

# Calcolo Speed Up ed Efficienza con la legge di Ware-Amdahl

Somma di N numeri

1

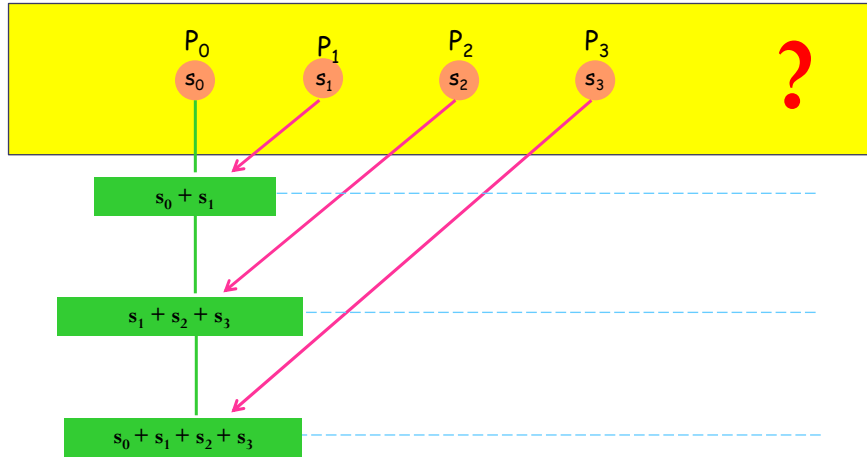
2

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

2

## Strategia I - Quanti calcoli?



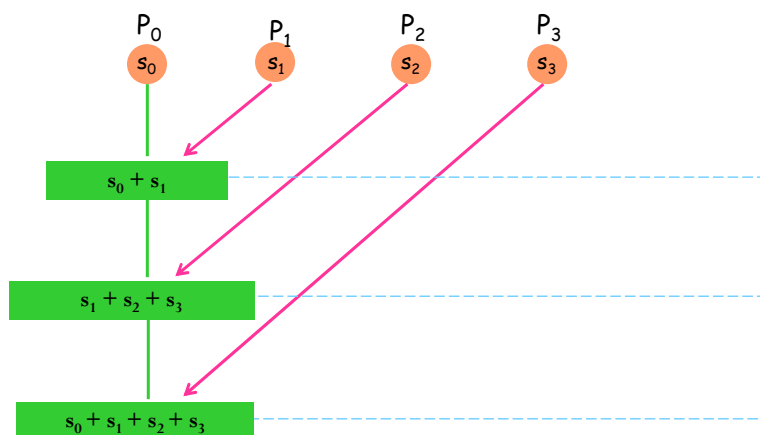
3

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

3

## Strategia I - Quanti calcoli?



4

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

4

## Strategia I - Quanti calcoli?

Dati :  $n (\geq 2)$  numeri,  $p$  processi, con  $p \leq 2n$

Per le somme parziali il processore  $i$  esegue un numero di operazioni pari a:

$$r_i = \begin{cases} \left(\frac{n}{p}\right) - 1 & \text{se } i \geq n \% p \\ \left(\frac{n}{p} + 1\right) - 1 & \text{se } i < n \% p \end{cases}$$

