



**CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNÓLOGICA DE MINAS GERAIS**

**Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação**

**Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica**

**DISSERTAÇÃO**

**FÁBIO MORAIS DE ANDRADE**

**OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL EVOLUCIONÁRIA EM  
ESTRUTURAS DE ABSORÇÃO DE ENERGIA**

Belo Horizonte  
2022

Fábio Morais de Andrade

**Modelo Folha de Rosto:**

**Otimização Estrutural Evolucionária em Estruturas de Absorção de Energia**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação  
em Engenharia Mecânica do Centro Federal de Educação  
Tecnológica de Minas Gerais como requisito parcial para a  
obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

**Orientador: Profº. Drº. Cristina Almeida Magalhães**

**Linha de Pesquisa:** Eficiência em Sistemas e Processos  
Mecânicos

Belo Horizonte  
2022

Fábio Morais de Andrade

Otimização Estrutural Evolucionária em Estruturas de Absorção de Energia

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

**Linha de Pesquisa:** Eficiência em Sistemas e  
Processos Mecânicos

Belo Horizonte, 25 / 03 / 2022

Resultado; APROVADO

Banca Examinadora:

*Cristina A. Magalhães*

---

Profa. Dra. Cristina Almeida Magalhães  
Centro Federal de Educação Tecnologia de Minas Gerais – CEFET-MG

*Pedro Américo A. Magalhães*

---

Prof. Dr. Pedro Américo Almeida Magalhães Júnior  
Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais – PUC-Minas

*Artur C. Mottin*

---

Prof. Dr. Artur Caron Mottin  
Centro Federal de Educação Tecnologia de Minas Gerais – CEFET-MG

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, por toda ajuda necessária para chegar até aqui e por tudo que sempre fez por mim.

A minha família, principalmente meus pais que sempre se entregaram para oferecer a melhor educação e qualidade de vida para seus filhos, por todo apoio, incentivo e confiança. E ao meu irmão por toda ajuda e parceria.

A minha orientadora Prof. Dr. Cristina Almeida Magalhães, por estar sempre disponível.

Aos meus amigos e companheiros de Mestrado do CEFET-MG.

Ao CEFET-MG pelo suporte financeiro à pesquisa.

## RESUMO

A utilização de materiais de alto desempenho se tornou importante em diversos campos da engenharia, como na indústria automotiva e aeroespacial, devido aos recursos materiais limitados, impacto ambiental e competição tecnológica. De outro lado, sabe-se que a otimização topológica estrutural é uma ferramenta de desenvolvimento de estruturas com ampla aplicação industrial. Dentre os vários métodos de otimização topológica existentes, a otimização estrutural evolucionária tem se destacado pela sua versatilidade, podendo ser utilizada em diversos tipos de problemas de engenharia. Na tentativa de combinar esses campos, este trabalho consiste no estudo do método de otimização evolucionária BESO (*Bi-directional Evolutionary Structural Optimization*) *soft-kill* e *hard-kill full design* e estimativa inicial de *design* aplicado a sistemas estáticos lineares e não lineares sob critério de rigidez e tensão e em estruturas de absorção de energia através de um algoritmo em *Python* suportado pelo *software* de elementos finitos Abaqus®. Para os sistemas lineares e não lineares, o método BESO foi comparado ao método SIMP e foi verificado os mesmos resultados para estruturas 2D contidas na literatura, assim como as técnicas BESO *soft-kill* e *hard-kill full design* e estimativa inicial de *design*, sendo as estruturas otimizadas não linearmente, mais rígidas que as otimizadas linearmente. Já para as estruturas 3D lineares e não lineares, o método BESO *hard-kill* de estimativa inicial de *design* se provou o mais eficiente, tanto em termos computacionais, quanto em conseguir uma solução ótima melhor que os demais métodos. Foi verificado também que o critério de tensão é equivalente ao critério de rigidez. Para as estruturas de absorção de energia, o método foi comparado ao trabalho de Fosberg e Nilsson (2007) em que foi obtido a mesma topologia pela otimização da parte frontal inferior de proteção de caminhão. Observou-se que o material da estrutura não interfere diretamente na topologia final, embora altere-se os valores de força máxima e energia de absorção. Porém, foi observado que o tipo de carregamento, diferentes condições de contorno e proporções de comprimento e altura maiores tem influência direta na topologia final, assim como nos valores de força máxima e energia de absorção, sendo necessário a definição desses parâmetros de projeto para obtenção de uma solução ótima que atenda às necessidades de projeto.

Palavras-chave: Otimização Topológica Estrutural Evolucionária. Método BESO. Elementos Finitos. Estruturas de Absorção de Energia.

## **ABSTRACT**

### **EVOLUTIONARY STRUCTURAL OPTIMIZATION IN ENERGY ABSORPTION STRUCTURES**

High performance utilization has become important in many engineering fields, such as the automotive and aerospace industries, due to limited material resources, environmental impact, and technological competition. On the other hand, know that structural topology optimization is a structure development tool with wide industrial application. Among the various topological optimization methods, structural and volumetric optimization can be highlighted by their extensibility, and can be used in different types of engineering. In an attempt to combine these fields, this work consists in the study of the BESO (Bi-directional Evolutionary Structural Optimization) soft-kill and hard-kill full design evolutionary optimization method and initial guess design applied to linear and non-linear static systems under linear criterion of resistance and tension and energy structures through an algorithm written in Python supported by the finite software Abaqus®. For linear and non-linear systems, the BESO method was compared to SIMP and the same results were selected for 2D structures contained in the literature, as well as the BESO soft-kill and hard-kill full design techniques and initial guess design method, the optimized ones being not linearly, stiffer than linearly optimized ones. As linear and non-linear 3D structures, BESO hard-kill for the most efficient initial guess design method solution, both in computational terms and in getting the best of the methods. It was also verified that the tension criterion is equivalent to the resistance criterion. For energy absorption structures, the method was compared to the work of Fosberg and Nilsson (2007) in which the same topology was made by optimizing the lower front of truck protection. It is observed that the material of the structure does not interfere directly in the final topology, although the values of maximum force and absorption energy are altered. However, it was observed that the values of height and maximum force of adjustment, being necessary to define these design parameters for the maximum height of an optimal solution that meets the needs of the project.

**Keywords:** Evolutionary Structural Topological Optimization. BESO Method. Finite Element Analysis. Energy Absorption Structures

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<b>Figura 1</b> - Comportamento do aço sob tração .....	32
<b>Figura 2</b> - Modelos de plasticidade: a) Elastoplástico perfeito; b) Elástico com encruamento linear.....	33
<b>Figura 3</b> - Diagrama de corpo livre e equações de equilíbrio para: a) estrutura indeformada; b) estrutura deformada .....	34
<b>Figura 4</b> - Representação da mudança das condições de contorno .....	35
<b>Figura 5</b> - Curvas de desempenho em função dos parâmetros .....	37
<b>Figura 6</b> - Abordagens de otimização estrutural. a) otimização paramétrica; b) otimização de forma; c) otimização topológica .....	38
<b>Figura 7</b> - Curva Força vs Deslocamento em análises não lineares. a) Controle de força; b) Controle de deslocamento .....	43
<b>Figura 8</b> - O problema de instabilidade de xadrez .....	47
<b>Figura 9</b> - Problema de dependência de malha. Malha com: a) 2700 elementos; b) 4800 elementos; c) 17200 elementos .....	48
<b>Figura 10</b> - Esquema de Filtro. Nós contabilizados para o número de sensibilidade do i-ésimo elemento na região $A_i$ .....	49
<b>Figura 11</b> - Curva típica de força por deslocamento e restrições para projeto de estruturas de absorção de energia .....	54
<b>Figura 12</b> - Curvas de força-deslocamento antes e depois de remover um elemento para análise de sensibilidade.....	55
<b>Figura 13</b> - Comando de desativação dos elementos removidos nas análises de elementos finitos .....	59
<b>Figura 14</b> - Fluxograma do método de otimização evolucionário .....	60
<b>Figura 15</b> - Cálculo do número de sensibilidade para critério de tensão.....	60
<b>Figura 16</b> - Fluxograma do método de otimização evolucionário para estruturas de absorção de energia.....	61
<b>Figura 17</b> - Placa bi engastada 2D. a) Domínio de projeto da estrutura inteira; b) Estimativa inicial de projeto.....	64
<b>Figura 18</b> - Topologias Lineares: a) Método SIMP; b) BESO soft-kill; c) BESO hard-kill .....	64
<b>Figura 19</b> - Função Objetivo e Volume da Estrutura para Análise Linear BESO soft-kill e hard-kill full design .....	65
<b>Figura 20</b> - Tempo por Iteração da Análise Linear BESO soft-kill e hard-kill full design.....	66
<b>Figura 21</b> - Atribuindo Não Linearidades: (a) Geométrica; (b) Material.....	67

<b>Figura 22 - Topologias Não Lineares: a) Método SIMP; b) BESO soft-kill; c) BESO hard-kill</b>	.....	67
<b>Figura 23 - Função Objetivo e Volume da Estrutura para Análise Não Linear BESO soft-kill e hard-kill</b>	.....	68
<b>Figura 24 - Tempo por Iteração da Análise Linear BESO soft-kill e hard-kill</b>	.....	68
<b>Figura 25 - Topologias Estimativa Inicial de Design: a) Linear; b) Não Linear</b>	.....	69
<b>Figura 26 - Função Objetivo e Volume da Estrutura para: a) BESO Linear Estimativa Inicial de Design e Full Design; b) BESO Não Linear Estimativa Inicial de Design e Full Design</b>	.....	70
<b>Figura 27 - Tempo por iteração: a) BESO Linear Estimativa Inicial de Design e Full Design; b) BESO Não Linear Estimativa Inicial de Design e Full Design</b>	.....	71
<b>Figura 28 - Curva Força x Deslocamento das estruturas em regime não linear</b>	.....	72
<b>Figura 29 - Topologias deformadas: a) Estrutura otimizada de forma linear submetida a análise não linear; b) Estrutura otimizada de forma não linear</b>	.....	73
<b>Figura 30 - Otimização pelo critério de Tensão: a) Topologia Final; b) Função objetivo e fração de volume pelo critério de tensão e rigidez</b>	.....	74
<b>Figura 31 - Placa bi engastada 3D: (a) Condições de suporte, dimensões e (b) representação da estimativa inicial de projeto da estrutura 3D</b>	.....	76
<b>Figura 32 - Topologias obtidas: a) SIMP; b) BESO soft-kill; c) BESO hard-kill</b>	.....	77
<b>Figura 33 - Topologia: a) Exemplo 1 modificado utilizando o TOSCA do Abaqus®; b) Método SIMP do trabalho de Jung e Gea (2004)</b>	.....	78
<b>Figura 34 - Topologias obtidas pelo método BESO hard-kill de Estimativa Inicial de Design: a) Huang e Xie (2010a); b) Autor</b>	.....	78
<b>Figura 35 - Histórico da função objetivo e fração de volume para os métodos BESO soft-kill e hard-kill linear</b>	.....	79
<b>Figura 36 - Tempo de otimização ao longo das iterações para os métodos BESO soft-kill e hard-kill linear</b>	.....	80
<b>Figura 37 - Otimização não linear: a) Método BESO hard-kill de Estimativa Inicial de Design obtido por Huang e Xie (2010a); b) BESO hard-kill Full Design obtido pelo autor; c) BESO hard-kill Estimativa Inicial de Design obtido pelo autor</b>	.....	81
<b>Figura 38 - Função objetivo e volume pelo método BESO hard-kill Full Design e Estimativa Inicial de Design</b>	.....	82
<b>Figura 39 - Tempo por iteração dos métodos BESO hard-kill Full Design e Estimativa Inicial de Desgin</b>	.....	82
<b>Figura 40 - Curva Força x Deslocamento das estruturas em regime não linear</b>	.....	84
<b>Figura 41 - Topologias deformadas das estruturas otimizadas de forma linear pela análise não linear: a) BESO hard-kill Full Design; b) SIMP; c) BESO hard-kill Estimativa Inicial de Design</b>	.....	86

<b>Figura 42</b> - Topologias deformadas das estruturas otimizadas de forma não linear: a) BESO hard-kill Full Design; b) BESO hard-kill Estimativa Inicial de Design.....	87
<b>Figura 43</b> - Domínio de projeto da estrutura.....	88
<b>Figura 44</b> - Topologias: (a) Huang et al. (2007); (b) Material 1; (c) Material 2.....	89
<b>Figura 45</b> - Histórico evolucionário da fração de volume, energia absorvida por unidade de volume e a força máxima de esmagamento. (a) Huang et al. (2007); (b) Material 1; (c) Material 2 .....	89
<b>Figura 46</b> - Curva de Tensão x Deformação seguindo o modelo elastoplástico com encruamento linear para os materiais 1 e 2 .....	91
<b>Figura 47</b> - Tempo por iteração para os materiais 1 e 2.....	92
<b>Figura 48</b> - Topologias deformadas: a) Material 1; b) Material 2 .....	92
<b>Figura 49</b> - Modelagem da estrutura de proteção inferior frontal de caminhão como uma placa 2D bi apoiada .....	93
<b>Figura 50</b> - Curva de Tensão x Deformação seguindo o modelo elastoplástico com encruamento linear para os materiais 2 e de Fosberg e Nilsson (2007).....	94
<b>Figura 51</b> - Topologia a) Fosberg e Nilsson (2007) e b) pelo método BESO .....	94
<b>Figura 52</b> - Histórico evolucionário da fração de volume, energia absorvida por unidade de volume e a força máxima de esmagamento.....	95
<b>Figura 53</b> - Disposição de elementos para otimização de Estimativa Inicial de Design .....	96
<b>Figura 54</b> - Topologia final BESO hard-kill Estimativa Inicial de Design .....	96
<b>Figura 55</b> - Valores da função objetivo, força máxima e volume .....	97
<b>Figura 56</b> - Curva Força x Deslocamento.....	98
<b>Figura 57</b> - Tempo por iteração da técnica Full Design e Estimativa Inicial de Design para otimização da proteção de caminhão.....	99
<b>Figura 58</b> - Proteção de caminhão deformada .....	100
<b>Figura 59</b> - Aplicação de deslocamento em um único nó da estrutura .....	100
<b>Figura 60</b> - BESO hard-kill com deslocamento nodal: a) Topologia Final; b) Valores da função objetivo, força máxima e volume.....	101
<b>Figura 61</b> - Apoio simples e deslocamento em um único nó.....	102
<b>Figura 62</b> - Topologia: a) Estrutura 120x40 mm; b) Estrutura 100x20 mm de Huang et al. (2007) .....	103
<b>Figura 63</b> - Topologia da estrutura de 120x24 mm .....	103
<b>Figura 64</b> - Função objetivo, força máxima e restrição de volume: a) Estrutura 100x20 mm de Huang et al. (2007); b) Estrutura 120x40 mm; c) Estrutura 120x20 mm.....	104
<b>Figura 65</b> - Dispositivo de proteção de caminhão em malha de elementos finitos de estado plano de tensão triangular .....	106

**Figura 66** - Topologia Final da proteção de caminhão com malha de elementos de estado plano de tensão triangular ..... 106

**Figura 67** - Função objetivo, Força máxima e Fração de Volume ao longo das iterações para:  
a) Elementos Retangulares; b) Elementos Triangulares ..... 107

## **LISTA DE TABELAS**

<b>Tabela 1</b> - Propriedades do material e Parâmetros de otimização do Exemplo 1 .....	63
<b>Tabela 2</b> - Resultados do Exemplo 1.....	74
<b>Tabela 3</b> - Propriedades do material e Parâmetros de otimização do Exemplo 2 .....	75
<b>Tabela 4</b> - Resultados do Exemplo 2.....	83
<b>Tabela 5</b> - Propriedades dos Materiais .....	88
<b>Tabela 6</b> - Detalhes da otimização das estruturas de Huang et al. (2007) e das estruturas do Material 1 e 2.....	91
<b>Tabela 7</b> - Informações detalhadas da otimização das estruturas de 120x40, 120x24 mm e de Huang et al. (2007) .....	105
<b>Tabela 8</b> - Informações detalhadas das otimizações realizadas no Exemplo 4.....	108

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

AESO	Additive Evolutionary Structural Optimization
BESO	Bi-directional Evolutionary Structural Optimization
ESO	Evolutionary Structural Optimization
HS	Harmony Search
IED	Internal Energy Density

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\{F\}$	Matriz de forças que atua na estrutura
$\{K\}$	Matriz de rigidez global da estrutura
$\{U\}$	Matriz de deslocamentos dos nós da estrutura
$\{F(t)\}$	Matriz de forças atuando em função do tempo na estrutura
$\{M\}$	Matriz de massa da estrutura
$\{C\}$	Matriz de amortecimento
$\{\ddot{U}\}$	Matriz de aceleração nodal
$\{\dot{U}\}$	Matriz de velocidade nodal
$\sigma$	Tensão
$\varepsilon^n$	Deformação do material a potência do coeficiente de encruamento
$f(\{x\})$	Função objetivo da otimização
$h(\{x\}), g(\{x\})$	Restrições da otimização
$\{x\}, x_n, x_i, x_e$	Variável de projeto
$x_{min}$	Variável de projeto com densidade mínima para técnica soft-kill
$C(X)$	Função objetivo de minimização da flexibilidade da estrutura
$F$	Matriz de força global
$U$	Matriz de deslocamento global
$K$	Matriz de Rigidez global
$v_i$	Volume do elemento finito i

$V^*$	Volume de restrição
N	Número total de elementos
$\Delta C$	Variação na função objetivo de flexibilidade
$\alpha_i$	Número de sensibilidade do elemento finito i
$E(x_i)$	Função de densidade similar ao método SIMP
E	Módulo de Young
p	Expoente de penalização
$K_0$	Matriz de rigidez dos elementos sólidos
$E_i$	Energia de deformação do elemento i
$\sigma_{i0}^{vm}$	Tensão de von Mises do elemento sólido
R	Força residual (diferença da força externa e força interna no elemento)
$F^{int}$	Força interna no elemento
$C^{eT}$	Matriz transformação de coordenada local para coordenada global
M	Número total de elementos finitos
$\Phi(\bar{\varepsilon}^0)$	Função geral que representa as características do material
$\bar{\varepsilon}^0$	Deformação efetiva do material sólido
$\bar{\sigma}(x_e)$	Tensão efetiva do material
$K_t$	Constante referente ao módulo de elasticidade
$F_{e0}^{int}$	Força interna no elemento sólido
$E^{el}$	Energia de deformação elástica do elemento
$E^{pl}$	Energia de deformação plástica do elemento
$\alpha_j^n$	Número de sensibilidade nodal

$\omega_i$	Fator de peso do i-ésimo elemento
$r_{ij}$	Distância do centro do elemento i ao centro do elemento j
$r_{\min}$	Raio mínimo do esquema de filtro
$A_i$	Área na estrutura determinada por $r_{\min}$
$\hat{\alpha}_i$	Número de sensibilidade final do elemento
$V_k$	Volume da iteração k
ER	Razão evolutiva
$\alpha^{\lim}$	Número de sensibilidade limite
$\tau$	Tolerância do critério de convergência da otimização estrutural
$F^*$	Força máxima de restrição
$U^*$	Deslocamento máxima de restrição
$E_t$	Energia total absorvida
$f_W$	Trabalho externo total
$E_n^j$	Energia de deformação plástica e elástica do j-ésimo elemento
$V_j$	Volume do j-ésimo elemento
$e_1$	Índice de desempenho da estrutura de absorção de energia otimizada
$W$	Trabalho Externo
$\nu$	Coeficiente de Poisson
$\sigma_y$	Tensão de escoamento
$\alpha$	Offset de escoamento modelo de plasticidade de Ramberg-Osgood
$\eta$	Expoente de encruamento
$E_p$	Módulo de encruamento

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	18
<b>1.1</b>	<b>Justificativa.....</b>	20
<b>1.2</b>	<b>Objetivos .....</b>	21
1.2.1	<i>Objetivos Gerais .....</i>	21
1.2.2	<i>Objetivos Específicos .....</i>	22
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	23
<b>3</b>	<b>ELEMENTOS FINITOS .....</b>	29
<b>3.1</b>	<b>Análise Estática .....</b>	29
<b>3.2</b>	<b>Análise Dinâmica.....</b>	30
<b>3.3</b>	<b>Não Linearidades .....</b>	31
3.3.1	<i>Não Linearidade Material.....</i>	31
3.3.2	<i>Não Linearidade Geométrica .....</i>	33
3.3.3	<i>Não Linearidades Associadas à Mudanças das Condições de Contorno: Contato .....</i>	35
<b>4</b>	<b>OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL .....</b>	37
<b>4.1</b>	<b>Formulação Geral de Otimização .....</b>	39
<b>4.2</b>	<b>Otimização Estrutural Evolucionária.....</b>	39
4.2.1	<i>BESO hard-kill para critério de rigidez .....</i>	39
4.2.2	<i>BESO soft-kill para critério de rigidez.....</i>	40
4.2.3	<i>BESO para Critério de Tensão .....</i>	42
4.2.4	<i>BESO para Estruturas Não Lineares .....</i>	42
<b>4.3</b>	<b>Instabilidades Numéricas.....</b>	46
4.3.1	<i>Instabilidade de Tabuleiro de Xadrez.....</i>	46
4.3.2	<i>Dependência de Malha .....</i>	47
<b>4.4</b>	<b>Esquema de Filtro e Estabilização da Sensibilidade.....</b>	48
<b>4.5</b>	<b>Adição/Remoção de Material e Critério de Convergência .....</b>	51
<b>4.6</b>	<b>Estruturas de Absorção de Energia .....</b>	52
4.6.1	<i>BESO para Estruturas de Absorção de Energia .....</i>	53

<b>5</b>	<b>METODOLOGIA.....</b>	59
<b>6</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES .....</b>	63
<b>6.1</b>	<b>Parte I – Otimização de Estruturas Lineares e Não Lineares .....</b>	63
6.1.1	<i>Exemplo 1 – Placa bi engastada 2D .....</i>	63
6.1.2	<i>Exemplo 2 – Viga bi engastada 3D.....</i>	75
<b>6.2</b>	<b>Parte II – Otimização de Estruturas de Absorção de Energia.....</b>	87
6.2.1	<i>Exemplo 3 – Placa bi engastada 2D .....</i>	87
6.2.2	<i>Exemplo 4 – Proteção de caminhão modelado como uma Placa 2D .....</i>	93
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO .....</b>	110
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	113
	<b>APÊNDICE.....</b>	120

## 1 INTRODUÇÃO

Otimização estrutural é uma técnica para encontrar uma configuração estrutural ideal dentro de um determinado domínio de projeto para objetivos específicos, sujeito a restrições, cargas e condições de contorno (KONGWAT; HASEGAWA, 2019). Projetos otimizados estão se tornando cada vez mais importantes devido aos recursos materiais limitados, impacto ambiental e competição tecnológica, que exige peso leve, baixo custo e alto desempenho de estruturas (ZHU; ZHANG; XIA, 2015).

Segundo Huang e Xie (2010a), os tipos de otimização estrutural podem ser classificados em três categorias, ou seja, tamanho, forma e topologia. Otimização de tamanho, ou otimização paramétrica busca encontrar o *layout* ideal alterando as dimensões de altura, comprimento e espessura das estruturas. Otimização de forma, ou otimização geométrica modifica os contornos da estrutura para alcançar o *layout* ótimo. Otimização topológica busca atingir o *layout* ideal da estrutura através de uma redistribuição de material dentro do domínio de projeto sujeito às restrições para alcançar determinado objetivo, como por exemplo, a maior rigidez com um mínimo de material especificado (NABAKI; SHEN; HUANG, 2019).

O uso eficiente de materiais é importante em muitos ambientes diferentes. A indústria aeroespacial e a indústria automotiva, por exemplo, aplicam dimensionamento e otimização de forma para o projeto de estruturas e elementos mecânicos. A otimização de forma também é usada no projeto de dispositivos eletromagnéticos, eletroquímicos e acústicos. A otimização da geometria e topologia do *layout* estrutural tem grande impacto no desempenho das estruturas, e nas últimas décadas viu uma grande quantidade de trabalho nesta importante área de otimização estrutural. Este foi principalmente estimulado pelo sucesso do método de distribuição de material para gerar topologias ótimas de elementos estruturais (BENDSØE; SIGMUND, 2003).

Nas últimas três décadas, a disponibilidade de computadores de alta velocidade e as rápidas melhorias nos algoritmos usados para a otimização de projetos transformaram o tópico da otimização estrutural em um dos maiores campos de pesquisa, alcançando um notável desenvolvimento tanto no meio acadêmico quanto em aplicações industriais (XU et al., 2020). Esse crescimento se deve ao amadurecimento de algumas técnicas clássicas de otimização de topologia e o desenvolvimento contínuo e criação de novos métodos promissores. Assim, um número crescente de engenheiros e arquitetos começa a experimentar e se beneficiar com as técnicas de otimização.

Começando com o artigo de referência de Bendsøe e Kikuchi (1988) que propuseram o método de homogeneização, métodos numéricos para a otimização da topologia de estruturas contínuas foram investigados extensivamente. A maioria desses métodos são baseados na análise de elementos finitos, onde o domínio de projeto é discretizado em uma malha fina de elementos. Desde então, segundo Da et al. (2018a) vários métodos de otimização de topologia foram propostos, como os métodos baseados em densidade que inclui o popular *Solid Isotropic Material with Penalization* (SIMP), originalmente desenvolvido de forma independente por Bendsøe (1989) e Zhou e Rozvany (1991), métodos evolucionários propostos por Xie e Steven (1993), métodos *level-set* (Sethian e Wiegmann 2000; Wang et al. 2003; Allaire et al. 2004) e métodos de algoritmos genéticos.

Apesar dos métodos baseados em densidade serem os mais proeminentes pela grande aceitação e utilização do método SIMP no desenvolvimento de softwares, os métodos evolucionários têm mostrado desempenho promissor quando aplicado a vários tipos de problemas estruturais sendo muito desenvolvido em trabalhos acadêmicos e utilizados em algumas aplicações práticas como no projeto de pontes, segundo Simonetti et al. (2018).

Para Nishiwaki e Terada (2018), embora a otimização da topologia tenha atingido um certo nível de maturidade, problemas de maior complexidade têm se tornado prioridade. Resolvendo problemas de projeto de engenharia mais sofisticados que incluem sistemas multiobjetivos, sistemas estruturais complexos, fenômenos multifísicos e sistemas multiescala, envolvem novos e importantes desafios.

Estruturas de absorção de energia são empregadas onde a colisão pode causar consequências graves como ferimentos ou fatalidades e danos estruturais. Essas estruturas são projetadas para dissipar energia em deformação plástica sob carregamento estático ou de impacto de maneira controlada. Estruturas deste tipo são necessárias em uma ampla variedade de campos, incluindo resistência ao choque representado bastante na indústria automotiva, projetos sísmicos e proteção contra explosão de edifícios, projeto de equipamentos de segurança pessoal como capacetes, armaduras corporais e equipamentos de esporte, entre outros (ALBERDI; KHANDELWAL, 2017).

A maioria dos estudos que foram realizados no campo da otimização topológica está associado a materiais elásticos com pequenos deslocamentos e aplicações para projetos de rigidez máxima, mecanismos compatíveis e otimização de frequências fundamentais, utilizando métodos de otimização baseados em gradiente como o método da homogeneização e SIMP (BAHRAMIAN; KHALKHALI, 2020). A absorção de energia é um processo irreversível e é acompanhada por vários mecanismos dependentes de material inelástico. Para aplicações

de projeto onde o objetivo é absorver energia usando deformações plásticas irreversíveis, a topologia ideal deve maximizar o trabalho plástico dissipado sob as condições de carregamento aplicadas. Entretanto, existe um número limitado de estudos na otimização topológica que consideram as não linearidades do material como o seu comportamento plástico devido aos desafios associados com a natureza dos materiais inelásticos (LI; ZHANG; KHANDELWAL, 2017).

Segundo Bahramian e Khalkhalil (2020) a otimização da topologia para estruturas submetidas a colisão foram abordadas aproveitando as vantagens dos métodos não gradientes. Para os autores, o método BESO é um algoritmo de otimização de topologia heurística, possuindo capacidade inerente para ser implementado em estruturas associadas à resistência ao choque.

Para Deaton e Grandhi (2014), uma das características mais atraentes dos métodos evolutivos é a simplicidade de integração com os softwares de elementos finitos em que se utiliza a capacidade e diversidade de resolução em elementos finitos desses softwares para vários tipos de problemas. Ainda, a linguagem de programação *Python* vem se destacando por ser simples e de fácil interpretação dado sua proximidade com a comunicação humana o que a caracteriza como uma linguagem de alto nível. Além disso, *Python* é uma linguagem *opensource*, ou seja, de código aberto com desenvolvimento comunitário e, portanto, gratuito. Nesse sentido, dado ao ambiente de interface de *script* em *Python* do software de elementos finitos Abaqus® e da sua capacidade de resolução de vários tipos de problemas de engenharia, propõe-se implementar a metodologia de otimização evolucionária *Bi-directional Evolutionary Structural Optimization* (BESO) na versão proposta por Huang e Xie (2007a) para otimização de estruturas estáticas lineares e não lineares com maximização de rigidez e restrição de volume e a implementação do método BESO proposto por Huang et al. (2007) na versão para solução de problemas de estruturas de absorção de energia que envolvem análises altamente não lineares.

## 1.1 Justificativa

A otimização de projetos está se tornando cada vez mais importante visto que, no cenário atual, a escassez de recursos naturais, políticas ambientais cada vez mais exigentes, elevados custos com material motivam a continuidade e pesquisa na área de otimização estrutural. Dessa forma, as empresas, impulsionadas pela competição tecnológica, buscam

tecnologias de reciclagem e reutilização de materiais e desenvolvimento de produtos ótimos de máximo desempenho e um mínimo de material para reduzir os custos e impactos ambientais. Ainda, dado a maior aceitação dos métodos gradiente baseados em densidade, existem poucos estudos relacionados a otimização da topologia de estruturas de absorção de energia utilizando os métodos evolucionários, que devido a suas características heurísticas, possui a capacidade de ser implementado em estruturas associadas a resistência ao choque. Outra vantagem da utilização desses métodos, é a sua facilidade de integração com os softwares de elementos finitos em que é possível utilizar suas capacidades de solução de problemas complexos e altamente não lineares como estruturas submetidas a colisão, em conjunto, facilitando e ampliando o processo de otimização para diversas outras análises, não sendo restrito a problemas simplificados.

Assim, levando em conta a importância da otimização estrutural no contexto da indústria em desenvolver produtos de baixo peso, custo e alto desempenho alinhado aos recursos naturais limitados, impacto ambiental, ao número limitado de estudos utilizando os métodos evolucionários para estruturas sujeitas a colisão e a facilidade de integração dos métodos evolucionários com os softwares de elementos finitos propõe-se a aplicação de um algoritmo em *Python* em conjunto com o software Abaqus® aplicando o método BESO com foco em otimização de estruturas de absorção de energia, sujeitas a colisão. Adicionalmente, propõe-se também que o método seja capaz de resolver problemas de otimização de rigidez com restrição de volume de estruturas lineares e não lineares sujeitas a carregamentos estáticos e problemas de estruturas lineares sob critério de tensão e restrição de volume.

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivos Gerais

O objetivo deste trabalho é aplicar um algoritmo em *Python* que possui interface com o software de elementos finitos Abaqus® de forma a utilizar sua capacidade de solução de problemas complexos de engenharia, com foco na otimização topológica de estruturas de absorção de energia, ou seja, maximização na capacidade de resistência ao choque utilizando o método evolucionário *Bi-directional Evolutionary Structural Optimization* (BESO) e avaliar a efetividade deste método através de exemplos numéricos de outros trabalhos presentes na literatura. Propõe-se também, a aplicação do método BESO *soft-kill* e *hard-kill* em estruturas estáticas lineares e não lineares para estabelecer suas diferenças.

### 1.2.2 Objetivos Específicos

- Implementação e validação do algoritmo BESO para problemas de resistência ao choque;
- Investigar os resultados pela alteração do tipo de carregamento, condições de contorno e tipo de elemento finito na otimização de uma mesma estrutura de absorção de energia
- Aplicação do algoritmo BESO *soft-kill* e *hard-kill full design* e estimativa inicial de *design* em problemas com carregamento estático lineares e não lineares 2D e 3D maximizando a rigidez com restrição de volume e estabelecer suas diferenças e vantagens;
- Aplicação do algoritmo BESO para problemas com carregamento estático sob o critério de tensão com restrição de volume.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O primeiro artigo sobre otimização topológica foi publicado por Michell (1904) que desenvolveu o critério de otimização de treliças buscando o menor peso. Cerca de 70 anos depois, a teoria de Michell foi estendida por Rozvany (1972a e b) e seus colaboradores em uma série de artigos para soluções analíticas exatas otimizadas de estruturas do tipo grade. Em sequência, Rozvany e Prager (1976) formularam a primeira teoria geral de otimização topológica denominada teoria de *layout* ótimo.

Na otimização de estruturas, geralmente é necessário recorrer a métodos numéricos porque as equações envolvidas são muito complicadas para um tratamento analítico (ROZVANY; ZHOU, 1991). Dessa maneira, o campo de pesquisa de otimização estrutural se desenvolveu mais a partir da década de 80 com os avanços revolucionários dos recursos de computação e de simulações numéricas. A estrutura pode ser formulada como um problema discreto ou uma configuração de *design* binário em que ela se dividia em elementos sólidos e vazios. No entanto, essa configuração era considerada mal posta devido as não convergências de problemas mais complexos como indicado por Kohn e Strang (1986). Na tentativa de solucionar o problema, Bendsøe e Kikuchi (1988) propuseram um método baseado nos trabalhos de Cheng e Olhoff (1981) e Cheng e Olhoff (1982) de relaxação do problema, através da introdução de um material poroso que se caracteriza em uma microestrutura com a presença de vazios sendo conhecido como método da homogeneização. A partir de então, este artigo se tornou uma referência e vários outros métodos numéricos foram desenvolvidos e investigados, incluindo o mais popular *Solid Isotropic Material with Penalization* (SIMP) proposto por Bendsøe (1989) sendo o termo SIMP atribuído por Zhou e Rozvany (1991) e Rozvany et al. (1992).

