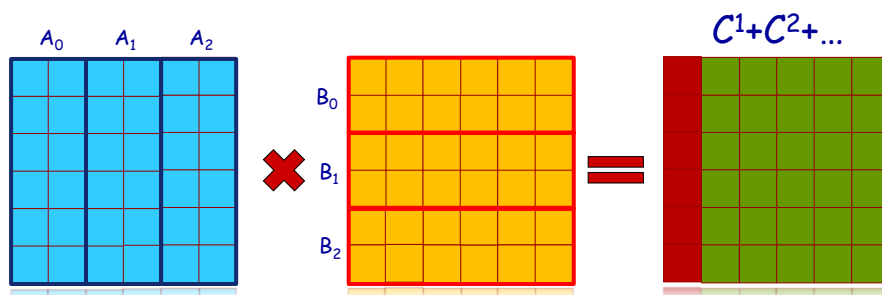
01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

29

29

Algoritmo a blocchi - II strategia



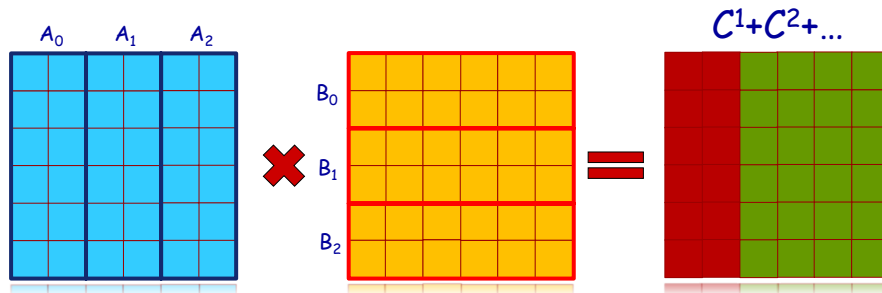
01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

30

30

Algoritmo a blocchi - II strategia



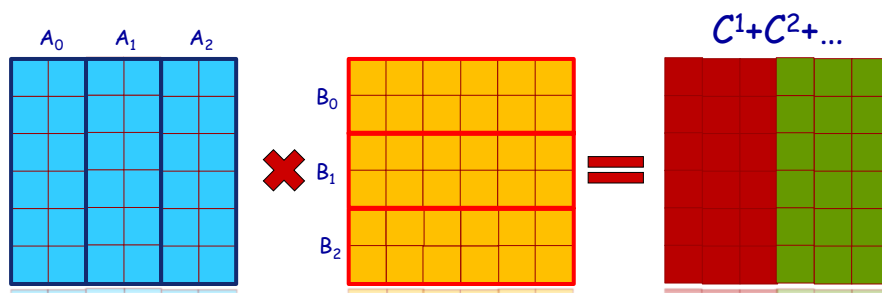
01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

31

31

Algoritmo a blocchi - II strategia



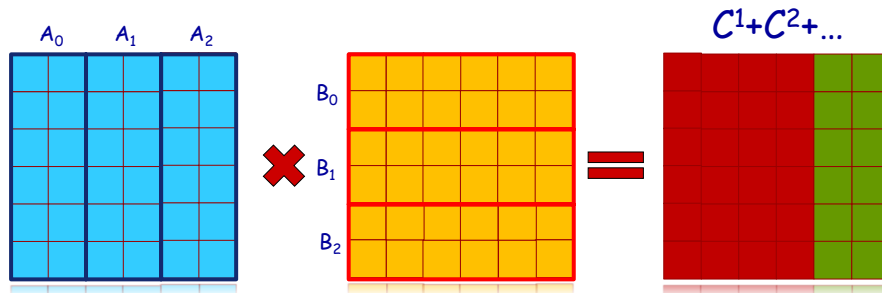
01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

32

32

Algoritmo a blocchi - II strategia



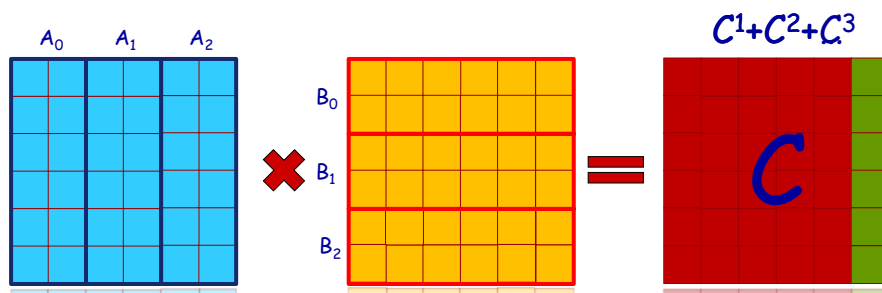
01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

33

33

Algoritmo a blocchi - II strategia



01/11/2023

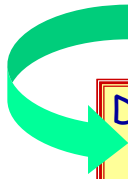
PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

