

ELABORATO 2 - PRODOTTO MATRICE VETTORE PER RIGHE

LO BRUTTO FABIO / MAIONE PAOLO

DEFINIZIONE DEL PROBLEMA

Si vuole progettare un algoritmo in MPI per risolvere il prodotto vettoriale tra una matrice, di dimensioni $M \times N$, e un vettore di reali, di dimensione N , su p processori.

In particolare si utilizza l'infrastruttura S.C.o.P.E. per permettere l'esecuzione del software in un ambiente parallelo.

DESCRIZIONE DELL'ALGORITMO

In particolare le fasi dell'algoritmo, implementato nel file `elaborato_2.c`, sono:

- 1) Distribuzione per righe della matrice in p processori e distribuzione del vettore: ognuno dei p processori eseguirà il prodotto vettoriale tra la porzione di matrice ricevuta dal processo *root* (cioè quello con rank 0), e il vettore;
- 2) Elaborazione del prodotto vettoriale in parallelo ;
- 3) Aggregazione del vettore calcolata nel processo *root* che determinerà il risultato finale.

A tal proposito sono state utilizzate le primitive fornite da MPI (rispettivamente per la prima fase `MPI_Scatterv()` e per la terza `MPI_Gatherv()`).

Inoltre l'algoritmo progettato comprende anche il caso in cui la dimensione M (cioè il numero di righe della matrice) non sia multipla del numero di processori p a disposizione.

Si è scelto di misurare i tempi di esecuzione nel processo di rank 0 usando la primitiva `MPI_Wtime()` tra la fase 2 e la fase 3 scegliendo il minimo tra 3 misurazioni ripetute.

Infine, si osservi che i controlli di robustezza del software sono stati interamente delegati al processo *root*.

INPUT, OUTPUT E CONDIZIONI DI ERRORE

- **Input:** la matrice e il vettore di cui effettuare il prodotto vettoriale, le loro dimensioni M , N e `dim_vett`.
- **Output:** il vettore risultato dell'prodotto vettoriale tra la matrice e il vettore.

- **Condizioni di errore:** la dimensione delle righe della matrice deve essere uguale al numero di colonne del vettore e devono essere interi positivi. Il numero di righe della matrice non deve essere minore del numero di processori.

ESEMPIO DI FUNZIONAMENTO

Nell'immagine seguente vi è un esempio di funzionamento, con 4 processori, matrice di dimensione 7x8 e dimensione del vettore pari a 7 .

```
%esempio di funzionamento
funzionamento

Esempio di funzionamento con 4 processori e dimensione della matrice 7x8
[M63000769@ui-studenti:~/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe]$ cat elaborato_2.out
100 This job is allocated on 4 cpu(s)
Job is running on node(s):
wn273.scope.unina.it
wn273.scope.unina.it
wn273.scope.unina.it
wn273.scope.unina.it
-----
PBS: qsub is running on ui-studenti.scope.unina.it
PBS: originating queue is studenti
PBS: executing queue is studenti
PBS: working directory is /homes/DIS/CALCPAR/2019/M63000769/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe
PBS: execution mode is PBS BATCH
PBS: job identifier is 3921589.torque02.scope.unina.it
PBS: job name is elaborato_2
PBS: node file is /var/spool/pbs/aux//3921589.torque02.scope.unina.it
PBS: current home directory is /homes/DIS/CALCPAR/2019/M63000769
500 PATH = /usr/lib64/openmpi/1.2.7-gcc/bin:/usr/kerberos/bin:/opt/exp_soft/unina.it/intel/composer_xe_2019_sp1.3.174/bin/intel64:/opt/exp_soft/unina.it/intel/composer_xe_2019_sp1.3.174/bin/intel64:/opt/exp_soft/unina.it/intel/composer_xe_2019_sp1.3.174/bin/intel64_mic:/opt/exp_soft/unina.it/intel/composer_xe_2019_sp1.3.174/debu
gger/gui:/lib64:/opt/d-cache/srm/bin:/opt/d-cache/dcap/bin:/opt/edg/bin:/opt/glite/bin:/opt/globus/bin:/opt/lcg/bin:/usr/local/bin/bi
n:/usr/bin:/opt/exp_soft/HADOOP/hadoop-1.0.3/bin:/opt/exp_soft/unina.it/intel/composerxe/bin/intel64:/opt/exp_soft/unina.it/MRJExpress
/mpj-v0_39/bin:/homes/DIS/CALCPAR/2019/M63000769/bin
Esegue: /usr/lib64/openmpi/1.4-gcc/bin/mpicc -o /homes/DIS/CALCPAR/2019/M63000769/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe/
elaborato_2 /homes/DIS/CALCPAR/2019/M63000769/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe/elaborato_2.c
Esegue: /usr/lib64/openmpi/1.4-gcc/bin/mplexec -machinefile /var/spool/pbs/aux//3921589.torque02.scope.unina.it -np 4 /homes/DIS/CALCPAR/2019/M63000769/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe/elaborato_2
Ciao sono il processo 1 e mi chiamo wn273.scope.unina.it
Ciao sono il processo 0 e mi chiamo wn273.scope.unina.it
800 Ciao sono il processo 2 e mi chiamo wn273.scope.unina.it
Ciao sono il processo 3 e mi chiamo wn273.scope.unina.it
Sono il processo 0. Il vettore risultato di 7 colonne è :
Stampa array del processo 0: 0.000000 16.000000 24.000000 32.000000 40.000000 48.000000 56.000000
900 Sono il processo 0: tempo di esecuzione totale di 0.00001711661376953 secondi.
[M63000769@ui-studenti:~/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe]$
[M63000769@ui-studenti:~/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe]$
[M63000769@ui-studenti:~/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe]$

1000 [M63000769@ui-studenti:~/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe]$
```

ESEMPI DI ERRORE

Nelle successivi immagini, invece, sono mostrati i messaggi di errore al verificarsi delle condizioni sopra citate.