Com o artigo de referência de Bendsøe e Kikuchi (1988) a otimização da topologia sofreu um desenvolvimento notável com o surgimento de vários métodos numéricos, incluindo na sequência cronológica: métodos baseados em densidade por Bendsøe (1989) e Zhou e Rozvany (1991), procedimentos evolutivos por Xie e Steven (1993), método da bolha por Eschenauer et al. (1994), derivada topológica por Sokolowski e Zochowski (1999) e métodos *level-set* por Sethian e Wiegmann 2000, Wang et al. 2003 e Allaire et al. 2004.

O método de otimização estrutural evolucionário (*Evolutionary Structural Optimization – ESO*) foi proposto por Xie e Steven (1993) baseado em um conceito simples de que uma estrutura evolui em direção a um ótimo, removendo gradualmente os materiais sujeitos a

menores tensões com restrição de volume. Para maximizar a rigidez da estrutura, o critério de tensão foi substituído pelo critério de energia de deformação do elemento por Chu et al. (1996) em que a remoção do elemento é baseada em um número de sensibilidade que representa a mudança da rigidez da estrutura quando um elemento é removido. A remoção do material é feita por deletar elementos do modelo de elementos finitos da estrutura, dessa forma, o método ficou conhecido como *hard-kill*.

O método ESO passou por um desenvolvimento contínuo desde que foi proposto em 1993. Seu uso foi estendido para a otimização da topologia de estruturas com restrições como carga de flambagem (Manickarajah et al. 1998), frequência (Xie e Steven 1996), temperatura (Li et al. 2004) ou uma combinação dos anteriores (Proos et al. 2001). A técnica ESO também tem sido usado para várias aplicações de engenharia, como a escavação subterrânea (Ren et al. 2005). Como complemento, um método reverso ao algoritmo ESO original, nomeado ESO aditivo (*Additive ESO – AESO*), foi proposto por Querin et al. (2000a), pelo qual a estrutura evolui de uma base de pouco material, adicionando gradualmente material a regiões altamente tensionadas. Entretanto, a versão original do ESO permite apenas a remoção de material ineficiente sendo incapaz de recuperá-lo uma vez que tenha sido incorretamente ou prematuramente removido da estrutura final. Portanto, enquanto o método é capaz de produzir uma solução muito melhorada sobre uma estimativa inicial de *design*, na maioria dos casos, o resultado pode não necessariamente ser um ótimo.

Ambos os métodos, ESO e AESO são métodos unidirecionais, ou seja, permitem apenas remoção e adição respectivamente. Assim, Yang et al. (1999) propôs o ESO bidirecional (*Bi-directional Evolutionary Structural Optimization – BESO*) para o critério de rigidez com restrição de volume, permitindo a remoção e adição simultaneamente. Os elementos sólidos com menor número de sensibilidade são removidos e os elementos vazios com maior sensibilidade se tornam sólidos. Porém, o número de elementos a serem removidos e adicionados são tratados separadamente através de uma razão de remoção e uma razão de adição. O método BESO foi aplicado por Querin et al. (2000b) para critério de tensão com restrição de volume.

O desenvolvimento inicial de métodos ESO/BESO é amplamente baseado em um conceito heurístico. Segundo Xia et al. (2018a), a maioria dos primeiros trabalhos no ESO/BESO negligenciou problemas numéricos importantes na otimização topológica, como tabuleiro de xadrez, dependência de malha e ótimo local. É importante notar que os números de sensibilidade para elementos vazios, que não existem no modelo de elementos finitos, são calculados usando métodos de extração que não são consistentes com aqueles utilizados para o elemento sólido. Contínuos esforços foram realizados para superar essa deficiência.

Li et al. (2001) resolveu o problema do tabuleiro de xadrez calculando a média do número de sensibilidade de um elemento com os elementos vizinhos. Yang et al. (2002) introduziu uma restrição de perímetro, Kim et al. (2000b) e Kim et al. (2002a) introduziram técnicas de controle de cavidade e Kim et al. (2000a) e Kim et al. (2002b) introduziram grades fixas com o objetivo de reduzir o esforço computacional. Entretanto, nenhuma dessas técnicas resolveram significativamente o problema de dependência de malha.

Outro problema é que os métodos ESO/BESO podem resultar em uma solução não convergente. Para superar essas deficiências Huang e Xie (2007a) propuseram um método BESO modificado e muito eficiente em que um filtro é empregado para suavizar o número de sensibilidade do elemento a partir dos nós contendo um comprimento predefinido que não muda com o tamanho da malha e o histórico de valores do número de sensibilidade de cada iteração é usado para estabilizar o processo de otimização. Além disso, o critério de remoção e adição são tratados simultaneamente a partir de um valor limite que é atualizado a cada iteração. Assim, o número de sensibilidade para elementos sólidos e vazios são calculados de forma consistente, o que aumentou a robustez do método.

A remoção completa dos elementos sólidos da estrutura pode resultar em algumas dificuldades teóricas no processo de otimização topológica. Após Zhou e Rozvany (2001) mostrarem que os métodos ESO/BESO falham em um determinado problema de otimização, muitas dúvidas foram levantadas entre os pesquisadores sobre a eficiência e base teórica dos métodos. Assim, como alternativa a remoção completa dos elementos, alguns trabalhos recomendam o uso de elementos macios, reduzindo o módulo de elasticidade. Isso é evidenciado no método Rejeição e Admissão Sequencial de Elemento (*Sequential Element Rejection and Admission* – SERA) proposto por Rozvany e Querin (2002). Huang e Xie (2009) propuseram um método denominado *soft-kill* BESO usando um esquema artificial de interpolação do material com penalização semelhante ao método SIMP. Dessa maneira, o número de sensibilidade dos elementos sólidos, são independentes do coeficiente de penalização enquanto que o número de sensibilidade dos elementos vazios, são dependentes desse coeficiente. Huang e Xie (2009) demonstraram também que o método *hard-kill* BESO é um caso especial do *soft-kill* BESO com o coeficiente de penalização infinito. Entretanto, Huang e Xie (2008a) reexaminaram o problema de Zhou e Rozvany (2001) e descobriram que outros métodos bem estabelecidos como SIMP e *level-set* também falham em encontrar uma solução ótima e encontram uma solução ótima local ineficiente. Assim, Huang e Xie (2008a) propõem detectar essa solução ótima ineficiente através da verificação das condições de contorno para uma estrutura estaticamente indeterminada em cada iteração. Se um colapso

das condições de contorno acontecer, o processo deve ser interrompido e recalculado com um refinamento na malha.

Segundo Huang e Xie (2010a), os resultados dos métodos *hard-kill* BESO e *soft-kill* BESO são bastante parecidos. Contudo, apesar do método *hard-kill* ser computacionalmente mais eficiente, sua efetividade depende do problema de otimização tratado. Dessa forma, quando um novo tipo de otimização é estudado, é recomendado a aplicação do método *soft-kill* BESO primeiro e depois explorar a possibilidade de estabelecer a aplicação do método *hard-kill* BESO.

A versão convergente do método BESO de Huang e Xie (2007a) que corrige o problema de dependência de malha e tabuleiro de xadrez foi estendida para várias aplicações. Huang e Xie (2008) estenderam o *soft-kill* BESO para otimizar estruturas compostas por múltiplos materiais. Algumas melhorias dessa extensão foram implementadas por Ghabraie (2015) pela introdução de um novo filtro. Huang e Xie (2010b) aplicaram o método BESO para minimizar o volume com restrição de deslocamento e uma extensão desse trabalho foi proposta por Zuo e Xie (2014) para um controle global de deslocamentos. Huang e Xie (2010c) estenderam o método de maximização de rigidez com restrição de volume adicionando restrições de deslocamento. Huang e Xie (2011) aplicaram o método *soft-kill* BESO para estruturas sujeitas a cargas dependentes de projeto, como por exemplo peso próprio ou um componente de uma máquina rotativa sujeita a uma força centrípeta. Picelli et al. (2015) estenderam o *hard-kill* BESO para estruturas sujeitas a pressão de fluido. Huang e Xie (2010a) aplicaram o método para múltiplos carregamentos. Huang et al. (2010) aplicaram o método *soft-kill* BESO para maximização de frequências naturais modificando o esquema de interpolação do material que não é adequado para esse problema pois alguns modos artificiais ficam localizados em regiões de baixa densidade. Huang e Xie (2008b) estenderam o método BESO para estruturas periódicas, como o *honeycomb* buscando o projeto de estruturas macroscópicas gerais com restrições adicionais sobre a periodicidade da geometria das subestruturas.

O método BESO também é usado no projeto de microestruturas de materiais. Segundo Xia et al. (2018a) uma série de extensões do método BESO para projetos de materiais tem sido conduzido pelo grupo de pesquisa de Xie e Huang na Universidade RMIT. Foi demonstrado que o método não só é aplicado para esse tipo de projeto, mas que também fornece resultados extraordinários por causa do seu algoritmo de atualização heurística. O método também é utilizado para projeto de estruturas multi escala.

A maioria dos primeiros trabalhos sobre otimização de topologia foram restritos a projetos estruturais lineares. Em busca de mais projetos realistas, esforços contínuos têm sido

conduzidos para estender a otimização da topologia para estruturas não lineares considerando várias fontes de não linearidade (XIA et al., 2018a). Usando métodos de otimização baseados em sensibilidade/gradiente, diversos pesquisadores consideraram otimização da topologia de estruturas geometricamente não lineares (Buhl et al. 2000; Gea e Luo 2001; Pedersen et al. 2001; Bruns e Tortorelli 2003). Otimização da topologia de estruturas com materiais não lineares também foi conduzido por vários pesquisadores (Yuge e Kikuchi 1995; Bendsøe et al. 1996; Pedersen 1998). No entanto, tem havido pesquisas muito limitadas sobre otimização da topologia com não linearidades geométricas e materiais de forma simultânea devido à dificuldade de resolução de problemas não lineares somado ao maior esforço computacional requerido.

Seguindo os problemas de não linearidade, estão estruturas de absorção de energia, que dissipam energia sob carga estática ou de impacto, que estão sujeitas aos altos efeitos de não linearidades devido as forças de contato durante a colisão. A otimização topológica estrutural para projetos de resistência ao choque começou com o trabalho de Mayer et al. (1996) que empregou o método de homogeneização para o projeto de para-choque traseiro automotivo. Em métodos de otimização, como SIMP, densidades de material intermediárias aparecem nos resultados da topologia. Conforme a topologia se desenvolve, grandes deslocamentos podem fazer com que a matriz de rigidez tangencial de elementos de baixa densidade tornar-se indefinido ou mesmo negativamente definido como cita Buhl et al. (2000) e Bruns e Tortorelli (2003). Os métodos não gradientes tem a capacidade de contornar esses problemas numéricos sendo muito utilizados para problemas que envolvem colisão segundo Bahramian e Khalkhali (2020).

Entre os métodos não gradientes, está o *hard-kill* BESO. Nele, os elementos macios são totalmente removidos do domínio de projeto e, portanto, não há problema de convergência causado por elementos de baixa densidade. Além disso, a remoção de elementos reduz o tamanho do modelo de elementos finitos e melhora a eficiência do processo de otimização. A extensão do método BESO para problemas não lineares foi proposto por Huang e Xie (2007b) e Huang e Xie (2008c). A extensão do método para otimização de resistência ao choque foi proposta por Huang et al. (2007). Xia et al. (2017) introduziu um coeficiente de amortecimento numérico semelhante aos aplicados nos métodos baseados em densidade para restringir a variação dos números de sensibilidade que oscilam em várias ordens de magnitude devido aos efeitos dissipativos para estabilizar o processo evolutivo em estruturas sujeitas a colisões.

Recentemente, o método BESO tem sido utilizado por vários pesquisadores. Xia et al. (2018b) e Da et al. (2018b) estenderam o método para melhorar a resistência a fratura de compósitos reforçados com partículas. Xia et al. (2018c) estenderam o BESO para projetos

de minimização de tensão. Porém, em aplicações práticas de engenharia, é preferível considerar as tensões como restrição. Assim, Zhao et al. (2019a) estenderam o BESO para maximização da rigidez sujeito a restrição de volume e tensão máxima de von Mises. Nabaki et al. (2019) aplicaram o BESO para otimização topológica de estruturas para prevenção de falhas por fadiga em que a rigidez era maximizada com restrição de volume e restrição de falha por fadiga para prevenir a estrutura desse fenômeno dentro dos ciclos de vida prescritos. Zhao et al. (2019b) propõem uma metodologia utilizando o BESO para maximizar a confiabilidade da resposta a tensão dinâmica de estruturas envolvendo materiais multifásicos com restrição de volume. Kook (2019) combina o BESO com uma formulação de pressão e deslocamento mista para otimização da topologia de problemas de interação de estruturas acústicas. Xu et al. (2020) utilizam o BESO para maximizar a rigidez de estruturas geometricamente não lineares com restrição de volume e tensão máxima de von Mises. Shobeiri (2020) aplica o BESO para otimização de estruturas com não linearidades geométrica, de materiais e de contato sob cargas dinâmicas. Bahramian e Khalkhali (2020) aplicou o BESO para otimização da topologia de tubos quadrados de parede fina submetidos a carga de esmagamento axial para melhorar seu desempenho de resistência ao choque maximizando o total de energia absorvida por unidade de volume com restrição de 95% da capacidade de absorção de energia da estrutura. Radman (2021) combina o BESO com o algoritmo *harmony search* (HS) para otimização topológica de microestruturas para materiais celulares em que os módulos de flambagem e cisalhamento são selecionados como função objetivo com restrição de volume na fase sólida do material. Li e Xie (2021) aplicam o BESO para otimização topológica de estruturas com vários materiais, em especial, aqueles que possuem propriedades mecânicas de tensão e compressão distintamente diferentes. O método proposto leva a utilização de materiais como o critério par determinar a importância dos materiais para toda a estrutura e atribui um material adequado para cada elemento de acordo com a soma das tensões principais para obter uma distribuição multimaterial eficiente.

Assim, pela pesquisa bibliográfica realizada, os trabalhos em otimização estrutural considerando não linearidades e estruturas sujeitas a colisão para melhorar o desempenho de resistência ao choque são limitados. Ainda, verificou-se que o método BESO leva vantagem sobre os métodos gradientes baseados em densidade. Dessa forma, propõe-se o desenvolvimento de um algoritmo em *Python* utilizando o método BESO em conjunto com o *software* de elementos finitos Abaqus® para otimização de estruturas considerando efeitos de não linearidade e estruturas sujeitas a colisão.

### 3 ELEMENTOS FINITOS

Os métodos analíticos clássicos permitem a solução para diversos problemas estruturais utilizando a teoria das vigas, placas e cascas em conjunto com a teoria da elasticidade. Porém essas soluções requerem o uso de equações diferenciais efetuando uma quantidade volumosa de cálculos e são somente conhecidas para problemas simplificados que fogem da maioria das aplicações práticas. O método dos elementos finitos surge então como uma alternativa aos métodos analíticos que permite calcular a resposta da estrutura de maneira aproximada.

Os conceitos do método envolvem a divisão da estrutura em vários elementos finitos, ligados por nós, que em sua formulação, estão presentes os conceitos do comportamento físico conhecido da mecânica estrutural como por exemplo placas, cascas, membranas, sólidos e vigas do fenômeno que se deseja obter a resposta. No âmbito das aplicações estruturais, o interesse da análise está voltado para a determinação da configuração deformada da estrutura, a partir do cálculo dos deslocamentos nodais, ou seja, determinar a relação entre as cargas que atuam nos nós da estrutura e dos deslocamentos da estrutura. Assim, surge o conceito de rigidez. A rigidez da estrutura inteira depende da rigidez de cada um dos elementos. Dessa forma, é possível contabilizar a rigidez da estrutura a partir de cada um de seus elementos. No caso dos softwares de elementos finitos, existe uma biblioteca de elementos do programa com diversos elementos, cada qual tentando representar um diferente fenômeno físico da mecânica estrutural. Ao subdividir a estrutura em vários elementos finitos e rodar uma análise, o software determina a rigidez da estrutura a partir da matriz de rigidez de cada elemento. A partir da determinação da rigidez da estrutura, obtém-se os deslocamentos dos nós do elemento e a partir daí, obtém-se as deformações e as tensões. Na análise dinâmica, adicionalmente, entram a massa e o amortecimento da estrutura.

Ao contrário dos métodos analíticos que fornecem a resposta nos infinitos pontos da estrutura, no método dos elementos finitos, as respostas são obtidas apenas nos nós dos elementos, e entre eles, é usado uma função de interpolação. Assim, quanto maior o número de elementos, mais a resposta está próxima da solução exata.

#### 3.1 Análise Estática

Na análise estática, a carga não varia com o tempo, ou varia tão lentamente que é possível considerar seu valor máximo. Assim, as forças de inercia são desconsideradas. As forças atuantes na estrutura, ao deslocarem seus pontos de aplicação, realizam trabalho que contabilizam em última instância a energia transferida à estrutura que é armazenada como energia de deformação. Assim, as forças externas atuando na estrutura são equilibradas internamente pelas forças elásticas, segundo a Eq. (1).

$$\{F\} = \{K\}\{U\} \quad (1)$$

Onde  $\{F\}$ ,  $\{K\}$  e  $\{U\}$  representam respectivamente o conjunto de forças que atuam na estrutura, a matriz de rigidez global da estrutura e os deslocamentos dos nós da estrutura.

### 3.2 Análise Dinâmica

Na análise dinâmica, a carga varia rapidamente com o tempo, ou seja, não basta conhecer somente seu valor máximo, mas a duração da aplicação também. A referência para se estabelecer o quanto rápido ou lento é o carregamento, se dá pela definição das características dinâmicas básicas da estrutura, contabilizadas por intermédio das suas frequências naturais ou, em termos de tempo, pelos seus períodos naturais. Assim, na análise dinâmica, as forças de inércia eram consideradas e definiam a principal característica do problema dinâmico.

Diferente da análise estática em que o trabalho de uma força era armazenado na estrutura somente em energia de deformação, na análise dinâmica entra em jogo a energia cinética, associada aos movimentos, e a parcela referente ao amortecimento. Ou seja, as forças externas atuando na estrutura são equilibradas também pelas forças de inercia e de amortecimento, além das forças elásticas como mostra a Eq. (2).

$$\{M\}\{\ddot{U}\} + \{C\}\{\dot{U}\} + \{K\}\{U\} = \{F(t)\} \quad (2)$$

Onde  $\{F(t)\}$  representa as forças atuando na estrutura,  $\{M\}$  a matriz de massa da estrutura,  $\{C\}$  a matriz de amortecimento,  $\{\ddot{U}\}$  e  $\{\dot{U}\}$  as acelerações e velocidades nodais respectivamente.

A solução da Eq. (2) pode ser obtida por diferentes métodos. Sua escolha depende dos fenômenos que regem o problema, de tal forma que, o emprego incorreto do método pode afetar o desempenho do algoritmo ou a acurácia dos resultados. Existem dois métodos que podem ser adotados na solução: os de superposição de modos e os de integração direta, estes subdivididos em métodos implícitos e explícitos. O método de superposição não é eficiente nas análises não lineares sendo empregado somente em análises lineares, enquanto os métodos de integração direta são comumente empregados nas análises não lineares.

### 3.3 Não Linearidades

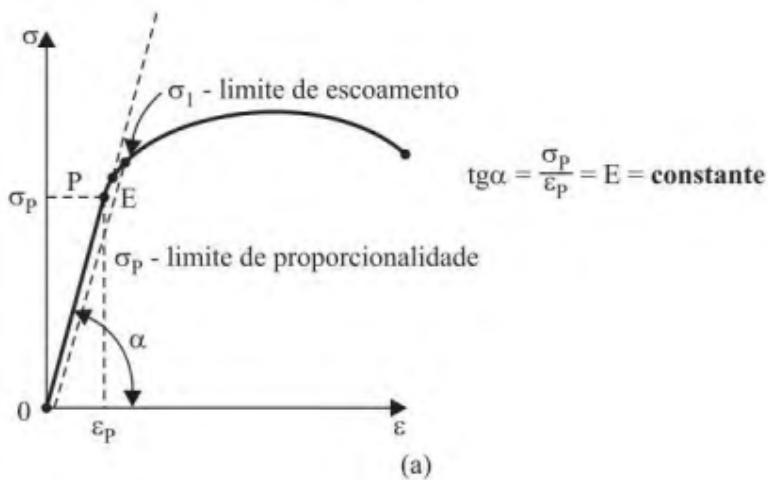
Na análise linear, ao determinar a rigidez da estrutura, a relação força e deslocamento já está previamente definida. Isso porque a rigidez da estrutura não se altera a medida que o carregamento se manifesta. Ou seja,  $\{K\}$  é constante. Assim, na mecânica estrutural, um problema é não linear quando a rigidez da estrutura depende dos deslocamentos. Essa dependência decorre da variação da rigidez da estrutura à medida que o carregamento atua. Como as incógnitas do problema são os deslocamentos da estrutura, surge a dificuldade de determinar a rigidez. Dessa forma, são empregados métodos incrementais e iterativos.

Os parâmetros associados a variação de rigidez da estrutura, ou seja, as fontes de não linearidade do problema, são as alterações das características do material durante a evolução do carregamento, em que a relação tensão e deformação não são lineares, alterações geométricas em que ocorre grandes deslocamentos na estrutura que altera sua forma, e alteração nas condições de contorno que envolve principalmente os fenômenos de contato entre dois corpos.

#### 3.3.1 Não Linearidade Material

O comportamento não linear do material decorre do fato de que o módulo de elasticidade se altera à medida que o material é submetido a tensões cada vez maiores. Considerando um ensaio de tração de um corpo de prova de aço, o comportamento típico do material pode ser representado pela Figura 1 que representa a curva tensão deformação.

**Figura 1 - Comportamento do aço sob tração**



Fonte: Alves Filho (2012)

Para fins práticos, considera-se os pontos do limite de proporcionalidade P e limite de escoamento E coincidentes. Se o material trabalha na estrutura até o limite de escoamento, o módulo de elasticidade se mantém constante e a relação entre tensão deformação é linear, valendo a lei de Hook e a matriz de rigidez não é afetada pela propriedade do material. Uma vez que o limite de escoamento é ultrapassado, começa uma reorganização interna dos cristais que compõem o material, fazendo com que as suas propriedades físicas sejam alteradas. Dessa forma, se a estrutura se deforma em que algumas de suas regiões, ou sua totalidade, passam a trabalhar acima do limite de escoamento, o módulo de elasticidade do material se modifica em função do estágio em que o carregamento se encontra. Em uma estrutura em que as tensões se distribuem de modo não uniforme, podemos ter regiões que estão no regime elástico e outras no regime plástico. Os elementos representativos dessas regiões devem ter seus módulos de elasticidade constantemente atualizados durante a análise. A rigidez de cada trecho da estrutura pode variar durante a análise e, como consequência, a rigidez da estrutura inteira.

A curva da Figura 1 possui várias adaptações para ajustar as equações matemáticas. A mais comum é a relação  $\sigma = K\varepsilon^n$  em que  $\varepsilon$  é a deformação do material e  $n$  é o coeficiente de encruamento. Porém, essa relação ao ser manipulada com as equações gerais da teoria da plasticidade implica em enorme dificuldade matemática. No sentido de evitar essa intratabilidade, são introduzidas algumas simplificações, com vistas a tomar o tratamento matemático factível. Decorrentes disso surgem algumas curvas de escoamento idealizadas.

A primeira curva idealizada é o modelo elástico perfeitamente plástico, ou elastoplástico perfeito representado pela Figura 2(a). Neste modelo, quando a tensão atuante atingir a tensão de escoamento, o elemento estrutural perde a capacidade de absorver um acréscimo de tensão e a deformação fica indefinida.

A segunda curva idealizada é o modelo elástico com encruamento linear ou elastoplástico com encruamento linear representado pela Figura 2(b). Neste modelo, uma vez ultrapassada a tensão de escoamento, o módulo de Young é substituído por um módulo tangente a nova reta de tal forma que o elemento estrutural tenha capacidade de absorver um acréscimo de tensão às custas de deformações maiores.

**Figura 2 - Modelos de plasticidade:** a) Elastoplástico perfeito; b) Elástico com encruamento linear

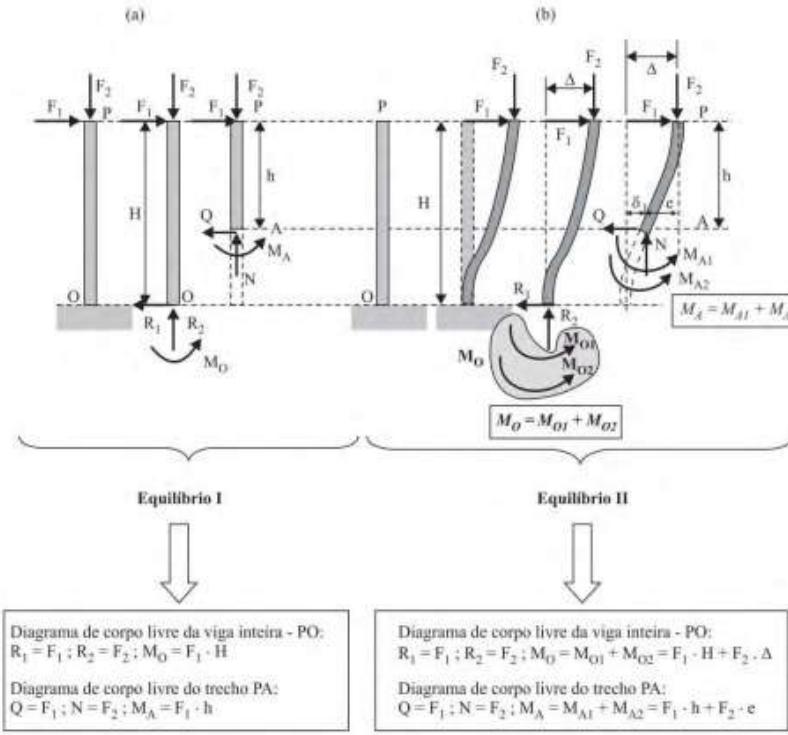


Fonte: Alves Filho (2012)

### 3.3.2 Não Linearidade Geométrica

A variação da rigidez da estrutura varia porque a configuração geométrica deformada dela altera as equações de equilíbrio. A Figura 3 ilustra o diagrama de corpo livre de uma estrutura em duas situações: a) estrutura indeformada e b) estrutura deformada.

**Figura 3 - Diagrama de corpo livre e equações de equilíbrio para: a) estrutura indeformada; b) estrutura deformada**



Fonte: Alves Filho (2012)

Observando a Figura 3(a) e Figura 3(b) nota-se que surgem alguns termos adicionais nas equações de equilíbrio tanto no cálculo das reações de apoio como na determinação das forças internas para a condição deformada da estrutura. Dentro da hipótese de pequenas deflexões, esses termos são desprezíveis e pode-se considerar que as equações de equilíbrio não se alteram. Porém, para grandes deflexões, à medida que a estrutura se deforma, as equações de equilíbrio se alteram e surgem termos adicionais que antes não estavam presentes.

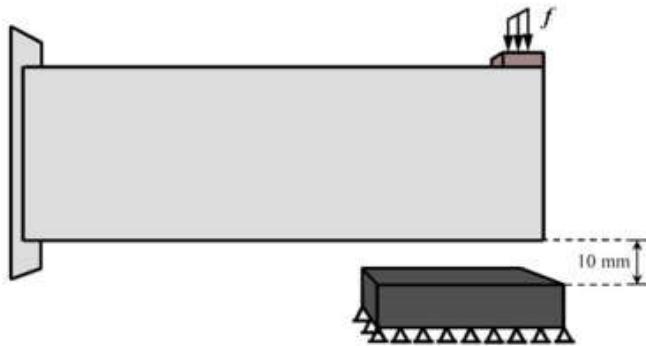
Assim, observa-se uma não linearidade. A relação entre forças e deslocamentos que é indicativa da rigidez da estrutura, expressa pela sua matriz de rigidez. À medida que a estrutura se deforma, novos termos de força surgem nas equações de equilíbrio. Se novos termos surgem à medida que os deslocamentos vão se manifestando, significa que a relação entre forças e deslocamentos se altera, portanto, a rigidez da estrutura também se altera. Ou seja, a rigidez da estrutura se modifica pelo fato de haver a presença de grandes deflexões.

A geometria deformada da estrutura altera as equações de equilíbrio e devido a isso chama-se essa dependência de não linearidade geométrica.

### 3.3.3 Não Linearidades Associadas à Mudanças das Condições de Contorno: Contato

A Figura 4 ilustra uma estrutura distante de 10 mm de um corpo rígido. Quando a estrutura é carregada, ela possui uma determinada rigidez antes de entrar em contato com o corpo rígido. Assim que a estrutura entra em contato com o corpo rígido, as condições de contorno mudam e as equações de equilíbrio não mais se aplicam. Dessa forma, a matriz de rigidez da estrutura sob a nova condição de contorno é diferente da anterior. Ou seja, o problema da nova condição de contorno é resolvido com a condição inicial que corresponde ao problema anterior.

**Figura 4** - Representação da mudança das condições de contorno



Fonte: Shobeiri (2020)

Assim o procedimento de cálculo deve atualizar a matriz de rigidez da estrutura durante a análise devido as não linearidades apresentadas. A atualização é feita por etapas, já que para os diversos incrementos ou aumentos de carga a rigidez da estrutura varia. Então, o problema é resolvido através de pequenos incrementos de carga em que são necessárias algumas iterações até conseguir atingir o equilíbrio da estrutura nesse incremento de carga.

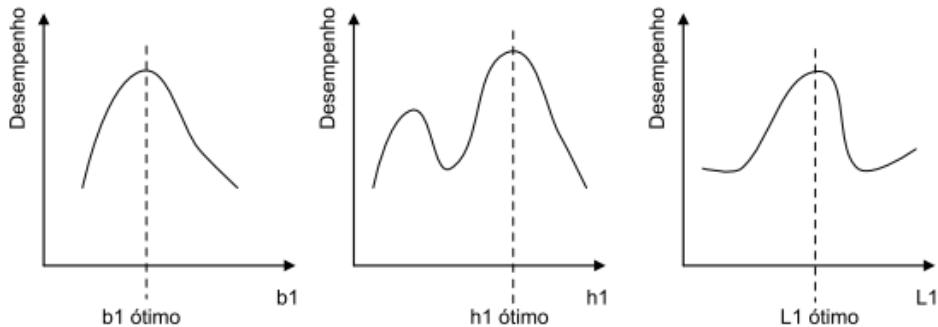
Para isso são empregados os métodos numéricos de Newton-Raphson, Newton-Raphson modificado, Riks etc. Nas análises efetuadas é usado o método de Newton-Raphson e Riks.

## 4 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

A otimização estrutural é a escolha de uma configuração final dentre vários possíveis, que seja o melhor segundo o objetivo prescrito e que seja adequado às restrições impostas ao mesmo. Essas restrições podem ser a quantidade de volume máximo de material utilizado, dimensões e deslocamentos pré-definidos, frequência natural, entre outras.

Existem duas abordagens para o projeto estrutural. A primeira é a abordagem de análise. Esta consiste em analisar diversas configurações possíveis de uma estrutura. Mediante o resultado são construídos gráficos ou tabelas do desempenho obtido em função de certos parâmetros variáveis, como representado na Figura 5. Com esses gráficos de desempenho, analisa-se e define-se a configuração de melhor desempenho dentre as obtidas.

**Figura 5 - Curvas de desempenho em função dos parâmetros**



Fonte: Adaptado de Silva (2001)

Conforme o número de parâmetros de projeto aumenta, a quantidade necessária de análises também aumenta e, consequentemente, o número de possíveis configurações do projeto tende a ser drasticamente grande. Isso torna o processo de análise inviável para sistemas muito complexos.

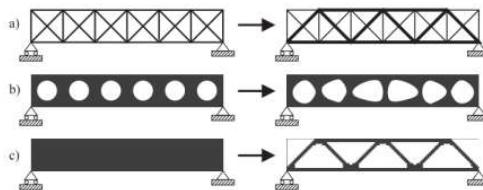
A segunda abordagem é a de síntese, ou otimização. Nessa abordagem são utilizados métodos computacionais que buscam, de forma racional, a configuração ótima para o projeto, ou seja, o algoritmo irá buscar, dentre um espaço de soluções possíveis, a combinação que fornece o melhor desempenho para o projeto. Assim, o termo otimização é corretamente

utilizado quando se aplica um método matemático de busca sistemática da solução ótima e não simplesmente quando se executa a análise de diversas configurações baseadas em tentativa e erro, por exemplo, Silva (2001).

Existem três abordagens principais em problemas de otimização estrutural. Elas se diferem no tipo de resultado que será obtido, as quais podem ser definidas da seguinte forma, (BENDSØE; SIGMUND, 2003):

- Otimização Paramétrica ou Dimensional: As variáveis aqui consideradas são parâmetros geométricos como a área da seção transversal ou coordenadas geométricas. Tais variáveis podem ser otimizadas respeitando determinadas restrições impostas ao problema como por exemplo, tensões máximas, deslocamentos e volumes limites de tal forma que satisfaçam uma determinada função objetivo. A forma e a topologia da estrutura são mantidas fixas. A Figura 6(a) ilustra a abordagem de otimização paramétrica.
- Otimização de Forma ou Geométrica: Os contornos externos e internos da estrutura são parametrizados e constituem as variáveis de projeto. Os contornos dos segmentos são alterados não havendo criação de mais regiões com a presença de vazios na estrutura de forma que atenda a uma determinada função objetivo. A Figura 6(b) ilustra a abordagem de otimização de forma.
- Otimização Topológica: Através de um domínio fixo de projeto, distribui-se o material ao longo de todo o domínio permitindo sua adição ou remoção gerando a presença de novos furos na estrutura, determinando regiões de não existência de material de tal forma que se possa atender uma função objetivo sob determinado critério ou restrição. A Figura 6(c) ilustra a abordagem de otimização topológica.

**Figura 6** - Abordagens de otimização estrutural. a) otimização paramétrica; b) otimização de forma; c) otimização topológica



Fonte: Adaptado de Bendsøe e Sigmund (2003)

## 4.1 Formulação Geral de Otimização

O problema de otimização refere-se a uma análise matemática em que se procura maximizar ou minimizar uma determinada função objetivo por meio da escolha sistemática de variáveis dentro de um conjunto viável, conhecido como espaço de busca ou domínio. O processo consiste em encontrar as variáveis de projeto  $x_1, x_2, \dots, x_n$  que satisfaçam a Eq. (3).

$$\text{min ou max : } f(\{x\})$$

$$\text{Sujeito a: } h(\{x\}) = 0$$

$$g(\{x\}) \leq 0 \quad (3)$$

$$\{x\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Onde  $f(\{x\})$  é a função objetivo e  $h(\{x\})$  e  $g(\{x\})$  representam as restrições.

