

# Parallel and Distributed Computing

## Prodotto Matrice-Vettore

---

*Approfondimenti...*

Dalle lezioni di Calcolo Parallelo del Prof. A. Murli

1

2

## PROBLEMA: Prodotto **Matrice-Vettore**

Progettazione  
di un algoritmo parallelo  
per architettura **MIMD**  
a memoria distribuita  
per il calcolo del **prodotto**  
di una **matrice A** per un **vettore x**:

$$Ax = y, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

3

## IDEA!

**Decomposizione del problema**  
**Matrice-Vettore**



**Partizionamento della matrice A**  
**IN BLOCCHI**



**Riformulazione dell'algoritmo sequenziale**  
**"A BLOCCHI"**



**Parallelismo dell'algoritmo**  
**"A BLOCCHI"**

4

## I STRATEGIA

**Decomposizione 1**  
suddividiamo la  
matrice  $A$  in  
**BLOCCHI di RIGHE**

Prof. G. Laccetti

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

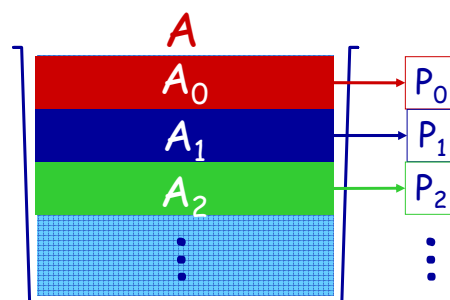
5

5

## I STRATEGIA: In generale

### I passo: decomposizione del problema

La matrice  $A$  viene distribuita  
in BLOCCHI di RIGHE  
fra  $p$  processori



Prof. G. Laccetti

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

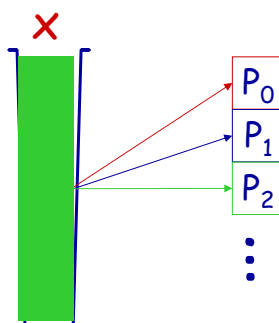
6

6

## I STRATEGIA: In generale

### I passo: decomposizione del problema

Il vettore  $x$  viene assegnato INTERAMENTE  
ai  $p$  processori



Prof. G. Laccetti

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

7

7

## I STRATEGIA: In generale

### II passo: risoluzione dei sottoproblemi

Il prodotto  $Ax=y$  viene decomposto  
in  $p$  prodotti del tipo

$$A_i \cdot x = y_i$$

Ciascun processore calcola  
un prodotto matrice vettore  
(di dimensione più piccola di quello assegnato).

Prof. G. Laccetti

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

8

8

## Domanda

Qual è l'algoritmo parallelo  
con la **I Strategia**  
di decomposizione

?

9

## Risposta

Partizionamento della matrice  
in blocchi di righe

↓  
Algoritmo a blocchi

```
begin
  for i=0 to p-1 do
     $y_i = A_i x$ 
  endfor
end
```

Algoritmo parallelo

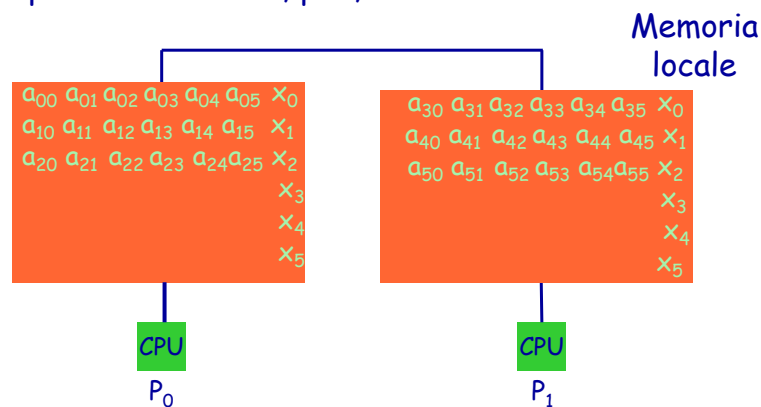
```
begin
  forall  $P_i, i=0, p-1$ 
    {  $P_i$  calcola  $y_i = A_i x$  }
  endfor
end
```