Per un totale di  $\sum_{i=0}^{p-1} r_i$  operazioni

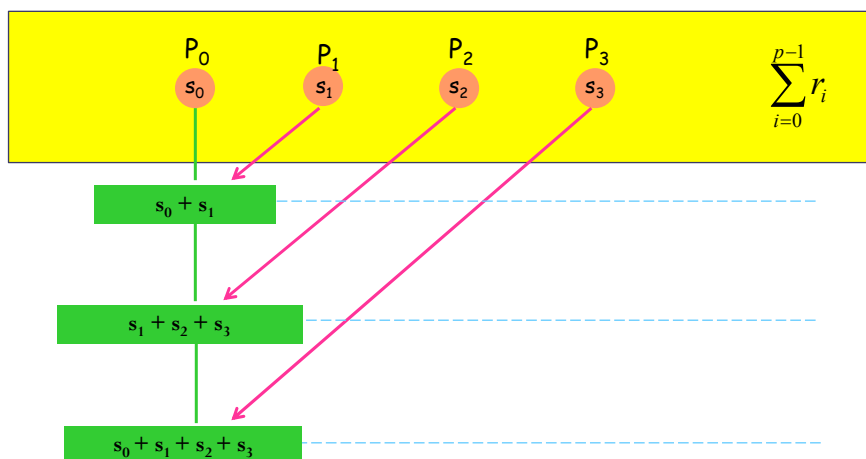
5

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

5

## Strategia I - Quanti calcoli?



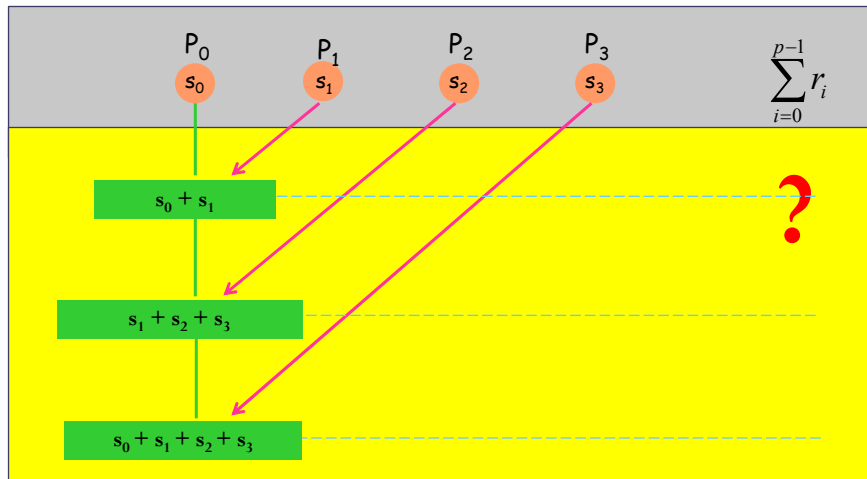
6

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

6

## Strategia I - Quanti calcoli?



7

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

7

## Strategia I - Quanti calcoli?

Dati :  $n (\geq 2)$  numeri,  $p$  processi, con  $p \leq 2n$

Seguono  $p-1$  altre fasi di calcolo.

Nella  $i$ -ma fase di calcolo un processore solo compie 1 operazione (somma) , per un totale di

$$\sum_{i=1}^{p-1} 1 = p-1 \text{ operazioni}$$

8

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

8

## Strategia I - Quanti calcoli?

Dati :  $n (\geq 2)$  numeri,  $p$  processi, con  $p \leq 2n$

In totale allora vengono eseguite

$$\sum_{i=0}^{p-1} r_i + (p-1) \text{ operazioni}$$

- Di queste:
  - $\sum_{i=0}^{p-1} r_i$  vengono eseguite in parallelo, cioè per la loro esecuzione lavorano contemporaneamente più di un processore
  - $(p-1)$  vengono eseguite invece da un solo processore

9

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

9

## Strategia I - Legge di Ware-Amdahl

Per la legge di Ware-Amdahl

$$S(p) = \frac{1}{\alpha + \frac{1-\alpha}{p}}$$

$\alpha$  parte sequenziale, ovvero frazione di operazioni eseguite da un solo processore

$1-\alpha$  parte parallela, ovvero frazione di operazioni eseguite contemporaneamente da più di un processore

- Nel nostro caso:

$$\alpha = \frac{p-1}{\sum_{i=0}^{p-1} r_i + (p-1)} \quad 1-\alpha = 1 - \frac{p-1}{\sum_{i=0}^{p-1} r_i + (p-1)} = \frac{\sum_{i=0}^{p-1} r_i}{\sum_{i=0}^{p-1} r_i + (p-1)}$$

10

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

10

## Strategia I - Esempio

Dati : **50** numeri, **4** processi

Per le somme parziali il processore  $i$  esegue un numero di operazioni pari a:

$$r_i = \begin{cases} \left(\frac{50}{4}\right) - 1 = 11 & \text{se } i \geq n \% p = 2 \\ \left(\frac{50}{4} + 1\right) - 1 = 12 & \text{se } i < n \% p = 2 \end{cases}$$