## 4.2 Otimização Estrutural Evolucionária

A otimização estrutural evolucionária consiste resumidamente na remoção gradual dos elementos finitos menos eficientes da estrutura, dependendo de um algoritmo predeterminado, com o intuito de maximizar ou minimizar algum comportamento estrutural. A escolha dos elementos a serem retirados depende da sensibilidade elementar, calculada diferentemente para cada tipo de análise estrutural.

### 4.2.1 BESO hard-kill para critério de rigidez

Otimização topológica geralmente tem como objetivo obter a maior rigidez (menor flexibilidade) dado uma restrição de volume. Assim a descrição matemática do método BESO *hard-kill* é dada pela Eq. (4).

$$\min: C(X) = F^T U = U^T K U$$

$$\text{Sujeito a: } V^* - \sum_{i=1}^N x_i v_i = 0 \quad (4)$$

$$F = KU$$

$$x_i = 0 \text{ ou } x_i = 1$$

Onde  $C$  é a função objetivo representando a flexibilidade da estrutura;  $F$  e  $U$  são os vetores globais de força de deslocamento;  $K$  é a rigidez global;  $v_i$  é o volume de cada elemento;  $V^*$  é o valor imposto da restrição de volume;  $N$  é o número total de elementos;  $x_i$  é a variável de projeto que constitui cada elemento finito da malha em que  $x_i = 0$  significa ausência do elemento e  $x_i = 1$  significa presença.

O número de sensibilidade é definido pela Eq. (5). Percebe-se então que o aumento da flexibilidade é igual a energia de deformação do elemento removido. Assim, para minimizar a flexibilidade da estrutura deve-se eliminar os elementos que possuem o menor valor de sensibilidade.

$$\Delta C = \alpha_i = u_i^T K_i u_i \quad (5)$$

Onde  $\alpha_i$  é o número de sensibilidade do  $i$ -ésimo elemento.

#### 4.2.2 BESO soft-kill para critério de rigidez

Como uma forma alternativa de não remover completamente os elementos e alcançar um projeto de quase sólido-vazio, o módulo de Young do material é interpolado em função da densidade do elemento através de uma técnica similar ao método SIMP, conforme a Eq. (6).

$$E(x_i) = E_1 x_i^p \quad (6)$$

$$x_i = x_{\min} = 0,001 \text{ ou } x_i = 1$$

Onde  $E_1$  é o módulo de Young do material sólido;  $p$  é o expoente de penalização que tem valor igual a 3 nesse trabalho, e  $x_i$  é a variável de projeto em que  $x_i = x_{\min} = 0,001$  representa um material macio quase vazio e  $x_i = 1$  representa presença de material. É assumido que o número de Poisson é independente da variável de projeto e a matriz de rigidez global pode ser escrita segundo a Eq. (7).

$$K = \sum_i^N x_i^p K_0 \quad (7)$$

Onde  $K_0$  representa a matriz de rigidez dos elementos sólidos. O número de sensibilidade pode ser obtido através da Eq. (8).

$$\alpha_i = \frac{\partial C}{\partial x_i} = -px_i^{p-1}u_i^T K_0 u_i = -\frac{p}{x_i} x_i^p u_i^T K_0 u_i = -\frac{pE_i}{x_i} \quad (8)$$

Onde  $E_i$  é a energia de deformação do elemento. Diferente do método SIMP em que as variáveis de projetos são contínuas, nos métodos BESO/ESO essas variáveis são discretas. Isso significa dizer que apenas dois tipos de materiais são permitidos na estrutura, ou seja os materiais sólidos representados por  $x_i = 1$  e os materiais macios representados por  $x_i = x_{\min} = 0,001$ . Então o número de sensibilidade é definido pela Eq. (9).

$$\alpha_i = -\frac{1}{p} \frac{\partial C}{\partial x_i} = \begin{cases} u_i^T K_0 u_i & \text{para } x_i = 1 \\ x_i^{p-1} u_i^T K_i u_i & \text{para } x_i = x_{\min} \end{cases} \quad (9)$$

Através da Eq. (9), pode ser visto que o método BESO *hard-kill* é um caso especial do método BESO *soft-kill* quando o expoente de penalização se aproxima de infinito.

#### 4.2.3 BESO para Critério de Tensão

O critério de tensão é equivalente ao critério de rigidez. O número de sensibilidade é calculado segundo a Eq. (10).

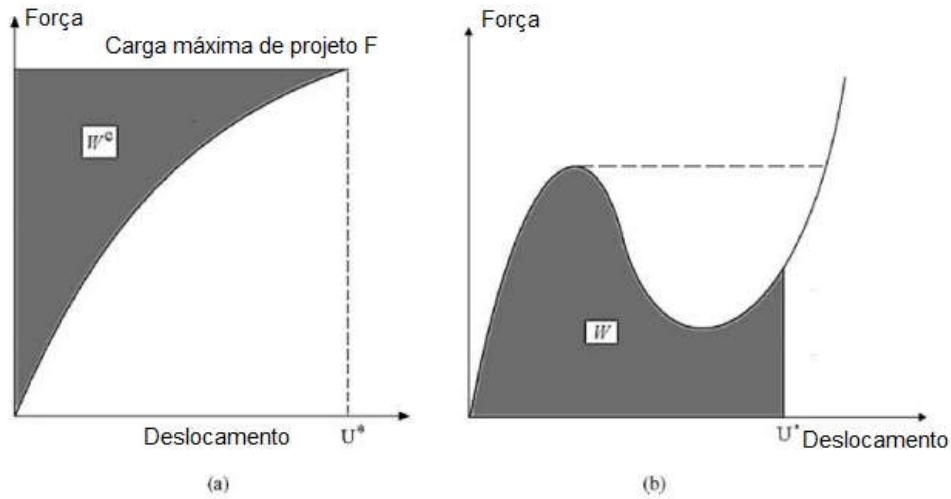
$$\alpha_i = \begin{cases} \sigma_{i0}^{vm} & \text{para } x_i = 1 \\ x_i^{p-1} \sigma_{i0}^{vm} & \text{para } x_i = x_{\min} \end{cases} \quad (10)$$

Onde  $\sigma_{i0}^{vm}$  é a tensão de von Mises do elemento sólido.

#### 4.2.4 BESO para Estruturas Não Lineares

Existem duas maneiras de carregar a estrutura. A primeira é aplicando uma força nela, sendo esse método chamado de controle de força. A segunda maneira é aplicar um deslocamento na estrutura sendo esse método chamado de controle de deslocamento. Se a estrutura for carregada por controle de força, o deslocamento irá se encaixar ao longo da linha pontilhada como ilustra a Figura 7(a). Alternativamente, sob controle de deslocamento, a trajetória pode seguir todo o caminho de equilíbrio como ilustra a Figura 7(b). Para a maioria das aplicações, o controle de deslocamento é mais prático e dessa forma ele será usado para a otimização de estruturas de absorção de energia.

**Figura 7 - Curva Força vs Deslocamento em análises não lineares.** a) Controle de força; b) Controle de deslocamento



Fonte: Adaptado de Huang e Xie (2010a)

Embora a resposta de uma estrutura linear possa ser determinada simplesmente resolvendo um conjunto de equações, o equilíbrio de uma estrutura não linear precisa ser encontrado por um procedimento iterativo. A força residual,  $R$ , é definida como a discrepância entre o vetor de força externa e o vetor de força interna segundo a Eq. (11).

$$R = F - F^{int} \quad (11)$$

Onde  $F$  é o vetor de força externa e  $F^{int}$  é o vetor de força interna.

O vetor de força interna pode ser expresso segundo a Eq. (12).

$$F^{int} = \sum_{e=1}^M C^{eT} F_e^{int} \quad (12)$$

Onde  $F_e^{\text{int}}$  é o vetor de força interna nodal do elemento e;  $C^{eT}$  é uma matriz que transforma o vetor de força nodal de um elemento para o vetor de força nodal global e  $M$  é o número total de elementos.

A equação de equilíbrio dado pela Eq. (11) é resolvida de forma incremental e iterativa usando o método de Newton-Raphson. Às vezes, algoritmos mais sofisticados que o Newton-Raphson precisam ser usados especialmente para problemas altamente não lineares, como o método de Riks.

Assim a descrição matemática para os problemas não lineares para controle de força é descrita pela Eq. (13) e para controle de deslocamento pela Eq. (14).

$$\begin{aligned} \text{min: } f_1(x) &= W^c = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta F^T (U_i + U_{i-1}) \right) \\ \text{Sujeito a: } V^* - \sum_{e=1}^M x_e v_e &= 0 \\ R &= F - F^{\text{int}} \\ x_e &= x_{\min} \text{ ou } x_e = 1 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \text{max: } f_W(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (U_i^T - U_{i-1}^T) (F_i + F_{i-1}) \right) \\ \text{Sujeito a: } V^* - \sum_{e=1}^M x_e v_e &= 0 \\ R &= F - F^{\text{int}} \\ x_e &= x_{\min} \text{ ou } x_e = 1 \end{aligned} \tag{14}$$

Onde  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  são respectivamente o trabalho complementar e o trabalho externo total no processo de deformação;  $U$  é o vetor de deslocamento;  $i$  é número do incremento do vetor de carga;  $n$  é o número total de incrementos;  $v_e$  é o volume do elemento e;  $V^*$  é o valor

imposto de restrição de volume;  $x_e$  é a variável de projeto que indica presença ou ausência de material.

Para o cálculo da sensibilidade tanto para o controle de força quanto para o controle de deslocamento, é usado o método adjunto introduzido por Buhl et al. (2000). O esquema de interpolação para modelar a não linearidade do material é convenientemente feito a partir da relação entre a tensão efetiva e a deformação efetiva conforme a Eq. (15).

$$\bar{\sigma}(x_e) = x_e^p K_t \Phi(\bar{\varepsilon}^0) \quad (15)$$

Onde  $\Phi(\bar{\varepsilon}^0)$  é uma função geral que representa as características do material;  $\bar{\varepsilon}^0$  é a deformação efetiva do material sólido;  $\bar{\sigma}(x_e)$  é a tensão efetiva do material e  $K_t$  é uma constante referente ao módulo de elasticidade.

Assim, a força interna da Eq. (12) pode ser reescrita pela Eq. (16).

$$F^{int} = \sum_{e=1}^M x_e^p C^{eT} F_{e0}^{int} \quad (16)$$

Onde  $F_{e0}^{int}$  é a força interna do elemento sólido.

O número de sensibilidade é calculado pela derivada da função objetivo em relação a variável de projeto e através do método adjunto, a sensibilidade tanto para o controle de força e controle de deslocamento resulta na Eq. (17).

$$\frac{\partial f}{\partial x_e} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (U_i^T - U_{i-1}^T) \left( \frac{\partial F_i^{int}}{\partial x_e} + \frac{\partial F_{i-1}^{int}}{\partial x_e} \right) \quad (17)$$

Assim, a partir do esquema de interpolação, o número de sensibilidade para otimização topológica de estruturas com não linearidade de material para o critério de rigidez com restrição de volume para controle de força e de deslocamento é calculado segundo a Eq. (18).

$$\alpha_i = \begin{cases} E^{el} + E^{pl} & \text{para } x_i = 1 \\ x_{min}^{p-1}(E^{el} + E^{pl}) & \text{para } x_i = x_{min} \end{cases} \quad (18)$$

Onde  $E^{el}$  e  $E^{pl}$  são, respectivamente, as energias de deformação elástica e plástica do elemento.

Apesar da sensibilidade para controle de força e deslocamento serem iguais, para o controle de força a função objetivo é minimizar o trabalho complementar e para controle de deslocamento, a função objetivo é minimizar o trabalho externo total.

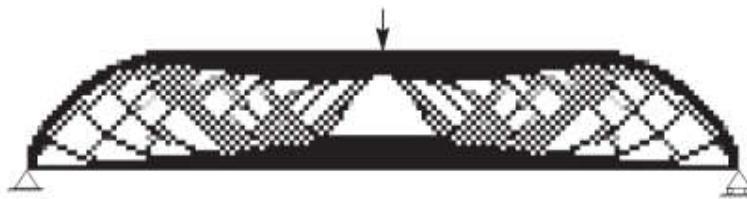
### 4.3 Instabilidades Numéricas

A aplicação dos métodos de otimização topológica leva ao surgimento de problemas de dependência de malha e de tabuleiros de xadrez.

#### 4.3.1 Instabilidade de Tabuleiro de Xadrez

A instabilidade de tabuleiro de xadrez é um problema recorrente em soluções obtidas pela otimização topológica, tendo como característica regiões onde elementos com material e sem material se encontram em forma de tabuleiro de xadrez, como ilustra a Figura 8.

**Figura 8 - O problema de instabilidade de xadrez**



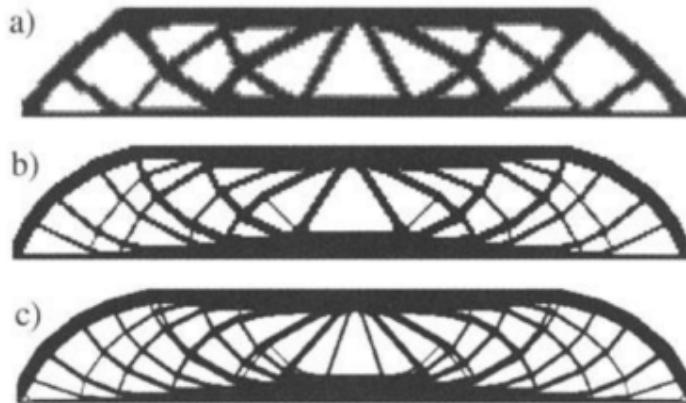
Fonte: Bendsøe e Sigmund (2003)

Estudos como os de Rodrigues & Fernandes (1993), Díaz & Sigmund (1995) e Zhou, Shyy & Thomas (2001) indicam que este aspecto de tabuleiros de xadrez está relacionada às características das aproximações de elementos finitos, e mais especificamente devido à má modelagem numérica que superestima a rigidez dos tabuleiros.

#### 4.3.2 Dependência de Malha

A dependência de malha refere-se ao problema de não encontrar a mesma solução quando o domínio é discretizado usando diferentes densidades de malha. Espera-se que quanto maior o refino da malha de elementos finitos, melhor será a topologia ótima da estrutura que descreva com maior fidelidade as condições de contorno do problema. Entretanto, não é isso que ocorre. Em muitos problemas, malhas mais refinadas resultam em topologias mais detalhadas e qualitativamente diferentes de um modelo resultado de uma malha mais grosseira como ilustra a Figura 9.

**Figura 9** - Problema de dependência de malha. Malha com: a) 2700 elementos; b) 4800 elementos; c) 17200 elementos



Fonte: Bendsøe e Sigmund (2003)

De acordo com Sigmund & Petersson (1998) o problema de dependência de malha pode ser dividido em duas categorias. A primeira é a obtenção de topologias finais cada vez mais complexas a medida que a malha de elementos finitos vai sendo refinada. Neste caso, malhas mais refinadas produzem estruturas “melhores” (ou seja, com valores cada vez menores na função objetivo, se o problema for a minimização do volume) quando comparadas com estruturas geradas a partir de malhas menos refinadas. A segunda é a obtenção de diversas soluções ótimas com mesmo valor da função objetivo. Este problema aparece devido a não unicidade da solução do problema discretizado.

#### 4.4 Esquema de Filtro e Estabilização da Sensibilidade

Para evitar a dependência da malha e o tabuleiro de xadrez, os números de sensibilidade são primeiro suavizados por meio do esquema de filtro a cada iteração. O método usado é o apresentado por Huang e Xie (2007a) que é semelhante ao apresentado por Sigmund e Petersson (1998), que foi aplicado à otimização topológica baseada no SIMP.

A aplicação do filtro se inicia com o cálculo da sensibilidade nodal, a partir da sensibilidade elementar de uma malha de elementos finitos. O número de sensibilidade nodal

$(\alpha_j^n)$  é obtido realizando uma média dos valores de sensibilidade dos elementos ligados a esse nó ( $\alpha_i^e$ ), de acordo com a Eq. (19).

$$\alpha_j^n = \sum_{i=1}^M \omega_i \alpha_i^e \quad (19)$$

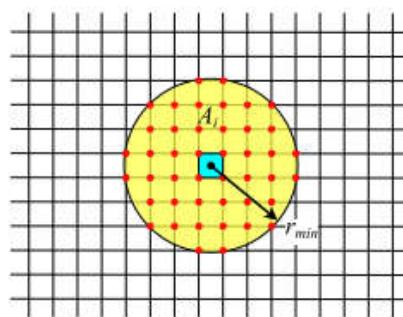
Onde  $M$  é o número de elementos ligados ao  $j$ -ésimo nó,  $\omega_i$  é o fator de peso do  $i$ -ésimo elemento e  $\sum_{i=1}^M \omega_i = 1$ . Pode-se definir  $\omega_i$  segundo a Eq. (20).

$$\omega_i = \frac{1}{M-1} \left( 1 - \frac{r_{ij}}{\sum_{i=1}^M r_{ij}} \right) \quad (20)$$

Onde  $r_{ij}$  é a distância do centro do elemento  $i$  ao centro do elemento  $j$ .

Tendo a sensibilidade elementar sido convertida em sensibilidade nodal, utiliza-se o parâmetro  $r_{min}$  para definir o tamanho do filtro, que independe do tamanho da malha. O objetivo do raio mínimo no filtro é identificar quais são os nós que influenciarão na sensibilidade do  $i$ -ésimo elemento. A Figura 10 ilustra a aplicação do parâmetro  $r_{min}$  para um elemento de uma malha mapeada.

**Figura 10** - Esquema de Filtro. Nós contabilizados para o número de sensibilidade do  $i$ -ésimo elemento na região  $A_i$



Fonte: Adaptado de Huang e Xie (2010a)

O valor de  $r_{min}$  define uma área  $A_i$  que englobe no mínimo três elementos, a fim de que se obtenha sensibilidades nos elementos. Uma vez definido  $r_{min}$ , pode-se contabilizar a sensibilidade elementar após a filtro numérico a cada iteração de acordo com a Eq. (21).

$$\hat{\alpha}_i = \frac{\sum_{j=1}^K \omega(r_{ij}) \alpha_j}{\sum_{j=1}^K \omega(r_{ij})} = \sum_j \frac{\omega(r_{ij})}{\sum_j \omega(r_{ij})} \alpha_j \quad (21)$$

$$\omega(r_{ij}) = \max(0, r_{min} - r_{ij})$$

Onde K é o número de nós contidos na região  $A_i$  e  $\omega(r_{ij})$  é a função de peso para calcular a média das sensibilidades brutas.

Observa-se que, após a aplicação do filtro, há uma suavização da sensibilidade elementar. Desta forma, um elemento sem material (vazio), que inicialmente apresenta sensibilidade nula, agora apresentará um número de sensibilidade não-nulo e poderá ser adicionado à topologia da próxima iteração.

A otimização topológica evolucionária, por utilizar variáveis de projeto discretas ( $x_{min}$  ou 1), apresenta uma dificuldade na convergência da função objetivo. Isso é explicado pela mudança brusca de sensibilidade elementar quando se adiciona ou retira elementos da topologia. Para manter a convergência da solução Huang e Xie (2007a) propuseram utilizar a média da sensibilidade com suas informações históricas de cada iteração segundo a Eq. (22).

$$\hat{\alpha}_i^k = \frac{\hat{\alpha}_i^k + \hat{\alpha}_i^{k-1}}{2} \quad (22)$$

Onde k é a iteração.

Assim, a atualização do número de sensibilidade inclui todo o histórico da sensibilidade nas iterações anteriores e é uma maneira eficiente de evitar problemas de convergência.

#### 4.5 Adição/Remoção de Material e Critério de Convergência

Na iteração, o volume alvo da próxima iteração é determinado com base no volume atual e uma razão evolutiva de acordo com a Eq. (23).

$$\begin{cases} V_{k+1} = V^* & \text{Se } V_k = V^* \\ V_{k+1} = V_k(1 - ER) & \text{Se } V_k \neq V^* \end{cases} \quad (23)$$

Onde  $V_{k+1}$  é o volume da próxima iteração;  $V_k$  é o volume da iteração atual; ER é a razão de volume evolutiva.

Os números de sensibilidade de todos elementos (sólidos e vazios) são calculados e depois da aplicação do filtro e aplicação da média histórica da sensibilidade os elementos são classificados de acordo com os valores de seus números de sensibilidade. O critério de adição e remoção é estabelecido segundo a Eq. (24).

$$\begin{cases} \text{Mude para } x_{\min} & \text{Se } \hat{\alpha}_i \leq \alpha^{\lim} \\ \text{Mude para } 1 & \text{Se } \hat{\alpha}_i > \alpha^{\lim} \end{cases} \quad (24)$$

Onde  $\alpha^{\lim}$  é o número de sensibilidade limite para adicionar e remover elementos calculado a partir de uma média entre o maior e menor valor dos números de sensibilidade no fim de cada ciclo de otimização de acordo com o volume alvo.

O ciclo de análise de elementos finitos e adição e remoção de elementos continua até que a restrição de volume seja alcançada e o critério de convergência dado pela Eq. (25) definido em termos da mudança da função objetivo seja alcançado.

$$\frac{|\sum_{i=1}^N F_{k-i+1} - \sum_{i=1}^N F_{k-N-i+1}|}{\sum_{i=1}^N F_{k-i+1}} \leq \tau \quad (25)$$

Onde  $k$  é a iteração atual,  $F$  é a função objetivo da otimização,  $\tau$  é a tolerância do critério de convergência da otimização estrutural e  $N$  é um número inteiro selecionado com valor igual a 5 o que implica que a variação da função objetivo nas últimas 10 iterações seja aceitavelmente pequena.

#### 4.6 Estruturas de Absorção de Energia

A otimização de estruturas de resistência ao choque é um dos problemas mais difíceis que estão sendo tratados atualmente. Isso é devido ao comportamento complexo que deve ser modelado para representar com precisão o processo de colisão, como não linearidades geométricas, de material e de contato. O projeto de resistência a colisão se refere, por exemplo, à análise e ao projeto de um veículo, sujeito a um evento de colisão. As técnicas de projeto estrutural que incorporam os requisitos de resistência ao choque do veículo devem garantir a segurança dos ocupantes em um determinado conjunto de condições. Em geral, a estrutura deve mostrar características de integridade estrutural, bem como absorção de energia. O projeto de resistência a colisões busca diminuir as acelerações absorvendo energia de deformação ao mesmo tempo que busca reduzir a penetração da deformação do veículo no passageiro que requer maior rigidez, o que são objetivos conflitantes.

No campo da topologia estrutural para resistência ao choque, o trabalho de Mayer et al. (1996) foi o primeiro grupo de pesquisadores que lidaram com esse problema de otimização tecnicamente difícil. O método de otimização utilizava a técnica de homogeneização onde a função objetivo era minimizar a energia interna com restrição de volume. O método de critério de otimalidade foi utilizado para determinar a distribuição do material. Pedersen (2004) posteriormente desenvolveu um método para otimização da topologia usando elementos de viga bidimensionais. Neste trabalho, o método das assíntotas móveis foi utilizado e o objetivo era obter um histórico de absorção de energia desejado para minimizar o erro entre a aceleração atual e uma aceleração prescrita em pontos específicos da estrutura. Este método utilizou elementos de viga de plástico que poderia sofrer grandes rotações e deslocamentos, e os problemas foram tratados como quase estáticos para simplificação. O trabalho do autor foi eficiente usando sensibilidades analíticas e um método de integração implícita apesar do modelo ignorar o contato entre os elementos por causa do grande número de descontinuidades e instabilidades numéricas associadas aos fenômenos altamente não

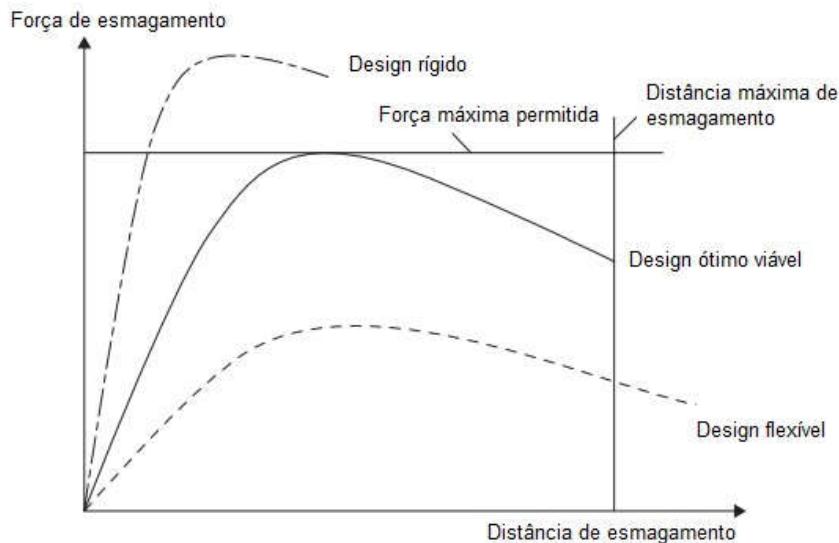
lineares. Soto (2004) apresentou uma metodologia heurística que não exigia informações de sensibilidade. Nesse esquema heurístico, Soto implementou um critério conhecido como "Tensão/Deformação plástica prescrita" que variou as densidades dentro do domínio de projeto para alcançar uma distribuição prescrita de deformações e tensões plásticas com restrição de massa. A ideia por trás do critério era projetar uma estrutura que absorve energia de forma eficiente, distribuindo a deformação plástica em toda a estrutura. Fosberg e Nilsson (2007) também investigaram um método sem informações de sensibilidade que consistia em remover os elementos ou, alternativamente, alterar as espessuras dos elementos com base na distribuição de densidade de energia interna.

Em geral, a aplicação prática de otimização de topologia para o projeto de resistência ao choque requer a simplificação de interações complexas no problema. Ao contrário do problema de otimização de estruturas lineares estáticas, a avaliação das sensibilidades utilizando métodos analíticos em uma análise dinâmica demanda um alto custo computacional tornando a análise inviável. Segundo Fosberg e Nilsson (2007) quando um método explícito de elementos finitos é usado para resolver o problema de impacto e contato, as sensibilidades não podem ser facilmente encontradas. Assim métodos adjuntos e semi analíticos podem ser usados para calcular sensibilidades para problemas complexos.

#### *4.6.1 BESO para Estruturas de Absorção de Energia*

Problemas de otimização de topologia de estruturas de absorção de energia geralmente possuem certas restrições, como limites de força e deformação como ilustra a Figura 11. Normalmente, uma distância de esmagamento máxima permitida é prescrita, de modo a reter espaço suficiente para a sobrevivência dos ocupantes ou outros dispositivos importantes. Ao mesmo tempo, um alto nível de força é necessário a fim de dissipar uma grande quantidade de energia. No entanto, a força máxima não deve ser muito grande, pois pode estar além do nível de tolerância dos ocupantes. Em outras palavras, a estrutura de absorção de energia não deve ser muito rígida, o que pode exceder o limite de força, nem muito flexível, o que pode exceder a distância de esmagamento permitida. Portanto, uma estrutura de absorção de energia ideal deve possuir uma relação de força-deslocamento conforme a Figura 11, embora isso seja praticamente inatingível.

**Figura 11 - Curva típica de força por deslocamento e restrições para projeto de estruturas de absorção de energia**



Fonte: Adaptado de Huang e Xie (2010a)

Para obter o projeto de absorção de energia mais eficiente, pode-se maximizar o total de energia absorvida por unidade de volume dentro dos limites prescritos para a força e o deslocamento. Assim, o problema de otimização pode ser formulado usando os elementos como variáveis de projeto segundo as Eq. (26.1), Eq. (26.2), Eq. (26.3) e Eq. (26.4).

$$\max: f(x) = \frac{E_t}{V} \quad (26.1)$$

$$\text{Sujeito a: } F_{\max} = F^* \quad (26.2)$$

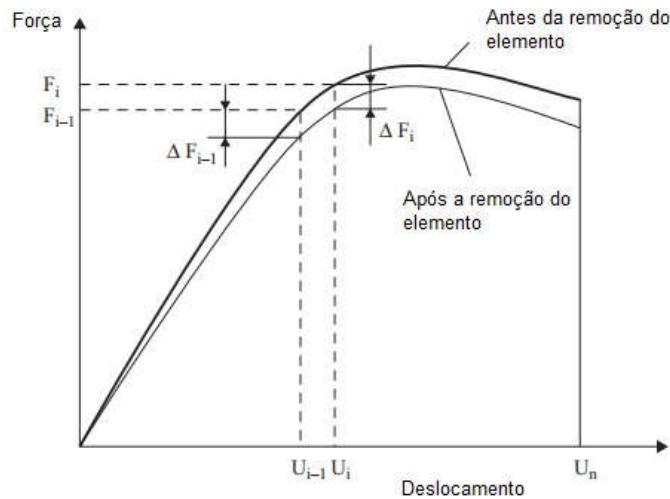
$$U_{\max} = U^* \quad (26.3)$$

$$x_j = 0 \text{ ou } x_j = 1 \quad j = 1, \dots, M \quad (26.4)$$

Onde  $f(x)$  é a função objetivo,  $F$  e  $U$  são os vetores de força externa e deslocamento respectivamente;  $F^*$  e  $U^*$  são os valores máximos de força e deslocamento permitidos;  $E_t$  é a energia total absorvida;  $x_j$  é a variável de projeto binária que declara presença ( $x_j = 1$ ) ou ausência ( $x_j = 0$ ) de material,  $M$  é o total de elementos e  $V$  é o volume da estrutura.

Para simular o comportamento de esmagamento ou colisão de uma estrutura, a análise de elementos finitos não linear é conduzida aumentando gradualmente o deslocamento dos pontos de impacto de 0 à máxima distância de esmagamento permitida,  $U^*$ . Portanto, a restrição de deslocamento máximo da Eq. (26.3) é facilmente satisfeita. Para satisfazer a restrição de força máxima, as informações de sensibilidade de força máxima precisam ser calculadas em métodos convencionais de otimização. No entanto, esta é uma tarefa difícil para estruturas de absorção de energia com não linearidades geométricas e materiais. Então presume-se que a curva força-deslocamento não muda significativamente antes e depois de um elemento ser eliminado do domínio do projeto, conforme a Figura 12 e que a força máxima diminuirá ou aumentará conforme o volume total da estrutura diminui ou aumenta. Portanto, a restrição de força da Eq. (26.2) será heuristicamente satisfeita variando o volume total da estrutura. Como resultado, apenas a sensibilidade da função objetivo na Eq. (26.1) precisa ser considerada.

**Figura 12 - Curvas de força-deslocamento antes e depois de remover um elemento para análise de sensibilidade**



Fonte: Adaptado de Huang e Xie (2010a)

A variação da função objetivo em relação à mudança na variável de projeto  $x$  é descrita pela Eq. (27).

$$\Delta f(x) = \frac{1}{V} \left( \Delta E_t - \frac{E_t}{V} \Delta V \right) \quad (27)$$

De acordo com o princípio da conservação de energia, a energia de deformação total é igual ao trabalho externo. Quando a estrutura é esmagada até o deslocamento final  $U^*$ , a energia de deformação total  $E_t$  e o trabalho externo total  $f_W$  podem ser obtidos na Figura 12 como expressa a Eq. (28).

$$E_t = f_W(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (U_i^T - U_{i-1}^T)(F_i + F_{i-1}) \right) \quad (28)$$

A Eq. (28) é idêntica a maximização da rigidez de estruturas não lineares representada pela Eq. (14).

Quando o j-ésimo elemento é removido do sistema, a variação do trabalho externo pode ser aproximadamente expressa pela energia de deformação final do j-ésimo elemento, de acordo com a Eq. (29).

$$\Delta E = -E_n^j \quad (29)$$

Onde  $E_n^j$  é a energia total de deformação do j-ésimo elemento quando  $U = U^*$ .

A variação do volume total é calculada pela Eq. (30).

$$\Delta V = -V_j \quad (30)$$

Onde  $V_j$  é o volume do j-ésimo elemento. Substituindo a Eq. (29) e Eq. (30) na Eq. (27), a variação da função objetivo pode ser reescrita conforme a Eq. (31).

$$\Delta f(x) = \frac{1}{V} \left( \frac{V_j}{V} E_t - E_n^j \right) \quad (31)$$

Um número de sensibilidade do elemento adimensional pode ser obtido a partir da Eq. (32).

$$\alpha_n^j = \frac{V_j}{V} - \frac{E_n^j}{E_t} \quad (32)$$

Na otimização de estruturas de absorção de energia, não há restrição de volume como foi definido para as estruturas estáticas lineares e não lineares para maximização de rigidez. A determinação do volume alvo da próxima iteração é feita comparando a força máxima que atua na estrutura com a força máxima de restrição. A fim de satisfazer a restrição de força máxima de esmagamento, o volume da estrutura diminuirá quando a força máxima que atua na estrutura for maior que a força máxima de restrição. Da mesma forma, o volume da estrutura será aumentado quando a força máxima que atua nela for menor que a força máxima de restrição de acordo com a Eq. (33).

$$\begin{cases} \text{Se } F_{max} > F^* & V_{k+1} = V_k(1 - ER) \\ \text{Se } F_{max} < F^* & V_{k+1} = V_k(1 + ER) \end{cases} \quad (33)$$

O número de sensibilidade elementar fornece uma estimativa da classificação relativa de cada elemento em termos de seu efeito na função objetivo, se for removido. Para maximizar a função objetivo, os elementos sólidos com os maiores números de sensibilidade positivo devem ser mudados para vazio. Ao mesmo tempo, os elementos vazios com os valores negativos mais baixos devem ser alterados para sólidos segundo a Eq. (34).

$$\begin{cases} \text{Mude para 0} & \text{Se } \hat{\alpha}_l \geq \alpha^{\lim} \\ \text{Mude para 1} & \text{Se } \hat{\alpha}_l < \alpha^{\lim} \end{cases} \quad (34)$$

Onde  $\hat{\alpha}_l$  é a sensibilidade do elemento depois de aplicado o filtro e feito a média das informações de cada iteração do valor da sensibilidade e  $\alpha^{\lim}$  é a média entre o maior valor de sensibilidade e o menor valor.