*Parallelizzazione dell'algoritmo a blocchi!*

10

## I Strategia: Distribuzione dei dati

Esempio: MIMD - DM ,  $p=2$ ,  $N=6$



Prof. G. Laccetti

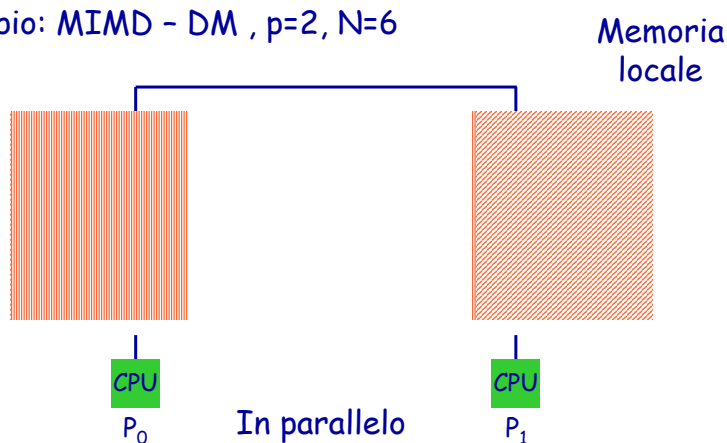
Parallel and Distributed Computing - 2023/24

11

11

## I Strategia: Fase di calcolo

Esempio: MIMD - DM ,  $p=2$ ,  $N=6$



$$\begin{array}{ll}
 a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3 + a_{04}x_4 + a_{05}x_5 & a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 \\
 a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 & a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 \\
 a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 & a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5
 \end{array}$$

Prof. G. Laccetti

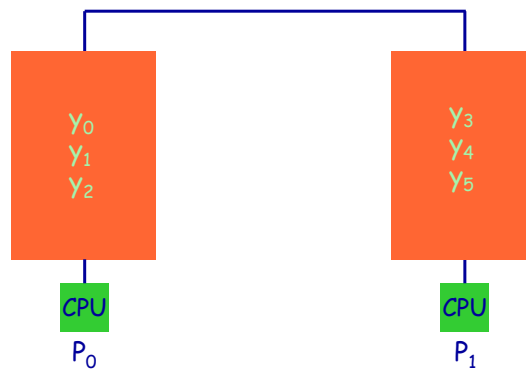
Parallel and Distributed Computing - 2023/24

12

12

## I Strategia: Risultato finale

Esempio: MIMD - DM ,  $p=2$ ,  $N=6$



### Osservazione

i processori  $P_0$  e  $P_1$  possono effettuare un'operazione collettiva di tipo "gather" riunendo i risultati parziali

Prof. G. Laccetti

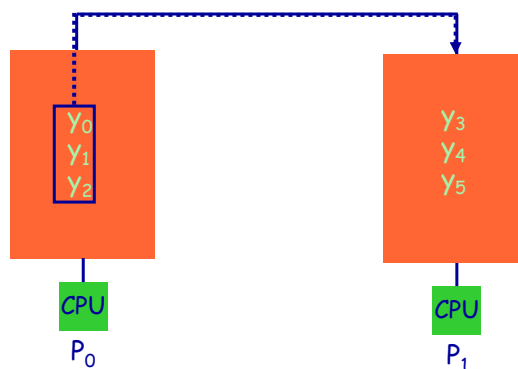
Parallel and Distributed Computing - 2023/24

13

13

## I Strategia: operazione "gather"

Esempio: MIMD - DM ,  $p=2$ ,  $N=6$



$P_0$  spedisce a  $P_1$  le componenti calcolate di  $y$

Prof. G. Laccetti

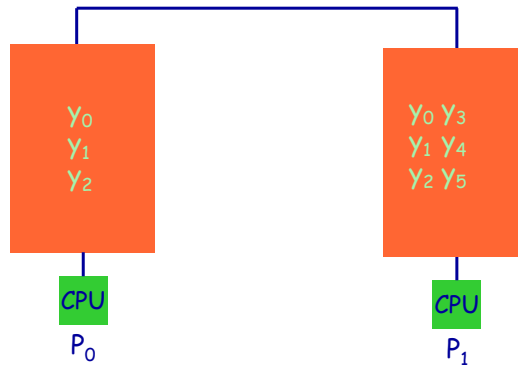
Parallel and Distributed Computing - 2023/24