%un esempio per ciascuna condizione di errore
errori

Errore: le dimensioni devono essere valori interi

```
[M63000769@ui-studenti:~/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe]$ cat elaborato_2.out
-----
100  This job is allocated on 4 cpu(s)
Job is running on node(s):
wn273.scope.unina.it
200  wn273.scope.unina.it
wn273.scope.unina.it
wn273.scope.unina.it
wn273.scope.unina.it
-----
300  PBS: qsub is running on ui-studenti.scope.unina.it
PBS: originating queue is studenti
PBS: executing queue is studenti
PBS: working directory is /homes/DIS/CALCPAR/2019/M63000769/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe
400  PBS: execution mode is PBS_BATCH
PBS: job identifier is 3921661.torque02.scope.unina.it
PBS: job name is elaborato_2
PBS: node file is /var/spool/pbs/aux/3921661.torque02.scope.unina.it
PBS: current home directory is /homes/DIS/CALCPAR/2019/M63000769
500  PBS: PATH = /usr/lib64/openmpi/1.2-gcc/bin:/usr/kerberos/bin:/opt/exp_soft/unina.it/intel/composer_xe_2013_sp1.3.174/bin/intel64:/opt/exp_soft/unina.it/intel/composer_xe_2013_sp1.3.174/mpir/bin/intel64:/opt/exp_soft/unina.it/intel/composer_xe_2013_sp1.3.174/bin/intel64:/opt/exp_soft/unina.it/intel/composer_xe_2013_sp1.3.174/debugger/gui/intel64:/opt/d-cache/srm/bin:/opt/d-cache/dcapp/bin:/opt/edg/bin:/opt/globus/bin:/opt/lcg/bin:/usr/local/bin/bin:/usr/bin:/opt/exp_soft/HADOOP/hadoop-1.0.3/bin:/opt/exp_soft/unina.it/intel/composerxe/bin/intel64:/opt/exp_soft/unina.it/MPIExpress/mpj-v0_38/bin:/homes/DIS/CALCPAR/2019/M63000769/bin
-----
600  Esegue: /usr/lib64/openmpi/1.2-gcc/bin/mpicc -o /homes/DIS/CALCPAR/2019/M63000769/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe/elaborato_2 /homes/DIS/CALCPAR/2019/M63000769/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe/elaborato_2.c
Esegue: /usr/lib64/openmpi/1.2-gcc/bin/mplexec -machinefile /var/spool/pbs/aux/3921661.torque02.scope.unina.it -np 4 /homes/DIS/CALCPAR/2019/M63000769/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe/elaborato_2
Errore! Le dimensioni della matrice e del vettore devono essere valori interi
700  [M63000769@ui-studenti prodotto_matrice_vettore_righe]$
1000 [M63000769@ui-studenti prodotto_matrice_vettore_righe]$
```

Errore: le dimensioni dei dati di input non sono valori positivi

```
[M63000769@ui-studenti:~/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe]$ cat elaborato_2.out
-----
100  This job is allocated on 4 cpu(s)
Job is running on node(s):
wn273.scope.unina.it
200  wn273.scope.unina.it
wn273.scope.unina.it
wn273.scope.unina.it
-----
300  PBS: qsub is running on ui-studenti.scope.unina.it
PBS: originating queue is studenti
PBS: executing queue is studenti
PBS: working directory is /homes/DIS/CALCPAR/2019/M63000769/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe
400  PBS: execution mode is PBS_BATCH
PBS: job identifier is 3921624.torque02.scope.unina.it
PBS: job name is elaborato_2
PBS: node file is /var/spool/pbs/aux/3921624.torque02.scope.unina.it
PBS: current home directory is /homes/DIS/CALCPAR/2019/M63000769
500  PBS: PATH = /usr/lib64/openmpi/1.2-gcc/bin:/usr/kerberos/bin:/opt/exp_soft/unina.it/intel/composer_xe_2013_sp1.3.174/bin/intel64:/opt/exp_soft/unina.it/intel/composer_xe_2013_sp1.3.174/mpir/bin/intel64:/opt/exp_soft/unina.it/intel/composer_xe_2013_sp1.3.174/bin/intel64_mic:/opt/exp_soft/unina.it/intel/composer_xe_2013_sp1.3.174/debugger/gui/intel64:/opt/d-cache/srm/bin:/opt/d-cache/dcapp/bin:/opt/edg/bin:/opt/globus/bin:/opt/lcg/bin:/usr/local/bin/bin:/usr/bin:/opt/exp_soft/HADOOP/hadoop-1.0.3/bin:/opt/exp_soft/unina.it/intel/composerxe/bin/intel64:/opt/exp_soft/unina.it/MPIExpress/mpj-v0_38/bin:/homes/DIS/CALCPAR/2019/M63000769/bin
-----
600  Esegue: /usr/lib64/openmpi/1.2-gcc/bin/mpicc -o /homes/DIS/CALCPAR/2019/M63000769/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe/elaborato_2 /homes/DIS/CALCPAR/2019/M63000769/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe/elaborato_2.c
Esegue: /usr/lib64/openmpi/1.2-gcc/bin/mplexec -machinefile /var/spool/pbs/aux/3921624.torque02.scope.unina.it -np 4 /homes/DIS/CALCPAR/2019/M63000769/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe/elaborato_2
Errore! Le dimensioni dei dati di input non sono valori positivi.
700  [M63000769@ui-studenti prodotto_matrice_vettore_righe]$
1000 [M63000769@ui-studenti prodotto_matrice_vettore_righe]$
```