Pode-se perceber que esse critério foca na energia máxima absorvida por unidade de volume do deslocamento final, ou seja, o objetivo é absorver a maior quantidade de energia no deslocamento final com a menor quantidade de material. Portanto, o índice de desempenho pode ser definido de acordo com a Eq. (35) que representa o valor da função objetivo da estrutura otimizada.

$$e_1 = \frac{W}{V} \quad (35)$$

Onde W é o trabalho externo e V é o volume da estrutura.

## 5 METODOLOGIA

Alguns exemplos numéricos representativos clássicos da literatura serão avaliados segundo a aplicação do método evolucionário. Esses exemplos são divididos em duas partes, em que a primeira consiste na aplicação do método BESO *hard-kill* e *soft-kill* em problemas lineares e não lineares (material e geométrica), pelo critério de rigidez, enquanto a segunda, se dedica a aplicação do método BESO *hard-kill* em estruturas de absorção de energia. A primeira parte compreende os primeiros dois exemplos. O primeiro exemplo dedica-se a análises de uma estrutura 2D do trabalho de Buhl et al. (2000), enquanto que o segundo exemplo é referente a uma estrutura 3D do trabalho de Huang e Xie (2010a). O objetivo da primeira parte é comparar a metodologia evolucionária com o método SIMP e apresentar as vantagens e diferenças entre os métodos BESO *hard-kill* e *soft-kill*. Zuo e Xie (2015) apresentam detalhadamente o algoritmo BESO *soft-kill* e seu funcionamento em conjunto com o *software* de elementos finitos Abaqus para otimização de estruturas sob o critério de rigidez. Para aplicação do método *hard-kill* é necessário identificar os elementos que serão removidos e desativá-los durante a análise de elementos finitos conforme a Figura 13. Esse comando é aplicado somente na primeira iteração. Para a técnica *full design*, ele é aplicado depois da análise de elementos finitos e da identificação dos elementos que serão removidos pela função BESO. Para a técnica de estimativa inicial de *design*, ele deve ser aplicado logo no início, antes das análises de elementos finitos.

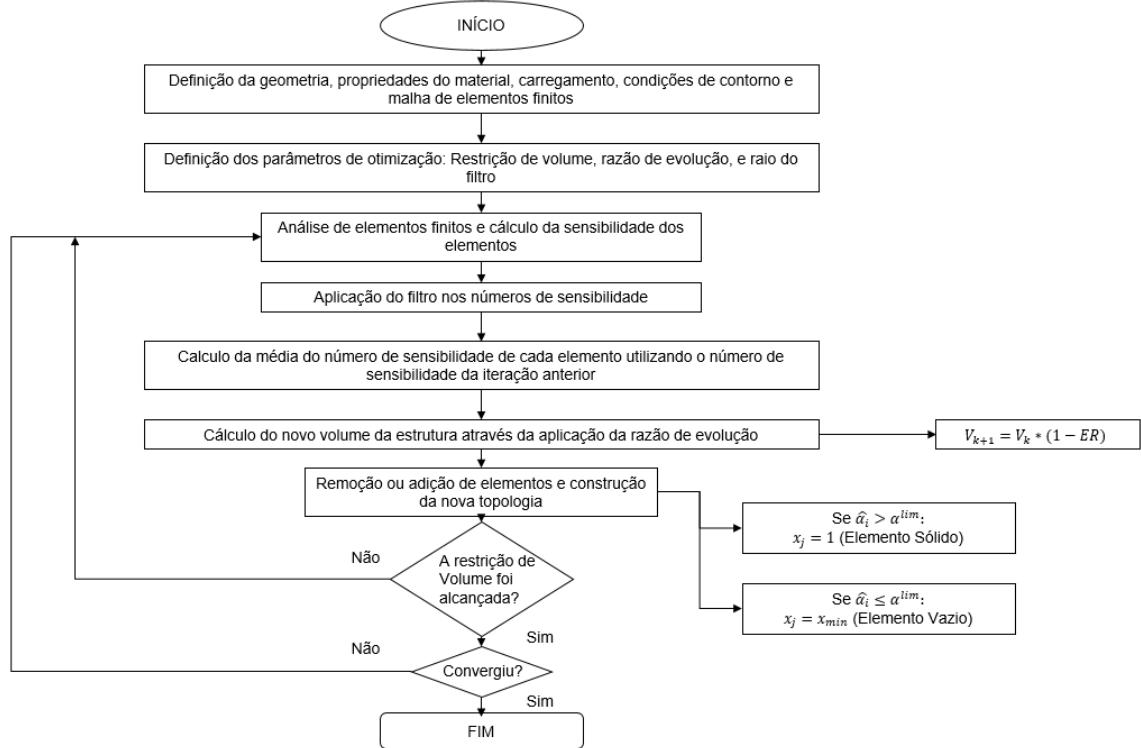
**Figura 13** - Comando de desativação dos elementos removidos nas análises de elementos finitos

```
BESO(nv, xe, ae, part, elmts)
a = mddb.models['Model-1'].rootAssembly
region = a.instances['Part-1-1'].sets['vs']
mddb.models['Model-1'].ModelChange(name='Int-1', createStepName='Step-1',
                                    region=region, regionType=ELEMENTS, activeInStep=False,
                                    includeStrain=False)
```

Fonte: Autor

A Figura 14 ilustra o fluxograma que retrata o procedimento do método BESO para critério de rigidez.

**Figura 14 - Fluxograma do método de otimização evolucionário**



Fonte: Autor

Já para o critério de tensão, é necessário requisitar os resultados das tensões de von Mises no campo de *FieldOutput* do Abaqus. Isso pode ser feito diretamente no Abaqus ou substituir o comando `mdl.FieldOutputRequest('SEDensity','Step-1',variables=('ELEDEN',))` na função de formatação `def fmtMdb(Mdb)` do algoritmo apresentado por Zuo e Xie (2015). Depois, é alterado o cálculo do número de sensibilidade  $A_e$ , conforme a Eq. (10), ilustrado pela Figura 15. O critério de tensão possui o mesmo procedimento do critério de rigidez ilustrado pela Figura 14.

**Figura 15 - Cálculo do número de sensibilidade para critério de tensão**

```

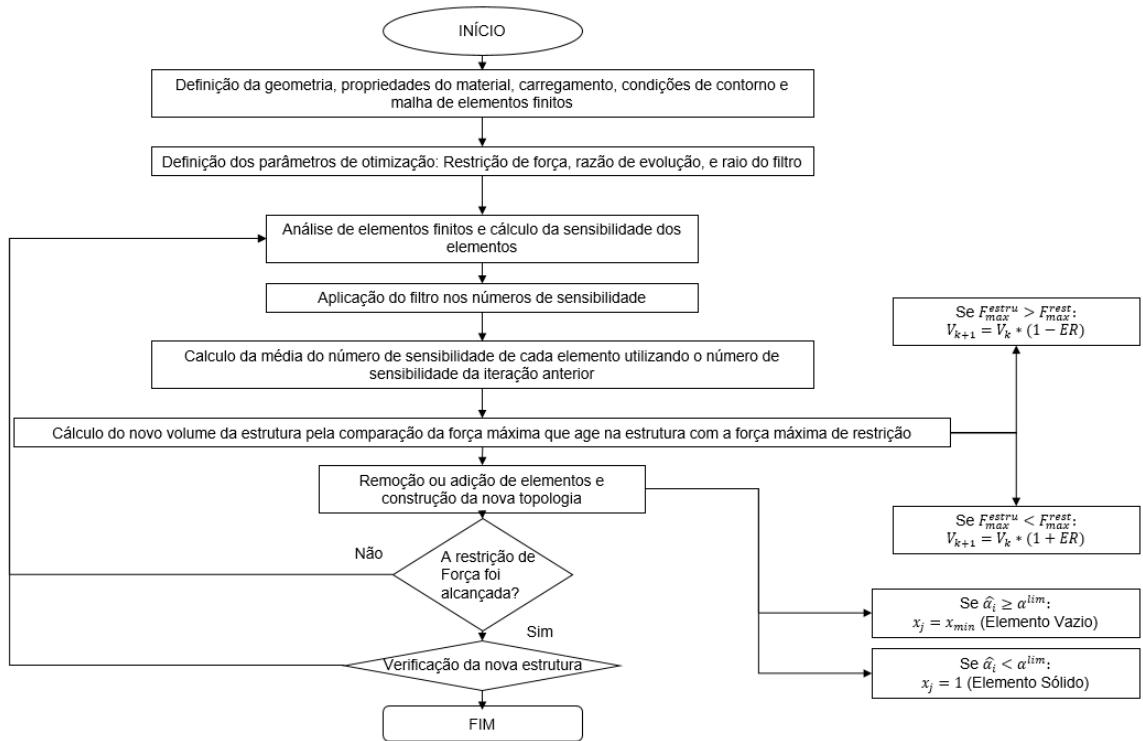
def FEA(Iter,Mdb,Xe,Ae):
    Mdb.Job('Design_Job'+str(Iter), 'Model-1').submit()
    Mdb.jobs['Design_Job'+str(Iter)].waitForCompletion()
    opdb = openOdb('Design_Job'+str(Iter)+'.odb')
    seng = opdb.steps['Step-1'].frames[-1].fieldOutputs['MISESONLY'].values
    for en in seng: Ae[en.elementLabel]=en.data/Xe[en.elementLabel]
    obj=opdb.steps['Step-1'].historyRegions['Assembly_ASSEMBLY'].historyOutputs['ALLWK'].data[-1][1]
    opdb.close()
    return obj

```

Fonte: Autor

A segunda parte comprehende os demais exemplos para aplicação do método BESO *hard-kill* em estruturas de absorção de energia. O terceiro exemplo consiste na otimização de uma placa bi engastada do trabalho de Huang et al. (2007) utilizando dois materiais diferentes e tem por objetivo analisar as topologias obtidas. O quarto exemplo se refere a aplicação do método evolucionário no trabalho de Fosberg e Nilsson (2007) e tem por objetivo comparar os resultados entre as duas metodologias. Adicionalmente, é verificado também os resultados para diferentes tipos de carregamentos, condições de contorno, e diferentes elementos finitos. A Figura 16 ilustra o fluxograma que retrata o procedimento do método BESO para estruturas de absorção de energia e o código é apresentado no Apêndice.

**Figura 16 - Fluxograma do método de otimização evolucionário para estruturas de absorção de energia**



Fonte: Autor

Para economizar tempo, a função pré filtro, `def preFlt(Rmin,Elmts,Nds,Fm)`, que calcula as distâncias entre centros de cada elemento em relação aos demais, é utilizada apenas uma

vez para cada exemplo, antes de aplicar a otimização estrutural. As informações de distâncias entre centros dos elementos são então, armazenadas em um arquivo Filtred\_design.cae e é usada a função def preFm() durante o processo de otimização para abrir esse arquivo e utilizar as distâncias calculadas na aplicação do filtro no número de sensibilidade do elemento.

As análises foram feitas através de um computador pessoal com processador i7-5500U CPU, 2.40GHz e 8GB de memória RAM e foi utilizado a biblioteca “*time it*” do *Python* que possui a função de cronômetro para contar o tempo de cada iteração em que é feita a análise de elementos finitos e o tempo de toda a otimização.

## 6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 6.1 Parte I – Otimização de Estruturas Lineares e Não Lineares

#### 6.1.1 Exemplo 1 – Placa bi engastada 2D

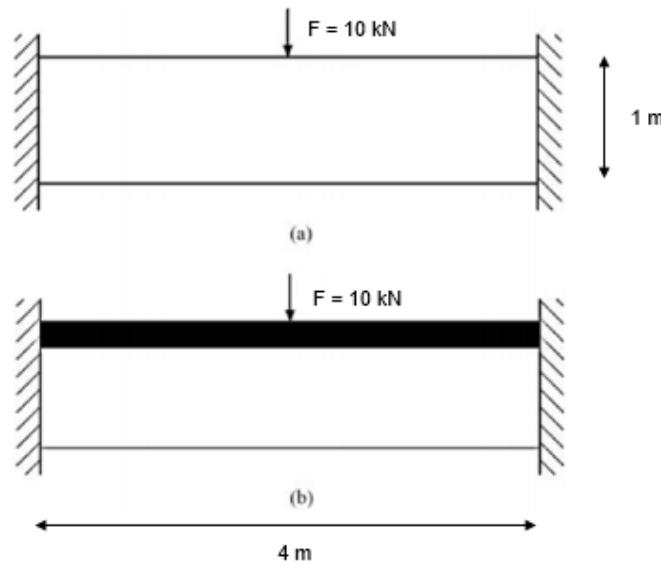
O primeiro exemplo consiste na otimização topológica de uma viga bi engastada sob critério de rigidez com restrição de volume e sob o critério de tensão com restrição de volume analisada por Buhl et al. (2000) através do método SIMP. A estrutura é representada pela Figura 17(a) e possui dimensões de 4 metros de largura, 1 metro de altura e 0,01 m de espessura. A viga é otimizada tanto para análises lineares e não lineares considerando não linearidades material e geométrica através dos métodos BESO *hard-kill* e *soft-kill*. O objetivo deste exemplo é comparar os resultados do método evolucionário com o método SIMP, apresentando as vantagens e as diferenças entre os métodos *hard-kill* e *soft-kill*, comparar o critério de tensão e de rigidez sob restrição de volume e também as diferenças entre otimizações lineares e não lineares. A Tabela 1 lista as propriedades do material e os parâmetros de otimização evolucionária. A malha é discretizada em 160 x 40 elementos quadriláteros de tensão plana de 4 nós. É aplicado também a técnica de estimativa inicial de design em que apenas a porcentagem do volume final da estrutura participa da análise de elementos finitos como ilustra a Figura 17(b).

**Tabela 1** - Propriedades do material e Parâmetros de otimização do Exemplo 1

Propriedades do modelo de plasticidade de Ramberg-Osgood				
Módulo de Elasticidade	Poisson	Tensão de Escoamento	Offset de Escoamento	Expoente de Encruamento
$E = 500 \text{ MPa}$	$\nu = 0,3$	$\sigma_y = 1 \text{ MPa}$	$\alpha = 0,002$	$\eta = 3$
Parâmetros de Otimização				
Volume de Restrição	Razão de Evolução	Raio do Filtro		Tolerância de erro da Função Objetivo
$V^* = 20\%$	$ER = 1\%$	$r_{min} = 0,05 \text{ m}$		$\tau = 0,01\%$

Fonte: Autor

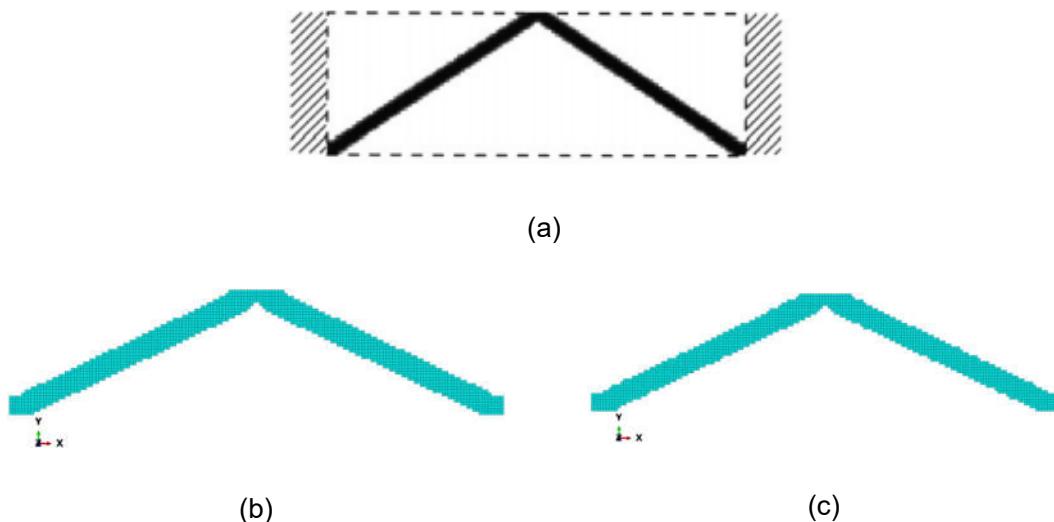
**Figura 17 - Placa bi engastada 2D.** a) Domínio de projeto da estrutura inteira; b) Estimativa inicial de projeto



Fonte: Adaptado de Huang e Xie (2010a)

A Figura 18(a) ilustra a topologia obtida pelo método SIMP e a Figura 18(b) e (c) a topologia obtida pelo método BESO *soft-kill* e *hard-kill full design* respectivamente para a análise linear. Observa-se que as topologias obtidas são iguais para os três métodos.

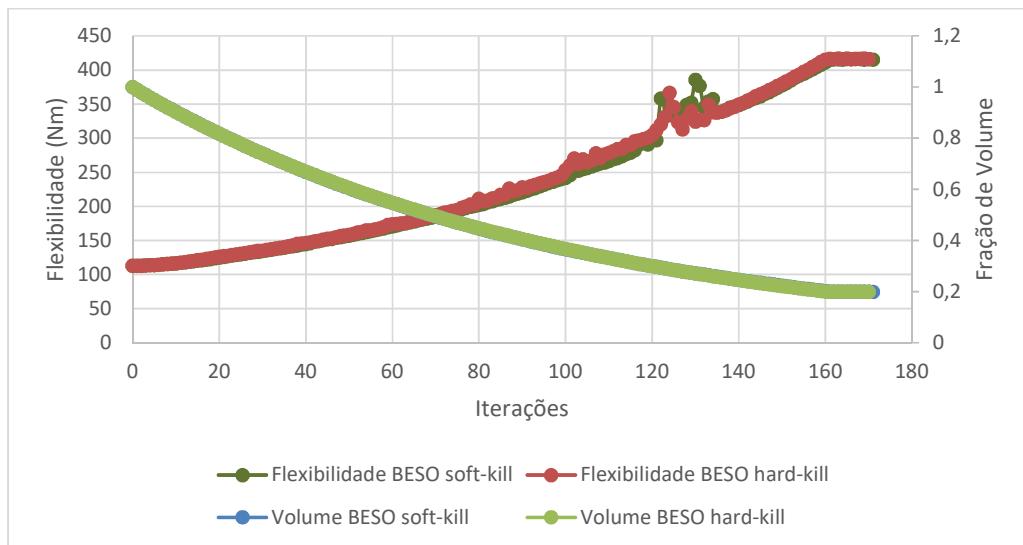
**Figura 18 - Topologias Lineares:** a) Método SIMP; b) BESO *soft-kill*; c) BESO *hard-kill*



Fonte: Autor

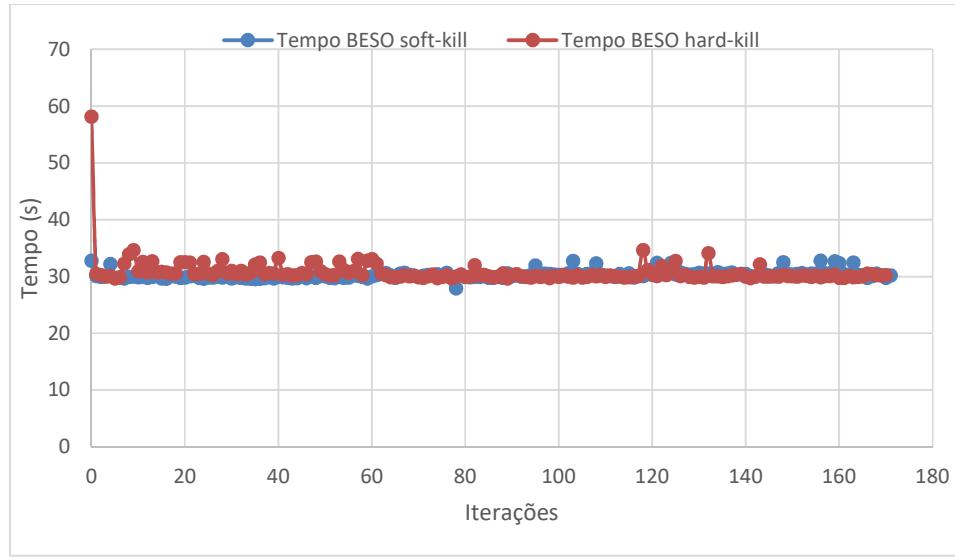
A Figura 19 ilustra o histórico da função objetivo dado pela flexibilidade da estrutura que é representada pelo trabalho externo da força e a fração de volume ao longo de cada iteração e a Figura 20 ilustra o tempo de execução da análise de elemento finitos ao longo de cada iteração tanto para os métodos BESO *soft-kill* e *hard-kill*. O tempo total da otimização é de 1 hora e 27 minutos com 171 iterações para o BESO *soft-kill* e 1 hora e 28 minutos com 170 iterações para o BESO *hard-kill*.

**Figura 19 - Função Objetivo e Volume da Estrutura para Análise Linear BESO *soft-kill* e *hard-kill full design***



Fonte: Autor

**Figura 20 - Tempo por Iteração da Análise Linear BESO *soft-kill* e *hard-kill full design***

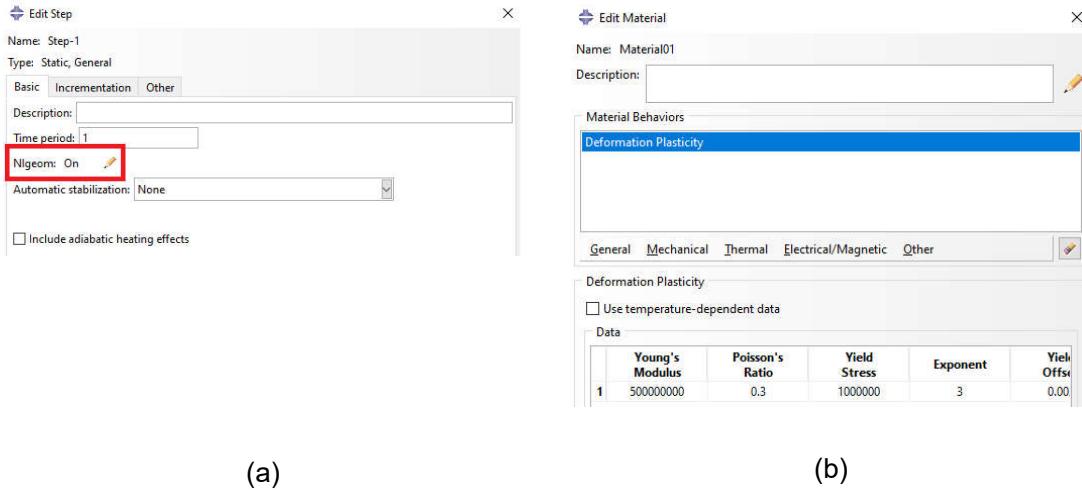


Fonte: Autor

Percebe-se pela Figura 19 a equivalência entre os métodos BESO *soft-kill* e *hard-kill* com ambos atingindo uma flexibilidade cerca de 416 Nm e 20% do volume total. Percebe-se pela Figura 20 que o tempo de análise por iteração foi praticamente igual entre os dois métodos evolucionários. Apesar do método *hard-kill* ser computacionalmente mais eficiente que o *soft-kill* por excluir os elementos removidos da análise de elementos finitos, neste exemplo linear 2D, o método BESO *soft-kill* foi um minuto mais rápido que o BESO *hard-kill*. Esse comportamento indica que para análises lineares 2D da estrutura completa (*full design*), com poucos elementos finitos, a diferença entre os dois métodos é mínima.

Para conduzir a otimização não linear, é necessário atribuir as não linearidades geométricas e de material. A primeira é ativada pelo Abaqus nas configurações de “step” através da opção “NLgeom” conforme ilustra a Figura 21(a) e a não linearidade material se dá pela atribuição das propriedades do material seguindo o modelo de plasticidade de Ramberg-Osgood descrito no Abaqus® como Material *Behavior Deformation Plasticity* como ilustra a Figura 21(b). Além disso, é necessário modificar o algoritmo para incluir a parcela da energia de deformação elástica para o cálculo do número de sensibilidade, segundo a Eq. (18). As configurações de incrementos são definidas para um incremento inicial de 1% do valor da carga, mínimo de  $1 \times 10^{-5}$ , máximo de 100% e número máximo de iterações igual a 100.

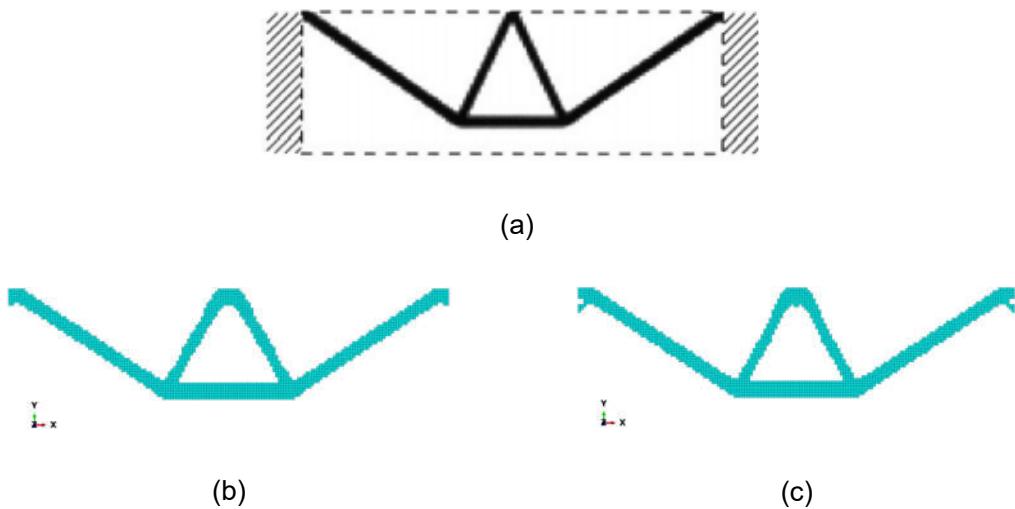
**Figura 21 - Atribuindo Não Linearidades: (a) Geométrica; (b) Material**



Fonte: Autor

A Figura 22(a) ilustra a topologia obtida pelo método SIMP e a Figura 22(b) e (c) a topologia obtida pelo método BESO *soft-kill* e *hard-kill* respectivamente para análise não linear. Novamente, observa-se que as três topologias são praticamente iguais.

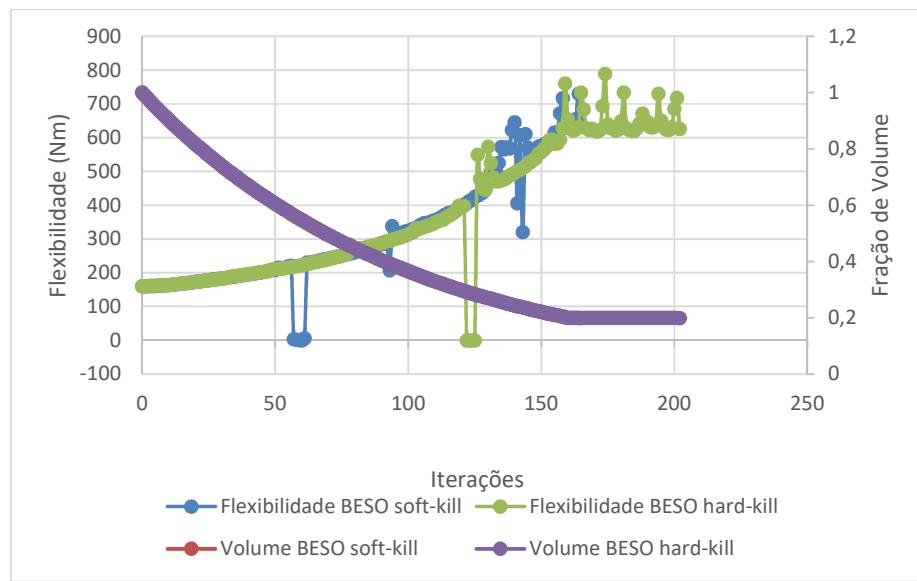
**Figura 22 - Topologias Não Lineares: a) Método SIMP; b) BESO *soft-kill*; c) BESO *hard-kill***



Fonte: Autor

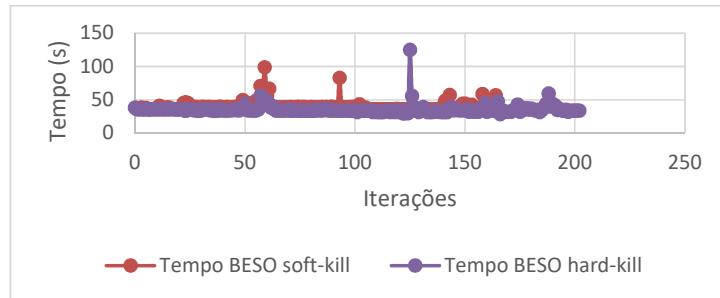
A Figura 23 ilustra o histórico da função objetivo dado pela flexibilidade da estrutura que é representada pelo trabalho externo da força e a fração de volume ao longo de cada iteração da otimização não linear e a Figura 24 ilustra o tempo de execução da análise de elementos finitos ao longo de cada iteração para os métodos BESO *soft-kill* e *hard-kill*. O tempo total da otimização é de 1 hora e 52 minutos com 165 iterações para o BESO *soft-kill* e 2 horas com 202 iterações para o BESO *hard-kill*.

**Figura 23 - Função Objetivo e Volume da Estrutura para Análise Não Linear BESO soft-kill e hard-kill**



Fonte: Autor

**Figura 24 - Tempo por Iteração da Análise Linear BESO soft-kill e hard-kill**

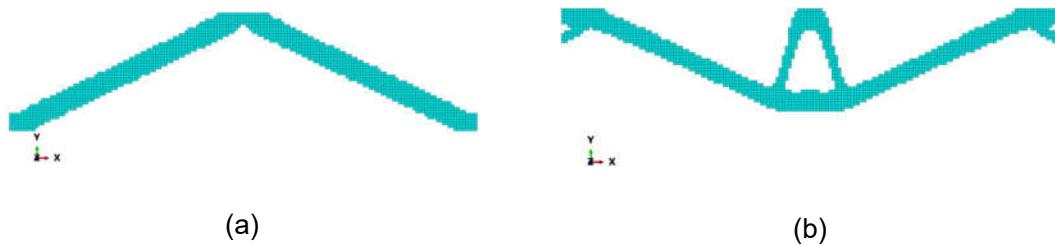


Fonte: Autor

Novamente, percebe-se a equivalência dos métodos pela semelhança entre as topologias da Figura 22 e pelas curvas da Figura 23 obtendo praticamente os mesmos valores de flexibilidade (inverso de rigidez) e volume, sendo 635,87 Nm para o BESO *soft-kill* e 625,48 Nm para o BESO *hard-kill*. Observando a Figura 24, percebe-se que os tempos de análise de elementos finitos por iteração é menor para o método BESO *hard-kill*, mostrando que nas análises não lineares, ele é mais eficiente em termos computacionais. Isso também é percebido visto que o BESO *hard-kill* tem 37 iterações a mais e a diferença entre o tempo total de otimização dos dois métodos é de apenas 8 minutos.

As mesmas topologias podem ser obtidas pelo método BESO *hard-kill* partindo de uma estimativa de *design* inicial em que apenas a porcentagem de volume final desejada participa das análises de elementos finitos, como ilustrado pela Figura 17(b). A Figura 25 ilustra as topologias obtidas pela otimização linear e não linear respectivamente. A Figura 26(a) e (b) ilustra a função objetivo e fração de volume para o BESO linear de estimativa inicial de *design* e *full design* e para o BESO não linear de estimativa inicial de *design* e *full design*, respectivamente.

**Figura 25 - Topologias Estimativa Inicial de *Design*: a) Linear; b) Não Linear**

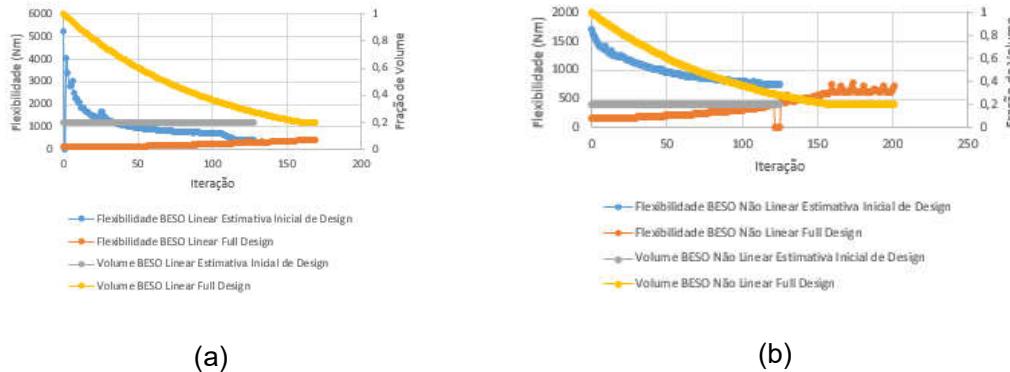


Fonte: Autor

Pode-se perceber pela Figura 26(a) e (b) que os valores da função objetivo para a estimativa inicial de *design* possui altos valores de flexibilidade e diminui ao longo das iterações devido às mudanças de posição do elemento ao longo da otimização, no sentido de aumentar sua rigidez. Quando a estrutura inteira é submetida a análise de otimização (*full design*), sua flexibilidade vai aumentando devido a retirada de material. Porém, essa retirada de material ocorre no sentido de deixar a maior rigidez possível, e no final, os valores de rigidez para as duas técnicas, são praticamente iguais, atingindo 416,27 Nm e 416,22 Nm para

as análises lineares *full design* e estimativa inicial de *design* e 635,87 Nm e 756,98 Nm para as análises não lineares *full design* e estimativa inicial de *design*, respectivamente. Observa-se que o volume na estimativa inicial de *design* se mantém constante, ao passo que os elementos vão se organizando na estrutura para deixar a maior rigidez possível.