Per un totale di  $12 + 12 + 11 + 11 = 46$  operazioni

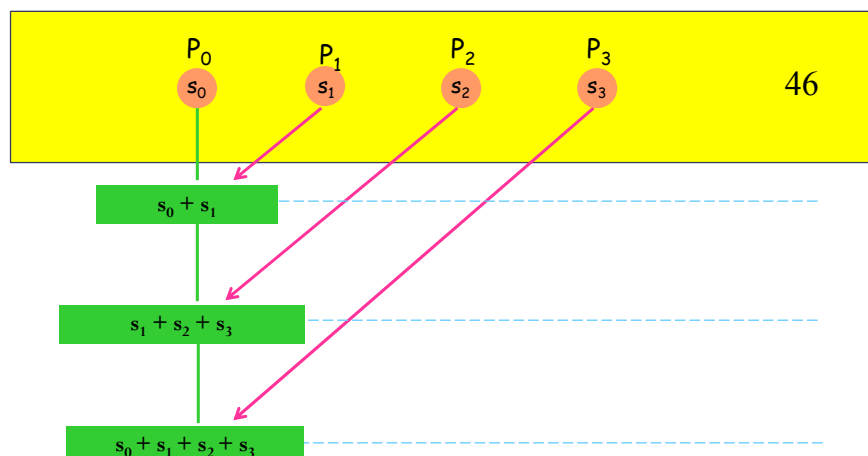
11

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

11

## Strategia I - Quanti calcoli?



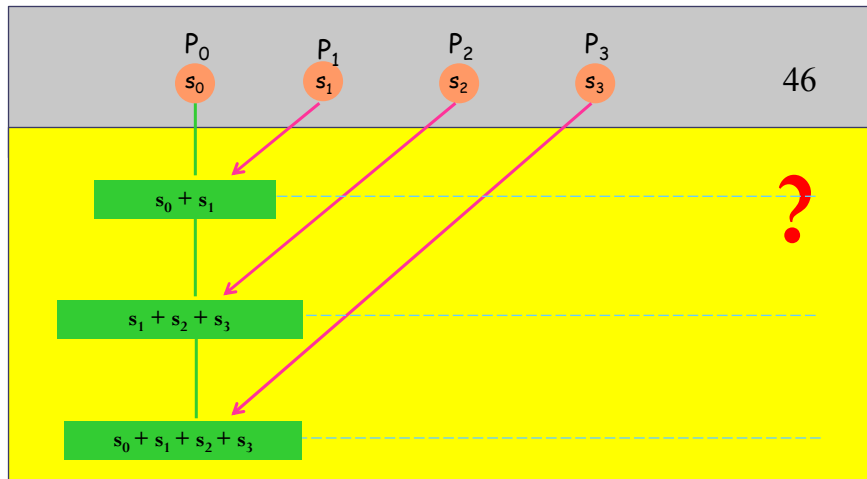
12

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

12

## Strategia I - Quanti calcoli?



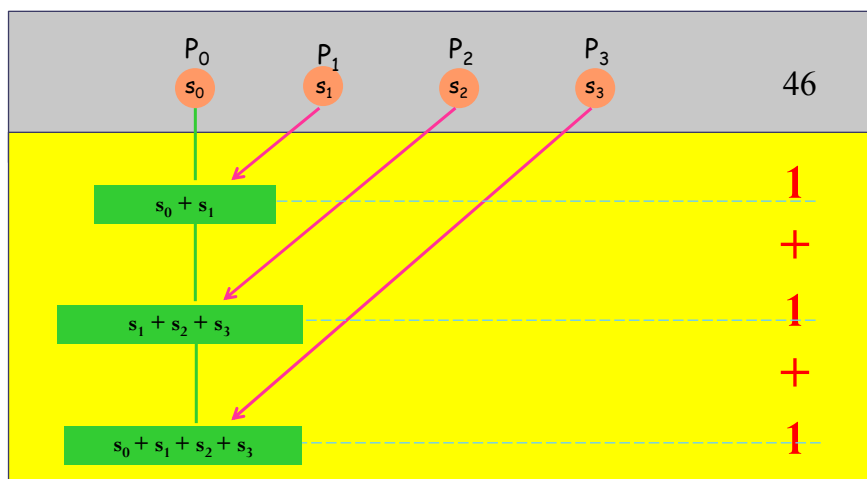
13

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

13

## Strategia I - Quanti calcoli?



14

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

14

## Strategia I - Quanti calcoli?

Dati : **50** numeri, **4** processi

In totale allora vengono eseguite

**49** operazioni

- Di queste:
  - 46 vengono eseguite in parallelo, cioè per la loro esecuzione lavorano contemporaneamente più di un processore
  - 3 vengono eseguite invece da un solo processore

15

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

15

## Strategia I – Legge di Ware-Amdahl

Per la legge di Ware-Amdahl

$$S(p) = \frac{1}{\alpha + \frac{1-\alpha}{p}}$$

$\alpha$  parte sequenziale, ovvero frazione di operazioni eseguite da un solo processore

$1-\alpha$  parte parallela, ovvero frazione di operazioni eseguite contemporaneamente da più di un processore

- Nel nostro caso:

$$\alpha = \frac{3}{49}$$

$$1-\alpha = \frac{46}{49}$$

16

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

16