Errore: la dimensione di riga della matrice è inferiore al numero di processori

```
[M63000769@ui-studenti:~/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe]$ cat elaborato_2.out
-----
100  This job is allocated on 8 cpu(s)
Job is running on node(s):
wn273.scope.unina.it
wn273.scope.unina.it
wn273.scope.unina.it
wn273.scope.unina.it
wn273.scope.unina.it
wn273.scope.unina.it
wn273.scope.unina.it
wn273.scope.unina.it
-----
200
300
400
500
600
700
800
900
1000

PBS: qsub is running on ui-studenti.scope.unina.it
PBS: originating queue is studenti
PBS: executing queue is studenti
PBS: working directory is /homes/DIS/CALCPAR/2019/M63000769/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe
PBS: execution mode is PBS BATCH
PBS: job identifier is 3921640.torque02.scope.unina.it
PBS: job name is elaborato_2
PBS: node file is /var/spool/pbs/aux//3921640.torque02.scope.unina.it
PBS: current home directory is /homes/DIS/CALCPAR/2019/M63000769
PBS: PATH = /usr/lib64/openmpi/1.4-gcc/bin/mpicc /usr/kerberos/bin/opt/exp_soft/unina.it/intel/composer_xe_2013_sp1.3.174/bin/intel64:/opt/exp_soft/unina.it/intel/composer_xe_2013_sp1.3.174/mpirun/bin/intel64:/opt/exp_soft/unina.it/intel/composer_xe_2013_sp1.3.174/bin/intel64_mic:/opt/exp_soft/unina.it/intel/composer_xe_2013_sp1.3.174/debugger/gui/intel64:/opt/d-cache/sim/bin:/opt/d-cache/dcapp/bin:/opt/eddy/bin:/opt/glibe/bin:/opt/globus/bin:/opt/leg/bin:/usr/local/bin:/bin:/usr/bin:/opt/exp_soft/HADOOP/hadoop-0.3/bin:/opt/exp_soft/unina.it/intel/composerxe/bin/intel64:/opt/exp_soft/unina.it/MPJExpress/mpj-v0_38/bin:/homes/DIS/CALCPAR/2019/M63000769/bin
Esegue: /usr/lib64/openmpi/1.4-gcc/bin/mpicc -o /homes/DIS/CALCPAR/2019/M63000769/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe/elaborato_2
Esegue: /usr/lib64/openmpi/1.4-gcc/bin/mpieexec -machinefile /var/spool/pbs/aux//3921640.torque02.scope.unina.it -np 8 /homes/DIS/CALCPAR/2019/M63000769/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe/elaborato_2
Errore! La dimensione di riga della matrice è inferiore al numero di processori.
[M63000769@ui-studenti:~/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe]$ [M63000769@ui-studenti:~/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe]$ [M63000769@ui-studenti:~/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe]$ [M63000769@ui-studenti:~/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe]$ [M63000769@ui-studenti:~/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe]$ [M63000769@ui-studenti:~/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe]$
```

Errore: le dimensioni non sono coerenti

```
[M63000769@ui-studenti:~/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe]$ cat elaborato_2.out
-----
100  This job is allocated on 4 cpu(s)
Job is running on node(s):
wn273.scope.unina.it
wn273.scope.unina.it
wn273.scope.unina.it
wn273.scope.unina.it
-----
200
300
400
500
600
700
800
900
1000

PBS: qsub is running on ui-studenti.scope.unina.it
PBS: originating queue is studenti
PBS: executing queue is studenti
PBS: working directory is /homes/DIS/CALCPAR/2019/M63000769/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe
PBS: execution mode is PBS BATCH
PBS: job identifier is 3921659.torque02.scope.unina.it
PBS: job name is elaborato_2
PBS: node file is /var/spool/pbs/aux//3921659.torque02.scope.unina.it
PBS: current home directory is /homes/DIS/CALCPAR/2019/M63000769
PBS: PATH = /usr/lib64/openmpi/1.4-gcc/bin/mpicc /usr/kerberos/bin/opt/exp_soft/unina.it/intel/composer_xe_2013_sp1.3.174/bin/intel64:/opt/exp_soft/unina.it/intel/composer_xe_2013_sp1.3.174/mpirun/bin/intel64:/opt/exp_soft/unina.it/intel/composer_xe_2013_sp1.3.174/bin/intel64_mic:/opt/exp_soft/unina.it/intel/composer_xe_2013_sp1.3.174/debugger/gui/intel64:/opt/d-cache/sim/bin:/opt/d-cache/dcapp/bin:/opt/eddy/bin:/opt/glibe/bin:/opt/globus/bin:/opt/leg/bin:/usr/local/bin:/bin:/usr/bin:/opt/exp_soft/HADOOP/hadoop-0.3/bin:/opt/exp_soft/unina.it/intel/composerxe/bin/intel64:/opt/exp_soft/unina.it/MPJExpress/mpj-v0_38/bin:/homes/DIS/CALCPAR/2019/M63000769/bin
Esegue: /usr/lib64/openmpi/1.4-gcc/bin/mpicc -o /homes/DIS/CALCPAR/2019/M63000769/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe/elaborato_2
Esegue: /usr/lib64/openmpi/1.4-gcc/bin/mpieexec -machinefile /var/spool/pbs/aux//3921659.torque02.scope.unina.it -np 4 /homes/DIS/CALCPAR/2019/M63000769/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe/elaborato_2
Errore! Le dimensioni non sono coerenti
[M63000769@ui-studenti:~/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe]$ [M63000769@ui-studenti:~/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe]$ [M63000769@ui-studenti:~/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe]$ [M63000769@ui-studenti:~/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe]$ [M63000769@ui-studenti:~/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe]$ [M63000769@ui-studenti:~/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe]$ [M63000769@ui-studenti:~/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe]$ [M63000769@ui-studenti:~/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe]$ [M63000769@ui-studenti:~/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe]$ [M63000769@ui-studenti:~/elaborati/elaborato_2/prodotto_matrice_vettore_righe]$
```

ANALISI DELLE PRESTAZIONI (T(p), S(p), E(p))

Tempo di esecuzione - T(p)

Si è scelto di misurare i tempi di esecuzione nel processo *root* usando la primitiva `MPI_Wtime()`. In particolare l'intervallo di tempo misurato è quello che comprende le fasi 2 e 3 dell'algoritmo prima citate.