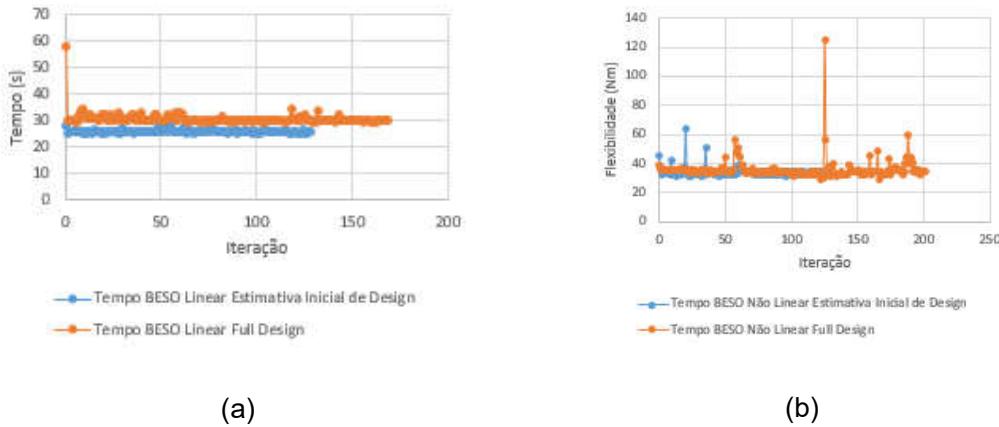
**Figura 26** - Função Objetivo e Volume da Estrutura para: a) BESO Linear Estimativa Inicial de *Design* e *Full Design*; b) BESO Não Linear Estimativa Inicial de *Design* e *Full Design*



Fonte: Autor

A Figura 27(a) e (b) ilustra o tempo por iteração de otimização BESO linear de estimativa inicial de *design* e *full design* e para o BESO não linear de estimativa inicial de *design* e *full design*, respectivamente.

**Figura 27** - Tempo por iteração: a) BESO Linear Estimativa Inicial de *Design* e *Full Design*; b) BESO Não Linear Estimativa Inicial de *Design* e *Full Design*



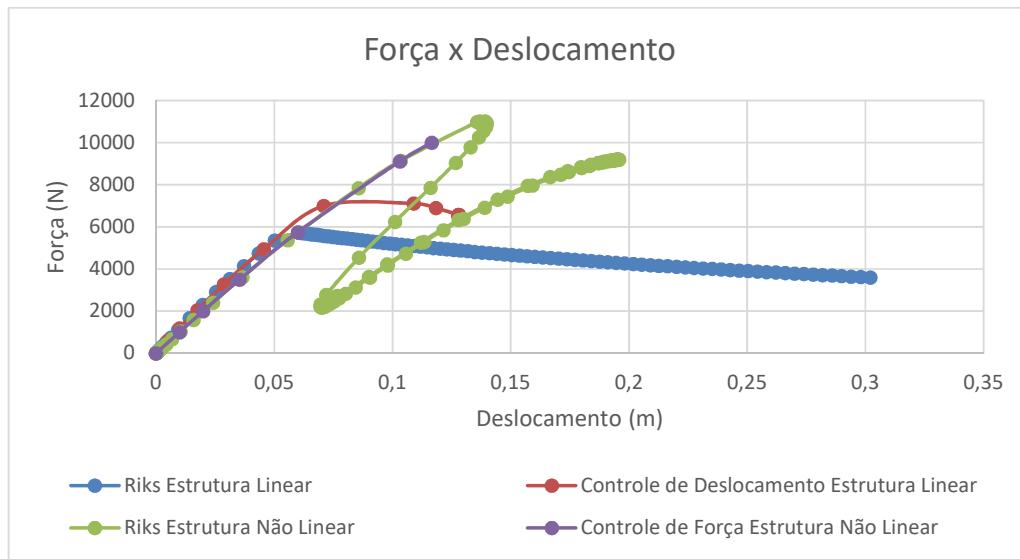
Fonte: Autor

Analisando a Figura 27(a) e (b) percebe-se que a técnica de estimativa inicial de *design* possui tempos menores, além de terminar com menos iterações. Isso ocorre pois desde o início do processo de otimização, apenas a porcentagem final do volume, ou número de elementos, estão presentes na análise de elementos finitos. Isso reflete também no tempo total de otimização entre as técnicas sendo o tempo para análise linear de 57 minutos para a estimativa inicial de *design* contra 1 hora e 29 minutos para o *full design*. Já para a análise não linear, o tempo total para a estimativa inicial de *design* foi de 1 hora e 12 minutos contra 2 horas do *full design* ficando claro que a técnica de estimativa inicial de *design* é computacionalmente eficiente.

Para verificar a diferença entre as estruturas obtidas pela otimização linear e não linear, é feita uma análise não linear na estrutura obtida pela otimização linear. Existe três maneiras de fazer essa análise não linear na estrutura otimizada linearmente. A primeira é carregando a estrutura através de uma força (Controle de Força), a segunda carregando a estrutura por um deslocamento (Controle de Deslocamento) com ambas usando o método de Newton-Raphson. A terceira é carregando a estrutura por uma força usando o método de Riks. É visto que a análise não linear para a estrutura otimizada linearmente pelo Controle de Força usando o método de Newton-Raphson não converge devido à instabilidade de flambagem que ocorre na estrutura, ou seja, em algum momento no gráfico de força por deslocamento, os deslocamentos aumentam de forma súbita enquanto a força diminui. De forma geral, a estrutura não suporta mais nenhum acréscimo de força e se deforma de forma acentuadamente. O método de Newton-Raphson não é eficiente em casos de instabilidade

da estrutura, sendo o método de Riks mais qualificado. Porém, como explicado no item 4.2.4, o método de Newton-Raphson pode ser eficiente em análises não lineares com instabilidades sobre o Controle de Deslocamento, como ilustrado pela Figura 7. Dessa forma, é feita uma análise não linear na estrutura otimizada linearmente por Controle de Deslocamento usando o método de Newton-Raphson e outra pelo método de Riks. A Figura 28 contém a curva de Força x Deslocamento pela análise não linear pelo método de Riks e Controle de Deslocamento da estrutura otimizada linearmente.

**Figura 28 - Curva Força x Deslocamento das estruturas em regime não linear**

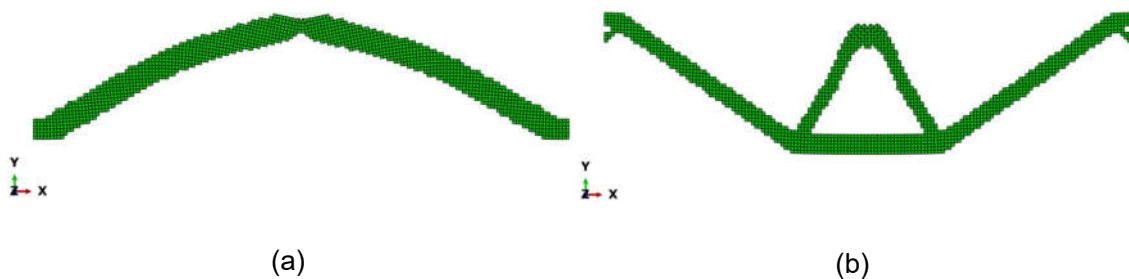


Fonte: Autor

Para a estrutura não linear, basta uma análise de Controle de Força pelo método de Newton-Raphson, pois a estrutura otimizada não linearmente, não ocorre instabilidades até a carga máxima de 10 kN, como ilustra a Figura 28. Para avaliar o que acontece com a estrutura otimizada não linearmente após a carga máxima de 10 kN, é feita uma análise não linear de Riks como ilustrado na Figura 28 e percebe-se que a estrutura começa a sofrer instabilidades com cargas próximas a 11 kN. Analisando a Figura 28, observa-se que a estrutura otimizada linearmente fica instável e flamba com uma carga entre 6 kN e 7 kN pelos métodos de Riks e Newton-Raphson por Controle de Deslocamento. Isso significa que a estrutura otimizada não linearmente é mais rígida que a otimizada linearmente sendo a flexibilidade final da primeira no valor de 625,48 Nm e a da segunda de 667,88 Nm. Porém, também é visto que a estrutura otimizada linearmente suporta um pouco mais de força na região elástica do que a estrutura

otimizada não linearmente. Dessa forma, conclui-se que a estrutura otimizada linearmente trabalha melhor na região elástica do que a estrutura otimizada não linearmente, porém, não pode ser usada em situações em que a força aplicada ultrapasse o valor de cerca de 6 kN, pois dessa forma ela iria falhar. A Figura 29(a) e (b) ilustra respectivamente, as topologias deformadas da estrutura otimizada linearmente submetida a uma análise não linear e da estrutura otimizada de forma não linear. Observa-se na Figura 29(a) as colunas sofrendo instabilidade de flambagem no plano, enquanto que a topologia da Figura 29(b) otimizada de forma não linear, quase não sofre deformação.

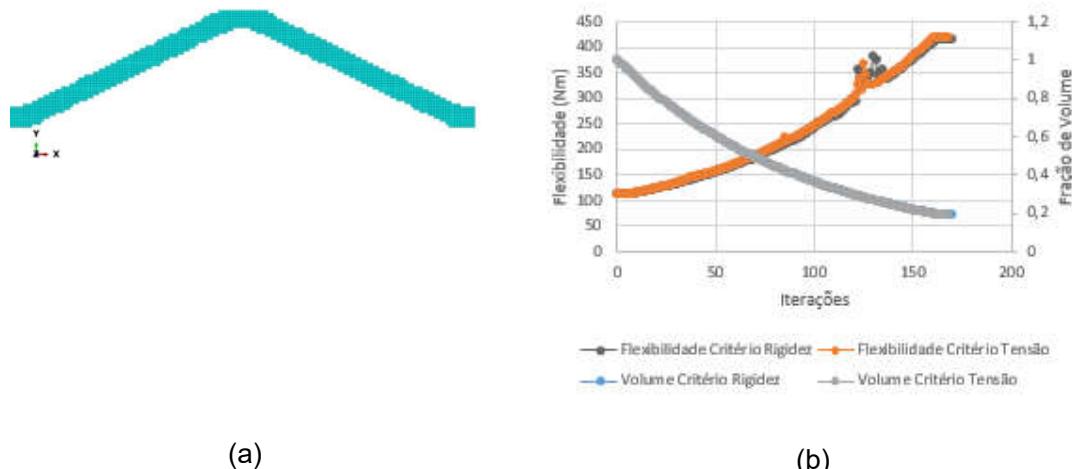
**Figura 29 - Topologias deformadas:** a) Estrutura otimizada de forma linear submetida a análise não linear; b) Estrutura otimizada de forma não linear



Fonte: Autor

A estrutura da Figura 17(a) pode ser otimizada pelo critério de tensão. A Figura 30(a) ilustra a topologia obtida enquanto a Figura 30(b) ilustra os valores da função objetivo e volume para o critério de rigidez e de tensão. Pode-se perceber que as topologias são as mesmas e também os valores da função objetivo e volume, sendo o critério de tensão uma maneira de otimizar a rigidez.

**Figura 30** - Otimização pelo critério de Tensão: a) Topologia Final; b) Função objetivo e fração de volume pelo critério de tensão e rigidez



Fonte: Autor

A Tabela 2 lista os resultados deste exemplo.

**Tabela 2** - Resultados do Exemplo 1

		Flexibilidade	Fração de Volume	Iterações	Tempo Total
<i>Full Design – Critério de Rigidez</i>	BESO soft-kill linear	415,52 Nm	19,93%	171	1 hora e 27 minutos
	BESO hard-kill linear	416,27 Nm	19,90%	170	1 hora e 28 minutos
	BESO soft-kill não linear	635,87 Nm	19,90%	165	1 hora e 52 minutos
	BESO hard-kill não linear	625,48 Nm	19,90%	202	2 horas
<i>Estimativa Inicial de Design – Critério de Rigidez</i>	BESO hard-kill linear	416,22 Nm	20,03%	129	57 minutos
<i>Full Design – Critério de Tensão</i>	BESO hard-kill não linear	756,98 Nm	20,00%	125	1 hora e 12 minutos
	BESO hard-kill linear	420,99 Nm	19,98%	168	1 hora e 27 minutos

Fonte: Autor

### 6.1.2 Exemplo 2 – Viga bi engastada 3D

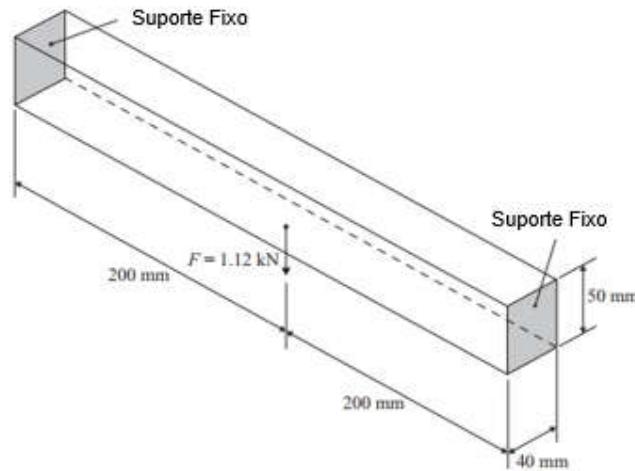
O segundo exemplo consiste na otimização topológica de uma viga 3D bi engastada sob o critério de rigidez e restrição de volume submetida a uma força no centro inferior conforme analisado no trabalho de Huang e Xie (2010a) e ilustrado na Figura 31(a). Percebe-se que a estrutura deste exemplo tem um *design* semelhante ao exemplo passado, sendo que neste, a proporção entre comprimento e largura é de 8 para 1 enquanto no exemplo 1, essa proporção é de 4 para 1, além de ter a aplicação da carga no centro da face inferior e de ser 3D. É feito uma otimização linear e não linear material e geométrica pelos métodos BESO *hard-kill* e *soft-kill* além de uma análise de estimativa inicial pelo método *hard-kill* que envolve apenas a porcentagem de elementos do volume final da estrutura nas análises de elementos finitos segundo a Figura 31(b). O objetivo desse exemplo é evidenciar a diferença de tempo em cada uma das análises em problemas 3D que envolvem a solução de equações de equilíbrio para a grande quantidade de elementos finitos na malha, principalmente nas análises não lineares, e também as diferenças entre os métodos *full design* e estimativa inicial de *design*. A Tabela 3 lista as propriedades do material e os parâmetros de otimização evolucionária. A estrutura é discretizada em uma malha 200 x 25 x 20 de elementos sólidos hexaédricos de 8 nós.

**Tabela 3 - Propriedades do material e Parâmetros de otimização do Exemplo 2**

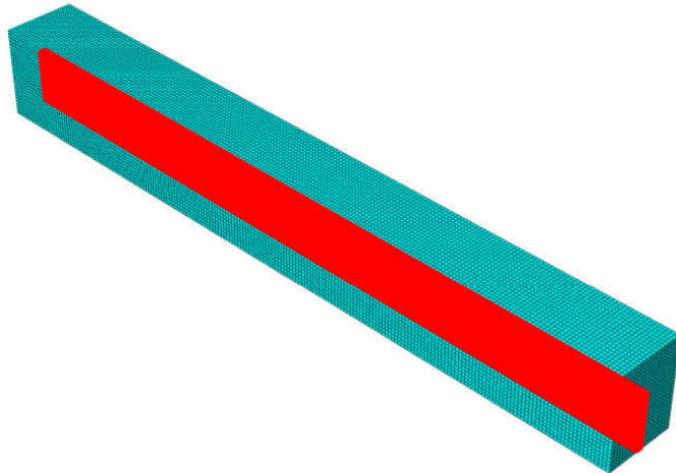
Propriedades do modelo Elastoplástico com Encruamento Linear				
Módulo de Elasticidade	Poisson	Tensão de Escoamento	Módulo de Encruamento	Pontos de Tensão / Deformação Plástica
$E = 1 \text{ GPa}$	$v = 0,3$	$\sigma_y = 10 \text{ MPa}$	$E_p = 0,3 \text{ GPa}$	10 MPa / 0
Parâmetros de Otimização				
Volume de Restrição	Razão de Evolução	Raio do Filtro	Tolerância de erro da Função Objetivo	
$V^* = 5\%$	$ER = 2\%$	$r_{min} = 4 \text{ mm}$	$\tau = 0,1\%$	

Fonte: Autor

**Figura 31 - Placa bi engastada 3D:** (a) Condições de suporte, dimensões e (b) representação da estimativa inicial de projeto da estrutura 3D



(a)

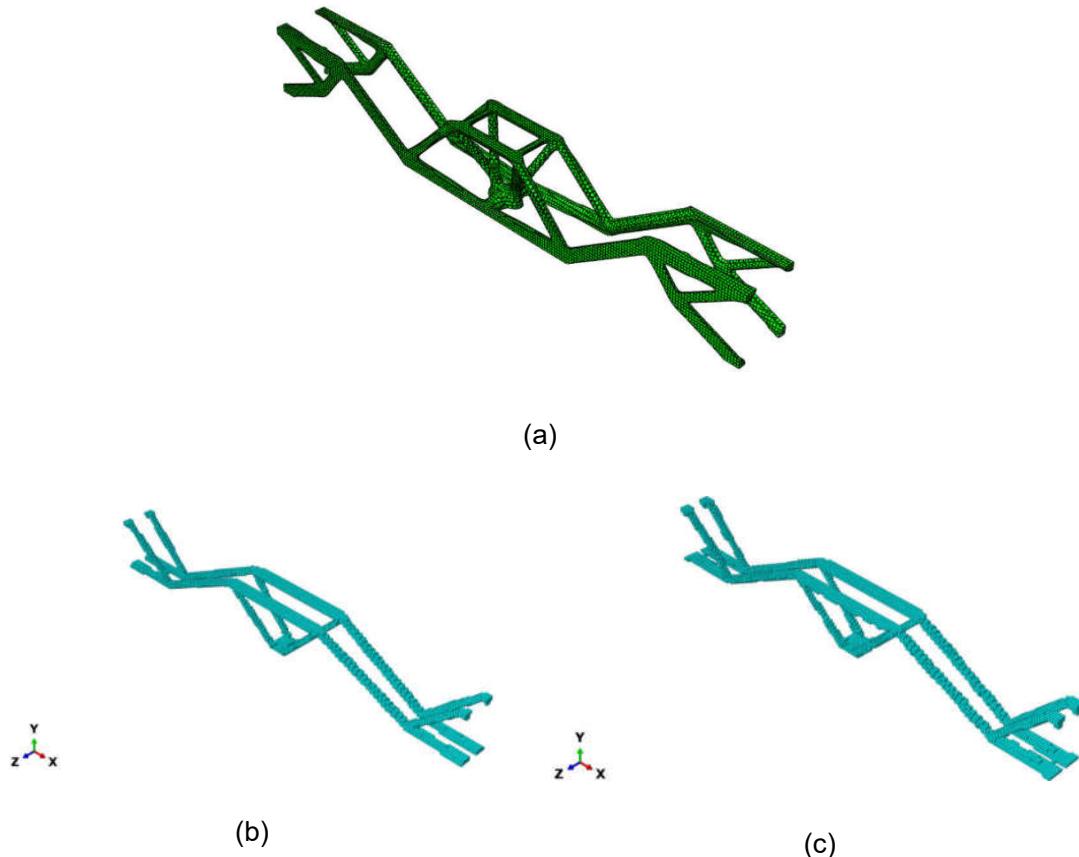


(b)

Fonte: Adaptado de Huang e Xie (2010a)

A Figura 32(a) ilustra a topologia obtidas pela otimização linear pelo método SIMP utilizando o módulo de otimização do Abaqus® e a Figura 32(b) e (c) as topologias obtidas pelo método BESO *soft-kill* e *hard-kill full design* respectivamente.

**Figura 32 - Topologias obtidas: a) SIMP; b) BESO *soft-kill*; c) BESO *hard-kill***



Fonte: Autor

Percebe-se uma diferença nas topologias entre os métodos SIMP e BESO analisando a Figura 32(a), (b) e (c). Porém, dada a semelhança entre o *design* inicial das estruturas do exemplo 1 e deste exemplo, transforma-se a estrutura 3D deste exemplo em uma estrutura 2D mantendo a proporção de comprimento por altura de 8 para 1 e aplica-se uma otimização estrutural pelo método SIMP nessa nova estrutura, utilizando o módulo de otimização do Abaqus®. A Figura 33(a) ilustra a topologia obtida e percebe-se sua semelhança com as topologias obtidas pelo método evolucionário das Figura 32(b) e (c). A mesma topologia também é encontrada no trabalho de Jung e Gea (2004) em que a estrutura é 2D e a proporção de comprimento por altura também é de 8 para 1 como ilustrado na Figura 33(b).

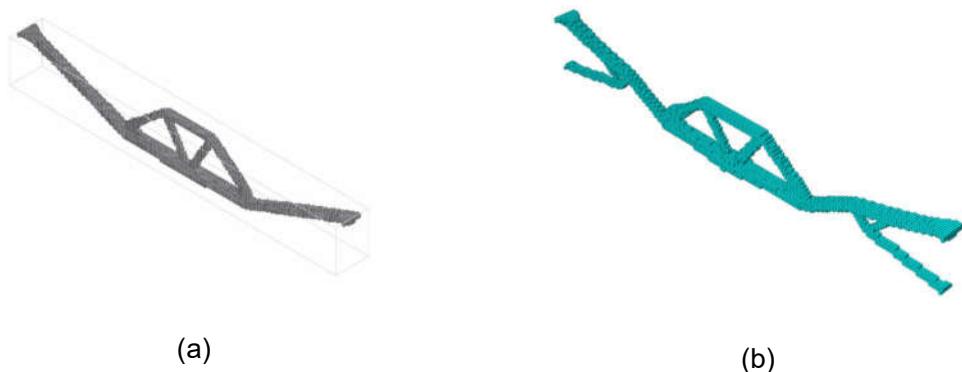
**Figura 33 - Topologia:** a) Exemplo 1 modificado utilizando o TOSCA do Abaqus®; b) Método SIMP do trabalho de Jung e Gea (2004)



Fonte: Autor

A Figura 34(a) ilustra a topologia obtida por Huang e Xie (2010a) e a Figura 34(b) através do BESO *hard-kill* linear de estimativa inicial de *design* utilizando apenas os elementos destacados na Figura 31(b). Percebe-se que as topologias obtidas pelo *full design* da Figura 32(b) e (c) são diferentes das obtidas pela estimativa inicial de *design* da Figura 34(a) e (b).

**Figura 34 - Topologias obtidas pelo método BESO *hard-kill* de Estimativa Inicial de Design:** a) Huang e Xie (2010a); b) Autor



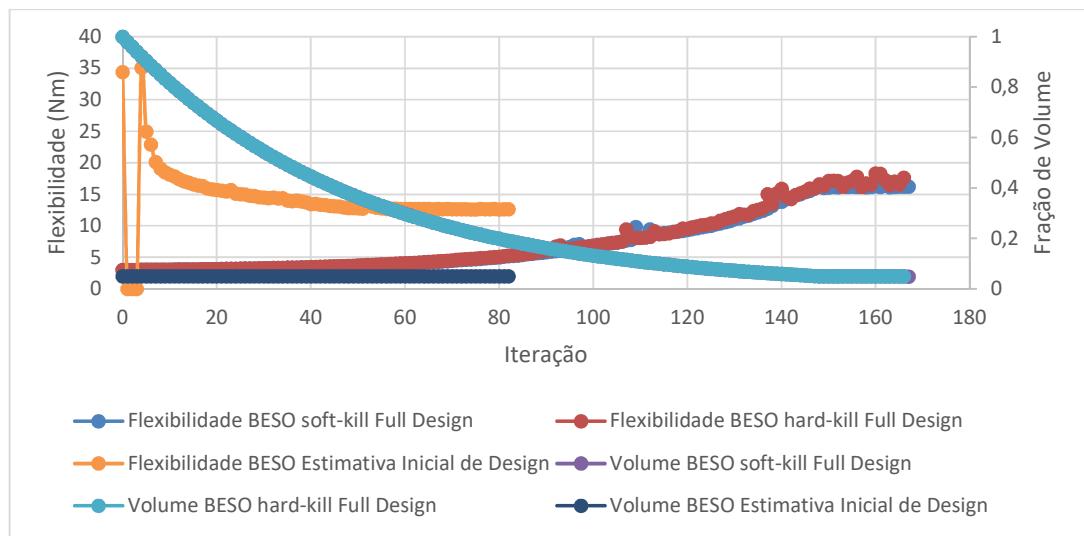
Fonte: Autor

A Figura 35 ilustra a função objetivo e fração de volume ao longo das iterações para os métodos BESO *soft-kill* e *hard-kill full design* e estimativa inicial de *design* e a Figura 36, o tempo por iteração desses métodos. A flexibilidade final da estrutura da Figura 32(a), pelo método SIMP, é de 17,42 Nm enquanto que das estruturas da Figura 32(b) e (c) e Figura 34(b), pelo método BESO *soft-kill* e *hard-kill full design* e estimativa inicial de *design* são respectivamente 16,21 Nm, 17,64 Nm e 12,62 Nm como indicado na Figura 35. Apesar da proximidade das funções objetivos, as topologias da Figura 32(a), (b) e (c), e Figura 34(a) e

(b) obtidas pelos métodos SIMP, BESO *full design* e estimativa inicial de *design* são diferentes, o que evidencia que os métodos obtiveram um ótimo local da estrutura, sendo o método evolucionário, o que obteve uma estrutura mais simples e mais rígida, principalmente com a topologia obtida pela estimativa inicial de *design* ilustrada pela Figura 34(b).

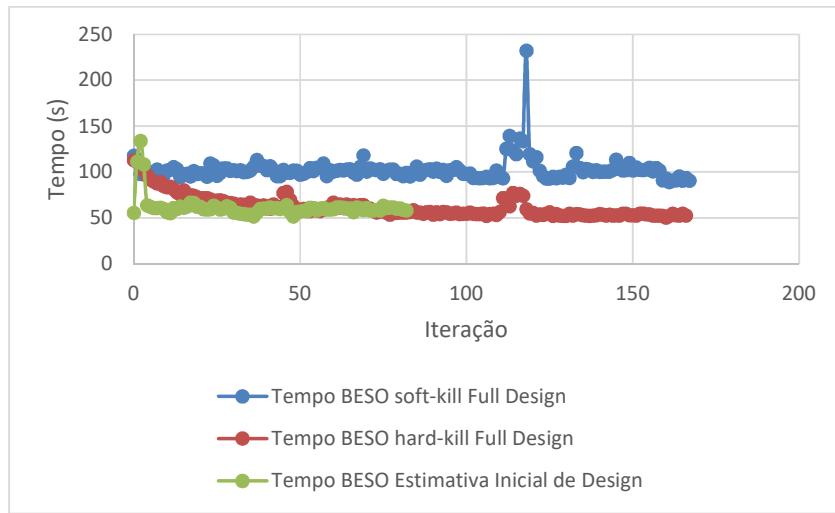
Pela Figura 36, observa-se de forma mais clara a redução do tempo de análise de elementos finitos ao longo das iterações para o método BESO *hard-kill*. Ainda, é visto que o método BESO *hard-kill* de estimativa inicial de *design* leva ainda menos tempo, comprovando sua eficiência computacional. O tempo total de otimização pelo método *hard-kill* de estimativa inicial de *design* foi de 1 hora e 40 minutos contra 3 horas e 19 minutos do BESO *hard-kill full design* e 5 horas e 15 minutos do método *soft-kill full design*.

**Figura 35 - Histórico da função objetivo e fração de volume para os métodos BESO soft-kill e hard-kill linear**



Fonte: Autor

**Figura 36 - Tempo de otimização ao longo das iterações para os métodos BESO soft-kill e hard-kill linear**



Fonte: Autor

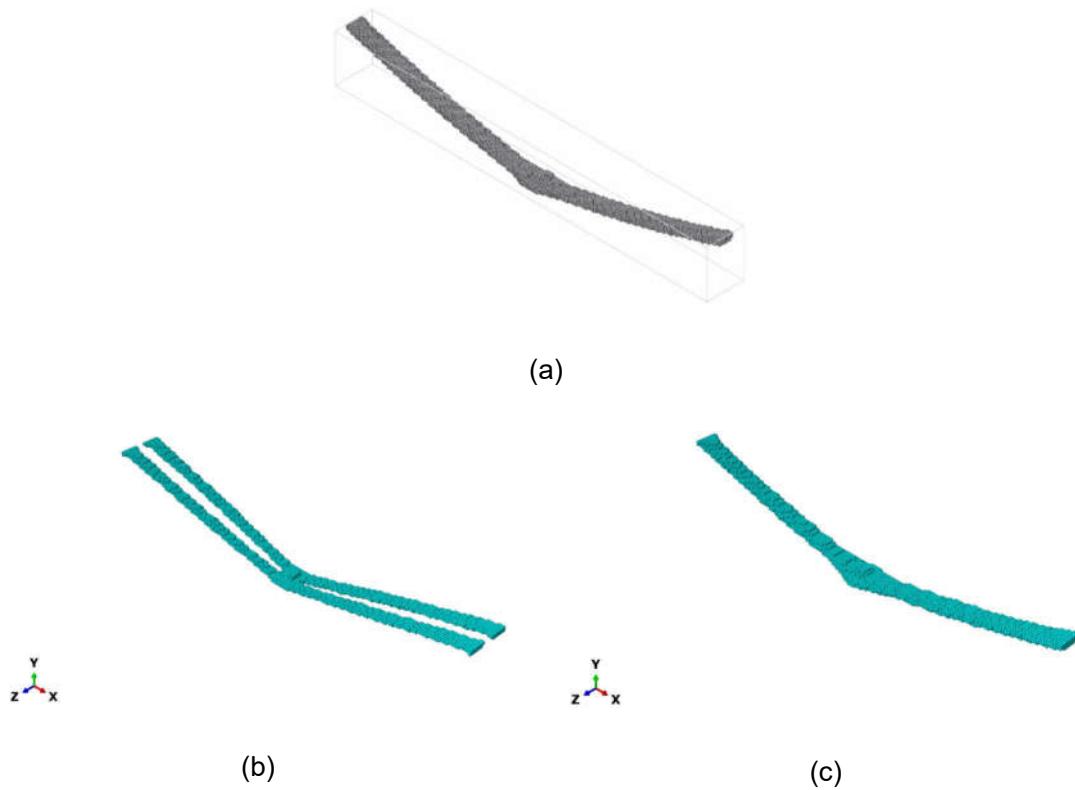
Para a otimização não linear, o módulo de otimização do Abaqus® que utiliza o método SIMP não foi capaz de executar a otimização. As Figura 37(a), (b) e (c) ilustram as topologias obtidas pela otimização não linear utilizando o método BESO *hard-kill* de estimativa inicial de *design* de Huang e Xie (2010a), BESO *hard-kill full design* e estimativa inicial de *design* obtido pelo autor, respectivamente. A Figura 38 ilustra a função objetivo e volume pela otimização não linear pelo método BESO *hard-kill full design* e estimativa inicial de *design* e a Figura 39 o tempo ao longo das iterações.

Novamente, percebe-se ao observar as topologias da Figura 37(a), (b) e (c), que a técnica *full design*, que considera toda a estrutura para a otimização, resultou em uma topologia um pouco diferente da técnica de estimativa inicial de *design*, que considera o volume final da estrutura. Diferente da otimização linear em que as topologias foram bem distintas, na otimização não linear, é como se as hastes da estrutura se dividissem em dois para o método *full design* se comparado ao de estimativa inicial de *design*. Os valores da função objetivo é de 25,79 Nm para o BESO *hard-kill full design* e 21,71 Nm para o BESO *hard-kill* de estimativa inicial de *design*. Apesar da proximidade entre as topologias e valores da função objetivo, nota-se que os dois métodos obtiveram ótimos locais, sendo a técnica de estimativa inicial de *design* fornecendo uma estrutura mais rígida.

A Figura 39 ilustra o tempo de análise de elementos finitos ao longo das iterações e percebe-se que o método de estimativa inicial de *design* possui praticamente o tempo final

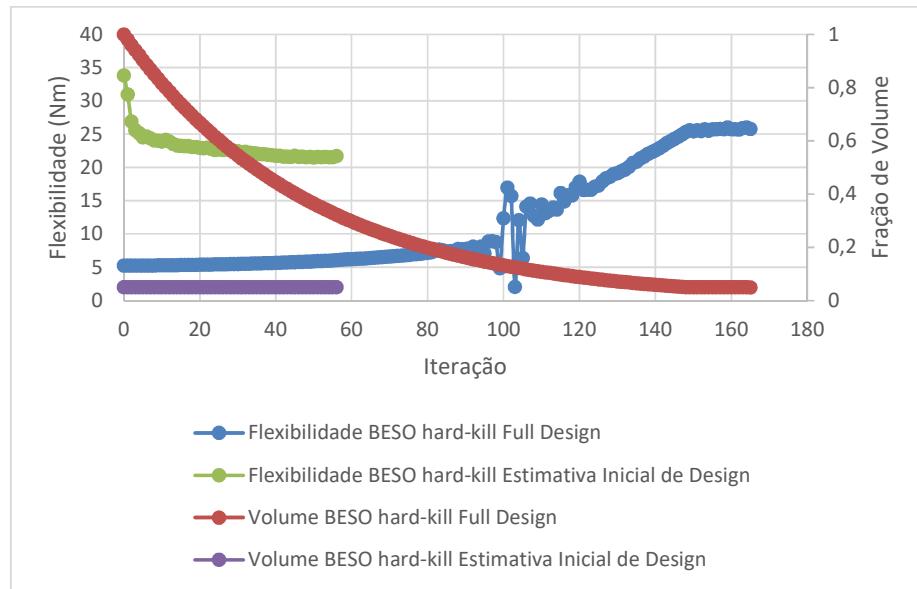
por iteração do método *full design*, além de finalizar com menos iterações e obter uma estrutura mais rígida. Observando o tempo das primeiras iterações do método BESO *hard-kill full design* percebe-se que duração é em média de 46 minutos. Considerando essa mesma duração para cada iteração do método BESO *soft-kill* e o mesmo número de iterações, a otimização não linear deste exemplo duraria 7544 minutos, o que corresponde a 125 horas ou 5 dias. Dessa forma, a utilização do método BESO *soft-kill* é inviável visto que o método *hard-kill* fornece praticamente os mesmos resultados e dessa forma, não foi utilizado para este exemplo. O tempo total de otimização para o método BESO *hard-kill full design* foi de 24 horas e 165 iterações, enquanto que o BESO *hard-kill* de estimativa inicial de *design* finalizou em 2 horas e 24 minutos e 56 iterações.