34

34

Introduzione del parallelismo

Distribuiamo tra i processori il calcolo dei
diversi prodotti matrice-matrice

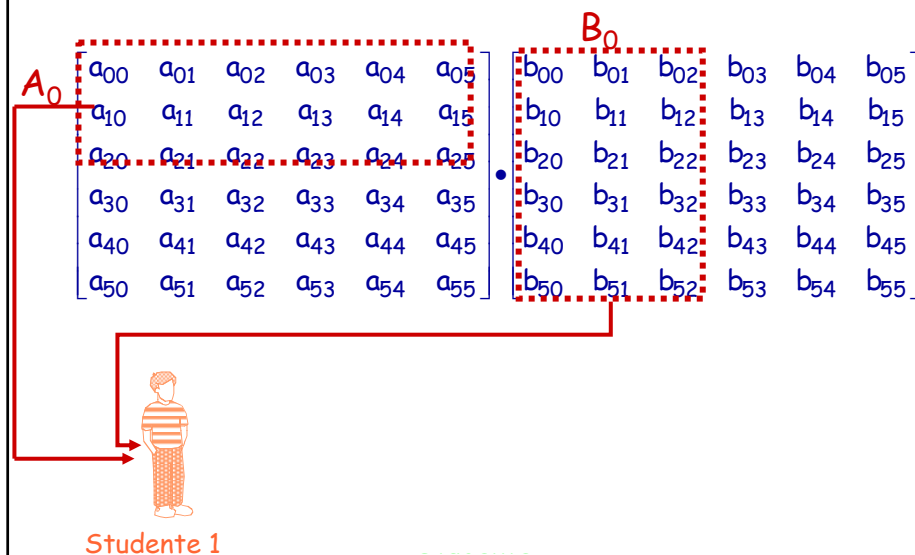


Distribuiamo tra i processori gli elementi
delle 2 matrici

I STRATEGIA

suddividiamo
la matrice A in
blocchi di RIGHE
e la matrice B in
blocchi di COLONNE

Distribuzione dei dati: Esempio $n=6$



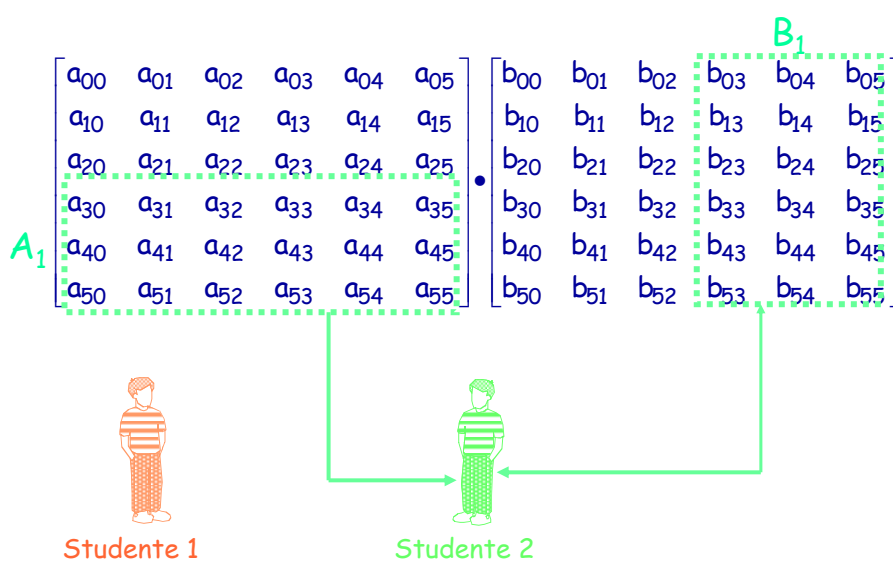
01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

37

37

Distribuzione dei dati: Esempio $n=6$



01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

38

38

Domanda

Con i dati così distribuiti
cosa può calcolare
ciascuno studente
?

01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

39

39

I Strategia: Esempio n=6

$$\begin{matrix} & & A_0 & & \\ \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} & a_{05} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix} & \cdot & \begin{matrix} B_0 \\ \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} \\ b_{30} & b_{31} & b_{32} \\ b_{40} & b_{41} & b_{42} \\ b_{50} & b_{51} & b_{50} \end{bmatrix} \end{matrix} & = & \begin{matrix} C_{00} \\ \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & ? & ? & ? \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & ? & ? & ? \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{bmatrix} \end{matrix} \end{matrix}$$



Studente 1

Lo studente 1
può calcolare
solo alcune componenti
della matrice C!

01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

40

40

Studente 2

Studente 2

41

41

solo alcune componenti di C !

Studente 2

42

42

Domanda

Come calcolare le altre
componenti di C ?

c_{00}	c_{01}	c_{02}	c_{03}	c_{04}	c_{05}	C_{01}
c_{10}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	
c_{20}	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}	
c_{30}	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	c_{35}	C_{10}
c_{40}	c_{41}	c_{42}	c_{43}	c_{44}	c_{45}	
c_{50}	c_{51}	c_{52}	c_{53}	c_{54}	c_{55}	



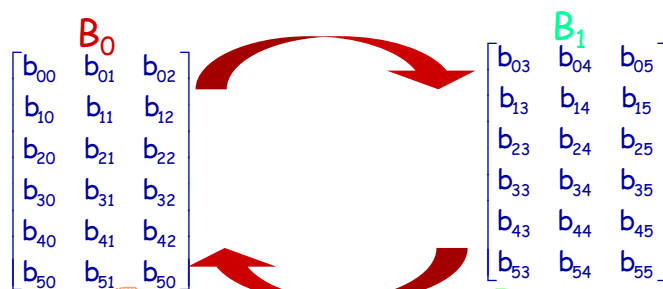
Studente 1



Studente 2

IDEA!

Gli studenti possono "interagire"
scambiandosi
i blocchi di COLONNE della matrice B !



Studente 1



Studente 2

IDEA!

Gli studenti possono "interagire"
scambiandosi
i blocchi di COLONNE della matrice B!

$$B_0 = \begin{bmatrix} b_{03} & b_{04} & b_{05} \\ b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{bmatrix}$$



Studente 1

$$B_1 = \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} \\ b_{30} & b_{31} & b_{32} \\ b_{40} & b_{41} & b_{42} \\ b_{50} & b_{51} & b_{52} \end{bmatrix}$$



Studente 2


Domanda

Dopo lo scambio
dei blocchi di B
cosa può calcolare
ciascuno studente
?