14

14

## I Strategia: operazione "gather"

Esempio: MIMD - DM ,  $p=2$ ,  $N=6$



$P_1$  le riunisce in maniera opportuna

Prof. G. Laccetti

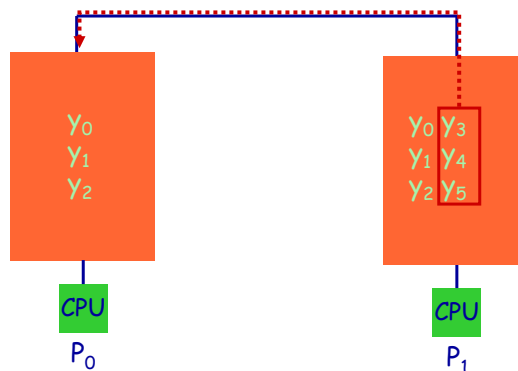
Parallel and Distributed Computing - 2023/24

15

15

## I Strategia: operazione "gather"

Esempio: MIMD - DM ,  $p=2$ ,  $N=6$



$P_1$  spedisce a  $P_0$  le componenti calcolate di  $y$

Prof. G. Laccetti

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

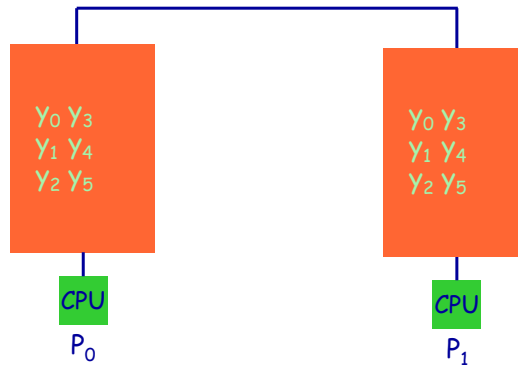
16

16



## I Strategia: operazione "gather"

Esempio: MIMD - DM ,  $p=2$ ,  $N=6$



$P_0$  le riunisce in maniera opportuna

***Entrambi i processori hanno il risultato finale!***

Prof. G. Laccetti

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

17

17

## II STRATEGIA

**Decomposizione 2**  
suddividiamo  
la matrice  $A$  in  
**BLOCCHI di COLONNE**

Prof. G. Laccetti

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

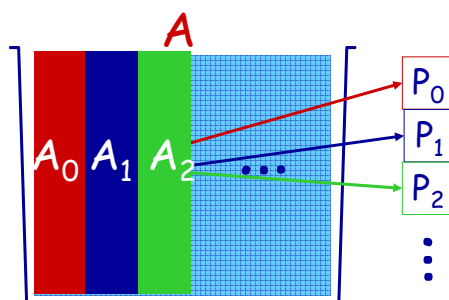
18

18

## II STRATEGIA: In generale

### I passo: decomposizione del problema

La matrice  $A$  viene distribuita  
in BLOCCHI di COLONNE  
fra  $p$  processori



Prof. G. Laccetti

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

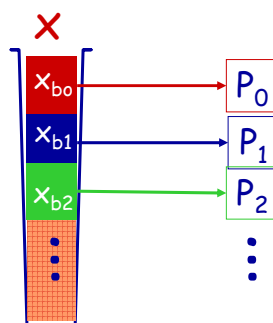
19

19

## II STRATEGIA: In generale

### I passo: decomposizione del problema

Il vettore  $x$  viene distribuito  
fra i  $p$  processori



Prof. G. Laccetti

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

20

20

## II STRATEGIA: In generale

---

### II passo: risoluzione dei sottoproblemi

Il prodotto  $Ax=y$  viene decomposto  
in  $p$  prodotti del tipo

$$A_i \cdot x_i = r_i \text{ dove } y = \sum_{i=0}^{P-1} r_i$$

Ciascun processore calcola  
un prodotto matrice vettore  
(di dimensione più piccola di quello assegnato).