**Figura 37** - Otimização não linear: a) Método BESO *hard-kill* de Estimativa Inicial de *Design* obtido por Huang e Xie (2010a); b) BESO *hard-kill Full Design* obtido pelo autor; c) BESO *hard-kill* Estimativa Inicial de *Design* obtido pelo autor



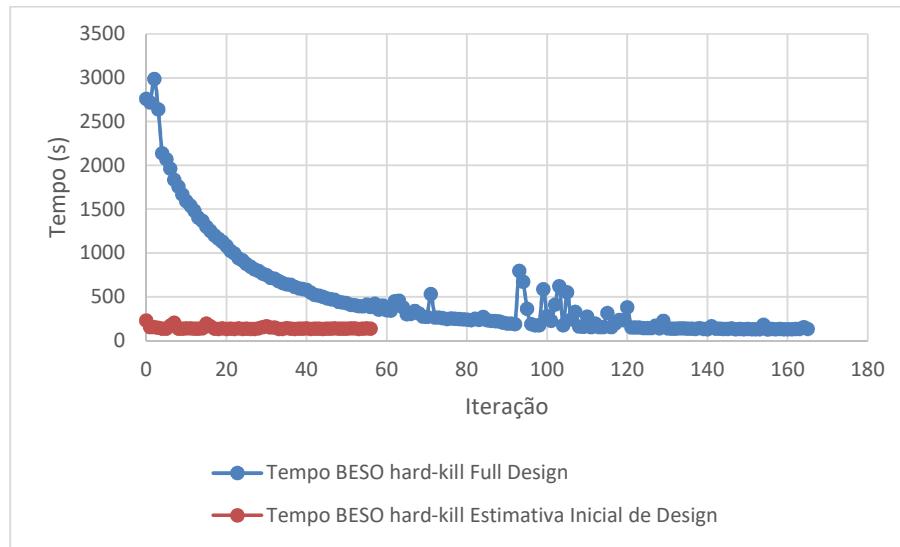
Fonte: Autor

**Figura 38 - Função objetivo e volume pelo método BESO *hard-kill Full Design* e Estimativa Inicial de Design**



Fonte: Autor

**Figura 39 - Tempo por iteração dos métodos BESO *hard-kill Full Design* e Estimativa Inicial de Desgin**



Fonte: Autor

A Tabela 4 lista os resultados deste exemplo.

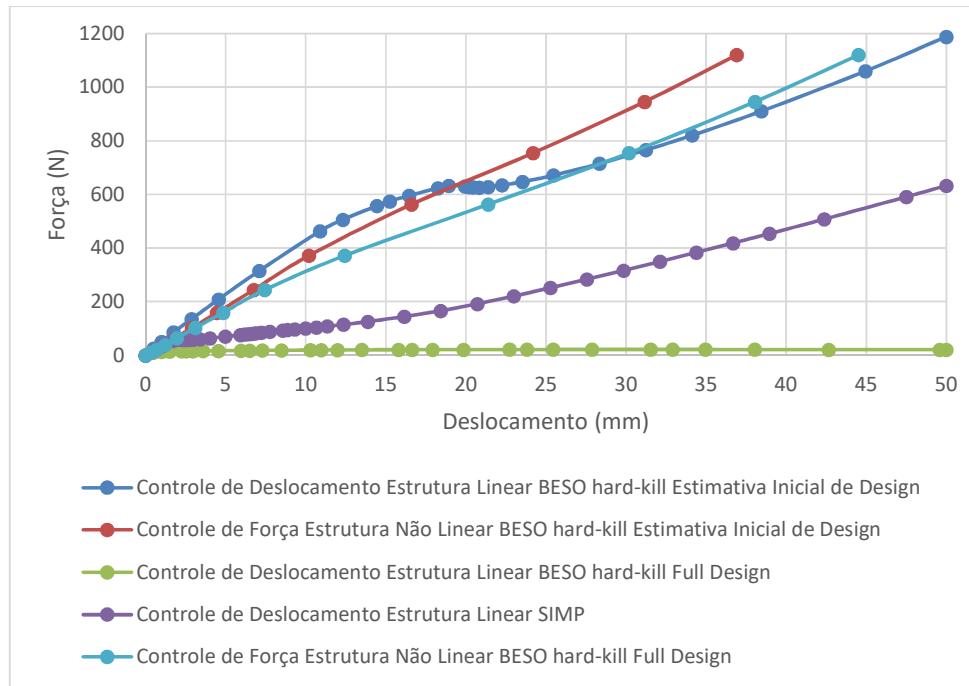
**Tabela 4 - Resultados do Exemplo 2**

		Flexibilidade	Fração de Volume	Iterações	Tempo Total
<i>Full Design – Critério de Rrigidez</i>	SIMP Linear BESO	17,42 Nm	4,99%	49	–
	<i>soft-kill</i> linear BESO	16,21 Nm	4,99%	167	5 horas e 15 minutos
	<i>hard-kill</i> linear BESO	17,64 Nm	5,00%	166	3 horas e 19 minutos
	<i>hard-kill</i> não linear BESO	25,79 Nm	4,90%	165	24 horas
<i>Estimativa Inicial de Design – Critério de Rrigidez</i>	<i>hard-kill</i> linear BESO	12,62 Nm	5,00%	82	1 hora e 40 minutos
	<i>hard-kill</i> não linear	21,71 Nm	5,00%	56	2 horas e 24 minutos

Fonte: Autor

Para verificar a diferença entre as estruturas obtidas pela otimização linear e não linear, é feita uma análise de elementos finitos não linear de controle de deslocamento nas estruturas otimizadas de forma linear pelo método SIMP (Figura 32a), e BESO *hard-kill full design* e estimativa inicial de *design* (Figura 32c e Figura 34b) para comparar com os resultados das estruturas otimizadas de forma não linear que compreendem as Figura 37(b) e (c). As estruturas otimizadas linearmente são submetidas a um deslocamento de 50 mm no centro da superfície inferior e uma curva de Força x Deslocamento é obtida e ilustrada pela Figura 40.

**Figura 40 - Curva Força x Deslocamento das estruturas em regime não linear**

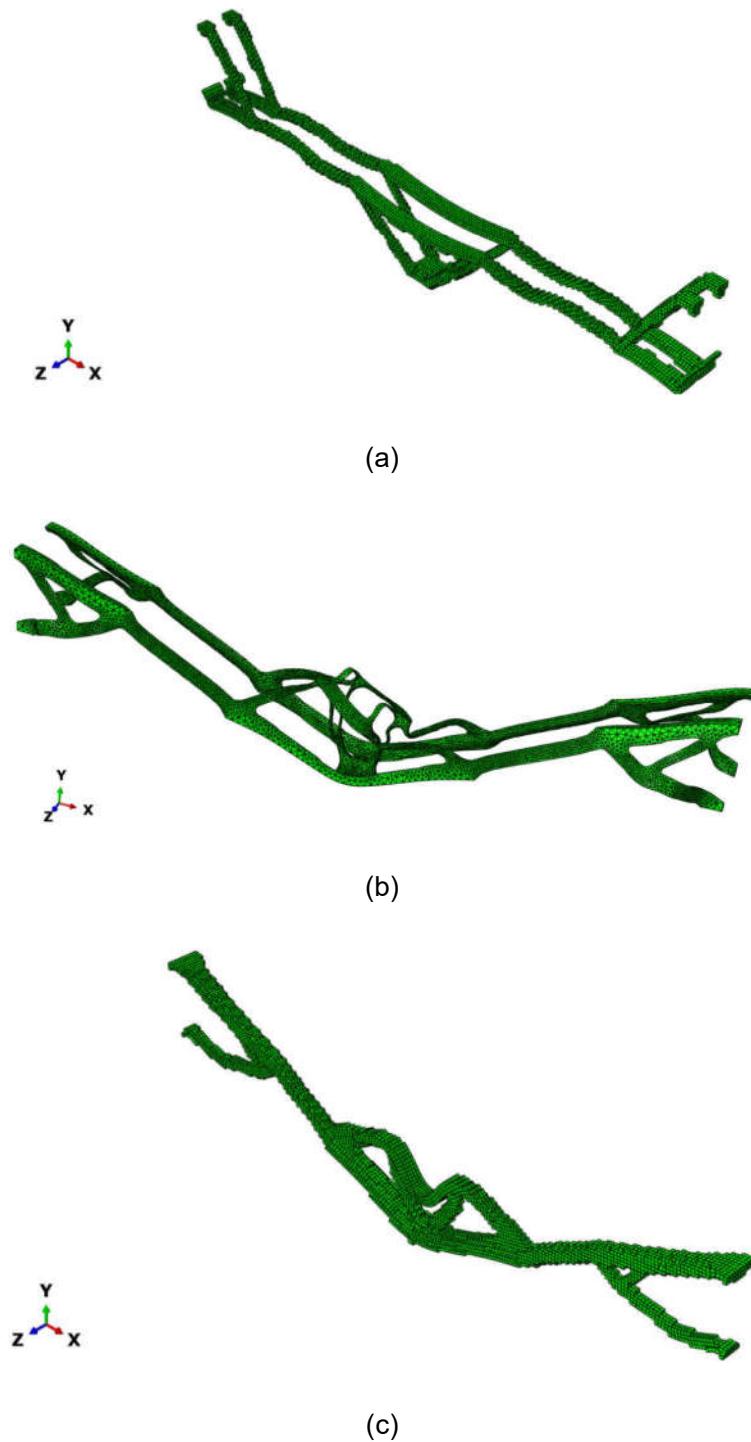


Fonte: Autor

Pela Figura 40, percebe-se que as estruturas otimizadas de forma não linear, uma pela técnica *full design* e a outra pela estimativa inicial de *design*, possuem um menor deslocamento na força máxima de 1,12 kN do que as que foram otimizadas de forma linear. Isso quer dizer que essas estruturas tem uma rigidez final maior. Analisando as curvas das estruturas otimizadas linearmente, percebe-se que a estrutura obtida pelo método BESO *hard-kill full design* é a que obteve o pior desempenho quando submetida a um regime não linear de grandes deslocamentos. A estrutura apresenta maior rigidez até a uma carga de 11 N, em que há pequenos deslocamentos para maiores acréscimos de força. A partir daí, a estrutura vai apresentando grandes deslocamentos para pequenos acréscimos de força, sendo cada vez menos capaz de suportar maiores cargas, até atingir o carregamento de 20 N em que a estrutura já não apresenta nenhuma resistência para cargas maiores aumentando significativamente o deslocamento da região de aplicação da carga. Já a estrutura obtida pela otimização linear pelo método SIMP utilizando o módulo de otimização do Abaqus®, possui uma topologia diferente da obtida pelo método evolucionário como ilustrado pela Figura 32. As barras da topologia pelo método SIMP (Figura 32a) possui direção de cima para baixo, enquanto que as barras da estrutura obtida pelo método evolucionário (Figura 32b e c) possuem direção contrária, de baixo para cima. Com a aplicação da carga, a barra da

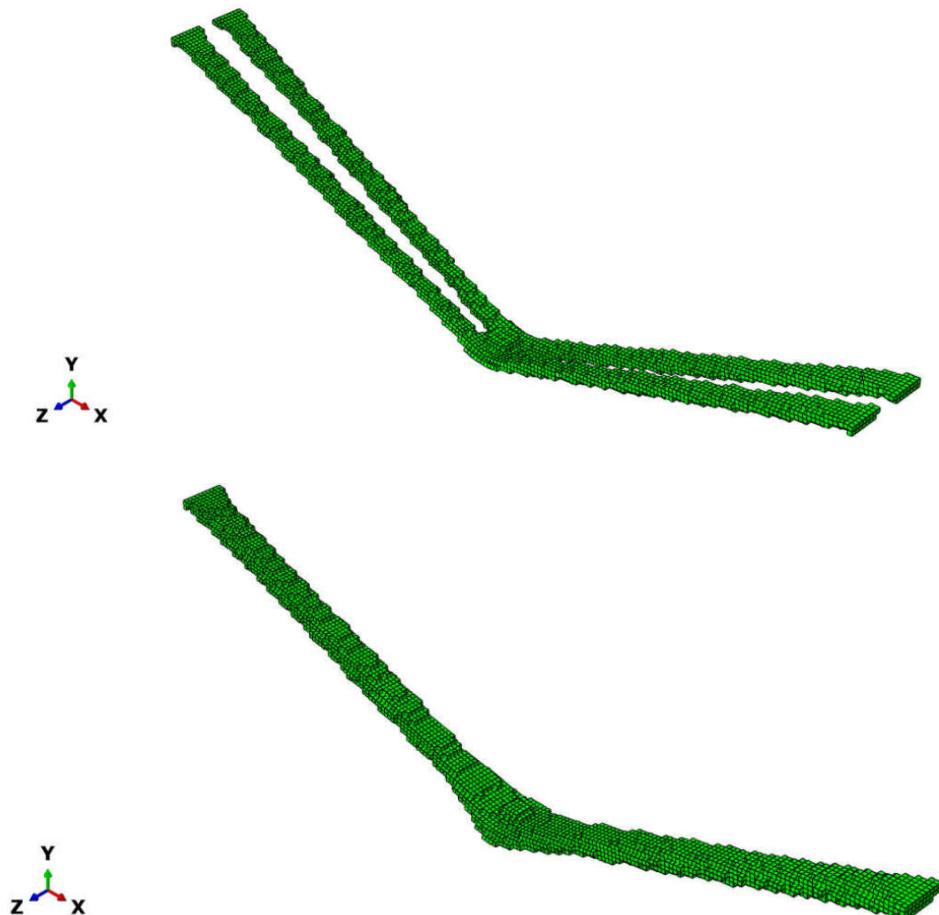
estrutura otimizada pelo método evolucionário, fica submetida majoritariamente por flexão, enquanto a barra da estrutura obtida pelo método SIMP fica submetida majoritariamente por tração, o que faz com que ela suporte mais carga, como pode ser observado na Figura 40. Já a estrutura otimizada de forma linear pelo método evolucionário de estimativa inicial de *design* apresenta melhor resistência do que as demais otimizadas de forma linear, conforme a Figura 40. Percebe-se que as estruturas otimizadas de forma não linear possuem um deslocamento menor na força máxima de 1,12 kN, possuindo uma rigidez final maior do que a estrutura otimizada de forma linear pelo método BESO de estimativa inicial de *design*. Isso também pode ser verificado nos valores finais da função objetivo, sendo uma flexibilidade final de 33,56 Nm para a estrutura otimizada de forma linear pelo método BESO de estimativa inicial de *design* e 25,79 Nm e 21,71 Nm, para a estrutura otimizada de forma não linear pelo método BESO *full design* e estimativa inicial de *design*. Porém, nota-se pela Figura 40 que, para deslocamentos menores que 18 mm, a estrutura otimizada linearmente pelo método BESO de estimativa inicial de *design* apresenta menores deslocamentos para o mesmo valor de força do que as estruturas otimizadas de forma não linear. Assim, essa estrutura é mais rígida na região linear de pequenos deslocamentos, porém suporta menos carga em regiões de grandes deslocamentos. Isso ocorre porque o presente procedimento de otimização considera o desempenho geral em várias cargas até o valor máximo da carga. A Figura 41(a), (b) e (c) ilustra as topologias deformadas das estruturas otimizadas de forma linear submetidas a análise não linear e a Figura 42(a) e (b) as topologias deformadas das estruturas otimizadas de forma não linear.

**Figura 41** - Topologias deformadas das estruturas otimizadas de forma linear pela análise não linear: a) BESO *hard-kill Full Design*; b) SIMP; c) BESO *hard-kill Estimativa Inicial de Design*



Fonte: Autor

**Figura 42** - Topologias deformadas das estruturas otimizadas de forma não linear: a) BESO *hard-kill Full Design*; b) BESO *hard-kill Estimativa Inicial de Design*



Fonte: Autor

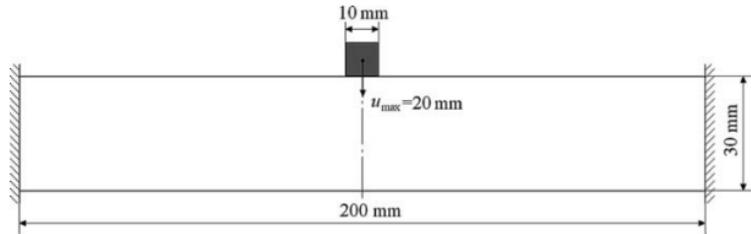
## 6.2 Parte II – Otimização de Estruturas de Absorção de Energia

### 6.2.1 Exemplo 3 – Placa bi engastada 2D

Este exemplo consiste na otimização de uma viga bi engastada do trabalho de Huang et al. (2007) utilizando dois materiais diferentes para estruturas de absorção de energia. O objetivo é mostrar as diferenças de materiais no processo de otimização. Um objeto rígido colide com a estrutura através de um deslocamento de 20 mm como ilustra a Figura 43. O material não linear segue o modelo elastoplástico com encruamento linear e suas propriedades são descritas através da Tabela 5 assim como as forças de restrição. A malha

é discretizada usando  $400 \times 60$  elementos de estado plano de tensão de 4 nós sendo o raio mínimo do filtro de 3 mm e a razão de evolução igual a 1%.

**Figura 43 - Domínio de projeto da estrutura**



Fonte: Huang et al. (2007)

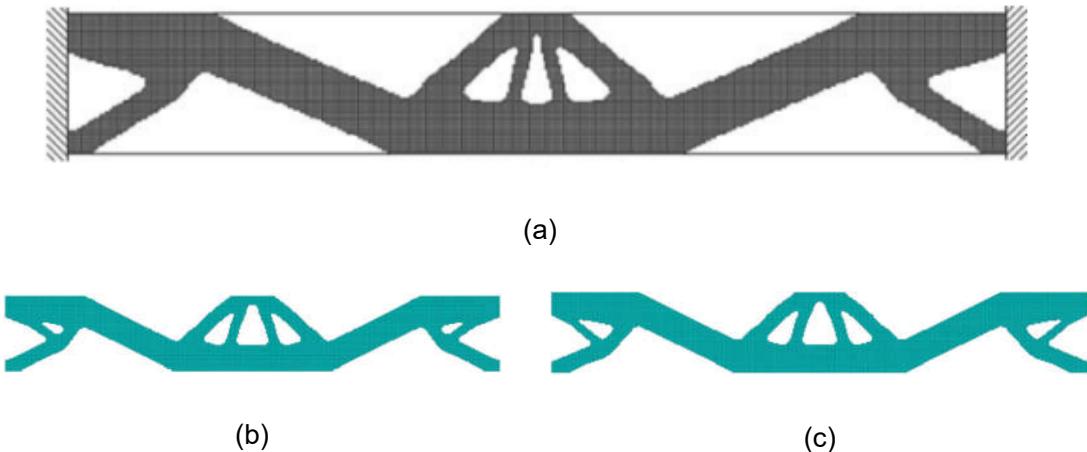
**Tabela 5 - Propriedades dos Materiais**

Propriedades	Material 1 - Huang et al. (2007)	Material 2
Módulo de Elasticidade (GPa)	1	200
Módulo de Encruamento (GPa)	0,1	60
Limite de Escoamento (MPa)	1	300
Poisson	0,3	0,3
Força Máxima (N)	70	33000

Fonte: Autor

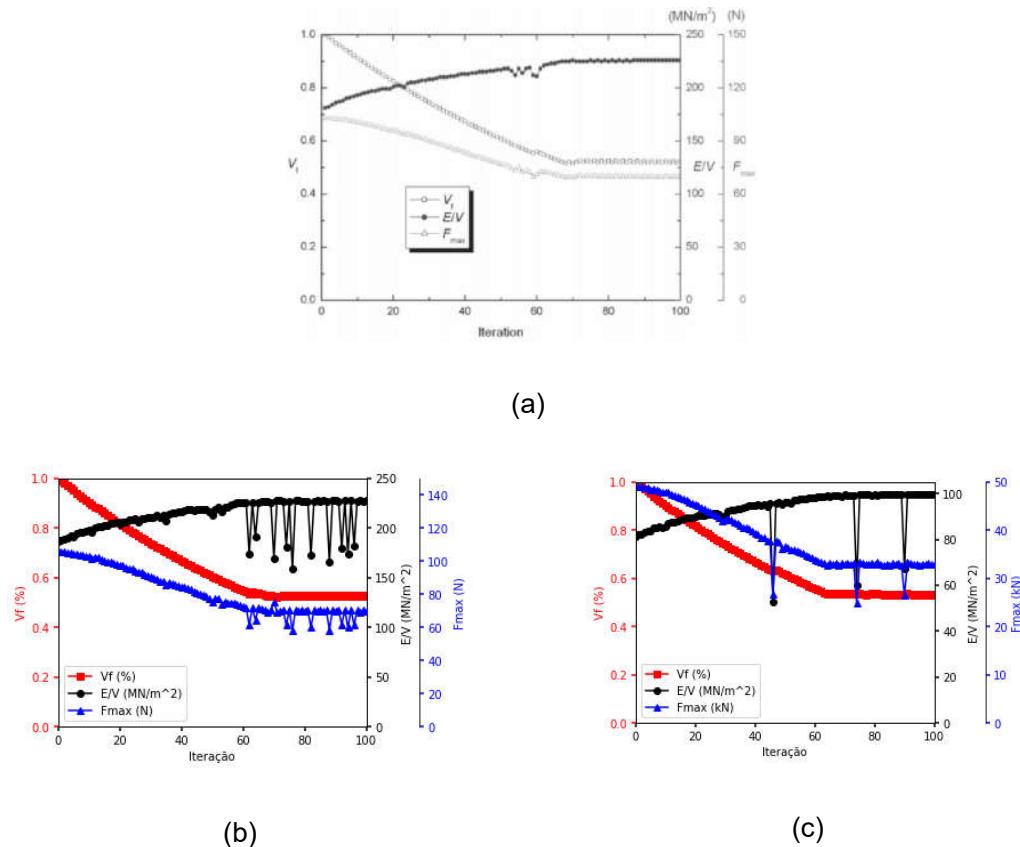
A Figura 44(a) ilustra a topologia de referência obtida por Huang et al. (2007) e a Figura 44(b) e (c) ilustra as topologias obtidas pelos materiais 1 e 2 respectivamente. A Figura 45(a), (b) e (c) ilustra o histórico evolucionário da fração de volume, energia absorvida por unidade de volume e a força máxima de esmagamento obtidos por Huang et al. (2007) e para as estruturas dos materiais 1 e 2 respectivamente.

**Figura 44 - Topologias: (a) Huang et al. (2007); (b) Material 1; (c) Material 2**



Fonte: Autor

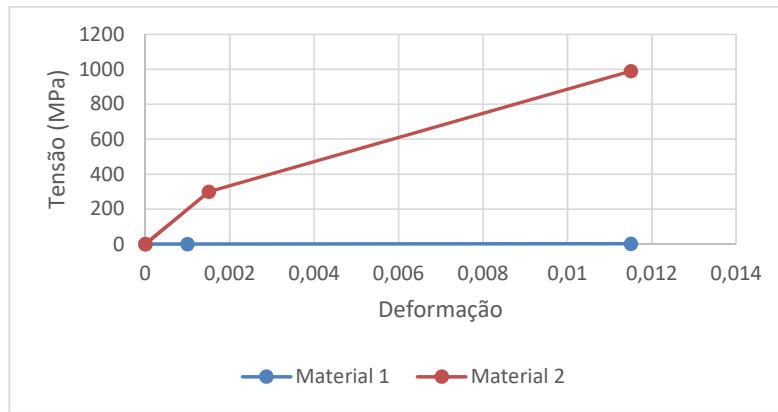
**Figura 45 - Histórico evolucionário da fração de volume, energia absorvida por unidade de volume e a força máxima de esmagamento. (a) Huang et al. (2007); (b) Material 1; (c) Material 2**



Fonte: Autor

A topologia da Figura 44(b) é obtida pelo método BESO *hard-kill full design* assim como a topologia da Figura 44(a) de Huang et al. (2007), utilizando o material 1 da Tabela 5. Percebe-se que as topologias são semelhantes, mantendo os contornos iguais, apesar de algumas diferenças sutis. Nota-se também, que os valores da função objetivo, força máxima e fração de volume ilustrados pelas Figura 45(a) e (b) dessas estruturas também são iguais, validando o modelo implementado. Para os dois materiais, a energia absorvida por unidade de volume tende a aumentar à medida que o volume diminui, e a força máxima de esmagamento gradualmente diminui à medida que o volume diminui até que satisfaça a restrição de força. Percebe-se também, a semelhança da topologia da Figura 44(c), que foi otimizada usando o material 2 da Tabela 5, com as demais topologias. Comparando a Figura 45(a) e (b) com a Figura 45(c), observa-se que a fração de volume das estruturas são praticamente iguais, atingindo cerca 53% do volume total. Já a função objetivo possui valores maiores para as topologias otimizadas utilizando o material 1 do que a topologia otimizada utilizando o material 2, com valores finais de absorção de energia por unidade de volume de 228,00 MJ/m<sup>3</sup> e 99,44 MJ/m<sup>3</sup>, respectivamente. Os valores de força também são diferentes para os dois materiais, devido a diferença das propriedades de material conforme observado na Figura 46 que ilustra a tensão e deformação para os dois materiais. Dessa forma, conclui-se que as propriedades do material não interferem diretamente na topologia resultante, sendo que a escolha do material é um parâmetro de projeto, que deve ser analisado, refletindo na escolha da força máxima de restrição para a otimização, que deve atender as necessidades do projeto.

**Figura 46** - Curva de Tensão x Deformação seguindo o modelo elastoplástico com encruamento linear para os materiais 1 e 2



Fonte: Autor

A Tabela 6 contém os dados detalhados da otimização da estrutura de Huang et al. (2007) e para os materiais 1 e 2.

**Tabela 6** - Detalhes da otimização das estruturas de Huang et al. (2007) e das estruturas do Material 1 e 2

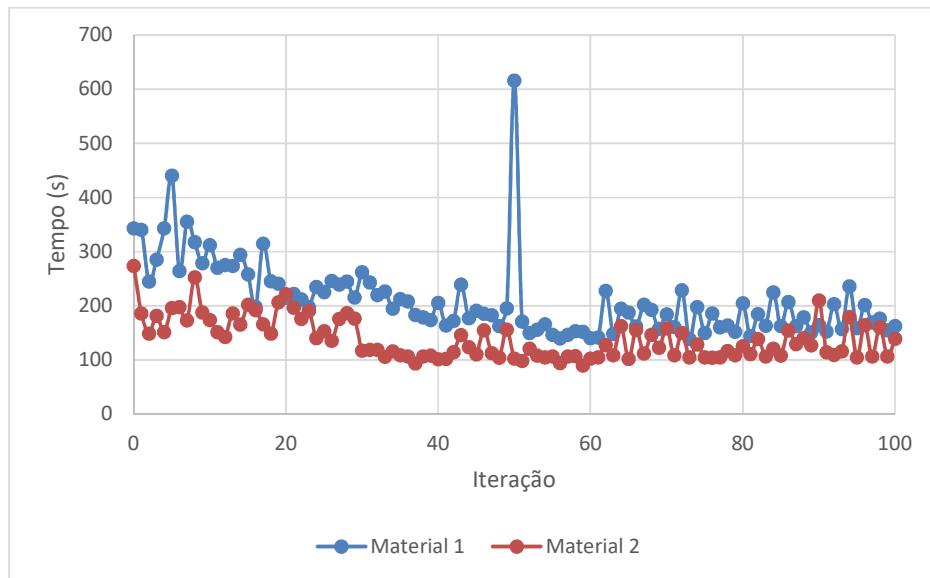
	Iteração	Fração de Volume	Força Máxima	Força de Restrição	Função Objetivo
Estrutura Huang et al. (2007)	Primeira	100%	102,82 N	70 N	180,79 MJ /m <sup>3</sup>
	Última	51,8%	69,58 N	70 N	226,67 MJ /m <sup>3</sup>
Material 1	Primeira	100%	105,78 N	70 N	186,08 MJ /m <sup>3</sup>
	Última	52,52%	69,73 N	70 N	228,00 MJ /m <sup>3</sup>
Material 2	Primeira	100%	49,15 kN	33 kN	81,24 MJ/m <sup>3</sup>
	Última	53,47%	32,96 kN	33 kN	99,44 MJ/m <sup>3</sup>

Fonte: Autor

A Figura 47 ilustra o tempo por iteração das otimizações realizadas com o material 1 e 2. Percebe-se que as iterações para o material 1 demandaram mais tempo do que para o material 2 sendo o tempo total de 6 horas para o material 1 e 4 horas para o material 2. Os

tempos maiores para o material 1 indicam que materiais mais plásticos demandam maior esforço computacional para a solução das equações de equilíbrio nas análises de elementos finitos.

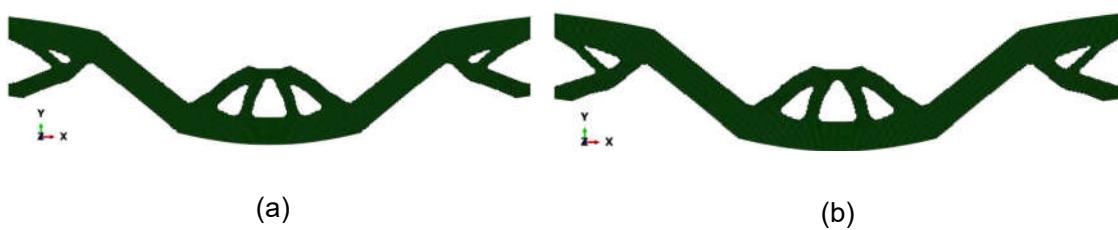
**Figura 47 - Tempo por iteração para os materiais 1 e 2**



Fonte: Autor

A Figura 48 ilustra as topologias otimizadas deformadas para o material 1 e 2 respectivamente.

**Figura 48 - Topologias deformadas: a) Material 1; b) Material 2**

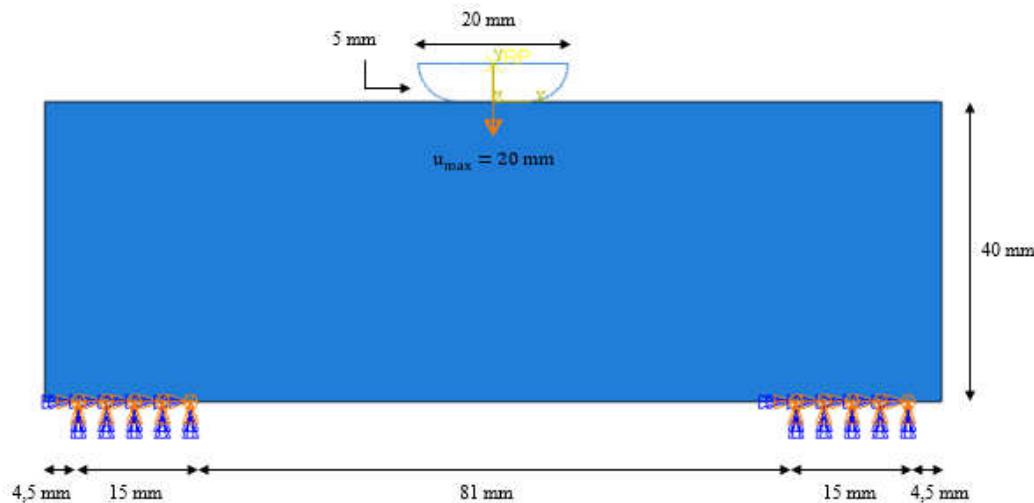


Fonte: Autor

### 6.2.2 Exemplo 4 – Proteção de caminhão modelado como uma Placa 2D

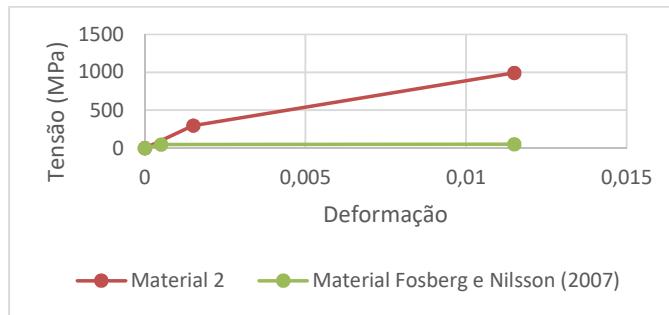
O quarto exemplo consiste na otimização de uma parte frontal inferior de proteção de um caminhão baseado no trabalho de Fosberg e Nilsson (2007) que modelaram a estrutura como uma placa engastada em dois pontos sujeita a uma carga de impacto simétrica. Por simplificação, a carga de impacto é substituída pela aplicação de um deslocamento de  $u_{max} = 20$  mm de um corpo rígido no centro da placa e as dimensões foram deixadas em uma escala menor, mantendo a proporção de largura e altura, além de ser usado o material 2 da Tabela 5 que é menos plástico. A Figura 49 ilustra o modelo para a otimização e a Figura 50 ilustra a curva de tensão e deformação entre o material usado por Fosberg e Nilsson (2007) e o material 2 da Tabela 5.

**Figura 49 - Modelagem da estrutura de proteção inferior frontal de caminhão como uma placa 2D bi apoiada**



Fonte: Autor

**Figura 50** - Curva de Tensão x Deformação seguindo o modelo elastoplástico com encruamento linear para os materiais 2 e de Fosberg e Nilsson (2007)



Fonte: Autor

O modelo é discretizado em uma malha de  $240 \times 80$  elementos de tensão plana de 4 nós, e um corpo rígido é deslocado 20 mm sobre a estrutura. A restrição de força máxima é de  $F_{\max} = 105$  kN, raio mínimo do filtro de  $r_{\min} = 3$  mm e razão de evolução de 1%.

A Figura 51(a) ilustra a topologia obtida por Fosberg e Nilsson (2007), a Figura 51(b) a topologia obtida pelo método BESO e a Figura 52 o histórico evolucionário da fração de volume, energia absorvida por unidade de volume e a força máxima de esmagamento obtidos pelo método BESO.