Si è scelto inoltre di considerare tre casi diversi che rappresentano le tre possibilità per le dimensioni della matrice: il caso in cui il numero di righe è maggiore numero di colonne, il caso in cui il numero di righe è minore del numero di colonne ed, infine, il caso in cui la matrice è quadrata.

Per ciascuno di questi tre casi è stato considerato il minimo tra 3 esecuzioni ripetute, eseguite in momenti diversi ed in particolare:

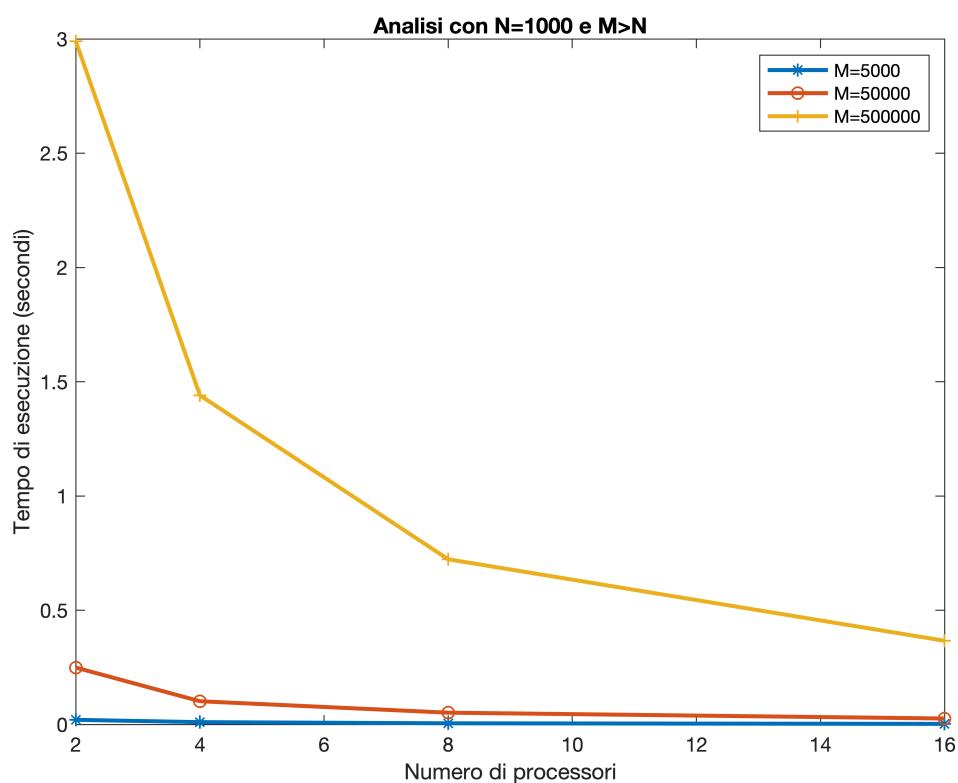
- quando il numero di righe M è maggiore del numero di colonne N si fa variare M da 5000 a 50000 con N fissato a 1000
- quando il numero di righe M è minore del numero di colonne N si fa variare N da 5000 a 50000 con M fissato a 1000
- quando la matrice è quadrata si fa variare M=N da 100 a 10000