I Strategia: Esempio n=6

Lo studente 1 ha ora anche l'altro blocco di B!

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} & a_{05} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boxed{b_{00} \ b_{01} \ b_{02}} & \boxed{b_{03} \ b_{04} \ b_{05}} \\ \vdots & \vdots \\ \boxed{b_{50} \ b_{51} \ b_{52}} & \boxed{b_{53} \ b_{54} \ b_{55}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{c_{00} \ c_{01} \ c_{02}} & \boxed{c_{03} \ c_{04} \ c_{05}} \\ \vdots & \vdots \\ \boxed{c_{50} \ c_{51} \ c_{52}} & \boxed{c_{53} \ c_{54} \ c_{55}} \end{bmatrix}$$

 **Studente 1**
 Lo studente 1 può calcolare ALTRE componenti della matrice C: il blocco C_{01} !

01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti


47

47

I Strategia: Esempio n=6

Lo studente 2 ha ora anche l'altro blocco di B!

$$\begin{bmatrix} a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{50} & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boxed{b_{00} \ b_{01} \ b_{02}} & \boxed{b_{03} \ b_{04} \ b_{05}} \\ \vdots & \vdots \\ \boxed{b_{50} \ b_{51} \ b_{52}} & \boxed{b_{53} \ b_{54} \ b_{55}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \boxed{c_{30} \ c_{31} \ c_{32}} & \boxed{c_{33} \ c_{34} \ c_{35}} \\ \vdots & \vdots \\ \boxed{c_{50} \ c_{51} \ c_{52}} & \boxed{c_{53} \ c_{54} \ c_{55}} \end{bmatrix}$$

 **Studente 2**
 Lo studente 2 può calcolare ALTRE componenti della matrice C: il blocco C_{10} !

01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

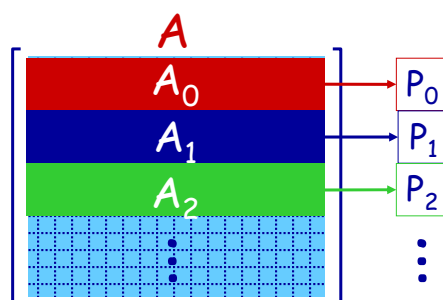
48

48

I STRATEGIA: In generale

I passo: decomposizione del problema

La matrice A viene distribuita
in BLOCCHI di RIGHE
fra p processori



01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

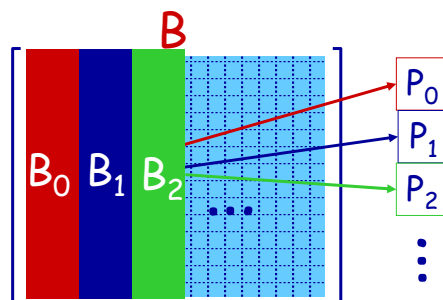
49

49

I STRATEGIA: In generale

I passo: decomposizione del problema

La matrice B viene distribuita
in BLOCCHI di COLONNE
fra p processori



01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

50

50

I STRATEGIA: In generale

II passo: risoluzione dei sottoproblemi

Il prodotto $A \cdot B = C$ viene decomposto
in p prodotti del tipo

$$A_i \cdot B_j = C_{ij}$$

Ciascun processore calcola
 p prodotti matrice-matrice
(di dimensione più piccola di quello assegnato!).

I strategia: caratteristiche

- ♦ Analogo localmente alla I strategia del prodotto matrice-vettore

MA

- ♦ sono necessari degli scambi di colonne della matrice B tra i processori

Domanda

Qual è l'algoritmo parallelo
della **I Strategia**
di decomposizione

?

53

Risposta

Partizionamento di
A in blocchi di righe
B in blocchi di colonne

↓
Algoritmo a blocchi

```
begin
for i=0 to p-1 do
  for j=0 to p-1 do
     $C_{ij} = A_i \cdot B_j$ 
  endfor
endfor
end
```

Distribuzione dei
blocchi fra i
processori

Algoritmo parallelo

Parallelizzazione dell'algoritmo a
blocchi!

54

Risposta

Partizionamento di
 A in blocchi di righe
 B in blocchi di colonne

Algoritmo a blocchi

```
begin
for i=0 to p-1 do
  for j=0 to p-1 do
     $C_{ij} = A_i \cdot B_j$ 
  endfor
endfor
end
```

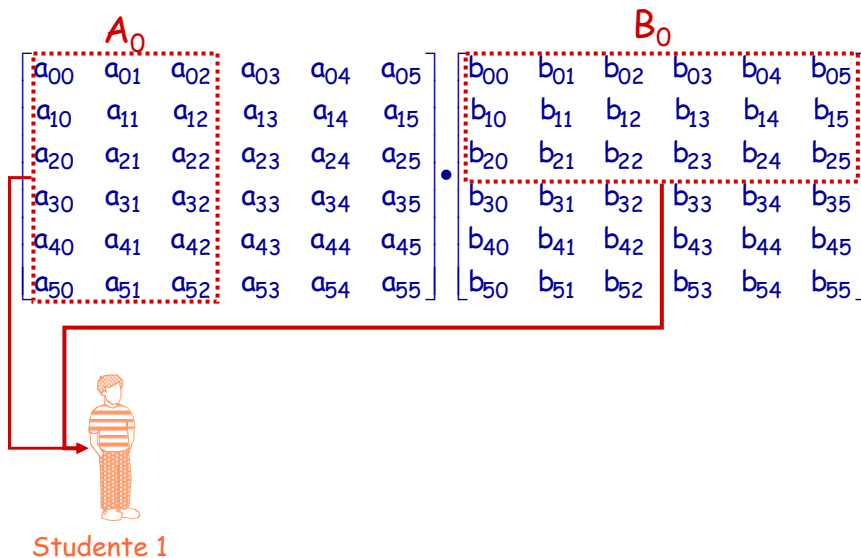
Algoritmo parallelo

```
Begin
for k=0 to p-1 do
  forall  $P_i$  ( $i=0, \dots, p-1$ )
     $j = \text{mod}(i+k, p)$ ;
    {  $P_i$  calcola  $C_{ij} = A_i \cdot B_j$  }
    send( $B_j$ ,  $P_{i+1}$ )
    { quando l'indice arriva a p, ovviamente è 0; i
      processori sono da 0 a p-1 }
    recv( $B_{j-1}$ ,  $P_{i-1}$ )
    { quando l'indice arriva a -1, ovviamente è p-1 }
  endfor
end
```