**Figura 51** - Topologia a) Fosberg e Nilsson (2007) e b) pelo método BESO



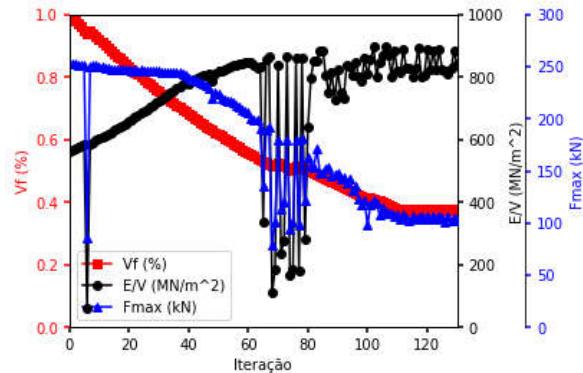
(a)



(b)

Fonte: Autor

**Figura 52 - Histórico evolucionário da fração de volume, energia absorvida por unidade de volume e a força máxima de esmagamento**

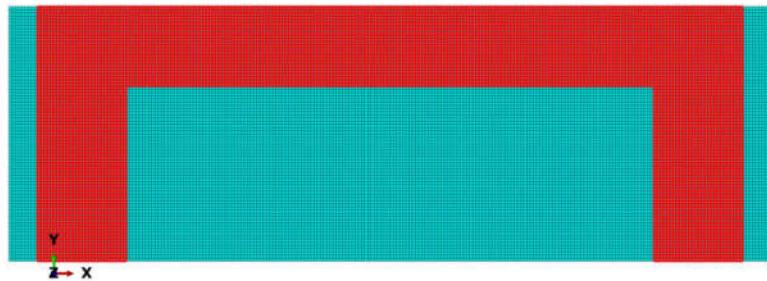


Fonte: Autor

Observando as Figura 51(a) e (b) percebe-se que as topologias obtidas pelo método utilizado por Fosberg e Nilsson (2007) e pelo método BESO são bem semelhantes, validando o método BESO. Pela Figura 52, observa-se que a estrutura atingiu o volume cerca de 37% no estágio final da evolução oscilando em uma faixa estreita de 1%. As grandes oscilações na curva de energia absorvida por unidade de volume e de força máxima se deve as não convergências da análise de elementos finitos não linear em que apenas uma fração do deslocamento foi aplicada devido as mudanças significativas da topologia na remoção de material ao longo do processo. No estágio final da otimização, os valores da função objetivo se mantém mais estáveis e na última iteração atinge o valor de 841,92 MN/m<sup>2</sup>. O mesmo ocorre com o volume e a força máxima, em que a restrição de força é alcançada atingindo valor final de 103,04 kN. Segundo o método BESO, a função objetivo é maximizar a energia de deformação por unidade de volume, enquanto que no trabalho de Fosberg e Nilsson (2007), o objetivo é encontrar uma estrutura com a Densidade de Energia Interna (Internal Energy Density – IED) por unidade de volume uniformemente distribuída. Nessa metodologia, um valor alvo de IED é dado pelo usuário para ser alcançado durante o processo de otimização e os elementos são removidos através da comparação da IED de restrição com a IED de cada elemento da estrutura. Para o material usado no trabalho de Fosberg e Nilsson (2007), a IED alvo é de 2,12 MN/m<sup>2</sup>, bem menor que o valor de 841,92 MN/m<sup>2</sup> obtido pelo método BESO utilizando um material mais resistente. O tempo de otimização foi de 14 horas e 47 minutos e 130 iterações.

Também pode-se aplicar a técnica de estimativa inicial de *design* para estruturas de absorção de energia conforme a Figura 53 em que 45% dos elementos destacados em vermelho são usados na análise de elementos finitos.

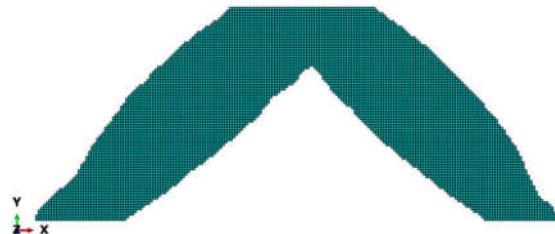
**Figura 53** - Disposição de elementos para otimização de Estimativa Inicial de *Design*



Fonte: Autor

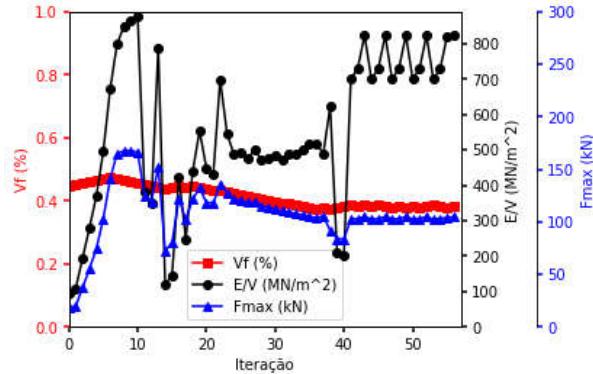
A Figura 54 ilustra a topologia obtida e a Figura 55 os valores da função objetivo, força máxima e fração de volume para o BESO *hard-kill* de estimativa inicial de *design*.

**Figura 54** - Topologia final BESO *hard-kill* Estimativa Inicial de *Design*



Fonte: Autor

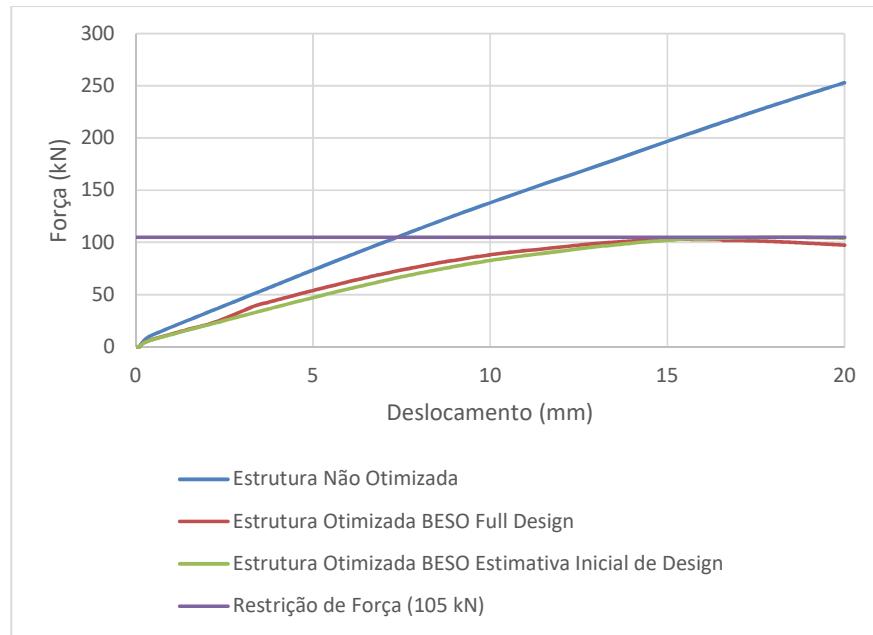
**Figura 55 - Valores da função objetivo, força máxima e volume**



Fonte: Autor

Novamente percebe-se a semelhança entre as topologias da Figura 51(a) e (b) e Figura 54. Comparando as curvas da Figura 52 e Figura 55 observa-se que foi alcançado valores semelhantes da função objetivo sendo de  $823,33 \text{ MN/m}^2$  da técnica de estimativa inicial de *design* contra  $841,92 \text{ MN/m}^2$  do *full design*, assim como a restrição de força, sendo  $104,92 \text{ kN}$  para a técnica de estimativa inicial de *design* e  $103,04 \text{ kN}$  para a *full design*. O volume inicial é de 45% e no estágio final da evolução, ele atinge 38,19% oscilando cerca de 1%, se mantendo estável. A Figura 56 ilustra a curva de Força x Deslocamento da estrutura otimizada pela técnica *full design*, estimativa inicial de *design* e da estrutura não otimizada. É visto que a estrutura não otimizada não satisfaz as restrições de força enquanto que as estruturas otimizadas não ultrapassam o valor limite de força de 105 kN ao longo de todo o deslocamento.

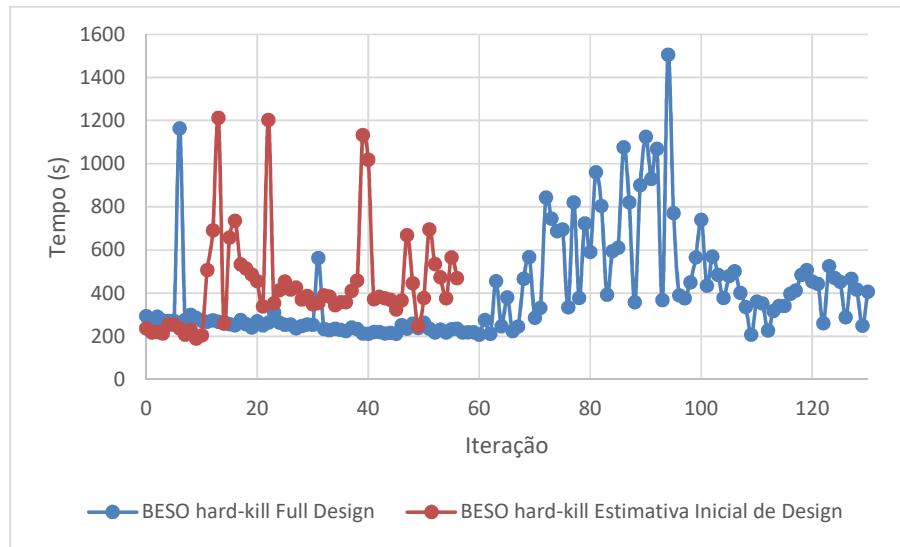
**Figura 56 - Curva Força x Deslocamento**



Fonte: Autor

A Figura 57 ilustra os tempos por iteração da técnica *full design* e estimativa inicial de *design* para a otimização da proteção de caminhão pelo método BESO *hard-kill* de estruturas de absorção de energia.

**Figura 57 - Tempo por iteração da técnica *Full Design* e Estimativa Inicial de *Design* para otimização da proteção de caminhão**

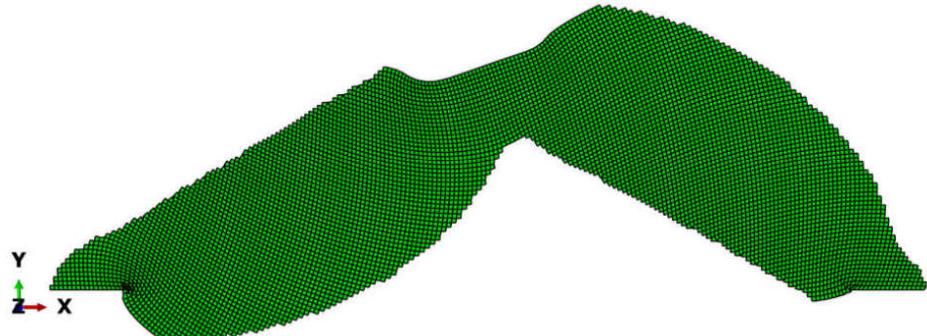


Fonte: Autor

Percebe-se pela Figura 57 que, os tempos de cada análise para a técnica de estimativa inicial de *design* são maiores que para o *full design*. Como os elementos sólidos da estrutura estão distribuídos de uma forma mais próxima da topologia final e com um menor volume, as análises de elementos finitos exigem um maior tempo de processamento, se tornando próximas dos tempos do estágio final da técnica *full design*. Porém, o número de iterações para completar a otimização pela técnica de estimativa inicial de *design* é menor do que a do *full design*, com uma diferença de 74 iterações. Dessa forma, o tempo total de otimização para a técnica de estimativa inicial de *design* é de 7 horas e 9 minutos, praticamente metade do tempo da técnica *full design*.

A Figura 58 ilustra a topologia deformada da placa de proteção de caminhão otimizada.

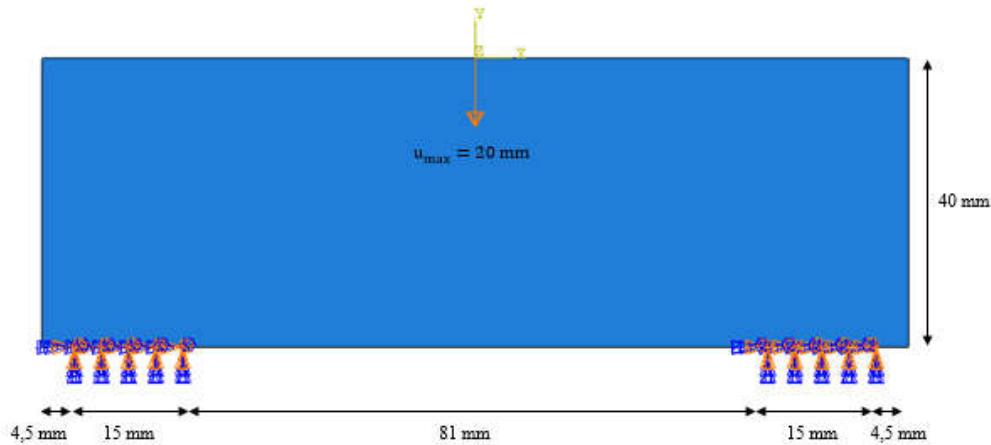
**Figura 58 - Proteção de caminhão deformada**



Fonte: Autor

É possível obter uma estrutura semelhante substituindo o deslocamento da estrutura rígida pela aplicação de um deslocamento em um único nó conforme ilustra a Figura 59.

**Figura 59 - Aplicação de deslocamento em um único nó da estrutura**



Fonte: Autor

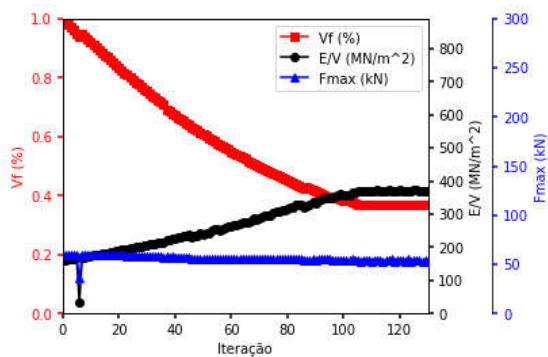
A Figura 60(a) ilustra a topologia obtida por essa mudança de carregamento. Apesar da não eliminação de alguns elementos que não fazem parte da estrutura final, a essência dos contornos da topologia se mantém se comparado com as estruturas obtidas pelo carregamento de contato da Figura 51(b) e Figura 54(a). A restrição de força para esse cenário precisou ser ajustada para 54 kN devido a menor carga de reação na primeira iteração que

cai de 252,93 kN da condição de contato da estrutura rígida para 59,63 kN com a aplicação de deslocamento em um único nó conforme observado na Figura 60(b) que ilustra os resultados obtidos para função objetivo, fração de volume e força máxima para essa condição de contorno. Comparando a Figura 52 e a Figura 60(b), percebe-se que foi obtido praticamente a mesma fração de volume, porém a função objetivo caiu para 370,80 MJ/m<sup>3</sup>, menos da metade do valor usando a estrutura rígida em contato, em razão da concentração do deslocamento em apenas um ponto e a força máxima cai em uma taxa bem menor. Percebe-se também, que nesse caso, a otimização é mais estável, havendo apenas uma não convergência na análise de elementos finitos não linear. O tempo de otimização foi de 11 horas e 25 minutos, mais rápido do que utilizando o deslocamento da estrutura rígida, devido ao não envolvimento do contato e da estabilidade em todo processo de otimização.

**Figura 60** - BESO *hard-kill* com deslocamento nodal: a) Topologia Final; b) Valores da função objetivo, força máxima e volume



(a)



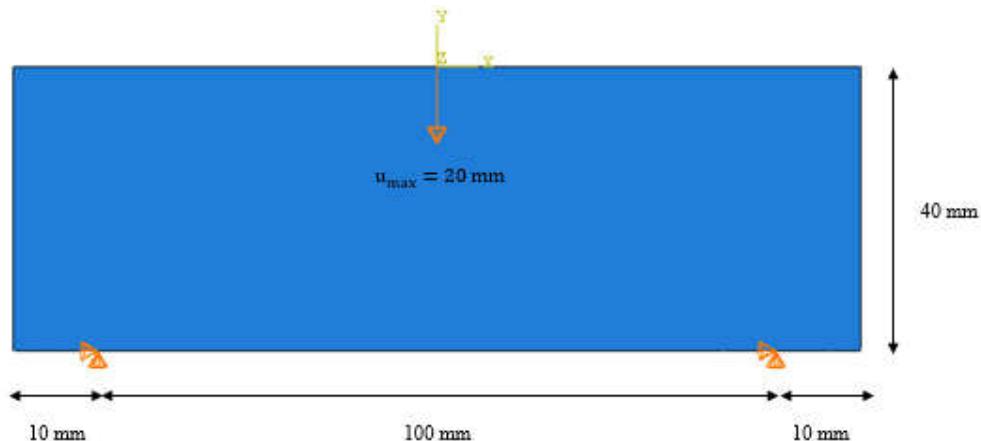
(b)

Fonte: Autor

Alterando a condição de contorno de engaste para um apoio, como na Figura 61, observa-se que a força de reação na primeira iteração diminui de 59,63 kN da condição de

engaste e deslocamento nodal para 50,57 kN. Dessa forma, a força de restrição é alterada para 40 kN para a otimização da condição de contorno de apoio. Assim, obtém-se uma topologia significativamente diferente como ilustrado na Figura 62(a).

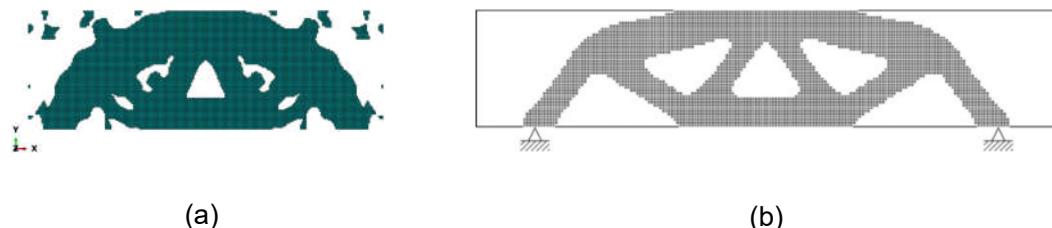
**Figura 61 - Apoio simples e deslocamento em um único nó**



Fonte: Autor

Porém, observa-se que a topologia resultante da mudança da condição de contorno se assemelha a topologia obtida por Huang et al. (2007) como ilustrado pela Figura 62(b) que também possui apoio simples e deslocamento de um único nó e também utiliza o mesmo material. A diferença está nas dimensões das duas placas. Enquanto que a estrutura de Huang et al. (2007) possui 100 mm de comprimento e 20 mm de altura, sendo 5 a relação de comprimento por altura, as dimensões desse exemplo são de 120 mm de comprimento e 40 mm de altura sendo 3 a relação de comprimento por altura.

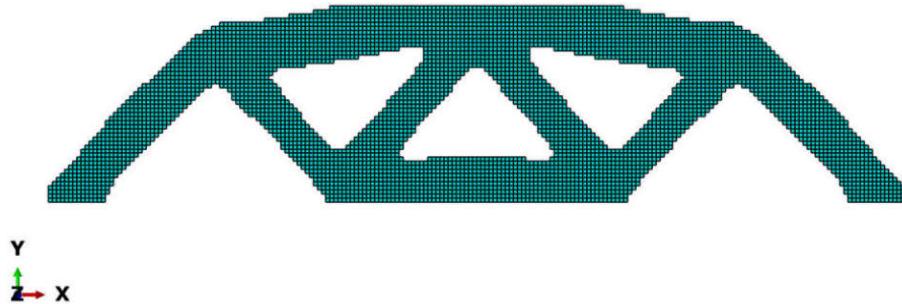
**Figura 62 - Topologia:** a) Estrutura 120x40 mm; b) Estrutura 100x20 mm de Huang et al. (2007)



Fonte: Autor

Aumentando a relação de comprimento desse exemplo de 3 para 5, para igualar a mesma proporção do exemplo de Huang et al. (2007), as novas dimensões são 120 mm de comprimento por 24 mm de altura e aplicando uma otimização nessa estrutura com uma força de restrição de 15 kN obtém-se a topologia da Figura 63.

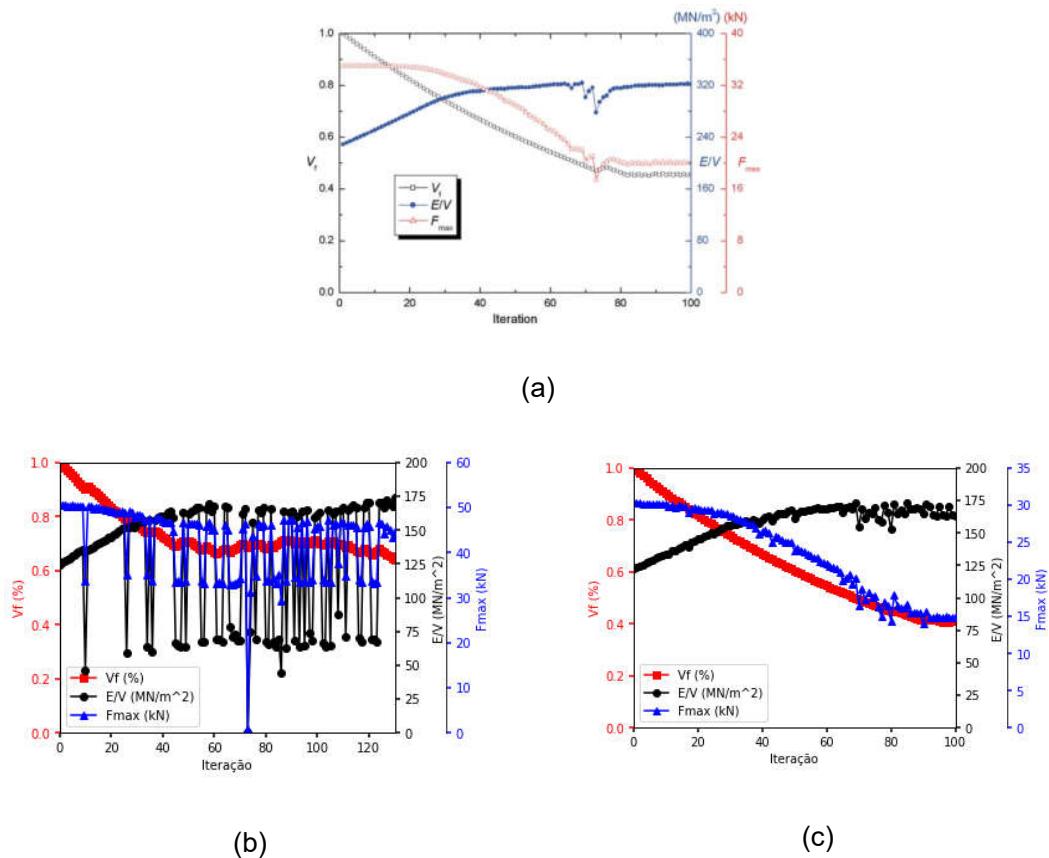
**Figura 63 - Topologia da estrutura de 120x24 mm**



Fonte: Autor

Observa-se que as topologias da Figura 62(b) e Figura 63 são praticamente idênticas constatando que é possível obter as mesmas topologias utilizando uma escala menor. A Figura 64(a), (b) e (c) ilustra a função objetivo, força máxima e fração de volume para o exemplo de Huang et al. (2007) e para as estruturas de dimensões 120x40 e 120x24, respectivamente.

**Figura 64** - Função objetivo, força máxima e restrição de volume: a) Estrutura 100x20 mm de Huang et al. (2007); b) Estrutura 120x40 mm; c) Estrutura 120x20 mm



Fonte: Autor

Pela Figura 64(a), (b) e (c) percebe-se que para a estrutura de Huang et al. (2007) que possui menores dimensões, a energia absorvida por unidade de volume final é maior do que para as estruturas de maiores dimensões possuindo valores de  $316,96 \text{ MJ/m}^3$ ,  $173,83 \text{ MJ/m}^3$  e  $163,09 \text{ MJ/m}^3$  respectivamente. Quanto a força máxima, a estrutura de Huang et al. (2007) e a de 120x24 possuem uma maior variação entre os valores final e inicial do que a estrutura de 120x40 sendo de 15,04 kN e 15,28 kN contra 5,75 kN. Observa-se também que a estrutura de 120x40 apresentou grandes variações na função objetivo e força máxima devido as não convergências de algumas análises de elementos finitos. Essas não convergências impossibilitou a estrutura de atingir valores menores de volume, ficando estacionária em cerca de 64% do seu volume total além de não satisfazer a restrição de força de 40 kN mostrando que a estrutura deve ser usada para aplicações onde a força máxima não ultrapasse 45 kN. Porém, atingiu valor final da função objetivo próximo a estrutura de 120x24 enquanto a diferença de força é maior devido a diferença na altura. Dessa forma, percebe-se que

estruturas com menor proporção de comprimento e altura tem maiores dificuldades de convergência na análise de elementos finitos e também no processo de otimização para formar a nova topologia. Como a força máxima diminui com a remoção de material, e a estrutura de 120x40 apresentou não convergências na análise de elementos finitos em uma menor variação de força máxima que as demais estruturas, conclui-se que as estruturas de menor proporção entre comprimento e altura são restritas a maiores forças de restrições e, portanto, apresentando um maior volume final. Comparando as Figura 64(a) e (c), nota-se que os valores da função objetivo e força são menores para a estrutura de 120x24. Apesar das estruturas otimizadas usarem o mesmo material, a estrutura de Huang et al. (2007) é 20% menor nas dimensões de comprimento e altura, sendo então menos resistente e, portanto, absorvendo um maior valor de energia por unidade de volume. Percebe-se pela Figura 64(b) e (c) que a estrutura 120x24 absorve praticamente a mesma quantidade de energia por unidade de volume que a estrutura de 120x40 com uma menor quantidade de material, porém com forças máximas limites diferentes. Isso significa que as estruturas têm objetivos diferentes, sendo a de 120x24 melhor em aplicações que requer absorção de energia com menores restrições de força e a de 120x40 para aplicações que requerem maiores restrições de força. A Tabela 7 contém as informações das estruturas otimizadas de dimensões 120x40, 120x24 e de Huang et al. (2007) para deslocamento nodal e apoio.

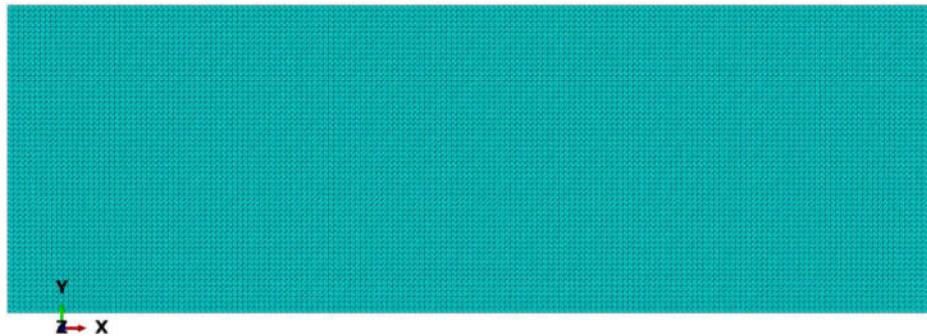
**Tabela 7 - Informações detalhadas da otimização das estruturas de 120x40, 120x24 mm e de Huang et al. (2007)**

	Iteração	Fração de Volume	Força Máxima	Força de Restrição	Função Objetivo
Estrutura Huang et al. (2007)	Primeira	100%	35,02 kN	20 kN	229,16 MJ /m <sup>3</sup>
	Última	45,7%	19,98 kN	20 kN	316,96 MJ /m <sup>3</sup>
Estrutura 120x40 mm - Apoio e Deslocamento Nodal	Primeira	100%	50,47 kN	40 kN	125,67 MJ /m <sup>3</sup>
	Última	64,02%	44,72 kN	40 kN	173,83 MJ /m <sup>3</sup>
Estrutura 120x24 mm - Apoio e Deslocamento Nodal	Primeira	100%	30,23 kN	15 kN	122,16 MJ /m <sup>3</sup>
	Última	41,31%	14,95 kN	15 kN	163,09 MJ /m <sup>3</sup>

Fonte: Autor

Usando elementos finitos triangulares de 3 nós obtém-se uma malha de 19608 elementos como ilustra a Figura 65.

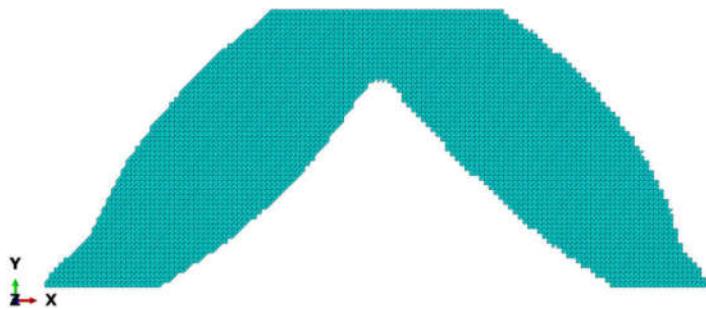
**Figura 65** - Dispositivo de proteção de caminhão em malha de elementos finitos de estado plano de tensão triangular



Fonte: Autor

Aplicando a otimização evolucionária com os mesmos parâmetros usados para a malha retangular de  $r_{\min} = 3$  mm, ER = 1%,  $F_{\max} = 105$  kN e  $U = 20$  mm obtém-se a topologia da Figura 66.

**Figura 66** - Topologia Final da proteção de caminhão com malha de elementos de estado plano de tensão triangular

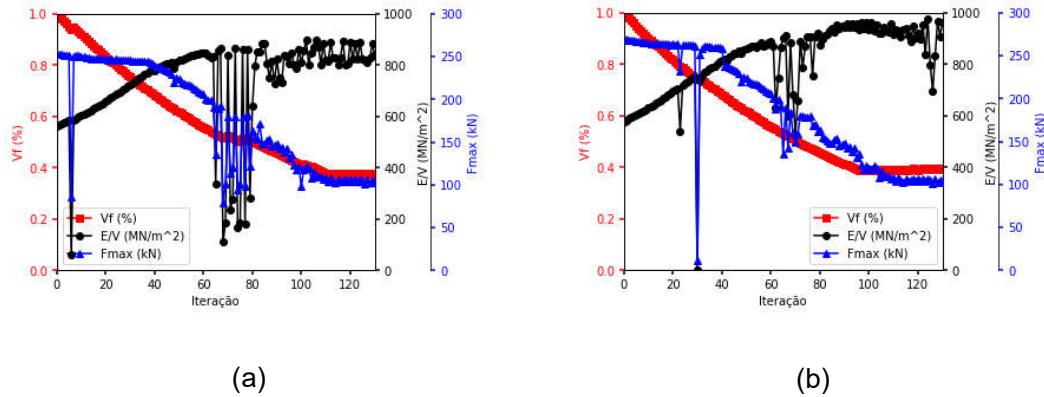


Fonte: Autor

Percebe-se que a topologia obtida pela malha triangular é a praticamente a mesma da topologia obtida pela malha retangular. As Figura 67(a) e (b) ilustram os valores da função

objetivo, força máxima e fração de volume para as estruturas otimizadas pela malha retangular e triangular, respectivamente.

**Figura 67 - Função objetivo, Força máxima e Fração de Volume ao longo das iterações para: a) Elementos Retangulares; b) Elementos Triangulares**



Fonte: Autor

Analisando as Figura 67(a) e (b) percebe-se que a otimização feita com a malha triangular foi mais estável que a malha retangular além de obter maiores valores para a função objetivo. Enquanto a estrutura otimizada com elementos retangulares atingiu um valor final de absorção de energia por unidade de volume de 841,92 MJ/m<sup>3</sup>, a estrutura otimizada com elementos triangulares atingiu um valo final de 962,63 MJ/m<sup>3</sup>. Quanto aos valores de força e volume, mantiveram-se mais próximos nos valores de 103,04 kN e 38,26% de volume para a estrutra de malha retangular e 104,09 kN e 39,60% de volume para a estrutura de malha triangular.

A Tabela 8 contém um resumo detalhado de todas as estruturas obtidas pela otimização do método BESO *hard-kill* do Exemplo 4 com as alterações de cargas e condições de contorno.

**Tabela 8 - Informações detalhadas das otimizações realizadas no Exemplo 4**

	Iteração	Fração de Volume	Força Máxima	Força de Restrição	Função Objetivo
Estrutura 120x40 mm - Engaste e Contato	Primeira	100%	252,93 kN	105 kN	560,52 MJ /m <sup>3</sup>
Estrutura 120x40 mm - Engaste Contato Estimativa Inicial de Design	Última	37,26%	103,04 kN	105 kN	841,92 MJ /m <sup>3</sup>
Estrutura 120x40 mm - Engaste Contato Elementos Triangulares	Primeira	45%	17,98 kN	105 kN	95,47 MJ/m <sup>3</sup>
Estrutura 120x40 mm - Engaste Contato Elementos Triangulares Estrutura 120x40 mm - Engaste Deslocamento Nodal	Última	38,19%	104,92 kN	105 kN	823,33 MJ /m <sup>3</sup>
Estrutura 120x40 mm - Engaste Deslocamento Nodal Apoio Deslocamento Nodal	Primeira	100%	268,93 kN	105 kN	576,97 MJ /m <sup>3</sup>
Estrutura 120x40 mm - Engaste Deslocamento Nodal Apoio Deslocamento Nodal	Última	39,60%	104,09 kN	105 kN	962,73 MJ /m <sup>3</sup>
Estrutura 120x40 mm - Engaste Deslocamento Nodal Apoio e Deslocamento Nodal	Primeira	100%	59,63 kN	54 kN	160,37 MJ /m <sup>3</sup>
Estrutura 120x40 mm - Engaste Deslocamento Nodal Apoio e Deslocamento Nodal	Última	36,76%	53,50 kN	54 kN	370,80 MJ /m <sup>3</sup>
Estrutura 100x20 mm - Apoio Deslocamento Nodal	Primeira	100%	35,02 kN	20 kN	229,16 MJ /m <sup>3</sup>
Estrutura 120x40 mm - Apoio e Deslocamento Nodal	Última	45,7%	19,98 kN	20 kN	316,96 MJ /m <sup>3</sup>
Estrutura 120x40 mm - Apoio e Deslocamento Nodal Apoio e Deslocamento Nodal	Primeira	100%	50,47 kN	40 kN	125,67 MJ /m <sup>3</sup>
Estrutura 120x24 mm - Apoio e Deslocamento Nodal	Última	64,02%	44,72 kN	40 kN	173,83 MJ /m <sup>3</sup>
Estrutura 120x24 mm - Apoio e Deslocamento Nodal	Primeira	100%	30,23 kN	15 kN	122,16 MJ /m <sup>3</sup>
Estrutura 120x24 mm - Apoio e Deslocamento Nodal	Última	41,31%	14,95 kN	15 kN	163,09 MJ /m <sup>3</sup>

Fonte: Autor

Observa-se pela Tabela 8 as diferenças e semelhanças entre as otimizações. Percebe-se a semelhança dos resultados da otimização da proteção de caminhão pelo método *hard-kill full design* e estimativa inicial de *design* para elementos de tensão plana retangular de 4 nós e triangulares de 3 nós, além das topologias serem praticamente idênticas. Alterando o carregamento para um deslocamento nodal ao invés do contato de uma estrutura rígida e mantendo a condição de contorno de engaste, é visto que a topologia final obtida é

semelhante a condição anterior, porém é observado o decaimento da força na primeira iteração de 252,93 kN para 59,63 kN em razão do deslocamento de apenas 1 nó, sendo necessário o ajuste da força limite de 105 kN para 54 kN. Mantendo o carregamento em um único nó e alterando a condição de contorno de engaste para apoio simples, foi verificado que a topologia final era significativamente diferente das anteriores, porém se aproximava da topologia obtida por Huang et al. (2007) que apresentava as mesmas condições de contorno, mesmo material, porém com dimensões e proporções de comprimento por altura diferentes. Ajustando a proporção de comprimento por altura e realizando uma nova otimização foi possível obter uma topologia praticamente idêntica a de Huang et al. (2007) com algumas pequenas diferenças na força máxima e na função objetivo devido a estrutura de Huang et al. (2007) ser 20% menor concluindo que a mudança da topologia depende das proporções das dimensões das estruturas e os valores da função objetivo e força máxima, das dimensões e das propriedades do material. Também foi verificado que estruturas com menores proporções entre comprimento e altura apresentam maiores dificuldades de convergência das análises de elementos finitos a medida que ocorre retirada de material sendo então restritas a maiores forças de restrição e, portanto, apresentando maiores volumes no final do processo.