## Strategia I – Legge di Ware-Amdahl

Per la legge di Ware-Amdahl

$$S(p) = \frac{1}{\alpha + \frac{1-\alpha}{p}}$$

$\alpha$  parte sequenziale, ovvero frazione di operazioni eseguite da un solo processore

$1-\alpha$  parte parallela, ovvero frazione di operazioni eseguite contemporaneamente da più di un processore

- Nel nostro caso:

$$\alpha = \frac{3}{49} = 0,06$$

$$1 - \alpha = \frac{46}{49} = 0,93$$

17

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

17

## Strategia I – Legge di Ware-Amdahl

Per la legge di Ware-Amdahl

$$S(4) = \frac{1}{0,06 + \frac{0,93}{4}}$$

$\alpha$  parte sequenziale, ovvero frazione di operazioni eseguite da un solo processore

$1-\alpha$  parte parallela, ovvero frazione di operazioni eseguite contemporaneamente da più di un processore

- Nel nostro caso:

$$\alpha = \frac{3}{49} = 0,06$$

$$1 - \alpha = \frac{46}{49} = 0,93$$

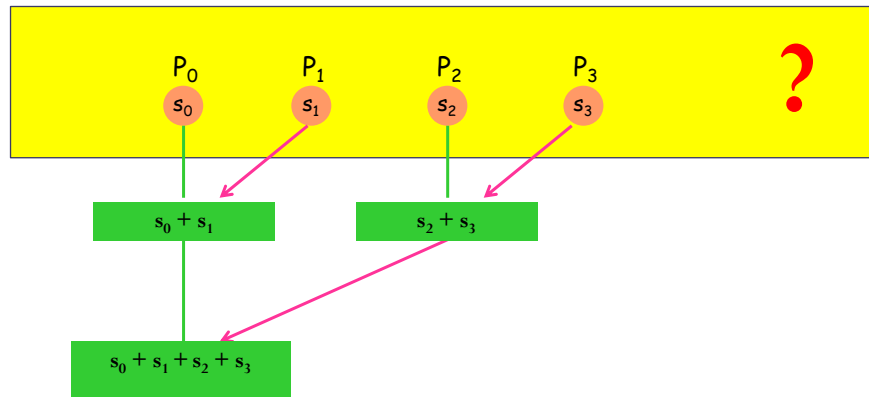
18

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

18

## Strategia II - Quanti calcoli?



19

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

19

## Strategia II - Quanti passi di calcolo?

Dati :  $n (\geq 2)$  numeri,  $p = 2^k$  processi, con  $k \leq \log_2 n$

Per le somme parziali il processore  $i$  esegue un numero di operazioni pari a:

$$r_i = \begin{cases} \left(\frac{n}{p}\right) - 1 & \text{se } i \geq n\%p \\ \left(\frac{n}{p} + 1\right) - 1 & \text{se } i < n\%p \end{cases}$$