II strategia

suddividiamo
la matrice A in
blocchi di COLONNE
e la matrice B in
blocchi di RIGHE

Distribuzione dei dati: Esempio n=6



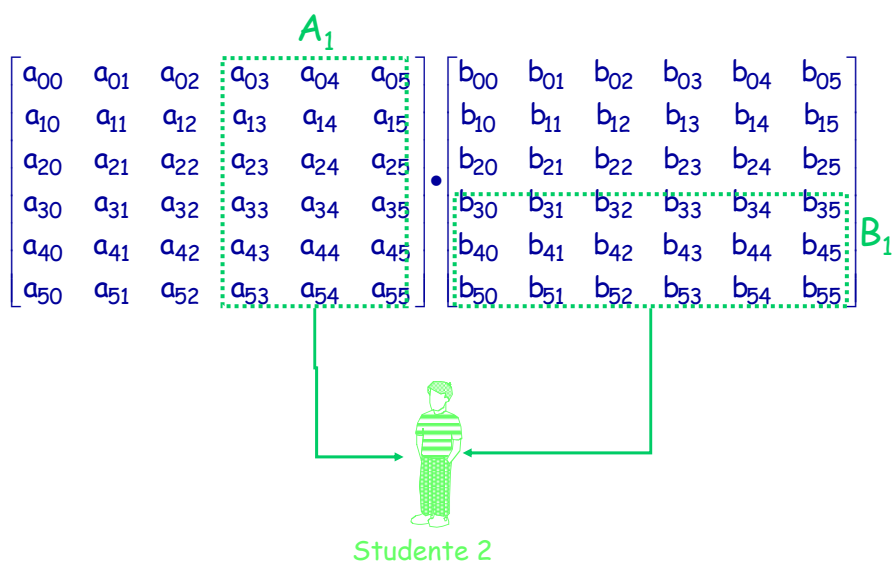
01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

57

57

Distribuzione dei dati: Esempio n=6



01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

58

58

Domanda

Con i dati così distribuiti
cosa può calcolare
ciascuno studente
?

II Strategia: Esempio n=6

$$\begin{matrix} A_0 \\ \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} \\ a_{50} & a_{51} & a_{50} \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} B_0 \\ \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} & b_{03} & b_{04} & b_{05} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}$$




Studente 1

*quali componenti
della matrice C calcola lo
studente 1?*

II Strategia: Esempio n=6

$$\begin{matrix} A_0 \\ \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} \\ a_{50} & a_{51} & a_{50} \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} B_0 \\ \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} & b_{03} & b_{04} & b_{05} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} C^1 \\ \begin{bmatrix} c_{00}^1 & c_{01}^1 & c_{02}^1 & c_{03}^1 & c_{04}^1 & c_{05}^1 \\ c_{10}^1 & c_{11}^1 & c_{12}^1 & c_{13}^1 & c_{14}^1 & c_{15}^1 \\ c_{20}^1 & c_{21}^1 & c_{22}^1 & c_{23}^1 & c_{24}^1 & c_{25}^1 \\ c_{30}^1 & c_{31}^1 & c_{32}^1 & c_{33}^1 & c_{34}^1 & c_{35}^1 \\ c_{40}^1 & c_{41}^1 & c_{42}^1 & c_{43}^1 & c_{44}^1 & c_{45}^1 \\ c_{50}^1 & c_{51}^1 & c_{52}^1 & c_{53}^1 & c_{54}^1 & c_{55}^1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



 Studente 1

Lo studente 1 può calcolare
 un contributo per OGNI
 elemento della matrice C

01/11/2023


PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

61

61

II Strategia: Esempio n=6

$$\begin{matrix} A_0 \\ \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} \\ a_{50} & a_{51} & a_{50} \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} B_0 \\ \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} & b_{03} & b_{04} & b_{05} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} C^1 \\ \text{[Yellow Box]} \end{matrix}$$



 Studente 1

Lo studente 1 può calcolare
 un contributo per OGNI
 elemento della matrice C

01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

62

62

Cioè...

$i, j = 0, 5$

$$c_{ij}^1 = \sum_{k=0}^2 a_{ik} b_{kj}$$

Lo studente 1 può calcolare
un contributo per OGNI
elemento della matrice C



Studente 1

k = Indice delle colonne di A
e Indice di riga di B

II Strategia: Esempio $n=6$

$$A_1 \cdot B_1 = [?]$$

$$\begin{bmatrix} a_{03} & a_{04} & a_{05} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{30} & b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{40} & b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{50} & b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{bmatrix}$$




Studente 2

quali componenti
della matrice C calcola lo
studente 1?