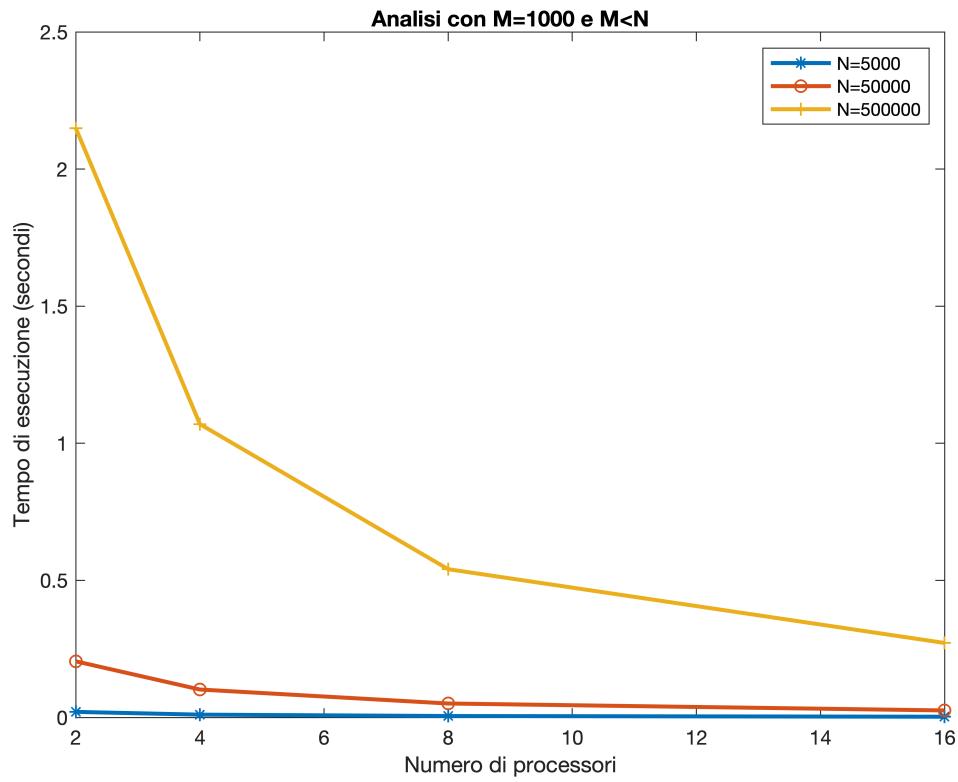
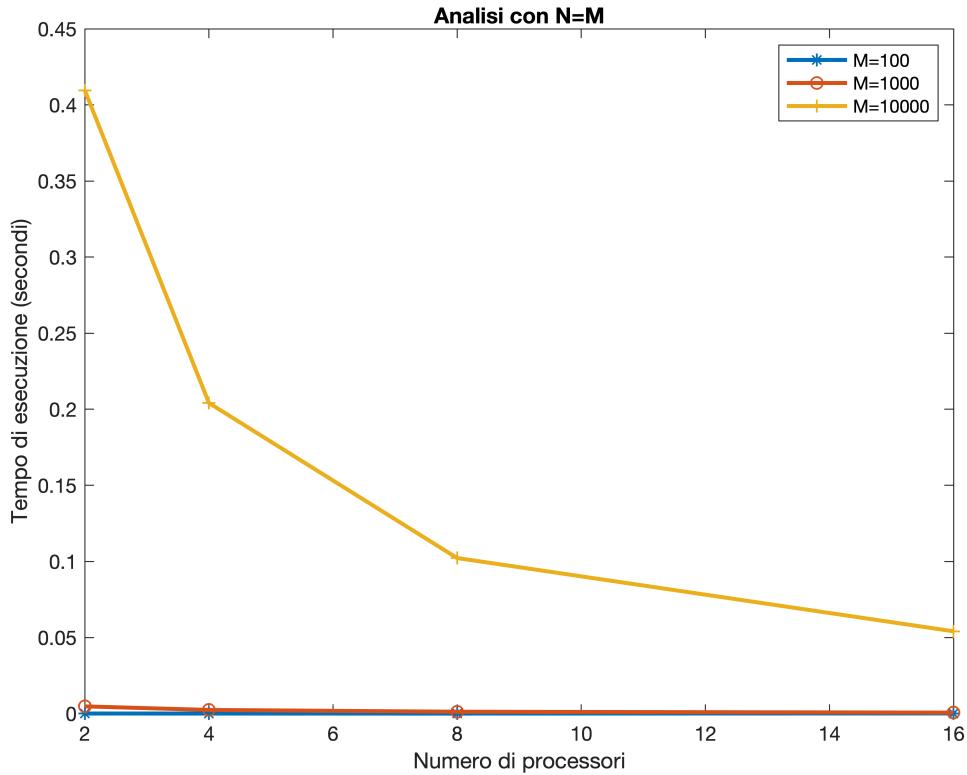
Si noti che nel caso di matrici quadrate si è scelta una diversa configurazione rispetto al caso di matrici sbilanciate data l'impossibilità di eseguire sul cluster il programma con dimensioni 50000 x 50000. Pertanto è parso ragionevole, solo nel caso di matrici quadrate, ridurre la dimensione massima.

I grafici e le tabelle riassumono i risultati ottenuti per tutti i possibili valori di M,N e p.

```
%esecuzione script per tabelle e grafici  
tempi
```

Tempi			
PROVA M>N	N=1000		
	5000	50000	500000
2	0,0203859806060791	0,2491139984130850	2,989853954315180
4	0,0102760791778564	0,1017658710479730	1,440534114837640
8	0,0051968097686768	0,0517168045043945	0,723032951354980
16	0,0026328563690186	0,0261680355072021	0,366197824478149
PROVA M=N			
	100	1000	10000
2	0,0000529289245605	0,0047409534454346	0,409604787826538
4	0,0000331401824951	0,0024030208587646	0,204131841659545
8	0,0000200271606445	0,0012221336364746	0,102236032485961
16	0,0001120567321777	0,0006400316619873	0,054082134246826
PROVA M<N	M=1000		
	5000	50000	500000
2	0,0204110145568848	0,204815864562988	2,149081993103020
4	0,0103540420532227	0,101985931396484	1,069822072982780
8	0,0053629543304443	0,051028013229370	0,540822982788085
16	0,0028011466979980	0,025714159011841	0,271781930923461





Per considerazioni più di dettaglio su questi risultati si rimanda alla sezione Conclusioni.