Per un totale di  $\sum_{i=0}^{p-1} r_i$  operazioni

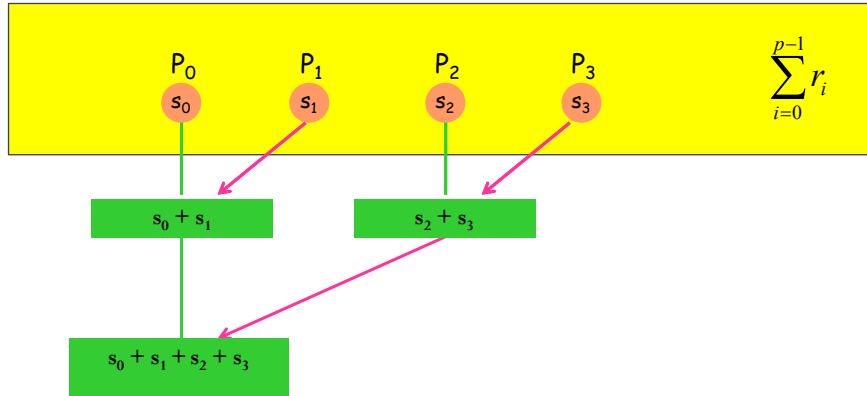
20

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

20

## Strategia II - Quanti calcoli?

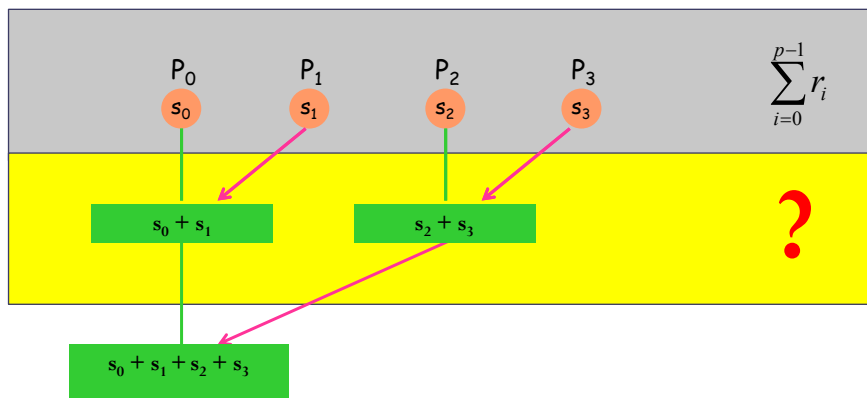


21

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

## Strategia II - Quanti calcoli?



22

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

## Strategia II - Quanti calcoli?

Dati :  $n (\geq 2)$  numeri,  $p = 2^k$  processi, con  $k \leq \log_2 n$

Seguono  $\log_2 p$  altre fasi di calcolo.

Nella  $i$ -ma fase di calcolo  $p/2^i$  processori eseguono 1 operazione (somma)

23

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

23

## Strategia II - Quanti calcoli?

Dati :  $n (\geq 2)$  numeri,  $p = 2^k$  processi, con  $k \leq \log_2 n$

Seguono  $\log_2 p$  altre fasi di calcolo.

Nella  $i$ -ma fase di calcolo  $p/2^i$  processori eseguono 1 operazione (somma)

Per un totale di  $\sum_{i=1}^{\log_2 p} \frac{p}{2^i}$  operazioni

24

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

24

## Strategia II - Quanti calcoli?

Dati :  $n (\geq 2)$  numeri,  $p$  processi, con  $p \leq 2n$

In totale allora vengono eseguite

$$\sum_{i=0}^{p-1} r_i + \sum_{i=1}^{\log_2 p} \frac{p}{2^i} \text{ operazioni}$$

25

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

25

## Strategia II - Quanti calcoli?

Di queste:

- $\sum_{i=0}^{p-1} r_i$  vengono eseguite da  $p$  processi (meno eventuali  $n \% p$  eseguite da  $n \% p$  processi)
- $p/2^i$  vengono eseguite invece da  $p/2^i$  processi
- In particolare  $p/2^{\log_2 p} = p/p = 1$  operazione viene eseguita da 1 processo