Prof. G. Laccetti

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

21

21

## Domanda

---

Qual è l'algoritmo parallelo  
con la **II Strategia**  
di decomposizione

?

Prof. G. Laccetti

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

22

22

## Risposta

Partizionamento della matrice  
in blocchi di colonne



```
begin
  y=0
  for i=0 to p-1 do
     $r_i = A_i x_i$ 
     $y = y + r_i$ 
  endfor
end
```



Algoritmo parallelo

```
begin
  forall  $P_i, i=0, p-1$ 
    {  $P_i$  calcola  $r_i = A_i x_i$  }
    { combinazione degli  $r_i$  }
     $y = y + r_i$ 
  endfor
end
```

*Parallelizzazione dell'algoritmo a blocchi!*

Prof. G. Laccetti

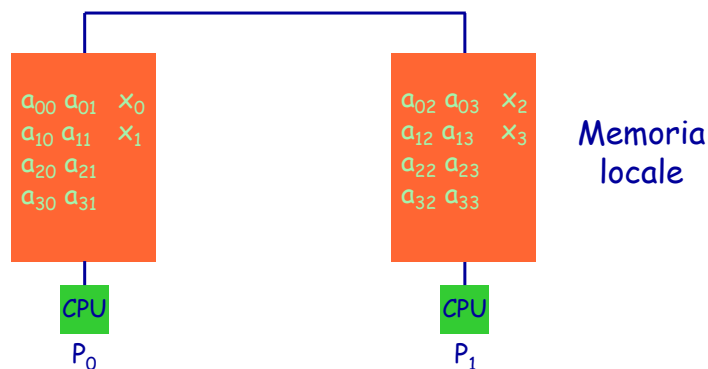
Parallel and Distributed Computing - 2023/24

23

23

## II Strategia: Distribuzione dei dati

Esempio:  $N=4, p=2$



Prof. G. Laccetti

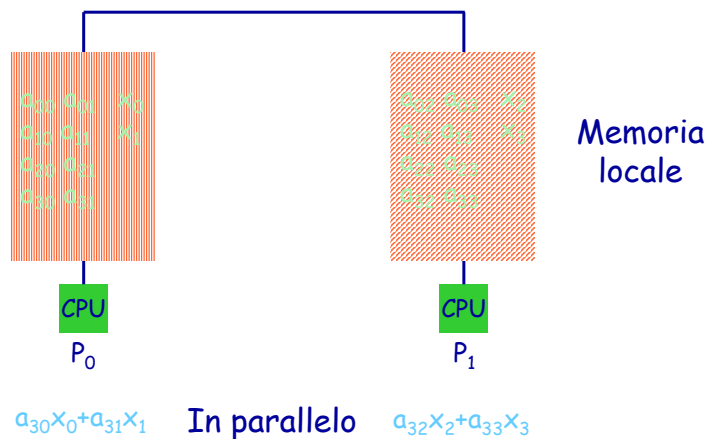
Parallel and Distributed Computing - 2023/24

24

24

## II Strategia: Fase di calcolo

Esempio:  $N=4$ ,  $p=2$



Prof. G. Laccetti

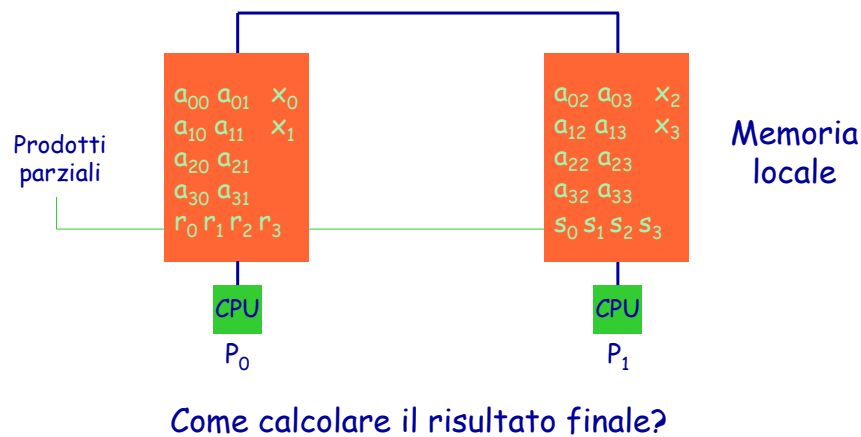
Parallel and Distributed Computing - 2023/24