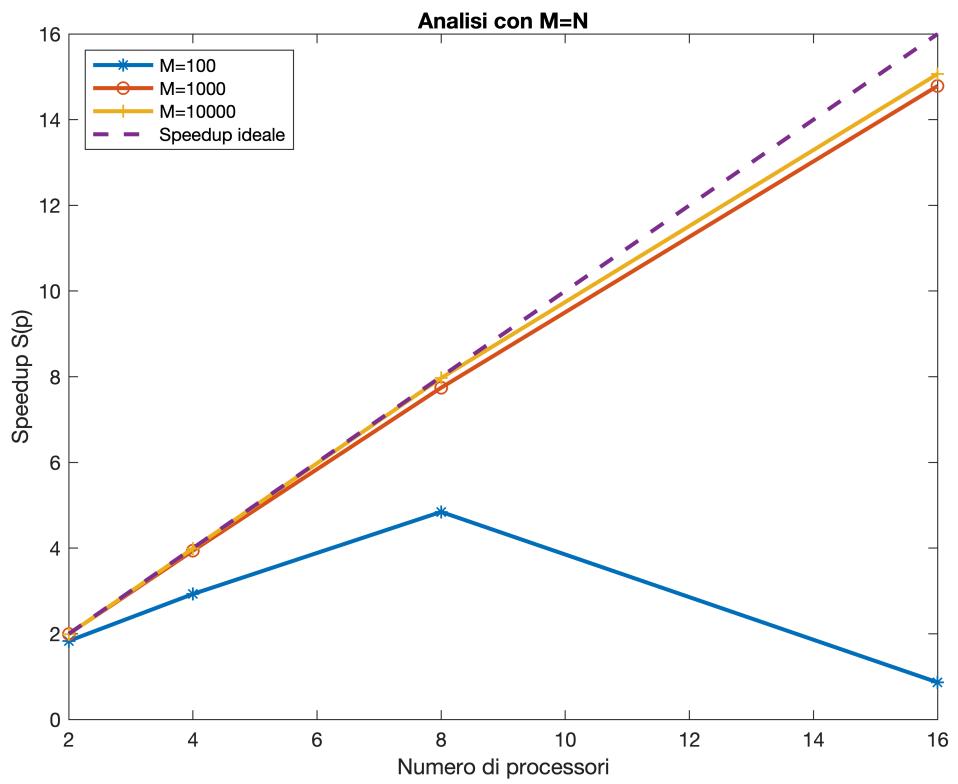
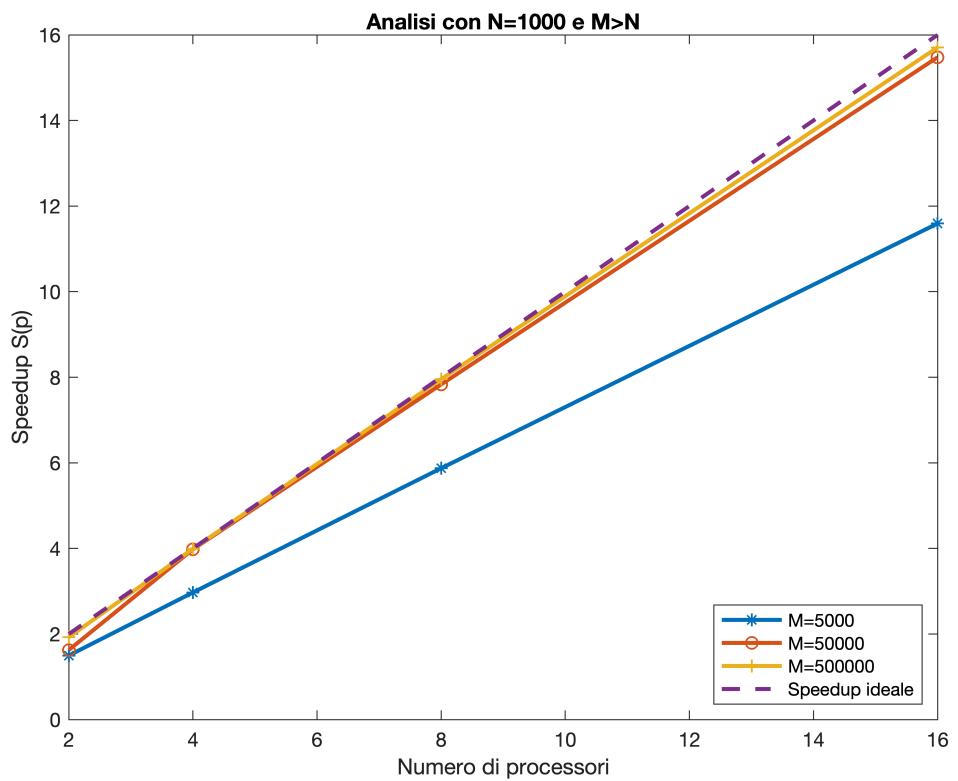
Speed up ed Efficienza - S(p) ed E(p)

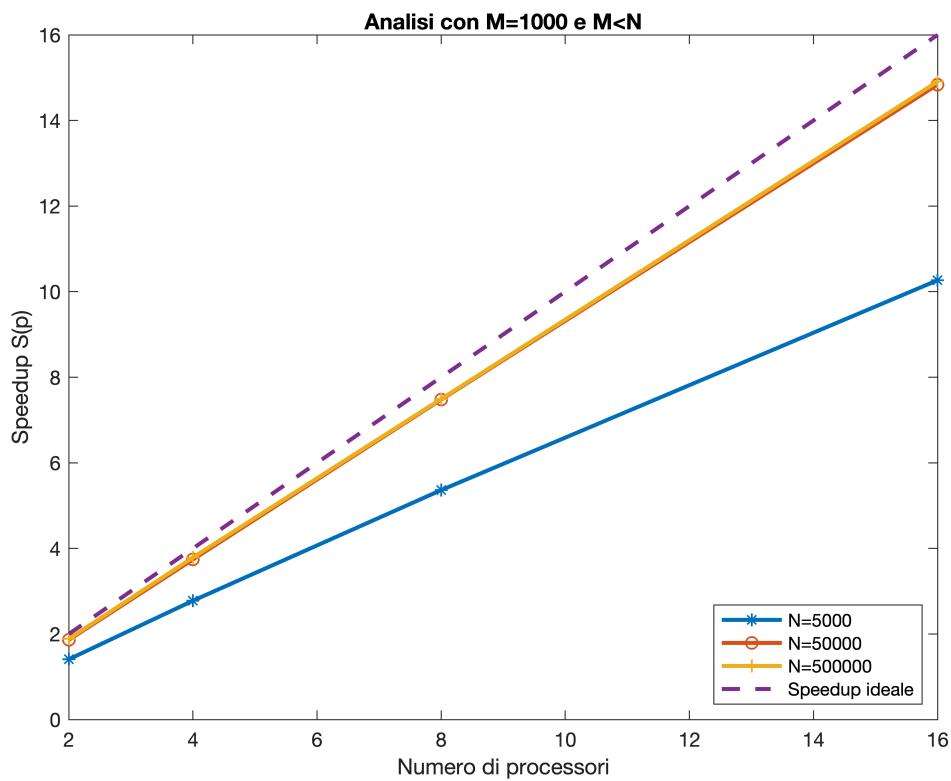
Si è calcolato, inoltre, il tempo di riferimento $T(1)$ che corrisponde al tempo di esecuzione su un unico processore.