II Strategia: Esempio n=6

$$\begin{matrix} A_1 \\ \begin{bmatrix} a_{03} & a_{04} & a_{05} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} B_1 \\ \begin{bmatrix} b_{30} & b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{40} & b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{50} & b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} C^2 \\ \begin{bmatrix} c_{00}^2 & c_{01}^2 & c_{02}^2 & c_{03}^2 & c_{04}^2 & c_{05}^2 \\ c_{10}^2 & c_{11}^2 & c_{12}^2 & c_{13}^2 & c_{14}^2 & c_{15}^2 \\ c_{20}^2 & c_{21}^2 & c_{22}^2 & c_{23}^2 & c_{24}^2 & c_{25}^2 \\ c_{30}^2 & c_{31}^2 & c_{32}^2 & c_{33}^2 & c_{34}^2 & c_{35}^2 \\ c_{40}^2 & c_{41}^2 & c_{42}^2 & c_{43}^2 & c_{44}^2 & c_{45}^2 \\ c_{50}^2 & c_{51}^2 & c_{52}^2 & c_{53}^2 & c_{54}^2 & c_{55}^2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$


 Lo studente 2 può calcolare
 un contributo per OGNI
 elemento della matrice C

Studente 2

01/11/2023


PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

65

65

II Strategia: Esempio n=6

$$\begin{matrix} A_1 \\ \begin{bmatrix} a_{03} & a_{04} & a_{05} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} B_1 \\ \begin{bmatrix} b_{30} & b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{40} & b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{50} & b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} C^2 \\ \text{[Green Box]} \end{matrix}$$


 Lo studente 2 può calcolare
 un contributo per OGNI
 elemento della matrice C

Studente 2

01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

66

66

Cioè...

$i, j = 0, 5$

$$c_{ij}^2 = \sum_{k=3}^5 a_{ik} b_{kj}$$

*Lo studente 2 può calcolare
un contributo per OGNI
elemento della matrice C*

k = Indice delle colonne di A
e Indice di riga di B



Studente 2

Pertanto...

$$c_{ij} = \sum_{k=0}^5 a_{ik} b_{kj}$$

$i, j = 0, 5$

*I due contributi
devono essere
sommati*

$$\sum_{k=0}^2 a_{ik} b_{kj}$$



Studente 1

$$\sum_{k=3}^5 a_{ik} b_{kj}$$



Studente 2

Ovvero, in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & c_{03} & c_{04} & c_{05} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{30} & c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{40} & c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \\ c_{50} & c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{00}^1 & c_{01}^1 & c_{02}^1 & c_{03}^1 & c_{04}^1 & c_{05}^1 \\ c_{10}^1 & c_{11}^1 & c_{12}^1 & c_{13}^1 & c_{14}^1 & c_{15}^1 \\ c_{20}^1 & c_{21}^1 & c_{22}^1 & c_{23}^1 & c_{24}^1 & c_{25}^1 \\ c_{30}^1 & c_{31}^1 & c_{32}^1 & c_{33}^1 & c_{34}^1 & c_{35}^1 \\ c_{40}^1 & c_{41}^1 & c_{42}^1 & c_{43}^1 & c_{44}^1 & c_{45}^1 \\ c_{50}^1 & c_{51}^1 & c_{52}^1 & c_{53}^1 & c_{54}^1 & c_{55}^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{00}^2 & c_{01}^2 & c_{02}^2 & c_{03}^2 & c_{04}^2 & c_{05}^2 \\ c_{10}^2 & c_{11}^2 & c_{12}^2 & c_{13}^2 & c_{14}^2 & c_{15}^2 \\ c_{20}^2 & c_{21}^2 & c_{22}^2 & c_{23}^2 & c_{24}^2 & c_{25}^2 \\ c_{30}^2 & c_{31}^2 & c_{32}^2 & c_{33}^2 & c_{34}^2 & c_{35}^2 \\ c_{40}^2 & c_{41}^2 & c_{42}^2 & c_{43}^2 & c_{44}^2 & c_{45}^2 \\ c_{50}^2 & c_{51}^2 & c_{52}^2 & c_{53}^2 & c_{54}^2 & c_{55}^2 \end{bmatrix}$$

*I due contributi
devono essere
sommati*



Studente 1



Studente 2

Ovvero, in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & c_{03} & c_{04} & c_{05} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{30} & c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{40} & c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \\ c_{50} & c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^2 \end{bmatrix}$$

*I due contributi
devono essere
sommati*



Studente 1



Studente 2

Domanda

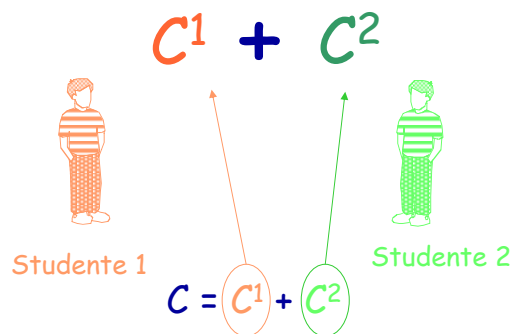
Come calcolare
la matrice C

$$C = C^1 + C^2$$

?