25

25

## II Strategia

Esempio:  $N=4$ ,  $p=2$



Prof. G. Laccetti

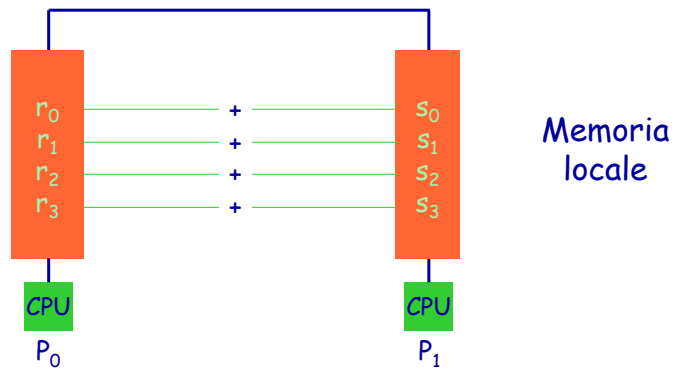
Parallel and Distributed Computing - 2023/24

26

26

## II Strategia

Esempio:  $N=4$ ,  $p=2$



si devono sommare 2 vettori distribuiti tra i 2 processori

Prof. G. Laccetti

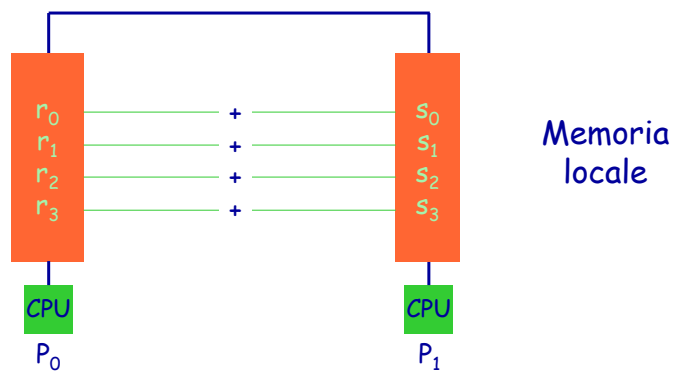
Parallel and Distributed Computing - 2023/24