A partire dai tempi misurati nella sezione precedente e da $T(1)$ è stato calcolato lo speed-up al variare di M , N e p .

```
%esecuzione script per tabelle e grafici  
speedup
```

		Speed up		
PROVA M>N		N=1000		
		5000	50000	500000
2		1,4972	1,6258	1,9238
4		2,9701	3,9799	3,9929
8		5,8731	7,8315	7,9553
16		11,5924	15,4776	15,7071
PROVA M=N				
		100	1000	10000
2		1,8333	1,9962	1,9892
4		2,9281	3,9384	3,9914
8		4,8452	7,7439	7,9695
16		0,8660	14,7868	15,0655
PROVA M<N		M=1000		
		5000	50000	500000
2		1,4090	1,8629	1,8855
4		2,7775	3,7413	3,7876
8		5,3624	7,4774	7,4924
16		10,2666	14,8384	14,9093

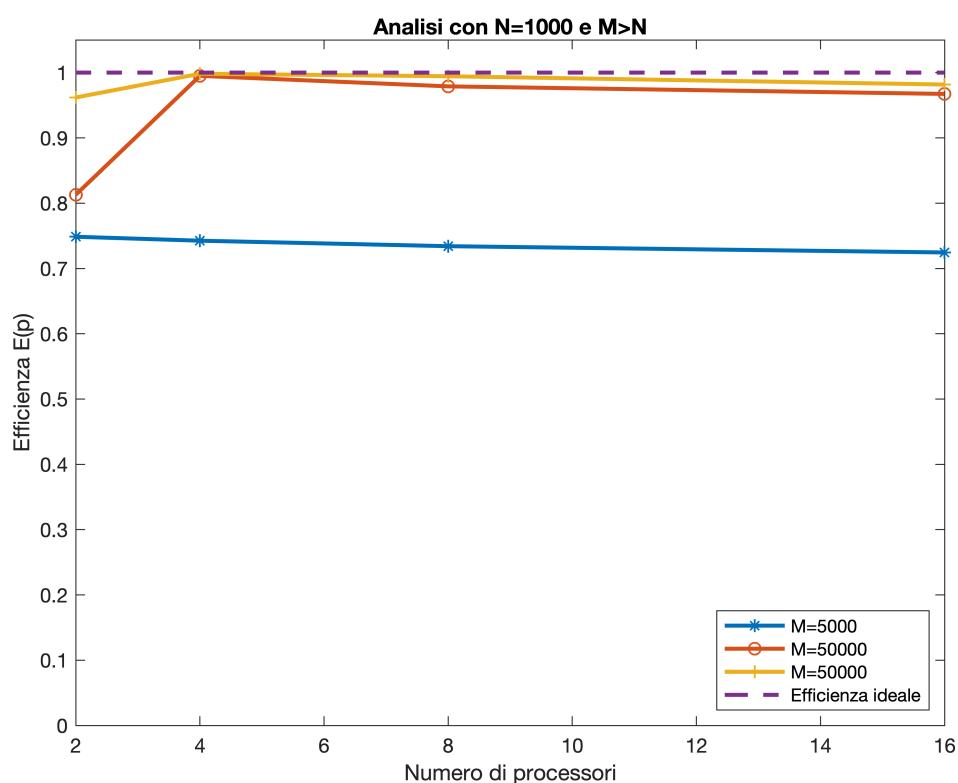


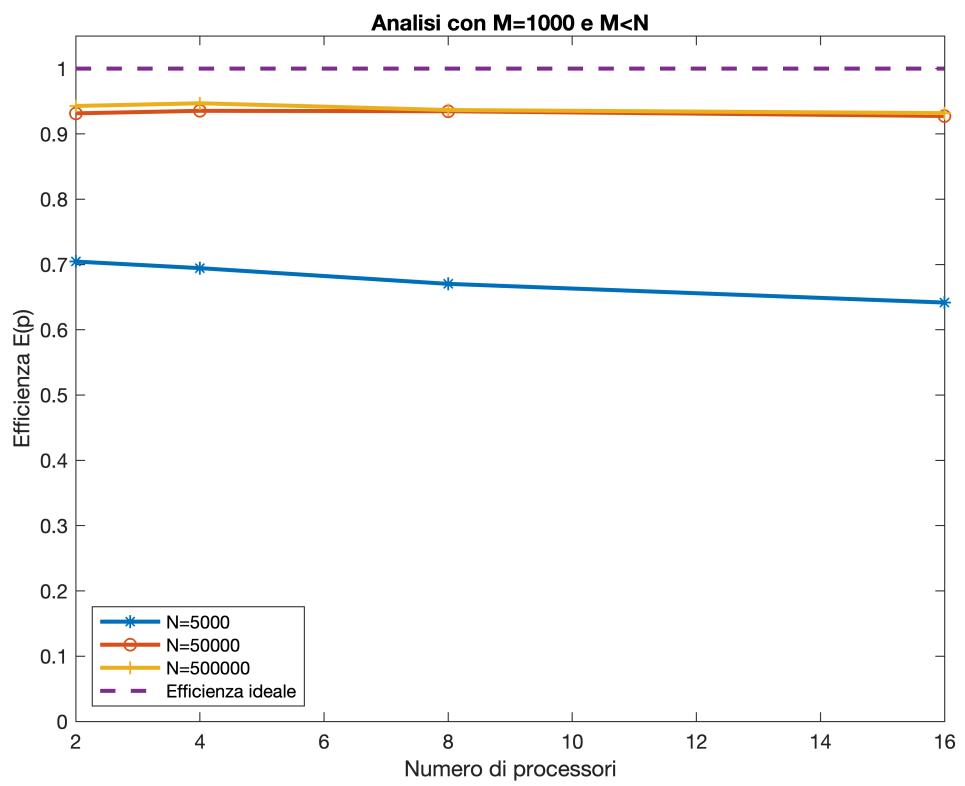
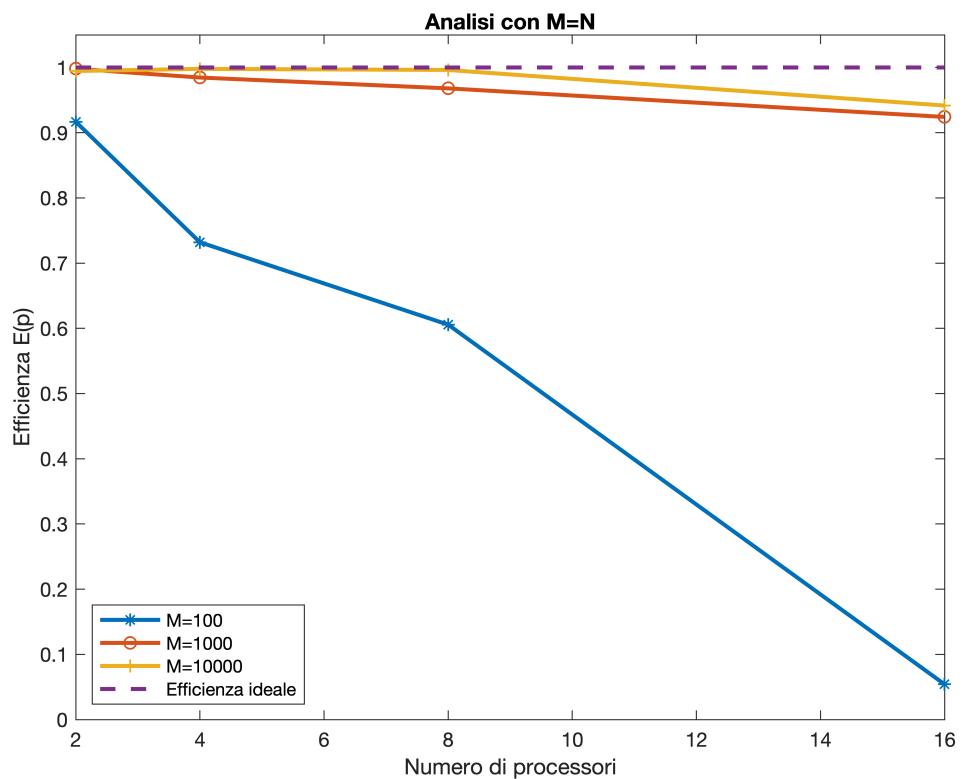


Infine si è calcolata l'efficienza rapportando lo speed-up $S(p)$ al numero di processori p .

```
%esecuzione script per tabelle e grafici
efficienza
```

Efficienza			
PROVA M>N		N=1000	
		5000	50000
2		0,7486	0,8129
4		0,7425	0,9950
8		0,7341	0,9789
16		0,7245	0,9674
PROVA M=N			
		100	1000
2		0,9167	0,9981
4		0,7320	0,9846
8		0,6057	0,9680
16		0,0541	0,9242
PROVA M<N			
M=1000			
		5000	50000
2		0,7045	0,9315
4		0,6944	0,9353
8		0,6703	0,9347
16		0,6417	0,9274





Conclusioni

Dai grafici e dalle tabelle appena presentate si possono trarre considerazioni diverse nei tre casi prima citati:

- se $M>N$ o $M<N$ l'efficienza migliore si ha per 2 processori quando $M=5000$. Se $M=50000$ o 500000 invece il numero ottimo di processori risulta pari a 4. Tuttavia l'efficienza risulta complessivamente maggiore nella configurazione in cui $M>N$.