II STRATEGIA: Esempio $n=6$

Per ottenere la matrice C
gli studenti devono "interagire"
sommando i loro risultati parziali



II STRATEGIA: In generale

♦ Calcolo:

Inizialmente tutti i processori calcolano, indipendentemente, un contributo parziale di tutte le componenti di C

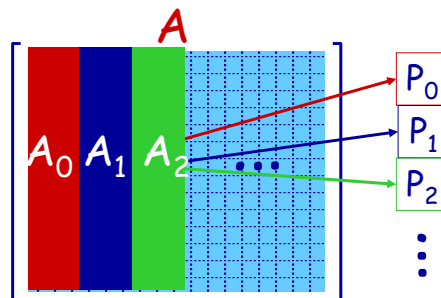
♦ Comunicazione/calcolo

Successivamente in parallelo tutti i processori concorrono alla **somma dei contributi parziali**

II STRATEGIA: In generale

I passo: decomposizione del problema

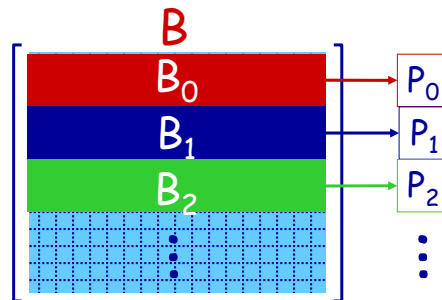
La matrice A viene distribuita
in BLOCCHI di COLONNE
fra p processori



II STRATEGIA: In generale

I passo: decomposizione del problema

La matrice B viene distribuita
in BLOCCHI di RIGHE
fra p processori



01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

75

75

II STRATEGIA: In generale

II passo: risoluzione dei sottoproblemi

Il prodotto $A \cdot B = C$ viene decomposto
in p prodotti del tipo

$$A_i \cdot B_i = C^i \text{ dove } C = \sum_{i=0}^{p-1} C^i$$

Ciascun processore calcola
un prodotto matrice matrice
(di dimensione più piccola di quello assegnato).

01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

76

76

II strategia: caratteristiche

- ♦ I risultati parziali devono essere sommati tra i processori
- ♦ In questo caso l'algoritmo parallelo è analogo a quello del prodotto matrice-vettore (II strategia)

Domanda

Qual è
l'algoritmo parallelo
della **II Strategia**
di decomposizione

?

Risposta

Partizionamento di
 A in blocchi di colonne
 B in blocchi di righe



```
begin
  C = 0
  for i=0 to p-1 do
     $C^i = A_i \cdot B_i$ 
     $C = C + C^i$ 
  endfor
End
```



Distribuzione dei
blocchi fra i
processori



Algoritmo parallelo

Parallelizzazione dell'algoritmo a blocchi!

Risposta

Partizionamento di
 A in blocchi di colonne
 B in blocchi di righe



```
begin
  C = 0
  for i=0 to p-1 do
     $C^i = A_i \cdot B_i$ 
     $C = C + C^i$ 
  endfor
End
```



Algoritmo parallelo

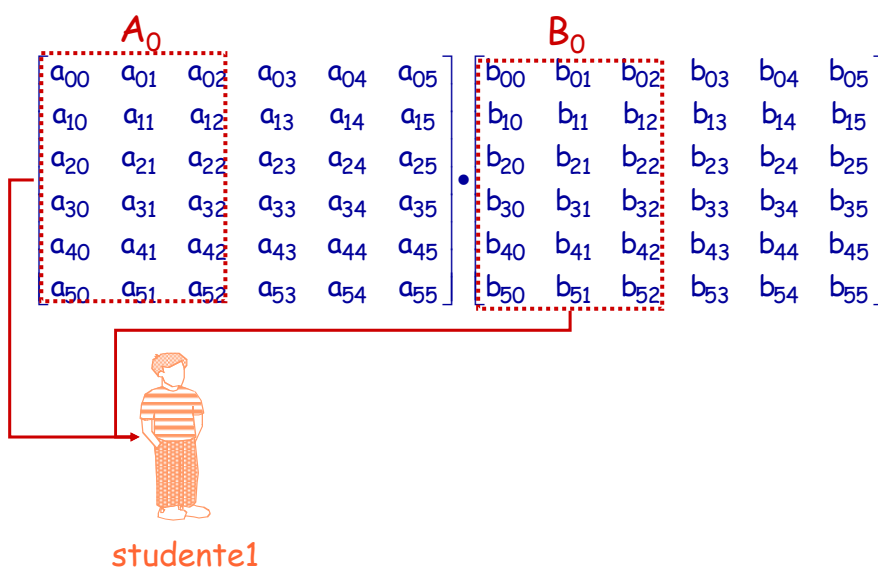
```
begin
  forall  $P_i$  ( $i=0, \dots, p-1$ )
    {  $P_i$  calcola  $C^i = A_i \cdot B_i$  }
    { combinazione dei  $C^i$  }
     $C = C + C^i$ 
  end
```


III strategia

Suddividiamo
ENTRAMBE
le matrici A e B in
blocchi di COLONNE

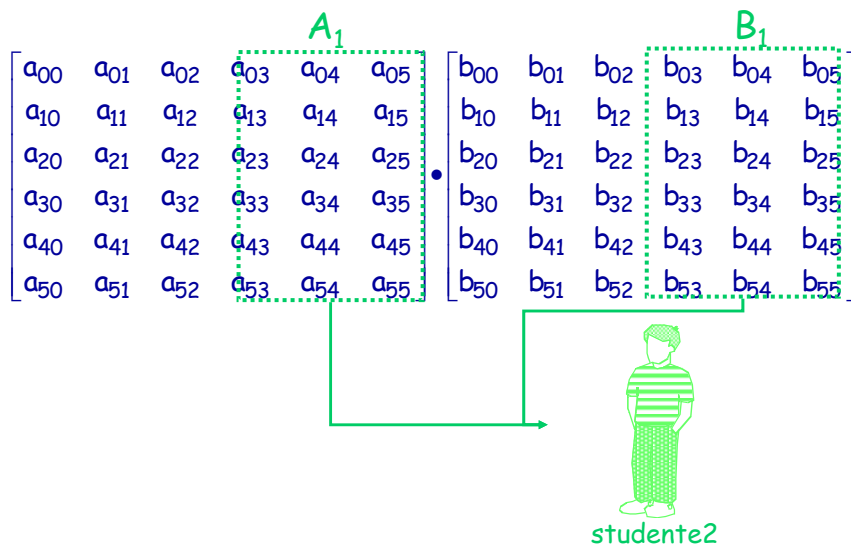
81

Distribuzione dei dati: Esempio n=6



82

Distribuzione dei dati: Esempio $n=6$



01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

83

83

Domanda

Con i dati così distribuiti
cosa può calcolare
ciascuno studente
?