26

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

26

## Strategia II – Legge di Ware-Amdahl

Per la legge di Ware-Amdahl

$$S(p) = \frac{1}{\alpha + \frac{1-\alpha}{p}}$$

$\alpha$  parte sequenziale, ovvero frazione di operazioni eseguite da un solo processore

$1-\alpha$  parte parallela, ovvero frazione di operazioni eseguite contemporaneamente da più di un processore

- Nel nostro caso:

$$\alpha = \frac{1}{\sum_{i=0}^{p-1} r_i + \sum_{i=1}^{\log_2 p} \frac{p}{2^i}}$$

$$1-\alpha = \frac{\sum_{i=0}^{p-1} r_i + \sum_{i=1}^{\log_2 p} \frac{p}{2^i} - 1}{\sum_{i=0}^{p-1} r_i + \sum_{i=1}^{\log_2 p} \frac{p}{2^i}}$$

27

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

27

## Strategia II - Esempio

Dati : **50** numeri,  $4 = 2^2$  processi

Per le somme parziali il processore  $i$  esegue un numero di operazioni pari a:

$$r_i = \begin{cases} \left(\frac{50}{4}\right) - 1 = 11 & \text{se } i \geq n \% p = 2 \\ \left(\frac{50}{4} + 1\right) - 1 = 12 & \text{se } i < n \% p = 2 \end{cases}$$

Per un totale di  $12 + 12 + 11 + 11 = 46$  operazioni

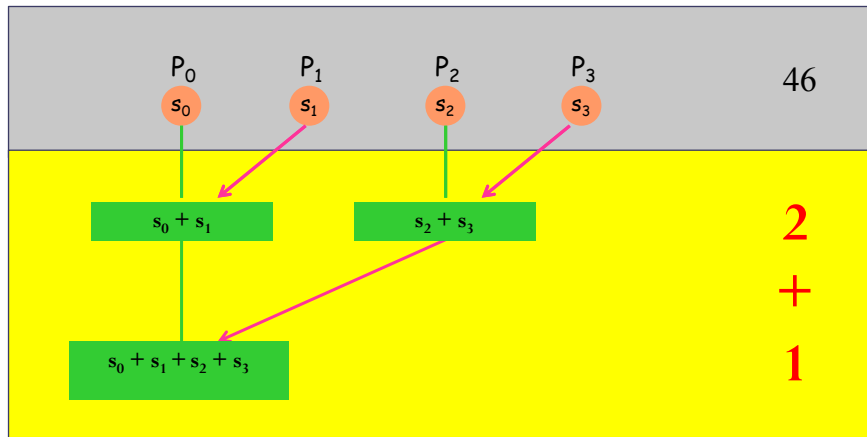
28

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

28

## Strategia II - Quanti calcoli?



29

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

29

## Strategia II - Quanti calcoli?

Dati : **50** numeri, 4 processi

In totale allora vengono eseguite

**49** operazioni

- Di queste:
  - 48 vengono eseguite in parallelo, cioè per la loro esecuzione lavorano contemporaneamente più di un processore
  - 1 viene eseguita invece da un solo processore

30

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

30

## Strategia II – Legge di Ware-Amdahl

Per la legge di Ware-Amdahl

$$S(p) = \frac{1}{\alpha + \frac{1-\alpha}{p}}$$

$\alpha$  parte sequenziale, ovvero frazione di operazioni eseguite da un solo processore

$1-\alpha$  parte parallela, ovvero frazione di operazioni eseguite contemporaneamente da più di un processore

- Nel nostro caso:

$$\alpha = \frac{1}{49}$$

$$1-\alpha = \frac{48}{49}$$

31

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

31

## Strategia II – Legge di Ware-Amdahl

Per la legge di Ware-Amdahl

$$S(p) = \frac{1}{\alpha + \frac{1-\alpha}{p}}$$

$\alpha$  parte sequenziale, ovvero frazione di operazioni eseguite da un solo processore

$1-\alpha$  parte parallela, ovvero frazione di operazioni eseguite contemporaneamente da più di un processore