## 7 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi explorado o método de otimização evolucionária bidirecional (BESO) e suas técnicas *soft-kill* e *hard-kill full design* e de estimativa inicial de *design* em problemas lineares e não lineares sob critério de rigidez e tensão e em estruturas de absorção de energia. Para os problemas lineares e não lineares o método evolucionário foi comparado com o método SIMP pelos exemplos 1 e 2. Já os exemplos 3 e 4 tratam dos problemas de estruturas de absorção de energia.

No exemplo 1, em que o método evolucionário foi aplicado no trabalho de Buhl et al. (2000) que utiliza o método SIMP para otimização de uma estrutura 2D, foi obtido as mesmas topologias, validando o método evolucionário. Além disso, foi observado que as técnicas BESO *soft-kill* e *hard-kill full design* e estimativa inicial de *design* fornecem os mesmos resultados, sendo a técnica *hard-kill* computacionalmente mais eficiente, principalmente para otimizações não lineares, em que as análises ficam mais rápidas em decorrência da eliminação completa dos elementos vazios que não participam da análise de elementos finitos.

O exemplo 2 consiste na estrutura 3D do exemplo 1 de maior comprimento e aplicação da carga na parte central inferior. É observado topologias diferentes na otimização linear entre o método SIMP e o evolucionário, porém com valores próximos de rigidez e volumes iguais. Transformando a estrutura 3D em 2D e aplicando uma otimização linear utilizando o módulo de otimização do software Abaqus® pelo método SIMP, foi obtido uma topologia semelhante à do método evolucionário da estrutura 3D. Além disso, a mesma topologia foi encontrada no trabalho de Jung e Gea (2004) que também utiliza o método SIMP na otimização de uma estrutura 2D com as mesmas proporções de comprimento e altura. Assim, conclui-se que o método SIMP e evolucionário na otimização da estrutura 3D, atingiu um ótimo local, apresentando rigidezes próximas e topologias diferentes. Já a técnica BESO *hard-kill* de estimativa inicial de *design*, obteve outra topologia diferente, porém com uma rigidez maior que o método SIMP e a técnica BESO *full design*, se caracterizando como uma solução ótima melhor que as demais. Para a otimização não linear, não foi possível obter uma topologia pelo método SIMP através do módulo de otimização do software Abaqus®, enquanto que o método evolucionário obteve duas topologias diferentes, pela técnica *full design* e estimativa inicial de *design*. Porém, diferente da otimização linear em que as duas técnicas resultaram em topologias bem diferentes, na otimização não linear, as topologias encontradas pelas duas técnicas não são tão diferentes, sendo a topologia da técnica *full design*, uma divisão das

hastes da topologia resultante da técnica de estimativa inicial de *design*, e também, menos rígida. Assim, tanto para a análise linear quanto não linear para uma estrutura 3D, a técnica de estimativa inicial de *design* resultou em uma solução ótima melhor que as demais, concluindo que, os métodos SIMP e BESO conseguem obter soluções ótimas locais, fornecendo os mesmos resultados em geral, porém diferentes em alguns casos 3D, em que a técnica de estimativa inicial de *design* conseguiu uma solução ótima melhor em um menor tempo. Também foi observado que as técnicas *soft-kill* e *hard-kill* forneceram os mesmos resultados nos dois exemplos, sendo a técnica *hard-kill* computacionalmente mais eficiente, principalmente em problemas não lineares com um grande número de elementos finitos, como no exemplo 2. E por último, foi mostrado nos exemplos 1 e 2 que as estruturas otimizadas não linearmente são mais rígidas que as estruturas otimizadas linearmente no ponto de força máxima, não sofrendo instabilidades. Porém, as estruturas otimizadas de forma linear, são mais rígidas na região elástica, mas sofrem instabilidades fora dessa região podendo falhar.

Para os problemas de estruturas de absorção de energia, foi usado o trabalho de Huang et al. (2007) no exemplo 3 para verificação do método BESO nessa classe de problemas, e avaliação das topologias finais de estruturas de diferentes materiais. No exemplo 4, o método foi aplicado em um dispositivo de proteção de caminhão do trabalho de Fosberg e Nilsson (2007) para comparação das duas metodologias e avaliação dos resultados para diferentes tipos de carregamentos e condições de contorno e de diferentes elementos finitos.

No exemplo 3 verificou-se que o método foi implementado corretamente através da comparação dos resultados do trabalho de Huang et al. (2007) que utilizam o mesmo método. Além disso, foi obtido a mesma topologia para os dois materiais, porém, com valores de energia absorvida por unidade de volume e força máxima mais baixas para o material 1 devido as diferenças das propriedades dos materiais. Foi verificado também, que o tempo da otimização da estrutura do material 1 foi maior, concluindo que materiais mais plásticos demandam maior esforço computacional para a solução das equações de equilíbrio nas análises de elementos finitos. Assim conclui-se que as propriedades do material não interferem diretamente na topologia resultante, e que a escolha do material é um parâmetro de projeto que deve ser analisado e escolhido de acordo com as necessidades do projeto. Sendo assim, os parâmetros de restrição de força e deslocamento da otimização dependem do tipo de material que será escolhido para atender as necessidades de projeto.

No exemplo 4, foi verificado que o método BESO obteve a mesma topologia do método utilizado no trabalho de Fosberg e Nilsson (2007) para otimização da parte frontal inferior de proteção de caminhão utilizando um material menos plástico e uma escala menor entre comprimento e altura com duração de 14 horas e 47 minutos e 130 iterações, validando o

método BESO para estruturas de absorção de energia. A técnica de estimativa inicial de design conseguiu obter a mesma topologia em metade do tempo, com duração de 7 horas e 9 minutos e 58 iterações se mostrando mais uma vez uma opção eficiente. Também foi demonstrado que o método funciona com elementos diferentes obtendo a mesma topologia utilizando elementos de estado plano de tensão triangulares de 3 nós. A alteração de cargas e condições de contorno resultaram em uma mudança nas forças máximas, e esse parâmetro de restrição precisou ser ajustado para aplicação da otimização. Foi verificado a obtenção de uma estrutura semelhante para a carga de deslocamento nodal e engaste e uma topologia diferente para a carga de deslocamento nodal e apoio simples, em que a estrutura tinha dificuldades de convergência e atingia um volume final maior. Dessa forma, foi preciso uma mudança nas dimensões em que a altura diminui para que a proporção de comprimento e altura ficasse maior e a estrutura pudesse convergir em uma melhor topologia final. Assim, conclui-se que a mudança de cargas e condições de contorno acarreta mudanças de forças máximas e as forças de restrição precisam ser ajustadas para a aplicação da otimização, da mesma forma para diferentes materiais. Foi visto também que a proporção de comprimento e altura influenciam diretamente na topologia final, assim como ocorreu no exemplo 2. Assim, as simplificações das condições de contorno, escolha de material e dimensões do domínio de *design* devem estar em sinergia com os objetivos do projeto da estrutura para aplicação da otimização analisando a melhor forma de modelagem da estrutura afim de obter a melhor topologia.

## REFERÊNCIAS

- A.G.M. Michell M.C.E. (1904) LVIII. The limits of economy of material in frame-structures, **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, 8:47, 589-597, DOI: 10.1080/14786440409463229.
- ALBERDI, Ryan; KHANDELWAL, Kapil. Topology optimization of pressure dependent elastoplastic energy absorbing structures with material damage constraints. **Finite Elements in Analysis and Design**, [S. I.], ano 2017, v. 133, p. 42-61, 15 mar. 2017.
- ALLAIRE, Grégoire; JOUVE, François; TOADER, Anca-Maria. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. **Journal of Computational Physics**, [S. I.], ano 2004, v. 194, p. 363-393, 10 fev. 2004.
- ALVES FILHO, Avelino. Elementos Finitos. **A base da tecnologia CAE**: Análise não Linear. 1. ed. São Paulo: Érica, 2012. 320 p. Citação: Alves Filho (2012) ou (ALVES FILHO, 2012).
- BAHRAMIAN, Nasim; KHALKHALI, Abolfazl. Crashworthiness topology optimization of thin-walled square tubes, using modified Bidirectional Evolutionary Structural Optimization approach. **Thin-Walled Structures**, [S. I.], ano 2020, v. 147, p. 1-11, 28 jun. 2020.
- BENDSØE, M. Optimal shape design as a material distribution problem. **Structural Optimization**, [s. l.], v. 1, p. 193-202, 1989.
- BENDSØE, M. P.; GUEDES, J. M.; PLAXTON, S.; TAYLOR, J. E. Optimization of structure and material properties for solids composed of softening material. **Int. J. Solids Struct**, [s. l.], v. 33, p. 1799-1813, 1996.
- BENDSØE, Martin P.; SIGMUND, Ole. **Topology Optimization**: Theory, Methods and Applications. Berlin: Springer, 2003. ISBN 3-540-42992-1.
- BENDSØE, Martin Philip; KIKUCHI, Noboru. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [S. I.], ano 1988, v. 71, p. 197-224, 28 mar. 1988.
- BRUNS, T. E.; TORTORELLI, D. A. An element removal and reintroduction strategy for the topology optimization of structures and compliant mechanisms. **Int. J. Numer. Meth. Engng**, [s. l.], v. 57, p. 1413-1430, 2003.
- BUHL, T.; PEDERSEN, C. B. W.; SIGMUND, O. Stiffness design of geometrically nonlinear structures using topology optimization. **Struct. Multidisc. Optim.**, [s. l.], v. 19, p. 93-104, 2000.
- CHENG, K.; OLHOFF, N. An investigation concerning optimal design of solid elastic plates. **International Journal of Solids and Structures**, [s. l.], v. 17, p. 305-323, 1981.
- CHENG, K.; OLHOFF, N. Regularized formulation for optimal design of axisymmetric plates. **International Journal of Solids and Structures**, [s. l.], v. 18, p. 153-169, 1982.
- CHU, D.; XIE, Y.; HIRA, A.; STEVEN, G. Evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints. **Finite Elements in Analysis and Design**, [s. l.], v. 21, p. 239-251, 1996.

- DA, D.; XIA, L.; LI, G.; HUANG, X. Evolutionary topology optimization of continuum structures with smooth boundary representation. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 57, p. 2143-2159, 2018a.
- DA, D.; YVONNET, J.; XIA, L.; LI, G. Topology optimization for maximizing the fracture resistance of quasi-brittle composites. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [s. l.], v. 115, p. 604-626, 2018b.
- DEATON, J; GRANDHI, R. A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: Post 2000. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S. l.], ano 2014, v. 49, p. 1-38, 4 jul. 2014.
- DÍAZ, A.; SIGMUND, O. Checkerboard patterns in layout optimization. **Structural optimization**, [s. l.], v. 10, p. 40-45, 1995.
- ESCHENAUER, H.; KOBELEV, V.; SCHUMACHER, A. Bubble method for topology and shape optimization of structures. **Structural optimization**, [s. l.], v. 8, p. 42-51, 1994.
- FOSBERG, Jimmy; NILSSON, Larsgunnar. Topology optimization in crashworthiness design. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 33, p. 1-12, 2007.
- GEA, H. C.; LUO, J. Topology optimization of structures with geometrical nonlinearities. **Comput. Struct**, [s. l.], v. 79, p. 1977-1985, 2001.
- GHABRAIE, K. An improved soft-kill BESO algorithm for optimal distribution of single or multiple material phases. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 52, p. 773-790, 2015.
- HUANG, X.; XIE, Y. A further review of ESO type methods for topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 41, p. 671-683, 2010b.
- HUANG, X.; XIE, Y. M. A new look at ESO and BESO optimization methods. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 35, p. 89-92, 2008a.
- HUANG, X.; XIE, Y. M. Bi-directional evolutionary structural optimization for structures with geometrical and material nonlinearities. **AIAA J**, [s. l.], v. 45, p. 308-313, 2007b.
- HUANG, X.; XIE, Y. M. Bi-directional evolutionary topology optimization of continuum structures with one or multiple materials. **Computational Mechanics**, [s. l.], v. 43, p. 393-401, 2009.
- HUANG, X.; XIE, Y. M. Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method. **Finite Elements in Analysis and Design**, [S. l.], ano 2007a, v. 43, p. 1039-1049, 20 set. 2007.
- HUANG, X.; XIE, Y. M. Evolutionary topology optimization of continuum structures including design-dependent self-weight loads. **Finite Elem Anal Des**, [s. l.], v. 47, p. 942-948, 2011.
- HUANG, X.; XIE, Y. M. Evolutionary topology optimization of continuum structures with an additional displacement constraint. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 40, p. 409-416, 2010c.

- HUANG, X.; XIE, Y. M. **Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures: Methods and Applications.** [S. I.]: John Wiley & Sons, 2010a. 223 p.
- HUANG, X.; XIE, Y. M. Optimal design of periodic structures using evolutionary topology optimization. **Struct Multidiscip Optim.**, [s. l.], v. 36, p. 597-606, 2008b.
- HUANG, X.; XIE, Y. M. Topology optimization of nonlinear structures under displacement loading. **Engng. Struct.**, [s. l.], v. 30, p. 2057-2068, 2008c.
- HUANG, X.; XIE, Y. M.; LU, G. Topology optimization of energy absorbing structures. **Inter. J. Crashworthiness**, [s. l.], v. 12, p. 663-675, 2007.
- HUANG, X.; ZUO, Z.; XIE, Y. M. Evolutionary topological optimization of vibrating continuum structures for natural frequencies. **Comput Struct**, [s. l.], v. 88, p. 357-364, 2010.
- JUNG, Daeyoon; GEA, Hae Chang. Topology optimization of nonlinear structures. **Finite Elements in Analysis and Design**, [s. l.], v. 40, p. 1417-1427, 2004.
- KIM, H.; GARCIA, M. J.; QUERIN, O. M.; STEVEN, G. P.; XIE, Y. M. Introduction of fixed grid in evolutionary structural optimisation. **Engineering Computations**, [s. l.], v. 17, p. 427-439, 2000a.
- KIM, H.; QUERIN, O. M.; STEVEN, G. P.; XIE, Y. M. A method for varying the number of cavities in an optimized topology using evolutionary structural optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 19, p. 140-147, 2000b.
- KIM, H.; QUERIN, O. M.; STEVEN, G. P.; XIE, Y. M. Determination of an optimal topology with a predefined number of cavities. **AIAA J**, [s. l.], v. 40, p. 739-744, 2002a.
- KIM, H.; QUERIN, O. M.; STEVEN, G. P.; XIE, Y. M. Improving efficiency of evolutionary structural optimization by implementing fixed grid mesh. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 24, p. 441-448, 2002b.
- KOHN, R. V.; STRANG, G. Optimal Design and Relaxation of Variational Problem, **Comm. Pure. Appl. Math.**, 39, p. 113-137, 139-182, 353-377, 1986.
- KONGWAT, Suphanut; HASEGAWA, Hiroshi. Optimization on mechanical structure for material nonlinearity based on proportional topology method. **Journal of Advanced Simulation in Science and Engineering**, [S. l.], ano 2019, v. 6, p. 354-366, 31 ago. 2019.
- KOOK, J. Evolutionary topology optimization for acoustic-structure interaction problems using a mixed u/p formulation. **Mechanics Based Design of Structures and Machines**, [s. l.], v. 47, p. 356-374, 2019.
- LI, Lei; ZHANG, Guodong; KHANDELWAL, Kapil. Topology optimization of energy absorbing structures with maximum damage constraint. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [S. l.], ano 2017, v. 112, p. 737-775, 10 fev. 2017.
- LI, Q.; STEVEN, G. P.; XIE, Y. M. A simple checkerboard suppression algorithm for evolutionary structural optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 22, p. 230-239, 2001.
- LI, Q.; STEVEN, G.; XIE, Y.; QUERIN, O. M. Evolutionary topology optimization for temperature reduction of heat conducting fields. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, [s. l.], v. 47, p. 5071-5083, 2004.

- LI, Y.; XIE, Y. M. Evolutionary topology optimization for structures made of multiple materials with different properties in tension and compression. **Composite Structures**, [s. l.], v. 259, p. 1-11, 2021.
- MANICKARAJAH, D.; XIE, Y.; STEVEN, G. An evolutionary method for optimization of plate buckling resistance. **Finite Elements in Analysis and Design**, [s. l.], v. 29, p. 205-230, 1998.
- MAYER, R. R.; KIKUCHI, N.; SCOTT, R. A. Application of topological optimization techniques to structural crashworthiness. **Int J Numer Methods Eng**, [s. l.], v. 39, p. 1383-1403, 1996.
- NABAKI, Khodamorad; SHEN, Jianhu; HUANG, Xiaodong. Evolutionary topology optimization of continuum structures considering fatigue failure. **Materials and Design**, [S. l.], ano 2019, v. 166, p. 1-13, 5 jan. 2019.
- NISHIWAKI, Shinji; TERADA, Kenjiro. Advanced topology optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [S. l.], v. 113, p. 1145-1147, 20 set. 2018.
- PEDERSEN, C. B. W. Crashworthiness design of transient frame structures using topology optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [s. l.], v. 193, p. 653-678, 2004.
- PEDERSEN, C. B. W.; BUHL, T. E.; SIGMUND, O. Topology synthesis of large-displacement compliant mechanisms. **Int. J. Numer. Meth. Engng**, [s. l.], v. 50, p. 2683-2705, 2001.
- PEDERSEN, P. Some general optimal design results using anisotropic, power law nonlinear elasticity. **Struct. Optim**, [s. l.], v. 15, p. 73-80, 1998.
- PICELLI, R.; VICENTE, W.; PAVANELLO, R.; XIE, Y. M. Bi-directional evolutionary structural optimization for design-dependent fluid pressure loading problems. **Eng Optim**, [s. l.], v. 47, p. 1324-1342, 2015.
- PROOS, K. A.; STEVEN, G. P.; QUERIN, O. M; XIE, Y. M. Stiffness and inertia multicriteria evolutionary structural optimisation. **Engineering Computations**, [s. l.], v. 18, p. 1031-1054, 2001.
- QUERIN, O. M.; STEVEN, G. P.; XIE, Y. M. Evolutionary structural optimisation using an additive algorithm. **Finite elements in analysis and design**, [s. l.], v. 34, p. 291-308, 2000a.
- QUERIN, O. M.; YOUNG, V.; STEVEN, G. P.; XIE, Y. M. Computational efficiency and validation of bi-directional evolutionary structural optimisation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [s. l.], v. 189, p. 559-573, 2000b.
- RADMAN, A. Combination of BESO and harmony search for topology optimization of microstructures for materials. **Applied Mathematical Modelling**, [s. l.], v. 90, p. 650-661, 2021.
- REN, G. et al. Underground excavation shape optimization using an evolutionary procedure. **Computers and Geotechnics**, [s. l.], v. 32, p. 122-132, 2005.

RODRIGUES, H.; FERNANDES, P. Topology Optimization of Linear Elastic Structures Subjected to Thermal Loads. **Topology Design of Structures**, [s. l.], v. 227, p. 437-450, 1993.

ROZVANY, G. Grillages of maximum strength and maximum stiffness. **International Journal of Mechanical Sciences**, [s. l.], ano (1972a), v. 14, p. 651-666, 20 fev. 1972.

ROZVANY, G. I.; QUERIN, O. M. Combining ESO with rigorous optimality criteria. **Int J Veh Des**, [s. l.], v. 28, p. 294-299, 2002.

ROZVANY, G. Optimal load transmission by flexure. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [S. l.], ano (1972b), v. 1, p. 253-263, 10 dez. 1972.

ROZVANY, G.; PRAGER, W. Optimal design of partially discretized grillages. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, [S. l.], ano 1976, v. 24, p. 125-136, 14 out. 1976.

ROZVANY, G.; ZHOU, M. The COC algorithm, part I: Cross-section optimization or sizing. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [S. l.], ano 1991, v. 89, p. 281-308, 1 fev. 1991.

ROZVANY, G.; ZHOU, M.; BIRKER, T. Generalized shape optimization without homogenization. **Structural Optimization**, [s. l.], v. 4, p. 250-252, 1992.

SETHIAN, J. A; WIEGMANN, Andreas. Structural Boundary Design via Level Set and Immersed Interface Methods. **Journal of Computational Physics**, [S. l.], ano 2000, v. 163, p. 489-528, 20 set. 2000.

SHOBEIRI, V. Bidirectional evolutionary structural optimization for nonlinear structures under dynamic loads. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [s. l.], v. 121, p. 888-903, 2020.

SIGMUND, O.; PETERSSON, J. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 16, p. 68-75, 1998.

SILVA, E. C. N. Técnicas de Otimização Aplicadas no Projeto de Peças Mecânicas, Apostila. **Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos**, Escola Politécnica da USP, São Paulo: [s. n.], 2001.

SIMONETTI, Hélio Luiz; ALMEIDA, Valério S.; NEVES, Francisco de Assis das. Smoothing evolutionary structural optimization for structures with displacement or natural frequency constraints. **Engineering Structures**, [S. l.], ano 2018, v. 163, p. 1-10, 22 fev. 2018.

SOKOLOWSKI, J.; ZOCHOWSKI, A. On the Topological Derivative in Shape Optimization. **SIAM Journal on Control and Optimization**, [s. l.], v. 37, p. 1222-1251, 1999.

SOTO, C. A. Structural topology optimization for crashworthiness. **International journal of crashworthiness**, [s. l.], v. 9, p. 277-283, 2004.

WANG, Michael Yu; WANG, Xiaoming; GUO, Dongming. A level set method for structural topology optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [S. l.], ano 2003, v. 192, p. 227-246, 3 jan. 2003.

- XIA, L.; DA, D.; YVONNET, J. Topology optimization for maximizing the fracture resistance of quasi-brittle composites. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, [s. l.], v. 332, p. 234-254, 2018b.
- XIA, L.; FRITZEN, F.; BREITKOPF, P. Evolutionary topology optimization of elastoplastic structures. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 55, p. 569-581, 2017.
- XIA, L.; XIA, Q.; HUANG, X.; XIE, Y. M. Bi-directional Evolutionary Structural Optimization on Advanced Structures and Materials: A Comprehensive Review. **Archives of Computational Methods in Engineering**, [s. l.], v. 25, p. 437-478, 2018a.
- XIA, L.; ZHANG, L.; XIA, Q.; SHI, T. Stress-based topology optimization using bi-directional evolutionary structural optimization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [s. l.], v. 333, p. 356-370, 2018c.
- XIE, Y.; STEVEN, G. Evolutionary structural optimization for dynamic problems. **Computers and Structures**, [s. l.], v. 58, p. 1067-1073, 1996.
- XIE, Yi Min; STEVEN, Grand P. A simple evolutionary procedure for structural optimization. **Computers & Structures**, [S. l.], ano 1993, v. 49, p. 885-896, 6 jul. 1992.
- XU, B.; HAN, Y.; ZHAO, L. Bi-directional evolutionary topology optimization of geometrically nonlinear continuum structures with stress constraints. **Applied Mathematical Modelling**, [s. l.], v. 80, p. 771-791, 2020.
- YANG, X. Y.; XIE, Y. M.; LIU, J. S.; PARKS, G. T.; CLARKSON, P. J. Perimeter control in the bidirectional evolutionary optimization method. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 24, p. 430-440, 2002.
- YANG, X. Y.; XIE, Y. M.; STEVEN, G. P.; QUERIN, O. M. Bidirectional evolutionary method for stiffness optimization. **AIAA Journal**, [s. l.], p. 1483-1488, 1999.
- YUGE, K.; KIKUCHI, N. Optimization of a frame structure subjected to a plastic deformation. **Struct. Multidisc. Optim.**, [s. l.], v. 10, p. 197-208, 1995.
- ZHAO, F.; XIA, L.; LAI, W.; XIA, Q.; SHI, T. Evolutionary topology optimization of continuum structures with stress constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 59, p. 647-658, 2019a.
- ZHAO, L.; XU, B.; HAN, Y.; XI, Y. M. Topology optimization of dynamic stress response reliability of continuum structures involving multi-phase materials. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 59, p. 851-876, 2019b.
- ZHOU, M.; ROZVANY, G. On the validity of ESO type methods in topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 21, p. 80-83, 2001.
- ZHOU, M.; SHYY, Y. K.; THOMAS, H. L. Checkerboard and minimum member size control in topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 21, p. 152-158, 2001.
- ZHOU, M.; ROZVANY, G. The COC algorithm, Part II: Topological, geometrical and generalized shape optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [S. l.], ano 1991, v. 89, p. 309-336, 1 fev. 1991.

ZHU, Ji-Hong; ZHANG, Wei-Hong; XIA, Liang. Topology Optimization in Aircraft and Aerospace Structures Design. **Archives of Computational Methods in Engineering**, [S. l.], ano 2016, v. 23, p. 595-622, 14 abr. 2015.

ZUO, Z. H.; XIE, Y. M. Evolutionary topology optimization of continuum structures with a global displacement control. **Comput Aided Des**, [s. l.], v. 56, p. 58-67, 2014.

ZUO, Zhi Hao; XIE, Yi Min. A simple and compact Python code for complex 3D topology optimization. **Advances in Engineering Software**, [s. l.], v. 85, p. 1-11, 2015.

## APÊNDICE

```

import math,customKernel

fromabaqus import getInput,getInputs

fromodbAccess import openOdb

fromabaqusConstants import *

fromtimeit import default_timer as timer

## Função para execução da análise de elementos Finitos, cálculo do número de sensibilidade
e da função objetivo

def FEA(lIter,Mdb,Xe,Ae,Nv,Fh,Elmts):

    try:

        Mdb.Job('Design_Job'+str(lIter),'Model-1').submit()

        Mdb.jobs["Design_Job"+str(lIter)].waitForCompletion()

    except AbaqusException, message:

        print "Error occurred: ", message

        sys.exit(1)

    opdb = openOdb('Design_Job'+str(lIter)+'.odb')

    w = opdb.steps['Step-1'].historyRegions['Assembly
ASSEMBLY'].historyOutputs['ALLWK'].data[-1][1]

    seng = opdb.steps['Step-1'].frames[-1].fieldOutputs['SENER'].values

    sensi_el = {}

    for en in seng: sensi_el[en.elementLabel] = en.data

    seng = opdb.steps['Step-1'].frames[-1].fieldOutputs['PENER'].values

```

```

sensi_pl = {}

for en in seng: sensi_pl[en.elementLabel] = en.data

for en in seng:

    Ae[en.elementLabel] = (Xe[en.elementLabel]/len(Xe)) / Nv - (sensi_el[en.elementLabel]
+ sensi_pl[en.elementLabel]) / w

    obj = (w / (Nv * len(Elmts) * 0.25)) * 1000**2

    ft = {}

    fmax = []

    seng = opdb.steps['Step-1'].frames

    for en in seng:

        sing = en.fieldOutputs['RT'].values

        for yn in sing: ft[yn.nodeLabel] = yn.magnitude

        fmax.append(max(ft.values()))

    Fh.append(max(fmax))

    opdb.close()

    return obj

## Função para acessar as distâncias entre centros dos elementos calculadas separadamente
pela função preFlt(Rmin,Elmts,Nds,Fm)

def preFm():

    mddb = openMdb('Filtred_design.cae')

    fmm = mddb.customData.History['fmd']

    mddb.close()

    return fmm

```

```

## Função de cálculo das distâncias entre centros dos elementos

def preFlt(Rmin,Elmts,Nds,Fm):

    import numpy as np

    # Calculo das coordenadas do centro do elemento

    elm, c0 = np.zeros(len(Elmts)), np.zeros((len(Elmts),3))

    for i in range(len(elm)):

        elm[i] = Elmts[i].label

        nds = Elmts[i].connectivity

        for nd in nds: c0[i] = np.add(c0[i],np.divide(Nds[nd].coordinates,len(nds)))

    # Fator de peso

    for i in range(len(elm)):

        Fm[elm[i]] = [[],[]]

        for j in range(len(elm)):

            dis = np.sqrt(np.sum(np.power(np.subtract(c0[i],c0[j]),2)))

            if dis<Rmin:

                Fm[elm[i]][0].append(elm[j])

                Fm[elm[i]][1].append(Rmin - dis)

        Fm[elm[i]][1] = np.divide(Fm[elm[i]][1],np.sum(Fm[elm[i]][1]))

## Função de aplicação do filtro

def fltAe(Ae,Fm):

    raw = Ae.copy()

    for el in Fm.keys():

        Ae[el] = 0.0

```

```

for i in range(len(Fm[el][0])): Ae[el]+=raw[Fm[el][0][i]]*Fm[el][1][i]

## Função BESO

def BESO(Vf,Xe,Ae,Part,Elmts):

    lo, hi = min(Ae.values()), max(Ae.values())

    tv = Vf*len(Elmts)

    while math.fabs((hi-lo)/hi) > 1.0e-5:

        th = (lo+hi)/2.0

        for key in Xe.keys(): Xe[key] = 1.0 if Ae[key]<th else 0.0

        if sum(Xe.values())-tv>0: hi = th

        else: lo = th

    # Rotulando elementos como sólidos ou vazios

    vlb, slb = [], []

    for el in Elmts:

        if Xe[el.label] == 1.0: slb.append(el.label)

        else: vlb.append(el.label)

    for el in Elmts:

        if Xe[el.label] != 1.0:

            Ae[el.label] = 0.0

    # Atribuindo elementos sólidos e vazios a cada seção

    Part.SectionAssignment(Part.SetFromElementLabels('ss',slb),'sldSec')

    Part.SectionAssignment(Part.SetFromElementLabels('vs',vlb),'voidSec')

## ===== MAIN PROGRAM =====

if __name__ == '__main__':

```

```

# Definir parâmetros e entradas

pars = (('MaxForce:', '1'), ('Rmin:', '1'), ('ER:', '0.02'))

mf,rmin,ert = [float(k) if k!=None else 0 for k in getInputs(pars,dialogTitle='Parameters')]

if mf<=0 or rmin<0 or ert<=0: sys.exit()

fm = preFm()

mddb = openMdb(getInput('Input CAE file:', default='Test.cae'))

# Inicialização do Design

part = mddb.models['Model-1'].parts['Part-1']

elmts, nds = part.elements, part.nodes

oh, vh, fh, tfea, ta, ch = [], [], [], [], [], []

xe, ae, oae = {}, {}, {}

for el in elmts: xe[el.label] = 1.0

# Iterações de otimização

change, iter, obj = 1, -1, 0

inicio_1 = timer()

while iter < 130:

    iter += 1

    if iter == 0:

        vh.append(sum(xe.values()) / len(xe))

        nv = vh[0]

        # Rodar função FEA

        inicio_2 = timer()

        oh.append(FEA(iter, mddb, xe, ae, nv, fh, elmts))

```

```

final_2 = timer()

difer_2 = final_2 - inicio_2

tfea.append(difer_2)

# Aplicação do filtro e cálculo da média de sensibilidade entre a iteração atual e a
iteração anterior

if rmin > 0: fltAe(ae, fm)

if iter > 0: ae = dict([(k, (ae[k] + oae[k]) / 2.0) for k in ae.keys()])

oae = ae.copy()

# Otimização BESO

if fh[-1] > mf:

    nv = vh[-1] * (1.0 - ert)

else:

    nv = vh[-1] * (1.0 + ert)

BESO(nv, xe, ae, part, elmts)

a = mddb.models['Model-1'].rootAssembly

region = a.instances['Part-1-1'].sets['vs']

mddb.models['Model-1'].ModelChange(name='Int-2', createStepName='Step-1',
                                    region=region, regionType=ELEMENTS, activeInStep=False,
                                    includeStrain=False)

else:

    vh.append(sum(xe.values()) / len(xe))

    nv = vh[-1]

# Rodar função FEA

```

```

inicio_2 = timer()

oh.append(FEA(iter, mddb, xe, ae, nv, fh, elmts))

final_2 = timer()

difer_2 = final_2 - inicio_2

tfea.append(difer_2)

# Aplicação do filtro e cálculo da média de sensibilidade entre a iteração atual e a
iteração anterior

if rmin>0: fltAe(ae,fm)

if iter > 0: ae=dict([(k,(ae[k]+oae[k])/2.0) for k in ae.keys()])

oae = ae.copy()

# Otimização BESO

if fh[-1] > mf:

    nv = vh[-1] * (1.0 - ert)

else:

    nv = vh[-1] * (1.0 + ert)

BESO(nv, xe, ae, part, elmts)

if iter>10: change=math.fabs((sum(oh[iter-4:iter+1])-sum(oh[iter-9:iter-4]))/sum(oh[iter-9:iter-4]))

ch.append(change)

final_1 = timer()

difer_1 = final_1 - inicio_1

ta.append(difer_1)

# Salvando resultados

```

```
mddb.customData.History = {'vol':vh,'obj':oh,'tempfea':tfea,'tempa':ta,'change':ch,'force':fh}  
mddb.saveAs('Final_design.cae')
```