01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

84

84

III Strategia: Esempio n=6

$$\begin{matrix} A_0 \\ \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} \\ a_{50} & a_{51} & a_{52} \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} B_0 \\ \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} \\ b_{30} & b_{31} & b_{32} \\ b_{40} & b_{41} & b_{42} \\ b_{50} & b_{51} & b_{52} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}$$

*quali componenti
della matrice C
calcola lo studente 1*
 ?



Studente 1

01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

85

85

III Strategia: Esempio n=6

$$\begin{matrix} A_1 \\ \begin{bmatrix} a_{03} & a_{04} & a_{05} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} B_1 \\ \begin{bmatrix} b_{03} & b_{04} & b_{05} \\ b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}$$

*quali componenti
della matrice C
calcola lo studente 2*
 ?



Studente 2

01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

86

86

Premessa...

$$\begin{array}{c} \mathbf{C} \end{array} = \begin{array}{c} \mathbf{A} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \mathbf{B} \end{array}$$

A_0 A_1 B_0 B_1

Riorganizziamo la matrice C in blocchi quadrati

Premessa...

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{00} & \mathbf{C}_{01} \\ \mathbf{C}_{10} & \mathbf{C}_{11} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \mathbf{A} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \mathbf{B} \end{array}$$

A_0 A_1 B_0 B_1

Riorganizziamo la matrice C in blocchi quadrati

Allo stesso modo riorganizziamo
i blocchi di colonne di A e B !

Osservazione...

$$\begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} \\ C_{10} & C_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} \\ B_{10} & B_{11} \end{bmatrix}$$

A_0
 A_1
 B_0
 B_1

Riorganizziamo la matrice C in **blocchi quadrati**

Allo stesso modo riorganizziamo
i blocchi di colonne di A e B !

Osservazione...

$$\begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} \\ C_{10} & C_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} \\ B_{10} & B_{11} \end{bmatrix}$$

A_0
 A_1
 B_0
 B_1

Pertanto...

$$C_{00} = A_{00} B_{00} + A_{01} B_{10}$$

$$C_{10} = A_{10} B_{00} + A_{11} B_{10}$$

$$C_{01} = A_{00} B_{01} + A_{01} B_{11}$$

$$C_{11} = A_{10} B_{01} + A_{11} B_{11}$$

Fase di calcolo

$$\begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} \\ C_{10} & C_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} \\ B_{10} & B_{11} \end{bmatrix}$$

A_0

B_0

Pertanto...

$$C_{00} = A_{00} B_{00} + A_{01} B_{10}$$

$$C_{10} = A_{10} B_{00} + A_{11} B_{10}$$

$$C_{01} = A_{00} B_{01} + A_{01} B_{11}$$

$$C_{11} = A_{10} B_{01} + A_{11} B_{11}$$

Studente 1



Lo studente 1
calcola "un contributo"
di "una parte" della
matrice C!

01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

91

91

Fase di calcolo

$$\begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} \\ C_{10} & C_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} \\ B_{10} & B_{11} \end{bmatrix}$$

A_0

B_0

Pertanto...

$$C_{00} = A_{00} B_{00} + A_{01} B_{10}$$

$$C_{10} = A_{10} B_{00} + A_{11} B_{10}$$

$$C_{01} = A_{00} B_{01} + A_{01} B_{11}$$

$$C_{11} = A_{10} B_{01} + A_{11} B_{11}$$

Studente 1



Lo studente 1
NON può completare
i calcoli
perché non possiede
gli altri blocchi di A!

01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

92

92

Fase di calcolo

$$\begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} \\ C_{10} & C_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} \\ B_{10} & B_{11} \end{bmatrix}$$

A_1 B_1

Pertanto...

$$C_{00} = A_{00} B_{00} + A_{01} B_{10}$$

$$C_{10} = A_{10} B_{00} + A_{11} B_{10}$$

$$C_{01} = A_{00} B_{01} + A_{01} B_{11}$$

$$C_{11} = A_{10} B_{01} + A_{11} B_{11}$$



Studente 2

Lo studente 2
calcola "un contributo"
di "una parte" della
matrice C!

01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

93

93

Fase di calcolo

$$\begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} \\ C_{10} & C_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} \\ B_{10} & B_{11} \end{bmatrix}$$

A_1 B_1

Pertanto...

$$C_{00} = A_{00} B_{00} + A_{01} B_{10}$$

$$C_{10} = A_{10} B_{00} + A_{11} B_{10}$$

$$C_{01} = A_{00} B_{01} + A_{01} B_{11}$$

$$C_{11} = A_{10} B_{01} + A_{11} B_{11}$$



Studente 1

Lo studente 2
NON può completare
i calcoli
perché non possiede
gli altri blocchi di A!

01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

94

94

Domanda

Come "completare"
i contributi calcolati
?