27

27

## Come sommare i due vettori ?

Esempio:  $N=4$ ,  $p=2$



Prof. G. Laccetti

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

28

28

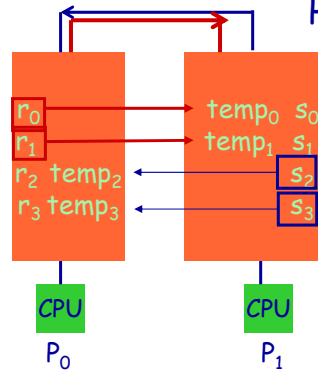
## Esempio: $N=4, p=2$

I passo

$P_0$  invia a  $P_1$   $r_0$  e  $r_1$

$P_1$  invia a  $P_0$   $s_2$  e  $s_3$

Spedizione



Calcolo in  $P_0$   $y_2 = s_2 + \text{temp}_2$   
 $y_3 = s_3 + \text{temp}_3$

Calcolo in  $P_1$   $y_0 = r_0 + \text{temp}_0$   
 $y_1 = r_1 + \text{temp}_1$

Prof. G. Laccetti

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

29

29

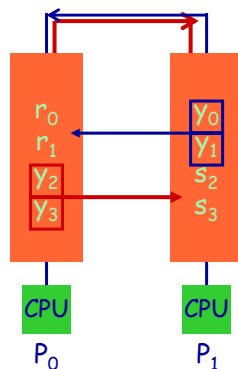
## Esempio: $N=4, p=2$

II passo

$P_0$  invia a  $P_1$   $y_2$  e  $y_3$

$P_1$  invia a  $P_0$   $y_0$  e  $y_1$

Spedizione



Al termine del II passo  
 entrambi i processori  
 hanno tutto il vettore  $y$

Prof. G. Laccetti

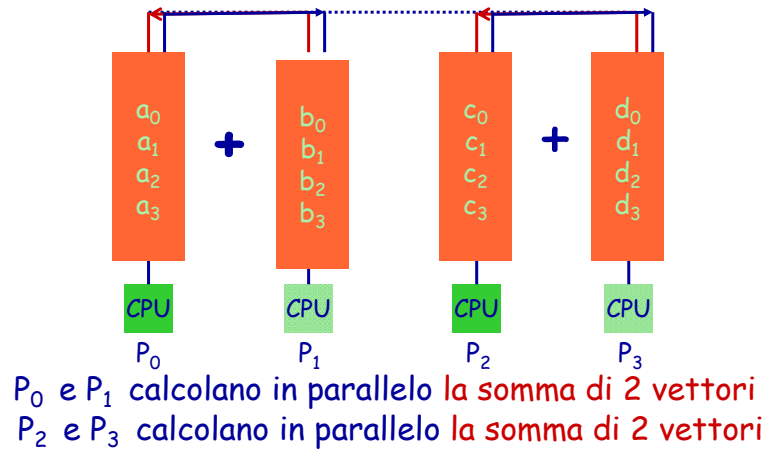
Parallel and Distributed Computing - 2023/24

30

30

## Esempio $N=4$ , $p=4$

### I passo



Prof. G. Laccetti

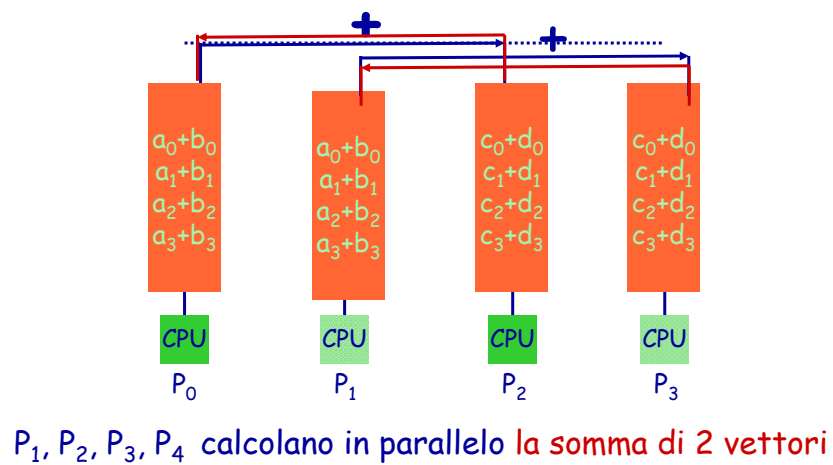
Parallel and Distributed Computing - 2023/24

31

31

## Esempio $N=4$ , $p=4$

### II passo



Prof. G. Laccetti

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

32

32



## Domanda

---

E' possibile realizzare  
un'altra decomposizione  
del problema:  
prodotto  
Matrice-Vettore  
?

33

## Risposta: SI!

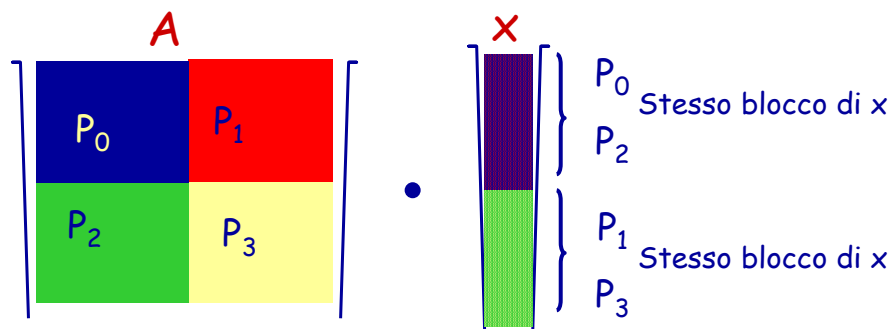
---

Decomposizione 1: BLOCCHI di RIGHE  
+  
Decomposizione 2: BLOCCHI di COLONNE  
=  
Decomposizione 3: BLOCCHI QUADRATI