- Nel nostro caso:

$$\alpha = \frac{1}{49} = 0,02$$

$$1-\alpha = \frac{48}{49} = 0,97$$

32

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

32



## Strategia II – Legge di Ware-Amdahl

Per la legge di Ware-Amdahl

$$S(4) = \frac{1}{0,02 + \frac{0,97}{4}}$$

$\alpha$  parte sequenziale, ovvero frazione di operazioni eseguite da un solo processore

$1-\alpha$  parte parallela, ovvero frazione di operazioni eseguite contemporaneamente da più di un processore

- Nel nostro caso:

$$\alpha = \frac{1}{49} = 0,02$$

$$1 - \alpha = \frac{48}{49} = 0,97$$

33

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

33

## Strategia I – Legge di Ware-Amdahl generalizzata

Per la legge di Ware-Amdahl generalizzata

$$S(p) = \frac{1}{\alpha_1 + \sum_{k=2}^p \frac{\alpha_k}{k}}$$

$\alpha_k$  frazione di operazioni eseguite da k processori

- Nel nostro caso:

Tutti gli altri sono nulli!

$$\alpha_1 = \frac{p-1}{\sum_{i=0}^{p-1} r_i + (p-1)} \quad \alpha_2 = \frac{2}{\sum_{i=0}^{p-1} r_i + (p-1)} \quad \alpha_p = \frac{\sum_{i=0}^{p-1} r_i - 2}{\sum_{i=0}^{p-1} r_i + (p-1)}$$

34

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

34

## Strategia I – Legge di Ware-Amdahl generalizzata

Per la legge di Ware-Amdahl generalizzata

$$S(p) = \frac{1}{\alpha_1 + \sum_{k=2}^p \frac{\alpha_k}{k}}$$

$\alpha_k$  frazione di operazioni eseguite da k processori

- Nel nostro caso:

Tutti gli altri  
sono nulli!

$$\alpha_1 = \frac{3}{49} = 0,06 \quad \alpha_2 = \frac{2}{49} = 0,04 \quad \alpha_p = \frac{44}{49} = 0,9$$

35

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

35

## Strategia I – Legge di Ware-Amdahl generalizzata

Per la legge di Ware-Amdahl generalizzata

$$S(p) = \frac{1}{0,06 + \frac{0,04}{2} + \frac{0}{3} + \frac{0,93}{4}}$$

$\alpha_k$  frazione di operazioni eseguite da k processori

- Nel nostro caso:

Tutti gli altri  
sono nulli!

$$\alpha_1 = \frac{3}{49} = 0,06 \quad \alpha_2 = \frac{2}{49} = 0,04 \quad \alpha_p = \frac{44}{49} = 0,9$$

36

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

36

## Strategia I – Legge di Ware-Amdahl generalizzata

Per la legge di Ware-Amdahl generalizzata

$$S(p) = \frac{1}{0,06 + \frac{0,04}{2} + \frac{0}{3} + \frac{0,93}{4}}$$

$\alpha_k$  frazione di operazioni eseguite da k processori

- Nel nostro caso:

Tutti gli altri sono nulli!

$$\alpha_1 = \frac{3}{49} = 0,06 \quad \alpha_2 = \frac{2}{49} = 0,04 \quad \alpha_p = \frac{44}{49} = 0,9$$

In questo caso il risultato corrisponde a quello trovato con la legge precedente

37

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

37

## Strategia II – Legge di Ware-Amdahl generalizzata

Per la legge di Ware-Amdahl generalizzata

$$S(p) = \frac{1}{\alpha_1 + \sum_{k=2}^p \frac{\alpha_k}{k}}$$

$\alpha_k$  frazione di operazioni eseguite da k processori

- Nel nostro caso:

Tutti gli altri sono nulli!

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{p-1} r_i + \sum_{i=1}^{\log_2 p} \frac{p}{2^i}} \quad \alpha_{2^i} = \frac{\frac{p}{2^i}}{\sum_{i=0}^{p-1} r_i + \sum_{i=1}^{\log_2 p} \frac{p}{2^i}} \quad \forall i \in [1, (\log_2 p) - 1] \quad \alpha_p = \frac{\sum_{i=0}^{p-1} r_i}{\sum_{i=0}^{p-1} r_i + \sum_{i=1}^{\log_2 p} \frac{p}{2^i}}$$

38

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

38

## Strategia II – Legge di Ware-Amdahl generalizzata

Per la legge di Ware-Amdahl generalizzata

$$S(p) = \frac{1}{\alpha_1 + \sum_{k=2}^p \frac{\alpha_k}{k}}$$

$\alpha_k$  frazione di operazioni eseguite da k processori

- Nel nostro caso:

Tutti gli altri sono nulli!