01/11/2023

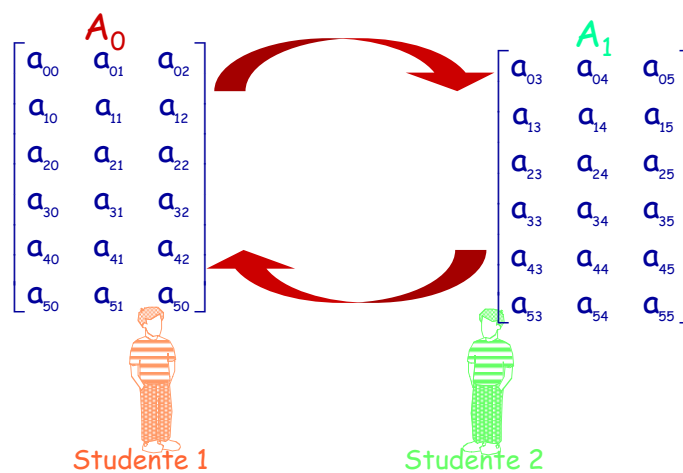
PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

95

95

IDEA!

Gli studenti possono scambiarsi
i blocchi di COLONNE della matrice A !



01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

96

96

IDEA!

Gli studenti **possono scambiarsi**
i blocchi di **COLONNE** della matrice **A**!

$$A_0 = \begin{bmatrix} a_{03} & a_{04} & a_{05} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$



$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} \\ a_{50} & a_{51} & a_{52} \end{bmatrix}$$



Dopo lo scambio...

01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

97

97

Dopo lo scambio... Fase di calcolo 2

$$\begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} \\ C_{10} & C_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} \\ B_{10} & B_{11} \end{bmatrix}$$

Pertanto...

$$C_{00} = A_{00} B_{00} + A_{01} B_{10}$$

$$C_{10} = A_{10} B_{00} + A_{11} B_{10}$$

$$C_{01} = A_{00} B_{01} + A_{01} B_{11}$$

$$C_{11} = A_{10} B_{01} + A_{11} B_{11}$$

Studente 1



Lo studente 1
ha ricevuto
l'altro blocco di A
e può completare il
Calcolo!

01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

98

98

Dopo lo scambio... Fase di calcolo 2

$$\begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} \\ C_{10} & C_{11} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{bmatrix}}_{A_0} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} \\ B_{10} & B_{11} \end{bmatrix}}_{B_1}$$

Pertanto...

$$C_{00} = A_{00} B_{00} + A_{01} B_{10}$$

$$C_{10} = A_{10} B_{00} + A_{11} B_{10}$$

$$C_{01} = A_{00} B_{01} + A_{01} B_{11}$$

$$C_{11} = A_{10} B_{01} + A_{11} B_{11}$$



Studente 2

Lo studente 2
ha ricevuto
l'altro blocco di A
e può completare il
Calcolo!

01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

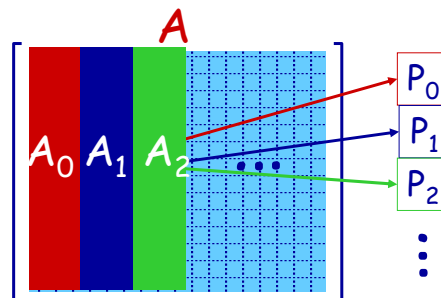
99

99

III STRATEGIA: In generale

I passo: decomposizione del problema

La matrice A viene distribuita
in BLOCCHI di COLONNE
fra p processori



01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

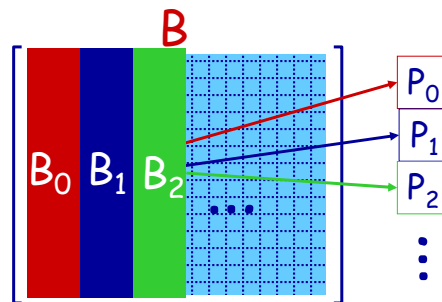
100

100

III STRATEGIA: In generale

I passo: decomposizione del problema

La matrice **B** viene distribuita
in BLOCCHI di COLONNE
fra p processori



01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

101

101

III STRATEGIA: In generale

II passo: risoluzione dei sottoproblemi

Il prodotto $A \cdot B = C$ viene decomposto
in $p \times p$ prodotti del tipo

$$C_i = \sum_{k=0}^{p-1} A_k B_{ki}$$

Ciascun processore calcola
 p prodotti matrice matrice
(di dimensione più piccola di quello assegnato).

01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

102

102

Domanda

Qual è l'algoritmo parallelo
della **III Strategia**
di decomposizione

?

01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

103

103

Risposta

Partizionamento delle matrici
A e B in blocchi di colonne



```
begin
  for i=0 to p-1 do
     $C_i = 0$ 
    for j=0 to p-1 do
       $C_i = C_i + A_j \cdot B_{ji}$ 
    endfor
  endfor
end
```



Distribuzione dei
blocchi fra i
processori



Algoritmo parallelo

*Parallelizzazione dell'algoritmo a
blocchi!*

01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

104

104

Risposta

Partizionamento delle matrici

A e B in blocchi di colonne

Algoritmo parallelo



```
begin
  for i=0 to p-1 do
    Ci = 0
    for j=0 to p-1 do
      Ci = Ci + Aj · Bji
    endfor
  endfor
end
```

```
Begin
for k=0 to p-1 do
  forall Pi (i=0,...,p-1)
    j=mod(i+k,p);
    {Pi calcola
      Ci = Ci + Aj · Bji}
  send(Aj, Pi-1) {p = 0}
  recv(Aj+1, Pi+1) {-1=p-1}
endfor
```

01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

105

105

Fine Lezione

01/11/2023

PDC – MAT-MAT – 2023/2024 prof. Giuliano Laccetti

106

106