34

### III Strategia: Esempio (4 processori)

Distribuzione della matrice  $A$  per blocchi quadrati



Distribuzione del vettore  $x$  fra i processori

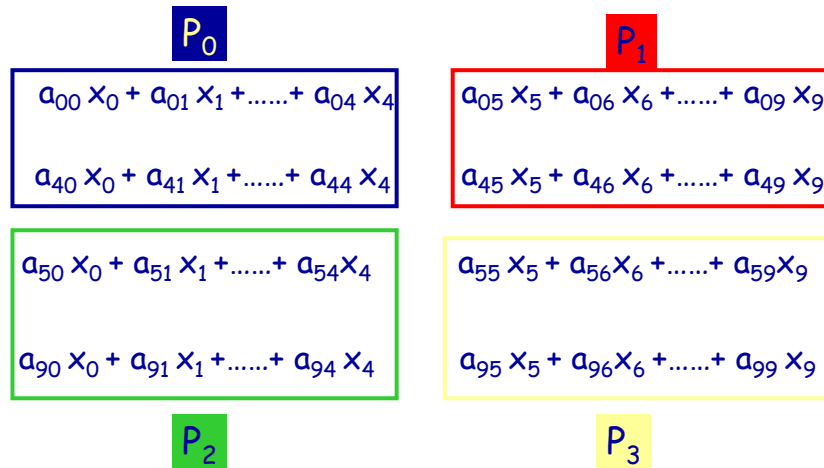
35

### Domanda

Ciascun processore  
quale "parte" di  $y$   
calcola  
?

36

## Esempio $N = 10$ , Processori=4



Calcolo dei prodotti parziali

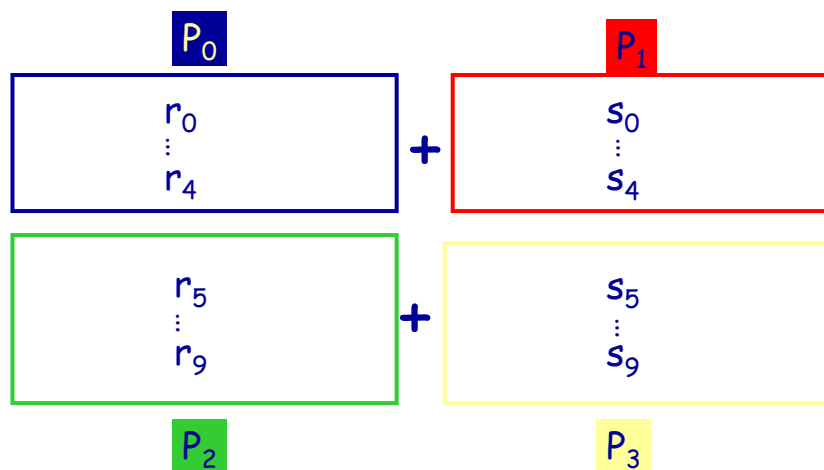
Prof. G. Laccetti

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

37

37

## Esempio $N = 10$ , $P=4$



Comunicazione: somma in parallelo

Prof. G. Laccetti

Parallel and Distributed Computing - 2023/24

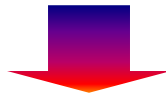
38

38

### III strategia: sintesi

---

Ciascun processore calcola  
**somme parziali**  
di alcune componenti del vettore  $y$



I processori devono **sommare** i risultati parziali  
e **scambiarsi** le componenti  
per avere il risultato finale,  $y$

---

FINE APPROFONDIMENTO....