- se $M=N$ l'efficienza migliore si ha per 2 processori per M fino a 1000 mentre è 4 quando $M=10000$. In particolare si osservi che per $M=100$ l'efficienza degrada rapidamente all'aumentare del numero di processori date le dimensioni ridotte.

Si possono fare ulteriori considerazioni notando che, per una dimensione fissata, l'efficienza peggiora dopo un certo valore di p (ciò verifica sperimentalmente la legge di Amdahl), e che, in generale, all'aumentare sia della dimensione del problema che di p , l'efficienza migliora o non peggiora come nel caso di $M=N$ (verificando la legge di Gustafson).

Analoghe considerazioni per i tempi e lo speedup.

ANALISI DELL' ACCURATEZZA

Confrontando il risultato ottenuto sul cluster Scope e quello ottenuto su MATLAB si ottiene il seguente errore relativo (tramite il comando `norm`) , fissando a 4 il numero di processori con dimensione della matrice pari a 7×8 .

```
%esecuzione script per i test di accuratezza  
accuratezza
```

```
risultato_scope = 7x1  
102 ×  
0.251327412287183  
0.502654824574366  
0.753982236861550  
1.005309649148730  
1.256637061435910  
1.507964473723100  
1.759291886010280  
risultato_matlab = 7x1  
102 ×  
0.251327412287183  
0.502654824574367  
0.753982236861550  
1.005309649148734  
1.256637061435917  
1.507964473723100  
1.759291886010284  
errore_relativo =
```

3.210969507161735e-15