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{p-1} r_i + \sum_{i=1}^{\log_2 p} \frac{p}{2^i}} \quad \alpha_{2^i} = \frac{\frac{p}{2^i}}{\sum_{i=0}^{p-1} r_i + \sum_{i=1}^{\log_2 p} \frac{p}{2^i}} \quad \forall i \in [1, (\log_2 p) - 1] \quad \alpha_p = \frac{\sum_{i=0}^{p-1} r_i}{\sum_{i=0}^{p-1} r_i + \sum_{i=1}^{\log_2 p} \frac{p}{2^i}}$$

Consideriamo le operazioni separatamente in base al numero di processori che le esegue

39

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

39

## Strategia II – Legge di Ware-Amdahl generalizzata

Per la legge di Ware-Amdahl generalizzata

$$S(p) = \frac{1}{\alpha_1 + \sum_{k=2}^p \frac{\alpha_k}{k}}$$

$\alpha_k$  frazione di operazioni eseguite da k processori

- Nel nostro caso:

Tutti gli altri sono nulli!

$$\alpha_1 = \frac{1}{49} \quad \alpha_2 = \frac{2+2}{49} \quad \alpha_4 = \frac{44}{49}$$

Dalle somme parziali iniziali

40

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

40

## Strategia II – Legge di Ware-Amdahl generalizzata

Per la legge di Ware-Amdahl generalizzata

$$S(p) = \frac{1}{\alpha_1 + \sum_{k=2}^p \frac{\alpha_k}{k}}$$

$\alpha_k$  frazione di operazioni eseguite da k processori

Tutti gli altri sono nulli!

- Nel nostro caso:

$$\alpha_1 = \frac{1}{49} = 0,02 \quad \alpha_2 = \frac{4}{49} = 0,08 \quad \alpha_4 = \frac{44}{49} = 0,9$$

41

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

41

## Strategia II – Legge di Ware-Amdahl generalizzata

Per la legge di Ware-Amdahl generalizzata

$$S(p) = \frac{1}{0,02 + \frac{0,08}{2} + \frac{0}{3} + \frac{0,9}{4}}$$

$\alpha_k$  frazione di operazioni eseguite da k processori

Tutti gli altri sono nulli!

- Nel nostro caso:

$$\alpha_1 = \frac{1}{49} = 0,02 \quad \alpha_2 = \frac{4}{49} = 0,08 \quad \alpha_4 = \frac{44}{49} = 0,9$$

42

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

42

## Strategia II – Legge di Ware-Amdahl generalizzata

Per la legge di Ware-Amdahl generalizzata

$$S(p) = \frac{1}{0,02 + \frac{0,08}{2} + \frac{0,9}{4}}$$

$\alpha_k$  frazione di operazioni eseguite da k processori

- Nel nostro caso:

Tutti gli altri sono nulli!

$$\alpha_1 = \frac{1}{49} = 0,02 \quad \alpha_2 = \frac{4}{49} = 0,08 \quad \alpha_4 = \frac{44}{49} = 0,9$$

43

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

43

## Strategia II – Legge di Ware-Amdahl generalizzata

Per la legge di Ware-Amdahl generalizzata

$$S(p) = \frac{1}{0,02 + \frac{0,08}{2} + \frac{0,9}{4}}$$

$\alpha_k$  frazione di operazioni eseguite da k processori

- Nel nostro caso:

Tutti gli altri sono nulli!

$$\alpha_1 = \frac{1}{49} = 0,02 \quad \alpha_2 = \frac{4}{49} = 0,08 \quad \alpha_4 = \frac{44}{49} = 0,9$$

**In questo caso il risultato NON corrisponde a quello trovato con la legge precedente**

44

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

Prof. G. Laccetti

44